Miscellanea

5591

Inw

Kat

Anleitung zur Berechnung

der

Leibrenten und Anwartschaften.

Von

Simon Spitzer,

Professor für Merkantilrechnen an der Wiener Handels-Academie.

WIEN.

Druck und Verlag von Garl Gerold's Sohn.

1860.

Dem

Director der Wiener Handels-Akademie

Herrn

FRANZ HAUKE

widmet diese Schrift

als Zeichen wahrer Hochachtung und Verehrung

Der Verfasser.

Vorwort.

Meine Stellung als Professor für kaufmännisches Rechnen an der Wiener Handels-Akademie legt mir unter andern auch die Pflicht auf, Vorträge über jene Rechnungen zu halten, die sich bei Lebensversicherungen darbieten. Ich hätte mir nun wohl die Mühe ersparen gekonnt, dieses Büchlein, das meinen Vorträgen zu Grunde liegen soll, zu schreiben, da so viele vortreffliche Bücher über diesen Gegenstand bereits vorhanden sind, und ich ja eigentlich Neues gar nicht zu sagen wusste.

Ich erwähne nur

Tetens: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, 1785.

Meyer: Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, 1823.

Brune: Berechnung der Lebensrenten und Anwartschaften, 1820 (ganz vorzüglich in Anordnung und Klarheit).

Littrow: Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungs-Anstalten, 1832 (mehr populär gehalten, aber sehr lesenswerth. Viele der unserem Buche gegebenen Tabellen wurden hieraus abgedruckt).

Bremiker: Das Risico bei Lebensversicherungen, 1859.

Aber ein Theil der Bücher, die ich kannte, waren zu ausführlich, ein anderer Theil wieder zu kurz; ob ich die rechte Mitte getroffen habe, das überlasse ich der Beurtheilung Anderer.

Anspruchslos übergebe ich nun dieses Büchlein der Oeffentlichkeit; wird es dazu beitragen, richtige und klare Begriffe über das Wesen der Lebensversicherungen zu verbreiten, so ist der Zweck, den ich bei Abfassung desselben vor Augen hatte, erreicht.

Simon Spitzer.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung.

1. Capitel.

2. Capitel.

3. Capitel.

4. Capitel.

II. Abschnitt.

Von den Renten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer Person abhängen.

1. Capitel.

2. Capitel.

3. Capitel.

III. Abschnitt.

Von den Renten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode zweier Personen abhängen.

1. Capitel.

I. Abschnitt.

Einleitung.

1. Capitel.

Zinses-Zinsen-Rechnung.

Wird der Zins, den ein Capital von fl. 100 in einem Jahre trägt, mit p bezeichnet, so nennt man p die Procente. Ein doppelt oder dreifach so grosses Capital trägt in einem Jahre auch doppelt oder dreifach so viele Zinsen, als das einfache Capital trägt; mit andern Worten: die Zinsen wachsen proportional mit dem Capitale. Wenn daher 100 Gulden in einem Jahre p Gulden Zinsen tragen, so trägt ein Gulden in einem Jahre $\frac{p}{100}$ Gulden, und das Capital C trägt in einem Jahre $\frac{pC}{100}$.

Wird daher ein Capital von C Gulden zu p% auf ein Jahr angelegt, so wächst es an auf den Betrag $C + \frac{pC}{100}$; diess lässt sich kürzer so schreiben: $C\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, und wenn man $1 + \frac{p}{100}$ mit einem einzigen Buchstaben, etwa mit ω bezeichnet, so erhält man $C\omega$.

„Wird daher ein Capital zu p% auf ein Jahr angelegt, so „wächst es an auf einen Betrag, der gefunden wird, wenn man „das Anfangscapital mit der Zahl ω, d. i. mit der Zahl $1 + \frac{p}{100}$ „multiplicirt.“

So wächst z. B. das Capital von fl. 4520, zu 4% auf ein Jahr angelegt, an auf $4520 . 1{\cdot}04$, und diess ist: fl. 4700·80; eben so wächst das Capital von fl. 9748, zu 5% auf ein Jahr angelegt, auf $9748 . 1{\cdot}05$ an, und diess ist: fl. 10235·40.

Wird am Anfange des zweiten Jahres das angewachsene Capital $C\omega$ wiederum zu p% auf ein Jahr angelegt, so wächst dieses Capital $C\omega$ an auf den Betrag $C\omega . \omega$, d. i. auf $C\omega^2$; und wenn man am Anfange des dritten Jahres das Capital $C\omega^2$ auf ein weiteres Jahr zu p % anlegt, so erhält man am Ende des dritten Jahres den Betrag $C\omega^3$ u. s. f.

Nennt man C_1 das Capital, auf welches das angelegte Capital C nach einem Jahre anwächst; ferner C_2 das Capital, auf welches C_1 nach einem Jahre, somit das ursprüngliche Capital C nach zwei Jahren anwächst; dann C_3 das Capital, auf welches C_2 nach einem Jahre, somit das ursprüngliche Capital C nach drei Jahren anwächst u. s. f., so ist:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C\omega \\
C_2 &= C\omega^2 \\
C_3 &= C\omega^3 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
C_n &= C\omega^n
\end{aligned}
$$

Die letzte dieser Formeln, die sich auch so schreiben lässt:

$$C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \tag{1}$$

ist von besonderer Wichtigkeit, denn mittelst derselben lassen sich alle Fragen lösen, die Bezug haben auf die Berechnung der Zinseszinsen. Sie enthält folgenden Lehrsatz:

„Wird ein Capital zu p % auf n Jahre Zins auf Zins an„gelegt, derart nämlich, dass immer am Ende eines jeden Jahres „die Zinsen zum Capitale gegeben werden, so ist das Endcapital „gleich dem Producte aus dem Anfangscapitale mit der Zahl ω^n [1]).

Ist etwa $p = 5$, so ist:

$$\omega = 1{\cdot}05$$

und folglich:

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= 1{\cdot}1025 \\
\omega^3 &= 1{\cdot}157625 \\
\omega^4 &= 1{\cdot}21550625 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
$$

Ein Capital von fl. 1000 wächst daher, wenn es zu 5 % auf vier Jahre Zins auf Zins angelegt wird, auf den Betrag 1000 . 1·21550625, d. i. nahe fl. 1215·51 an.

---

[1]) Sollten jährlich die p %tigen Zinsen statt zum Capitale hinzugeschlagen, vom Capitale weggenommen werden, so würde man durch ganz ähnliche Betrachtungen zu der Formel kommen:

$$C_n = C\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Allein dieser Fall kommt so äusserst selten vor, dass wir ihn nicht weiter betrachten wollen.

Man hat Tafeln berechnet für die Werthe von ω^n für verschiedene Werthe von p, und für die successiv auf einander folgenden Werthe der Zahl n von 1 angefangen bis 100.

Wir lassen hier eine solche Tafel, die für einen 5 % tigen Zinsfuss berechnet ist, folgen.

Tafel I.

n	$1{\cdot}05^n$	n	$1{\cdot}05^n$	n	$1{\cdot}05^n$	n	$1{\cdot}05^n$
1	1·05	26	3·555673	51	12·040770	76	40·774320
2	1·1025	27	3·733456	52	12·642808	77	42·813036
3	1·157625	28	3·920129	53	13·274949	78	44·953688
4	1·215506	29	4·116136	54	13·938696	79	47·201372
5	1·276282	30	4·321942	55	14·635631	80	49·561441
6	1·340096	31	4·538039	56	15·367412	81	52·039513
7	1·407100	32	4·764941	57	16·135783	82	54·641489
8	1·477455	33	5·003189	58	16·942572	83	57·373563
9	1·551328	34	5·253348	59	17·789701	84	60·242241
10	1·628895	35	5·516015	60	18·679186	85	63·254353
11	1·710339	36	5·791816	61	19·613145	86	66·417071
12	1·795856	37	6·081407	62	20·593802	87	69·737925
13	1·885649	38	6·385477	63	21·623493	88	73·224821
14	1·979932	39	6·704751	64	22·704667	89	76·886062
15	2·078928	40	7·039989	65	23·839901	90	80·730365
16	2·182875	41	7·391988	66	25·031896	91	84·766883
17	2·292018	42	7·761588	67	26·283490	92	89·005227
18	2·406619	43	8·149667	68	27·597665	93	93·455489
19	2·526950	44	8·557150	69	28·977548	94	98·128263
20	2·653298	45	8·985008	70	30·426426	95	103·034676
21	2·785963	46	9·434258	71	31·947747	96	108·186410
22	2·925261	47	9·905971	72	33·545134	97	113·595731
23	3·071524	48	10·401270	73	35·222391	98	119·275517
24	3·225100	49	10·921333	74	36·983510	99	125·239293
25	3·386355	50	11·467400	75	38·832686	100	131·501258

1. Beispiel. Jemand legt ein Capital von fl. 6228 zu 5 % Zins auf Zins auf 25 Jahre an; wie gross ist das Endcapital?

Hier ist

$$C_{25} = 6228 \,.\, 1{\cdot}05^{25}$$

und da

$$1{\cdot}05^{25} = 3{\cdot}386355$$

ist, so hat man

$$C_{25} = \text{fl. } 21090{\cdot}22$$

2. Beispiel. Ein Capital von fl. 300 wird auf 60 Jahre Zins auf Zins zu 5% angelegt; wie gross ist das Endcapital?

Man hat successive:

$$C_{60} = 300 \,.\, 1{\cdot}05^{60}$$

ferner

$$C_{60} = 300 \,.\, 18{\cdot}679186$$

und endlich

$$C_{60} = \text{fl. } 5603{\cdot}76$$

Eine zweite, eben so wichtige Aufgabe ist die, den baaren Werth eines, erst in n Jahren zahlbaren Capitales zu bestimmen. Hiezu dient nun die in (1) aufgestellte Formel

$$C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \tag{1}$$

aus welcher folgt:

$$C = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \tag{2}$$

oder kürzer geschrieben:

$$C = \frac{C_n}{\omega^n}$$

und man hat daher nur das Endcapital durch ω^n zu dividiren, um das Anfangscapital zu erhalten.

1. Beispiel. Jemand hat nach Ablauf eines Jahres fl. 5300 zu fordern. Was ist dieses Capital, bei Voraussetzung eines 6%tigen Zinsfusses, jetzt werth?

Es ist:

$$C = \frac{C_1}{1{\cdot}06}$$

folglich

$$C = \frac{5300}{1{\cdot}06} = 5000$$

also sind obige fl. 5300, zahlbar in einem Jahre, gegenwärtig fl. 5000 werth, und diess ist offenbar, denn die fl. 5000 wachsen ja in einem Jahre, zu 6% angelegt, auf fl. 5300 an.

2. Beispiel. Jemand hat nach Ablauf von zehn Jahren fl. 5000 zu erhalten. Derselbe will nun diese, erst nach Ablauf von zehn Jahren eingehende Forderung, verkaufen; was hat er für obigen Betrag zu begehren, wenn der Zinsfuss zu 5% angenommen wird?

Es ist nach der Formel (2)

$$C = \frac{5000}{1{\cdot}05^{10}}$$

folglich

$$C = \frac{5000}{1{\cdot}628895} = 3069{\cdot}56$$

Obige fl. 5000, in zehn Jahren zahlbar, sind daher gegenwärtig fl. 3069·56 werth, denn umgekehrt wächst das Capital von fl. 3069·56 in zehn Jahren, Zins auf Zins angelegt, zu fl. 5000 an.

Da Rechnungen dieser Art sehr häufig vorkommen, so hat man es bequemer gefunden Tafeln zu berechnen, die unmittelbar den Werth des Bruches $\frac{1}{\omega^n}$ geben, weil man dann wieder bloss durch eine einfache Multiplication die Aufgaben dieser Art lösen kann.

Es ist nämlich

$$C = C_n \cdot \frac{1}{\omega^n}$$

Da man eine Tafel für ω^n schon berechnet hat, so kann man aus dieser sehr leicht die Tafel für $\frac{1}{\omega^n}$ berechnen, man braucht nur alle die für ω^n gefundenen Zahlen in die Einheit zu dividiren; so ist z. B.

$$1{\cdot}05^4 = 1{\cdot}21550625$$

folglich

$$\frac{1}{1{\cdot}05^4} = 0{\cdot}8227025$$

so ist ferner

$$1{\cdot}05^{30} = 4{\cdot}321942$$

folglich ist

$$\frac{1}{1{\cdot}05^{30}} = 0{\cdot}2313774$$

u. s. f.

Eine Tafel, welche den Werth des Bruches $\frac{1}{\omega^n}$ angibt für alle Werthe von n gleich 1 bis n gleich 100, ist für den Zinsfuss 5 die folgende:

Tafel II.

n	$\frac{1}{1\cdot05^n}$	n	$\frac{1}{1\cdot05^n}$	n	$\frac{1}{1\cdot05^n}$	n	$\frac{1}{1\cdot05^n}$
1	0·9523810	26	0·2812407	51	0·0830512	76	0·0245252
2	0·9070295	27	0·2678483	52	0·0790964	77	0·0233574
3	0·8638376	28	0·2550936	53	0·0753299	78	0·0222451
4	0·8227025	29	0·2429463	54	0·0717427	79	0·0211858
5	0·7835262	30	0·2313774	55	0·0683264	80	0·0201770
6	0·7462154	31	0·2203595	56	0·0650728	81	0·0192162
7	0·7106813	32	0·2098662	57	0·0619741	82	0·0183011
8	0·6768394	33	0·1998725	58	0·0590229	83	0·0174296
9	0·6446089	34	0·1903548	59	0·0562123	84	0·0165996
10	0·6139133	35	0·1812903	60	0·0535355	85	0·0158092
11	0·5846793	36	0·1726574	61	0·0509862	86	0·0150564
12	0·5568374	37	0·1644356	62	0·0485583	87	0·0143394
13	0·5303214	38	0·1566054	63	0·0462460	88	0·0136566
14	0·5050680	39	0·1491480	64	0·0440438	89	0·0130063
15	0·4810171	40	0·1420457	65	0·0419465	90	0·0123869
16	0·4581115	41	0·1352816	66	0·0399490	91	0·0117971
17	0·4362967	42	0·1288396	67	0·0380467	92	0·0112353
18	0·4155207	43	0·1227044	68	0·0362349	93	0·0107003
19	0·3957340	44	0·1168613	69	0·0345095	94	0·0101907
20	0·3768895	45	0·1112965	70	0·0328662	95	0·0097055
21	0·3589424	46	0·1059967	71	0·0313011	96	0·0092433
22	0·3418499	47	0·1009492	72	0·0298106	97	0·0088031
23	0·3255713	48	0·0961421	73	0·0283910	98	0·0083840
24	0·3100679	49	0·0915639	74	0·0270391	99	0·0079847
25	0·2953028	50	0·0872037	75	0·0257515	100	0·0076045

Beispiel. Was ist der gegenwärtige Werth von fl. 200, die in 60 Jahren auszahlbar sind, bei Annahme eines Zinsfusses von 5 %? Es ist

$$C = C_{60} \cdot \frac{1}{1\cdot05^{60}}$$

folglich

$$C = 200 \, . \, 0\cdot0535355$$

oder

$$C = \text{fl. } 10\cdot71$$

In sehr vielen Fällen werden die Zinsen schon jedes halbe Jahr zum Capitale geschlagen, in manchen Fällen sogar jedes Vierteljahr. Es ist natürlich, dass in diesen Fällen das Capital rascher anwächst.

Soll z. B. ein Capital von fl. 1000 zu 5 % auf vier Jahre anliegen, und sollen die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden, so ist nach einem halben Jahre das Capital angewachsen auf 1000 . 1·025, d. i. auf fl. 1025, weil fl. 25 die halbjährigen 5 %tigen Zinsen von fl. 1000 sind; nach einem Jahre hat man 1025 . 1·025, und diess ist fl. 1050·625; nach einem weiteren halben Jahre hat man 1050·625 . 1·025, diess ist fl. 1076·890 u. s. w., und so erhält man nach Ablauf des vierten Jahres

$$1000 \,.\, 1{\cdot}025^8$$

Nun ist aber

$$1{\cdot}025^8 = 1{\cdot}218403$$

folglich wächst ein Capital von fl. 1000, zu 5 % auf vier Jahre angelegt, bei halbjähriger Verzinsung auf fl. 1218·40 an.

Allgemein hat man für das Endcapital eines durch volle n Jahre zu p % Zins auf Zins anliegenden Capitals C, falls die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden, folgenden Werth:

$$\text{Endcapital} = C\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n}$$

und falls unter obigen Umständen die Zinsen alle Vierteljahre zum Capitale geschlagen werden:

$$\text{Endcapital} = C\left(1 + \frac{p}{400}\right)^{4n}$$

So findet man z. B., wenn ein Capital von fl. 520 zu 4 % auf zehn Zahre Zins auf Zins angelegt wird, bei ganzjähriger Verzinsung das

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}04^{10}$$

Da nun, wie man durch eine leichte Rechnung findet, $1{\cdot}04^{10} = 1{\cdot}480244$ ist, so hat man

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}480244 = \text{fl. } 769{\cdot}72$$

Im zweiten Falle, wo die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden, hat man

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}02^{20}$$

und da $1{\cdot}02^{20} = 1{\cdot}485947$ ist:

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}485947 = \text{fl. } 772{\cdot}69$$

und im dritten Falle, bei vierteljähriger Verzinsung, hat man:

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}01^{40}$$

oder da $1{\cdot}01^{40} = 1{\cdot}488864$ ist:

$$\text{Endcapital} = 520 \,.\, 1{\cdot}488864 = \text{fl. } 774{\cdot}21$$

Es ist also nicht gleichgiltig, ob die Zinsen alle Jahre oder alle halbe oder viertel Jahre zum Capital geschlagen und weiter verzinset werden; es wäre denn, man würde bei der halb- oder vierteljährigen Verzinsung einen niedrigern Zinsfuss annehmen.

Ist nämlich die Verzinsung eines Capitals C ganzjährig, so ist bei einem Zinsfusse von $p\,\%$ das Endcapital $C\left(1+\frac{p}{100}\right)$; geschieht aber die Verzinsung desselben Capitals halbjährig, und nennt man p_1 die halbjährigen Interessen von fl. 100, so ist am Ende eines Jahres das Endcapital $C\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2$; und soll am Ende des Jahres bei der ganzjährigen Verzinsung dasselbe Endcapital erscheinen, als bei der zweimal auf einander erfolgten halbjährigen Verzinsung, so hat man:

$$C\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2 = C\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Die Division durch C gibt:

$$\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2 = 1+\frac{p}{100}$$

Zieht man beiderseits die Quadratwurzel aus, so hat man:

$$1+\frac{p_1}{100} = \sqrt{1+\frac{p}{100}}$$

und hieraus folgt:

$$p_1 = 100\left[\sqrt{1+\frac{p}{100}}-1\right]$$

Setzt man in diese Formel

$p=3$, so findet man $p_1 = 1{\cdot}488915$
$p=4$, „ „ „ $p_1 = 1{\cdot}980390$
$p=5$, „ „ „ $p_1 = 2{\cdot}469507$
$p=6$, „ „ „ $p_1 = 2{\cdot}956301$
. . . .

Legte man also etwa fl. 1000 zu 6 % an, so tragen selbe in einem Jahre fl. 60 Zinsen, somit hat man am Ende des ersten Jahres fl. 1060; legt man dieselben fl. 1000 nicht zu 3 % halbjährig, sondern bloss zu 2·956301 % halbjährig an, so erhält man nach einem halben Jahre fl. 29·56 Zinsen, und das nach einem halben Jahre auf den Betrag von fl. 1029·56 angewachsene Capital gibt zu 2·956301 % halbjährig im zweiten halben Jahre fl. 30·44 Zinsen, also hat man wieder am Ende des Jahres fl. 1060 als Endcapital; man sieht hieraus wirklich, dass es alles eins ist, ob man ein Capital ganzjährig zu 6 % oder halbjährig zu 2·956301 % anlegt.

2. Capitel.

Renten-Rechnung.

Legt man durch eine Reihe von n Jahren am Anfange eines jeden Jahres den Betrag von b Gulden an, so wachsen diese einzelnen Jahresbeiträge auf eine Summe an, die nun berechnet werden soll.

Die am Anfange des ersten Jahres angelegten b Gulden wachsen an auf den Betrag $b\omega^n$, denn sie liegen volle n Jahre; die am Anfange des zweiten Jahres angelegten b Gulden wachsen an auf den Betrag $b\omega^{n-1}$, denn sie liegen volle $n-1$ Jahre; eben so wachsen die am Anfange des dritten Jahres angelegten b Gulden auf den Betrag $b\omega^{n-2}$ an, u. s. f. Somit erhält man

$$b\omega^n + b\omega^{n-1} + b\omega^{n-2} + \ldots + b\omega^2 + b\omega$$

als Betrag, auf den die durch n Jahre andauernde Rente jährlicher b Gulden angewachsen ist. Wir bezeichnen diese Summe durch R, und haben somit [1]):

$$R = b(\omega^n + \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \ldots + \omega^2 + \omega) \qquad (3)$$

Soll also z. B. ausgerechnet werden, zu welchem Betrage eine durch fünf Jahre dauernde Rente von fl. 600, die am Anfange eines jeden Jahres geleistet wird, bis zum Schlusse des fünften Jahres angewachsen ist, so hat man bei Voraussetzung eines 5%tigen Zinsfusses:

$$R = 600\,(1{\cdot}05^5 + 1{\cdot}05^4 + 1{\cdot}05^3 + 1{\cdot}05^2 + 1{\cdot}05)$$

Nun ist, wie man aus der Tafel I. sieht:

$$\begin{aligned} 1{\cdot}05 &= 1{\cdot}05 \\ 1{\cdot}05^2 &= 1{\cdot}1025 \\ 1{\cdot}05^3 &= 1{\cdot}157625 \\ 1{\cdot}05^4 &= 1{\cdot}215506 \\ 1{\cdot}05^5 &= 1{\cdot}276282 \\ \hline \text{Summe} &= 5{\cdot}801913 \end{aligned}$$

folglich hat man:

$$R = 600\,.\,5{\cdot}801913 = \text{fl. } 3481{\cdot}15$$

So wie man nun Tafeln angefertigt hat für die Berechnung der Zinses-Zinsen, mittelst welcher man leicht den Werth des Endcapitals berechnen kann, falls der Werth des Anfangscapitals,

---

[1]) Legt man durch n Jahre am Anfange eines jeden halben Jahres den Betrag von b_1 Gulden an, und seien die halbjährigen Zinsen von fl. 100 Capital p_1; setzt man ferner $1 + \frac{p_1}{100} = \omega_1$, so hat man als Betrag, auf den diese Rente nach n Jahren angewachsen ist, die Reihe:

$$b_1(\omega_1^{2n} + \omega_1^{2n-1} + \omega_1^{2n-2} + \ldots + \omega_1^2 + \omega_1)$$

die Procente und die Anzahl der Jahre gegeben sind; so wie man ferner auch Tafeln hat zur Bestimmung des baaren Werthes eines erst in n Jahren zahlbaren Capitals, so hat man auch Tafeln berechnet, aus welchen man sieht, zu welchem Betrage eine durch n Jahre dauernde Rente von einem Gulden anwächst; mit andern Worten, man hat Tafeln berechnet, aus welchen man unmittelbar den Werth der Reihe

$$\omega^n + \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \ldots + \omega^2 + \omega$$

entnehmen kann. Eine solche Tafel ist bei Voraussetzung eines 5 % tigen Zinsfusses die folgende:

T a f e l III.

n	$\omega^n+\omega^{n-1}+\ldots$ $\ldots+\omega^2+\omega$	n	$\omega^n+\omega^{n-1}+\ldots$ $\ldots+\omega^2+\omega$	n	$\omega^n+\omega^{n-1}+\ldots$ $\ldots+\omega^2+\omega$	n	$\omega^n+\omega^{n-1}+\ldots$ $\ldots+\omega^2+\omega$
1	1·05	26	53·669126	51	231·85617	76	835·26072
2	2·1525	27	57·402583	52	244·49897	77	878·07376
3	3·310125	28	61·322712	53	257·77392	78	923·02745
4	4·525631	29	65·438848	54	271·71262	79	970·22882
5	5·801913	30	69·760790	55	286·34825	80	1019·79026
6	7·142008	31	74·298829	56	301·71566	81	1071·82978
7	8·549109	32	79·063771	57	317·85144	82	1126·47126
8	10·026564	33	84·066959	58	334·79402	83	1183·84483
9	11·577893	34	89·320307	59	352·58372	84	1244·08707
10	13·206787	35	94·836323	60	371·26290	85	1307·34142
11	14·917127	36	100·628139	61	390·87605	86	1373·75849
12	16·712983	37	106·709546	62	411·46985	87	1443·49642
13	18·598632	38	113·095023	63	433·09334	88	1516·72124
14	20·578564	39	119·799774	64	455·79801	89	1593·60730
15	22·657492	40	126·839763	65	479·63791	90	1674·33767
16	24·840366	41	134·231751	66	504·66981	91	1759·10455
17	27·132385	42	141·993339	67	530·95330	92	1848·10978
18	29·539004	43	150·143006	68	558·55096	93	1941·56527
19	32·065954	44	158·700156	69	587·52851	94	2039·69353
20	34·719252	45	167·685164	70	617·95494	95	2142·72821
21	37·505214	46	177·119422	71	649·90268	96	2250·91462
22	40·430475	47	187·025393	72	683·44782	97	2364·51035
23	43·501999	48	197·426663	73	718·67021	98	2483·78586
24	46·727099	49	208·347996	74	755·65372	99	2609·02516
25	50·113454	50	219·715396	75	794·48640	100	2740·52641

So wächst z. B. eine durch 20 Jahre dauernde Rente von fl. 800 an auf 800 . 34·719252 = fl. 27775·40; ferner eine durch 24 Jahre dauernde Rente von fl. 500 an auf 500 . 46·727099 = fl. 23363·55 etc.

Man sieht aus dieser letzten Tafel zu welchen immensen Summen eine Rente anwächst, die durch viele Jahre aufgesammelt und Zins auf Zins angelegt wird. Die Betrachtung solcher Tafeln hat die Staatsmänner auf den Gedanken geführt, sich derselben zu bedienen zur Tilgung der Staatsschulden und der Eisenbahn-Actien.

Sprechen wir erst von letzteren. Nehmen wir an, das Actien-Capital einer Eisenbahn-Unternehmung belaufe sich auf 15 Million Gulden, und dieses Capital sei herbeigeschafft worden durch Ausgabe von 75000 Actien à fl. 200. Wird nun eine jährliche Rente von $^2/_{10}$ % dieser Schuld, also eine Rente von fl. 30000 jährlich, durch 90 Jahre bei Seite gelegt, dieses sich bildende Capital stets zu 5 % verzinst, so wächst es an nach 90 Jahren auf den Betrag 30000 . 1674·33767, und diess ist fl. 50,230130; man kann also nach 90 Jahren mittelst einer Rente von $^2/_{10}$ % ein mehr als dreifach so grosses Actien-Capital, als ausgegeben wurde, tilgen. Aus der Betrachtung der Tafel III. sieht man, dass in 66 Jahren die Rente von fl. 30000 zu dem Capitale

$$30000 \,.\, 504{\cdot}66981 = \text{fl. } 15{,}140094$$

anwächst, dass also 66 Jahre mehr als hinreichen, um ein Capital durch eine jährliche Rente von $^2/_{10}$ % zu tilgen.

Die Art und Weise, wie solche Amortisations-Fonde angelegt werden, ist etwa für das angeführte Beispiel folgende: Im ersten Jahre werden fl. 30000, die der Amortisations-Fond erhält, zur Anschaffung von 150 Actien à fl. 200 verwendet. Im zweiten Jahre stehen dem Amortisations-Fonde nebst den fl. 30000 noch die Zinsen von den 150 Actien zu Gebote, die im ersten Jahre angeschafft wurden. Das Zinserträgniss derselben sei 5 %, somit fl. 1500, daher sind im zweiten Jahre fl. 31500 für den Amortisations-Fond flüssig, um welchen Betrag man daher 157 Actien anschaffen kann; die übrig bleibenden fl. 100 werden entweder anderwärts zu 5 % verzinst, oder aber sie bleiben unverzinst in der Cassa des Amortisationsfondes liegen. Der Einfachheit der Rechnung wegen soll das letztere angenommen werden.

Im dritten Jahre kömmt zur Verwendung in den Amortisations-Fond:

a) die Jahresrente von fl. 30000;

b) die Zinsen von den 307 Actien, die bereits in den verflossenen zwei Jahren angeschafft wurden, und diese betragen fl. 3070;

c) die im letzten Jahre unverwendet gebliebenen fl. 100.

Man hat also zusammen fl. 33170, und kann somit 165 Actien à fl. 200 anschaffen, muss aber wieder fl. 170 unverwendet lassen

Genau so fortfahrend hat man im vierten Jahre zu Gunsten des Amortisations-Fondes:

a) die Jahresrente von fl. 30000;

b) die Zinsen von 472 Actien, welche fl. 4720 betragen;

c) die im letzten Jahre unverwendet gebliebenen fl. 170,

also zusammen fl. 34890, welche zur Anschaffung von 174 Actien dienen etc.

