Miscellanea

UEBER

KAPITALIEN-

UND

RENTENVERSICHERUNGEN.

VON

CARL HESSLER,

LEHRER DER ELEMENTAR-MATHEMATIK AN DER KOMMUNAL-OBERREALSCHULE AUF DER WIEDEN IN WIEN.

Abgedruckt aus dem Programme der Wiedner-Oberrealschule und durch Zusätze, Beispiele und Tabellen vermehrt.

WIEN, 1860.
SALLMAYER UND KOMP.

Vorwort.

Der vorliegende Aufsatz war ursprünglich bloss für das diessjährige Programm der Wiedner Kommunal-Oberrealschule in Wien bestimmt, und sollte die Schüler derselben mit einem ihnen bisher unbekannten Zweige der angewandten Mathematik vertraut machen.

Der beschränkte Raum gestattete mir jedoch nicht diejenigen Zusätze, Beispiele und Tabellen beizufügen, wodurch ich die von mir gewünschte Abrundung hätte erzielen können; um diese zu erreichen, entschloss ich mich zur Herausgabe dieser Schrift. Ich habe mich bemüht in Kürze diejenigen nothwendigen Aufgaben zu behandeln, welche in anderen Werken zerstreut vorkommen, und glaube überdiess durch die Berechnung der von der Gesellschaft „der Anker" in Wien eröffneten Ueberlebens-Associationen, welche meines Wissens in der Weise noch nirgends geliefert wurde, dem Wunsche Mancher entgegengekommen zu sein.

Was die hier befolgte Methode der Darstellung betrifft, so weicht dieselbe von der gewöhnlich üblichen in vieler Beziehung ab. Mich bestimmte dazu einerseits das Bestreben nach Kürze und anderseits der Wunsch, so systematisch als möglich vorzugehen.

Die von mir benützten Werke sind meistens im Texte angezogen und ich verweise noch, namentlich zur weiteren Ausbildung in diesem Gegenstande, auf die Werke von: Baily, Jones, Littrow, Masius, Moser, Tetens, Wiegand u. s. w.

Dass ich zum Behufe der praktischen Berechnung anstatt der geeigneteren Tafeln von Deparcieux und Brune grösstentheils die Mortalitätstafel von Süssmilch-Baumann benützte, findet seine Erklärung darin, dass es mir in der vorliegenden Schrift nicht darum zu thun war, eine Kritik der bestehenden Versicherungsanstalten und Kontrolle ihrer Tarife, sondern nur die Art der Berechnung derselben zu geben.

Schliesslich muss ich noch hinzufügen, dass durch ein Versehen bei der Aufzählung der Lebensversicherungs-Anstalten in Oesterreich auf Seite 16 die k. k. erste österreichische Versicherungsgesellschaft in Wien nicht genannt wurde.

Wien, am 30. August 1859.

Der Verfasser.

Einleitung.

Alle auf die Berechnung von Kapitalien und Rentenversicherungen bezüglichen Aufgaben gründen sich auf die Dauer des Lebens der einer Versicherungsanstalt beitretenden Personen, d. i. auf eine Reihe von Ereignissen, welche Menschen nicht vorhersehen können. Es geht sonach schon aus dem Wesen des vorliegenden Problemes hervor, dass es sich hier nicht um Gewissheit, sondern bloss um grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit handeln kann, d. h. wir sind auf die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewiesen, welche somit den ersten Theil der Einleitung bilden wird. Hieran schliesst sich dann die Besprechung der die Gesetze der Lebensdauer enthaltenden Sterblichkeitstafeln, und endlich die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Leben der Menschen. Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, schreiten wir dann zur Berechnung der Lebensversicherungen selbst.

A. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses nennt man den Grund, welchen man hat zu glauben, dass dasselbe stattfinden werde.

Wenn man ein Ereigniss erwartet, so werden von denjenigen Fällen, welche überhaupt eintreten können, einige dem Eintreffen des gewünschten Ereignisses günstig, andere ungünstig sein. Ueberwiegt nun die Zahl der günstigen Fälle die der ungünstigen, oder ist die Mehrzahl der möglichen Fälle günstig, so halten wir dieses Ereigniss für wahrscheinlich, und zwar für desto wahrscheinlicher, je mehre der überhaupt möglichen Fälle unserer Erwartung günstig sind, je günstiger also das Verhältniss der letzteren zu den ersteren sich gestaltet.

Befinden sich z. B. in einer Urne 6 weisse und nur 1 schwarze Kugel, so werden wir mit grösserer Wahrscheinlichkeit das Ziehen einer weissen als einer schwarzen Kugel erwarten, und zwar werden 6 Fälle gegen einen dieses Ereigniss wahrscheinlich machen. Noch wahrscheinlicher wäre das Ziehen einer weissen Kugel, wenn sich z. B. unter 31 weissen Kugeln nur 1 schwarze befände, also das Verhältniss der günstigen Fälle zu den möglichen $= 30 : 31$ wäre, da es im ersten Falle nur $6 : 7$ war.

Das Mass der Wahrscheinlichkeit ist also das Verhältniss der dem gewünschten Ereignisse günstigen Fälle zu den überhaupt möglichen, und dieses Mass der Wahrscheinlichkeit nennen wir die mathematische (einfache) Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

1. Gesetzt, es wären unter m möglichen Fällen g Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig, also $m - g$ Fälle ungünstig, so wird die mathematische Wahrscheinlichkeit (w') für das Eintreffen derselben durch das Verhältniss $g : m$ oder $\frac{g}{m}$ ausgedrückt, oder es ist

$$w' = \frac{g}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.$$

Bestimmen wir nun die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreffen dieses Ereignisses, so sind hier unter m möglichen Fällen $m - g$ diesem neuen Ereignisse günstig, also die Wahrscheinlichkeit jetzt

$$w'' = \frac{m - g}{m} = 1 - w' \ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

Man findet also die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreffen eines Ereignisses, wenn man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen desselben von der Einheit abzieht.

Hieraus ergeben sich nachstehende Folgesätze:

Sind unter m möglichen Fällen alle dem Eintreten des Ereignisses günstig, so ist dasselbe gewiss, oder es muss eintreten, dann wird aber $g = m$ und somit $w' = \frac{m}{m} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3.$

Es ist also die positive Einheit das Symbol der mathematischen Gewissheit.

Aus der Gleichung (2. folgt $w' + w'' = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4.$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeiten zweier einander gerade entgegengesetzten Ereignisse ist gleich der Gewissheit.

Ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich der Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen, $g = m - g$ oder $g = \frac{1}{2} m$, so ist das Ereigniss ebenso wahrscheinlich als unwahrscheinlich, also völlig unentschieden; in diesem Falle wird aber $w' = \frac{g}{m} = w'' = \frac{m-g}{m} = \frac{1}{2}$.

Somit ist $w = \frac{1}{2}$ das Symbol der völligen Unentschiedenheit.

Wäre hingegen $g = o$, also kein einziger der möglichen Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig, dann ist dasselbe unmöglich. Weil aber dann $w = \frac{g}{m} = \frac{o}{m} = 0$ ist, so ist

$w = o$ das Symbol der Unmöglichkeit.

II. Sind allgemein unter m überhaupt möglichen Fällen

a Fälle dem Eintreffen des Ereignisses A

b „ „ „ „ „ B

c „ „ „ „ „ C u. s. w. günstig;

so ist für das Ereigniss A die Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{a}{m}$

„ „ „ B „ „ $w_2 = \frac{b}{m}$

„ „ „ C „ „ $w_3 = \frac{c}{m}$ u. s. w.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit suchen, dass überhaupt eines oder das andere dieser Ereignisse $A, B, C, \ldots$ eintritt. — Hier sind alle diejenigen Fälle als günstig zu betrachten, die dem Ereignisse A oder B oder C u. s. w. günstig sind, nämlich es ist $g = a + b + c + \ldots$ daher

$$w = \frac{g}{m} = \frac{a+b+c+\ldots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \ldots = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \quad (5.$$

Es ist somit die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des einen oder anderen von mehreren Ereignissen (alternative Wahrscheinlichkeit) gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Sind die Ereignisse $A, B, C \ldots K$ die einzig möglichen, d. h. muss eines von ihnen eintreten, ist also: $a + b + c + \ldots + k = m$, so erhalten wir:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_k = \frac{a+b+c+\ldots+k}{m} = \frac{m}{m} = 1 \ldots (6$$

wie oben (4).

Einige Beispiele werden diese Sätze erläutern:

In einer Urne befinden sich 12 Kugeln und zwar 3 schwarze, 4 weisse und 5 rothe; so ist:

die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen $w_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

„ „ „ weisse „ „ „ $w_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

„ „ „ rothe „ „ „ $w_3 = \frac{5}{12}$

Die Wahrscheinlichkeit, entweder eine schwarze, oder weisse, oder rothe, d. h. irgend eine von diesen Kugeln auf den ersten Zug zu ziehen:

$$W = w_1 + w_2 + w_3 = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1 = \text{der Gewissheit.}$$

Die Wahrscheinlichkeit eine weisse oder rothe Kugel zu ziehen:

$$w' = w_2 + w_3 = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 1 - w_1 = 1 - \frac{1}{4},$$ d. i. gleich der Wahrscheinlichkeit keine schwarze Kugel zu ziehen.

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze oder rothe, d. i. keine weisse Kugel zu ziehen:

$$w'' = w_1 + w_3 = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 1 - w_2 = 1 - \frac{1}{3}$$

Somit verhält sich die Wahrscheinlichkeit $w_1 ; w' = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3$, oder es ist die Wahrscheinlichkeit eine weisse oder rothe Kugel zu ziehen, 3 mal so gross als für das Ziehen einer schwarzen; und da $w_2 : w'' = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, nur halb so gross, als für das Ziehen einer schwarzen oder rothen. Im Falle eines Spieles müssten sich sonach die Einsätze gerade, und daher die Gewinnste verkehrt verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten.

III. Häufig handelt es sich um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen oder unmittelbare Aufeinanderfolgen mehrerer Ereignisse, d. h. um die Bestimmung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Nehmen wir an, es sollen die Ereignisse $A, B, C, \ldots$ gleichzeitig, oder, was dasselbe ist, unmittelbar nacheinander eintreten, und es seien

für das Ereigniss A unter m_1 möglichen Fällen g_1 günstig

„ „ „ B „ m_2 „ „ g_2 „

„ „ „ C „ m_3 „ „ g_3 „ u. s. w.;

so dass die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse durch

$$w_1 = \frac{g_1}{m_1};\ w_2 = \frac{g_2}{m_2};\ w_3 = \frac{g_3}{m_3};\ \ldots\ldots \text{u. s. f.}$$

dargestellt werden; so fragt es sich zunächst um die Anzahl der diesem Ereignisse günstigen und dann um jene der hier überhaupt möglichen Fälle.

Da nun jeder der g_1 günstigen Fälle mit jedem der $g_2, g_3, \ldots$ Fälle zusammentreffen kann und dennoch das gewünschte Ergebniss sich herausstellt; so sind hier, wenn wir n Ereignisse voraussetzen, so viele dem neuen Ereignisse günstige Fälle vorhanden, als sich Variationen aus n verschiedenen Elementenreihen von je $g_1, g_2, g_3, \ldots$ Elementen bilden lassen; das ist bekanntlich $g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \ldots$. Ebenso ist die Anzahl aller möglichen Fälle, da jeder der m_1 Fälle mit jedem der $m_2, m_3 \ldots$ kombinirt werden kann, $m = m_1 . m_2 . m_3 \ldots$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{g}{m} = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots}{m_1 . m_2 . m_3 \ldots} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \cdot \frac{g_3}{m_3} \ldots = w_1 . w_2 . w_3 \ldots \quad (7.$$

Es ist somit die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen mehrerer Ereignisse gleich dem Produkte aus den einfachen Wahrscheinlichkeiten derselben.

Z. B. wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln, deren Flächen mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind, auf einen Wurf, oder mit einem dieser Würfel in zwei aufeinanderfolgenden Würfen die Zahlen 2 und 5 zu werfen? Die Wahrscheinlichkeit mit dem ersten Würfel oder auf den ersten Wurf die Zahl 2 zu werfen, ist $w_1 = \frac{1}{6}$; ebenso die Wahrscheinlichkeit mit dem zweiten 5 zu werfen, $w_2 = \frac{1}{6}$; somit die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Wurfe oder Würfel 2 und mit dem zweiten 5 zu werfen:

$w' = w_1 . w_2 = \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, und für den Fall, dass zuerst 5 und dann 2 fällt, ist die Wahrscheinlichkeit $w'' = w_2 . w_1 = \frac{1}{36}$, also ebenso gross.

Ist die Reihenfolge gleichgiltig, so ist, da entweder der erste oder der zweite Fall eintreten kann, nach (5)

$W = w' + w'' = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$. Es wäre somit 17 gegen 1 gegen den Wurf 2 und 5 zu wetten.

Soll ein und dasselbe Ereigniss sich z. B. n mal wiederholen, so ist $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots\ldots$ also $w = (w_1)^n$.

IV. Wollte man den Werth einer Summe Geldes oder drgl. bestimmen, deren Zahlung von dem Eintritte eines ungewissen Ereignisses abhängt, so wird der Werth derselben für uns genau in dem Verhältnisse zu- oder abnehmen, in welchem die Wahrscheinlichkeit, diesen Betrag zu erhalten, zu- oder abnimmt, und der Hoffnungswerth (h) dieser Summe wird zu deren wahrem Werthe (s) in demselben Verhältnisse stehen, wie die Wahrscheinlichkeit (w), sie zu erhalten, zur Gewissheit, d. i. $h : s = w : 1$ oder $h = w . s$ . . . . (8

Der Hoffnungswerth eines Ereignisses ist daher gleich dem Produkte aus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in dessen absoluten Werth. So ist z. B. der Hoffnungswerth eines Treffers von 100000 fl. in einer Lotterie, in welcher von 50000 Loosen 100 Loose gezogen werden, $h = \frac{100}{50000} 100000 = 200$ Gulden.

B. Sterblichkeitstafeln.

Die in der ganzen Schöpfung herrschende durch göttliche Gesetze normirte Ordnung, welche dem menschlichen Geiste durch die Fortschritte der Wissenschaft immer mehr und mehr erschlossen wird, musste nothwendig zunächst in den Staatswissenschaften die Blicke der Gelehrten auf die Beobachtung der Bevölkerung, deren Vermehrung oder Verminderung hinleiten und zur Untersuchung auffordern, ob nicht auch hier vielleicht, wenn auch nur mit gewisser Wahrscheinlichkeit, die göttliche Ordnung bestimmte Gesetze dem menschlichen Auge enthülle.

Wir treffen zuerst in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhundertes auf Versuche, die in dem Stande der Bevölkerung sich ergebenden Erscheinungen auf einen allgemeinen Ausdruck zurückzuführen.

Der Erste, der diesen Versuch machte, war der Engländer J. Graunt im Jahre 1664 *), auf dessen Schrift rasch eine Reihe von Werken über diese Frage folgte. Alsbald bemächtigte sich auch die Mathematik des Gegenstandes, und man bemühte sich, theils durch Beobachtungen, theils durch Annahme von mehr oder weniger geeigneten Hypothesen, Gesetze

*) Siehe v. Mohl Geschichte und Literatur der Staatswissenschaften III. Bd. 1858.

abzuleiten, nach welchen das successive Aussterben einer bestimmten Anzahl von Personen eingetreten war oder eintreten werde.

Die Zusammenstellung dieser Gesetze ergab dann die sogenannten Sterblichkeitstafeln (Mortalitätstabellen), welche, nach Beobachtungen an den verschiedenen Orten zusammengestellt, natürlich auch den Verhältnissen derjenigen Länder, aus deren Bevölkerung die nöthigen Daten entnommen wurden, am besten anpassen.

Die bekanntesten dieser Tabellen sind:

In Deutschland die von Süssmilch *) und später jene von Kerseboom,

für Frankreich von Duvillard und Deparcieux,

für England die von Price für Nordhampton berechnete Tafel **).

Zur Konstrukzion der Sterblichkeitstafeln benützte man die Ergebnisse der Volkszählungen, die Angaben der Sterberegister und die Erfahrungen bereits bestehender Pensions- und anderer derartiger Anstalten.

Man versteht unter Sterblichkeits- (Mortalitäts-) Tafeln die tabellarische Aufzeichnung der von einer bestimmten Anzahl (gewöhnlich 1000) gleichzeitig gebornen Personen bis zum Tode der Letzten von ihnen jährlich Sterbenden und Ueberlebenden.

Da es jedoch geradezu unmöglich ist, eine hinreichend grosse Anzahl von Individuen von ihrer Geburt bis zu ihrem Tode zu verfolgen, ohne dabei einer Menge von besonderen, ausnahmsweisen Ereignissen zu begegnen, welche alle Beobachtungen vereiteln; so musste man auf Methoden bedacht sein, welche die Möglichkeit bieten, unter Zuhilfenahme gewisser Hypothesen mittelst einzelner oder durch kurze Zeit fortgesetzter Beobachtungen zu demselben Ziele zu gelangen.

Die hervorragendsten dieser Methode sind folgende:

1. Die von Halley aufgestellte und von den meisten seiner Nachfolger angenommene Hypothese einer stationären Bevölkerung,

*) Vierte Ausgabe berichtiget von J. Baumann 1798.

**) Price hat 10 verschiedene Tafeln für England, Oesterreich, Preussen und Schweden berechnet.

Hieher gehören auch die Werke von: Halley, Euler, Moivre, Simpson, Finlaison, Babbage, Demonferrand, Chr. Bernoulli, Quetelet, Brune, Moser u. a. m.; in der neuesten Zeit von Buchner und Glattner.

Diese Werke umfassen in chronologischer Ordnung den Zeitraum von 1691 bis 1856.

d. h. einer solchen, in welcher eben so viele Personen sterben, als geboren werden, und bei welcher die Anzahl der jährlichen Todesfälle unter gleich alten Personen konstant bleibt.

2. Euler setzte im Gegensatze dieser Annahme voraus, dass die Bevölkerung von Jahr zu Jahr im geometrischen Verhältnisse wachse *).

3. Die Moivre'sche Hypothese stützt sich auf die in den Beobachtungen ziemlich gegründete Voraussetzung, dass die Anzahl einer in einem bestimmten Zeitpunkte gegebenen Menge von Personen gleichen Alters im arithmetischen Verhältnisse (z. B. jährlich um dieselbe Zahl) abnehme. Endlich

4. will Moser in seinem Werke „die Gesetze der Lebensdauer, Berlin, 1839" die Sterblichkeitstafeln nach der Wahrscheinlichkeit das nächste Jahr zu erleben, berechnen, welche auf Grundlage einzelner Beobachtungen für die verschiedenen Altersstufen gefunden wurde. Diese Methode ist von der Bewegung der Bevölkerung ganz unabhängig und erleichtert daher, da sie vereinzelte Beobachtungen zulässt, die Zusammenstellung obiger Tafeln sehr wesentlich.

Als Beispiel mag die am Schlusse beigegebene Süssmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel dienen. (Tafel I.)

Die erste mit m bezeichnete Spalte derselben enthält das Alter von 0 bis 96 Jahre, und die nächste mit A_m überschriebene Kolumne die Anzahl der in dem betreffenden Lebensjahre von 1000 gleichzeitig gebornen Personen noch lebenden; während die Spalte B_m die Zahl der in diesem Jahre (gleichgültig in welchem Monate) Gestorbenen angibt; es ist nämlich $B_m = A_m - A_{m+1}$. Wobei hier die Annahme Platz greift, als wären alle diese Todesfälle erst am Ende des Jahres auf einmal eingetreten.