Würde die Eisenbahn-Unternehmung jährlich, so lange die Actien unter dem Paricurse stehen, um den, dem Amortisations-Fonde zur Verfügung stehenden Betrag, Eisenbahn-Actien börsenmässig aufkaufen, statt sie durch Verlosung zum Paricurse einzulösen, und erst wenn die Actien über dem Paricurse stehen, mit der Einlösung durch Verlosung beginnen, so würde hiedurch in viel früherer Zeit das Actien-Capital getilgt sein.

Gehen wir nun zu den Staatsschulden, und nehmen wir an, dass ein Staat die Schuldenlast von zwei Milliarden (d. h. fl. 2000,000.000) zu tragen habe, die etwa in 5 %tigen Metalliques bestehen. Nehmen wir ferner an, dass die Finanzen im Staate derart geregelt sind, dass jährlich die Einnahmen um fl. 1,000.000 die Ausgaben übersteigen. Wird nun diese Million zur Bildung eines Tilgungsfondes verwendet, das in selbem einlaufende Capital mit 5 % verzinst, so wächst derselbe, wie man aus der Rententafel (Tafel III.) sieht, schon im 94sten Jahre zu einem Betrage an, der grösser als 2000 Millionen ist, und es können daher in 94 Jahren sämmtliche Staatsschulden getilgt sein.

Uebersteigen die Einnahmen des Staates um fl. 2,000.000 die Ausgaben desselben, so sind zur Tilgung der Staatsschulden nahe 80 Jahre nothwendig u. s. f.

Dass auch hier ein schnelleres Tilgen zu Stande kömmt, falls man, so lange die 5 %tigen Metalliques unter Pari stehen, sie börsenmässig aufkaufet, und falls sie über Pari stehen, mittelst Verlosung einzieht, versteht sich wohl von selbst.

Die Verwaltung solcher Tilgungsfonde geschieht auf ähnliche Weise, wie bei den Eisenbahn-Unternehmungen. Der Staat bedarf nämlich im eben genannten Beispiele 100 Million Gulden zur Zahlung der Zinsen, und 1 Million Gulden zur Dotirung des Tilgungsfondes, also zusammen jährlich 101 Million Gulden zur Abtragung der gemachten Schulden. Da nun im Laufe der Zeiten der Tilgungsfond wächst, so fliessen jährlich grosse Summen als Zinsen in demselben ein, und so kann es in späteren Zeiten kommen, dass der grösste Theil der oben genannten 101 Million Gulden in den Tilgungsfond fliessen.

Am Schlusse des eben verflossenen Jahres ist man von diesem Principe der Staats-Schuldentilgung abgegangen, und hat ein anderes gewählt, das der Wesenheit nach darin besteht, dass man die bereits aus dem Umlaufe gezogenen Staatsschulden wirklich tilgt. Da hiedurch jährlich, falls solche Tilgungen Statt finden, die Ausgaben des Staates geringer werden (weil weniger Schulden zu verzinsen sind), so kann bei gleichbleibenden Staatseinnahmen immer ein grösserer Betrag zur Schuldentilgung verwendet werden. Wenn nun im Laufe der Zeiten, sei es durch Krieg oder sei es durch irgend andere ungünstige Umstände, die Staatserfordernisse anschwellen sollten, so wäre der Staat im Stande, ohne erst drückende Bedingungen bei Aufnahme neuer Schulden einzugehen, jene Capitalien, die in günstigen Zeiten zur Tilgung von Staatsschulden benützt worden wären, anderweitig zu verwenden.

Gehen wir nach dieser Digression zu unserer Formel (3) zurück. Aus ihr folgt:

$$b = \frac{R}{\omega^n + \omega^{n-1} + \ldots + \omega^2 + \omega} \tag{4}$$

und sie dient zur Bestimmung jener Jahresrente, die man am Anfange eines jeden Jahres zahlen muss, damit man am Ende des $n$ten Jahres ein Capital R erlange.

Jemand wünscht durch 20 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine so grosse Rente zu zahlen, dass er am Ende von 20 Jahren ein Capital von fl. 1000 besitze. Wie gross ist die Rente, falls der Zinsfuss 5% beträgt?

Es ist: $b = \frac{1000}{34 \cdot 719252} = \text{fl. } 28 \cdot 80$

also, wenn man durch 20 Jahre am Anfange eines jeden Jahres sich fl. 28·80 bei Seite legt und à 5% verzinst, so hat man nach 20 Jahren ein Capital von fl. 1000 erspart.

Jemand wünscht durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Rente von b fl. zu beziehen. Wenn nun der Zinsfuss p% beträgt, welches Capital wird er erlegen müssen, um die gewünschte Rente zu erhalten?

Die am Ende des 1. Jahres fällige Rate ist gegenwärtig $\frac{b}{\omega}$ fl. werth,

» » » » 2. » » » » » $\frac{b}{\omega^2}$ » »

» » » » 3. » » » » » $\frac{b}{\omega^3}$ » »

. . . .

» » » » n. » » » » » $\frac{b}{\omega^n}$ » »

also ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher n Raten der Rente:

$$\frac{b}{\omega} + \frac{b}{\omega^2} + \frac{b}{\omega^3} + \ldots + \frac{b}{\omega^n}$$

und wenn man diess mit r bezeichnet, so erhält man:

(5) $$r = b\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \ldots + \frac{1}{\omega^n}\right)$$

Auch hier hat man sich Tafeln verfertigt, um diese Aufgabe, welche häufiger vorkömmt, mit Schnelligkeit lösen zu können. Eine solche ist für $p = 5\,\%$ die nachfolgende.

Tafel IV.

n	$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\omega^n}$	n	$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\omega^n}$	n	$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\omega^n}$	n	$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\omega^n}$
1	0·9523810	26	14·3751853	51	18·3389766	76	19·5094952
2	1·8594104	27	14·6430336	52	18·4180730	77	19·5328526
3	2·7232480	28	14·8981273	53	18·4934028	78	19·5550977
4	3·5459505	29	15·1410736	54	18·5651456	79	19·5762835
5	4·3294767	30	15·3724510	55	18·6334720	80	19·5964605
6	5·0756921	31	15·5928105	56	18·6985447	81	19·6156767
7	5·7863734	32	15·8026767	57	18·7605188	82	19·6339778
8	6·4632128	33	16·0025492	58	18·8195417	83	19·6514074
9	7·1078217	34	16·1929040	59	18·8757540	84	19·6680070
10	7·7217349	35	16·3741943	60	18·9292895	85	19·6838162
11	8·3064142	36	16·5468517	61	18·9802757	86	19·6988726
12	8·8632516	37	16·7112873	62	19·0288340	87	19·7132120
13	9·3935730	38	16·8678927	63	19·0750800	88	19·7268686
14	9·8986409	39	17·0170407	64	19·1191238	89	19·7398748
15	10·3796580	40	17·1590864	65	19·1610703	90	19·7522617
16	10·8377696	41	17·2943680	66	19·2010194	91	19·7640588
17	11·2740662	42	17·4232076	67	19·2390661	92	19·7752941
18	11·6895869	43	17·5459120	68	19·2753010	93	19·7859944
19	12·0853209	44	17·6627733	69	19·3098105	94	19·7961851
20	12·4622103	45	17·7740698	70	19·3426766	95	19·8058906
21	12·8211527	46	17·8800665	71	19·3739778	96	19·8151339
22	13·1630026	47	17·9810157	72	19·4037883	97	19·8239370
23	13·4885739	48	18·0771578	73	19·4321794	98	19·8323210
24	13·7986418	49	18·1687217	74	19·4592185	99	19·8403057
25	14·0939446	50	18·2559255	75	19·4849700	100	19·8479102

Will also Jemand durch 30 Jahre am Ende eines jeden Jahres fl. 500 erhalten, so ist der baare Betrag, den er sich zu

$5\,\%$ Zinsen anlegen muss:

$$500 \,.\, 15{\cdot}372451 = \text{fl. } 7686{\cdot}23$$

Dieser Betrag trägt im ersten Jahre fl. 384·31 Zinsen, also hat er, um die Rente von fl. 500 zu haben, am Ende des ersten Jahres von dem Capitale fl. 7686·23 noch wegzunehmen den Betrag fl. 115·69, somit bleiben fl. 7570·54. Dieser Betrag trägt in einem Jahre fl. 378·53 Zinsen; man hat daher im zweiten Jahre fl. 121·47 wegzunehmen, somit bleiben fl. 7449·07, und fährt man so fort, so wird am Ende des 30sten Jahres das ganze Capital von fl. 7686·23 aufgezehrt sein.

Aus der Gleichung (5) folgt:

$$b = \frac{r}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1}{\omega^n}} \qquad (6)$$

und diese Formel gibt die Rente, welche man am Ende eines jeden Jahres erhält, für ein baar ausgezahltes Capital r.

Z. B. Jemand legt ein Capital von fl. 5000 an, und wünscht hiefür am Ende eines jeden Jahres durch acht auf einander folgende Jahre eine Rente; wie gross ist dieselbe? Man hat

$$b = \frac{5000}{6{\cdot}4632128}, \quad \text{d. i.} \quad b = 773{\cdot}60.$$

3. Capitel.

Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Alle Ereignisse, die eintreten, sind eine nothwendige Folge der Naturgesetze. Aber nicht immer kennt man die Einflüsse, die auf das Eintreffen eines Ereignisses Bezug haben, und wenn dann solche Ereignisse scheinbar regellos aufeinander folgen, so schreibt man sie meistentheils dem Zufalle zu. So z. B., wenn in einem Glücksrade sich 90 Kugeln befinden, die mit den Nummern von 1 bis 90 bezeichnet sind, und man zieht blindlings eine Kugel heraus, so schreiben wir es dem Zufalle zu, wenn gerade die herausgezogene Kugel mit jener Nummer bezeichnet ist, auf deren Erscheinen wir warteten.

Aber solche Ereignisse, so zufällig sie uns scheinen, so wenig sie sich auch einer Rechnung unterwerfen lassen, sind dennoch einem allgemeinen Gesetze unterworfen, und dieses Gesetz wird das „Gesetz der grossen Zahlen“ genannt. Es besteht darin, dass wenn man eine sehr grosse Anzahl Erscheinungen derselben

Art beobachtet, sich die einzelnen Fälle in bestimmten Verhältnissen wiederholen.

Wenn man z. B. 1000000 Ziehungen aus dem Glücksrade, in dem sich die 90 Kugeln befinden, vornimmt, indem man nämlich jedesmal nach der Ziehung die gezogene Kugel zurückwirft, so werden alle 90 Nummern nahezu gleichoft herausgezogen werden, weil jede Nummer durch Zufall erscheint, und für den Zufall immer neue Abwechslungen eintreten; wir halten alle die gleichmöglichen Fälle für gleich wahrscheinlich. Soll aber die Wahrscheinlichkeit einer Rechnung unterworfen werden, so muss man selbe messen und das Mass durch eine Zahl ausdrücken können, denn nur dann, wenn man einen Begriff durch eine bestimmte Zahl ausgedrückt hat, ist er mit Leichtigkeit mit andern, durch Zahlen ausgedrückte Begriffe derselben Art vergleichbar, und ist somit den mathematischen Gesetzen unterworfen.

Man misst nun die Wahrscheinlichkeit mittelst eines Bruches, dessen Zähler die Anzahl der Fälle angibt, welche für das Eintreffen des Ereignisses günstig, und dessen Nenner die Anzahl der Fälle angibt, welche für das Eintreffen des Ereignisses möglich sind.

Einige Beispiele werden gleich die Sache aufklären.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, worin 20 weisse, 7 schwarze und 3 blaue Kugeln sind, eine weisse Kugel zu ziehen?

Auflösung. Denkt man sich sämmtliche 30 Kugeln numerirt, und zwar die weissen von 1 bis 20, die schwarzen von 21 bis 27, die blauen von 28 bis 30, so sieht man offenbar, dass es möglich ist, die Kugel Nr. 1 oder die Kugel Nr. 2, oder die Kugel Nr. 3 etc. zu ziehen; also sind 30 Fälle gleich möglich, und diess ist der Nenner des Bruches, der die gesuchte Wahrscheinlichkeit angibt.

Wird nun gezogen eine der Nummern von 1 bis 20, so hat man eine weisse gezogen, also sind 20 Fälle dem Ziehen einer weissen Kugel gleich günstig, und 20 ist daher der Zähler des Bruches.

Die Wahrscheinlichkeit, aus der obigen Urne eine weisse Kugel zu ziehen, ist daher $\frac{20}{30}$.

Eben so würde man finden für die Wahrscheinlichkeit, dass man aus der obigen Urne eine schwarze Kugel zieht, den Bruch $\frac{7}{30}$, und dass man eine blaue Kugel zieht, $\frac{3}{30}$.

Ein zweites Beispiel sei folgendes: Man suche die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln, welche beide mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind, die Zahl 8 zu werfen?

Um diese Wahrscheinlichkeit aufzufinden, hat man zuerst aufzusuchen die Anzahl aller möglichen Fälle. Nun sind offenbar mit zwei Würfeln 36 verschiedene Würfe möglich, denn es kann, während mit dem ersten Würfel die Zahl 1 geworfen wird, mit dem zweiten Würfel eine der 6 Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworfen werden; eben so kann auch, während mit dem ersten Würfel Nr. 2 geworfen wird, mit dem zweiten Würfel eine von den 6 Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworfen werden u. s. f.; mithin ist der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit 36.

Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit muss die Anzahl der günstigen Fälle enthalten. Nun sind günstig folgende fünf Würfe:

mit dem ersten Würfel Nr. 2, mit dem zweiten Würfel Nr. 6,
„ „ „ „ „ 3, „ „ „ „ „ 5,
„ „ „ „ „ 4, „ „ „ „ „ 4,
„ „ „ „ „ 5, „ „ „ „ „ 3,
„ „ „ „ „ 6, „ „ „ „ „ 2,

folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{36}$.

Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Summe 9 zu werfen, ergibt sich auf dieselbe Weise $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, also ist es wahrscheinlicher, mit zwei Würfeln die Summe 8 zu werfen, als die Summe 9, und die beiden Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zu einander wie 5 zu 4.

Der Bruch, durch den die Wahrscheinlichkeit gemessen wird, kann höchstens gleich 1 sein, denn es kann die Anzahl der, einem Ereignisse günstigen Fälle ja höchstens nur gleich sein der Anzahl aller möglichen Fälle; ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, so ist die Zahl der günstigen Fälle gleich der Zahl der möglichen Fälle, und das Ereigniss, von dem die Rede ist, tritt gewiss ein.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, worin sich bloss 25 schwarze Kugeln befinden, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich 1, weil man ja offenbar aus einer Urne, worin nur schwarze Kugeln sind, gewiss eine schwarze Kugel ziehen wird.

Wir kommen nun zu einem höchst wichtigen Lehrsatz der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Sind nämlich $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Wahrscheinlichkeiten, dass die von einander unabhängigen Ereignisse A und B eintreffen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse A und B zugleich eintreffen, gleich dem Producte $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ der beiden Wahrscheinlichkeiten.

Um diesen Lehrsatz klar einzusehen, stelle man sich vor, dass das Eintreffen eines gewissen Ereignisses etwa darauf hinauskomme, aus einer Urne mit verschieden gefärbten Kugeln eine Kugel von bestimmter Farbe herauszuziehen. Und nun denke man sich zwei Urnen; in der
ersten sollen sich 5 weisse und 8 schwarze, in der
zweiten „ „ 6 „ „ 3 „ Kugeln befinden, und es wird gefragt, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zu gleicher Zeit aus beiden Urnen eine weisse Kugel ziehe?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist hier, da in der ersten Urne 13, in der zweiten Urne 9 Kugeln sind, offenbar $9.13 = 117$; denn denkt man sich die Kugeln in der ersten Urne mit den Nummern von 1 bis 13, die in der zweiten Urne mit den Nummern von 1 bis 9 versehen, so ist offenbar, falls aus der ersten Urne Nr. 1 gezogen wird, möglich, dass aus der zweiten Urne eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gezogen wird. Diess gibt somit 9 mögliche Fälle; aber eben so kann auch aus der ersten Urne Nr. 2 gezogen werden, während wieder aus der zweiten Urne irgend eine der Zahlen von 1 bis 9 gezogen wird; diess gibt wieder 9 Fälle etc. Ganz auf dieselbe Weise ergeben sich $5.6 = 30$ günstige Fälle, denn unter den oben angeführten 117 Fällen sind 30, in welchen beide Kugeln weiss sind, also ist die Wahrscheinlichkeit, aus beiden Urnen eine weisse Kugel zu ziehen, $\frac{5.6}{13.9} = \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{9}$.

Es ist aber $\frac{5}{13}$ die Wahrscheinlichkeit, aus der ersten Urne, in der sich 13 Kugeln befinden, eine der 5 weissen Kugeln zu ziehen; ferner ist $\frac{6}{9}$ die Wahrscheinlichkeit, aus der zweiten Urne, in der sich 9 Kugeln befinden, eine der 6 weissen zu ziehen; folglich ist in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit, dass aus beiden Urnen zu gleicher Zeit eine weisse Kugel gezogen wird, in der That gleich dem Producte der Wahrscheinlichkeiten, aus jeder der Urnen separat eine weisse zu ziehen.

Der hier geführte Beweis ist freilich nur für einen speciellen Fall geführt, allein eine Beweisführung, ganz allgemein gehalten, macht ja nicht im Geringsten Schwierigkeiten, und unterscheidet sich nur dadurch von der hier gegebenen, dass man statt der Zahlen 5, 6, 9, 13, die hier auftreten, die allgemeinen Zahlzeichen a, b, c, d zu setzen hätte.

Und so lässt sich auch zeigen, dass wenn $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten sind, dass die von einander ganz unabhängigen Ereignisse A, B, C, ... eintreffen, das Product $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \ldots$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass alle die Ereignisse A, B, C, ... zugleich eintreffen.

4. Capitel.

Mortalitäts-Tafeln.

Die Grundlage aller der Rechnungen, welche bei Lebensversicherungen vorkommen können, bilden die Mortalitäts-Tafeln; das sind nämlich Tafeln welche zeigen, wie viel von einer bestimmten Anzahl in demselben Jahre geborner Menschen in den aufeinander folgenden Jahren noch leben.

Das Gesetz der grossen Zahlen, von welchem wir vorhin gesprochen, findet auch bei den Erscheinungen statt, welche auf das Leben und das Sterben der Menschen Bezug haben. So z. B. zeigt sich, dass unter einer sehr grossen Zahl von Kindern, welche in derselben Gegend und fast zu derselben Zeit geboren sind, eine bestimmte Zahl von Kindern im ersten Lebensjahre sterben; von den nur einjährigen Kindern erreichen wieder nur eine bestimmte Zahl das zweite Lebensjahr, von den zweijährigen Kindern erreichen eine bestimmte Zahl das dritte Lebensjahr u. s. f., und dieses einmal beobachtete Sterblichkeitsgesetz wiederholt sich mit wunderbarer Genauigkeit durch lange Zeiten, scheint aber dennoch abhängig von den Fortschritten, welche in der Medizin gemacht werden, von der besseren oder schlechteren Verwaltung der Sanitätspolizei, vorzüglich aber von dem zu- oder abnehmenden Wohlstande der Bevölkerung.

Dieses Gesetz, das man beobachtete, hat nun Anlass gegeben zur Construction von Tafeln, die man Mortalitäts- oder Sterblichkeitstafeln nennt, und deren es nun eine grössere Zahl gibt. Wir legen unseren ferneren Rechnungen die Süssmilch-Baumann'sche Tafel zu Grunde. Diese ist die folgende:

Tafel V.

Alter a	Zahl der Lebenden A_a	Alter a	Zahl der Lebenden A_a	Alter a	Zahl der Lebenden A_a	Alter a	Zahl der Lebenden A_a
0	1000	24	471	48	316	72	94
1	750	25	466	49	308	73	85
2	661	26	461	50	300	74	77
3	618	27	456	51	291	75	69
4	593	28	451	52	282	76	62
5	579	29	445	53	273	77	55
6	567	30	439	54	264	78	49
7	556	31	433	55	255	79	43
8	547	32	427	56	246	80	37
9	539	33	421	57	237	81	32
10	532	34	415	58	228	82	28
11	527	35	409	59	219	83	24
12	523	36	402	60	210	84	20
13	519	37	395	61	201	85	17
14	515	38	388	62	192	86	14
15	511	39	381	63	182	87	12
16	507	40	374	64	172	88	10
17	503	41	367	65	162	89	8
18	499	42	360	66	152	90	6
19	495	43	353	67	142	91	5
20	491	44	346	68	132	92	4
21	486	45	339	69	122	93	3
22	481	46	332	70	112	94	2
23	476	47	324	71	103	95	1

Die erste Colonne enthält das Alter der Personen, die zweite die Zahl der Lebenden von diesem Alter. Also von 1000 Neugebornen, oder von 1000 Menschen, die jetzt 0 Jahre alt sind, erreichen 750 das erste Jahr ihres Alters. Von diesen 750 erreichen bloss 661 das zweite, von diesen 661 bloss 618 das dritte Lebensalter u. s. f.

Diess sind die Data, die man aus den Tafeln schöpft, um die Aufgaben zu lösen, die bei Lebensversicherungen vorkommen können. Je näher sich solche Tafeln an die Erfahrung anschliessen, desto zuverlässiger sind sie. Aber die Tafel, die wir hier zu Grunde legen, enthält die Sterbensordnung, so wie sie sich aus den Beobachtungen vom Jahre 1775 für die Gegenden Norddeutschlands ergeben hat, und zwar für die ganze Bevölkerung. Bei Lebensversicherungen nimmt aber bloss eine ausgesuchte Gesellschaft Theil, in der Regel der Theil, welcher vermögenderen Classen angehörig ist, und bei diesen Classen scheint die Sterblichkeit wenigstens in den ersten Lebensaltern geringer. Es ist daher nothwendig, dass eine Lebensversicherungs-Anstalt auf solche Umstände gehörig Rücksicht nimmt, und ihren Rechnungen solche Tafeln zu Grunde legt, welche für eine ausgesuchte Gesellschaft von vermögenderen Leuten, und an dem Orte, wo die Gesellschaft zu wirken sich vornimmt, am meisten passen. Da aber solche Tafeln nicht immer vorhanden sind, und die Construction derselben nicht leicht ist, so geschieht es meistentheils, dass Versicherungs-Anstalten die bereits vorhandenen Tafeln benützen, und um 15 bis 30 % mehr verlangen, als die strenge Rechnung gibt.

Bogatsi
troskliwiej
dzieci cho-
wają, i dla
tego mniej-
sza u nich
śmiertelność
wtedy po
obliczeniu
ścisłego rachunku
się dolicza
na korzyść
Towarzystwa
15-30%

Anmerkung. Denkt man sich eine Stadt völlig abgeschlossen von ihrer Umgebung, so, dass die Bevölkerung in derselben weder durch Einwanderung vermehrt, noch durch Auswanderung vermindert wird; denkt man sich ferner, dass jedes Jahr in dieser Stadt 1000 Menschen geboren werden, und eben so viele mit Tode abgehen, so wird, wenn die Sterblichkeit in dieser Stadt genau nach dem Gesetze der Süssmilch-Baumann'schen Tafeln erfolgte, folgende Bevölkerung in dieser Stadt sein:

1) 1000 Menschen, die noch nicht 1 Jahr alt sind;
2) 750 Menschen, die 1 Jahr und darüber alt sind, aber noch nicht 2 Jahre, denn von den vor einem Jahre gebornen 1000 Menschen leben noch 750;
3) 661 Menschen, die 2 Jahre und darüber alt sind, aber noch nicht 3 Jahre, denn von den, vor 2 Jahren gebornen 1000 Menschen leben noch 661 etc.;

somit drückt die Summe sämmtlicher in der mit A_a überschriebenen Colonne befindlichen Zahlen, d. i. die Zahl 28988, den Bevölkerungsstand dieser Stadt aus. Und umgekehrt könnte man aus dem, genau nach dem Alter specialisirten, Bevölkerungsstande einer Stadt, für welche die gemachten Voraussetzungen gelten, nämlich, dass die Anzahl der in einem Jahre Sterbenden so gross als die Zahl der Geburten ist, eine Sterblichkeits-Tafel ableiten.

Um unsere Rechnungen möglichst allgemein zu führen, bezeichnen wir die in der Sterblichkeitstafel vorkommende Anzahl der von einem gewissen Alter lebenden Personen mit dem Buchstaben A, und versehen dieses A unten mit einer Zahl, die das

Alter anzeigt; demnach ist A_0 die Anzahl der in der Sterblichkeitstafel verzeichneten Menschen vom Alter 0, diese ist 1000; ferner ist A_1 die Anzahl der in der Sterblichkeitstafel verzeichneten Menschen, die von 1000 in demselben Jahre gebornen das erste Lebensalter erreichen, diese Zahl ist 750; eben so ist A_2 die Anzahl der Menschen, welche von den 750 einjährigen das zweite Lebensjahr erreichen u. s. f.; und so ist:

$$A_{16} = 507$$
$$A_{25} = 466$$

hätte man andere Sterblichkeitstafeln zu Grunde gelegt, so hätte man für A_{16} und A_{25} andere Zahlen zu schreiben.

Wir wollen nun gleich zur Lösung einiger Fragen schreiten.

1. Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 25jährige Person das 35ste Lebensalter erreiche?

Aus den Sterblichkeitstafeln sieht man, dass von 466 25jährigen Personen 409 das 35ste Lebensalter erreichen, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{409}{466}$.

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein $m$jähriger Mensch das $m+n$te Lebensalter erreiche:

$$\omega = \frac{A_{m+n}}{A_m} \tag{7}$$

2. Beispiel. Ein 18jähriger Mensch legt bei einer Lebensversicherungs-Anstalt einen Betrag von fl. 1000 an, mit der Bedingung, dass er, falls er nach 10 Jahren lebt, einen höheren Betrag hiefür zurückerhalte, falls er aber im Laufe der 10 Jahre stirbt, auf das eingezahlte Capital zu Gunsten der Lebensversicherungs-Anstalt verzichte. Es entsteht nun die Frage, auf welchen Betrag er, falls er nach 10 Jahren noch lebt, hoffen kann?

Auflösung. Wenn 499 18jährige Menschen (denn von 1000 zugleich gebornen leben 499 18jährige) unter derselben Bedingung der Gesellschaft beitreten würden, so ginge in die Cassa der Gesellschaft der Betrag von fl. 499000 ein, die in 10 Jahren, à 5 % angelegt, auf $499000 \,.\, 1{\cdot}05^{10} =$ fl. 812818 anwachsen. Nach 10 Jahren leben aber von den 499 Menschen nur noch 451, also beansprucht einer von diesen noch lebenden den 451sten Theil des angesammelten Capitals, d. i. fl. 1802·25.

Fasst man die eben gelöste Aufgabe allgemein, so lautet sie folgendermassen: Ein $m$jähriger Mensch legt bei einer Lebensversicherungs-Anstalt den Betrag von C Gulden an, mit der Bedingung, in n Jahren, falls er lebt, einen höheren Betrag zurück zu erhalten; stirbt er während der n Jahre, so verfällt die Einlage sammt den Zinsen zu Gunsten der Gesellschaft. Welchen Betrag kann er hoffen in n Jahren zurückzuerhalten?

Schlägt man genau denselben Weg ein, der oben in dem speciellen Beispiele eingeschlagen wurde, so erhält man als zu hoffendes Capital:

$$K = \frac{A_m}{A_{m+n}} \cdot C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (8)$$

Sucht man aus dieser Formel C, so erhält man:

$$C = \frac{A_{m+n}}{A_m} \cdot \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \qquad (9)$$

und diese Formel dient dazu, den gegenwärtigen Werth eines, von einem $m$jährigen Menschen in n Jahren zu hoffenden Capitals K zu bestimmen.

Wenn z. B. ein noch nicht einjähriges Kind in seinem 24sten Jahre ein Capital von fl. 10000 ausbezahlt erhalten soll, so ist das für dieses Kind bei einer Versicherungs-Anstalt zu hinterlegende Capital bei vorausgesetztem $5^0/_0$ tigen Zinsfusse:

$$C = \frac{471}{1000} \cdot \frac{10000}{1{\cdot}05^{24}} = \text{fl. } 1460{\cdot}42$$

d. h. der Vater dieses Kindes hat den Betrag von fl. 1460·42 baar bei einer Lebensversicherung einzuzahlen, wenn er haben will, dass sein Kind im 24sten Jahre, falls es dann lebt, fl. 10000 erhalten soll.

Beispiel. Fünf Personen A, B, C, D und E vereinigen sich zu einer Gesellschaft. Jede von ihnen macht eine Einlage von fl. 1000. Nach zehn Jahren soll das durch Zinsen angewachsene Capital unter die noch Lebenden vertheilt werden. Wieviel gebührt jedem?