So leben z. B. von 1000 Personen, welche die obige Tafel betrachtet, im Alter von 17 Jahren also für $m = 17$ noch $A_{17} = 503$, von welchen in diesem Jahre $B_{17} = 4$ Personen sterben. Auch geht aus dieser Tafel hervor, dass für $m \overline{>} 96$, $A_m = 0$ wird, das höchste Alter nach derselben also 95 Jahren wäre.

Es ist wohl für sich klar, dass derartige Tabellen nie eine absolute Gewissheit geben können, und nur dadurch, dass die Anzahl der

*) Diese Hypothese nahm insbesondere auch der Staatsökonome Malthus 1798 an.

betrachteten Fälle so gross als möglich genommen wird, sich auch diese Resultate mehr der Wirklichkeit nähern. Es stützen sich demnach diese Ergebnisse auf die Rechnung mit grossen Zahlen, und werden daher alle auf diese Grundlagen basirten Unternehmungen desto günstigere Erfolge erzielen, je mehr Theilnehmer dieselben haben, auf eine je grössere Anzahl Personen also diese Schlüsse wieder angewendet werden.

Nachdem nun die Entstehung und das Wesen der Sterblichkeitstabellen beleuchtet wurde, ist es für sich klar, dass die Wahl der den Rechnungen zu Grunde zu legenden, sowohl von dem Vertrauen in die Richtigkeit ihrer Zusammenstellung, als auch von der Uebereinstimmung der zu der Konstrukzion derselben benützten Beobachtungen mit den Verhältnissen des Landes, für welches diese Rechnungen bestimmt sind, abhängen werde.

Wir werden, nachdem wir diese Wahl bereits getroffen, nun-auch in Zukunft die Angaben der vorliegenden Tabelle als Gesetze annehmen müssen, und uns auch demgemäss darauf, als auf etwas Feststehendes beziehen, ohne immer beizufügen, dass unsere Folgerungen nur mit Rücksicht auf die in der betreffenden Tabelle als apodiktisch hingestellten Beobachtungen Geltung haben.

In den späteren Kolumnen der Süssmilch'schen Tafel, welche die Ueberschriften W_m, M_m und K_m tragen, sind die wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer und die sogenannte Lebenskraft für die einzelnen Lebensalter angegeben.

Unter der wahrscheinlichen Lebensdauer versteht man diejenige Zeit, nach welcher die Hälfte der in einem bestimmten Lebensalter lebenden Personen noch am Leben sein würde; weil dann die Wahrscheinlichkeit für das Leben nach dieser Zeit gleich der Wahrscheinlichkeit des Todes $= \frac{1}{2}$ ist.

Z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines Neugebornen ist 18 Jahre, weil die Tafel im 18. Lebensjahre von 1000 Personen nur mehr 499 Lebende nachweist *). Die wahrscheinliche Lebensdauer eines 25jährigen wäre 32·5 Jahre, da von 466 Personen das Aussterben der Hälfte zwischen das 57. und 58. Lebensjahr fällt.

---

*) Liegt die Hälfte der im Alter m z. B. lebenden Personen ziemlich in der Mitte zwischen zwei Zahlen A_n und A_{n+1} der Tabelle, so ist $W_m = n + 0{\cdot}5 - m$ gesetzt worden.

Die mittlere oder durchschnittliche Lebensdauer nennt man den Quotienten aus der Anzahl der in dem fraglichen Jahre Lebenden in die Summe aller von diesen noch zu durchlebenden Jahre.

Die mittlere Lebensdauer eines $m$jährigen bestimmt man demgemäss auf folgende Art. Im Alter m sind A_m Personen am Leben, die Summe der von allen bis zum nächsten Jahre durchlebten Jahre ist somit A_m (da jede dieser Personen 1 Jahr gelebt hat); ebenso ergeben sich durch die das folgende $(m+1)^{te}$ Lebensjahr überlebenden Personen A_{m+1} Lebensjahre, ebenso für die weiteren Jahre A_{m+2}, A_{m+3}, A_{m+4}, ... A_{95}, es ist somit die Summe aller Lebensjahre:

$$A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots + A_{m+n} + \ldots + A_{95} = C_m$$

also das mittlere Lebensalter gleich dem arithmetischen Mittel $= \frac{C_m}{A_m}$. Hier wird angenommen, dass der Tod erst am Ende des Jahres eintreten werde; da diess jedoch während des ganzen Jahres geschehen kann, nimmt man besser an, es geschehe schon im halben Jahre, wodurch der Fehler geringer wird, und es ist sonach $M_m = \frac{C_m}{A_m} - 0{\cdot}5$.

Die Werthe von C_m findet man, indem man die Grössen A_m von $m = 95$ an zurück addirt, und es sind die entsprechenden Summen in der mit C_m bezeichneten Spalte der Tafel notirt. In den meisten Tabellen wird diese Kolumne „die Summe der Lebenden" genannt, welche Benennung jedoch nach obiger Erklärung ganz unpassend erscheint, und etwa „die Summe der noch zu durchlebenden Jahre" genannt werden sollte.

So ist z. B. die mittlere Lebensdauer

eines Neugeborenen $M_0 = \frac{C_0}{A_0} - 0{\cdot}5 = \frac{28988}{1000} - 0{\cdot}5 = 28{\cdot}49$

und für einen 25jährigen $M_{25} = \frac{C_{25}}{A_{25}} - 0{\cdot}5 = \frac{15042}{466} - 0{\cdot}5 = 31{\cdot}78$,

während die wahrscheinliche Lebensdauer respektive 18 und 32·5 Jahre war.

Man ersieht hieraus und aus Vergleichung der Kolumnen W_m und M_m, dass die Differenz der wahrscheinlichen und mittleren Lebensdauer in dem Kindesalter am grössten ist, mit dem zunehmenden Alter jedoch abnimmt.

Unter der Lebenskraft in einem bestimmten Alter versteht man (nach Lambert) das Verhältniss der Anzahl der in diesem Alter Lebenden zu der Anzahl der in demselben Sterbenden, oder die Beantwortung der Frage, auf wieviel Lebende von bestimmtem Alter ein Todesfall kömmt.

Es ist sonach die Lebenskraft K im m^{ten} Lebensjahre $K_m = \frac{A_m}{B_m}$.

Z. B. für einen Neugebornen $K_0 = \frac{A_0}{B_0} = \frac{1000}{250} = 4$

und im Alter von 25 Jahren, $K_{25} = \frac{A_{25}}{B_{25}} = \frac{466}{5} = 93$, wo also erst auf 93 Lebende ein Todesfall kömmt, während bis zum ersten Lebensjahre $\frac{1}{4}$ der gleichzeitig Geborenen stirbt.

C. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Leben der Menschen.

1. Die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine $m$jährige Person das Ende des $(m+n)^{\text{ten}}$ Lebensjahres erreicht oder noch n Jahre lebt.

Nach der Sterblichkeitstabelle werden von A_m jetzt lebenden $m$jährigen Personen bloss A_{m+n} Personen $m+n$ Jahre alt werden; es sind also für das Ereigniss, nach n Jahren noch zu leben, A_{m+n} Fälle günstig und $A_m - A_{m+n}$ Fälle ungünstig, also A_m Fälle möglich, da sich jeder $m$jährige unter den A_{m+n} Personen befinden kann; es ist somit:

$$\text{w} = \frac{A_{m+n}}{A_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1.}$$

So ist z. B. für eine $m$jährige Person die Wahrscheinlichkeit

noch 1 Jahr zu leben $w_1 = \frac{A_{m+1}}{A_m}$

„ 2 Jahre „ „ $w_2 = \frac{A_{m+2}}{A_m}$

„ 3 „ „ „ $w_3 = \frac{A_{m+3}}{A_m}$ u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 30jähriger das 45. Lebensjahr erreicht, ist demnach

$w = \frac{A_{45}}{A_{30}} = \frac{339}{439} = 0·7722$, da hier $m = 30$, $n = 15$ also $m + n = 45$ ist; während die Wahrscheinlichkeit für ihn noch 1 Jahr zu leben oder 31 Jahre alt zu werden, durch die Substitution $n = 1$.

$w' = \frac{A_{31}}{A_{30}} = \frac{433}{439} = 0·9863$, also sehr gross erhalten wird.

2. Die Anzahl der von N jetzt $m$jährigen Personen nach n Jahren noch Lebenden zu finden.

Nennen wir die Anzahl der dann $(m+n)$jährigen Personen x, so ist

$$x : N = A_{m+n} : A_m \text{ oder } x = N \frac{A_{m+n}}{A_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

man erhält also diese Anzahl, wenn man die Anzahl der jetzt Lebenden mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit multiplizirt (analog. A, 8),

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine $m$jährige Person nicht mehr n Jahre lebt, ist (nach A, 2):

$$w' = 1 - w = 1 - \frac{A_{m+n}}{A_m} = \frac{A_m - A_{m+n}}{A_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.$$

ein Resultat, zu welchem man auch auf folgendem Wege gelangt: da zu Ende des $(m+n)^{\text{ten}}$ Jahres nur mehr A_{m+n} Personen leben, so sind seit dem m^{ten} Jahre $A_m - A_{m+n}$ Personen gestorben, also $A_m - A_{m+n}$ Fälle dem Nichterreichen des $(m+n)^{\text{ten}}$ Lebensjahres günstig, und da wie früher A_m Fälle möglich, ist die Wahrscheinlichkeit

$$w' = \frac{A_m - A_{m+n}}{A_m}, \text{ wie oben.}$$

4. Die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine $m$jährige Person noch $n-1$ Jahre lebt, im n^{ten} aber stirbt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hier zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Person das $(m+n-1)^{\text{te}}$ Lebensjahr überlebt, und der Wahrscheinlichkeit, dass sie im $(m+n)^{\text{ten}}$ Lebensjahre stirbt.

Die Wahrscheinlichkeit $m+n-1$ Jahre alt zu werden ist (nach C, 1) $\ldots\ldots\ldots\ldots w_1 = \frac{A_{m+n-1}}{A_m}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine $(m+n-1)$jährige Person nicht mehr 1 Jahr lebe nach (C, 1 und 3), $w_2 = 1 - \frac{A_{m+n}}{A_{m+n-1}}$, somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit (A, 7):

$$w = \frac{A_{m+n-1}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{m+n}}{A_{m+n-1}}\right) = \frac{A_{m+n-1}}{A_m} \cdot \frac{A_{m+n-1} - A_{m+n}}{A_{m+n-1}} = \frac{A_{m+n-1} - A_{m+n}}{A_m}$$

$$\text{oder } w = \frac{B_{m+n-1}}{A_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.$$

Das ist aber nichts Anderes als die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Person unter den vom $(m+n-1)^{\text{ten}}$ bis zum $(m+n)^{\text{ten}}$ Lebensjahre Sterbenden befinde.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein 30jähriger gerade im 45. Lebensjahre stirbt, ist, da hier $m = 30$, $n = 15$ gesetzt werden muss:

$$w = \frac{A_{44} - A_{45}}{A_{30}} = \frac{B_{44}}{A_{30}} = \frac{7}{439} = 0{\cdot}0159$$

5. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass mehrere Personen A, B, C, ... von den Altern m, n, p, ... noch r Jahre mit einander leben.

Diese Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Personen dieses Alter zu erreichen (C, 1 und A, 7). Es ist die Wahrscheinlichkeit

für A noch r Jahre zu leben, $w_1 = \frac{A_{m+r}}{A_m}$

„ B „ „ „ „ „ $w_2 = \frac{A_{n+r}}{A_n}$

„ C „ „ „ „ „ $w_3 = \frac{A_{p+r}}{A_p}$ u. s. w.,

also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 \,.\, w_2 \,.\, w_3 \ldots\ldots = \frac{A_{m+r} \cdot A_{n+r} \cdot A_{p+r} \cdot \ldots\ldots}{A_m \cdot A_n \cdot A_p \cdot \ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots (5.$$

6. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Personen A, B, C, ... nicht alle bis dahin zusammen leben, oder wenigstens eine derselben vor dem r^{ten} Jahre gestorben sein wird, ist mit Bezug auf (A, 2)

$$w' = 1 - w = 1 - \frac{A_{m+r} \cdot A_{n+r} \cdot A_{p+r} \cdot \ldots\ldots}{A_m \cdot A_n \; A_p \cdot \ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots (6.$$

7. Die Wahrscheinlichkeit, dass nach r Jahren keine derselben mehr leben wird, oder alle bis dahin gestorben sein werden, ist, da nach (A, 2) die Wahrscheinlichkeit

für den Tod des A innerhalb r Jahre $w'_1 = 1 - w_1$

„ „ „ „ B „ „ „ $w'_2 = 1 - w_2$

„ „ „ „ C „ „ „ $w'_3 = 1 - w_3$ u. s. w.

mit Bezug auf (A, 7)

$$w'' = w'_1 \cdot w'_2 \cdot w'_3 \ldots = (1 - w_1)\,(1 - w_2)\,(1 - w_3) \ldots\ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{A_{m+r}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+r}}{A_n}\right) \left(1 - \frac{A_{p+r}}{A_p}\right) \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$w'' = 1 - (w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots) + (w_1\,w_2 + w_1\,w_3 + \ldots\ldots + w_2\,w_3 + w_2\,w_4 + \ldots) - (w_1\,w_2\,w_3 + w_1\,w_2\,w_4 + \ldots) \;(7.$$

8. Die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle diese Perso-

nen bis dahin todt sind, also wenigstens eine derselben noch das r^{te} Jahr überlebt, ist demgemäss (A, 2)

$$w''' = 1 - w'' = 1 - \left(1 - \frac{A_{m+r}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+r}}{A_n}\right)\left(1 - \frac{A_{p+r}}{A_p}\right) \ldots \text{ oder}$$

$$w''' = (w_1 + w_2 + w_3 + \ldots) - (w_1 w_2 + w_1 w_3 + \ldots) + \\ + (w_1 w_2 w_3 + \ldots) \ldots \quad (8.$$

9. Die Wahrscheinlichkeit endlich, dass wenigstens eine dieser Personen gerade im r^{ten} Jahre stirbt, ist (analog C, 4) zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass alle noch $(r - 1)$ Jahre leben, und der Wahrscheinlichkeit, dass sie das r^{te} Jahr nicht alle überleben. Die erstere Wahrscheinlichkeit ist nach (C, 5)

$$w_1 = \frac{A_{m+r-1} \cdot A_{n+r-1} \cdot A_{p+r-1} \ldots}{A_m \cdot A_n \cdot A_p \ldots} \text{ und die zweite nach } (C, 6)$$

$$w_2 = 1 - \frac{A_{m+r} \cdot A_{n+r} \cdot A_{p+r} \ldots}{A_{m+r-1} \cdot A_{n+r-1} \cdot A_{p+r-1} \ldots}, \text{ somit}$$

$$w = w_1 \cdot w_2 = \frac{A_{m+r-1} \cdot A_{n+r-1} \cdot A_{p+r-1} \ldots}{A_m \cdot A_n \cdot A_p \ldots}\left(1 - \frac{A_{m+r} \cdot A_{n+r} \cdot A_{p+r}}{A_{m+r-1} \cdot A_{n+r-1} \cdot A_{p+r-1} \ldots}\right) =$$

$$= \frac{A_{m+r-1} \cdot A_{n+r-1} \cdot A_{p+r-1} \ldots - A_{m+r} \cdot A_{n+r} \cdot A_{p+r} \ldots}{A_m \cdot A_n \cdot A_p \ldots}$$

Lebensversicherungen.

Unter Lebensversicherungen (eigentlich: Versicherungen auf das Leben der Menschen) versteht man die Versicherung von Kapitalien oder Renten, deren Zahlung von der Dauer des Lebens einer oder mehrerer Personen abhängig gemacht wird.

Anstalten, mit welchen derartige Verträge abgeschlossen werden, nennt man Lebensversicherungsanstalten.

Die zur Erlangung eines auf diese Weise versicherten Geldbetrages entweder auf einmal oder in bestimmten Raten zu leistenden Einzahlungen heissen Prämien.

Derjenige, welcher sich zur Zahlung derselben verpflichtet, wird Zeichner, und derjenige, von dessen Leben die Leistung der Versicherungsanstalt abhängt, wird der Versicherte (Assecurat) genannt, während die Anstalt selbst den Versicherer (Assecurant) vorstellt. Derjenige endlich, welcher aus diesem Vertrage eine Leistung zu erhalten hat, ist der Berechtigte.

Derartige Anstalten werden meistens durch Gesellschaften gebildet.

Zur Begründung solcher Gesellschaften wird entweder von den Unternehmern (Actionären) derselben als Garantie der versicherten Beträge gegen eigene Schuldurkunden (Actien) ein Stammkapital (Gesellschaftsfond) zusammengelegt, da die Mittel Einzelner zu einem derlei, grosse Kapitalien erfordernden Unternehmen nicht ausreichen; oder es garantiren sich die Berechtigten selbst die versicherten Beträge, indem sie ihre Einlagen als Stammkapital verwenden.

Im ersten Falle fliesst der etwa entfallende Gewinn den Actionären zu, im letzteren wird er an die Mitglieder selbst vertheilt.

Man unterscheidet also nach der Art der Gründung: auf Actien gegründete und wechselseitige Versicherungsgesellschaften.

Die älteste Lebensversicherungsanstalt ist die auf Wechselseitigkeit gegründete und im Jahre 1706 in England ins Leben getretene „*amicable society*" *). Auf dieses Institut folgten bald verschiedene andere theils wechselseitige, theils auf Actien gegründete Versicherungsanstalten. Namentlich erreichte in England die Zahl derselben eine ziemliche Höhe, und beherrschte in dieser Richtung bald ganz Deutschland.

Im Jahre 1829 endlich trat die ebenfalls auf Wechselseitigkeit gegründete Lebensversicherungsbank in Gotha, das erste deutsche Institut dieser Art, obwohl nach englischem Muster eingerichtet, nach Ueberwindung mancher Schwierigkeiten ins Leben.

In Oesterreich bestanden zu dieser Zeit auch bereits ähnliche Institute, jedoch ganz specieller Art, wie das „Wiener allgemeine Witwen- und Waisen-Pensions-Institut" seit 1823 und „die mit der ersten österr. Sparkasse verbundene Versorgungsanstalt für Unterthanen des österr. Kaiserstaates" (1825), welch' letztere gegen bestimmte Einlagen steigende Lebensrenten an die Mitglieder auszahlt.

Eigentliche Lebensversicherungsanstalten in Oesterreich sind folgende:

1. Die allgemeine Assekuranzgesellschaft *(Assicurazioni generali austro-italiche)* in Triest, welche mit einem Stammkapital von 2000000 Gulden Konv. Mze. auf Actien im Jahre 1831 errichtet wurde.

2. Die von Prof. Jos. Salomon gegründete „allgemeine wech-

*) Salomon »Ueber Lebensversicherungen.« Wien 1840.

selseitige Kapitalien- und Rentenversicherungsanstalt" in Wien, die im Jahre 1840 ihre Wirksamkeit begann.

3. Die „*Azienda assicuratrice*" in Triest, die für Güterversicherungen 1822 mit einem Kapitale von 2000000 Gulden Konv. Mze. gegründet, seit 1851 auch die Berechtigung erhalten hat, Lebensversicherungen einzugehen.

4. Die „*Nuova Società Commerciale di Assicurazioni*" in Triest, im Jahre 1847 mit 2000000 Gulden Stammkapital gegründet, seit 1851 Lebensversicherungsanstalt.

5. Die „*Riunione Adriatica di Sicurtà*", die im Jahre 1838 gegründet, im Jahre 1853 mit einem auf 6500000 Gulden Konv. Mze. angewachsenen Kapitale die Bewilligung erhielt Lebensversicherungen einzugehen. Endlich

6. „der Anker", Gesellschaft für Lebens- und Rentenversicherungen in Wien, seit 1859 mit einem Stammkapital von 2000000 Gulden österr. Währung *).

Die verschiedenen möglichen Arten von Lebensversicherungen lassen sich nicht in erschöpfender Weise aufzählen, da die Interessen, welchen sie dienen sollen, zu mannigfaltig, in stetem Wechsel und in fortwährender Neubildung begriffen sind, als dass es thunlich wäre sie zu überblicken und vorauszusehen. Wir werden daher hier auch nur die hauptsächlichsten derselben der Betrachtung unterziehen.

Alle Lebensversicherungen aber, ihre Gestaltung mag sonst was immer für eine sein, lassen sich schliesslich auf zwei Grundformen zurückführen: entweder handelt es sich um die Versicherung von fortlaufenden Bezügen, Renten, oder um jene von einmaligen Zahlungen, Kapitalien.

1. Versicherung von Renten.

a) Einfache Lebensrenten, das sind Renten, welche entweder vom Abschlusse des Vertrages an (unmittelbare Lebensrenten), oder nach Verlauf einer bestimmten Anzahl von Jahren (aufgeschobene Lebensrenten) bis zum Tode der versicherten Person fortlaufen.

*) Die ebenfalls für Güterversicherungen 1858 mit einem Kapitale von 3000000 Gulden Konv. Mze. gegründete »Erste ungarische allgem. Assekuranzgesellschaft« in Pest soll auch demnächst auf Lebensversicherungen ausgedehnt werden.

Derartige Versicherungen werden sich z. B. für ältere Personen eignen, die keine Erben hinterlassen und Kapital sammt Zinsen bis zu ihrem Tode verbrauchen wollen.

b) Temporäre Renten (auch Lebensactien genannt) werden nur durch eine vorher bestimmte Reihe von Jahren hindurch ausgezahlt, falls der Versicherte nicht etwa schon früher gestorben ist.

Derlei Renten werden z. B. das Einkommen einer Person bis zur Erreichung eines bestimmten Alters bilden.

c) Gegenseitige Lebensrenten. So nennt man diejenigen Renten, welche auf das Leben zweier oder mehrerer Personen versichert, bis zum Tode der letzten von ihnen gezahlt werden.

Solche Versicherungen können z. B. für Ehegatten gemacht werden.

d) Verbindungsrenten, deren Bezug von der Dauer des Zusammenlebens mehrerer Personen abhängt, und die mit dem Tode einer derselben erlöschen.

Man pflegt diese Renten auch Eherenten zu nennen, weil sie zumeist für die Dauer der Ehe versichert werden.

e) Einfache Erbrenten. Das sind Renten, welche mit dem Tode des Versicherten beginnen, und bis zu dem Tode des Berechtigten oder durch eine noch kürzere, vorher bestimmte Zeit dauern.

Diese Renten dienen zur Versorgung von Witwen (Witwenrenten) und Waisen u. s. w.

f) Gegenseitige Erbrenten, welche auf das Leben zweier oder mehrerer Personen versichert, mit dem Tode der ersten von ihnen beginnen, und durch eine bestimmte Zeit oder bis zum Tode der letzten von ihnen dauern.

Derartige Verträge werden zumeist bei Geschäftsverbindungen oder Ehen eingegangen, in welchen durch den Tod eines Theiles das Vermögen zerstückt, und somit zu dem Fortbestehen des Geschäftes oder dem anständigen Lebensunterhalte des Ueberlebenden nicht mehr ausreichen würde.

2. Versicherung von Kapitalien.

Diese versicherten Kapitalien werden auch Actien genannt.

a) Einmalige Lebensactie. So nennt man ein Kapital, welches die Anstalt zahlt, wenn der Versicherte einen bestimmten Zeitpunkt überlebt hat.

Derartige Verträge dienen z. B. zur Versorgung grossjähriger Kinder, zu Heiratsausstattungen u. s. w.

b) Einfache Erbactie heisst dasjenige bei dem Tode des Versicherten zahlbare Kapital, welches entweder an eine bestimmte Person oder überhaupt an die Erben des Versicherten ausgezahlt wird.

c) Gegenseitige Erbactie. Bei dieser Versicherung erhält die überlebende von zwei oder mehreren Personen, gleichviel welche, das versicherte Kapital.

Die Versicherung von Erbactien dieser Arten wird in ähnlichen Fällen wünschenswerth erscheinen, wie sie bei Erbrenten angegeben wurden.

d) Partielle Erbactie nennt man diejenige, bei welcher der Berechtigte nach Ablauf einer vorher bestimmten Zeit seines Rechtes wieder verlustig wird, falls der Tod des Versicherten bis dahin noch nicht eingetreten ist.

Im Gegensatze zu diesen werden die früher erwähnten auch totale Erbactien genannt.

Eine partielle Erbactie würde z. B. die Existenz der Witwe sicherstellen, falls der Gatte vor Erreichung desjenigen Alters stirbt, mit welchem der Anspruch auf Pension für seine Gattin beginnt.

Oft tritt die Verpflichtung der Versicherungsanstalt aus dem eingegangenen Vertrage erst nach Ablauf einer gewissen Zeit (z. B. nach b Jahren) in Wirksamkeit, so dass ein früheres Eintreten des erwarteten Ereignisses (z. B. des Todes des Versicherten) den Vertrag aufhebt. Man nennt diese Zeit die Probezeit, und spricht dann von aufgeschobenen Leib- oder Lebensrenten und Versicherungen mit oder ohne Probezeit.

Eine besondere der neuern Zeit angehörende Form von Versicherungen, bei welchen gleichfalls die Versicherung entweder auf ein Kapital oder eine Rente geht, sind

3. die Ueberlebensassociation.

Wir verstehen darunter diejenigen Gesellschaften, bei welchen die Einlagen der Mitglieder bis zu einem bestimmten Zeitpunkte (Liquidationstermin) gemeinschaftlich verwaltet und entweder mit Eintritt dieses Zeitpunktes sammt Zinseszins und dem bis dahin durch Beerbung der früher Verstorbenen sich bildenden Gewinne an die überlebenden Mitglieder im Verhältnisse von Einlage, Alter und Zeit vertheilt, oder zur Auszahlung von Renten verwendet werden, welche auf Grundlage dieser Beerbung von Jahr zu Jahr steigen. Es geben also derartige Associationen ein Mittel zu einer sehr raschen Kapitalsvermehrung.

Um für den Fall des vor dem Liquidationstermine eingetretenen Todes eines Versicherten mindestens das eingezahlte Kapital zurück zu erhalten, gehen die Versicherungsanstalten gegen bestimmte Prämien „Gegenversicherungen" ein, d. h. Verträge, durch welche die Gesellschaft sich verpflichtet, dem Zeichner im Falle des früheren Todes des Versicherten das eingezahlte Kapital mit oder ohne Zinsen zurück zu erstatten. Es ist diess nichts Anderes, als die Versicherung einer Erbactie, deren Grösse sich aber nach der Summe der bereits eingezahlten Einlagen und nach der Zeit richtet, durch welche dieselben bereits anliegen.

Aehnliche Gegenversicherungen können bei allen Versicherungsverträgen eingegangen werden.

Der Einfluss, welchen die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Alter zu erreichen oder nicht zu erreichen, auf die Grösse der Prämien hat, macht es möglich, dass die auf diese Rechnungen gegründeten Institute für verhältnissmässig sehr geringe Einzahlungen sehr bedeutende Vortheile bieten können und bieten müssen.

Bei den nun folgenden Berechnungen der hier angegebenen Versicherungen stehen sich immer zwei Momente entgegen:

1. die Leistung der die Versicherung eingehenden Person, und
2. die Gegenleistung der Gesellschaft oder Versicherungsanstalt.

Diese beiden Momente, Leistung und Gegenleistung, müssen einander gleich sein; die Factoren dieser Gleichheit liefert die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Einleitung C). Hiedurch wird nun die Berechnung der für eine bestimmte Art von Versicherungen zu zahlenden Prämien, und umgekehrt die Berechnung der für eine bestimmte Prämie zu versichernden Zahlungen möglich.

Wir werden in der Folge stets von den Auslagen der betreffenden Anstalt absehen, da dieselben gewöhnlich durch einen Perzentualzuschlag zur Prämie, durch einen Abzug an der Versicherungssumme, oder aus dem Gewinne der Gesellschaft gedeckt werden *).

---

*) So beträgt z. B. der Beitrag zu den Regiekosten bei der allg. wechsels. Kapitalien- und Rentenversicherungsanstalt in Wien 1‰.

Wir schreiten nun zur Berechnung der oben bereits angegebenen Arten der Versicherungen, welche wir zuerst im Allgemeinen durchführen, und dann die Methoden angeben wollen, nach welchen die praktische Berechnung derselben leichter möglich wird.

Je nachdem es sich hier um die Versicherung von Renten oder Kapitalien handelt, haben wir es mit der Lösung zweier Hauptaufgaben zu thun:

1. Versicherung von Renten,
2. Versicherung von Kapitalien.

Berechnung von Lebensversicherungen.

I. Allgemeine Auflösung.

1. Aufgabe. Versicherung von Renten.

A. Lebensrenten. Die Person A zahlt die Einlage α, und überdiess, so lange B oder C leben, durch a Jahre am Schlusse jedes Jahres, oder am Anfange jedes nächsten den Beitrag β, um dadurch nach Verlauf von b Jahren eine Rente γ durch c Jahre dauernd zu erhalten, falls dieselbe nicht durch das früher erfolgte Absterben von A und B erlosch.

Nehmen wir an, die Personen A, B und C seien beziehungsweise m, n und p Jahre alt.

Die Leistung des Zeichners besteht zunächst aus der augenblicklichen Einlage α, ferner aus den nach Verlauf jedes der a Jahre zu leistenden Beiträgen β, welche im Augenblicke der ersten Einlage die Werthe $\frac{\beta}{r}, \frac{\beta}{r^2}, \frac{\beta}{r^3}, \ldots \frac{\beta}{r^x}$ haben; wenn nämlich π die der Verzinsung zu Grunde gelegten Prozente, also $r = 1 + \frac{\pi}{100}$ den Zinsfuss bezeichnet, und eine ganzjährige Verzinsung mit Zins vom Zinse angenommen wird *).

Man nennt, wie bekannt, $\frac{\beta}{r^x}$ die auf x Jahre zurück diskontirte Einlage.

Der Werth jeder dieser Einlagen hängt jedoch auch von der Wahrscheinlichkeit ab, dass die Person A noch lebt und B und C nicht beide gestorben sind (A, 8).

Die Wahrscheinlichkeit, dass A z. B. noch x Jahre lebt, ist nach

$$(C, 1) \ldots \frac{A_{m+x}}{A_m}$$

*) Werden die Zinsen halbjährig kapitalisirt, so wäre $r_1 = 1 + \frac{\pi}{200}$ und es würden dann die Werthe der einzelnen Raten durch $\frac{\beta}{r_1^2}, \frac{\beta}{r_1^4}, \frac{\beta}{r_1^6}, \ldots$ ausgedrückt.

die Wahrscheinlichkeit, dass B bis dahin gestorben ist, nach

$$(C, 3) \ldots \left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)$$

„ „ dass C bis dahin gestorben ist, nach

$$(C, 3) \ldots \left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right)$$

Also „ „ dass B und C bis dahin gestorben sind, nach

$$(A, 7) \ldots \left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)\left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass B und C nicht beide bis dahin gestorben sind, also wenigstens einer von ihnen noch lebt

$$(C, 3) \ldots \left[1 - \left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)\left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right)\right] = \frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} A_{p+x}}{A_n \ A_p}.$$

Daher die Wahrscheinlichkeit, dass A noch x Jahre lebt und B oder C oder beide dann noch am Leben:

$$w_1 = \frac{A_{m+x}}{A_m}\left[1 - \left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)\left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right)\right] = \frac{A_{m+x}}{A_m}\left[\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} A_{p+x}}{A_n A_p}\right].$$

Es ist somit nach (A, 8) der Hoffnungswerth der Einlage $\frac{\beta}{r^x}$.

$$h_x = \frac{\beta}{r^x} \frac{A_{m+x}}{A_m}\left[\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right].$$

Die Einlage β wird aber durch a Jahre geleistet; um die einzelnen Hoffnungswerthe der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Einlage zu finden, haben wir in dieser Gleichung für x nach einander die Werthe 1, 2, 3 . . . a zu setzen *); und es ist der Werth der Leistung der Person im Augenblicke der ersten Einlage α:

$$l = \alpha + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots . h_a = \alpha + \sum_{1,a}^{x} (h_x),$$

wenn man die Summe $h_1 + h_2 + \ldots . + h_a$ mit dem Symbole Σ (Summe) bezeichnet; und 1 und a die Grenzen anzeigen, zwischen welchen die Substitution für x zu geschehen hat.

In Verbindung mit dem oben für h_x aufgestellten Werthe erhält man, wenn man das konstante β vor das Summenzeichen setzt, als die Gesammtleistung des Zeichners:

$$l = \alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x . A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] \ldots \ldots (\mu$$

Der Hoffnungswerth der Rente oder der Leistung der Versicherungsgesellschaft wird nun auf ähnliche Weise gefunden.

---

*) Wird β am Anfange eines jeden Jahres gezahlt, dann ist x, zwischen den Grenzen 1 und $a - 1$ zu nehmen.

Der absolute, auf den Moment der ersten Einlage zurückdiskontirte Werth der nach x Jahren fälligen Jahresrente ist $= \frac{\gamma}{r^x}$, und da die Wahrscheinlichkeit, dass B und C, oder eine dieser Personen noch x Jahre leben,

$$w_2 = 1 - \left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)\left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right) = \frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p},$$

so ist der Hoffnungswerth für das x^{te} Jahr

$$H_x = \frac{\gamma}{r^x}\left[\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right]$$

Weil die Verpflichtung der Gesellschaft aber erst nach b Jahren beginnt und nur durch c Jahre dauert, ist der jetzige Werth der Leistung der Gesellschaft

$$L = H_{b+1} + H_{b+2} + H_{b+3} + \ldots + H_{b+c} = \sum_{b+1,\, b+c}^{x} [H_x],$$

oder durch Substitution des obigen Werthes: der Werth der ganzen Rente.

$$L = \gamma \sum_{b+1,\, b+c}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (\nu$$

Und weil die Leistung des Zeichners gleich dem Werthe der versicherten Rente, d. i. weil $l = L$ sein muss, aus (μ. und ν.):

$$\alpha + \beta. \sum_{1,\, a}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x . A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] =$$

$$= \gamma \sum_{b+1,\, b+c}^{x} \left[\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n\ A_p}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \mathrm{I.}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man aus zweien der Grössen α, β oder γ die dritte berechnen.

Eine derartige Rente, welche nur durch eine bestimmte Anzahl (c) Jahre gezahlt wird, nennt man eine temporäre Rente oder Lebensactie (in diesem allgemeinen Falle für zwei Personen).

Wird die Rente bis zum Tode beider versicherten Personen B und C gezahlt; so ist, wenn B die ältere, also $n > p$ ist, $p + b + c = 95 =$ dem höchsten Lebensalter zu setzen; oder es besteht dann für x keine obere Grenze, weil für $p + x > 95$, also um so mehr $n + x > 95$ die Mortalitätstafel ohnediess $A_{n+x} = A_{p+x} = 0$ gibt, und die Rechnung schliesst. Man erhält dann zur Berechnung von bis zum Tode der Versicherten (B und C) laufenden Renten, Lebens- oder Leibrenten, die Gleichung:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x . A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x}\,A_{p+x}}{A_n . A_p}\right)\right] =$$
$$= \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n . A_p}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \mathrm{II.}$$

Ebenso kann man umgekehrt alle für Lebensrenten gefundenen Ausdrücke durch Hinzufügen der oberen Grenze $b + c$ für Lebensakzien einrichten, und wir werden desshalb nur die ersteren näher beleuchten.

Besondere Arten der Lebensrenten.

a) Lebensrente für eine Person (B) eingezahlt durch eine andere Person (A).

Hier fällt C als nicht mehr berechtigt weg, ist also als bereits gestorben zu betrachten, daher $p \gtreqless 96$ und somit $A_{p+x} = 0$ zu setzen; man erhält hier die Gleichung:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{r^x . A_m A . n}\right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x}}{r^x A_n}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{III.}$$

b) Lebensrente eingezahlt von der versicherten Person (B) selbst. Hier muss die Leistung der Einzahlung unabhängig von dem Leben der Person A werden, deren Tod nach Gleichung (III) das Aufhören der Zahlung bedingen würde; es muss daher A als stets lebend angesehen, und die Wahrscheinlichkeit seines Lebens $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$, d. i. gleich der Gewissheit gesetzt werden. Es ergibt sich also aus (III)

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x}}{r^x A_n}\right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x}}{r^x A_n}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{IV.}$$

c) Gegenseitige Lebensrente, welche von B und C oder dem Ueberlebenden von ihnen gezeichnet, und bis zum Absterben beider ausgezahlt wird (für das längere Leben).

In diesem Falle wie im vorhergehenden wird die Einzahlung von der Dauer des Lebens der Person A unabhängig, also wieder $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$, somit aus (II).

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] =$$
$$= \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \mathrm{V.}$$

d) Gegenseitige Lebensrente mit der Bedingung, dass die Einzahlungen mit dem Tode der einen der beiden Personen B oder C auch vor dem Verlaufe von a Jahren aufhören.

Hier entfällt im ersten Theile die Gleichung (II) die Einzahlung sobald B oder C stirbt, also sind von der Wahrscheinlichkeit w_1 (Seite 21), dass entweder beide oder doch eine von beiden Personen nach x Jahren noch leben, da hier wieder $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$,

die Wahrscheinlichkeit, dass B lebt und C gestorben ist, d. i.

$$\frac{A_{n+x}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{p+x}}{A_p}\right)$$

und „ „ „ C lebt und B gestorben ist, d. i.

$$\frac{A_{p+x}}{A_p}\left(1 - \frac{A_{n+x}}{A_n}\right)$$

abzuziehen, oder die Wahrscheinlichkeit $\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}$

zu vermindern um $\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - 2 \cdot \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}$,

woraus man als Rest erhält: $\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}$, d. i. die Wahrscheinlichkeit, dass B und C zusammenleben (C, 5), und wir erhalten aus Gleichung (II):

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] \ldots \textbf{VI.}$$

e) Verbindungsrente (Eherente). Da diese Rente bloss für die Dauer der Verbindung zweier Personen läuft, so ist hier wie im vorigen Falle jedoch in beiden Theilen der Gleichung zu verfahren, und wir erhalten

aus (II), wenn eine dritte Person A einzahlt,

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x} \; A_{p+x}}{r^x \cdot A_m \cdot A_n A_p}\right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right] \ldots\ldots\ldots \textbf{VII. 1.}$$

oder aus (VI), wenn B und C selbst die Zeichner sind,

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x \cdot A_n \cdot A_p}\right] \ldots\ldots\ldots \textbf{VII. 2.}$$

B. Erbrente. Diese Rente beginnt für B und C mit dem Zeitpunkte, in welchem die versicherte Person (z. B. A) stirbt.

Das Hinzutreten dieser neuen Bedingung hat auf den ersteren Theil der Gleichung (II), d. h. auf die Leistung der Einzahlungen, keinen Einfluss, wohl aber auf den zweiten; denn nun ist die Auszahlung der Rente von dem Tode der versicherten Person A abhängig geworden, da der

Verlauf der Probezeit b zur Erlangung der Rente nicht genügt, sobald nicht auch A gestorben ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A nach x Jahren gestorben, ist nach $(C, 3)$ $w_3 = 1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}$, und somit wird die Wahrscheinlichkeit, dass B oder C noch am Leben, jedoch A gestorben, ausgedrückt durch $w_2 \cdot w_3$, es kömmt somit zu w_2 (Seite 22) noch der Faktor $w_3 = 1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}$ hinzu, und wir erhalten aus (II.):

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] =$$
$$= \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\left(1 - \frac{A_{m-x}}{A_m}\right)\right] \ldots \mathbf{VIII.}$$

Besondere Arten der Erbrenten.

a) Erbrente für eine bestimmte Person (z. B. B). Hier ist wie in (III) $A_{p+x} = 0$, also:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{r^x A_m \cdot A_n}\right] = \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} - \frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{A_m \cdot A_n}\right)\right] \ldots \mathbf{IX.}$$

b) Gegenseitige Erbrente. Diese Rente wird von zwei Personen (B und C) durch Einzahlung während ihres Zusammenlebens, für die überlebende von ihnen versichert. Man setzt hier wie in (IV) $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$, und mit Bezug auf (VI) wird der erste Theil der Gleichung (II) übergehen in $\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right]$.