Auflösung. Sind alle fünf Personen von gleichem Alter, so hat offenbar jede denselben Anspruch am Gesammtkapital; man hat daher nach zehn Jahren das durch Zinsen angewachsene Capital in so viel gleiche Theile zu theilen, als von den Fünfen noch leben.

Sind die fünf Personen nicht von gleichem Alter, sondern wäre das Alter von A, B, C, D, E der Reihe nach 18, 23, 24, 30, 35 Jahre, so muss die Theilung auf andere Weise geschehen; und um die Verhältnisszahlen zu finden, nach denen die Theilung zu geschehen hat, denke man sich, diese fünf Personen träten einer Lebensversicherungs-Anstalt bei, so ist nach der Formel (8) das zu hoffende Capital des A $\frac{499}{451} \cdot 1000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$

» » » » B $\frac{476}{421} \cdot 1000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$

» » » » C $\frac{471}{415} \cdot 1000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$

» » » » D $\frac{439}{374} \cdot 1000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$

» » » » E $\frac{409}{339} \cdot 1000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$

folglich sind die Verhältnisszahlen, nach denen nach 10 Jahren das Endcapital $5000 \cdot 1{\cdot}05^{10}$ zu theilen ist, falls während der 10 Jahre keiner unter ihnen starb, folgende:

$$\frac{499}{451}, \quad \frac{476}{421}, \quad \frac{471}{415}, \quad \frac{439}{374}, \quad \frac{409}{339}$$

Wäre aber im Laufe der 10 Jahre der B und der E gestorben, so müssten die, dem B und dem E zukommenden Verhältnisszahlen

$$\frac{476}{421}, \quad \frac{409}{339}$$

weggelassen werden, und das Gesammtcapital nach den übrig bleibenden Verhältnisszahlen

$$\frac{499}{451}, \quad \frac{471}{415}, \quad \frac{439}{374}$$

getheilt werden.

Wenn also mehrere Personen A, B, C, . . . eine Gesellschaft bilden (man nennt eine solche Gesellschaft Ueberlebens-Gesellschaft), gleiche Einlagen entrichten, und nach n Jahren das durch ihre Einlagen und die Zinsen derselben angewachsene Capital unter die Ueberlebenden theilen, so sind die Verhältnisszahlen, nach denen die Theilung vorzunehmen ist, von dem Alter der Personen abhängig. Sind dieselben a, b, c, . . . Jahre, so sind die Verhältnisszahlen:

$$\frac{A_a}{A_{a+n}}, \quad \frac{A_b}{A_{b+n}}, \quad \frac{A_c}{A_{c+n}}, \quad \ldots$$

hievon sind aber jene Zahlen hinwegzustreichen, welche den Personen entsprechen, die während der n Jahre gestorben sind.

Sind die Einlagen der verschiedenen Personen nicht gleich, sondern der Reihe nach C_1, C_2, C_3, . . . so ist die Theilung vorzunehmen nach dem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahlen

$$\frac{C_1 A_a}{A_{a+n}}, \quad \frac{C_2 A_b}{A_{b+n}}, \quad \frac{C_3 A_c}{A_{c+n}}, \quad \ldots$$

von denen wieder jene Zahlen hinweggestrichen werden müssen, welche den Personen entsprechen, die während der n Jahre gestorben sind.

Wünschen die einzelnen Theilnehmer der Gesellschaft, dass nach Ablauf der n Jahre das ganze angewachsene Capital in gleiche Theile getheilt werden soll, so müssen auch die Einlagen C_1, C_2, C_3, . . . so gewählt werden, auf dass

$$\frac{C_1 A_a}{A_{a+n}} = \frac{C_2 A_b}{A_{b+n}} = \frac{C_3 A_c}{A_{c+n}} = \ldots$$

ist. Setzt man jeden der hier stehenden Brüche gleich C, so ist:

$$\frac{C_1 A_a}{A_{a+n}} = C, \quad \frac{C_2 A_b}{A_{b+n}} = C, \quad \frac{C_3 A_c}{A_{c+n}} = C, \ldots$$

hieraus folgt:

$$C_1 = C \cdot \frac{A_{a+n}}{A_a}, \quad C_2 = C \cdot \frac{A_{b+n}}{A_b}, \quad C_3 = C \cdot \frac{A_{c+n}}{A_c}, \ldots$$

und man sieht aus diesen Gleichungen, dass die Capitalseinlagen der Personen proportional sein müssen den Wahrscheinlichkeiten derselben, noch n Jahre zu leben.

In dem früheren Falle, wo von fünf Personen die Rede war, welche die Lebensalter 18, 23, 24, 30 und 35 Jahre hatten, sind, falls sie alle nach 10 Jahren das vorhandene Capital in gleiche Theile unter die von ihnen dann Lebenden theilen wollten, die Einlagen zu entrichten proportional den Zahlen:

$$\frac{451}{499}, \quad \frac{421}{476}, \quad \frac{415}{471}, \quad \frac{374}{439}, \quad \frac{339}{409}$$

Sollten nach 10 Jahren alle gestorben sein, so gibt die Rechnung keinen Aufschluss, was mit dem Gelde zu geschehen hat; es muss daher in dem Vertrage, den die fünf Personen unter sich machen, für diesen Fall eine Bestimmung hierüber getroffen werden.

II. Abschnitt.

Von den Renten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer Person abhängen.

1. Capitel.

Von den einfachen Leibrenten.

Eine Leib- oder Lebensrente ist eine Rente, die so lange einer bestimmten Person ausbezahlt wird, als sie lebt.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person will, so lange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres eine Rente von b Gulden geniessen. Welchen Betrag (man nennt denselben Mise) wird sie einer Lebensversicherungs-Anstalt zahlen müssen, um die gewünschte Rente zu erhalten?

Auflösung. Gesetzt den Fall, es verlangen so viele Personen, als in der Sterblichkeitstafel vom Alter a verzeichnet sind, somit A_a Personen, eine Leibrente von b Gulden, am Ende eines jeden Jahres auszahlbar, so wird die Lebensversicherungs-Gesellschaft auszuzahlen haben:

am Ende des 1. Jahres $b\,A_{a+1}$ Gulden
„ „ „ 2. „ $b\,A_{a+2}$ „
„ „ „ 3. „ $b\,A_{a+3}$ „
. . . .

denn es leben nach einem Jahre von den A_a Personen nur mehr A_{a+1}, nach zwei Jahren nur mehr A_{a+2}, nach drei Jahren nur mehr A_{a+3} u. s. f. Offenbar muss nun die Cassa der Gesellschaft, abgesehen von den Spesen, die sie sich separat vergüten lassen muss, so viel einnehmen, um diese Ausgaben bestreiten zu können. Zahlt nun eine Person den Betrag M_a, so zahlen A_a Personen $M_a\,A_a$ Gulden, und folglich hätte man, die Ausgaben der Gesellschaft gleichgesetzt deren Einnahmen, eine Gleichung zur Bestimmung von M_a. Allein die Einnahmen der Cassa, nämlich $M_a A_a$ Gulden, erfolgen sogleich, die Ausgaben aber erst in 1, 2, 3, . . . Jahren. Wenn aber $b\,A_{a+1}$ erst in einem Jahre ausgelegt werden müssen, so hat man als baaren Werth derselben, vermöge der Formel (2), $\frac{b\,A_{a+1}}{\omega}$; eben so ist der baare Werth der $b\,A_{a+2}$ Gulden, die in zwei Jahren auszahlbar sind, $\frac{b\,A_{a+2}}{\omega^2}$; der baare Werth der $b\,A_{a+3}$, in drei Jahren auszahlbaren Gulden, $\frac{b\,A_{a+3}}{\omega^3}$ etc. folglich hat man:

$$M_a A_a = \frac{b\,A_{a+1}}{\omega} + \frac{b\,A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{b\,A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots$$

und hieraus folgt:

$$M_a = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right] \tag{10}$$

als baarer Werth, den eine $a$jährige Person zahlen muss, um am Ende eines jeden Jahres die Rente von b Gulden zu erhalten.

Anmerkung. Soll die jährliche Leibrente von b Gulden nicht am Ende eines jeden Jahres, sondern am Anfange jedes Jahres gezahlt werden, so ist offenbar der baare Werth einer solchen Leibrente um b Gulden grösser, somit gleich $b + M_a$.

Beispiel. Eine 75jährige Person will, so lange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres b Gulden haben; wie gross ist die Mise, die sie hiefür zu entrichten haben wird?

Setzt man einen 5 %tigen Zinsfuss voraus, so hat man vermöge der Formel (10):

$$M_{75} = \frac{b}{69}\left[\frac{62}{1\cdot05} + \frac{55}{1\cdot05^2} + \frac{49}{1\cdot05^3} + \frac{43}{1\cdot05^4} + \frac{37}{1\cdot05^5} + \frac{32}{1\cdot05^6} + \right.$$
$$+ \frac{28}{1\cdot05^7} + \frac{24}{1\cdot05^8} + \frac{20}{1\cdot05^9} + \frac{17}{1\cdot05^{10}} + \frac{14}{1\cdot05^{11}} + \frac{12}{1\cdot05^{12}} +$$
$$+ \frac{10}{1\cdot05^{13}} + \frac{8}{1\cdot05^{14}} + \frac{6}{1\cdot05^{15}} + \frac{5}{1\cdot05^{16}} + \frac{4}{1\cdot05^{17}} + \frac{3}{1\cdot05^{18}} +$$
$$\left. + \frac{2}{1\cdot05^{19}} + \frac{1}{1\cdot05^{20}}\right]$$

und man hat dann weiter:

62	.	0·9523810	=	59·048
55	.	0·9070295	=	49·887
49	.	0·8638376	=	42·328
43	.	0·8227025	=	35·376
37	.	0·7835262	=	28·990
32	.	0·7462154	=	23·879
28	.	0·7106813	=	19·899
24	.	0 6768394	=	16·244
20	.	0·6446089	=	12·892
17	.	0·6139133	=	10·437
14	.	0·5846793	=	8·186
12	.	0·5568374	=	6·682
10	.	0·5303214	=	5·303
8	.	0·5050680	=	4·041
6	.	0 4810171	=	2·886
5	.	0·4581115	=	2·291
4	.	0·4362967	=	1·745
3	.	0·4155207	=	1·247
2	.	0·3957340	=	0·791
1	.	0·3768895	=	0·377
				332·529

daher ist

$$M_{75} = b\,.\,\frac{332\cdot529}{69} = 4\cdot8192\,.\,b$$

Aufgabe. Es ist der baare Werth einer jährlichen Leibrente b für eine Person vom Alter a gegeben. Man soll hieraus den Werth derselben Rente b für eine Person vom Alter $a + 1$, und für eine vom Alter $a - 1$ bestimmen.

Auflösung. Setzt man in die Formel (10) durchgehends statt a die Zahl $a + 1$, so erhält man

Do tablic

$$M_{a+1} = \frac{b}{A_{a+1}}\left[\frac{A_{a+2}}{\omega} + \frac{A_{a+3}}{\omega^2} + \frac{A_{a+4}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und diese Formel gibt offenbar die Mise für eine $a + 1$jährige Person, welche eine Leibrente von b Gulden geniessen will. Multiplicirt man diese Gleichung mit der Zahl A_{a+1}, ferner die Gleichung (10) mit der Zahl A_a, so erhält man:

$$M_{a+1}\,A_{a+1} = b\left[\frac{A_{a+2}}{\omega} + \frac{A_{a+3}}{\omega^2} + \frac{A_{a+4}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

$$M_a\quad A_a \quad = b\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Denkt man sich die erste dieser Gleichungen durch ω dividirt, so erhält man dann, wenn man von derselben die zweite Gleichung abzieht:

$$\frac{M_{a+1}\,A_{a+1}}{\omega} - M_a\,A_a = -\,b\,\frac{A_{a+1}}{\omega}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, durch eine ganz einfache Rechnung, wenn man M_{a+1} sucht:

$$M_{a+1} = \frac{\omega\, A_a\, M_a}{A_{a+1}} - b \tag{11}$$

und wenn man M_a sucht:

$$M_a = \frac{A_{a+1}}{\omega\, A_a} (M_{a+1} + b)$$

Setzt man in diese letzte Formel durchgehends statt a, $a-1$, so erhält man:

$$M_{a-1} = \frac{A_a}{\omega\, A_{a-1}} (M_a + b) \tag{12}$$

Die Formel (11) gibt die Mise für eine $a+1$jährige, und die Formel (12) die Mise für eine $a-1$jährige Person, in beiden Fällen vorausgesetzt, dass man die Mise für eine $a$jährige Person kennt.

Beispiel. Da die Mise für eine 75jährige Person $4\cdot8192 . b$ ist, so hat man als Mise für eine 76jährige Person:

$$M_{76} = \frac{1\cdot05 \,.\, A_{75} \,.\, M_{75}}{A_{76}} - b$$

Nun ist:

$$A_{75} = 69, \quad A_{76} = 62, \quad M_{75} = 4\cdot8192 . b$$

daher hat man:

$$M_{76} = \left(\frac{1\cdot05 \,.\, 69 \,.\, 4\cdot8192}{62} - 1\right) b$$

und diess gibt:

$$M_{76} = 4\cdot6315 . b$$

und die Mise für eine 74jährige Person ergibt sich aus der Formel

$$M_{74} = \frac{A_{75}}{1\cdot05 \,.\, A_{74}} (M_{75} + b)$$

und ist

$$M_{74} = 4\cdot9663\, b$$

Will daher jede der drei Personen, welche 74, 75 und 76 Jahre alt ist, eine Leibrente von fl. 1000 haben, so müssen dieselben einzahlen respective die Beträge:

fl. 4966, fl. 4819, fl. 4631

Kehren wir nun wieder zur Formel (10) zurück. Dieselbe lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$M_a = \frac{b\,\omega^a}{A_a} \left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots\right] \tag{13}$$

und wenn man die in der eckigen Klammer stehende Summe der Kürze halber mit S_{a+1} bezeichnet, so nämlich, dass

$$S_{a+1} = \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots \tag{14}$$

ist, so hat man:

$$(15) \qquad M_a = \frac{b\,\omega^a\,S_{a+1}}{A_a}$$

Da nun Summen der Art, wie die in (14) stehende, sehr oft bei Lebensversicherungs-Rechnungen vorkommen, so hat man sich Tafeln für solche Summen entworfen. Die nachstehende ist eine solche.

Tafel VI.

a Alter der Person	$\frac{A_a}{1{\cdot}05^a}$	S_a	a Alter der Person	$\frac{A_a}{1{\cdot}05^a}$	S_a	a Alter der Person	$\frac{A_a}{1{\cdot}05^a}$	S_a
0	1000	10782·28	32	89·61	1260·61	64	7·57	59·38
1	714·29	9782·28	33	84·15	1170·99	65	6·79	51·80
2	599·55	9067·99	34	79·00	1086·84	66	6·07	45·01
3	533·85	8468·45	35	74·15	1007·85	67	5·40	38·94
4	487·86	7934·59	36	69·41	933·70	68	4·78	33·54
5	453·66	7446·73	37	64·95	864·29	69	4·21	28·75
6	423·10	6993·07	38	60·76	799·34	70	3·68	24·54
7	395·14	6569·97	39	56·82	738·58	71	3·22	20·86
8	370·23	6174·83	40	53·12	681·75	72	2·80	17·64
9	347·44	5804·60	41	49·65	628·63	73	2·41	14·83
10	326·60	5457·15	42	46·38	578·98	74	2·08	12·42
11	308·13	5130·55	43	43·31	532·51	75	1·78	10·34
12	291·23	4822·42	44	40·43	489·28	76	1·52	8·56
13	275·24	4531·20	45	37·73	448·85	77	1·28	7·04
14	260·11	4255·96	46	35·19	411·12	78	1·09	5·76
15	245·80	3995·85	47	32·71	375·93	79	0·91	4·67
16	232·26	3750·05	48	30·38	343·22	80	0·75	3·76
17	219·46	3517·79	49	28·20	312·84	81	0·61	3·01
18	207·34	3298·33	50	26·16	284·64	82	0·51	2·39
19	195·89	3090·99	51	24·17	258·48	83	0·42	1·88
20	185·05	2895·10	52	22·31	234·31	84	0·33	1·46
21	174·45	2710·06	53	20·56	212·00	85	0·27	1·13
22	164·43	2535·60	54	18·94	191·44	86	0·21	0·86
23	154·97	2371·17	55	17·42	172·50	87	0·17	0·65
24	146·94	2216·20	56	16·01	155·07	88	0·14	0·48
25	137·61	2070·16	57	14·69	139·07	89	0·10	0·34
26	129·65	1932·54	58	13·46	124·38	90	0·07	0·24
27	122·14	1802·89	59	12·31	110·92	91	0·06	0·17
28	115·05	1680·75	60	11·24	98·61	92	0·04	0·11
29	108·11	1565·71	61	10·25	87·37	93	0·03	0·06
30	101·57	1457·60	62	9·32	77·12	94	0·02	0·03
31	95·42	1356·02	63	8·42	67·80	95	0·01	0·01

Diese Tafel wurde auf folgende Weise construirt. In der ersten Colonne, die mit a überschrieben ist, stehen die Jahre des Alters; in der zweiten Colonne sind die in der Mortalitätstafel stehenden Zahlen zurückdiscontirt auf die in der ersten Colonne stehenden Jahre, d. h. die Quotienten

$$1000, \quad \frac{750}{1\cdot 05}, \quad \frac{661}{1\cdot 05^2}, \quad \frac{618}{1\cdot 05^3}, \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

hiedurch erklärt sich auch die Ueberschrift der zweiten Colonne; die dritte Colonne wurde construirt, indem man die in der zweiten Colonne stehenden Zahlen von hinten an addirte, dergestalt, dass man zuerst die letzte Zahl 0·01 aufstellte, dann die beiden letzten $0\cdot 01 + 0\cdot 02 = 0\cdot 03$, hernach die Summe der drei letzten $0\cdot 01 + 0\cdot 02 + 0\cdot 03 = 0\cdot 06$ etc., und alle diese Summen der Reihe nach ebenfalls von hinten an in die dritte Colonne aufschrieb.

So steht z. B. neben der Zahl 80 der ersten Colonne die Zahl 0·75 der zweiten Colonne, und die Zahl 3·76 der dritten Colonne; hier stellt 80 das Alter vor, 0·75 ist gleich $\frac{37}{1\cdot 05^{80}}$ und

$$3\cdot 76 = 0\cdot 75 + 0\cdot 61 + 0\cdot 51 + 0\cdot 42 + 0\cdot 33 + 0\cdot 27 + 0\cdot 21 + 0\cdot 17 + \\ + 0\cdot 14 + 0\cdot 10 + 0\cdot 07 + 0\cdot 06 + 0\cdot 04 + 0\cdot 03 + 0\cdot 02 + 0\cdot 01$$

Steht demnach in der ersten Colonne die Zahl a, so steht in der zweiten Colonne die Zahl $\frac{A_a}{\omega^a}$, und in der dritten Colonne

$$\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots$$

welche Zahl wir, analog der Gleichung (14), mit S_a bezeichneten.

Aus der Formel (15) folgt z. B.

$$M_{74} = \frac{1\cdot 05^{74}.\ S_{75}}{77}\ .\ b$$

$$M_{75} = \frac{1\cdot 05^{75}.\ S_{76}}{69}\ .\ b$$

$$M_{76} = \frac{1\cdot 05^{76}.\ S_{77}}{62}\ .\ b$$

und da nach der letzten Tafel

$$S_{75} = 10\cdot 34$$
$$S_{76} = 8\cdot 56$$
$$S_{77} = 7\cdot 04$$

ist, so hat man:

$$M_{74} = 4\cdot 9663\ .\ b$$
$$M_{75} = 4\cdot 8174\ .\ b$$
$$M_{76} = 4\cdot 6298\ .\ b$$

was so ziemlich mit dem früher Gefundenen übereinstimmt.

Die kleine Differenz, die sich zwischen dieser und der früheren Rechnung zeigt, rührt daher, dass in der eben gegebenen Tafel sämmtliche Zahlen nur in zwei Decimalstellen gegeben sind, während die frühere Rechnung in drei Decimalen geführt wurde.

Aus der Formel (15) lässt sich leicht b bestimmen, es ist nämlich

$$(16) \qquad b = \frac{M_a A_a}{\omega^a S_{a+1}}$$

und sie lehrt, wie man die Leibrente zu bestimmen hat, falls die Mise gegeben ist.

1. Beispiel. Eine 45jährige Person hinterlegt bei einer Leibrenten-Anstalt den Betrag von fl. 5000, auf welche Leibrente, am Ende jedes Jahres auszahlbar, könnte sie rechnen (vorausgesetzt, dass bei der Leibrenten-Anstalt ein 5% tiger Zinsfuss zu Grunde gelegt wird, und die Erhaltungsspesen der Anstalt separat verlangt werden)?

In diesem Falle ist:

$$a = 45$$
$$M_a = 5000$$
$$\frac{A_{45}}{\omega^{45}} = 37 \cdot 73$$
$$S_{46} = 411 \cdot 12$$

folglich hat man:

$$b = \frac{5000 \,.\, 37 \cdot 73}{411 \cdot 12} = \text{fl. } 458 \cdot 8 \ldots$$

2. Beispiel. Eine 75jährige Person kauft sich um fl. 1000 eine Leibrente. Wie gross ist selbe?

Hier ist

$$a = 75$$
$$M_a = 1000$$
$$\frac{A_a}{\omega^a} = 1 \cdot 78$$
$$S_{76} = 8 \cdot 56$$

daher

$$b = \frac{1000 \,.\, 1 \cdot 78}{8 \cdot 56} = \text{fl. } 207 \cdot 9 \ldots$$

Anmerkung. Bisher wurde vorausgesetzt, dass eine $a$jährige Person, so lange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres eine Rente von b Gulden geniesse. Will aber eine $a$jährige Person am Ende eines jeden halben Jahres, so lange sie lebt, eine halbjährige Rente von b_1 Gulden geniessen, so wäre die Rechnung auf ganz ähnliche

Weise zu führen, nur müsste man eine Sterblichkeitstafel haben, die nicht von Jahr zu Jahr, sondern von Halbjahr zu Halbjahr die Anzahl der Lebenden gibt. Man fände alsdann:

$$M_a = \frac{b_1}{A_a}\left[\frac{A_{a+\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}}} + \frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+\frac{3}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

wo $A_{a+\frac{1}{2}}$, $A_{a+\frac{3}{2}}$, ... die aus der Sterblichkeitstafel genommene Anzahl derjenigen Personen bezeichnet, welche von 1000 in demselben Jahre Gebornen das Lebensalter $a+\frac{1}{2}$, $a+\frac{3}{2}$, ... erreichen.

Und ganz eben so hätte man bei den mannigfaltigsten Fragen ähnlicher Art vorzugehen.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person wünscht nach Ablauf von n Jahren eine Leibrente von b Gulden, zahlbar am Ende eines jeden Jahres, zu erhalten. Wie gross wird die Mise für eine solche auf n Jahre aufgeschobene Leibrente sein?

Auflösung. Denkt man sich, dass nicht eine, sondern so viele Personen, als die Sterblichkeitstafel vom Alter a hat, d. i. A_a Personen, unter derselben Bedingung der Aufgabe der Gesellschaft beitreten, so nimmt die Gesellschaft ein den Betrag $A_a M_a^{(n)}$, wenn $M_a^{(n)}$ die Mise bezeichnet, welche eine Person bezahlt, um eine auf n Jahre aufgeschobene Leibrente zu erhalten. Dagegen hat die Gesellschaft folgende Auslagen:

Am Ende des $n+1$ten Jahres, wo für das $n+1$te Jahr die Rente von b Gulden an die noch Lebenden ausbezahlt wird, $b A_{a+n+1}$, denn am Ende des $n+1$ten Jahres leben von den A_a Personen, die a Jahre alt waren, nur noch A_{a+n+1} Personen, der baare Werth der Auslage $b A_{a+n+1}$ ist somit $\frac{b A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}}$; eben so ist am Ende des $n+2$ten Jahres an die noch lebenden A_{a+n+2} Personen ein Betrag von b Gulden auszuzahlen, der baare Werth der im $n+2$ten Jahre auszuzahlenden $b A_{a+n+2}$ Gulden ist $\frac{b A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}}$ u. s. f.

Da nun die Gesellschaft, falls sie bestehen soll [1]), eben so viel einnehmen muss, als sie ausgibt, so erhält man die Gleichung:

[1]) Wir wiederholen ein für allemal, dass die Spesen zur Erhaltung einer solchen Gesellschaft separat vergütet werden müssen, und hier nie in Rechnung gezogen werden.

$$A_a M_a^{(n)} = \frac{b\,A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{b\,A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \frac{b\,A_{a+n+3}}{\omega^{n+3}} + \ldots$$

woraus folgt:

$$(17) \qquad M_a^{(n)} = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{n+3}} + \ldots\right]$$

und aus welcher man sieht, dass dieselbe aus der Formel (10) hervorgeht, wenn man in dem Werthe von M_a, welcher durch die Formel

$$(10) \quad M_a = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^n} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \ldots\right]$$

gegeben ist, die ersten n Glieder der in der Klammer stehenden Reihe weglässt. Es hat diess auch seinen Grund darin, weil bei aufgeschobenen Leibrenten die ersten n Jahre hindurch keine Auszahlungen der Cassa stattfinden.

Ganz eben so, wie wir in (15) eine vereinfachte Form für die Gleichung (10) aufgestellt haben, wollen wir nun auch die Gleichung (17) in einfacherer Form darstellen. Dieselbe gestattet folgende Schreibweise:

$$M_a^{(n)} = \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots\right]$$

und da der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck S_{a+n+1} ist, so hat man:

$$(18) \qquad M_a^{(n)} = \frac{b\,\omega^a\,S_{a+n+1}}{A_a}$$

Beispiel. Eine 20jährige Person will nach Ablauf von 20 Jahren eine Leibrente von fl. 1000, am Ende eines jeden Jahres zahlbar, beziehen. Wie gross wird die hiefür einzuzahlende Mise sein?

Es ist: $$M_{20}^{(20)} = \frac{1000 \,.\, 1{\cdot}05^{20}\,S_{41}}{A_{20}}$$

und da $S_{41} = 628{\cdot}63$, $\frac{A_{20}}{1{\cdot}05^{20}} = 185{\cdot}05$ ist, so hat man:

$$M_{20}^{(20)} = \frac{1000 \,.\, 628{\cdot}63}{185{\cdot}05} = \text{fl. } 3397$$

Sucht man aus der Formel (18) den Werth von b, so erhält man:

$$(19) \qquad b = \frac{M_a^{(n)}\,A_a}{\omega^a\,S_{a+n+1}}$$

und diese Formel dient zur Bestimmung einer auf n Jahre aufgeschobenen Leibrente.

Beispiel. Eine 50jährige Person kauft sich um fl. 3000 eine auf drei Jahre aufgeschobene Leibrente; wie gross ist die Leibrente?

Für diesen Fall ist:

$$a = 50,\quad n = 3,\quad M_a^{(n)} = 3000,\quad S_{54} = 191{\cdot}44,\quad \frac{A_{50}}{1{\cdot}05^{50}} = 26{\cdot}16$$

daher hat man:

$$b = \frac{3000\,.\,26{\cdot}16}{191{\cdot}44} = \text{fl. } 409{\cdot}94$$

und die Leibrente ist somit fl. 409·94.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person wünscht durch n Jahre, falls sie so lange lebt, und zwar am Ende eines jeden Jahres eine Rente von b Gulden zu geniessen; welchen Betrag wird sie hiefür zahlen müssen?

Auflösung. Wollte die $a$jährige Person sich eine Leibrente kaufen, d. h. eine Rente dauernd während ihrer ganzen Lebenszeit und zahlbar immer am Ende eines jeden Jahres, so müsste sie baar erlegen einen Betrag, welcher vermöge der Gleichung (13) durch folgende Formel gegeben wird:

$$\frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \ldots\right]$$

Da aber die Person sich bloss eine Leibrente kaufen will, die n Jahre dauert, so hat man offenbar bloss die ersten n Glieder des in den Klammern stehenden Ausdruckes zu nehmen, die übrigen Glieder aber wegzulassen, weil nach Ablauf von n Jahren keine Zahlung mehr statt zu finden hat, folglich ist die Mise für eine nach n Jahren aufhörende Leibrente, wenn man selbe mit ${}^{(n)}M_a$ bezeichnet:

$${}^{(n)}M_a = \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}}\right] \tag{20}$$

Nun ist:

$$S_{a+1} = \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \ldots$$

ferner, wenn man hierein statt a, $a+n$ setzt:

$$S_{a+n+1} = \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots$$

Die Subtraction dieser beiden Gleichungen gibt:

$$S_{a+1} - S_{a+n+1} = \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}}$$

folglich ist:

$${}^{(n)}M_a = \frac{b\,\omega^a\,(S_{a+1} - S_{a+n+1})}{A_a} \qquad (21$$

1. Beispiel. Ein Vater will für sein noch nicht ein Jahr altes Kind eine auf 20 Jahre dauernde Leibrente von fl. 1000 kaufen, die am Ende eines jeden dieser Jahre, falls das Kind lebt, auszubezahlen ist; wie hoch wird wohl eine solche Leibrente zu stehen kommen?