Da ferner beide Personen die Rente während ihres Zusammenlebens nicht beziehen wollen, so ist die Leistung der Gesellschaft um den Betrag der Verbindungsrente (VII, 2) zu vermindern, also

$$L = \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] - \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right]$$
$$= \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - 2 . \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right],$$ daher die gesuchte Gleichung:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right] = \gamma \sum_{b+1}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} + \frac{A_{p+x}}{A_p} - 2 \frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{A_n \cdot A_p}\right)\right] \ldots \mathbf{X.}$$

Wird die Einzahlung der jährlichen Prämien bis zum Tode der Versicherten fortgesetzt, so ist im ersten Theile der betreffenden Gleichung a unbestimmt, oder es gibt dann keine obere Grenze, da die Summe (Σ) abbricht, sobald x mehr dem Alter des Versicherten $\overline{>}\, 96$ wird.

Findet nur eine einmalige Einzahlung von Seite des Zeichners statt, so ist $\beta = 0$; ist die erste Einlage gleich der jährlichen Prämie, so ist $\alpha = \beta$; und ist keine Probezeit bedungen, d. h. sind die Renten nicht aufgeschoben, so ist $b = 0$ zu setzen.

Anmerkung. Soll die jährliche Rente γ in n gleichen Raten auf n gleiche Intervalle des Jahres vertheilt gezahlt werden, so wird die Rechnung folgende: *)

Da sich hier zunächst bloss die Leistung der Gesellschaft ändert, so bleibt der erste Theil unserer Gleichung ungeändert. (Gl. III und IV.)

Wir setzen hier der Einfachheit wegen eine einfache Lebensrente ohne Probejahre voraus und wollen annehmen, dass sich die in einem Jahre vorkommenden Sterbefälle gleichmässig auf dasselbe vertheilen, so dass z. B. im $(m+x)^{ten}$ Lebensjahre von A_{m+x}

nach $\frac{1}{n}$ Jahr noch . . . $A_{m+x} - \frac{1}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1})$ Personen leben

» $\frac{2}{n}$ » » $A_{m+x} - \frac{2}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1})$ » »

. . . .

» $\frac{y}{n}$ » » $A_{m+x} - \frac{y}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1})$ » »

. . . .

» $\frac{n}{n}$ » » $A_{m+x} - \frac{n}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1}) = A_{m+x+1}$ Personen leben.

Es ist somit die Wahrscheinlichkeit z. B. im $\left(\frac{y}{n}\right)^{ten}$ Theil des $(m+x)^{ten}$ Jahres zu leben ausgedrückt durch $\dfrac{A_{m+x} - \frac{y}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1})}{A_m}$ und somit der auf den Vertragsschluss zurückdiskontirte Hoffnungswert dieser Rate $\frac{\gamma}{n}$

$$\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{A_{m+x} - \frac{y}{n}(A_{m+x} - A_{m+x+1})}{A_m r^x \cdot r^{\frac{y}{n}}},$$

und wenn die Summirung nach x für die ganze Lebenszeit vorgenommen, also $x = 0, 1, 2 \ldots$ **), erhält man

$$\frac{\gamma}{nr^{\frac{y}{n}}}\left[\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{A_m r^x}\right] - \frac{y}{n}\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{A_m r^x}\right] + \frac{ry}{n}\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x+1}}{A_m r^{x+1}}\right]\right]$$

oder wenn $\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x+1}}{A_m r^{x+1}}\right] = s$ gesetzt wird, welchen Ausdruck wir später berechnen werden, und da $\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{A_m r^x}\right] = 1 + s$ ist, geht obiger Werth über in

---

*) Leibrenten und Lebensversicherungen von David Jones, deutsch von Karl Hattendorf. Hannover 1859.

**) Sind b Probejahre bedungen, so erhält x die Werthe b, $b+1$, $b+2$, ...

$\frac{\gamma}{nr^{\frac{y}{n}}}\left[(1+s)-\frac{y}{n}(1+s)+\frac{ry}{n}s\right]$, und wenn man nun auch alle n Raten im Jahre summirt, also $y = 1, 2, 3 \ldots n$ setzt

$$\frac{\gamma}{n}(1+s)\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right]-\frac{\gamma}{n^2}\left[1+(1-r)s\right]\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3}{r^{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}\right]$$

und da $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}=\frac{1-r}{\left(1-r^{\frac{1}{n}}\right)r}$

und
$$\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3}{r^{\frac{3}{n}}}\cdots+\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}=\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}=$$
$$+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}$$
$$+\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}$$

$=\frac{1}{r\left(1-r^{\frac{1}{n}}\right)}\left(n-r^{\frac{1}{n}}\frac{1-r}{1-r^{\frac{1}{n}}}\right)$, so findet man durch eine einfache Rechnung

$$L=\frac{1}{n\left(r^{\frac{1}{n}}-1\right)}-\frac{r^{\frac{1}{n}}(r-1)}{n^2r\left(r^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}\left[1-(r-1)\sum_{0}^{x}\left[\frac{A_{m+x+1}}{A_m r^{x+1}}\right]\right]$$

Da die Raten stets halbjährig, höchstens vierteljährig gezahlt werden, so ist die Rechnung eine ziemlich einfache.

2. Aufgabe. Versicherung von Kapitalien.

A. **Einmalige Lebensactie.** Wir haben es hier mit der Versicherung eines Kapitals γ zu thun, welches nach dem b^{ten} Jahre ausbezahlt wird, falls B und C oder einer von ihnen noch leben.

Es ist diess also ein specieller Fall der Aufgabe (1) Gleichung (I), indem hier die Lebensactie nur einmal gezahlt wird, also $c = 1$ ist. Es wird dann:

$$\alpha+\beta\sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right]=$$
$$=\frac{\gamma}{r^{b+1}}\left[\frac{A_{n+b+1}}{A_n}+\frac{A_{p+b+1}}{A_p}-\frac{A_{n+b+1}\cdot A_{p+b+1}}{A_n\cdot A_p}\right]\ldots\ldots\ldots \text{XI.}$$

B. **Erbactien.** Sind wieder A die versicherte, B und C die berechtigten Personen, so ist die Leistung der den Vertrag schliessenden Person A wie oben (1)

$$l=\alpha+\beta\sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right].$$

Die Leistung der Gesellschaft hingegen besteht in der Zahlung des Kapitales γ nach x Jahren, dessen Hoffnungswerth, $H=w\frac{\gamma}{r^x}$, wenn w die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass A gerade in diesem (dem x^{ten}) Jahre stirbt und B oder C dann noch leben.

Es ist aber nach (C, 4.) der Einleitung die Wahrscheinlichkeit, dass A gerade im x^{ten} Jahre stirbt

$$w_1=\frac{A_{m+x-1}-A_{m+x}}{A_m}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass B oder C oder beide noch leben wie in (1)

$w_2=\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}$; somit die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereigniss:

$$w=w_1\,.\,w_2=\frac{A_{m+x+1}-A_{m+x}}{A_m}\left[\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right].$$

Daher ist der diskontirte Hoffnungswerth für das x^{te} Jahr:

$H_x=\frac{\gamma}{r^x}\cdot\frac{A_{m+x-1}-A_{m+x}}{A_m}\left[\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right]$ und, da das Ereigniss vom $(b+1)^{\text{ten}}$ Jahre an eintreten kann, der gesammte Hoffnungswerth, oder die Leistung der Gesellschaft:

$L=H_{b+1}+H_{b+2}+H_{b+3}+\ldots+H_x+\ldots=\sum_{b+1,}^{x}[H_x]$, oder durch Substitution, und da $l=L$

$$\alpha+\beta\sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right]=$$
$$=\gamma\sum_{b+1,}^{x}\left[\frac{A_{m+x-1}-A_{m+x}}{r^x\,.\,A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right]\ldots\ \mathbf{XII.}$$

Besondere Arten der Erbactien.

a) Erbactien für eine einzige bestimmte Person. Hier ist $A_{p+x}=0$, da C als vor dem Versicherten gestorben angesehen wird (siehe A, a Aufgabe 1); also:

$$\alpha+\beta\sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\cdot A_{n+x}}{r^x\,A_m\,A_n}\right]=\gamma\sum_{b+1,}^{x}\left[\frac{(A_{m+x-1}-A_{m+x})\,A_{n+x}}{r^x\,.\,A_m\cdot A_n}\right]\ldots\ldots\ \mathbf{XIII.}$$

b) Erbactie ohne Bestimmung des Erben. Da hier weder die Zahlung der Prämien, noch die Verpflichtung der Gesellschaft durch die Dauer des Lebens von B und C, oder durch ihren Tod beirrt werden darf; so betrachte man eine von ihnen oder beide als jedenfalls lebend, und setze in XII. entweder $A_{n+x} = o$ und $\frac{A_{p+x}}{A_p} = 1$, oder $\frac{A_{n+x}}{A_n} = 1$ und $A_{p+x} = o$, oder endlich $\frac{A_{n+x}}{A_n} = \frac{A_{p+x}}{A_p} = 1$, woraus man erhält:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x . A_m} \right] = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{m+x-1} - A_{m+x}}{r^x \, A_m} \right] \ldots\ldots\ldots \mathbf{XIV}.$$

c) Gegenseitige Erbactie nennen wir diejenige, welche an die überlebende von zwei Personen gezahlt wird (auf das kürzere Leben).

Da hier die Einlage vom Zeichner A natürlich nur so lange geleistet wird, als er sowie B und C zusammen leben, so ist:

$$l = \alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x \, A_m \, A_n \, A_p} \right], \text{ siehe 1. Aufgabe (e, VII. 1).}$$

Die Gesellschaft hat sowohl für den Fall, dass B als auch dass C überlebt, die Erbactie auszuzahlen, es muss also von derselben eine doppelte Erbactie versichert werden.

Es folgt nun aus (XIII) für $m = p$, der Werth der für B auf den Tod von C versicherten Actie:

$$L_1 = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{(A_{p+x-1} - A_{p+x}) \, A_{n+x}}{r^x \, A_p \, A_n} \right],$$

und wenn hier n mit p vertauscht wird, für die auf den Tod des B zu Gunsten der Person C versicherte Actie:

$$L_2 = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{(A_{n+x-1} - A_{n+x}) \, A_{p+x}}{r^x . A_n \cdot A_p} \right], \text{ also}$$

$$L = L_1 + L_2 = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x} A_{p+x-1} + A_{p+x} A_{n+x-1} - 2 . A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x . A_n \cdot A_p} \right],$$

und die gesuchte Gleichung:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \, A_{n+x} \, A_{p+x}}{r^x \, A_m \, A_n \, A_p} \right] =$$

$$= \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \, A_{p+x-1} + A_{p+x} \, A_{n+x-1} - 2 . A_{n+x} \, A_{p+x}}{r^x \, A_n \, A_p} \right] \ldots \mathbf{XV}.$$

d) Gegenseitige Erbactie durch die Versicherten selbst eingezahlt.

Hier ist wie in (*b*) der 1. Aufgabe, $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$ zu setzen; woraus man erhält:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x . A_n \, A_p} \right] =$$

$$= \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{A_{n+x} \, A_{p+x-1} + A_{p+x} \, A_{p+x-1} - 2 \cdot A_{n+x} \, A_{p+x}}{r^x \, A_n \cdot A_p} \right] \ldots\ldots \mathbf{XVI}.$$

e) Partielle Erbactien, so nennt man diejenigen Erbactien, bei welchen der Anspruch an die Versicherungsgesellschaft nach Ablauf einer gewissen Zeit wieder verloren geht, falls der Versicherte bis dahin nicht gestorben ist.

Zum Gegensatze von diesen werden die früher [a bis d] berechneten Erbactien, bei welchen diese Einschränkung nicht bedungen wurde, auch totale Erbactien genannt.

Um die früheren Formeln auch für partielle Erbactien einzurichten, braucht man bloss, analog des Vorganges bei Lebensactien, im zweiten Theile derselben als obere Substitutionsgrenze die Grösse $(b+c)$ anzunehmen, wenn die nach b Probejahren eingetretene Verpflichtung der Gesellschaft nach c weiteren Jahren wieder erlischt.

So geht z. B. die allgemeine Gleichung (XII) für partielle Erbactien über in folgende:

$$\alpha+\beta \sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right]=$$
$$=\gamma \sum_{b+1,\,b+c}^{x}\left[\frac{A_{m+x-1}-A_{m+x}}{r^x A_m}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n}+\frac{A_{p+x}}{A_p}-\frac{A_{n+x}\, A_{p+x}}{A_n\cdot A_p}\right)\right] \quad \ldots \mathrm{XVII.}$$

Auf gleiche Weise lassen sich auch die übrigen Gleichungen umgestalten.

Alle diejenigen Versicherungen, welche von dem Tode einer bestimmten Person abhängen, deren also der Berechtigte nur dann theilhaftig werden kann, wenn er den Versicherten überlebt, pflegt man auch Ueberlebungsversicherungen zu nennen *).

Anhang.

1. Berechnung des aus Ueberlebensassociationen zur Liquidationszeit zu erwartenden Kapitales.

Die Art der Vertheilung des zur Liquidationszeit durch Zinseszinsen und inzwischen eingetretene Todesfälle für die Ueberlebenden angewachsenen Gesammtkapitales ist zwar aus den Tarifen derjenigen Anstalten, bei welchen solche Associationen bestehen, nicht genau ersichtlich; auf

*) Soll das versicherte Kapital γ, 2γ, 3γ, ... $x\gamma$ sein, je nachdem der Tod des Versicherten nach $b+1$, $b+2$, $b+3$ ... . $b+x$ Jahren erfolgt; so ist γ durch $x.\gamma$ zu ersetzen, und, da x veränderlich ist, muss dieser Faktor unter dem Summenzeichen stehen bleiben. Man erhält dann z. B. im zweiten Theile der Gleichung (XIII.) $\gamma \sum_{b+1,}^{x}\left[x.\frac{(A_{m+x-1}-A_{m+x})\,A_{n+x}}{r^x . A_m . A_n}\right]$

dem von mir in dem Folgenden eingeschlagenen Wege gelangt man jedoch leicht zur Bestimmung der dieser Vertheilung zu Grunde zu legenden Verhältnisszahlen.

Wir theilen zu dem Ende die bis zu einem bestimmten Momente in eine derartige Association eingetretenen Mitglieder nach ihrem Alter beim Eintritte, der Dauer ihrer Mitgliedschaft, und ihren Einlagen in Gruppen ein, und wollen nun die Leistungen dieser einzelnen Gruppen berechnen.

Nehmen wir an, es seien:

M_1 Individuen vom Alter m, mit der Einlage a und dem jährlichen Beitrage α,
M_2 „ „ „ n, „ „ „ b „ „ „ „ β,
M_3 „ „ „ p, „ „ „ c „ „ „ „ γ

u. s. w., beziehungsweise μ, ν, π. . . . . Jahre vor dem Liquidationstermine eingetreten, so sind die absoluten Werthe der Einlagen und der Beiträge für den Zeitpunkt der Liquidation berechnet, z. B. für ein Mitglied der ersten Gruppe ar^{μ}, $\alpha r^{\mu-1}$, $\alpha r^{\mu-2}$, ... αr^2, αr, wo r den bekannten Werth hat.

Bringt man jedoch bloss die Hoffnungswerthe in Rechnung, da ausser der ersten Einlage alle Nachzahlungen von der Wahrscheinlichkeit diesen Zeitpunkt zu erleben abhängig sind; so sind die absoluten Werthe der letzteren mit den betreffenden Wahrscheinlichkeiten für das Leben des Mitgliedes nach 1, 2, 3, ... Jahren zu multipliziren. Man erhält dann als Gesammtleistung eines Mitgliedes der ersten Gruppe:

$$l_1 = ar^{\mu} + \alpha r^{\mu-1} \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m} + \alpha r^{\mu-2} \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m} + \alpha r^{\mu-3} \cdot \frac{A_{m+3}}{A_m} + \ldots$$
$$+ \alpha r^2 \cdot \frac{A_{m+\mu-2}}{A_m} + \alpha r \cdot \frac{A_{m+\mu-1}}{A_m} = ar^{\mu} + \frac{\alpha r^{\mu}}{A_m} \sum_{1,\mu-1}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]$$

also die Leistung der ganzen Gruppe:

$$L_1 = M_1 \left(ar^{\mu} + \frac{\alpha r^{\mu}}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \ldots + \frac{A_{m+\mu-1}}{r^{\mu-1}}\right]\right), \text{ oder}$$

$$L_1 = M_1 \cdot \left(ar^{\mu} + \frac{\alpha r^{\mu}}{A_m} \sum_{1,\mu-1}^{x} \left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]\right) = M_1\, l_1.$$

Ebenso findet man als Leistung der übrigen Gruppen

$$L_2 = M_2 \left(br^{\nu} + \frac{\beta r^{\nu}}{A_n} \sum_{1,\nu-1}^{x} \left[\frac{A_{n+x}}{r^x}\right]\right) = M_2\, l_2,$$

$$L_3 = M_3 \left(cr^{\pi} + \frac{\gamma r^{\pi}}{A_p} \sum_{1,\pi-1}^{x} \left[\frac{A_{p+x}}{r^x}\right]\right) = M_3\, l_3, \text{ u. s. w.}$$

Folglich wird zur Liquidationszeit das bis dahin angewachsene Kapital $K = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots$ sein.

Da nun die auf die einzelnen Gruppen entfallenden Antheile sich wie die Leistungen derselben verhalten müssen, so entfällt

auf die Gruppe 1. der Antheil L_1,

„ „ „ 2. „ „ L_2,

„ „ „ 3. „ „ L_3 u. s. w. Wäre durch besondere Umstände das zu vertheilende Kapital $K \gtrless L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots$, so dienen L_1, L_2, ... als Verhältnisszahlen.

Um nun die Vertheilung an die Mitglieder selbst vorzunehmen, haben wir die Anzahl der zur Liquidationszeit in jeder Gruppe noch Lebenden zu berechnen.

Nach (C. 1.) ergibt sich, dass

von M_1 Personen vom Alter m nach μ Jahren $M_1 \cdot \frac{A_{m+\mu}}{A_m} = M_1{}'$

„ M_2 „ „ „ n „ ν „ $M_2 \cdot \frac{A_{n+\nu}}{A_n} = M_2{}'$

„ M_3 „ „ „ p „ π „ $M_3 \cdot \frac{A_{p+\pi}}{A_p} = M_3{}'$

u. s. w. leben werden.

Man erhält daher als Antheil eines Mitgliedes

der 1. Gruppe . . . $K_1 = L_1 : M_1{}' = M_1\, l_1 : M_1 \cdot \frac{A_{m+\mu}}{A_m} = l_1 \cdot \frac{A_m}{A_{m+\mu}}$

„ 2. „ . . . $K_2 = L_2 : M_2{}' = M_2\, l_2 : M_2 \cdot \frac{A_{n+\nu}}{A_n} = l_2 \cdot \frac{A_n}{A_{n+\nu}}$

„ 3. „ . . . $K_3 = L_3 : M_3{}' = M_3\, l_3 : M_3 \cdot \frac{A_{p+\pi}}{A_p} = l_3 \cdot \frac{A_p}{A_{p+\pi}}$ u. s. w.