Hier ist

$$b = 1000, \quad a = 0, \quad n = 20, \quad A_0 = 1000, \quad S_1 = 9782{\cdot}28, \quad S_{21} = 2710{\cdot}06$$

folglich hat man:

$$^{(20)}M_0 = 7072{\cdot}22$$

2. Beispiel. Jemand schenkt einem fünfjährigen Kinde fl. 1000, und wünscht, dass es hievon 13 Jahre unterstützt werde. Welche Rente wird eine Lebensversicherungs-Anstalt hiefür dem Kinde geben?

Auflösung. Da aus der Gleichung (21)

$$(22) \qquad b = \frac{^{(n)}M_a\, A_a}{\omega^a\,(S_{a+1} - S_{a+n+1})}$$

folgt, so hat man, hierein

$$^{(n)}M_a = 1000, \quad \frac{A_5}{1{\cdot}05^5} = 453{\cdot}66, \quad S_6 = 6993{\cdot}07, \quad S_{19} = 3090{\cdot}99$$

setzend:

$$b = \frac{1000\,.\,453{\cdot}66}{3902{\cdot}08} = \text{fl. } 116{\cdot}26$$

und somit ist die für das Kind zu hoffende, höchstens 13 Jahre dauernde Rente fl. 116·26.

Aufgabe. Man soll den Werth der Mise für eine $a$jährige Person in dem Falle bestimmen, wo die Leibrente von b Gulden auf n Jahre aufgeschoben ist, und dann durch m Jahre dauert

Auflösung. Soll die Leibrente gleich beginnen und am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt werden, so ist der Werth derselben vermöge der Formel (10):

$$\frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Soll nun diese Leibrente auf n Jahre aufgeschoben werden, so finden am Ende der ersten n Jahre keine Auszahlungen statt, und man hat daher die ersten n Glieder des eben aufgestellten Ausdruckes wegzulassen; diess gibt:

$$\frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{n+3}} + \ldots\right]$$

Soll die aufgeschobene Leibrente nur m Jahre dauern, so sind bloss m Glieder dieses Ausdruckes aufzustellen, und man hat als Werth der gesuchten Mise, wenn man selben mit dem Zeichen ${}^{(m)}M_a^{(n)}$ bezeichnet:

$${}^{(m)}M_a^{(n)} = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{n+3}} + \ldots + \frac{A_{a+n+m}}{\omega^{n+m}}\right] \quad (23)$$

Um nun denselben in einfacherer Form darzustellen, schreibe man ihn zuerst folgendermassen:

$${}^{(m)}M_a^{(n)} = \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots + \frac{A_{a+n+m}}{\omega^{a+n+m}}\right]$$

und da

$$S_{a+n+1} = \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots$$

$$S_{a+m+n+1} = \frac{A_{a+n+m+1}}{\omega^{a+n+m+1}} + \frac{A_{a+n+m+2}}{\omega^{a+n+m+2}} + \frac{A_{a+n+m+3}}{\omega^{a+n+m+3}} + \ldots$$

ist, so hat man, beide von einander subtrahirend:

$$S_{a+n+1} - S_{a+n+m+1} = \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n+m}}{\omega^{a+n+m}}$$

folglich ist:

$${}^{(m)}M_a^{(n)} = \frac{b\,\omega^a\,(S_{a+n+1} - S_{a+n+m+1})}{A_a} \quad (24)$$

Beispiel. Ein 30jähriger Mann will nach und nach für sein Alter sorgen. Er kauft sich einstweilen eine Leibrente von fl. 360 für sein 40stes bis 50stes Lebensalter, sich vorbehaltend, vielleicht ein andermal für seine eventuelle weitere Zukunft zu sorgen. Welchen Betrag wird er hiefür zu zahlen haben?

Es ist hier die Mise für eine auf 10 Jahre aufgeschobene und dann 10 Jahre dauernde Rente zu suchen, und die ist:

$${}^{(10)}M_{30}^{(10)} = \frac{360 \,.\, 1{\cdot}05^{30}\,(S_{41} - S_{51})}{A_{30}}$$

Nun hat man:

$$\frac{A_{30}}{1{\cdot}05^{30}} = 101{\cdot}57, \quad S_{41} = 628{\cdot}63, \quad S_{51} = 258{\cdot}48$$

folglich ist:

$${}^{(10)}M_{30}^{(10)} = \frac{360 \,.\, 370{\cdot}15}{101{\cdot}57} = \text{fl. } 1311{\cdot}9 \ldots$$

Aufgabe. Jemand, der a Jahre alt ist, will durch n Jahre, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, einen Betrag P (den man Prämie nennt) zahlen, um dann nach Ablauf der n Jahre eine Leibrente von b Gulden zu geniessen. Es ist nun die Frage, wie gross wird die jährliche Prämie sein, wenn die Leibrente b gegeben ist?

Auflösung. Gesetzt den Fall A_a Personen, welche alle das Alter a haben, treten unter der Bedingung dieser Aufgabe der Lebensversicherungs-Gesellschaft bei, so sind die Einnahmen der Cassa der Versicherungs-Anstalt folgende:

sogleich, oder am Anfange des 1. Jahres $A_a P$ Gulden,
ferner „ „ „ 2. „ $A_{a+1} P$ „
„ „ „ „ 3. „ $A_{a+2} P$ „
„ . . . . „
„ „ „ „ n. „ $A_{a+n-1} P$ „

hingegen hat die Cassa auszuzahlen:

am Anfange des $n+1$ten Jahres $A_{a+n} b$ Gulden,
„ „ „ $n+2$ten „ $A_{a+n+1} b$ „
„ „ „ $n+3$ten „ $A_{a+n+2} b$ „
. . . .

Bestimmt man nun den baaren Werth sämmtlicher Einnahmen der Gesellschaft, und eben so den baaren Werth sämmtlicher Ausgaben, und setzt diese beiden Werthe einander gleich, so kömmt man zu einer Gleichung, die zur Bestimmung von P dient.

Nun sind die baaren Werthe sämmtlicher Einnahmen der Gesellschaft:

$$P\left[A_a + \frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{n-1}}\right]$$

und die baaren Werthe sämmtlicher Ausgaben:

$$b\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^n} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

folglich ist:

$$P\left[A_a + \frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{n-1}}\right] =$$
$$= b\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^n} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

und wenn man beiderseits durch ω^a dividirt:

$$P\left[\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}}\right] =$$
$$= b\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots\right]$$

Diese Gleichung gestattet eine viel kürzere Aufschreibweise, denn da

$$S_a = \frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots$$

$$S_{a+n} = \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots$$

ist, so hat man:

$$P(S_a - S_{a+n}) = b\,S_{a+n}$$

und hieraus folgt:

$$P = \frac{b\,S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}} \tag{25}$$

oder

$$b = \frac{P(S_a - S_{a+n})}{S_{a+n}} \tag{26}$$

erstere Formel dient zur Bestimmung der Prämie, falls die Leibrente gegeben ist, letztere Formel dient hingegen zur Bestimmung der Leibrente, wenn die Prämie bekannt ist.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann will 10 Jahre fort, und zwar immer am Anfange eines jeden Jahres, eine Prämie zahlen, um dann eine lebenslängliche Pension von fl. 400 zu geniessen. Wie gross ist die jährlich zu zahlende Prämie?

Hier ist

$$P = \frac{400\,.\,S_{40}}{S_{30} - S_{40}} = \frac{400\,.\,681{\cdot}75}{1457{\cdot}60 - 681{\cdot}75}$$

und wirklich berechnet:

$$P = \text{fl. } 351{\cdot}48$$

Ein 20jähriger Mann verpflichtet sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft durch 15 Jahre, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, fl. 100 zu erlegen. Auf welche Leibrente kann er dann hoffen?

$$b = \frac{100\,(S_{20} - S_{35})}{S_{35}} = \frac{100\,(2895{\cdot}10 - 1007{\cdot}85)}{1007{\cdot}85}$$

und hieraus folgt:

$$b = \text{fl. } 187{\cdot}25$$

Aufgabe. Eine $a$jährige Person verpflichtet sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres den Betrag von b Gulden einzuzahlen. Auf welchen Betrag wird die Person am Ende des $n$ten Jahres rechnen können? (Stirbt die Person vor dem Schluss des $n$ten Jahres, so verfallen ihre schon geleisteten Einzahlungen der Lebensversicherungs-Gesellschaft.)

Auflösung. Denkt man sich wieder, A_a Personen treten unter derselben Bedingung der Gesellschaft bei, so sind die Einnahmen der Gesellschaft folgende:

am Anfange des 1. Jahres $A_a\,b$ Gulden,
» » » 2. » $A_{a+1}\,b$ »
» » » 3. » $A_{a+2}\,b$ »
. . . .
» » » n. » $A_{a+n-1}\,b$ »

Nun liegen die am Anfange des ersten Jahres eingezahlten Beträge durch volle n Jahre in den Händen der Gesellschaft, daher wachsen dieselben an auf den Betrag $A_a b\,\omega^n$; eben so wachsen die durch $n-1$ Jahre in den Händen der Gesellschaft liegenden $A_{a+1} b$ Gulden auf $A_{a+1} b\,\omega^{n-1}$, die durch $n-2$ Jahre liegenden $A_{a+2} b$ Gulden auf $A_{a+2} b\,\omega^{n-2}$ u. s. f. an, folglich hat die Gesellschaft am Ende des $n$ten Jahres den Betrag

$$b\,(A_a\,\omega^n + A_{a+1}\,\omega^{n-1} + A_{a+2}\,\omega^{n-2} + \ldots + A_{a+n-1}\,\omega)$$

in Händen, der in so viele Theile zu theilen ist, als noch am Ende des $n$ten Jahres, oder was dasselbe ist, als noch am Anfange des $n+1$ten Jahres leben. Diese Zahl ist aber A_{a+n}, folglich ist das von einer Person zu hoffende Capital K zu finden aus der Gleichung:

$$(27)\quad K = \frac{b}{A_{a+n}}\,(A_a\,\omega^n + A_{a+1}\,\omega^{n-1} + A_{a+2}\,\omega^{n-2} + \ldots \\ \ldots + A_{a+n-1}\,\omega)$$

Selbe gestattet auch folgende Schreibweise:

$$K = \frac{b\,\omega^{a+n}}{A_{a+n}}\left(\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}}\right)$$

oder kürzer:

$$(28)\qquad K = \frac{b\,\omega^{a+n}}{A_{a+n}}\,(S_a - S_{a+n})$$

1. Beispiel. Eine 30jährige Person verpflichtet sich, durch 10 Jahre, am Anfange eines jeden Jahres, fl. 100 einzuzahlen; wie gross ist dann das zu hoffende Capital?

Es ist:

$$K = \frac{100\,.\,1{\cdot}05^{40}\,(S_{30} - S_{40})}{A_{40}}.$$

$$S_{30} - S_{40} = 775{\cdot}85,\quad \frac{A_{40}}{1{\cdot}05^{40}} = 53{\cdot}12$$

folglich

$$K = \frac{77585}{53{\cdot}12} = 1460{\cdot}5\ \ldots$$

2. Beispiel. Ein Vater wünscht für sein neugebornes Kind am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag zu zahlen, um demselben in seinem 18ten Jahre etwa zum Behufe seiner Befreiung von der Militärpflicht fl. 1200 geben zu können. Wie viel wird der jährlich zu erlegende Betrag sein?

Aus (28) folgt:

$$b = \frac{K\,A_{a+n}}{\omega^{a+n}\,(S_a - S_{a+n})}$$

und nun ist:

$$K = 1200,\quad \frac{A_{18}}{\omega^{18}} = 207{\cdot}34,\quad S_0 - S_{18} = 7483{\cdot}95$$

folglich hat man

$$b = \text{fl. } 33{\cdot}24$$

als jährlich zu entrichtenden Betrag.

Aufgabe. Mehrere Personen von gleichem oder auch von verschiedenem Alter vereinigen sich zu einer Gesellschaft (Ueberlebens-Gesellschaft); jede derselben verpflichtet sich durch n aufeinander folgende Jahre am Anfange eines jeden Jahres, falls sie lebt, einen gewissen Betrag einzuzahlen, und zwar die erste Person den Betrag b_1, die zweite den Betrag b_2, die dritte den Betrag b_3 u. s. f. Am Anfange des $n+1$ ten Jahres soll das ganze, durch die eingehenden Beträge und durch die Zinsen derselben aufgesammelte Capital unter die noch Lebenden der Gesellschaft vertheilt werden. Nach welchem Verhältniss hat die Theilung zu geschehen?

Auflösung. Denkt man sich zuerst, dass alle die Personen unter denselben Bedingungen einer Lebensversicherungs-Gesellschaft beigetreten wären, so hätte die erste Person Anspruch auf den Betrag

$$b_1 \frac{\omega^{a_1+n}}{A_{a_1+n}} (S_{a_1} - S_{a_1+n})$$

die zweite Person Anspruch auf den Betrag

$$b_2 \frac{\omega^{a_2+n}}{A_{a_2+n}} (S_{a_2} - S_{a_2+n})$$

die dritte Anspruch auf den Betrag

$$b_3 \frac{\omega^{a_3+n}}{A_{a_3+n}} (S_{a_3} - S_{a_3+n})$$

etc., wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Alter der beigetretenen Personen bezeichnen. Nun bilden die Personen unter sich eine (auf das Princip der Gegenseitigkeit gegründete) Lebensversicherungs-Gesellschaft, und sie haben daher ihre angesammelten Gelder nach Ablauf der n Jahre unter den noch Lebenden zu theilen nach den Verhältnissen ihrer eben angegebenen Ansprüche.

Sollte eine oder die andere der Personen aus irgend welchem Grunde verhindert gewesen sein, eine oder mehrere der Einzahlungen zu leisten, so hätte man bei der Aufstellung der Verhältnisszahlen, nach denen die Theilung vorgenommen werden soll, nämlich in dem Ausdruck

$$\frac{b}{A_{a+n}} (A_a \omega^n + A_{a+1} \omega^{n-1} + A_{a+2} \omega^{n-2} + \ldots + A_{a+n-1} \omega)$$

eines oder mehrere der Glieder wegzulassen, und zwar das Glied

$A_{a+1}\,\omega^{n-1}$, wenn die zweite Einzahlung versäumt worden wäre, das Glied $A_{a+2}\,\omega^{n-2}$, wenn die dritte Einzahlung versäumt worden wäre u. s. f.

---

2. Capitel.

Von Anwartschaften bei Todesfällen.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person will einen bestimmten Betrag bei einer Lebensversicherungs-Anstalt einzahlen, um ihren Erben ein Capital von C Gulden zu sichern. Welchen Betrag wird die Person hiefür zahlen müssen? (Man nennt hier C die Anwartschaft, den Betrag, den man für eine solche Anwartschaft gleich baar zu erlegen hat, bezeichnen wir mit W_a).

Auflösung. Denkt man sich, dass A_a Personen unter der Bedingung der Aufgabe der Lebensversicherungs-Anstalt beitreten, so hat die Cassa am Ende des ersten Jahres auszuzahlen $C(A_a - A_{a+1})$ Gulden, denn es sterben von den A_a Personen, welche a Jahre alt sind, während des ersten Jahres $A_a - A_{a+1}$ Personen, und für jede Person ist an deren Erben C Gulden zu zahlen. Im zweiten Jahre sind $C(A_{a+1} - A_{a+2})$ Gulden auszuzahlen, denn es sterben von den A_{a+1} Personen, welche $a+1$ Jahre alt sind, während des zweiten Jahres $A_{a+1} - A_{a+2}$ Personen, und für jede Person ist wieder an deren Erben C Gulden auszuzahlen u. s. f. Der baare Werth sämmtlicher Auszahlungen ist daher:

$$C\left(\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right)$$

und folglich kömmt auf eine der $A_a$te Theil. Es ist daher der baare Werth der Anwartschaft für eine $a$jährige Person:

$$(29)\quad W_a = \frac{C}{A_a}\left[\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

oder anders geschrieben:

$$W_a = \frac{C}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega} + \frac{A_{a+1}}{\omega^2} + \frac{A_{a+2}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{C}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Man kann nun auch diesen Ausdruck so schreiben:

$$W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{C\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots\right]$$

und diess gibt:

$$W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}(S_a - \omega S_{a+1}) \tag{30}$$

Beispiel. Eine 30jährige Person wünscht ihren Erben eine Anwartschaft von fl. 8000 zukommen zu lassen; was wird sie hiefür einzuzahlen haben?

$$W_{30} = 8000 \cdot \frac{\omega^{30}}{\omega A_{30}}(S_{30} - \omega S_{31})$$

Nun ist:

$$S_{30} = 1457{\cdot}60, \quad S_{31} = 1356{\cdot}02, \quad \frac{A_{30}}{\omega^{30}} = 101{\cdot}57$$

folglich hat man:

$$W_{30} = \frac{8000 \,.\, (1457{\cdot}60 - 1{\cdot}05 \,.\, 1356{\cdot}02)}{1{\cdot}05 \,.\, 101{\cdot}57} = \text{fl. } 2533$$

Um bei solchen Anstalten das Einschleichen kranker Personen möglichst zu verhindern, wird gewöhnlich als Bedingung gestellt, dass die Person, die eine Anwartschaft kaufen will, eine bestimmte Anzahl von Jahren nach dem Einkaufe noch lebe. Stirbt die Person während dieser bestimmten Jahre, die man Probejahre nennt, so verfällt das eingezahlte Geld zu Gunsten der Lebensversicherungs-Gesellschaft.

Werden also allgemein n Probejahre angenommen, so fallen in dem Ausdrucke

$$W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots\right] - $$
$$- \frac{C\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots\right]$$

die ersten n Glieder weg, weil in den ersten n Jahren keine Auszahlungen erfolgen, und man hat als Werth einer auf n Jahre aufgeschobenen Anwartschaft die Formel:

$$W_a^{(n)} = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots\right] - $$
$$- \frac{C\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots\right]$$

oder in kürzerer Gestalt:

$$W_a^{(n)} = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}(S_{a+n} - \omega S_{a+n+1}) \tag{31}$$

Beispiel. Eine 30jährige Person wünscht für ihre Erben eine Anwartschaft von fl. 8000 zu erwerben. Die Versicherungs-Gesellschaft, an die sie sich wendet, geht mit ihr einen hierauf bezüglichen Vertrag ein, bestimmt aber in demselben zwei Probejahre. Stirbt daher die Person vor Ablauf der zwei Jahre, so haben die Erben gar keinen Anspruch an die Gesellschaft. Wie gross wird der Betrag sein, den die 30jährige Person hiefür zu zahlen hat?

Hier ist

$$W_{30}^{(2)} = \frac{8000 \cdot \omega^{29}}{A_{30}} (S_{32} - \omega S_{33})$$

und da

$$\frac{A_{30}}{\omega^{30}} = 101{\cdot}57$$

$$S_{32} - \omega S_{33} = 31{\cdot}07$$

ist, so hat man:

$$W_{30}^{(2)} = \text{fl. } 2330{\cdot}6$$

Aufgabe. Eine $a$jährige Person wünscht eine Anwartschaft zu kaufen, die in dem Falle den Erben der Person ausbezahlt wird, falls sie innerhalb der ersten n Jahre nach ihrem Einkaufe stirbt; wie gross ist der Werth einer solchen Anwartschaft?

Auflösung. Der Betrag einer Anwartschaft ist im Allgemeinen:

$$\frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{C\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots\right]$$

Wird aber die Anwartschaft bloss die n ersten Jahre ausbezahlt, so hat man hievon die n ersten Glieder zu nehmen, und es ist eine solche temporäre Anwartschaft, wenn man selbe mit ${}^{n)}W_a$ bezeichnet:

$$(32)\quad {}^{(n)}W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}}\right] -$$
$$- \frac{C\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots + \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}}\right]$$

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer ist aber $S_a - S_{a+n}$, der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer $S_{a+1} - S_{a+n+1}$, folglich hat man:

$${}^{(n)}W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}[S_a - S_{a+n}] - \frac{C\omega^a}{A_a}[S_{a+1} - S_{a+n+1}]$$

oder auch in einer, zur wirklichen Berechnung brauchbareren Gestalt:

$$(33)\quad {}^{(n)}W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}[(S_a - S_{a+n}) - \omega(S_{a+1} - S_{a+n+1})]$$

Beispiel. Jemand leiht einem Künstler fl. 5000 auf zwei Jahre, fürchtet aber, dass derselbe vielleicht im Laufe der zwei

Jahre stirbt, und kauft sich daher eine Anwartschaft von fl. 5000, zahlbar in dem Falle, als der Künstler vor Ablauf der zwei Jahre stirbt. Wie theuer wird diese Anwartschaft sein, falls der Künstler 30 Jahre alt ist?

Es ist:

$$^{(2)}W_{30} = \frac{5000 \cdot \omega^{30}}{\omega \cdot A_{30}} [(S_{30} - S_{32}) - 1{\cdot}05\,(S_{31} - S_{33})]$$

und da

$$\frac{A_{30}}{\omega^{30}} = 101{\cdot}57, \quad \begin{aligned} S_{30} &= 1457{\cdot}60 \\ S_{31} &= 1356{\cdot}02 \\ S_{32} &= 1260{\cdot}61 \\ S_{33} &= 1170{\cdot}99 \end{aligned}$$

ist, so hat man:

$$^{(2)}W_{30} = \text{fl. } 126{\cdot}9 \ldots$$

Aufgabe. Eine $a$jährige Person will, so lange sie lebt, am Anfange eines jeden Jahres den Betrag b zahlen, um ihren Erben eine Anwartschaft auf das Capital von C Gulden geben zu können. Wie gross wird die jährlich zu zahlende Prämie sein müssen?

Auflösung. Zahlt eine Person, so lange sie lebt, am Anfange eines jeden Jahres b Gulden, so ist offenbar das Capital, das die Person einzahlt:

$$b + M_a$$

denn M_a ist der baare Werth einer Lebensrente von b Gulden, zahlbar am Ende eines jeden Jahres. Soll die Lebensrente am Anfange eines jeden Jahres zahlbar sein, so müssen zu M_a noch b Gulden für das erste Jahr hinzukommen, also ist in der That $b + M_a$ der baare Werth einer Lebensrente von b Gulden.

Soll die Anwartschaft, welche die Person ihren Erben hinterlassen will, C Gulden sein, so ist der baare Werth einer solchen Erbschaft W_a, somit hat man:

$$b + M_a = W_a$$

denn die Cassa muss (im Durchschnitte) eben so viel einnehmen als sie ausgibt. Setzt man nun statt M_a und W_a ihre Werthe, so erhält man:

$$b + \frac{b\,\omega^a S_{a+1}}{A_a} = \frac{C\,\omega^{a-1}}{A_a} (S_a - \omega\, S_{a+1})$$

und hieraus lässt sich b bestimmen. Es ist nämlich:

$$b = \frac{C\,\omega^{a-1}(S_a - \omega\, S_{a+1})}{A_a + \omega^a S_{a+1}}$$

Um diess einfacher darzustellen, dividire man Zähler und Nenner dieses Bruches mit ω^a, man erhält dann:

$$b = \frac{\frac{C}{\omega}(S_a - \omega S_{a+1})}{\frac{A_a}{\omega^a} + S_{a+1}}$$

Nun ist

$$\frac{A_a}{\omega^a} + S_{a+1} = S_a$$

daher ist

(34) $$b = \frac{C(S_a - \omega S_{a+1})}{\omega S_a}$$

und diese Gleichung gibt die jährlich zu zahlende Prämie b, um eine Anwartschaft auf das Capital C zu erlangen; und sucht man aus (34) C, so erhält man:

(35) $$C = \frac{b\,\omega S_a}{S_a - \omega S_{a+1}}$$

welche Gleichung die zu hoffende Anwartschaft gibt für eine jährlich zu zahlende Prämie im Betrage von b Gulden.

1. Beispiel. Eine 35jährige Person will ihren Erben fl. 20000 hinterlassen; welchen Betrag hat sie am Anfange eines jeden Jahres hiefür einzuzahlen?

$$b = \frac{20000\,(S_{35} - \omega S_{36})}{\omega S_{35}} = \text{fl. } 519\cdot\ \ldots$$

2. Beispiel. Eine 50jährige Person zahlt, so lange sie lebt, am Anfange eines jeden Jahres fl. 200; welche Anwartschaft können ihre Erben hiefür erwarten?

$$C = \frac{200\,.\,\omega S_{50}}{S_{50} - \omega S_{51}} = \text{fl. } 4516\cdot\ \ldots$$

Aufgabe. Eine $a$jährige Person will durch n Jahre, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, das sie erlebt, den Betrag b zahlen, um ihren Erben eine Erbschaft von C Gulden geben zu können. Wie gross wird in diesem Falle die jährlich zu zahlende Prämie sein müssen?

Auflösung. Zahlt eine $a$jährige Person durch n Jahre, falls sie so lange lebt, am Anfange eines jeden Jahres b Gulden, so ist das Capital, das sie auszahlte:

$$b + {}^{(n-1)}M_a^1$$

denn ${}^{(n-1)}M_a$ ist der baare Werth einer bloss $n-1$ Jahre dauernden, immer am Ende jedes Jahres zahlbaren Rente. Da nun die Person am Anfange eines jeden Jahres die Einzahlung leistet, so kommen noch b Gulden hinzu für das erste Jahr, und somit ist wirklich $b + {}^{(n-1)}M_a$ der baare Werth einer $n$mal am Anfange eines jeden Jahres zu leistenden Einzahlung einer $a$jährigen Person.

Nun ist, wie früher, der baare Werth der Anwartschaft W_a, folglich ist:

$$b + {}^{(n-1)}M_a = W_a$$

und wenn man statt ${}^{(n-1)}M_a$ und W_a ihre Werthe setzt:

$$b + \frac{b\,\omega^a (S_{a+1} - S_{a+n})}{A_a} = \frac{C\,\omega^{a-1}}{A_a}\,(S_a - \omega\, S_{a+1})$$

hieraus ergibt sich folgender Werth für b

$$b = \frac{C\,\omega^{a-1}\,(S_a - \omega\, S_{a+1})}{A_a + \omega^a\,(S_{a+1} - S_{a+n})}$$

Durch Division von Zähler und Nenner dieses Bruches durch ω^a erhält man:

$$b = \frac{\frac{C}{\omega}\,(S_a - \omega\, S_{a+1})}{\frac{A_a}{\omega^a} + S_{a+1} - S_{a+n}}$$

und diess gibt, in vereinfachter Form geschrieben:

$$b = \frac{C\,(S_a - \omega\, S_{a+1})}{\omega\,(S_a - S_{a+n})} \tag{36}$$

Beispiel. Eine 35jährige Person will ihren Erben fl. 20000 hinterlassen, und verpflichtet sich durch 10 Jahre, am Anfange eines jeden Jahres, zu einem bestimmten Beitrag. Wie gross wird dieser sein?

$$b = \frac{20000\,(S_{35} - \omega\, S_{36})}{\omega\,(S_{35} - S_{45})} = \text{fl. } 935\cdot\ \ldots$$

3. Capitel.

Von den Gegenversicherungen.

Sehr häufig geschieht es, dass Leute, welche mit einer Lebensversicherungs-Gesellschaft einen Lebensversicherungs-Vertrag eingegangen sind, noch einen zweiten Vertrag eingehen, und sich zu einer neuen Zahlung herbeilassen, um das erstangelegte Capital für den Fall zu sichern, wo es durch den Tod der Person, auf welche die Lebensversicherung lautete, verfallen wäre. Dieser zweite Vertrag wird ein Gegenversicherungs-Vertrag genannt.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person kauft sich um den Betrag M_a eine Leibrente von b Gulden, zahlbar am Ende eines jeden Jahres. Um nun ihren einstigen Erben das Capital M_a zu sichern, kauft sich die $a$jährige Person noch eine Gegenversicherung, laut welcher ihren Erben am Ende des Jahres, in welchem sie stirbt, das Capital M_a zugesprochen wird. Wie theuer wird die Gegenversicherung zu stehen kommen?

Auflösung. Die $a$jährige Person braucht offenbar nur denjenigen Betrag zu zahlen, den eine Anwartschaft auf ihr Leben kostet, und dieser Betrag ist:

$$(30) \qquad W_a = \frac{C\omega^{a-1}}{A_a}\,(S_a - \omega\, S_{a+1})$$

wo $C = M_a$ ist; also zahlte diese Person zusammen den Betrag $M_a + W_a$, um erstens eine lebenslängliche Rente von b Gulden zu haben, und um zweitens ihren einstigen Erben ein Capital von M_a Gulden zuzusichern [1]).

Beispiel. Eine 40jährige Person kauft sich eine Leibrente auf fl. 300 lautend, diese kostet, nach der Formel (15) berechnet, fl. 3550. Ferner kauft sich dieselbe Person eine Anwartschaft auf den Betrag von fl. 3550; diese kostet, vermöge der Formel (30), wieder fl. 1380, also gibt sie zusammen aus fl. 4930, und hat hiefür das Recht, für sich eine Leibrente von fl. 300, am Ende eines jeden Jahres auszahlbar, zu fordern, und ihren Erben erwirbt sie das Recht auf den Betrag von fl. 3550, zahlbar am Ende des Jahres, in welchem sie stirbt.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann leistet durch n Jahre, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, den Beitrag P, um dann für seine Zukunft eine Leibrente von b Gulden zu geniessen. Dieser Mann wünscht nun, dass seine Erben sein eingezahltes Capital rückerhalten sollen. Wie theuer wird diese Gegenversicherung, die er gleich bei der Zahlung des ersten Beitrages P zu erlegen hat, zu stehen kommen?

Auflösung. Verlangen A_a Personen unter derselben Bedingung der Aufgabe eine Gegenversicherung einzugehen, so hat die Cassa zu zahlen: nach einem Jahre $(A_a - A_{a+1})\,b$ Gulden, denn die Zahl $A_a - A_{a+1}$ bedeutet die im Laufe eines Jahres Gestorbenen, ihre respectiven Erben beanspruchen daher $(A_a - A_{a+1})\,b$ Gulden; nach zwei Jahren $(A_{a+1} - A_{a+2})\,.\,2b$ Gulden, denn im Laufe des zweiten Jahres sterben $A_{a+1} - A_{a+2}$ Personen, und da jede derselben zwei Einzahlungen leistete, so beanspruchen die Erben $2b\,(A_{a+1} - A_{a+2})$ Gulden; nach drei Jahren $(A_{a+2} - A_{a+3})\,.\,3b$

[1]) Die Versicherungs-Gesellschaft, die ihre Gelder zu $p\,\%$ fructificirt, kann der Person, die sich die Leibrente von b Gulden und die Anwartschaft M_a kaufte, zu jeder Zeit den Betrag M_a zu $p\,\%$ leihen. Denn sollte diese Person nicht im Stande sein, das Capital M_a zurückzuzahlen, so wird den Erben dieser Person statt der Anwartschaft der Schuldschein auf die Anwartschaft übergeben, und sollten die Zinsen von M_a nicht regelmässig einfliessen, so kann man sich an der Rente, die b ist, bezahlt machen.

Gulden etc., und nach n Jahren $(A_{a+n-1} - A_{a+n})\, nb$ Gulden, denn im $n$ten Jahre sterben $A_{a+n-1} - A_{a+n}$ Personen, deren respective Erben $(A_{a+n-1} - A_{a+n})\, nb$ Gulden beanspruchen. Da nun von keiner Person mehr als nb Gulden eingezahlt wurden, so werden die Erben von den Personen, die noch im Laufe der späteren Jahre sterben, auch nicht mehr als nb Gulden beanspruchen können, somit ist der baare Werth all der Ansprüche der Erben:

$$b\left[\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + 2 \cdot \frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + 3 \cdot \frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + n \cdot \frac{A_{a+n-1} - A_{a+n}}{\omega^n}\right] +$$
$$+ nb\left[\frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+1} - A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

und dieser Betrag muss von den A_a Personen baar erlegt werden. Bezeichnet man daher den Betrag, den eine dieser Personen zu erlegen hat, mit G_a, so ist:

$$G_a = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + 2 \cdot \frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + 3 \cdot \frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + n \cdot \frac{A_{a+n-1} - A_{a+n}}{\omega^n}\right] +$$
$$+ \frac{nb}{A_a}\left[\frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+1} - A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right] \qquad (37)$$

Um diesen Ausdruck in einfacherer Form wiederzugeben, setze man:

$$\Sigma_a = \frac{A_a}{\omega^a} + 2 \cdot \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \cdot \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + 4 \cdot \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots \qquad (38)$$

alsdann ist:

$$\Sigma_{a+n} = \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + 2 \cdot \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + 3 \cdot \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + 4 \cdot \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots$$

und die Differenz dieser beiden Ausdrücke gibt:

$$\Sigma_a - \Sigma_{a+n} = \frac{A_a}{\omega^a} + 2 \cdot \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \cdot \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + n \cdot \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}} +$$
$$+ n\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots\right]$$

oder

$$\Sigma_a - \Sigma_{a+n} = \frac{A_a}{\omega^a} + 2 \cdot \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \cdot \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots$$
$$\ldots + n \cdot \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}} + n\, S_{a+n} \qquad (39)$$

Nun gestattet der Ausdruck in (37) folgende Schreibweise:

$$G_a = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega} + 2 \,.\, \frac{A_{a+1}}{\omega^2} + 3 \,.\, \frac{A_{a+2}}{\omega^3} + \ldots + n \,.\, \frac{A_{a+n-1}}{\omega^n}\right] -$$
$$- \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + 2 \,.\, \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + 3 \,.\, \frac{A_{a+n}}{\omega^3} + \ldots + n \,.\, \frac{A_{a+n}}{\omega^n}\right] +$$
$$+ \frac{nb}{A_a}\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+2}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+3}} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{nb}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{n+3}} + \ldots\right]$$

oder auch die nachfolgende:

$$G_a = \frac{b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + 2 \,.\, \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \,.\, \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + n \,.\, \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}}\right] -$$
$$- \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 2 \,.\, \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + 3 \,.\, \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots + n \,.\, \frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}}\right] +$$
$$+ \frac{n\,b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} + \frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{n\,b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+n+1}}{\omega^{a+n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{\omega^{a+n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{\omega^{a+n+3}} + \ldots\right]$$

und da vermöge der Gleichung (39)

$$\frac{A_a}{\omega^a} + 2 \,.\, \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \,.\, \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \ldots + n \,.\, \frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}} =$$
$$= \Sigma_a - \Sigma_{a+n} - n\,S_{a+n}$$

ist, so hat man:

$$G_a = \frac{b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[\Sigma_a - \Sigma_{a+n} - n\,S_{a+n}\right] -$$
$$- \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\Sigma_{a+1} - \Sigma_{a+n+1} - n\,S_{a+n+1}\right] +$$
$$+ \frac{n\,b\,\omega^{a-1}}{A_a}\,S_{a+n} - \frac{n\,b\,\omega^a}{A_a}\,S_{a+n+1}$$

oder nach vorgenommener Reduction:

$$(40) \qquad G_a = \frac{b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[(\Sigma_a - \Sigma_{a+n}) - \omega\,(\Sigma_{a+1} - \Sigma_{a+n+1})\right]$$

welche Formel eine grosse Aehnlichkeit mit der in (33) aufgestellten hat.

Um solche Ausdrücke schnell berechnen zu können, hat man Tafeln für Σ_a construirt. Die Construction solcher Tafeln geschieht genau so aus S_a, wie die Construction der Tafel S_a aus der Tafel für $\frac{A_a}{\omega^a}$ hervorging; denn es steht in der Horizontalreihe beim Alter a, $S_a = \frac{A_a}{\omega^a} + \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots$

" " $a+1$, $S_{a+1} = \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots$

" " $a+2$, $S_{a+2} = \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots$

" " $a+3$, $S_{a+3} = \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots$

folglich gibt die Summe dieser Ausdrücke:

$$S_a + S_{a+1} + S_{a+2} + S_{a+3} + \ldots =$$
$$= \frac{A_a}{\omega^a} + 2 \cdot \frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3 \cdot \frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + 4 \cdot \frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \ldots$$

wie gezeigt werden sollte.

Wir lassen nun eine solche Tafel hier nachfolgen.

Tafel VII.

a	S_a	Σ_a	a	S_a	Σ_a	a	S_a	Σ_a
0	10782·28	160748·56	32	1260·61	15279·68	64	59·38	400·66
1	9782·28	149966·28	33	1170·99	14019·07	65	51·80	341·28
2	9067·99	140184·00	34	1086·84	12848·08	66	45·01	289·48
3	8468·45	131116·01	35	1007·85	11761·24	67	38·94	244·47
4	7934·59	122647·56	36	933·70	10753·39	68	33·54	205·53
5	7446·73	114712·97	37	864·29	9819·69	69	28·75	171·99
6	6993·07	107266·24	38	799·34	8955·40	70	24·54	143·24
7	6569·97	100273·17	39	738·58	8156·06	71	20·86	118·70
8	6174·83	93703·20	40	681·75	7417·48	72	17·64	97·84
9	5804·60	87528·37	41	628·63	6735·73	73	14·83	80·20
10	5457·15	81723·77	42	578·98	6107·10	74	12·42	65·37
11	5130·55	76266·62	43	532·51	5528·12	75	10·34	52·95
12	4822·42	71136·07	44	489·28	4995·61	76	8·56	42·61
13	4531·20	66313·65	45	448·85	4506·33	77	7·04	34·05
14	4255·96	61782·45	46	411·12	4057·48	78	5·76	27·01
15	3995·85	58526·49	47	375·93	3646·36	79	4·67	21·25
16	3750·05	53530·64	48	343·22	3270·43	80	3·76	16·58
17	3517·79	49780·59	49	312·84	2927·21	81	3·01	11·82
18	3298·33	46262·80	50	284·64	2614·37	82	2·39	9·81
19	3090·99	42964·47	51	258·48	2329·73	83	1·88	7·42
20	2895·10	39873·48	52	234·31	2071·25	84	1·46	5·54
21	2710·06	36978·38	53	212·00	1836·94	85	1·13	4·08
22	2535·60	34268·32	54	191·44	1624·94	86	0·86	2·95
23	2371·17	31732·72	55	172·50	1433·50	87	0·65	2·09
24	2216·20	29361·55	56	155·07	1261·00	88	0·48	1·44
25	2070·16	27145·35	57	139·07	1105·93	89	0·34	0·96
26	1932·54	25075·19	58	124·38	966·86	90	0·24	0·62
27	1802·89	23142·65	59	110·92	842·48	91	0·17	0·38
28	1680·75	21339·76	60	98·61	731·56	92	0·11	0·21
29	1565·71	19659·01	61	87·37	632·95	93	0·06	0·10
30	1457·60	18093·30	62	77·12	545·58	94	0·03	0·04
31	1356·02	16635·70	63	67·80	468·46	95	0·01	0·01

Beispiel. Ein 30jähriger Mann, der sich durch zehn Jahre hindurch zu einer, am Anfange eines jeden Jahres zu zahlenden Prämie von fl. 351·48 verpflichtet, um dann für sein weiteres Leben eine Rente von fl. 400 zu erhalten, wünscht eine Gegenversicherung zu kaufen, um nämlich seinen Erben so viel zu hinterlassen, als er bei der Lebensversicherungs-Anstalt einzahlte. Wie theuer wird eine solche Gegenversicherung sein?

In diesem Falle ist

$$a = 30\,, \quad b = 351{\cdot}48\,, \quad n = 10$$

folglich

$$G_{30} = \frac{351{\cdot}48 \,.\, \omega^{30}}{\omega \,.\, A_{30}} \left[(\Sigma_{30} - \Sigma_{40}) - \omega (\Sigma_{31} - \Sigma_{41}) \right]$$

und hieraus folgt:

$$G_a = \text{fl. } 925{\cdot}61$$

also wird dieser Mann fl. 925·61 zahlen müssen, um seinen Erben, falls er im ersten Jahre stirbt,
ein Anrecht auf den Betrag von fl. 351·48 zu hinterlassen;
falls er im zweiten Jahre stirbt,
ein Anrecht auf den Betrag von fl. 702·96 zu hinterlassen;
falls er im dritten Jahre stirbt,
ein Anrecht auf den Betrag von fl. 1054·44 zu hinterlassen;

. . . .

falls er im zehnten Jahre oder noch später stirbt,
ein Anrecht auf den Betrag von fl. 3514·80 zu hinterlassen.

Wollte dieser Mann den Betrag von fl. 925·61 nicht baar erlegen, sondern in Jahresraten, zahlbar während seines ganzen Lebens, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, so hätte man zu suchen, was der baare Werth einer am Anfange eines jeden Jahres zu leistenden Leibrente für eine 30jährige Person werth ist, und dann den gefundenen Werth gleich 925·61 zu setzen. Aus dieser Gleichung ergäbe sich dann der Betrag der Leibrente.

Die Formel (15) gibt den Werth einer, am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Leibrente b für eine $a$jährige Person; soll aber die Rente am Anfange eines jeden Jahres bezahlt werden, so erhält man $b + M_a$. Nennt man nun b_1 die jährlich, so lange die $a$jährige Person lebt, am Anfange eines jeden Jahres zu zahlende Rente, und setzt man den baaren Werth dieser Rente gleich dem G_a, so erhält man eine Gleichung, woraus leicht b_1 bestimmt werden kann.

Man hat daher

$$b_1 + \frac{b_1\, \omega^a\, S_{a+1}}{A_a} = G_a$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$\frac{b_1\, \omega^a}{A_a} \left(\frac{A_a}{\omega^a} + S_{a+1} \right) = G_a$$

oder endlich

$$\frac{b_1\, \omega^a\, S_a}{A_a} = G_a$$

woraus

$$b_1 = \frac{A_a G_a}{\omega^a S}$$

folgt. Setzt man hierein statt G_a seinen in (40) stehenden Werth, so erhält man:

$$(41) \qquad b_1 = \frac{b}{\omega S_a} \left[(\Sigma_a - \Sigma_{a+n}) - \omega (\Sigma_{a+1} - \Sigma_{a+n+1}) \right]$$

Für den eben besprochenen speciellen Fall, wo

$$a = 30, \quad b = 351{\cdot}48, \quad n = 10$$

ist, hat man $b_1 = 64{\cdot}50$ als lebenslänglich zu zahlende Gegenversicherung einer 30jährigen Person, die durch 10 Jahre sich zur Zahlung von fl. 351·48 verpflichtet, um erstens nach 10 Jahren eine Leibrente von fl. 400 zu erhalten, und um zweitens ihren Erben ein Anrecht auf sämmtliche eingezahlte Beträge zu geben, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche für die Gegenversicherung bezahlt wurden.

Aufgabe. Eine $a$jährige Person tritt einer Ueberlebens-Gesellschaft bei. Sie verpflichtet sich durch n aufeinander folgende Jahre, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, den Beitrag b zu zahlen, um dann am Ende des $n$ten Jahres, falls sie alsdann noch lebt, ein Anrecht auf das sich angesammelte Capital zu haben.

Diese Person will nun, falls sie vor Ablauf der n Jahre stirbt, dass ihre Erben die eingezahlten Beträge rückerhalten; wie gross wird der Betrag der Gegenversicherung sein?

Auflösung. Verlangen wieder A_a Personen unter derselben Bedingung der Aufgabe eine Gegenversicherung einzugehen, so hat die Cassa zu zahlen

am Ende des ersten Jahres	$(A_a - A_{a+1}) \cdot b$	Gulden,
„ „ „ zweiten „	$(A_{a+1} - A_{a+2}) \cdot 2b$	„
„ „ „ dritten „	$(A_{a+2} - A_{a+3}) \cdot 3b$	„
. . . .	. . . .	.
„ „ „ $n$ten „	$(A_{a+n-1} - A_{a+n}) \cdot nb$	„

denn es sterben im Laufe

des ersten Jahres	$A_a - A_{a+1}$	Personen,
„ zweiten „	$A_{a+1} - A_{a+2}$	„
„ dritten „	$A_{a+2} - A_{a+3}$	„
. . . . .	. . . . .	.
„ $n$ten „	$A_{a+n-1} - A_{a+n}$	„

und es sind die, von jedem der im Laufe des ersten Jahres Verstorbenen, geleisteten Einzahlungen b Gulden; ferner die, von jedem der im Laufe des zweiten Jahres Verstorbenen, geleisteten

Einzahlungen $2b$ Gulden etc. Es ist somit der baare Betrag aller dieser Auszahlungen:

$$b\left[\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + 2.\frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + 3.\frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + n.\frac{A_{a+n-1} - A_{a+n}}{\omega^n}\right]$$

folglich hat eine der A_a der Ueberlebens-Gesellschaft beigetretenen Personen als Gegenversicherung den $A_a$ten Theil zu zahlen. Bezeichnet man mit G diesen Betrag, so hat man:

$$G = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_a - A_{a+1}}{\omega} + 2.\frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{\omega^2} + 3.\frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{\omega^3} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + n.\frac{A_{a+n-1} - A_{a+n}}{\omega^n}\right] \quad (42)$$

Diese Formel lässt sich, mit Hilfe der letztgegebenen Tafeln, in jedem speciellen Falle leicht berechnen, denn sie gestattet vorerst folgende Schreibweise:

$$G = \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega} + 2.\frac{A_{a+1}}{\omega^2} + 3.\frac{A_{a+2}}{\omega^3} + \dots + n.\frac{A_{a+n-1}}{\omega^n}\right] -$$
$$- \frac{b}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + 2.\frac{A_{a+2}}{\omega^2} + 3.\frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \dots + n.\frac{A_{a+n}}{\omega^n}\right]$$

und diese Formel kann so geschrieben werden:

$$G = \frac{b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[\frac{A_a}{\omega^a} + 2.\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3.\frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \dots + n.\frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}}\right] -$$
$$- \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 2.\frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + 3.\frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \dots + n.\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}}\right]$$

Nun ist, vermöge der Formel (39),

$$\frac{A_a}{\omega^a} + 2.\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 3.\frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + \dots + n.\frac{A_{a+n-1}}{\omega^{a+n-1}} =$$
$$= \Sigma_a - \Sigma_{a+n} - n\,S_{a+n}$$

$$\frac{A_{a+1}}{\omega^{a+1}} + 2.\frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}} + 3.\frac{A_{a+3}}{\omega^{a+3}} + \dots + n.\frac{A_{a+n}}{\omega^{a+n}} =$$
$$= \Sigma_{a+1} - \Sigma_{a+n+1} - n\,S_{a+n+1}$$

folglich hat man:

$$G = \frac{b\,\omega^{a-1}}{A_a}\left[\Sigma_a - \Sigma_{a+n} - n\,S_{a+n}\right] -$$
$$- \frac{b\,\omega^a}{A_a}\left[\Sigma_{a+1} - \Sigma_{a+n+1} - n\,S_{a+n+1}\right] \quad (43)$$

als Werth der gesuchten Gegenversicherung.

Beispiel. Ein 30 jähriger Mann zahlt bei einer Ueberlebens-Gesellschaft durch 10 Jahre den Betrag von fl. 351·48 ein, weil er hofft, dann hiefür ein Capital zu erhalten, mittelst welchem er sich eine Leibrente von fl. 400 verschaffen kann. Dieser Mann wünscht nun, dass seine Erben, falls er vor dem Schlusse des zehnten Jahres stirbt, das von ihm eingezahlte Capital rückerhalten sollen. Wie gross wird der Betrag der hiefür zu leistenden Gegenversicherung sein?

Hier ist

$$b = 351{\cdot}48, \quad a = 30, \quad n = 10$$

folglich

$$G = \frac{351{\cdot}48 \,.\, \omega^{30}}{\omega \,.\, A_{30}} \left[\Sigma_{30} - \Sigma_{40} - 10\, S_{40}\right] -$$

$$- 351{\cdot}48 \,.\, \frac{\omega^{30}}{A_{30}} \left[\Sigma_{31} - \Sigma_{41} - 10\, S_{41}\right]$$

oder

$$G = \frac{351{\cdot}48}{101{\cdot}57} \left[\frac{3858{\cdot}32}{1{\cdot}05} - 3613{\cdot}67\right]$$

somit ist

$$G = 210{\cdot}8$$

III. Abschnitt.

Von den Renten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode zweier Personen abhängen.

---

1. Capitel.

Von den Renten, die vom Leben und Tode zweier Personen abhängen. Berechnung der Eherenten und Witwen-Pensionen.

Bisher hatten wir es hauptsächlich mit der Berechnung solcher Renten und Anwartschaften zu thun, die vom Leben und Tode einer Person abhingen. Nun kommen wir zur Berechnung der Renten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode zweier Personen abhängen, und namentlich sind es die Witwen- und Waisenpensionen, die zu Fragen dieser Art geführt hatten.

Es sei N die Anzahl der Ehepaare, die aus N Männern vom Alter a und N Frauen vom Alter b bestehen. Ferner seien

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \quad A_{a+3}, \quad . \; . \; .$$

die Anzahl der Männer, denen laut der Sterblichkeits-Tafel das Alter

$$a, \quad a+1, \quad a+2, \; a+3, \quad . \; . \; .$$

zukommt, und

$$B_b, \quad B_{b+1}, \quad B_{b+2}, \quad B_{b+3}, \quad . \; . \; .$$

sei die Anzahl der Frauen vom Alter

$$b, \quad b+1, \quad b+2, \quad b+3, \quad . \; . \; .$$

Es entsteht nun die Frage: wenn N die gegenwärtige Anzahl der Ehepaare ist, wie gross ist denn, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung entsprechend, nach einem Jahre die Anzahl der Ehepaare? Ferner, wie viele sind Witwen und wie viele Witwer während dieses Jahres geworden? Und endlich, wie gross ist die Zahl der ganz ausgestorbenen Ehepaare?

Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung gibt hier die nöthige Auskunft. Wir wissen nämlich aus dem Früheren, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein $a$jähriger Mann das $a+1$te Lebensalter erreicht, gleich $\frac{A_{a+1}}{A_a}$ ist, denn im Zähler stehet die Anzahl der das $a+1$te Lebensalter erreichenden Personen, und diese ist A_{a+1}; im Nenner die Anzahl aller Personen vom Alter a, die in der Sterblichkeits-Tafel angeführt sind, eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein $a$jähriger Mann das $a+1$te Lebensalter nicht erreicht, $\frac{A_a - A_{a+1}}{A_a}$; ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine $b$jährige Frau das $b+1$te Lebensaltsr erreicht, $\frac{B_{b+1}}{B_b}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine $b$jährige Frau das $b+1$te Lebensalter nicht erreicht, $\frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$, denn $B_b - B_{b+1}$ sind eben die Anzahl der Personen, welche im Laufe des $b+1$ten Jahres von B_b Personen sterben.

Man hat daher, wenn man diese vier Wahrscheinlichkeiten mit ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 bezeichnet:

$$\omega_1 = \frac{A_{a+1}}{A_a}, \quad \omega_2 = \frac{A_a - A_{a+1}}{A_a}$$

$$\omega_3 = \frac{B_{b+1}}{B_b}, \quad \omega_4 = \frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$$

Die Wahrscheinlichkeit nun, dass nach einem Jahre die beiden Ereignisse, dass Mann und Frau noch leben, zugleich eintreffen, ist daher dem Producte $\omega_1\,\omega_3$ gleich, und dieses Product ist

$$\frac{A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{B_{b+1}}{B_b}$$

d. h. unter so viel Ehepaaren, als das Product $A_a B_b$ anzeigt, bei welchen der Mann das Alter a, die Frau das Alter b haben, leben nach einem Jahre so viele Ehepaare, als das Product $A_{a+1} B_{b+1}$ bezeichnet, und diess ist um so zuverlässiger, um so richtiger, je genauer die Sterblichkeits-Tafel mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Jahre die beiden Ereignisse, dass Mann und Frau gestorben sind, eintreten, ist:

$$\frac{A_a - A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$$

d. h. unter so viel Ehepaaren, als das Product $A_a B_b$ anzeigt, von denen der Mann a Jahre, die Frau b Jahre hat, sind nach einem Jahre wahrscheinlich so viele Ehepaare ausgestorben, als das Product $(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})$ anzeigt.

Da ferner die Wahrscheinlichkeit, dass ein $a$jähriger Mann nach einem Jahre noch lebt, $\frac{A_{a+1}}{A_a}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine $b$jährige Frau nach einem Jahre nicht mehr lebt, $\frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Ereignisse zugleich eintreffen:

$$\frac{A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$$

d. h. von den schon mehrmal genannten $A_a B_b$ Ehepaaren werden nach einem Jahre wahrscheinlich so viel Witwer werden, als das Product $A_{a+1}(B_b - B_{b+1})$ anzeigt, und endlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Jahre der $a$jährige Mann nicht mehr, die $b$jährige Frau aber noch lebe:

$$\frac{A_a - A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{B_{b+1}}{B_b}$$

d. h. von den $A_a B_b$ Ehepaaren rühren nach einem Jahre wahrscheinlich $(A^a - A_{a+1}) B_{b+1}$ Witwen her.

Auf gleiche Weise findet man, dass von den $A_a B_b$ Ehepaaren nach zwei Jahren so viele Ehepaare leben, als die Zahl $A_{a+2} B_{b+2}$ anzeigt, ferner so viele Ehepaare ausgestorben sind, als die Zahl $(A_a - A_{a+2})(B_b - B_{b+2})$ ist; dass die Zahl der vorhandenen Witwer $A_{a+2}(B_b - B_{b+2})$, und die Zahl der vorhandenen Witwen $(A_a - A_{a+2}) B_{b+2}$ ist etc.

Es ist wohl klar, dass die bisherigen Sätze auch dann gelten, wenn statt Ehepaare irgend zwei bestimmte Personen genannt sind, z. B. Vater und Kind; somit gelten die Rechnungen, die für Witwenpensionen gemacht werden, auch ganz für Waisenpensionen.

Aufgabe. Zwei Personen von bestimmtem Alter a und b (etwa ein Ehepaar, oder eine Mutter und ihr Kind) wünschen am Ende eines jeden Jahres, das sie beide erleben, eine Rente von r Gulden. Diese Rente soll aufhören, falls eine der beiden Personen stirbt. Wie gross ist der baare Werth dieser Verbindungs- oder Eherente?

Auflösung. Denkt man sich, dass $A_a B_b$ die Anzahl der Paare sei, welche alle unter derselben Bedingung der Aufgabe der Versicherungs-Gesellschaft beizutreten wünschen, so leben von diesen Paaren

am Ende des ersten Jahres noch $A_{a+1} B_{b+1}$ Paare,
» » » zweiten » » $A_{a+2} B_{b+2}$ »
» » » dritten » » $A_{a+3} B_{b+3}$ »
. . . .

es hat daher die Versicherungs-Gesellschaft so oftmal r Gulden, als Paare leben, am Ende jedes Jahres auszuzahlen. Die baaren Werthe dieser Auszahlungen sind daher:

$$r\frac{A_{a+1}B_{b+1}}{\omega},\quad r\frac{A_{a+2}B_{b+2}}{\omega^2},\quad r\frac{A_{a+3}B_{b+3}}{\omega^3},\ \ldots$$

und folglich gibt die Summe dieser Beträge das Capital an, was für sämmtliche Paare zum Behufe einer verbundenen Lebensrente erforderlich ist. Dividirt man diese Summe durch $A_a B_b$, so hat man den Werth der Mise für eine Verbindungsrente; diese ist:

$$(44)\quad M_{a,b} = \frac{r}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1}B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Beispiel. Ein Ehepaar, bei welchem der Mann 80, die Frau 70 Jahre alt ist, wünschen am Ende eines jeden Jahres, das sie zusammen erleben, fl. 1000 zu erhalten. Wie hoch wird eine solche Eherente zu stehen kommen?

Es ist

$$M_{70,80} = \frac{1000}{112.37}\left[\frac{103.32}{1\cdot05} + \frac{94.28}{1\cdot05^2} + \frac{85.24}{1\cdot05^3} + \frac{77.20}{1\cdot05^4} + \frac{69.17}{1\cdot05^5} + \right.$$
$$+ \frac{62.14}{1\cdot05^6} + \frac{55.12}{1\cdot05^7} + \frac{49.10}{1\cdot05^8} + \frac{43.8}{1\cdot05^9} + \frac{37.6}{1\cdot05^{10}} + \frac{32.5}{1\cdot05^{11}} +$$
$$\left. + \frac{28.4}{1\cdot05^{12}} + \frac{24.3}{1\cdot05^{13}} + \frac{20.2}{1\cdot05^{14}} + \frac{17.1}{1\cdot05^{15}}\right]$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes sind:

103 . 32 . 0·9523810 =	3139·04
94 . 28 . 0·9070295 =	2387·30
85 . 24 . 0·8638376 =	1762·22
77 . 20 . 0·8227025 =	1266·96
69 . 17 . 0·7835262 =	919·07
62 . 14 . 0·7462154 =	647·71
55 . 12 . 0·7106813 =	469·05
49 . 10 . 0·6768394 =	331·65
43 . 8 . 0·6446089 =	221·75
37 . 6 . 0·6139133 =	136·29
32 . 5 . 0·5846793 =	93·55
28 . 4 . 0·5568374 =	62·37
24 . 3 . 0·5303214 =	38·18
20 . 2 . 0·5050680 =	20·20
17 . 1 . 0·4810171 =	8·18
Summe =	11503·52

und folglich ist

$$M_{70,80} = \frac{11503{\cdot}52}{112.37} \cdot 1000 = \text{fl. } 2775{\cdot}90$$

der Werth der zu erlegenden Mise.