Es ist also $K_1 : l_1 = A_m : A_{m+\mu}$

$K_2 : l_2 = A_n : A_{n+\nu}$

$K_3 : l_3 = A_p : A_{p+\pi}$

Aus der Betrachtung dieser Resultate geht nun hervor, dass ohne Rücksicht auf die Anzahl der in einer Gruppe befindlichen Personen die Antheile und Leistungen derselben im direkten Verhältnisse der Zahlen der Lebenden im Momente des Beitrittes und der Liquidation stehen müssen.

Da aber stets $A_m > A_{m+x}$, so ist auch $K_1 > l_1$, $K_2 > l_2$ u. s. w. und es werden die Antheile immer grösser ausfallen als die Leistung des Mitgliedes.

Nun lassen sich aber l_1, l_2, l_3, ... nach den angegebenen Formeln aus den Grössen a, α, m und μ; b, β, n und ν; c, γ, p und π u. s. w.

berechnen; und es sind daher auch die Werthe K_1, K_2, K_3, ... d. i. die aus einer Ueberlebens-Association für die einzelnen Mitglieder derselben zu hoffenden Kapitalien bekannt.

2. Berechnung von Gegenversicherungen.

Stellt man die Bedingung, dass bei Ueberlebensversicherungen im Falle die berechtigte Person vor der versicherten stirbt, die eingezahlten Prämien von der Gesellschaft zurückerstattet werden; so ist ein doppelter Versicherungsvertrag vorhanden. Es wird nämlich einerseits von dem Zeichner ein Kapital oder eine Rente auf den Tod des Versicherten zu Gunsten des Berechtigten und anderseits eine bedingte Anwartschaft auf den Tod des Berechtigten zu Gunsten des Zeichners versichert.

Wir wollen den hier einzuschlagenden Weg an einem speciellen Falle zeigen:

Sei der $m$jährige A der Zeichner und Versicherte zugleich, welcher auf seinen Tod für den $n$jährigen B gegen a jährliche Prämien (β) ein Kapital oder eine Rente (γ) versichert, mit der Bedingung, dass ihm, falls B vor ihm stirbt, die bis dahin eingezahlten Prämien zurückerstattet werden sollen.

Es besteht hier die jährliche Prämie (β) erstens aus der für die Erbactie oder Erbrente zu entrichtenden Prämie (y), und zweitens aus der für die von der Dauer der Einzahlung abhängige bedingte Anwartschaft zu zahlenden jährlichen Einlage (z).

Es ist somit $\beta = y + z$.

Um nun y zu finden, wird, je nachdem eine Erbrente oder Actie versichert wurde, in Formel IX. oder XIII. $\alpha = 0$, $\beta = y$ gesetzt und man erhält:

$$y = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{1}{r^x}\left(\frac{A_{n+x}}{A_n} - \frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{A_m \cdot A_n}\right)\right] : \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{r^x \cdot A_m \cdot A_n}\right] = \gamma W_1$$

oder $$y = \gamma \sum_{b+1,}^{x} \left[\frac{(A_{m+x-1} - A_{m+x}) A_{n+x}}{r^x \cdot A_m \cdot A_n}\right] : \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{r^x \cdot A_m \cdot A_n}\right] = \gamma W_2$$

und allgemein $y = \gamma\, W'$.

Da nun der zweite Theil (z) der Prämie die Versicherung einer Erbactie von β, 2β, 3β ... aβ bewirken soll, je nachdem B im 1., 2., 3. ... a^{ten} Jahre nach begonnener Einzahlung stirbt; so haben wir die Prämie für eine steigende Erbactie zu suchen und erhalten für $\alpha = 0$, $\beta = z$, $\gamma = \beta$, und $b = 0$ aus XIII. mit Rücksicht auf die Anmerkung Seite 30:

$$z = \beta \sum_{1,a}^{x} \left[x . \frac{(A_{n+x-1} - A_{n+x}) A_{m+1}}{r^x A_m . A_n} \right] : \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{r^x A_m . A_n} \right] = \beta W'',$$

wenn dort m mit n vertauscht wird.

Es ist daher $\beta = y + z = \gamma W' + \beta W''$

oder $\beta = \dfrac{\gamma W''}{1 - W'}$ *).

Soll z als einmalige Prämie entrichtet werden, so ist in XIII. $\beta = 0$, $\alpha = z$, $\gamma = \beta$ und $b = 0$ zu setzen, und es ist dann die einmalige für die Gegenversicherung zu zahlende Prämie

$$z = \beta \sum_{1,a}^{x} \left[x \frac{(A_{n+x-1} - A_{n+x}) A_{m+x}}{r^x A_m A_n} \right].$$

Soll eine bloss einmalige Prämie (β) durch Gegenversicherung sichergestellt werden, so ist

$$z = \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{(A_{n+x-1} - A_{n+x}) A_{m+x}}{r^x A_m A_n} \right].$$

Anmerkung. In den hier behandelten Aufgaben hat überall das Hinzufügen der Grenzen $b + 1$ angezeigt, dass die Auszahlung der Anwartschaft nur dann eintritt, wenn b Jahre seit Abschluss des Vertrages verflossen sind, und es fällt dieser Fall fast bei allen Aufgaben mit dem Begriffe einer aufgeschobenen Anwartschaft zusammen.

Nur bei Erbrenten wird nach den entwickelten Formeln die Auszahlung der Erbrente durch den vor b Jahren erfolgten Tod nicht aufgehoben, es beginnt nur die Auszahlung erst nach dieser Zeit.

Soll aber der vor b Jahren erfolgte Tod des Versicherten den Vertrag auch hier auflösen, so haben wir nur den Hoffnungswerth einer erst nach b Jahren beginnenden Versicherung einer Erbrente zu berechnen. Es sind dann die betreffenden Personen $m + b$, $n + b$, $p + b$ Jahre alt, und der Werth dieser Rente ergibt sich, wenn man im zweiten Theile der Gleichung VIII, m, n, p mit $m + b$, $n + b$, $p + b$ verwechselt und die Grenze $b + 1 = 1$ setzt. Der so erhaltene Werth ist dann auf den Vertragsschluss, d. i. auf b Jahre zurückzudiskontiren, und mit der Wahrscheinlichkeit, dass diese Personen nach b Jahren noch zusammenleben werden, zu multipliziren, weil dann erst der Vertrag, der ihr Zusammenleben fordert, in Wirksamkeit tritt **).

Es geht dann z. B. Formel IX. über in folgende:

$$\alpha + \beta \sum_{1,a}^{x} \left[\frac{A_{m+x} A_{n+x}}{r^x A_m A_n} \right] = \gamma \sum_{1,}^{x} \left[\frac{1}{r^x} \left(\frac{A_{n+x}}{A_n} - \frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{A_m A_n} \right) \right] \frac{1}{r^b} . \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n}$$

*) Grunert, Archiv der Mathematik und Fisik etc. 26 Theil, Seite 408.

**) Ich verdanke diese Bemerkung einem in der neueren Zeit in der „Rundschau der Versicherungen" IX. Jahrgang, 6. Lieferung, erschienenen Aufsatze des Hrn. Dr. Aug. Wiegand, welcher zu demselben Resultate, aber auf einem weitläufigeren Wege gelangt.

2. Praktische Berechnung.

Die bisher behandelten Aufgaben lassen sich, wenn man die einzelnen Summen zerlegt, und alle konstanten Grössen vor die Summenzeichen setzt, auf folgende drei Formen zurückführen:

1. $\sum\limits_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]$ oder $\sum\limits_{1}^{x}\left[x.\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]$
2. $\sum\limits_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right]$ oder $\sum\limits_{1}^{x}\left[x.\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right]$
3. $\sum\limits_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\cdot A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right]$,

deren Berechnung wir nun vornehmen wollen.

1. Es ist das Symbol

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\frac{A_{m+3}}{r^3}+\ldots+\frac{A_{m+x}}{r^x}+\ldots\ldots,$$

welche Reihe mit $A_{96}=0$ schliesst, oder auch

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=r^m\left[\frac{A_{m+1}}{r^{m+1}}+\frac{A_{m+2}}{r^{m+2}}+\frac{A_{m+3}}{r^{m+3}}+\ldots+\frac{A_{m+x}}{r^{m+x}}+\ldots\ldots\right]$$

Die Grösse $\frac{A_{m+x}}{r^{m+x}}$ stellt jedoch den auf $m+x$ Jahren zurückdiskontirten Werth eines Kapitales von A_{m+x} Gulden dar, oder den Werth von soviel Gulden, als die Tabelle im $(m+x)^{\text{ten}}$ Lebensjahre noch Lebende nachweist, diskontirt auf den Tag der Geburt.

Man nennt demzufolge die Grössen $\frac{A_{m+1}}{r^{m+1}}, \frac{A_{m+2}}{r^{m+2}}, \frac{A_{m+3}}{r^{m+3}}, \frac{A_{m+4}}{r^{m+4}}\ldots$ die diskontirten Zahlen der Lebenden im $(m+1)^{\text{ten}}$, $(m+2)^{\text{ten}}$, $(m+3)^{\text{ten}}$ u. s. w. Lebensjahre; wir bezeichnen diese Zahlen beziehungsweise mit $D_{m+1}, D_{m+2}, D_{m+3}, \ldots . D_{m+x}, \ldots\ldots$, und sie sind bei den betreffenden Aeltern in Tafel III zu 4 und 5 Prozent nach Süssmilch-Baumann und Tafel VI nach Deparcieux zu 6 Procent berechnet.

Es ist somit:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=r^m\left[D_{m+1}+D_{m+2}+D_{m+3}+\ldots+D_{m+x}+\ldots\ldots\right]=$$

$$=\sum_{1}^{x}\left[D_{m+x}\right], \text{ wo die Reihe wieder mit } D_{96}=\frac{A_{96}}{r^{96}}=0 \text{ abbricht.}$$

$\sum\limits_{1}^{x}\left[D_{m+x}\right]$ drückt daher die Summe der diskontirten Zahlen vom Lebensalter $(m+1)$ bis zum höchsten Lebensalter aus, und man kann diese Summen sehr leicht berechnen, indem man vom Ende der Tafel angefangen die diskontirten Zahlen aufwärts addirt, und jede einzelne Summe bei dem entsprechenden Alter notirt, da aus der Natur der Sache hervorgeht, dass: $\sum_{1,}^{x}[D_{m+x}] = \sum_{1,}^{x}[D_{m+x+1}] + D_{m+x}$ ist.

Wir bezeichnen diese Summen vom 0, 1, 2, 3, ... Lebensjahre bis zu Ende beziehungsweise mit E_0, E_1, E_2, E_3 . . . . ., setzen also $\sum_{1,}^{x}[D_{m+x}] = E_{m+1}$.

Diese Grössen sind neben den Grössen D_m auf Tafel III und VI in den mit E_m bezeichneten Kolumnen zu finden, wobei m nach und nach die in der ersten Spalte angegebenen Werthe 0, 1, 2 . . . . . erhält.

So ist z. B. für $m = 20$, $D_{20} = 185 \cdot 05$ und $E_{20} = 2895 \cdot 10$, wobei $r = 1 \cdot 05$ oder $5^0/_0$ Zinseszinsen angenommen sind.

Wir erhalten demnach ganz einfach:

$$\sum_{1,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right] = r^m \, . \, E_{m+1} \text{ oder}$$

$$\sum_{1,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x \, . \, A_m}\right] = \frac{r^m}{A_m} E_{m+1} = E_{m+1} : \frac{A_m}{r^m} = \frac{E_{m+1}}{D_m} = R_m \, \ldots\ldots \quad (\alpha$$

$$\text{allgemein } \sum_{u,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\right] = \frac{E_{m+u}}{D_m} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta$$

wo der Ausdruck (α) eine nicht aufgeschobene Lebensrente von 1 Gulden (da $\gamma = 1$) für eine $m$jährige Person darstellt, wie aus Vergleichung mit Formel III für $b = \beta = 0$ und $n = m$ hervorgeht.

So ist z. B. für $r = 1 \cdot 05$, $R_{20} = \frac{E_{21}}{D_{20}} = \frac{2710 \cdot 06}{185 \cdot 05} = 14 \cdot 645$ der Werth einer Lebensrente von 1 Gulden für einen 20jährigen.

Auf gleiche Weise findet man

$$\sum_{0,}^{x}\left[\frac{A_{m+x+1}}{A_m r^{x+1}}\right] = \sum_{1,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{A_m r^x}\right]$$

Da ferner $\sum_{u,v}^{x}[D_{m+x}] = D_{m+u} + D_{m+u+1} + \ldots + D_{m+v} =$ $= (D_{m+u} + D_{m+u+1} + \ldots + D_{m+v} + D_{m+v+1} + \ldots + D_{95}) -$ $- (D_{m+v+1} + D_{m+v+2} + \ldots + D_{95})$, so ist auch

$\sum_{u,v}^{x}[D_{m+x}] = E_{m+u} - E_{m+v+1}$, oder

$$\sum_{u,v}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x}\right] = r^m (E_{m+u} - E_{m+v+1}) \text{ und}$$

$$\sum_{u,v,}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\right] = \frac{E_{m+u} - E_{m+v+1}}{D_m} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma$$

oder, wenn man wie in den vorliegenden Aufgaben $u = b + 1$ und $v = b + c$ setzt:

$$\sum_{b+1,b+c}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\right] = \frac{E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}}{D_m} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta$$

oder wenn hierin $b = 0$ und $c = a$ gesetzt wird:

$$\sum_{1,a}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\right] = \frac{E_{m+1} - E_{m+a+1}}{D_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon.$$

Um für die Werthe von Lebensrenten für die verschiedenen Alter Tabellen zusammenzustellen, dient folgende Methode:

Es ist: $R_m = \frac{\gamma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \ldots\right]$ und

$$R_{m-1} = \frac{\gamma}{A_{m-1}}\left[\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\gamma A_m}{r A_{m-1}} + \frac{A_m}{r A_{m-1}} \cdot \frac{\gamma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \ldots\right] = \frac{A_m}{r A_{m-1}} \cdot [\gamma + R_m]$$

$$= \frac{\frac{A_m}{r^m \cdot A_{m-1}}}{r^{m-1}} \cdot [\gamma + R_m] = \frac{D_m}{D_{m-1}}[\gamma + R_m]$$

Man kann also aus der Lebensrente für ein bestimmtes Alter m mit Hülfe dieser Formel sehr leicht die Lebensrente für eine um ein Jahr jüngere Person berechnen, und somit vom höchsten Alter $m = 95$ angefangen, für welches $R_{95} = \frac{\gamma}{A_{95}}\left[\frac{A_{96}}{r} + \ldots\right] = \frac{\gamma}{1} \cdot 0 = 0$, rückwärtsgehend die Tabelle zusammenstellen.

Es ist dann für 5%, da Tafel VII $\frac{1}{r} = 0\cdot 9524$, und $\gamma = 1$,

$$R_{95} = 0$$

$$R_{94} = \frac{A_{95}}{r \cdot A_{94}}(1 + R_{95}) = \frac{1}{2} \cdot 0\cdot 9524 \cdot (1 + 0) = 0\cdot 1762.$$

$$R_{93} = \frac{A_{94}}{r \cdot A_{93}}(1 + R_{94}) = \frac{2}{3} \cdot 0\cdot 9524 \cdot 1\cdot 4762 = 0\cdot 9373$$

$$R_{92} = \frac{A_{93}}{r \cdot A_{92}}(1 + R_{93}) = \frac{3}{4} \cdot 0\cdot 9524 \cdot 1\cdot 9373 = 1\cdot 3838$$

$$R_{91} = \frac{A_{92}}{r \cdot A_{91}}(1 + R_{92}) = \frac{4}{5} \cdot 0\cdot 9524 \; 2\cdot 3838 = 1\cdot 8163$$

$$R_{90} = \frac{A_{91}}{r \cdot A_{90}}(1 + R_{91}) = \frac{5}{6} \cdot 0\cdot 9524 \cdot 2\cdot 8163 = 2\cdot 235 \text{ u. s. w.}$$

Also wäre der Werth einer Lebensrente von 500 Gulden für einen 90jährigen $= 500 \cdot 2\cdot 235 = 1117\cdot 5$.

Um den Werth $\sum_{1,}^{x}\left[x\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]$ zu berechnen, verfahren wir auf folgende Art: Es ist

$$\sum_{1,}^{x}\left[x\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=\frac{A_{m+1}}{r}+2\frac{A_{m+2}}{r^2}+3\frac{A_{m+3}}{r^3}+\ldots\ldots=$$

$$=r^m\left\{\begin{array}{l}\frac{A_{m+1}}{r^{m+1}}+\frac{A_{m+2}}{r^{m+2}}+\frac{A_{m+3}}{r^{m+3}}+\ldots\ldots\\ \qquad\quad+\frac{A_{m+2}}{r^{m+2}}+\frac{A_{m+3}}{r^{m+3}}+\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\qquad+\frac{A_{m+3}}{r^{m+3}}+\ldots\ldots\end{array}\right\}=$$

$$=r^m[E_{m+1}+E_{m+2}+E_{m+3}+\ldots]=r^m\sum_{1,}^{x}[E_{m+x}]=r^m E'_{m+1};$$

wenn wir $E_{m+1}+E_{m+2}+E_{m+3}+\ldots\ldots$ d. i. die Summe der Summen der diskontirten Zahlen mit E'_{m+1} bezeichnen. Man verschafft sich diese Werthe von E' für die verschiedenen Altersstufen auf dieselbe Art aus den Zahlen E, wie man diese aus den Zahlen D gebildet hat. In der beiliegenden Tafel sind diese neuen Summen in der mit E'_m bezeichneten Spalte enthalten, wo allgemein

$$E'_m=E_m+E_{m+1}+E_{m+2}+\ldots\ldots$$

Es ist $\sum_{u,v}^{x}\left[x\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=r^m\left[u\frac{A_{m+u}}{r^{m+u}}+(u+1)\frac{A_{m+u+1}}{r^{m+u+1}}+\ldots+v\frac{A_{m+v}}{r^{m+v}}\right]=$

$$=r^m\left[(u-1)\left(\frac{A_{m+u}}{r^{m+u}}+\frac{A_{m+u+1}}{r^{m+u+1}}+\ldots+\frac{A_{m+v}}{r^{m+v}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{A_{m+u}}{r^{m+u}}+2\frac{A_{m+u+1}}{r^{m+u+1}}+3\frac{A_{m+u+2}}{r^{m+u+2}}+\ldots+(v-u+1)\frac{A_{m+v}}{r^{m+v}}\right)\right]$$

oder $\sum_{u,v}^{x}=r^m\left[(u-1)(E_{m+u}-E_{m+v+1})+E'_{m+u}-\left((v-u+2)\frac{A_{m+v+1}}{r^{m+v+1}}+\right.\right.$

$$\left.\left.+(v-u+3)\frac{A_{m+v+2}}{r^{m+v+2}}+\ldots\ldots\right)\right]$$

$$=r^m\left[(u-1)(E_{m+u}-E_{m+v+1})+E'_{m+u}-(v-u+1)\left(\frac{A_{m+v+1}}{r^{m+v+1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{A_{m+v+2}}{r^{m+v+2}}+\ldots\ldots\right)-\left(\frac{A_{m+v+1}}{r^{m+v+1}}+2\frac{A_{m+v+2}}{r^{m+v+2}}+3\frac{A_{m+v+3}}{r^{m+v+3}}+\ldots\right)\right]$$

$$=r^m[(u-1)(E_{m+u}-E_{m+v+1})+E'_{m+u}-(v-u+1)E_{m+v+1}-E'_{m+v+1}]$$

$$=r^m[(u-1)E_{m+u}-vE_{m+v+1}+E'_{m+u}-E'_{m+v+1}]\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\zeta$$

und für $u=1$ und $v=a$ erhält man den bei Berechnung der Gegenversicherungen vorkommenden Ausdruck:

$$\sum_{1,a}^{x}\left[x\frac{A_{m+x}}{r^x}\right]=r^m[E'_{m+1}-E'_{m+a+1}-aE_{m+a+1}]\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\eta$$

2. Es ist $\sum_{1,}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right]=$

$$=\frac{A_{n+1}\ A_{p+1}}{r}+\frac{A_{n+2}\cdot A_{p+2}}{r^2}+\frac{A_{n+3}\cdot A_{p+3}}{r^3}+\ldots\ldots+\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}+\ldots$$

welche Reihe abbricht, sobald $n + x$ oder $p + x$ gleich 96 wird.