Sollte diess Ehepaar nicht fl. 1000, sondern r Gulden jährlich als Eherente erhalten, so wäre die hiefür zu bezahlende Mise fl. $2{\cdot}7759 \, . \, r$

Aufgabe. Es ist der Werth der Verbindungsrente für zwei Personen von dem bestimmten Alter a und b gegeben. Man soll hieraus den Werth einer eben so grossen Verbindungsrente für zwei Personen bestimmen, die das Alter $a+1$, $b+1$, oder das Alter $a-1$, $b-1$ haben.

Auflösung. Setzt man in die Formel (44) statt a und b die Zahlen $a+1$ und $b+1$, so hat man:

$$M_{a+1,\,b+1} = \frac{r}{A_{a+1}\,B_{b+1}}\left[\frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^2} + \frac{A_{a+4}\,B_{b+4}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $A_{a+1}\,B_{b+1}$, und die Gleichung (44) mit $A_a\,B_b$, so erhält man:

$$A_{a+1}\,B_{b+1}\,M_{a+1,\,b+1} = r\left[\frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^2} + \frac{A_{a+4}\,B_{b+4}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

$$A_a\,B_b\,M_{a,\,b} = r\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch ω, und subtrahirt man dann von derselben die zweite Gleichung, so hat man:

$$\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}\,M_{a+1,\,b+1}}{\omega} - A_a\,B_b\,M_{a,\,b} = -\,r\,\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega}$$

woraus folgt:

$$M_{a+1,\,b+1} = \omega \, . \, \frac{A_a\,B_b}{A_{a+1}\,B_{b+1}}\,M_{a,\,b} - r \tag{45}$$

und

$$M_{a,\,b} = \frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega\,A_a\,B_b}\left[M_{a+1,\,b+1} + r\right]$$

Setzt man in dieser letzten Formel durchgehends statt a und b, $a-1$ und $b-1$, so erhält man:

$$M_{a-1,\,b-1} = \frac{A_a\,B_b}{\omega\,A_{a-1}\,B_{b-1}}\left[M_{a,\,b} + r\right] \tag{46}$$

Die Formel (45) gibt den Werth der Verbindungsrente für ein $a+1$ und $b+1$jähriges Paar, die Formel (46) aber gibt den Werth der Verbindungsrente für ein $a-1$ und $b-1$jähriges Paar, in beiden Fällen vorausgesetzt, dass man den Werth der Verbindungsrente für ein a und $b$jähriges Ehepaar kennt.

Beispiel. Da der Werth der Verbindungsrente für ein 70 und 80jähriges Ehepaar $2{\cdot}7759 \, . \, r$ ist, so hat man als Werth der Verbindungsrente für ein 71 und 81jähriges Ehepaar:

$$M_{71,\,81} = \omega \, . \, \frac{A_{80} \, B_{70}}{A_{81} \, B_{71}} \, M_{70,\,80} - r$$

Nun ist

$$A_{80} = 37, \quad A_{81} = 32, \quad B_{70} = 112, \quad B_{71} = 103,$$
$$M_{70,\,80} = 2{\cdot}7759 \, . \, r$$

folglich erhält man

$$M_{71,\,81} = 1{\cdot}05 \, . \, \frac{37.112}{32.103} \, . \, 2{\cdot}7759 \, . \, r - r = 2{\cdot}6645 \, . \, r$$

Ferner ist der Werth der Verbindungsrente für ein 69 und 79jähriges Paar:

$$M_{69,\,79} = \frac{A_{80} \, B_{70}}{\omega \, A_{79} \, B_{69}} \, (M_{70,\,80} + r)$$

und da $A_{79} = 43$, $B_{69} = 122$ ist, so hat man:

$$M_{69,\,79} = \frac{37 \, . \, 112}{1{\cdot}05 \, . \, 43 \, . \, 122} \, . \, 3{\cdot}7759 \, . \, r = 2{\cdot}8406 \, . \, r$$

Wir lassen nun eine kleine Tafel folgen, welche den Werth einer Verbindungsrente für den speciellen Fall gibt, wo $r = 1$ und der Zinsfuss 5% ist.

Tafel VIII.

Alter des Mannes	Alter der Frau 5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
5	12·83	13·15	12·87	12·45	12·03	11·54	10·97	10·40	9·60	8·83	8·02	7·07	6·06	5·23	4·47	3·77	3·03	2·14
10	13·15	13·50	13·22	12·80	12·39	11·89	11·31	10·73	9·98	9·13	8·30	7·31	6·28	5·41	4·63	3·89	3·13	2·19
15	12·87	13·22	12·97	12·57	12·18	11·71	11·16	10·57	9·87	9·05	8·24	7·27	6·25	5·39	4·62	3·88	3·13	2·20
20	12·45	12·80	12·57	12·21	11·85	11·41	10·89	10·37	9·67	8·88	8·10	7·16	6·17	5·34	4·57	3·86	3·10	2·19
25	12·03	12·39	12·18	11·85	11·52	11·11	10·63	10·14	9·48	8·73	7·98	7·07	6·10	5·28	4·53	3·84	3·09	2·18
30	11·54	11·89	11·71	11·41	11·11	10·74	10·30	9·85	9·23	8·52	7·81	6·93	6·00	5·20	4·47	3·79	3·06	2·17
35	10·97	11·31	11·16	10·89	10·63	10·30	9·91	9·50	8·94	8·28	7·61	6·78	5·88	5·11	4·41	3·74	3·05	2·15
40	10·40	10·73	10·57	10·37	10·14	9·85	9·50	9·15	8·64	8·03	7·41	6·63	5·77	5·03	4·35	3·70	3·01	2·14
45	9·60	9·98	9·87	9·67	9·48	9·23	8·94	8·64	8·16	7·65	7·10	6·38	5·58	4·89	4·25	3·63	2·96	2·12
50	8·83	9·13	9·05	8·88	8·73	8·52	8·28	8·03	7·65	7·19	6·71	6·07	5·33	4·69	4·10	3·52	2·89	2·08
55	8·02	8·30	8·24	8·10	7·98	7·81	7·61	7·41	7·10	6·71	6·30	5·74	5·09	4·51	3·96	3·42	2·82	2·06
60	7·07	7·31	7·27	7·16	7·07	6·93	6·78	6·63	6·38	6·07	5·74	5·28	4·72	4·21	3·74	3·25	2·72	2·01
65	6·06	6·28	6·25	6·17	6·10	6·00	5·88	5·77	5·58	5·33	5·09	4·72	4·26	3·83	3·37	3·22	2·54	1·92
70	5·23	5·41	5·39	5·34	5·28	5·20	5·11	5·03	4·89	4·69	4·51	4·21	3·83	3·47	3·13	2·78	2·38	1·83
75	4·47	4·63	4·62	4·57	4·53	4·47	4·41	4·35	4·25	4·10	3·96	3·74	3·37	3·13	2·84	2·54	2·21	1·74
80	3·77	3·89	3·88	3·86	3·84	3·79	3·74	3·70	3·63	3·52	3·42	3·25	3·22	2·78	2·54	2·30	2·02	1·63
85	3·03	3·13	3·13	3·10	3·09	3·06	3·05	3·01	2·96	2·89	2·82	2·72	2·54	2·38	2·21	2·02	1·81	1·51
90	2·14	2·19	2·20	2·19	2·18	2·17	2·15	2·14	2·12	2·08	2·06	2·01	1·92	1·83	1·74	1·63	1·51	1·39

Will also z. B. ein Ehepaar, woselbst der Mann 50, die Frau 40 Jahre alt ist, eine Eherente von fl. 100 kaufen, die am Ende eines jeden Jahres, so lange sie beide leben, ausgezahlt werden soll, so haben sie hiefür zu zahlen fl. 803; würden sie um fünf Jahre später eine solche Eherente kaufen wollen, so hätten sie dann bloss fl. 710 zu zahlen.

Aufgabe. Zwei Personen von bestimmtem Alter a und b wünschen nach Ablauf von n Jahren, so lange sie beide leben, eine Rente von r Gulden, zahlbar am Ende jedes Jahres. Wie gross ist die Mise für eine solche auf n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente?

Auflösung. Wenn die Verbindungsrente gleich am Ende des ersten Jahres ausbezahlt werden sollte, so müsste die hiefür zu zahlende Mise sein:

$$(44)\quad M_{a,\,b} = \frac{r}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3} B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Da aber die ersten n Jahre keine Auszahlung statt findet, so hat man die ersten n Glieder dieses Ausdruckes wegzulassen, und bezeichnet man mit $M^{(n)}_{a,\,b}$ eine solche Mise, so hat man:

$$(47)\quad M^{(n)}_{a,\,b} = \frac{r}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+n+1} B_{b+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2} B_{b+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

Beispiel. Ein Ehepaar, bei welchem der Mann 80, die Frau 70 Jahre alt ist, wünschen eine auf fünf Jahre aufgeschobene, am Ende eines jeden Jahres zahlbare Verbindungsrente von fl. 1000. Wie hoch kommt eine solche Rente zu stehen?

Es ist:

$$M^{(5)}_{70,\,80} = \frac{1000}{112\cdot37}\left[\frac{62.14}{1\cdot05^6} + \frac{55.12}{1\cdot05^7} + \frac{49.10}{1\cdot05^8} + \frac{43.8}{1\cdot05^9} + \frac{37.6}{1\cdot05^{10}} + \right.$$
$$\left. + \frac{32.5}{1\cdot05^{11}} + \frac{28.4}{1\cdot05^{12}} + \frac{24.3}{1\cdot05^{13}} + \frac{20.2}{1\cdot05^{14}} + \frac{17.1}{1\cdot05^{15}}\right]$$

Die einzelnen Glieder des in der Klammer stehenden Ausdruckes wurden schon früher berechnet, und es ist daher:

$$M^{(5)}_{70,\,80} = \frac{1000}{112.37} \cdot 2028{\cdot}93 = \text{fl. } 489{\cdot}60$$

also hat dieses Ehepaar fl. 489·60 zu zahlen, um dann, nachdem fünf Jahre verflossen sind, auf eine Eherente von fl. 1000, am Ende eines jeden Jahres zahlbar, rechnen zu können.

Die Formel (47) gestattet eine einfachere Darstellungsweise. Setzt man nämlich in (44) statt a und b, $a+n$ und $b+n$, so erhält man:

$$M_{a+n,\,b+n} = \frac{r}{A_{a+n} B_{b+n}}\left[\frac{A_{a+n+1} B_{b+n+1}}{\omega} + \frac{A_{a+n+2} B_{b+n+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

oder anders geschrieben:

$$M_{a+n,\, b+n} = \frac{r\,\omega^n}{A_{a+n}\,B_{b+n}}\left[\frac{A_{a+n+1}\,B_{b+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}\,B_{b+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

Dividirt man nun die Formel (47) durch die eben aufgestellte Formel, so hat man:

$$\frac{M^{(n)}_{a,\, b}}{M_{a+n,\, b+n}} = \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{1}{\omega^n}$$

und hieraus folgt:

$$M^{(n)}_{a,\, b} = \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+n,\, b+n}}{\omega^n} \tag{48}$$

So hat man für das letztgewählte Beispiel

$$M^{(5)}_{70,\, 80} = \frac{A_{85}\,B_{75}}{A_{80}\,B_{70}} \cdot \frac{M_{75,\, 85}}{\omega^5}$$

Nun ist

$A_{80} = 37$, $A_{85} = 17$, $B_{70} = 112$, $B_{75} = 69$, $\omega^5 = 1{\cdot}276282$

dann hat man noch aus Tafel VIII:

$$M_{75,\, 85} = 1000 \,.\, 2{\cdot}21 = 2210$$

daher ist:

$$M^{(5)}_{70,\, 80} = \frac{17.69}{37.112} \cdot \frac{2210}{1{\cdot}276282} = \text{fl. } 490{\cdot}14$$

was nur wenig von dem früher direct berechneten Beispiele abweicht, und diese geringe Abweichung hat ihren Grund darin, weil die Zahl 2·21, die wir aus der Tafel VIII entnommen, daselbst blos auf zwei Stellen angegeben ist.

Aufgabe. Zwei Personen von bestimmtem Alter a und b wünschen durch n Jahre, falls sie beide so lange leben, eine Verbindungsrente von r Gulden. Was werden sie für eine solche Rente zahlen müssen?

Um diese Aufgabe zu lösen, hat man bloss die ersten n Glieder der Reihe

$$\frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

zu summiren, und bezeichnet man diese Summe mit ${}^{(n)}M_{a,\, b}$, so hat man:

$${}^{(n)}M_{a,\, b} = \frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{\omega^n}\right] \tag{49}$$

welche Formel den Werth der gesuchten, bloss n Jahre dauernden Verbindungsrente gibt.

Die Betrachtung der drei Formeln (44), (47) und (49) führt auf folgende Formel:

$$M_{a,\,b} = M^{(n)}_{a,\,b} + {}^{(n)}M_{a,\,b}$$

aus welcher Formel sich der Werth von ${}^{(n)}M_{a,\,b}$ leicht berechnen lässt.

Man hat nämlich unter Zuziehung der Formel (48)

(50) $${}^{(n)}M_{a,\,b} = M_{a,\,b} - \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+n,\,b+n}}{\omega^n}$$

Beispiel. Ein Ehepaar, bei welchem der Mann 80, die Frau 70 Jahre alt ist, wünscht durch fünf aufeinander folgende Jahre, und zwar immer am Ende eines jeden Jahres, eine Eherente von fl. 1000. Wieviel wird eine solche Eherente kosten? (Es versteht sich wohl von selbst, dass wenn irgend einer der beiden Ehetheile vor Ablauf der fünf Jahre stirbt, die Eherente nicht mehr bezahlt wird.)

Der Werth einer Eherente von fl. 1000 ist für dieses Ehepaar . . . . fl. 2775·90

der Werth einer auf fünf Jahre aufgeschobenen Eherente von fl. 1000 ist . . . . fl. 489·60

daher ist der Werth einer bloss fünf Jahre dauernden Eherente von fl. 1000 . . . . fl. 2286·30

Aufgabe. Man soll den Werth einer Verbindungsrente für zwei Personen vom Alter a und b für den Fall bestimmen, wo die Verbindungsrente von r fl. auf n Jahre aufgeschoben wird, und dann durch m Jahre dauert.

Auflösung. In diesem Falle hat man in dem Ausdrucke

$$\frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

die ersten n Glieder wegzulassen, und dann von der noch übrig bleibenden Reihe m Glieder aufzustellen. Bezeichnet man den so erhaltenen Ausdruck mit ${}^{(m)}M^{(n)}_{a,\,b}$, so hat man:

(51) $${}^{(m)}M^{(n)}_{a,\,b} = \frac{r}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+n+1}\,B_{b+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}\,B_{b+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{A_{a+n+m}\,B_{b+n+m}}{\omega^{n+m}}\right]$$

Man kann diesen Ausdruck auch in einfacherer Gestalt darstellen, denn es ist:

(47) $$M^{(n)}_{a,\,b} = \frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+n+1}\,B_{b+n+1}}{\omega^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}\,B_{b+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

und setzt man hierein statt n, $m+n$, so hat man:

$$M^{(m+n)}_{a,\,b} = \frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+m+n+1}\,B_{b+m+n+1}}{\omega^{m+n+1}} + \frac{A_{a+m+n+2}\,B_{b+m+n+2}}{\omega^{m+n+2}} + \ldots\right]$$

Die Subtraction dieser beiden Gleichungen gibt offenbar die Gleichung (51), d. h. es ist:

$$ {}^{(m)}M^{(n)}_{a,\,b} = M^{(n)}_{a,\,b} - M^{(m+n)}_{a,\,b} \tag{52} $$

Beachtet man die Formel (48), laut welcher

$$ M^{(n)}_{a,\,b} = \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+n,\,b+n}}{\omega^n} \tag{48} $$

und somit, wenn man statt n, $m+n$ setzt, auch

$$ M^{(m+n)}_{a,\,b} = \frac{A_{a+m+n}\,B_{b+m+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+m+n,\,b+m+n}}{\omega^{m+n}} $$

ist, so hat man, diese Werthe in (52) einführend:

$$ {}^{(m)}M^{(n)}_{a,\,b} = \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+n,\,b+n}}{\omega^n} - $$

$$ - \frac{A_{a+m+n}\,B_{b+m+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+m+n,\,b+m+n}}{\omega^{m+n}} \tag{53} $$

Diese Formel, obwohl minder einfach aussehend als die Formel (52), ist dennoch die bequemere; denn es erscheinen darin Grössen, die alle aus den Tafeln, die wir gegeben, entnommen werden können. Ein Beispiel wird diess gleich erhellen.

Ein Ehepaar, wo der Mann 30, die Frau 25 Jahre alt ist, wünschen eine durch 5 Jahre aufgeschobene und dann 10 Jahre dauernde Eherente von fl. 200. Was ist eine solche werth?

Hier ist

$$ a = 30, \quad b = 25, \quad r = 200, \quad n = 5, \quad m = 10 $$

folglich hat man:

$$ {}^{(10)}M^{(5)}_{30,\,25} = \frac{A_{35}\,B_{30}}{A_{30}\,B_{25}} \cdot \frac{M_{35,\,30}}{\omega^5} - \frac{A_{45}\,B_{40}}{A_{30}\,B_{25}} \cdot \frac{M_{45,\,40}}{\omega^{15}} $$

Nun hat man aus der Tafel V

$$ A_{30} = 439 \qquad B_{25} = 466 $$
$$ A_{35} = 409 \qquad B_{30} = 439 $$
$$ A_{45} = 339 \qquad B_{40} = 374 $$

dann aus der Tafel VIII

$$ M_{35,\,30} = 200 \,.\, 10{\cdot}30 = 2060 $$
$$ M_{45,\,40} = 200 \,.\, 8{\cdot}64 = 1728 $$

daher ist

$$ {}^{(10)}M^{(5)}_{30,\,25} = \frac{409.439}{439.466} \cdot \frac{2060}{1{\cdot}05^5} - \frac{339.374}{439.466} \cdot \frac{1728}{1{\cdot}05^{15}} = 1416{\cdot}6 - 515{\cdot}1 $$

oder

$$ {}^{(10)}M^{(5)}_{30,\,25} = \text{fl. } 901{\cdot}5 $$

Leicht liessen sich hier noch mehrere Aufgaben lösen, wie deren analoge in den früheren Abschnitten gegeben wurden, aber wir wenden uns lieber zu den uns am wichtigsten scheinenden

Aufgaben dieser Art, nämlich zu den Berechnungen der Witwen- und Waisenpensionen.

Aufgabe. Ein Mann vom Alter a wünscht, dass seine Frau, die b Jahre alt ist, nach seinem Tode eine lebenslängliche Pension von r Gulden erhalte. Die erste Auszahlung der Pension erfolgt am Ende desjenigen Jahres, in welchem der Mann gestorben ist, die letzte Auszahlung am Ende jenes Jahres, welches die Witwe ganz durchlebt hat. Stirbt die Frau früher als der Mann, so verfällt die Einzahlung zu Gunsten der Gesellschaft. Was wird der baare Werth einer solchen Witwenpension sein?

Auflösung. Würde der Mann den Betrag

$$(10) \qquad M_b = \frac{r}{B_b}\left[\frac{B_{b+1}}{\omega} + \frac{B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

einzahlen, so bekäme die Frau eine lebenslängliche Rente von r Gulden, auszahlbar gleich am Ende des Jahres; offenbar ist aber der Wunsch des Mannes, dass die Rente erst nach seinem Tode zahlbar ist, er wird daher weniger einzuzahlen haben, als der Ausdruck M_b bezeichnet, und zwar gerade um den Betrag, der durch die Formel $M_{a,\,b}$ gegeben ist; denn diese Formel

$$(44) \qquad M_{a,\,b} = \frac{r}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

gibt den Werth einer am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente, welche so lange geleistet wird, als beide Ehetheile leben. Es ist daher der baare Werth einer Witwenpension, den ein $a$jähriger Mann zur Versorgung für seine $b$jährige Frau zu leisten hat:

$$(54) \qquad J_{a,\,b} = M_b - M_{a,\,b}$$

woselbst M_b durch die Formel

$$(15) \qquad M_b = \frac{r\,\omega^b\,S_{b+1}}{B_b}$$

und $M_{a,\,b}$ durch die Formel (44) bestimmt ist.

Beispiel. Ein 40jähriger Mann wünscht seine 25jährige Frau in ein Witwenpensions-Institut einzukaufen. Welchen Betrag hat der Mann zu zahlen, falls die Pension fl. 400 betragen soll?

Es ist

$$J_{40,\,25} = M_{25} - M_{40,\,25}$$

Nun hat man

$$M_{25} = 400 \cdot \frac{1\cdot05^{25}}{466} \cdot S_{26}$$

und da aus Tafel VI

$$\frac{466}{1\cdot05^{25}} = 137\cdot61, \quad S_{26} = 1932\cdot54$$

folgt, so ist:

$$M_{25} = 5617 \cdot 40$$

Ferner folgt aus Tafel VIII

$$M_{40,\,25} = 400 \,.\, 10 \cdot 14 = \text{fl. } 4056$$

daher ist der gesuchte Betrag nahe fl. 1561.

Aufgabe. Soll die Witwenpension, vom Moment des Einkaufes an gerechnet, bloss n Jahre dauern, so hat man statt der Formel (54) offenbar folgende andere zu setzen:

$$^{(n)}J_{a,\,b} = {}^{(n)}M_b - {}^{(n)}M_{a,\,b} \tag{55}$$

woselbst

$$^{(n)}M_b = \frac{r}{B_b}\left[\frac{B_{b+1}}{\omega} + \frac{B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{B_{b+n}}{\omega^n}\right]$$

und

$$^{(n)}M_{a,\,b} = \frac{r}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{A_{a+n} B_{b+n}}{\omega^n}\right]$$

bedeutet. Die erstere dieser Formeln gestattet eine leichte Berechnung, da

$$^{(n)}M_b = \frac{r\,\omega^b\,(S_{b+1} - S_{b+n+1})}{B_b} \tag{21}$$

ist, und die zweite dieser Formeln lässt sich folgendermassen darstellen:

$$^{(n)}M_{a,\,b} = M_{a,\,b} - \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b} \cdot \frac{M_{a+n,\,b+n}}{\omega_n} \tag{50}$$

und ist somit, falls man nur vollständige Tabellen für $M_{a,\,b}$ hat, auch nicht viel schwieriger.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann will sein 5jähriges Kind bis zum zwanzigsten Jahre versorgt wissen. Er kauft daher für dieses Kind eine Pension von jährlichen fl. 500, die aber nur dann dem Kinde ausbezahlt werden sollen, wenn es vor dem zwanzigsten Lebensjahre eine Waise wird. Was ist der Werth einer solchen Pension?

Aus der Formel (55) folgt:

$$^{(15)}J_{30,\,5} = {}^{(15)}M_5 - {}^{(15)}M_{30,\,5}$$

Nun ist:

$$^{(15)}M_5 = \frac{500 \,.\, 1 \cdot 05^5\,(S_6 - S_{21})}{B_5}$$

und da Tafel VI

$$S_6 = 6993 \cdot 07$$
$$S_{21} = 2710 \cdot 06$$

ferner Tafel V

$$B_5 = 579$$

gibt, so hat man:

$$^{(15)}M_5 = 4720 \cdot 5$$

Die Formel (50) liefert

$$^{(15)}M_{30\,,\,5} = M_{30\,,\,5} - \frac{A_{45}\,B_{20}}{A_{30}\,B_5} \cdot \frac{M_{45\,.\,20}}{1{\cdot}05^{15}}$$

und da Tafel VIII

$$M_{30\,,\,5} = 11{\cdot}54\,.\,500 = 5770$$
$$M_{45\,,\,20} = 9{\cdot}67\,.\,500 = 4835$$

ferner die Sterblichkeitstafel

$$A_{45} = 339 \qquad B_{20} = 491$$
$$A_{30} = 439 \qquad B_5 = 579$$

gibt, so hat man:

$$^{(15)}M_{30\,,\,5} = 5770 - \frac{339.491}{439.579} \cdot \frac{4835}{1{\cdot}05^{15}} = 4247{\cdot}1$$

Es ist somit der vom Vater zu zahlende Betrag

$$4720{\cdot}5 - 4247{\cdot}1 = \text{fl. } 473{\cdot}4$$

um seinem 5jährigen Kinde eine Waisenpension von fl. 500 bis zum zwanzigsten Lebensalter desselben zu sichern.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann wünscht für seine $b$jährige Frau eine Witwenpension im Betrage von jährlichen r Gulden anzukaufen. Da ihm die Ausgabe von $J_{a,\,b}$ Gulden auf einmal zu hoch kömmt, so entschliesst er sich, so lange seine Frau lebt, zu einer jährlich zu zahlenden Prämie von P Gulden. Es entsteht nun die Frage, wie gross denn diese, am Anfange eines jeden Jahres zu leistende Prämie sein wird?

Auflösung. Die Versicherungsanstalt empfängt: Gleich beim Einkauf P Gulden, und am Ende dieses, oder was dasselbe ist, am Anfange des nächsten Jahres und jedes folgenden Jahres, so lange beide Ehetheile leben, wieder P Gulden, somit im Ganzen den Betrag

$$P + \frac{P}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

was wir kurz durch

$$P + P\,.\,m_{a,\,b}$$

bezeichnen wollen, wo also *)

$$m_{a,\,b} = \frac{1}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

ist. Die Ausgaben der Versicherungsanstalt sind aber $J_{a,\,b}$, was gegeben ist durch die Formel (54), also hat man, die Einnahmen den Ausgaben gleich gesetzt, folgende Gleichung:

$$P + P\,.\,m_{a,\,b} = J_{a,\,b}$$

woraus

---

¹) $m_{a,\,b}$ entsteht aus $M_{a,\,b}$, wenn man in letzterem Ausdruck $r = 1$ setzt.

$$P = \frac{J_{a,\,b}}{1 + m_{a,\,b}} \tag{56}$$

folgt.

Beispiel. Ein 40jähriger Mann wünscht seine 25jährige Frau in eine Witwenpensions-Anstalt einzukaufen. Welche Prämie hat er jährlich (so lange seine Frau lebt) zu zahlen, damit seine Frau auf eine Jahrespension von fl. 800 (zahlbar immer am Ende eines jeden Jahres) rechnen kann?

Auflösung. Es ist

$$P = \frac{J_{40\,.\,25}}{1 + m_{40\,.\,25}}$$

In einem früheren Beispiele fanden wir bei Gelegenheit der Berechnung einer Witwenpension von jährlichen fl. 400

$$J_{40,\,25} = 1561$$

hier ist also, da die Pension doppelt so gross ist:

$$J_{40,\,25} = \text{fl. } 3122$$

Ferner ergibt sich aus der Tafel VIII als Werth von $m_{40\,.\,25}$ die Zahl 10·14, folglich ist:

$$P = \frac{3122}{11 \cdot 14} = \text{fl. } 280 \cdot 3$$

also muss der 40jährige Mann fl. 280·30 jährlich zahlen, um seiner Frau nach seinem Tode eine Pension von fl. 800 zu sichern.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann will für seine $b$jährige Frau eine Witwenpension von jährlichen r Gulden ankaufen. Er entschliesst sich zu einer durch n Jahre dauernden Ratenzahlung von P Gulden. Wie gross wird dieses P sein müssen, vorausgesetzt, dass die Rateneinzahlung immer, so lange beide Ehetheile leben, am Anfange eines jeden Jahres geleistet, hingegen die Pension der Frau, falls sie dieselbe erhält, immer am Ende jeden Jahres gezahlt wird.

Auflösung. Offenbar empfängt die Versicherungsanstalt, die dieses Geschäft eingeht:

$$P + \frac{P}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots + \frac{A_{a+n-1}\,B_{b+n-1}}{\omega^{n-1}}\right]$$

oder kürzer dargestellt:

$$P + P\,.\,{}^{(n-1)}m_{a,\,b}$$

und hat auszugeben $J_{a,\,b}$, also ist

$$P + P\,.\,{}^{(n-1)}m_{a,\,b} = J_{a,\,b}$$

woraus folgt:

$$P = \frac{J_{a,\,b}}{1 + {}^{(n-1)}m_{a,\,b}} \tag{57}$$

Beispiel. Ein 40jähriger Mann wünscht seine 25jährige Frau in eine Witwenpensions-Anstalt einzukaufen. Welche Prämie hat er durch fünf Jahre (falls beide Ehetheile so lange leben) zu zahlen, damit seine Frau auf eine Pension von jährlichen fl. 800 rechnen kann?