Da aber $A_{p+1} = A_p \quad - B_p$

$$A_{p+2} = A_{p+1} - B_{p+1} = A_p - B_p - B_{p+1}$$

$$A_{p+3} = A_{p+2} - B_{p+2} = A_p - B_p - B_{p+1} - B_{p+2}.$$

. . . .

wo B_p, wie schon anfangs erwähnt, die Anzahl der von A_p Personen im p^{ten} Lebensjahre gestorbenen bezeichnet; so erhält man

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right] = \frac{A_{n+1}\,(A_p - B_p)}{r} + \frac{A_{n+2}\,(A_p - B_p - B_{p+1})}{r^2} +$$

$$+ \frac{A_{n+3}(A_p - B_p - B_{p+1} - B_{p+2})}{r^3} + \ldots\ldots$$

und durch eine einfache Rechnung, wenn man gleichzeitig den Faktor r^n heraushebt:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right] = A_p\, r^n\left(\frac{A_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + ..\right) - B_p\, r^n\left(\frac{A_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + ..\right) -$$

$$- B_{p+1}\, r^n\left(\frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{r^{n+3}} + ..\right) - B_{p+2}\, r^n\left(\frac{A_{n+3}}{r^{n+3}} + \frac{A_{n+4}}{r^{n+4}} + ..\right) =$$

$$= r^n\,(A_p\, E_{n+1} - B_p\, E_{n+1} - B_{p+1}\, E_{n+2} - B_{p+2}\, E_{n+3} - \ldots)$$

und weil

$$B_{p+1} = B_p \quad - (B_p \quad - B_{p+1})$$

$$B_{p+2} = B_{p+1} - (B_{p+1} - B_{p+2}) = B_p - (B_p - B_{p+1}) - (B_{p+1} - B_{p+2})$$

$$B_{p+3} = B_{p+2} - (B_{p+2} - B_{p+3}) =$$

$$= B_p - (B_p - B_{p+1}) - (B_{p+1} - B_{p+2}) - (B_{p+2} - B_{p+3})$$

. . . .

so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right] = r^n[A_p E_{n+1} - B_p(E_{n+1} + E_{n+2} + E_{n+3} + ..) +$$

$$+ (B_p - B_{p+1})(E_{n+2} + E_{n+3} + ..) + (B_{p+1} - B_{p+2})(E_{n+3} + E_{n+4} + ..) +$$

$$+ (B_{p+2} - B_{p+3})\,(E_{n+4} + E_{n+5} + \ldots)]$$

Die Ausdrücke $(B_p - B_{p+1})$, $(B_{p+1} - B_{p+2})$, ... stellen die Differenzen zwischen den in zwei auf einander folgenden Jahren Gestorbenen dar, und sind aus der mit δ_m bezeichneten Kolumne zu entnehmen; wo $\delta_m = B_m - B_{m+1}$.

Betrachten wir die in dieser Gleichung vorkommenden Summen $(E_{n+1} + E_{n+2} + E_{n+2} + \ldots)$, $(E_{n+2} + E_{n+3} + E_{n+4} + \ldots)$ u. s. w., so stellen diese wieder die Summen der Summen der diskontirten Zahlen der Lebenden dar. Es wird demnach

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x}\right]=$$
$$=r^n\left[A_p\,E_{n+1}-B_p\,E'_{n+1}+\delta_p\,E'_{n+2}+\delta_{p+1}\,E'_{n+3}+\right.$$
$$\left.+\,\delta_{p+2}\,E'_{n+4}+\ldots\right]=G^n_p\ \ldots\ldots(\vartheta.$$

wo man für n stets das höhere Alter annimmt, weil dann die Reihe früher abbricht.

Diese von Tetens angegebene Methode ist eine sehr bequeme, da, wie aus der Kolumne δ_m (Tafel III oder VI) ersichtlich ist, die Differenzen vom 10. Lebensjahre angefangen entweder o oder $+1$ oder -1 sind, was die Berechnung der obigen Reihe in den meisten Fällen auf einfache Additionen und Subtraktionen zurückführt. Was den Faktor r^n betrifft, so ist derselbe auf Tafel VII für 4, 5 und 6 Prozent in der mit r^m bezeichneten Kolumne zu finden.

So ist z. B. $G^{60}_{40}=\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{40+x}\cdot A_{60+x}}{r^x}\right]=$

$$=r^{60}\left[A_{40}E_{61}-B_{40}E'_{61}+\delta_{40}E'_{62}+\delta_{41}E'_{63}+\ldots+\delta_{73}E'_{95}\right],$$

wo $n=60$ und $p=40$.

Man findet mit Hülfe der Tafel I und III für $r=1{\cdot}05$,

$A_{40}E_{61}=374.87{\cdot}37=32676{\cdot}38$; $B_{40}E'_{61}=7.632{\cdot}95=4430{\cdot}65$; $\delta_{40}=\delta_{41}=\ldots=\delta_{44}=\delta_{46}=\delta_{47}=\delta_{48}=\delta_{50}=\delta_{51}=\ldots=$ $=\delta_{60}=\delta_{62}=\delta_{63}=\ldots=\delta_{68}=\delta_{70}=\delta_{71}=\delta_{73}=o$ und $\delta_{45}=$ $=\delta_{49}=\delta_{61}=-1$; $\delta_{69}=\delta_{72}=+1$; es reduzirt sich also obige Summe auf:

$$\begin{array}{rcr} 32676{\cdot}38 & - & 4430{\cdot}65 \\ 0{\cdot}38 & - & 244{\cdot}47 \\ 0{\cdot}04 & - & 118{\cdot}70 \\ & - & 7{\cdot}42 \\ \hline \end{array}$$

$=32676{\cdot}80-4801{\cdot}24=27875{\cdot}56$, und da $r^{60}=18{\cdot}679186$, so wird

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{40+x}\ A_{60+x}}{r^x}\right]=18{\cdot}679186.\ 27875{\cdot}56=520692{\cdot}77=G^{40}_{60}.$$

Aus Formel (ϑ) folgt:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\cdot A_{p+x}}{r^x.\,A_nA_p}\right]=\frac{r^n}{A_nA_p}\left[A_pE_{n+1}+B_pE'_{n+1}+\delta_pE'_{n+2}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1}{A_nA_p}\,G^n_p=R^n_p\ \ldots\ldots(\iota.$$

d. i. gleich dem Werthe der Verbindungsrente von 1 Gulden für zwei Personen, die beziehungsweise n und p Jahre alt sind, siehe Gleichung (VII, 2) *).

Im obigen Beispiele wäre also: $R^{40}_{60} = \frac{520692 \cdot 77}{374.210} = 6 \cdot 62965$, und somit der Werth einer Verbindungsrente von 100 Gulden gleich 662·965 Gulden, welcher als einmalige Prämie zu entrichten ist, wie aus (VII, 2) für $\beta = o$ folgt. Die beigegebenen Tafeln IV und V geben die Werthe von R^m_n für 4 und 5 Prozente von 5 zu 5 Jahren an; die zwischenliegenden Werthe können näherungsweise durch Interpolation gefunden werden.

Wird die Verbindungsrente nur durch eine bestimmte Zeit, z. B. vom u^{ten} Jahre nach Abschluss des Vertrages bis zum v^{ten} ausgezahlt, sucht man also den Ausdruck $\sum\limits_{u,\,v}^{x}\left[\frac{A_{n+x} \cdot A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right]$, so hat man von einer Rente für die ganze Verbindungsdauer, die mit dem u^{ten} Jahre beginnt, den Werth einer vom $(v+1)^{\text{ten}}$ Jahre beginnenden Verbindungsrente abzuziehen. Es ist dann:

$$\sum_{u,\,v}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\, A_{p+x}}{r^x A_n \cdot A_p}\right] = \frac{1}{A_n A_p}\left[\sum_{u,}^{x} - \sum_{v+1}^{x}\right] = \frac{1}{A_n A_p}\left[\frac{1}{r^{u-1}} G^{n+u-1}_{p+u-1} - \frac{1}{r^v} G^{n+v}_{p+v}\right] \ldots (\varkappa.$$

und für $u = b + 1$ und $v = b + c$ folgt:

$$\sum_{b+1,\, b+c}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\, A_{p+x}}{r^x\, A_n\, A_p}\right] = \frac{1}{A_n\, A_p}\left[\frac{1}{r^b} G^{n+b}_{n+b} - \frac{1}{r^{b+c}} G^{n+b+c}_{p+b+c}\right] \ldots\ldots (\lambda.$$

Setzt man hier $b = o$ und $c = a$, so ist

$$\sum_{1,\,a}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\, A_{p+x}}{r^x\, A_n\, A_p}\right] = \frac{1}{A_n\, A_p}\left[G^n_p - \frac{1}{r^a} G^{n+a}_{p+a}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (\mu.$$

Auf ähnliche Weise wird: $\sum\limits_{b+1,}^{x}\left[\frac{A_{n+x}\, A_{p+x}}{r^x\, A_n\, A_p}\right] = \frac{1}{r^b\, A_n\, A_p} G^{n+b}_{p+b} \ldots . (\nu.$

und: $\sum\limits_{b+1,}^{x}\left[\frac{A_{m+x-1}\, A_{n+x}}{r^x\, A_m\, A_n}\right] = \frac{1}{r^b\, A_m\, A_n} G^{m+b-1}_{n+b}, \ldots (o.$

welcher letzte Ausdruck zur Berechnung der Erbactien gebraucht wird.

Zur Berechnung von Tabellen für gleiche Altersdifferenzen der verbundenen Personen dient die leicht zu beweisende Formel:

$$G^{n+1}_{p+1} = r\, G^n_p - A_{n+1}\, A_{p+1} \quad \text{oder} \quad R^{n+2}_{p+2} = \frac{r\, A_n\, A_p}{A_{n+1}\, A_{p+1}} R^n_p - 1$$

$$\text{So ist z. B. } R^{41}_{61} = \frac{1 \cdot 05 . 374 . 210}{367 . 201} 6 \cdot 62965 - 1 = 6 \cdot 41154$$

*) Anstatt des Faktors $\frac{r^n}{A_n A_p}$ kann auch der gleiche $\frac{1}{D_n A_p}$ gesetzt werden.

Der bei Berechnung von Gegenversicherungen gebrauchte Ausdruck ist folgender:

$$\sum_{1}^{x}\left[x\,\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}}{r^x}\right]=\frac{A_{m+1}\,A_{n+1}}{r}+2\frac{A_{m+2}\,A_{n+2}}{r^2}+3\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}}{r^3}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{A_{m+1}\,A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}\,A_{n+2}}{r^2}+\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}}{r^3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{A_{m+2}\,A_{n+2}}{r^2}+\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}}{r^3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}}{r^3}+\ldots\ldots$$

$$=G_n^m+\frac{1}{r}G_{n+1}^{m+1}+\frac{1}{r^2}G_{n+2}^{m+2}+\frac{1}{r^3}G_{n+3}^{m+3}+\ldots\ldots=H_n^m$$

das ist gleich der Summe der auf das ursprüngliche Alter (m und n) zurückdiskontirten Werthe von G_n^m, G_{n+1}^{m+1}, G_{n+2}^{m+2}, ..., welche Summen wir kurz mit H_n^m, H_{n+1}^{m+1}, H_{n+2}^{m+2}, ... bezeichnen, je nachdem obige Summen mit G_n^m, G_{n+1}^{m+1}, G_{n+2}^{m+2}, ... beginnen. Es macht diese Aufgabe die Berechnung zweier neuen Hülfstabellen nöthig, einer für die diskontirten Werthe von G_n^m und einer für die Summen dieser letzteren.

3. Es ist $\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x}\right]=\frac{A_{m+1}\,A_{n+1}\,A_{p+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}A_{p+2}}{r^2}+$

$$+\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}\,A_{p+3}}{r^3}+\ldots\ldots$$

Man findet nun analog der von Tetens oben angegebenen Methode:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x}\right]=\frac{A_{m+1}\,A_{n+1}\,(A_p-B_p)}{r}+\frac{A_{m+2}\,A_{n+2}(A_p-B_p-B_{p+1})}{r^2}+$$

$$+\frac{A_{m+3}\,A_{n+3}\,(A_p-B_p-B_{p+1}-B_{p+2})}{r^3}+\ldots\ldots$$

$$=A_pG_n^m-B_pG_n^m-\frac{1}{r}B_{p+1}\,G_{n+1}^{m+1}-\frac{1}{r^2}B_{p+2}\,G_{n+2}^{m+2}-\frac{1}{r^3}B_{p+3}\,G_{n+3}^{m+3}-\ldots$$

oder wenn man wieder wie oben

$$B_{p+1}=B_p-(B_p-B_{p+1})$$

$$B_{p+2}=B_p-(B_p-B_{p+1})-(B_{p+1}-B_{p+2})\text{ u. s. w. setzt:}$$

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x}\right]=A_pG_n^m-B_p\left[G_n^m+\frac{1}{r}G_{n+1}^{m+1}+\frac{1}{r^2}G_{n+2}^{m+2}+\ldots\right]$$

$$+(B_p\;\;-B_{p+1})\left[\frac{1}{r}\,G_{n+1}^{m+1}+\frac{1}{r^2}\,G_{n+2}^{m+2}+\frac{1}{r^3}\,G_{n+3}^{m+3}+\ldots\right]$$

$$+(B_{p+1}-B_{p+2})\left[\frac{1}{r^2}\,G_{n+2}^{m+2}+\frac{1}{r^3}\,G_{n+3}^{m+3}+\frac{1}{r^4}\,G_{n+4}^{m+4}+\ldots\right]$$

$+$ ..... u. s. w. setzt:

Bezeichnet man die in Klammern stehenden Ausdrücke wieder wie oben durch H_n^m, H_{n+1}^{m+1}, ... so erhält man:

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x}\right]=A_p\,G_n^m-B_p\,H_n^m+\delta_p\,H_{n+1}^{m+1}+$$
$$+\delta_{p+1}\,H_{n+2}^{n+2}+\ldots\ldots=G_{n,p}^m\ \ldots\ldots(\pi,$$

welche Formel ähnliche Vortheile bietet wie die in (ϑ) gefundene.

Es kann somit auch

$$\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x\,A_m\,A_n\,A_p}\right]=\frac{1}{A_mA_nA_p}\,G_{n,p}^m=R_{n,p}^m$$ d. i. die Verbindungsrente für drei Personen auf ziemlich einfache Weise berechnet werden.

Auch hier ist wieder ähnlich wie bei der Verbindungsrente für zwei Personen

$$\sum_{u,v}^{x}\left[\frac{A_{m+x}\,A_{n+x}\,A_{p+x}}{r^x\,A_m\,A_n\,A_p}\right]=$$
$$=\sum_{u}^{x}-\sum_{v+1}^{x}=\frac{1}{A_m\,A_n\,A_p}\left[\frac{1}{r^{u+1}}\,G_{n+n-1,\,p+u-1}^{m+u-1}-\frac{1}{r^v}\,G_{n+v,\,p+v}^{m+v}\right]\ \text{u. s. w.}$$

Zum Schlusse wollen wir an einigen Beispielen den praktischen Vorgang dieser Rechnungen zeigen.

Beispiele.

1. Der 40jährige A versichert sich gegen eine jährliche, durch 10 Jahre am Anfange jedes Jahres (vorschussweise) zu zahlende Prämie eine von seinem 50. Lebensjahre an laufende Lebensrente von 500 Gulden. Wie gross ist diese jährliche Prämie?

Hier ist Gleichung IV. $\alpha=\beta$, $a=9$, $b=10$, $\gamma=500$ und $n=40$, wir erhalten daher folgende Gleichung:

$$\beta\left(1+\sum_{1,9}^{x}\left[\frac{A_{40+x}}{r^x A_{40}}\right]\right)=500\sum_{11}^{x}\left[\frac{A_{40+x}}{r^x A_{40}}\right]$$ und mit Bezug auf (ε) und (β) Seite (37 und 36)

$$\beta\left(1+\frac{E_{41}-E_{50}}{D_{40}}\right)=500\,\frac{E_{51}}{D_{40}},\ \text{oder}$$

$$\beta=\frac{500\,.\,E_{51}}{D_{40}+E_{41}-E_{50}}$$ und nach Süssmilch zu 4%

$$\beta=\frac{500\,.\,455\cdot 74}{77\cdot 90+1024\cdot 87-497\cdot 95}=376\cdot 76,\ \text{oder zu } 5\%$$

$$\beta=\frac{500\,.\,258\cdot 48}{53\cdot 12+628\cdot 63-284\cdot 64}=325\cdot 45$$

Diese durch 10 Jahre zu zahlende Prämie ist also zu 4% = 376·76 Gulden und zu 5% = 325·45 Gulden.

2. Der 30jährige A und 20jährige B versichern sich eine Lebensrente von jährlich 100 Gulden, welche nach 10 Jahren beginnt, und bis zum Tode des Letzten von ihnen dauert (auf das längste Leben). Wie gross ist die durch 10 Jahre ihres Zusammenlebens am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Prämie?

In Gleichung VI ist hier $\alpha = o$, $a = 10$, $n = 20$, $p = 30$, $b = 10$ und $\gamma = 100$ zu setzen, und man erhält:

$$\beta \sum_{1,10}^{x} \left[\frac{A_{20+x} \cdot A_{30+x}}{r^x A_{20} A_{30}}\right] = 100 \left(\sum_{11,}^{x} \left[\frac{A_{20+x}}{r^x A_{20}}\right] + \sum_{11,}^{x} \left[\frac{A_{30+x}}{r^x A_{30}}\right] - \sum_{11,}^{x} \left[\frac{A_{20+x} A_{30+x}}{r^x A_{20} A_{30}}\right]\right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (μ) und (ν)

$$\beta \frac{1}{A_{20} A_{30}} \left[G^{20}_{30} - \frac{1}{r^{10}} G^{30}_{40}\right] = 100 \left[\frac{E_{31}}{D_{20}} + \frac{E_{41}}{D_{30}} - \frac{1}{r^{10} A_{20} A_{30}} G^{30}_{40}\right]$$

und da $G^{20}_{30} = A_{20} A_{30} R^{20}_{30}$ und $G^{30}_{40} = A_{30} A_{40} R^{30}_{40}$ ist:

$$\beta \left[R^{20}_{30} - \frac{1}{r^{10}} \frac{A_{40}}{A_{20}} R^{30}_{40}\right] = 100 \left[\frac{E_{31}}{D_{20}} + \frac{E_{41}}{D_{30}} - \frac{1}{r^{10}} \frac{A_{40}}{A_{20}} R^{30}_{40}\right]$$

und für 5% nach Tafel I, III, V und VII.

$$\beta \left[11 \cdot 41 - 0 \cdot 613913 \,.\, 9 \cdot 85 \frac{374}{491}\right] =$$

$$= 100 \left[\frac{1356 \cdot 02}{185 \cdot 05} + \frac{628 \cdot 63}{101 \cdot 57} - 0 \cdot 613913 \,.\, \frac{374}{491} \,.\, 9 \cdot 85\right]$$

$$\text{und } \beta = 100 \left[\frac{7 \cdot 3278 + 6 \cdot 1891 - 4 \cdot 606}{11 \cdot 41 - 4 \cdot 606}\right] = 130 \cdot 965$$

3. Ein 30jähriger versichert auf seinen Todesfall seiner 20jährigen Gattin eine jährliche Rente von 300 Gulden gegen eine jährlich am Schlusse des Jahres bis an seinen Tod zu zahlende Prämie. Wie gross ist diese jährliche Prämie?

Hier ist in Gleichung IX $\alpha = o$, $m = 30$, $n = 20$, $b = 0$, $a = 96 - 30 = 66$ und $\gamma = 300$.

$$\text{Also } \beta \sum_{1,}^{x} \left[\frac{A_{30+x} A_{20+x}}{r^x A_{30} A_{20}}\right] = 300 \left(\sum_{1,}^{x} \left[\frac{A_{20+x}}{r^x A_{20}}\right] - \sum_{1,}^{x} \left[\frac{A_{30+x} A_{20+x}}{r^x A_{30} A_{20}}\right]\right)$$

oder mit Rücksicht auf (ι) und (α)

$\beta R^{20}_{30} = 300 \left[\frac{E_{21}}{D_{20}} - R^{20}_{30}\right]$ und für 5% nach Tafel III und V

$$\beta \,.\, 11 \cdot 41 = 300 \left[\frac{2710 \cdot 06}{185 \cdot 05} - 11 \cdot 41\right]$$

und $\beta = 85 \cdot 057$ Gulden und für 4%

$$\beta \,.\, 12 \cdot 67 = 300 \left[\frac{3762 \cdot 49}{224 \cdot 09} - 12 \cdot 67\right]$$

und $\beta = 97 \cdot 553$ Gulden.

Man sieht aus der Betrachtung der Beispiele 1 und 3, welchen Einfluss der den Rechnungen zu Grunde gelegte Zinsfuss auf die Grösse der Prämien äussert.

4. Die 30jährige Person A und die 20jährige B versichern durch einmalige Prämie (α) der überlebenden von ihnen eine Rente von 100 Gulden. Es frägt sich um die Grösse dieser einmaligen Prämie.

Da hier keine Probejahre bedungen sind, ist in Gleichung X. $b = o$, $\beta = o$, $\gamma = 100$, $n = 30$, $p = 20$,

$$\text{also } \alpha = 100\left(\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{30+x}}{r^x A_{30}}\right] + \sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{20+x}}{r^x A_{20}}\right] - 2\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{30+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30}\,A_{20}}\right]\right)$$

$$\text{oder } \alpha = 100\left[\frac{E_{31}}{D_{30}} + \frac{E_{21}}{D_{20}} - 2\,R^{20}_{30}\right], \text{ und für } 5\%$$

$$\alpha = 100\,[13\cdot 3506 + 14\cdot 6450 - 22\cdot 82] = 517\cdot 56 \text{ Gulden.}$$

Für eine Erbrente von 400 Gulden wäre somit die einmalige Prämie, oder der Werth derselben, $\alpha = 2070\cdot 24$.

5. Ein 30jähriger Mann versichert seiner 20jährigen Gattin auf seinen Todesfall ein Kapital von 5000 Gulden gegen eine Einlage von 1000 Gulden und eine durch seine Lebensdauer jährlich am Schlusse des Jahres zu leistende Prämie (β), welche zu berechnen ist.

Es ist hier in Gleichung XIII. $\alpha = 1000$, $m = 30$, $n = 20$, $\gamma = 5000$, $b = o$, $a = 66$, und man erhält:

$$\beta \sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{30+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30}\,A_{20}}\right] = 5000\left(\sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{29+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30}\,A_{20}}\right] - \sum_{1}^{x}\left[\frac{A_{30+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30}\,A_{20}}\right]\right) - 1000$$

$$\text{oder } \beta\,.\,R^{20}_{30} = 5000\left(\frac{A_{29}}{A_{30}}\,R^{29}_{20} - R^{30}_{20}\right) - 1000$$

$$\text{und für } 5\% \ldots\; \beta\,.\,11\cdot 41 = 5000\left[\frac{445}{439}\,.\,11\cdot 50 - 11\cdot 41\right] - 1000\,^{*)}$$

$$\text{und } \beta = \frac{5000\,.\,0\cdot 24717 - 1000}{11\cdot 41} = 20\cdot 67 \text{ Gulden.}$$

6. Die obigen Personen A und B versichern durch einmalige Einzahlung (α) ein Kapital von 100 Gulden, zahlbar bei dem Tode des zuerst Sterbenden an den Ueberlebenden. Wie gross ist die Prämie?

Man setzt hier in Gleichung XVI:

$\beta = 0$, $\gamma = 100$, $n = 30$, $p = 20$, $b = 0$, so ist für 5%

---

*) Aus Tafel V findet man nämlich $R^{25}_{20} = 11\cdot 85$ und $R^{30}_{20} = 11\cdot 41$, und somit $R^{25}_{20} - R^{30}_{20} = 0\cdot 44$, also entfällt auf 1 Jahr $0\cdot 44 : 5 = 0\cdot 088$, und somit ist $R^{29}_{20} = 11\cdot 41 + 0\cdot 088 = 11\cdot 50$.

$$\alpha = 100\left(\Sigma_{1,}^{x}\left[\frac{A_{30+x}\,A_{19+x}}{r^x A_{30} A_{20}}\right] + \Sigma_{1,}^{x}\left[\frac{A_{29+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30} A_{20}}\right] - 2\,\Sigma_{1,}^{x}\left[\frac{A_{30+x}\,A_{20+x}}{r^x A_{30} A_{20}}\right]\right)$$

$$= 100\left(\frac{A_{19}}{A_{20}}\,R_{30}^{19} + \frac{A_{29}}{A_{30}}\,R_{29}^{20} - 2\,R_{30}^{20}\right) =$$

$$= 100\left(\frac{495}{491}.\,11\cdot 47 + \frac{445}{439}.\,11\cdot 50 - 2\,.\,11\cdot 41\right)$$

oder $\alpha = (11\cdot 6572 + 11\cdot 5634 - 22\cdot 82)\,100 = 40\cdot 06$
für eine gegenseitige Erbactie von 1000 Gulden wäre in diesem Falle $\alpha = 400\cdot 60$ Gulden.

7) In eine Ueberlebens-Association *) von 12jähriger Dauer treten ein 5-, ein 40- und 60jähriges Mitglied mit jährlichen Einlagen von 100 Gulden ein. Wie gross ist das für jeden von ihnen zur Liquidationszeit zu hoffende Kapital?

Wir wollen diese Aufgabe, welche gegenwärtig einen sehr praktischen Werth hat, sowohl nach der Süssmilch'schen Tafel und zwar für 5%, als auch nach Deparcieux zu 6% berechnen, weil namentlich der letzte Zinsfuss hier gewöhnlich zu Grunde gelegt wird, und diese letztere Tafel (VI) ein minder rasches Absterben ergibt.

Wir finden als künftigen Hoffnungswerth in diesem Falle (Anhang 1, Seite 31), wenn $\mu = 12$, $\alpha = a = 100$ gesetzt wird

$$l = \frac{L}{M} = 100\,.\,r^{12}\left(1 + \Sigma_{1,\,11}^{x}\left[\frac{A_{m+x}}{r^x A_m}\right]\right) \text{ oder}$$

$$= 100\,r^{12}\left(1 + \frac{E_{m+1} - E_{m+12}}{D_m}\right) = 100\,r^{12}\,\frac{E_m - E_{m+12}}{D_m}$$

und $K = l\,\dfrac{A_m}{A_{m+12}} = \dfrac{100\,.\,r^{m+12}}{A_{m+12}}\,(E_m - E_{m+12})$; also

nach Süssmilch für $r = 1\cdot 05$, Tafel I, III, VII

für $m = 5$, $K_5 = \dfrac{100\,.\,2\cdot 292018}{503}(7446\cdot 73 - 3517\cdot 79) = 1790\cdot 54$

„ $m = 40$, $K_{40} = \dfrac{100\,.\,12\cdot 642808}{282}(681\cdot 75 - 234\cdot 31) = 2006\cdot 18$

„ $m = 60$, $K_{60} = \dfrac{100\,.\,33\cdot 545134}{94}(98\cdot 61 - 17\cdot 64) = 2890\cdot 15.$

Nach Deparcieux für $r = 1\cdot 06$, Tafel VI, VII

für $m = 5$, $K_5^1 = \dfrac{100\,.\,2\cdot 692773}{835}(10474\cdot 870 - 4562\cdot 273)$

oder $K_5^1 = 1906\cdot 74$

*) Die Gesellschaft „der Anker“ in Wien hat derartige Ueberlebens-Associationen ins Leben gerufen.

für $m=40, K^1_{40} = \frac{100.20 \cdot 696885}{560} (835 \cdot 239 - 297 \cdot 893)$

oder $K^1_{40} = 1985 \cdot 95$

„ $m=60, K^1_{60} = \frac{100.66 \cdot 377715}{271} (131 \cdot 592 - 25 \cdot 507)$

oder $K^1_{60} = 2598 \cdot 42$.

Es variiren sonach die aus dieser 12jährigen Association zu hoffenden Antheile nach Süssmilch (5%) zwischen 1790 und 2890

„ Deparcieux (6%) „ 1900 „ 2600.

Als mittlerer Werth stellt sich somit beiläufig

nach Süssmilch (5%) .... 2230 Gulden

„ Deparcieux (6%) .... 2160 „ heraus.

8) Eine 30jährige Person will ihre in eine 12jährige Ueberlebens-Association einzuzahlenden einfachen Prämien von jährlichen 100 Gulden durch eine Gegenversicherung sicherstellen, falls sie vor dem Liquidationstermine stirbt.

Es ist hier (Anhang 2, Seite 34) $n=30$, $a=12$ und $\beta=100$, und da hier Versicherter und Zeichner ein und dieselbe Person sind, $\frac{A_{m+x}}{A_m} = 1$ zu setzen; folglich, da die Gegenversicherung durch einmalige Prämie gedeckt werden soll:

$$z = 100 \sum_{1,12}^{x} \left[x \frac{A_{29+x} - A_{30+x}}{r^x \; A_{30}} \right] =$$

$$= 100 \left(\sum_{1,12}^{x} \left[x . \frac{A_{29+x}}{r^x A_{30}} \right] - \sum_{1,12}^{x} \left[x \frac{A_{30+x}}{r^x A_{30}} \right] \right), \text{ und nach Gleichung } (\eta)$$

$$z = 100 \left(\frac{r^{29}}{A_{30}} \left[E^1_{29} - E^1_{42} - 12\, E_{42} \right] - \frac{r^{30}}{A_{30}} \left[E^1_{31} - E^1_{43} - 12 E_{43} \right] \right)$$

nach Süssmilch 5%

$$z = \frac{100.4 \cdot 116136}{439} \Big[18093 \cdot 30 - 6107 \cdot 10 - 12.578 \cdot 98 -$$

$$- 1 \cdot 06\, (16635 \cdot 70 - 5528 \cdot 12 - 12.532 \cdot 51) \Big]$$

$$= \frac{411 \cdot 6136}{439} \Big[5038 \cdot 44 - 5000 \cdot 61 \Big] = 35 \cdot 47.$$

Tafel I.

Sterblichkeitstafel nach Süssmilch.

m	A_m	B_m	C_m	m	A_m	B_m	C_m	m	A_m	B_m	C_m
0	1000	250	28988	35	409	7	10628	70	112	9	972
1	750	89	27988	36	402	7	10219	71	103	9	860
2	661	43	27238	37	359	7	9817	72	94	9	757
3	618	25	26577	38	388	7	9422	73	85	8	663
4	593	14	25959	39	381	7	9034	74	77	8	578
5	579	12	25366	40	374	7	8653	75	69	7	508
6	567	11	24787	41	367	7	8279	76	62	7	432
7	556	9	24220	42	360	7	7912	77	55	6	370
8	547	8	23664	43	353	7	7552	78	49	6	315
9	539	7	23117	44	346	7	7199	79	43	6	266
10	532	5	22578	45	339	7	6853	80	37	5	223
11	527	4	22046	46	332	8	6514	81	32	4	186
12	523	4	21519	47	324	8	6182	82	28	4	154
13	519	4	20996	48	316	8	5858	83	24	4	126
14	515	4	20477	49	308	8	5542	84	20	3	102
15	511	4	19962	50	300	9	5234	85	17	3	82
16	507	4	19451	51	291	9	4934	86	14	2	65
17	503	4	18944	52	282	9	4643	87	12	2	51
18	499	4	18441	53	273	9	4361	88	10	2	39
19	495	4	17942	54	264	9	4088	89	8	2	29
20	491	5	17447	55	255	9	3824	90	6	1	21
21	486	5	16956	56	246	9	3569	91	5	1	15
22	481	5	16470	57	237	9	3323	92	4	1	10
23	476	5	15989	58	228	9	3086	93	3	1	6
24	471	5	15513	59	219	9	2858	94	2	1	3
25	466	5	15042	60	210	9	2639	95	1	1	1
26	461	5	14576	61	201	9	2429	96	0	0	0
27	456	5	14115	62	192	10	2228				
28	451	6	13659	63	182	10	2036				
29	445	6	13208	64	172	10	1854				
30	439	6	12763	65	162	10	1682				
31	433	6	12324	66	152	10	1520				
32	427	6	11891	67	142	10	1368				
33	421	6	11464	68	132	10	1226				
34	415	6	11043	69	122	10	1094				

Tafel II.

Wahrscheinliche, mittlere Lebensdauer nach Süssmilch.

m	W_m	M_m	K_m	m	W_m	M_m	K_m	m	W_m	M_m	K_m
0	18	28·49	4	35	25·5	25·49	58	70	7	8·18	12
1	39	36·72	8	36	25	24·92	57	71	6·5	7·84	11
2	44	40·71	15	37	24·5	24·35	56	72	6·5	7·54	10
3	46	42·50	25	38	24	23·78	55	73	6	7·30	10
4	46·5	43·28	42	39	23	23·21	54	74	6	7·01	9
5	46	43·31	48	40	22·5	22·64	53	75	5·5	6·76	10
6	46	43·22	51	41	22	22·06	52	76	5	6·47	9
7	45·5	43·06	62	42	21	21·48	51	77	5	6·23	9
8	45	42·76	68	43	20·5	20·88	50	78	5	5·93	8
9	44·5	42·39	77	44	20	20·31	40	79	4·5	5·69	7
10	44	41·94	106	45	19	19·72	48	80	4·5	5·53	7
11	43	41·33	132	46	18·5	19·12	41	81	4·5	5·31	8
12	42	40·66	131	47	18	18·58	40	82	4	5·00	7
13	41·5	39·96	130	48	17·5	18·04	39	83	4	4·75	6
14	40·5	39·26	129	49	17	17·49	38	84	4	4·60	7
15	40	38·56	128	50	16	16·95	33	85	3·75	4·32	6
16	39	37·86	127	51	15·5	16·46	32	86	3·5	4·14	7
17	38·5	37·16	126	52	15	15·96	31	87	3	4·75	6
18	37·5	36·46	125	53	14·5	15·48	30	88	3	3·40	5
19	37	35·75	124	54	14	14·98	29	89	3	3·12	4
20	36	35·03	98	55	13·5	14·50	28	90	3	3·00	6
21	35·5	34·39	97	56	13	14·01	27	91	2·5	2·50	5
22	34·5	33·74	96	57	12·5	13·52	26	92	2	2·00	4
23	34	33·09	95	58	12	13·04	25	93	1·5	1·50	3
24	33	32·44	94	59	11·5	12·55	24	94	1	1·00	·2
25	32·5	31·78	93	60	11	12·07	23	95	0	0·00	1
26	31·5	31·12	92	61	10·5	11·58	22				
27	31	30·45	91	62	10	11·10	19				
28	30	29·79	75	63	9·5	10·69	18				
29	29·5	29·18	74	64	9	10·28	17				
30	29	28·57	73	65	8·5	9·88	16				
31	28	27·96	72	66	8	9·50	15				
32	27·5	27·35	71	67	8	9·13	14				
33	27	26·73	70	68	7·5	8·79	13				
34	26	26·11	69	69	7	8·47	12				

Tafel III.

D_m, E_m, E'_m berechnet nach der Sterblichkeitstafel von Süssmilch.

m	δ_m	D_m ($r = 1{\cdot}04$)	E_m ($r = 1{\cdot}04$)	E'_m ($r = 1{\cdot}04$)	D_m ($r = 1{\cdot}05$)	E_m ($r = 1{\cdot}05$)	E'_m ($r = 1{\cdot}05$)
0	+ 161	1000·00	12431·48	210074·50	1000·00	10782·28	160748·[illegible]6
1	46	721·15	11431·48	197643·02	714·29	9782·28	149966·28
2	18	611·13	10710·33	186211·54	599·55	9067·99	140184·00
3	11	549·40	10099·20	175501·21	533·85	8468·45	131116·01
4	2	506·90	9549·80	165402·01	487·86	7934·59	122647·56
5	1	475·90	9042·90	155852·21	453·66	7446·73	114712·97
6	2	448·11	8567·00	146809·31	423·10	6993·07	107266·24
7	1	422·51	8118·89	138242·31	395·14	6569·97	100273·17
8	1	399·69	7696·38	130123·42	370·23	6174·83	93703·20
9	2	378·69	7296·69	122427·04	347·44	5804·60	87528·37
10	+ 1	359·40	6918·00	115130·35	326·60	5457·15	81723·77
11	0	342·33	6558·60	108212·35	308·13	5130·55	76266·62
12	0	326·66	6216·27	101653·75	291·23	4822·42	71136·07
13	0	311·70	5889·61	95437·48	275·24	4531·20	66313·65
14	0	297·40	5577·91	89547·87	260·11	4255·96	61782·45
15	0	283·74	5280·51	83969·96	245·80	3995·85	58526·49
16	0	270·69	4996·77	78689·45	232·26	3750·05	53530·64
17	0	258·23	4726·08	73692·68	219·46	3517·79	49780·59
18	0	246·32	4467·85	68966·60	207·34	3298·33	46262·80
19	— 1	234·95	4221·53	64498 75	195·89	3090·99	42964·47
20	0	224·09	3986·58	60277·22	185·05	2895·10	39873·48
21	0	213·27	3762·49	56290·64	174·45	2710·06	36978·38
22	0	202·96	3549·22	52528·15	164·43	2535·60	34268·32
23	0	193·13	3346·26	48978·93	154·97	2371·17	31732·72
24	0	183·75	3153·13	45632·67	146·04	2216·20	29361·55
25	0	174 80	2969·38	42479·54	137·61	2070·16	27145·35
26	0	166·28	2794·58	39510·16	129·65	1932·54	25075·19
27	— 1	158·15	2628·30	36715·58	122·14	1802·89	23142·65
28	0	150·40	2470·15	34087·28	115·05	1680·75	21339·76
29	0	142·69	2319·75	31617·13	108·11	1565·71	19659·01
30	0	135·35	2177·06	29297·38	101·57	1457·60	18093·30
31	0	128·37	2041·71	27120·32	95·42	1356·02	16635·70
32	0	121·72	1913·34	25078·61	89·61	1260·61	15279·68
33	0	115·39	1791·62	23165·27	84·15	1170·99	14019·07
34	— 1	109·37	1676·23	21373·65	79·00	1086·84	12848·08