Hier ist

$$P = \frac{3122}{1 + {}^{(4)}m_{40,25}}$$

oder da

$${}^{(4)}m_{40,25} = \frac{1}{A_{40} B_{25}} \left[\frac{A_{41} B_{26}}{\omega} + \frac{A_{42} B_{27}}{\omega^2} + \frac{A_{43} B_{28}}{\omega^3} + \frac{A_{44} B_{29}}{\omega^4} \right]$$

ist, so hat man:

$$\frac{A_{41} B_{26}}{\omega} = \frac{367.461}{1 \cdot 05} = 161130$$

$$\frac{A_{42} B_{27}}{\omega^2} = \frac{360.456}{1 \cdot 05^2} = 148898$$

$$\frac{A_{43} B_{28}}{\omega^3} = \frac{353.451}{1 \cdot 05^3} = 137525$$

$$\frac{A_{44} B_{29}}{\omega^4} = \frac{346.445}{1 \cdot 05^4} = 126671$$

$$\text{Summe} = 574224$$

dann

$${}^{(4)}m_{40,25} = 3{\cdot}2947$$

folglich

$$P = \frac{3122}{4{\cdot}2947} = 726{\cdot}94$$

Zahlt also dieser 40jährige Mann am Anfange eines jeden Jahres durch fünf Jahre hindurch (falls seine Frau so lange lebt) jährlich fl. 726·94, so kann seine Frau, falls sie Witwe wird, auch wenn bis dahin nur eine einzige Einzahlung von fl. 726·94 statt fand, am Ende eines jeden Jahres auf eine Pension von fl. 800 rechnen.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann will für sein $b$jähriges Kind eine Waisenpension, die bloss bis zum $b+n$ten Lebensjahr des Kindes dauern soll, und die jährlich r Gulden beträgt, ankaufen. Damit aber der Ankauf dieser Pension dem Manne nicht zu schwer wird, entschliesst er sich durch n Jahre, immer am Anfange des Jahres, eine Prämie P zu zahlen. Wie gross wird dieses P sein müssen, vorausgesetzt, dass die Prämie P immer, so lange beide Theile leben, am Anfange eines jeden Jahres gezahlt, hingegen die Pension dem Kinde, falls es auf eine solche Anspruch hat, immer am Ende eines jeden Jahres geleistet wird?

Auflösung. Die Versicherungsanstalt, welche dieses Geschäft eingeht, empfängt offenbar

$$P(1 + {}^{(n-1)}m_{a,\,b})$$

und zahlt aus

$${}^{(n)}J_{a,\,b}$$

also ist

$$P(1 + {}^{(n-1)}m_{a,\,b}) = {}^{(n)}J_{a,\,b}$$

woraus

$$P = \frac{{}^{(n)}J_{a,\,b}}{1 + {}^{(n-1)}m_{a,\,b}} \tag{58}$$

folgt.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann will sein 5jähriges Kind bis zum 20sten Jahre versorgt wissen. Er verpflichtet sich daher durch 15 Jahre, am Anfange eines jeden Jahres, zu einer Prämienzahlung, um damit sein Kind eine Pension von fl. 500 in dem Falle erhält, als es vor dem 20sten Jahre eine Waise wird. (Stirbt das Kind vor dem 20sten Jahre, so hört die Verpflichtung des Vaters auf, weitere Prämien einzuzahlen; stirbt der Vater, bevor sein Kind das 20ste Jahr vollendet hat, so bekömmt das Kind bis zum 20sten Lebensjahr fl. 500, am Ende jedes Jahres zahlbar.)

Es ist:

$$P = \frac{{}^{(15)}J_{30,\,5}}{1 + {}^{(14)}m_{30,\,5}}$$

Nun hat man aus einer früheren Rechnung

$${}^{(15)}J_{30,\,5} = 473{\cdot}4$$

ferner ist:

$${}^{(14)}m_{30,\,5} = \frac{1}{A_{30}\,B_5}\left[\frac{A_{31}\,B_6}{\omega} + \frac{A_{32}\,B_7}{\omega^2} + \cdots + \frac{A_{44}\,B_{19}}{\omega^{14}}\right]$$

wofür man auch schreiben kann:

$${}^{(14)}m_{30,\,5} = {}^{(15)}m_{30,\,5} - \frac{A_{45}\,B_{20}}{A_{30}\,B_5} \cdot \frac{1}{\omega^{15}}$$

Es ist aber vermöge der Formel (50)

$${}^{(15)}m_{30,\,5} = m_{30,\,5} - \frac{A_{45}\,B_{20}}{A_{30}\,B_5} \cdot \frac{m_{45,\,20}}{\omega^{15}}$$

somit

$${}^{(14)}m_{30,\,5} = m_{30,\,5} - \frac{A_{45}\,B_{20}}{A_{30}\,B_5} \cdot \frac{1 + m_{45,\,20}}{\omega^{15}}$$

oder, wenn man bedenkt, dass nach Tafel VIII

$$m_{30,\,5} = 11{\cdot}54$$
$$m_{45,\,20} = 9{\cdot}67$$

ist, und die Sterblichkeitstafel die Werthe von $A_{45} = 339$, $A_{30} = 439$, $B_{20} = 491$, $B_5 = 579$ liefert:

$${}^{(14)}m_{30,\,5} = 11{\cdot}54 - \frac{339.491}{439.579} \cdot \frac{10\ 67}{\omega^{15}} = 8{\cdot}18$$

Man hat daher

$$P = \frac{473 \cdot 4}{9 \cdot 18} = \text{fl. } 51{\cdot}50$$

welcher Betrag von dem Vater durch 15 Jahre am Anfange eines jeden Jahres (das er und sein Kind erlebt) geleistet werden muss, auf dass das Kind, falls es Waise wird, bis in sein 20stes Lebensalter fl. 500 Pension hoffen kann.

---

2. Capitel.

Von den Anwartschaften bei Todesfällen.

Nachdem wir uns bei der Berechnung der Eherenten, Waisen- und Witwenpensionen längere Zeit aufgehalten, können wir uns hier um so kürzer fassen, und wenden uns daher gleich zur Lösung der wichtigsten hieher gehörigen Aufgaben.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann will einen Betrag bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft einzahlen, um nach seinem Tode seiner jetzt $b$jährigen Frau eine Erbschaft (Anwartschaft) von C Gulden, am Ende des Sterbejahres zahlbar, zu sichern. Wie gross wird dieser Betrag wohl sein müssen?

(Stirbt die Frau vor ihrem Manne, so verfällt die geleistete Einzahlung zu Gunsten der Cassa; stirbt der Mann früher als seine Frau, so erhält letztere am Ende des Sterbejahres den Betrag C.)

Auflösung. Nach dem früheren (ersten Capitel dieses Abschnittes) leben von $A_a B_b$ Ehepaaren $a$jähriger Männer und $b$jähriger Frauen nach einem Jahre $(A_a - A_{a+1}) B_{b+1}$ Witwen und $A_{a+1} B_{b+1}$ Ehepaare; nach Ablauf des zweiten Jahres leben von den $A_{a+1} B_{b+1}$ Ehepaaren $(A_{a+1} - A_{a+2}) B_{b+2}$ Witwen und $A_{a+2} B_{b+2}$ Ehepaare; und so ist ferner nach Ablauf des dritten Jahres $(A_{a+2} - A_{a+3}) B_{b+3}$ die Zahl der in diesem Jahre zu Witwen gewordenen, und die Zahl der noch lebenden Ehepaare ist: $A_{a+3} B_{b+3}$ u. s. f. Soll nun jede Witwe die Anwartschaft C beanspruchen können, so hat die Cassa der Versicherungsanstalt folgende Ausgaben zu bestreiten:

nach einem Jahre $(A_a - A_{a+1}) B_{b+1} C$ Gulden,
„ zwei Jahren $(A_{a+1} - A_{a+2}) B_{b+2} C$ „
„ drei „ $(A_{a+2} - A_{a+3}) B_{b+3} C$ „
. . . .

u. s. f. Werden nun diese sämmtlichen Auszahlungen rückdiscontirt auf den Zeitpunkt des Eintrittes der Ehepaare in die Versicherungs-Gesellschaft, und die Summe dieser Ausgaben durch die Zahl der theilnehmenden Ehepaare, d. i. durch $A_a B_b$ dividirt, so erhält man als Werth der Anwartschaft für ein Ehepaar:

$$W_{a,\,b} = \frac{C}{A_a B_b}\left[\frac{(A_a - A_{a+1})\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{(A_{a+1} - A_{a+2})\,B_{b+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(A_{a+2} - A_{a+3})\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right] \qquad (59)$$

oder anders geschrieben:

$$W_{a,\,b} = \frac{C}{A_a B_b}\left[\frac{A_a\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{C}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Da nun

$$m_{a,\,b} = \frac{1}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

ist, so hat man:

$$m_{a-1,\,b} = \frac{1}{A_{a-1} B_b}\left[\frac{A_a\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und folglich ist:

$$W_{a,\,b} = \frac{C}{A_a B_b} \cdot A_{a-1}\,B_b\,m_{a-1,\,b} - C m_{a,\,b}$$

oder reducirt:

$$W_{a,\,b} = C\left[\frac{A_{a-1}}{A_a} \cdot m_{a-1,\,b} - m_{a,\,b}\right] \qquad (60)$$

Diese Rechnung setzt voraus, dass die Frau am Ende des Sterbejahres ihres Mannes noch lebt. Stirbt auch sie vor Ablauf des Sterbejahres ihres Mannes, so verfällt die Anwartschaft zu Gunsten der Cassa der Gesellschaft. So z. B. wenn am 1. Jänner die Einzahlung geleistet wurde, im Monate März der Mann stirbt, erhält die Witwe, nur wenn sie am letzten December des Sterbejahres ihres Mannes noch lebt, die Anwartschaft C.

Soll aber die Anwartschaft in dem Falle, als die Frau ihren Mann überlebt, aber dennoch vor Ablauf des Sterbejahres ihres Mannes stirbt, den Erben der Frau zufallen und nicht der Cassa der Versicherungsanstalt, so wird der baare Werth einer solchen Anwartschaft grösser sein als $W_{a,\,b}$. Bedenkt man nämlich, dass im Laufe des ersten Jahres von den $A_a B_b$ Ehepaaren mehrere Ehepaare ganz aussterben, und zwar nach den Regeln der Wahrscheinlichkeits-Rechnung so viele, als die Zahl $(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})$ anzeigt, und dass unter diesen sich einige befinden, wo zuerst die Frau starb, dann der Mann, und andere, wo das entgegengesetzte Ereigniss eintrat. Der Bedingung der Aufgabe gemäss verfällt die Anwartschaft zu Gunsten der Cassa im ersten Falle, hingegen zu Gunsten der Erben der Witwe im zweiten Falle. Nehmen wir an, dass beide Fälle gleich oft eintreten, so hat die Versicherungsanstalt am Ende des ersten Jahres an die Erben der Witwen den Betrag $\frac{C}{2}(A_a - A_{a+1})(A_b - B_{b+1})$ auszuzahlen.

Am Anfange des zweiten Jahres leben von den $A_a B_b$ Ehepaaren nur noch $A_{a+1} B_{b+1}$ Ehepaare, von diesen sterben, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung entsprechend, im Laufe des Jahres $(A_{a+1} - A_{a+2})(B_{b+1} - B_{b+2})$ Ehepaare aus, und die Cassa hat den Erben der halben Anzahl dieser ausgestorbenen Paare den Betrag C auszuzahlen, somit sind am Ende des zweiten Jahres die Auszahlungen der Cassa:

$$\frac{C}{2}(A_{a+1} - A_{a+2})(B_{b+1} - B_{b+2})$$

eben so belaufen sich am Ende des dritten Jahres die Auszahlungen der Cassa auf

$$\frac{C}{2}(A_{a+2} - A_{a+3})(B_{b+2} - B_{b+3})$$

etc. Der baare Werth aller dieser Auszahlungen ist demnach:

$$\frac{C}{2}\left[\frac{(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})}{\omega} + \frac{(A_{a+1} - A_{a+2})(B_{b+1} - B_{b+2})}{\omega^2} + \ldots\right]$$

folglich ist die für ein Ehepaar zu leistende Zahlung nebst der schon früher angegebenen Summe $W_{a,\,b}$ noch

$$\frac{C}{2A_a B_b}\left[\frac{(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})}{\omega} + \frac{(A_{a+1} - A_{a+2})(B_{b+1} - B_{b+2})}{\omega^2} + \ldots\right]$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck mit $w_{a,\,b}$ und entwickelt man denselben, so erhält man:

$$(61) \quad w_{a,\,b} = \frac{C}{2A_a B_b}\left[\frac{A_a B_b}{\omega} + \frac{A_{a+1} B_{b+1}}{\omega^2} + \ldots\right] - \frac{C}{2A_a B_b}\left[\frac{A_a B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1} B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right] - \frac{C}{2A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1} B_b}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+1}}{\omega^2} + \ldots\right] + \frac{C}{2A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

Beachtet man nun folgende vier Gleichungen:

$$m_{a,\,b} = \frac{1}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

$$m_{a-1,\,b} = \frac{1}{A_{a-1} B_b}\left[\frac{A_a B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+1} B_{b+2}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

$$m_{a,\,b-1} = \frac{1}{A_a\,B_{b-1}}\left[\frac{A_{a+1}\,B_b}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+1}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

$$m_{a-1,\,b-1} = \frac{1}{A_{a-1}\,B_{b-1}}\left[\frac{A_a\,B_b}{\omega} + \frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega^2} + \ldots\right]$$

und sucht man aus diesen die Werthe der in den eckigen Klammern stehenden Reihen, so hat man, selbe in (61) einführend:

$$w_{a,\,b} = \frac{C}{2}\left[\frac{A_{a-1}\,B_{b-1}}{A_a\,B_b}\,m_{a-1,\,b-1} - \frac{A_{a-1}}{A_a}\,m_{a-1,\,b} - \right.$$

$$\left. - \frac{B_{b-1}}{B_b}\,m_{a,\,b-1} + m_{a,\,b}\right] \quad (62)$$

als der gesuchte Werth, der nebst $W_{a,\,b}$ gezahlt werden muss, wenn der $a$jährige Mann seiner $b$jährigen Frau eine Anwartschaft von C Gulden sichern will, die zahlbar ist in dem Falle, als seine Frau ihn überlebt, und zwar am Ende des Sterbejahres, und selbst in dem Falle, wenn die Frau das Ende des Sterbejahres nicht mehr erreicht.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann will seiner $b$jährigen Frau nach seinem Tode eine Anwartschaft von C Gulden sichern. Die Lebensversicherungs-Anstalt will nur dann in dieses Geschäft eingehen, wenn n Probejahre zugestanden werden (d. h. der Mann muss volle n Jahre der Gesellschaft beigetreten gewesen sein, bevor dessen Frau Anspruch auf die Anwartschaft hat). Wie gross ist die hiefür zu leistende Einkaufssumme?

Auflösung. Da durch volle n Jahre keine Auszahlungen statt finden, so hat man in dem Ausdrucke (59) die ersten n Glieder der in der eckigen Klammer stehenden Reihe wegzulassen, und man erhält sodann, den gewonnenen Ausdruck mit $W^{(n)}_{a,\,b}$ bezeichnend:

$$W^{(n)}_{a,\,b} = \frac{C}{A_a\,B_b}\left[\frac{(A_{a+n} - A_{a+n+1})\,B_{b+n+1}}{\omega^{n+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(A_{a+n+1} - A_{a+n+2})\,B_{b+n+2}}{\omega^{n+2}} + \ldots\right]$$

oder in anderer Form:

$$W^{(n)}_{a,\,b} = C\left[\frac{A_{a-1}}{A_a}\,m^{(n)}_{a-1,\,b} - m^{(n)}_{a,\,b}\right]$$

Nun ist aber vermöge der Formel (48)

$$m^{(n)}_{a,\,b} = \frac{A_{a+n}\,B_{b+n}}{A_a\,B_b}\cdot\frac{m_{a+n,\,b+n}}{\omega^n}$$

$$m^{(n)}_{a-1,\,b} = \frac{A_{a+n-1}\,B_{b+n}}{A_{a-1}\,B_b}\cdot\frac{m_{a+n-1,\,b+n}}{\omega^n}$$

folglich hat man:

$$(63) \quad W^{(n)}_{a,\,b} = \frac{C\,B_{b+n}}{A_a\,B_b\,\omega^n}\left[A_{a+n-1}\,m_{a+n-1,\,b+n} - A_{a+n}\,m_{a+n,\,b+n}\right]$$

Auch hier findet die Zahlung der Anwartschaft am Ende des Sterbejahres des Mannes nur statt, wenn die Witwe alsdann noch lebt.

Soll die Anwartschaft auch dann ausbezahlt werden, wenn die Witwe nicht das Ende des Sterbejahres ihres Mannes erlebt, so hat der Mann mehr einzuzahlen, als der Ausdruck $W^{(n)}_{a,\,b}$ liefert, und zwar um $w^{(n)}_{a,\,b}$, das sich ergibt aus der Formel:

$$w^{(n)}_{a,\,b} = \frac{C}{2}\left[\frac{A_{a-1}\,B_{b-1}}{A_a\,B_b}\,m^{(n)}_{a-1,\,b-1} - \frac{A_{a-1}}{A_a}\,m^{(n)}_{a-1,\,b} - \right.$$
$$\left. - \frac{B_{b-1}}{B_b}\,m^{(n)}_{a,\,b-1} + m^{(n)}_{a,\,b}\right]$$

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann will während der ganzen Zeit seiner Ehe, und zwar am Anfange eines jeden Jahres, eine Rente von P Gulden zahlen, um seiner $b$jährigen Frau eine Anwartschaft von C Gulden zu sichern. Wie gross wird die jährlich zu zahlende Rente sein?

Auflösung. Die Cassa erhält

$$P + P m_{a,\,b}$$

und hat dafür zu leisten $W_{a,\,b}$, also muss

$$P + P m_{a,\,b} = W_{a,\,b}$$

sein, somit ist

$$(64) \qquad P = \frac{W_{a,\,b}}{1 + m_{a,\,b}}$$

Es erhält daher die Witwe für die während ihrer Ehe jährlich gezahlte Prämie P die Anwartschaft $W_{a,\,b}$ ausgezahlt am Ende des Sterbejahres ihres Mannes, falls sie alsdann noch lebt. Soll, falls die Witwe nicht das Ende des Sterbejahres ihres Mannes erlebt, diese Anwartschaft auf die Erben der Witwe übergehen, so ist die zu zahlende Prämie

$$P_1 = \frac{W_{a,\,b} + w_{a,\,b}}{1 + m_{a,\,b}}$$

3. Capitel.

Von den Gegenversicherungen.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann kauft für seine $b$jährige Frau um den Betrag $J_{a,\,b}$, was dem Vorhergehenden zufolge gleich $M_b - M_{a,\,b}$ ist, eine Witwenpension von jährlichen r Gulden

Dieser Mann will nun den eingezahlten Betrag $J_{a,\,b}$ in dem Falle zurückerhalten, wenn er seine Frau überlebt. Welche Leistung (Gegenversicherung) hat er hiefür der Versicherungsanstalt zu erstatten, wenn die Rückzahlung am Ende des Jahres geleistet werden soll, in welchem die Frau stirbt?

Auflösung. Denkt man sich, dass $A_a\,B_b$ Ehepaare genau unter derselben Bedingung der Aufgabe der Versicherungs-Gesellschaft beitreten, so erhält jeder Mann, falls er Witwer wird, der Bedingung der Aufgabe gemäss $J_{a,\,b}$ Gulden; somit sind die Auszahlungen der Versicherungsanstalt nach einem Jahre an jeden der $A_{a+1}\,(B_b - B_{b+1})$ Witwer $J_{a,\,b}$ Gulden, somit zusammen $J_{a,\,b}\,A_{a+1}\,(B_b - B_{b+1})$ Gulden; eben so

nach zwei Jahren $J_{a,\,b}\,A_{a+2}\,(B_{b+1} - B_{b+2})$ Gulden,
" drei " $J_{a,\,b}\,A_{a+3}\,(B_{b+2} - B_{b+3})$ "
. . . .

Der baare Werth dieser Auszahlungen ist:

$$J_{a,\,b}\left[\frac{(B_b - B_{b+1})\,A_{a+1}}{\omega} + \frac{(B_{b+1} - B_{b+2})\,A_{a+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(B_{b+2} - B_{b+3})\,A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

somit ist der für ein Ehepaar kommende Theil:

$$\frac{J_{a,\,b}}{A_a\,B_b}\left[\frac{(B_b - B_{b+1})\,A_{a+1}}{\omega} + \frac{(B_{b+1} - B_{b+2})\,A_{a+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(B_{b+2} - B_{b+3})\,A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und diess gestattet folgende Schreibweise:

$$\frac{J_{a,\,b}}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_b}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+1}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+2}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{J_{a,\,b}}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Nun ist:

$$m_{a,\,b} = \frac{1}{A_a\,B_b}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

$$m_{a,\,b-1} = \frac{1}{A_a\,B_{b-1}}\left[\frac{A_{a+1}\,B_b}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+1}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,B_{b+2}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

somit hat man statt obigen Ausdruck den folgenden:

$$J_{a,\,b}\left[\frac{B_{b-1}}{B_b}\,m_{a,\,b-1} - m_{a,\,b}\right] \tag{65}$$

und diess gibt den gesuchten Betrag der Gegenversicherung. Es ist aus dem ganzen Gange der Rechnung ersichtlich, dass dem Witwer der Betrag $J_{a,\,b}$ nur dann ausbezahlt wird, wenn er am

Ende des Sterbejahres seiner Frau noch lebt. Soll aber, unabhängig von dieser Bedingung, die Auszahlung des Betrages $J_{a,\,b}$ erfolgen, so ist der in (65) stehende Ausdruck nicht der vollständige Werth der Gegenversicherung, sondern man hat noch zu demselben den Ausdruck hinzuzusetzen

$$(66) \qquad \frac{J_{a,\,b}}{2}\left[\frac{A_{a-1}\,B_{b-1}}{A_a\,B_b}\,m_{a-1,\,b-1} - \frac{B_{b-1}}{B_b}\,m_{a,\,b-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{A_{a-1}}{A_a}\,m_{a-1,\,b} + m_{a,\,b}\right]$$

Addirt man daher die beiden Ausdrücke (65) und (66), so erhält man als vollständigen Werth einer Gegenversicherung:

$$G_{a,\,b} = \frac{J_{a,\,b}}{2}\left[\frac{A_{a-1}\,B_{b-1}}{A_a\,B_b}\,m_{a-1,\,b-1} + \frac{B_{b-1}}{B_b}\,m_{a,\,b-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{A_{a-1}}{A_a}\,m_{a-1,\,b} - m_{a,\,b}\right]$$

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann zahlt während seiner Ehe am Anfange eines jeden Jahres den Betrag P, auf dass seine $b$jährige Frau, falls sie Witwe wird, eine lebenslängliche Rente von r Gulden beanspruchen kann.

Dieser Mann will nun alle seine eingezahlten Beträge zurück erhalten, falls er seine Frau überlebt. Wie hoch wird eine solche Gegenversicherung zu stehen kommen, vorausgesetzt, dass die Rückzahlung am Ende des Sterbejahres der Frau geschieht?

Auflösung. Denkt man sich wieder, dass $A_a B_b$ Ehepaare unter gleicher Bedingung der Versicherungs-Gesellschaft beitreten, so hat die Gesellschaft auszuzahlen:

Nach einem Jahre an jedem zum Witwer gewordenen P Gulden, somit im Ganzen $A_{a+1}(B_b - B_{b+1})\,P$ Gulden; nach zwei Jahren an jedem im zweiten Jahre zum Witwer gewordenen, deren Zahl $A_{a+2}(B_{b+1} - B_{b+2})$ ist, $2P$ Gulden, somit im Ganzen $2\,A_{a+2}(B_{b+1} - B_{b+2})\,P$ Gulden; nach drei Jahren an jedem im dritten Jahre zum Witwer gewordenen, deren Zahl $A_{a+3}(B_{b+2} - B_{b+3})$ ist, $3P$ Gulden, somit im Ganzen $3\,A_{a+3}(B_{b+2} - B_{b+3})\,P$ Gulden u. s. f.; es ist folglich der baare Werth aller dieser Auslagen:

$$P\left[\frac{A_{a+1}(B_b - B_{b+1})}{\omega} + 2\,.\,\frac{A_{a+2}(B_{b+1} - B_{b+2})}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + 3\,.\,\frac{A_{a+3}(B_{b+2} - B_{b+3})}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und wird diess durch $A_a\,B_b$ dividirt, so erhält man den gesuchten Betrag der Gegenversicherung; dieser ist:

$$G_{a,b} = \frac{P}{A_a B_b}\left[\frac{A_{a+1}(B_b - B_{b+1})}{\omega} + 2.\frac{A_{a+2}(B_{b+1} - B_{b+2})}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + 3.\frac{A_{a+3}(B_{b+2} - B_{b+3})}{\omega^3} + \ldots\right] \quad (67)$$

Aus dem ganzen Gange der Rechnung sieht man, dass die Bedingung der Rechnung zu Grunde liegt, dass der Mann das Ende des Sterbejahres seiner Frau erlebt. Sollte die Auszahlung der eingezahlten Summe auch dann statt finden, wenn die letzterwähnte Bedingung nicht statt findet, so hat man den in (67) gefundenen Werth auf eine ähnliche Weise zu vervollständigen, wie diess bei früheren Aufgaben wiederholt gezeigt wurde.

IV. Abschnitt.

Lösung jener Aufgaben, welche vom Leben und Tode mehrerer Personen abhängen.

---

1. Capitel.

Berechnung der Waisenpensionen.

Aufgabe. Ein $a$jähriger Mann und dessen $b$jährige Frau wollen bei einer Lebensversicherungs-Anstalt einen Betrag einzahlen, auf dass ihr gegenwärtig c Jahre altes Kind, falls selbes älternlos würde, eine lebenslängliche, am Ende eines jeden Jahres auszuzahlende Rente von r Gulden erhalte. Wie gross ist der hiefür zu zahlende Betrag?

Auflösung. Bezeichnen

$$A_a \qquad A_{a+1} \qquad A_{a+2} \qquad A_{a+3} \quad . \quad . \quad .$$

die Anzahl jener Männer, welche nach der Sterblichkeits-Tafel das Alter

$$a \qquad a+1 \qquad a+2 \qquad a+3 \quad . \quad . \quad .$$

haben; ferner

$$B_b \qquad B_{b+1} \qquad B_{b+2} \qquad B_{b+3} \quad . \quad . \quad .$$

die Anzahl der Frauen, denen das Alter

$$b \qquad b+1 \qquad b+2 \qquad b+3 \quad . \quad . \quad .$$

zukommt; endlich

$$C_c \qquad C_{c+1} \qquad C_{c+2} \qquad C_{c+3} \quad . \quad . \quad .$$

die Anzahl der Kinder vom Alter

$$c \qquad c+1 \qquad c+2 \qquad c+3 \quad . \quad . \quad .$$

so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein $a$jähriger Mann im Laufe des Jahres stirbt:

$$\frac{A_a - A_{a+1}}{A_a}$$

ferner die Wahrscheinlichkeit, dass eine $b$jährige Frau im Laufe des Jahres stirbt:

$$\frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$$

endlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein $c$jähriges Kind das $c+1$ste Jahr erreicht:

$$\frac{C_{c+1}}{C_c}$$

folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Ereignisse, welche von einander vollkommen unabhängig sind, zugleich eintreten, dem Producte der drei einfachen Wahrscheinlichkeiten gleich, und dies ist:

$$\frac{(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})\,C_{c+1}}{A_a\,B_b\,C_c}$$

d. h. von so vielen aus Vater, Mutter und Kind vom Alter a, b, c bestehenden Familien, als die Zahl $A_a\,B_b\,C_c$ anzeigt, rühren nach einem Jahre so viel Waisen her, als die Zahl

$$(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})\,C_{c+1}$$

gibt. Eben so ist die Zahl der Waisen, die aus den obengenannten Familien herrühren, nach zwei Jahren

$$(A_a - A_{a+2})(B_b - B_{b+2})\,C_{c+2}$$

nach drei Jahren

$$(A_a - A_{a+3})(B_b - B_{b+3})\,C_{c+3}$$

. . . .

Die Versicherungs-Anstalt muss daher, soll sie ihre Verpflichtungen erfüllen können, folgenden Betrag einnehmen:

$$r\left[\frac{(A_a - A_{a+1})(B_b - B_{b+1})\,C_{c+1}}{\omega} + \right.$$
$$+ \frac{(A_a - A_{a+2})(B_b - B_{b+2})\,C_{c+2}}{\omega^2} +$$
$$\left. + \frac{(A_a - A_{a+3})(B_b - B_{b+3})\,C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

wird diess daher durch $A_a\,B_b\,C_c$ dividirt, so erhält man den gesuchten Werth einer Waisenpension.

Werden die angezeigten Multiplicationen wirklich ausgeführt, so erhält man folgende vier Reihen:

$$\frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_a B_b C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_a B_b C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_a B_b C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_{a+1} B_b C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_b C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3} B_b C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_a B_{b+1} C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_a B_{b+2} C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_a B_{b+3} C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

die auf nachstehende Weise vereinfacht werden können:

$$\frac{r}{C_c}\left[\frac{C_{c+1}}{\omega}+\frac{C_{c+2}}{\omega^2}+\frac{C_{c+3}}{\omega^3}+\ldots\right]-$$

$$-\frac{r}{A_a C_c}\left[\frac{A_{a+1}C_{c+1}}{\omega}+\frac{A_{a+2}C_{c+2}}{\omega^2}+\frac{A_{a+3}C_{c+3}}{\omega^3}+\ldots\right]-$$

$$-\frac{r}{B_b C_c}\left[\frac{B_{b+1}C_{c+1}}{\omega}+\frac{B_{b+2}C_{c+2}}{\omega^2}+\frac{B_{b+3}C_{c+3}}{\omega^3}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_{a+1}B_{b+1}C_{c+1}}{\omega}+\frac{A_{a+2}B_{b+2}C_{c+2}}{\omega^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{A_{a+3}B_{b+3}C_{c+3}}{\omega^3}+\ldots\right]$$

und dies gibt, wenn man die letzte dieser Reihen, analog der bisher gewählten Bezeichnungsweise, mit $M_{a,\,b,\,c}$ bezeichnet, folgenden Ausdruck für den Werth einer Waisenpension:

(68) Waisenpension $= M_c - M_{a,\,c} - M_{b,\,c} + M_{a,\,b,\,c}$

Soll die Pension n Jahre nach dem Einkaufe erlöschen, so ist der Werth einer solchen temporären Waisenpension:

$$^{(n)}M_c - {}^{(n)}M_{a,\,c} - {}^{(n)}M_{b,\,c} + {}^{(n)}M_{a,\,b,\,c}$$

Dass Tafeln, welche den Werth von $M_{a,\,b,\,c}$ geben sollen, äusserst voluminös sein müssten, sieht man wohl von selbst. Man ist daher in Fällen, wo man den Werth von $M_{a,\,b,\,c}$ für bestimmte Werthe von a, b und c bedarf, genöthigt, sich solchen direct zu berechnen.

---

2. Capitel.

Lehre von der Berechnung der Tontinen.

Eine Tontinen-Gesellschaft (Lorenzi Tonti führte eine solche im Jahre 1653 zuerst ein) ist eine aus beliebig vielen, gleich oder verschieden alten Personen bestehende Gesellschaft, welche eine Rente so lange geniesst und unter den Lebenden stets auf gleiche Weise vertheilt, als irgend eine Person dieser Gesellschaft noch lebt. Nach diesem sieht man, dass die Rente erst mit dem Tode der am längsten lebenden Person dieser Gesellschaft aufhört.

Aufgabe. Zwei Personen vom Alter a und b gründen eine Tontinen-Gesellschaft. Beide sollen nämlich eine Rente r geniessen, die, so lange sie zusammen leben, gleich vertheilt wird, nach dem Tode des einen von ihnen aber soll sie der Ueberlebende bis zu seinem Tode ganz erhalten. Wie viel hat jede dieser Personen einzuzahlen?

Auflösung. Würde die erste Person den Betrag M_a zahlen, welcher vermöge der Formel

$$M_a = \frac{r}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}}{\omega^3} + \ldots\right] \tag{10}$$

ist, so erhielte sie eine Leibrente von r Gulden. Allein da würde diese Person offenbar zu viel zahlen, denn sie erhält, so lange die andere Person lebt, nur die halbe Rente, nämlich $\frac{r}{2}$; zieht man daher von M_a den halben Betrag der Verbindungsrente ab, nämlich $\frac{1}{2} M_{a,\,b}$, so erhält man die von der ersten Person zu leistende Einzahlung, d. i.

$$M_a - \tfrac{1}{2} M_{a,\,b}$$

eben so hat die $b$jährige Person einzuzahlen

$$M_b - \tfrac{1}{2} M_{a,\,b}$$

somit ist das Gesammtcapital dieser Tontinen-Gesellschaft

$$M_a + M_b - M_{a,\,b}$$

Aufgabe. Drei Personen A, B, C vom Alter a, b und c gründen eine Tontinen-Gesellschaft. Alle drei wollen nämlich eine Rente r erhalten, die sie, so lange sie zusammen leben, unter sich in drei gleiche Theile theilen wollen; falls einer von ihnen stirbt, so soll jeder der Ueberlebenden die halbe Rente geniessen; und endlich soll, falls nur mehr einer am Leben ist, dieser die ganze Rente bis zu seinem Tode haben. Wie gross ist die von jeder einzelnen Person zu leistende Einzahlung, und wie gross ist die Total-Einnahme der Gesellschaft?

Auflösung. Berechnen wir zuerst, was eine der drei Personen, etwa die Person C, an die gemeinschaftliche Cassa der Gesellschaft zu zahlen hat. Um dies zu finden, wollen wir sehen, was C beansprucht. Dies ist aber offenbar Folgendes:

erstens: eine Rente von $\frac{r}{3}$ Gulden, die so lange dauert, als alle drei Personen A, B und C zusammen leben;

zweitens, eine Rente von $\frac{r}{2}$ Gulden, die in dem Falle gezahlt werden soll, wenn A lebt, B aber todt ist, denn in diesem Falle leben von den drei Personen A, B, C nur noch zwei, nämlich A und C;

drittens, eine Rente von $\frac{r}{2}$ Gulden, zahlbar in dem Falle, wenn B lebt, A aber todt ist, denn dann leben von den drei Personen A, B, C ebenfalls nur zwei, nämlich B und C; endlich viertens, eine Leibrente von r Gulden, die an C nach dem Tode von A und B gezahlt wird.

Bestimmen wir nun die baaren Werthe dieser einzelnen Posten.

Eine Rente von $\frac{r}{3}$ Gulden, zahlbar so lange die drei Personen A, B, C zusammen leben, ist:

$$\frac{r}{3 A_a B_b C_c}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

denn es ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede der drei Personen nach einem Jahre noch leben:

$$\frac{A_{a+1}}{A_a}, \quad \frac{B_{b+1}}{B_b}, \quad \frac{C_{c+1}}{C_c}$$

und die Wahrscheinlichbkeit, dass sie alle drei am Ende des Jahres noch leben:

$$\frac{A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}}{A_a B_b C_c}$$

es ist ferner die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Personen am Ende des zweiten Jahres noch leben:

$$\frac{A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}}{A_a B_b C_c}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Personen am Ende des dritten Jahres noch leben:

$$\frac{A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}}{A_a B_b C_c}$$

u. s. f. Denkt man sich nun, wie bisher, dass die Versicherungs-Gesellschaft so viele aus drei Personen vom Alter a, b, c bestehende Gesellschaften, als die Zahl $A_a B_b C_c$ anzeigt, unter derselben Bedingung die Rente $\frac{r}{3}$ gewährt, so hat die Gesellschaft auszuzahlen

nach einem Jahre $\frac{r}{3} \cdot A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}$ Gulden,

„ zwei Jahren $\frac{r}{3} \cdot A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}$ „

„ drei „ $\frac{r}{3} \cdot A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}$ „

. . . .

folglich ist der baare Werth dieser sämmtlichen Auszahlungen:

$$\frac{r}{3}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und daher ist der für eine solche Verbindung zu leistende Beitrag:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{r}{A_a B_b C_c}\left[\frac{A_{a+1} B_{b+1} C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2} B_{b+2} C_{c+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{a+3} B_{b+3} C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

oder kürzer:

$$\tfrac{1}{3} M_{a,\,b,\,c} \tag{69}$$

Bestimmen wir nun weiter den baaren Werth einer zu Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente von $\frac{r}{2}$ Gulden, die in dem Falle geleistet werden soll, wenn von den drei Personen A, B, C nur mehr A und C leben.

Die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des ersten Jahres die beiden Personen A und C leben, ist:

$$\frac{A_{a+1}}{A_a}, \quad \frac{C_{c+1}}{C_c}$$

ferner die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Jahre B nicht mehr lebt, ist:

$$\frac{B_b - B_{b+1}}{B_b}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die genannten Fälle zugleich eintreten, ist:

$$\frac{A_{a+1} C_{c+1} (B_b - B_{b+1})}{A_a B_b C_c}$$

eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach zwei Jahren A und C noch leben, B aber todt ist:

$$\frac{A_{a+2} C_{c+2} (B_b - B_{b+2})}{A_a B_b C_c}$$

dann die Wahrscheinlichkeit, dass nach drei Jahren A und C leben, B aber todt ist:

$$\frac{A_{a+3} C_{c+3} (B_b - B_{b+3})}{A_a B_b C_c}$$

u. s. f. Wenn nun die Versicherungs-Gesellschaft dem C die Rente $\frac{r}{2}$ auszahlen soll in dem Falle, als von den drei Personen A, B, C blos die zwei A und C leben, so hat sie, wenn die Anzahl der Betheiligten $A_a B_b C_c$ ist,

nach einem Jahre zu zahlen: $\frac{r}{2} A_{a+1} C_{c+1} (B_b - B_{b+1})$ Gulden,

„ zwei Jahren „ „ $\frac{r}{2} A_{a+2} C_{c+2} (B_b - B_{b+2})$ „

„ drei „ „ „ $\frac{r}{2} A_{a+3} C_{c+3} (B_b - B_{b+3})$ „

. . . .

Der baare Werth dieser Auszahlungen ist:

$$\frac{r}{2}\left[\frac{A_{a+1}\,C_{c+1}\,(B_b - B_{b+1})}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,C_{c+2}\,(B_b - B_{b+2})}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{a+3}\,C_{c+3}\,(B_b - B_{b+3})}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und dies gibt, durch $A_a\,B_b\,C_c$ getheilt, den gesuchten Werth der Rente. Dieser ist:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{A_a\,B_b\,C_c}\left[\frac{A_{a+1}\,C_{c+1}\,(B_b - B_{b+1})}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,C_{c+2}\,(B_b - B_{b+2})}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{a+3}\,C_{c+3}\,(B_b - B_{b+3})}{\omega^3} + \ldots\right]$$

Man kann diesen Ausdruck auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{A_a\,C_c}\left[\frac{A_{a+1}\,C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,C_{c+2}}{\omega^2} + \frac{A_{a+3}\,C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{A_a\,B_b\,C_c}\left[\frac{A_{a+1}\,B_{b+1}\,C_{c+1}}{\omega} + \frac{A_{a+2}\,B_{b+2}\,C_{c+2}}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{a+3}\,B_{b+3}\,C_{c+3}}{\omega^3} + \ldots\right]$$

und dies ist:

(70) $$\tfrac{1}{2}\,(M_{a,\,c} - M_{a,\,b,\,c})$$

Eben so ist der baare Werth einer zu Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente von $\frac{r}{2}$ Gulden, die geleistet werden soll in dem Falle, wenn von den drei Personen A, B, C nur mehr B und C leben:

(71) $$\tfrac{1}{2}\,(M_{b,\,c} - M_{a,\,b,\,c})$$

Es ist nunmehr noch der Werth einer Leibrente von r Gulden zu bestimmen, die an C nach dem Tode von A und B zu zahlen ist; allein der Werth einer solchen Rente wurde schon in (68) bestimmt, und ist:

(68) $$M_c - M_{a,\,c} - M_{b,\,c} + M_{a,\,b,\,c}$$

somit ist der Betrag, den der C an die Cassa der Tontinen-Gesellschaft abzuführen hat, gleich der Summe der in (69), (70), (71) und (68) stehenden Ausdrücke; dies ist:

$$\tfrac{1}{3}\,M_{a,\,b,\,c} + \tfrac{1}{2}\,(M_{a,\,c} - M_{a,\,b,\,c}) + \tfrac{1}{2}\,(M_{b,\,c} - M_{a,\,b,\,c}) +$$
$$+ (M_c - M_{a,\,c} - M_{b,\,c} + M_{a,\,b,\,c})$$

oder reducirt:

(72) $$M_c - \tfrac{1}{2}\,(M_{a,\,c} + M_{b,\,c}) + \tfrac{1}{3}\,M_{a,\,b,\,c}$$

Genau so ergibt sich als Einzahlung, die der B zu leisten hat:

$$M_b - \tfrac{1}{2}\,(M_{a,} \;\; + M_{c,\,b}) + \tfrac{1}{3}\,M_{a,\,b,\,c}$$

und endlich als Einzahlung von A

$$M_a - \tfrac{1}{2}\,(M_{b,\,a} + M_{c,\,a}) + \tfrac{1}{3}\,M_{a,\,b,\,c}$$

somit ist *) das Gesammtcapital der Tontinen-Gesellschaft:

$$(M_a + M_b + M_c) - (M_{a,b} + M_{a,c} + M_{b,c}) + M_{a,b,c}$$

Es ist leicht, die Rechnung für eine Tontinen-Gesellschaft weiter zu führen, die aus vier, fünf oder mehreren Personen besteht, und man kömmt hiebei zu Ausdrücken, die grosse Analogie zeigen mit denen, die eben gefunden worden.

So ist z. B. bei einer aus vier Personen A, B, C, D bestehenden Tontinen-Gesellschaft die von A zu leistende Einzahlung:

$$M_a - \tfrac{1}{2}(M_{a,b} + M_{a,c} + M_{a,d}) + \tfrac{1}{3}(M_{a,b,c} + M_{a,b,d} + M_{a,c,d}) - \\ - \tfrac{1}{4} M_{a,b,c,d}$$

ferner die von B zu leistende Einzahlung:

$$M_b - \tfrac{1}{2}(M_{b,a} + M_{b,c} + M_{b.d}) + \tfrac{1}{3}(M_{b,a,c} + M_{b,a,d} + M_{b,c,d}) - \\ - \tfrac{1}{4} M_{a,b,c,d}$$

dann die von C zu leistende Einzahlung:

$$M_c - \tfrac{1}{2}(M_{c,a} + M_{c,b} + M_{c,d}) + \tfrac{1}{3}(M_{c,a,b} + M_{c,a,d} + M_{c,b,d}) - \\ - \tfrac{1}{4} M_{a,b,c,d}$$

und endlich die von D zu leistende Einzahlung:

$$M_d - \tfrac{1}{2}(M_{d,a} + M_{d,b} + M_{d.c}) + \tfrac{1}{3}(M_{d,a,b} + M_{d,a,c} + M_{d,b,c}) - \\ - \tfrac{1}{4} M_{a,b,c,d}$$

vorausgesetzt, dass a, b, c, d die Alter der vier Personen sind.

Die wirkliche Durchführung solcher Rechnungen für eine Tontinen-Gesellschaft, die aus einer grossen Zahl von Personen besteht, ist äusserst beschwerlich, man kann sagen, sie ist praktisch unmöglich.

---

*) Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass $M_{a,b} = M_{b,a}$, $M_{a,c} = M_{c,a}$ etc. ist.

V. Abschnitt.

Schlussbetrachtungen.

Lebensversicherungs-Gesellschaften, welche unter den verschiedensten Bedingungen Verträge mit Personen eingehen, haben die Pflicht, oder sollten sie haben, von Zeit zu Zeit, sagen wir von Jahr zu Jahr, Bilanz abzuschliessen, auf dass die, welche einer solchen Gesellschaft beitreten, aus selber die beruhigende Ueberzeugung schöpfen können, dass die Gesellschaft wirklich im Stande ist, die Verpflichtungen, die sie eingegangen, und die Versprechungen, die sie gemacht, vollständig zu erfüllen. Der Abschluss einer solchen Bilanz müsste etwa folgendermassen gemacht werden:

Erstens hat man aufzustellen das gesammte Activ-Vermögen der Gesellschaft, was theilweise in Baarem, grösstentheils aber in pupillarsicheren Haussätzen und Wechseln, ferner in, in Prolongation genommenen Effecten bestehen wird. Staatspapiere, Industrie-Effecten, überhaupt alle einem Curse unterworfenen Papiere sollen als Capitalsanlage möglichst vermieden werden (es sei denn, dass die Auszahlung der Renten oder Anwartschaften etc. in solchen Papieren bedungen wurde), weil die Capitalien jederzeit, ohne Verlust, realisirbar sein müssen.

Zweitens ist aufzusuchen der baare Werth sämmtlicher zu leistenden Verpflichtungen. Hat z. B. die Gesellschaft die Pflicht, am Ende eines jeden Jahres einem 74jährigen Manne eine Leibrente von fl. 100 zu geben, so muss sie für diese Person, den früheren Rechnungen zufolge, fl. 496·63 als passiv aufrechnen (im nächsten Jahre hat sie, falls dieser Mann noch leben sollte, blos fl. 481·74 in die Bilanz aufzurechnen); hat die Gesellschaft die Pflicht, den Erben einer 30jährigen Person am Ende des Sterbejahres derselben fl. 8000 auszuzahlen, so hat sie, ebenfalls den früheren Rechnungen zufolge, fl. 2330·60 in's Passiv-Vermögen aufzustellen; wäre ferner die Gesellschaft verpflichtet, der 25jährigen Frau eines 40jährigen Mannes, falls sie Witwe wird, fl. 400 als Witwenpension auszuzahlen, so wäre fl. 1561 als passiv aufzustellen u. s. f.

Nun soll das Activ-Vermögen so gross sein wie das Passiv-Vermögen. Ist dies der Fall, so gilt dies als Beweis, dass die geforderten Einkaufsbeträge hinreichend sind, die übernommenen Verpflichtungen zu erfüllen. Ist das Activ-Vermögen grösser als das Passiv-Vermögen, so kann man den Ueberschuss als Reserve aufbewahren für kommende Jahre, wo vielleicht das Gegentheil eintritt, oder aber selben als Unternehmungs-Gewinn vertheilen. Ist endlich das Activ-Vermögen kleiner als das Passiv-Vermögen, so muss man von einem etwa vorhandenen Reservefond (als solcher ist auch das Actiencapital einer Lebensversicherungs-Gesellschaft anzusehen) das Deficit ausgleichen. Sollte dieser Fall wiederholt eintreten, so dient dies als Beweis, dass die angewandten Mortalitäts-Tafeln mit der bei dieser Gesellschaft stattfindenden Sterblichkeit nicht übereinstimmen.

Ein merkwürdiges Beispiel hiezu lieferte die Kopenhagener allgemeine Versorgungsanstalt. Dieselbe wurde im Jahre 1795 unter Mitwirkung von Tetens (der sich durch sein vortreffliches Werk: „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften" auszeichnete) errichtet, und sie übernahm Versorgungen fast aller Art. Ihr Tarif war nach der Süssmilch-Baumann'schen Tafel, an der einige Modificationen [1]) angebracht wurden, berechnet. (Die Süssmilch'schen Zahlen der Lebenden waren im Allgemeinen bis zum 75sten Jahre um 20 vermehrt. Das Alter der zu pensionirenden Frauen wurde bei der Bestimmung der Einkaufssumme um drei Jahre niedriger angenommen etc.) Den Rechnungen lag ein $3\frac{1}{2}$%tiger Zinsfuss zu Grunde, während die Cassa ihre Capitalien zu $3\frac{3}{4}$% und zu 4% verzinste. Gleichwohl sah man sich nach fünf Jahren genöthigt, die Einzahlungen um 5% zu erhöhen, und nach abermals fünf Jahren mussten nochmals die Einzahlungen um 5% erhöht werden. Als dann

[1]) Der Grund, warum die Kopenhagener Lebensversicherungs-Bank Modificationen an den Sterblichkeits-Tafeln anbrachte, besteht darin, weil die Süssmilch-Baumann'sche Mortalitäts-Tafel sich auf die Bevölkerung eines ganzen Staates bezog, keinesfalls aber auf eine ausgesuchte Gesellschaft von meistens wohlhabenden oder intelligenten Menschen, denn nur solche betheiligen sich in der Regel bei Lebensversicherungs-Anstalten. Gegenwärtig besitzt man auch Mortalitäts-Tafeln für Rentenirer.

nach Verlauf weiterer zehn Jahre Bilanz gemacht wurde, zeigte sich dennoch, dass die Anstalt mit ihren eigenen Mitteln nicht bestehen konnte. Glücklicherweise hatte die Regierung die Garantie für die genaue Erfüllung der eingegangenen Verpflichtungen übernommen, sie zahlte auch planmässig die fällig werdenden Pensionen und Anwartschaften aus, nahm aber keine weiteren Versicherungen an. (Man lese hierüber Dr. Joh. Heinr. Meyer's allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, 1. Band, Seite 103.)

Man sieht hieraus, wie nothwendig es ist, dass die Tarife einer Versicherungs-Gesellschaft höher gestellt werden, als die strenge Rechnung es erheischt. Je mehr Uebereinstimmung zwischen den der Rechnung zu Grunde gelegten Mortalitäts-Tafeln und der wirklichen Sterblichkeit der Mitglieder herrscht, desto geringer wird der Unterschied zwischen den Zahlen sein, welche die Rechnung gibt, und jenen des Tarifs. Einige Jahre Erfahrung werden hinreichen, um Anhaltspunkte zu liefern, um wie viel Procente die Daten der Rechnung zu erhöhen sind. Dass 10 % unzureichend sind, scheint sich aus den Erfahrungen der Kopenhagener Gesellschaft zu ergeben [1]). Vielleicht dürfte es zweck-

---

[1]) Wir gehen hier stets von dem Gesichtspunkte aus, dass die Menschen, welche sich bei Lebensversicherungs-Anstalten betheiligen, um etwa Leibrenten zu erhalten, gesund sind und in der Hoffnung leben, den grösstmöglichsten Nutzen aus solchen Versicherungs-Gesellschaften zu ziehen. Ganz anders stellt sich die Sache von entgegengesetztem Standpunkte betrachtet. Soll z. B. eine Lebensversicherungs-Anstalt Leibrenten an im Kriege oder anderwärts Verunglückten übernehmen, so ist es nicht mehr als billig, dass sie den Einsatz, die Mise, um 10% oder 20% niedriger stellt, als die Rechnung gibt. Denn es scheint uns als von selbst klar, dass die Sterblichkeit bei solchen Unglücklichen eine grössere ist, als bei der ganzen übrigen Bevölkeruug.

Noch auf einen zweiten Punkt haben wir aufmerksam zu machen. Da nämlich gegenwärtig unsere Staatspapiere so niedrigen Curs haben (fl. 100 C. M. in 5% tigen Metalliques kosten nahe fl. 70 Oesterr. Währ.), so dürfte es sehr oft, namentlich für solche, welche sich Leibrenten anschaffen wollen, viel zweckmässiger sein, Staatspapiere aufzukaufen, da selbe immerwährende Renten geben, das Capital unberührt lassen, und meistens weniger kosten als eine Mise für eine Leibrente. Diess ist namentlich der Fall bei allen Personen, deren Alter zwischen 2 Jahre und 39 Jahre liegt. So ist z. B. der baare Werth einer Leibrente von fl. 100 für eine 20jährige Person fl. 1464·50, d. h. fl. 1464·50 muss eine 20jährige Person zahlen, um eine lebenslängliche Rente von fl. 100 beanspruchen zu mässig sein, die Ueberschüsse in einem eigenen Reservefond anzusammeln und obenerwähnte Procente nach der Grösse des Reservefondes zu erhöhen oder zu erniedrigen. Sollte eine Versicherungs-Gesellschaft auch „Ueberlebens-Versicherungen“ in das Bereich ihrer Unternehmungen ziehen, so haben solche auf den Abschluss der Bilanz gar keinen Einfluss, denn all' die Gelder, die in die Cassa eingehen, werden fruchtbringend angelegt und sind Eigenthum der, zu einer voraus bestimmten Zeit, noch lebenden Mitglieder. Aber hier wäre es angezeigt, wenn die Versicherungs-Gesellschaft am Schlusse eines jeden Jahres statt einer Bilanz den Mitgliedern jeder „Ueberlebens-Gesellschaft“ die Namen und das Alter sämmtlicher Theilnehmer derselben bekannt machte, denn nur dadurch, dass jeder Theilnehmer alle Glieder der Gesellschaft kennt und sich von deren Leben überzeugen kann, wird selbst ein Versuch, die Versicherungs-Gesellschaft zu verläumden und somit zu discreditiren, unmöglich gemacht.

Man wird nun wohl fragen, worin der Nutzen einer solchen Gesellschaft bestehe? Wozu Gesellschaften Capitalien zusammenschiessen (Actien-Capitale), um solche Unternehmungen in's Leben zu rufen?

Die Antwort ist ganz einfach; der Nutzen einer solchen Gesellschaft besteht erstens darin, dass die Gesellschaft von den Theilnehmern Verwaltungsgebühren einhebt, welche in demselben Masse wachsen, wie die versicherten Summen; und da diese Spesen in der Regel nicht unter 5% betragen, so sind selbe gar nicht unbedeutend, ja bei einiger Ausdehnung des Geschäftes sehr erheblich. So hat beispielsweise die vor kurzem in's Leben gerufene Versicherungs-Gesellschaft „der Anker“ im ersten Jahre ihres Bestehens an Verwaltungs-Gebühren, falls sie nur 5% berechnete, mehr als fl. 1,200.000 behoben. Zweitens besteht der Nutzen einer solchen Gesellschaft darin, dass die Gelder, die sie verwaltet, in der Regel mehr Procente tragen, als die Rechnung voraussetzt. Und endlich drittens verlangt ja

können; rechnet man hiezu noch 5% Verwaltungs-Gebühren, d. i. fl. 73·22, so ist die geleistete Zahlung fl. 1537·72, und hier ist erst noch nichts für das Risico der Gesellschaft in Rechnung gebracht, und doch erhält man schon für diesen Betrag mehr als fl. 2100 in 5%tigen Staatspapieren, die nicht nur eine lebenslängliche Rente von fl. 105 gewähren, sondern nebstdem das ganze Capital unversehrt lassen.

die Gesellschaft (für das Risico, das sie bei Abschluss eines jeden Vertrages eingeht) mehr, als die Rechnung fordert. Je grösser die Ausdehnung des Geschäftes ist, desto grösser ist offenbar auch der Betrag, den sie für das Risico einnimmt, und desto kleiner ist zugleich, bei guter Wahl der Mortalitäts-Tafeln, das Risico selbst.

Es wäre nun hier der Ort zu prüfen, in wie ferne die in unserem Vaterlande bestehenden Lebensversicherungs-Anstalten den gerecht an sie gestellten Anforderungen entsprechen oder nicht. Doch dies würde die Grenzen, die wir uns gestellt, überschreiten. Aber wir können uns dennoch nicht enthalten, wenigstens zu erwähnen, dass die gegenwärtig bestehenden und meist erst jüngst in's Leben gerufenen Beamten-Pensions-Cassen der verschiedenen Eisenbahn-, Dampfschiffahrts- und Bank-Unternehmungen gar keine wissenschaftliche Grundlage haben, somit keine Garantie bieten, ob im Laufe kommender Zeiten das erfüllt werden kann, was die Statuten solcher Gesellschaften verheissen.

Dies wird klar, wenn man bedenkt, dass bei solchen Instituten das Alter der Beamten gar keinen Einfluss hat auf die Höhe der Pension, diese wird blos bestimmt aus der Dienstzeit und dem zuletzt bezogenen Gehalt. Wenn daher zwei Beamte von verschiedenem Alter gleich lange dienen und die letzte Zeit gleich viel in den Pensionsfond einzahlten, so haben beide gleiche Pensionsansprüche.

Ferner hat laut den Pensions-Statuten der erwähnten Gesellschaften das gar keinen Einfluss, ob ein Beamter ledig oder verheirathet ist, ob er im letztern Falle Kinder hat oder kinderlos ist, trotzdem auch die Witwen, so lange selbe im Witwenstande bleiben, und die Waisen, so lange selbe ein gewisses Alter nicht überschreiten, pensionsfähig sind. Ja selbst wenn ein Beamter zum zweiten oder dritten Male sich verheirathet, so hat auch die zweite oder dritte Frau, und falls sie Kinder haben, auch selbe Pensionsansprüche.

Wenn nun im Laufe der Zeiten der Pensionsfond gehörig in Anspruch genommen wird, reichen da die Zuflüsse des Pensionsfondes, die in der Regel in Procenten des Gehaltes der Beamten, in Strafgeldern und in jährlichen Beiträgen der Actien-Unternehmung bestehen, hin, um alle Verpflichtungen zu erfüllen, die auf selben lasten? — Vielleicht ja, vielleicht auch nicht.

Die genannten Pensions-Statuten wurden von irgend Jemanden, der vermuthlich gar keinen Begriff von dem Wesen einer Lebensversicherungs-Gesellschaft hatte, für eine bestimmte Actien-Unternehmung entworfen, und erfreuten sich der Annahme; nach mehreren Jahren wurden dieselben Statuten, weil sie sich durch fünf oder zehn Jahre bewährt (als ob fünf oder zehn Jahre hinreichend wären, um sagen zu können, dass sich ein Pensions-Institut bewährt habe), von den Verwaltungsräthen anderer Unternehmungen copirt, und endlich von den respectiven Generalversammlungen, deren Glieder vermuthlich glaubten, reiflich durchdachte Pensions-Statuten vorgelegt zu erhalten, genehmigt.

Druckfehler.

Seite 30, bei Tafel VI, soll in der vorletzten Colonne, vierte Zeile von unten, statt 0·04, 0·05 stehen.

„ 48, Zeile 19 von oben, statt P soll stehen: b

„ — „ 20 „ „ „ b „ „ P

„ — „ 23 „ „ „ P „ „ b

„ 51 „ 1 „ „ „ a „ „ S_a

„ — „ — „ „ „ A_{a+2} „ „ $\frac{A_{a+2}}{\omega^{a+2}}$

35
33