m	δ_m	D_m ($r = 1{\cdot}04$)	E_m ($r = 1{\cdot}04$)	E'_m ($r = 1{\cdot}04$)	D_m ($r = 1{\cdot}05$)	E_m ($r = 1{\cdot}05$)	E'_m ($r = 1{\cdot}05$)
35	0	103·65	1566·86	19697·42	74·15	1007·85	11761·24
36	0	97·95	1463·21	18130·56	69·41	933·70	10753·39
37	0	92·55	1365·26	16667·35	64·95	864·29	9819·69
38	0	87·41	1272·71	15302·09	60·76	799·34	8955·40
39	0	82·53	1185·30	14029·38	56·82	738·58	8156·06
40	0	77·90	1102·77	12844·08	53·12	681·75	7417·48
41	0	73·50	1024·87	11741·31	49·65	628·63	6735·73
42	0	69·33	951·37	10716·44	46·38	578·98	6107·10
43	0	65·36	882·04	9765·07	43·31	532·51	5528·12
44	0	61·60	816·68	8883·03	40·42	489·28	4995·61
45	— 1	58·04	755·08	8066·35	37·73	448·85	4506·33
46	0	54·65	697·04	7311·27	35·19	411·12	4057·48
47	0	51·28	642·39	6614·23	32·71	375·93	3646·36
48	0	48·09	591·11	5971·84	30·38	343·22	3270·43
49	— 1	45·04	543·02	5380·73	28·20	312·84	2927·21
50	0	42·21	497·95	4837·71	26·16	284·64	2614·37
51	0	39·37	455·74	4339·76	24·17	258·48	2329·73
52	0	36·69	416·37	3884·02	22·31	234·31	2071·25
53	0	34·15	379·66	3467·65	20·56	212·00	1836·94
54	0	31·75	345·53	2087·97	18·94	191·44	1624·94
55	0	29·49	313·78	2742·44	17·42	172·50	1433·50
56	0	27·36	284·29	2428·66	16·01	155·08	1261·00
57	0	25·34	256·93	2144·37	14·69	139·07	1105·93
58	0	23·44	231·59	1887·44	13·46	124·38	966·86
59	0	21·65	208·15	1655·85	12·31	110·92	842·48
60	0	19·96	186·60	1447·70	11·24	98·61	731·56
61	— 1	18·37	166·54	1261·10	10·25	87·37	632·95
62	0	16·87	148·17	1094·56	9·32	77·12	545·58
63	0	15·38	131·30	946·39	8·42	67·80	468·46
64	0	13·98	115·92	815·09	7·57	59·38	400·66
65	0	12·66	101·94	699·17	6·79	51·80	341·28
66	0	11·42	89·28	597·23	6·07	45·01	289·48
67	0	10·26	77·86	507·95	5·40	38·94	244·47
68	0	9·17	67·60	430·09	4·78	33·54	205·53
69	+ 1	8·15	58·43	362·49	4·21	28·75	171·99

m	δ_m	D_m	E_m	E'_m	D_m	E_m	E'_m
		$r = 1{\cdot}04$			$r = 1{\cdot}05$		
70	0	7·19	50·28	304·06	3·68	24·54	143·24
71	0	6·36	43·09	253·78	3·22	20·86	118·70
72	+ 1	5·58	36·73	210·69	2·80	17·64	97·84
73	0	4·85	31·15	173·96	2·41	14·83	80·20
74	+ 1	4·23	26·30	142·81	2·08	12·42	65·37
75	0	3·64	22·07	116·51	1·78	10·34	52·95
76	+ 1	3·15	18·43	94·44	1·52	8·56	42·61
77	0	2·68	15·28	76·01	1·28	7·04	34·05
78	0	2·30	12·60	60·73	1·09	5·76	27·01
79	+ 1	1·94	10·30	48·13	0·91	4·67	21·25
80	+ 1	1·61	8·36	37·83	0·75	3·76	16·58
81	0	1·33	6·75	29·47	0·61	3·01	11·82
82	0	1·12	5·42	22·72	0·51	2·39	9·81
83	+ 1	0·93	4·30	17·30	0·42	1·88	7·42
84	0	0·74	3·37	13·00	0·33	1·46	5·54
85	+ 1	0·61	2·63	9·63	0·27	1·13	4·08
86	0	0·48	2·02	7·00	0·21	0·86	2·95
87	0	0·40	1·54	4·98	0·17	0·65	2·09
88	0	0·32	1·14	3·44	0·14	0·48	1·44
89	+ 1	0·24	0·82	2·30	0·10	0·34	0·96
90	0	0·18	0·58	1·48	0·07	0·24	0·62
91	0	0·14	0·40	0·90	0·06	0·17	0·38
92	0	0·11	0·26	0·50	0·04	0·11	0·21
93	0	0·08	0·15	0·24	0·03	0·06	0·10
94	0	0·05	0·07	0·09	0·02	0·03	0·04
95	+ 1	0·02	0·02	0·02	0·01	0·01	0·01

Tafel IV.

Werth einer Verbindungsrente von 1 Gulden für zwei Personen. $R_n^m = R_m^n$ für $r = 1{\cdot}04$.

Alter m	n 15	20	25	30	35	40	45	50
15	14·63							
20	14·13	13·68						
25	13·64	13·22	12·81					
30	13·04	12·67	12·31	11·85				
35	12·36	12·04	11·73	11·32	10·86			
40	11·68	11·40	11·13	10·78	10·37	9·95		
45	10·80	10·56	10·34	10·05	9·71	9·35	8·84	
50	9·83	9·63	9·46	9·22	8·93	8·65	8·22	7·69
55	8·88	8·72	8·58	8·39	8·16	7·94	7·59	7·14
60		7·65	7·53	7·40	7·22	7·06	6·78	6·43
65			6·47	6·36	6·22	6·10	5·90	5·62
70				5·48	5·38	5·29	5·13	4·92
75					4·61	4·55	4·44	4·28
80						3·85	3·77	3·65
85							3·05	2·98
90								2·31

m	n 55	60	65	70	75	80	85	90
55	6·69							
60	6·07	5·56						
65	5·35	4·95	4·44					
70	3·72	4·40	3·99	3·61				
75	4·13	3·88	3·55	3·24	2·94			
80	3·55	3·37	3·11	2·87	2·62	2·37		
85	2·91	2·80	2·62	2·45	2·27	2·07	1·86	
90	2·10	2·05	1·96	1·87	1·78	1·66	1·54	1·42

Tafel V.

Werth einer Verbindungsrente von 1 Gulden für zwei Personen. $R_n^m = R_m^n$ für $r = 1{\cdot}05$.

Alter m	n: 5	10	15	20	25	30	35	40	45
5	12·83								
10	13·15	13·50							
15	12·87	13·22	12·97						
20	12·45	12·80	12·57	12·21					
25	12·03	12·39	12·18	11·85	11·52				
30	11·54	11·89	11·71	11·41	11·11	10·74			
35	10·97	11·31	11·16	10·89	10·63	10·30	9·91		
40	10·40	10·73	10·57	10·37	10·14	9·85	9·50	9·15	
45	9·60	9·98	9·87	9·67	9·48	9·23	8·94	8·64	8·16
50	8·83	9·13	9·05	8·88	8·73	8·52	8·28	8·03	7·65
55	8·02	8·30	8·24	8·10	7·98	7·81	7·61	7·41	7·10
60	7·07	7·31	7·27	7·16	7·07	6·93	6·78	6·63	6·38
65	6·06	6·28	6·25	6·17	6·10	6·00	5·88	5·77	5·58
70	5·23	5·41	5·39	5·34	5·28	5·20	5·11	5·03	4·89
75	4·47	4·63	4·62	4·57	4·53	4·47	4·41	4·35	4·25
80	3·77	3·89	3·88	3·86	3·84	3·79	3·74	3·70	3·63
85	3·03	3·13	3·13	3·10	3·09	3·06	3·05	3·01	2·96
90	2·14	2·19	2·20	2·19	2·18	2·17	2·15	2·14	2·12

m	n: 50	55	60	65	70	75	80	85	90
50	7·19								
55	6·71	6·30							
60	6·07	5·74	5·28						
65	5·33	5·09	4·72	4·26					
70	4·69	4·51	4·21	3·83	3·47				
75	4·10	3·96	3·74	3·37	3·13	2.84			
80	3·52	3·42	3·25	3·22	2·78	2.54	2·30		
85	2·89	2·82	2·72	2·54	2·38	2.21	2·02	1·81	
90	2·08	2·06	2·01	1·92	1·83	1.74	1·63	1·51	1·39

Tafel VI.

Sterblichkeitstafel nach Deparcieux.

$r = 1{\cdot}06.$

m	A_m	B_m	C_m	D_m	E_m	E'_m	δ_m
3	1000	30	48207	839·619	12082·820	174172·375	+ 8
4	970	22	47207	768·331	11243·201	162089·555	4
5	948	18	46237	708·401	10474·870	150846·354	3
6	930	15	45289	655·614	9766·469	140271·484	2
7	915	13	44359	608·527	9110·855	130605·015	1
8	902	12	43444	565·926	8502·328	121494·160	2
9	890	10	42542	526·789	7936·402	112991·832	2
10	880	8	41652	491·388	7409·613	105055·430	2
11	872	6	40772	459·359	6918·225	97645·817	0
12	866	6	39900	430·375	6458·866	90727·592	0
13	860	6	39034	403·202	6028·491	84268·726	0
14	854	6	38174	377·725	5625·289	78240·235	0
15	848	6	37320	353·841	5247·564	72614·946	− 1
16	842	7	36472	331·450	4893·723	67367·382	0
17	835	7	35630	310·089	4562·273	62473·659	0
18	828	7	34795	290·085	4252·184	57911·386	0
19	821	7	33967	271·351	3962·099	53659·202	− 1
20	814	8	33146	253·809	3690·748	49697·103	0
21	806	8	32332	237·089	3436·939	46006·355	0
22	798	8	31526	221·449	3199·850	42569·416	0
23	790	8	30728	206·820	2978·401	39369·566	0
24	782	8	29938	193·138	2771·581	36391·165	0
25	774	8	29156	180·341	2578·443	33619·584	0
26	766	8	28382	168·374	2398·102	31041·141	0
27	758	8	27616	157·185	2229·728	28643·039	0
28	750	8	26858	146·723	2072·543	26413·311	0
29	742	8	26108	136·941	1925·820	24340·768	0
30	734	8	25366	127·797	1788·879	22414·948	0
31	726	8	24632	119·249	1661·082	20626·069	0
32	718	8	23906	111·259	1541·833	18964·987	0
33	710	8	23188	103·792	1430·574	17423·154	0
34	702	8	22478	96·814	1326·782	15992·580	0
35	694	8	21776	90·293	1229·968	14665·798	0
36	686	8	21082	84·200	1139·675	13435·830	+ 1
37	678	7	20396	78·508	1055·475	12296·155	0

m	A_m	B_m	C_m	D_m	E_m	E'_m	δ_m
38	671	7	19718	73·299	976·967	11240·680	0
39	664	7	19047	68·429	903·668	10263·713	0
40	657	7	18383	63·875	835·239	9360·045	0
41	650	7	17726	59·617	771·364	8524·806	0
42	643	7	17076	55·637	711·747	7753·442	0
43	636	7	16433	51·917	656·110	7041·695	0
44	629	7	15797	48·439	604·193	6385·585	0
45	622	7	15168	45·188	555·754	5781·392	— 1
46	615	8	14546	42·151	510·566	5225·638	0
47	607	8	13931	39·247	468·415	4715·072	— 1
48	599	9	13324	36·538	429·168	4246·657	0
49	590	9	12725	33·952	392·630	3817·489	— 1
50	581	10	12135	31·541	358·678	3424·859	— 1
51	571	11	11554	29·244	327·137	3066·181	0
52	560	11	10983	27·057	297·893	2739·044	0
53	549	11	10423	25·024	270·836	2441·151	— 1
54	538	12	9874	23·135	245·812	2170·315	0
55	526	12	9336	21·338	222·677	1924·503	0
56	514	12	8810	19·671	201·339	1701·826	— 1
57	502	13	8296	18·125	181·668	1500·487	0
58	489	13	7794	16·656	163·543	1318·819	0
59	476	13	7305	15·295	146·887	1155·276	0
60	463	13	6829	14·035	131·592	1008·389	0
61	450	13	6366	12·869	117·557	876·797	— 1
62	437	14	5916	11·790	104·688	759·240	0
63	423	14	5479	10·766	92·899	654·552	0
64	409	14	5056	9·821	82·132	561·654	— 1
65	395	15	4647	8·948	72·311	479·522	— 1
66	380	16	4252	8·121	63·363	407·211	— 1
67	364	17	3872	7·339	55·242	343·848	— 1
68	347	18	3508	6·599	47·903	288·606	— 1
69	329	19	3161	5·903	41·304	240·703	0
70	310	19	2832	5·247	35·401	199·399	— 1
71	291	20	2522	4·647	30·154	163·998	0
72	271	20	2231	4·083	25·507	133·844	0

m	A_m	B_m	C_m	D_m	E_m	E'_m	δ_m
73	251	20	1960	3·567	21·424	108·337	0
74	231	20	1709	3·097	17·857	86·913	+ 1
75	211	19	1478	2·669	14·760	69·056	0
76	192	19	1267	2·291	12·091	54·296	0
77	173	19	1075	1·948	9·800	42·205	+ 1
78	154	18	902	1·635	7·852	32·405	0
79	136	18	748	1·363	6·217	24·553	+ 1
80	118	17	612	1·115	4·854	18·336	+ 1
81	101	16	494	0·901	3·739	13·482	+ 2
82	85	14	393	0·715	2·838	9·743	+ 2
83	71	12	308	0·563	2·123	6·905	+ 1
84	59	11	237	0·442	1·560	4·782	+ 1
85	48	10	178	0·339	1·118	3·222	+ 1
86	38	9	130	0·253	0·779	2·104	+ 2
87	29	7	92	0·182	0·526	1·325	+ 1
88	22	6	63	0·130	0·344	0·799	+ 1
89	16	5	41	0·089	0·214	0·455	+ 1
90	11	4	25	0·058	0·125	0·241	+ 1
91	7	3	14	0·035	0·067	0·116	+ 1
92	4	2	7	0·019	0·032	0·049	+ 1
93	2	1	3	0·009	0·013	0·017	0
94	1	1	1	0·004	0·004	0·004	+ 1
95	0	0	0				

Tafel VII.

m	r^m			$\frac{1}{r^m}$		
	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·06$	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·06$
1	1·040000	1·050000	1·060000	0·961538	0·952381	0·943396
2	1·081600	1·102500	1·123600	0·924556	0·907029	0·889996
3	1·124864	1·157625	1·191016	0·888996	0·863838	0·839619
4	1·169859	1·215506	1·262477	0·854804	0·822702	0·792094
5	1·216653	1·276282	1·383226	0·821927	0·783526	0·747258
6	1·265913	1·340096	1·418519	0·790315	0 746215	0·704961
7	1·315932	1·407100	1·503630	0·759918	0·710681	0·665057
8	1·368569	1·477455	1·593848	0·730690	0·676839	0·627412
9	1·423312	1·551328	1·689479	0·702587	0·644609	0·591898
10	1·480244	1·628895	1 790848	0·675564	0·613913	0·558395
11	1·539454	1·710339	1·898299	0·649581	0·584679	0·526788
12	1·601032	1·795856	2·012196	0·624597	0·556837	0·496969
13	1·665074	1·885649	2·132928	0·600574	0·530321	0·468839
14	1·731676	1·979932	2·260904	0·577475	0·505068	0·442301
15	1·800944	2·078928	2·396558	0·555265	0·481017	0·417265
16	1·872981	2·182875	2·540352	0·533908	0·458112	0·393646
17	1·947901	2·292018	2·692773	0·513373	0·436297	0·371364
18	2·025817	2·406619	2·854339	0·493628	0·415521	0·350344
19	2·106849	2·526950	3·025600	0·474642	0·395734	0·330513
20	2·191123	2·653298	3·207135	0·456387	0·376889	0·311805
21	2·278768	2·785963	3·399564	0·438834	0·358942	0·294155
22	2·369919	2·925261	3.603537	0·421955	0·341850	0·277505
23	2·464716	3·071524	3.819750	0·405726	0·325571	0·261797
24	2·563304	3·225100	4.048935	0·390121	0·310068	0·246979
25	2·665836	3·386355	4.291871	0·375117	0·295303	0·232999
26	2·772470	3·555673	4·549383	0·360689	0·281241	0·219810
27	2·883369	3·733456	4·822346	0·346817	0·267848	0·207368
28	2·998703	3·920129	5·111687	0·333477	0·255094	0·195630
29	3·118651	4·116136	5·418388	0·320651	0·242946	0·784557
30	3·243398	4·321942	5·743491	0·308319	0·231377	0·174110
31	3·373133	4·538039	6·088101	0·296460	0·220359	0·164255
32	3·508059	4·764941	6·453387	0·285058	0·209866	0·154957
33	3·648381	5·003189	6·840590	0·274094	0·199873	0·146186
34	3·794316	5·253348	7·251025	0·263552	0·190355	0·137912
35	3.946089	5·516015	7·686087	0·253415	0·181290	0·130105

m	r^m			$\frac{1}{r^m}$		
	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·06$	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·06$
36	4·103933	5·791816	8·147252	0·243669	0·172656	0·122741
37	4·268090	6·081407	8·636087	0·234297	0·164436	0·115793
38	4·438813	6·385477	9·164252	0·225285	0·156605	0·109239
39	4·616366	6·704751	9·703507	0·216621	0·149148	0·103056
40	4·801021	7·039989	10·285718	0·208289	0·142046	0·097222
41	4·993061	7·391988	10·902861	0·200278	0·135282	0·091719
42	5·192784	7·761588	11·557033	0·192575	0·128840	0·086527
43	5·400495	8·149667	12·250455	0·185168	0·122704	0·081630
44	5·616515	8·557150	12·985482	0·178046	0·116861	0·077009
45	5·841176	8·985008	13·764611	0·171198	0·111297	0·072650
46	6·074823	9·434258	14·590487	0·164614	0·105997	0·068538
47	6·317816	9·905971	15·465917	0·158283	0·100940	0·064658
48	6·570528	10·401270	16·393872	0·152195	0·096142	0·060998
49	6·833349	10·921333	17·377504	0·146341	0·091564	0·057546
50	7·106683	11·467400	18·420154	0·140713	0·087204	0·054288
51	7·390951	12·040770	19·525364	0·135301	0·073051	0·051215
52	7·686589	12·642808	20·696885	0·130097	0·079096	0·048316
53	7·994052	13·274949	21·938698	0·125093	0·075330	0·045582
54	8·313814	13·938696	23·255020	0·120282	0·071743	0·043001
55	8·646367	14·635631	24·650322	0·115656	0·068326	0·040567
56	8·992222	15·367412	26·129341	0·111207	0·065073	0·038271
57	9·351910	16·135783	27·697101	0·106930	0·061974	0·036105
58	9·725987	16·942572	29·358927	0·102817	0·059023	0·034061
59	10·115026	17·789701	31·120463	0·098863	0·056212	0·032133
60	10·519627	18·679186	32·989691	0·095060	0·053536	0·030314
61	10·940413	19·613145	34·966952	0·091404	0·050986	0·028598
62	11·378029	20·593802	37·064969	0·087889	0·048558	0·026980
63	11·833150	21·623493	39·288868	0·084508	0·046246	0·025453
64	12·306476	22·704667	41·646200	0·081258	0·044044	0·024012
65	12·798735	23·839901	44·144972	0·078133	0·041946	0·022653
66	13·310685	25·031896	46·793670	0·075128	0·039949	0·021370
67	13·843112	26·283490	49·601290	0·072238	0·038047	0·020161
68	14·396836	27·597665	52·577368	0·069460	0·036235	0·019020
69	14·972710	28·977548	55·732010	0·066788	0·034509	0·017943
70	15·571618	30·426427	59·075930	0·064219	0·032866	0·016927

m	r^m			$\frac{1}{r^m}$		
	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·06$	$r=1·04$	$r=1·05$	$r=1·05$
71	16·194483	31·947747	62·620486	0·061749	0.031301	0·015969
72	16·842262	33·545134	66·377715	0·059374	0.029811	0·015065
73	17·515953	35·222391	70·360378	0·057091	0.028391	0·014213
74	18·261591	36·983510	74·582001	0·054894	0.027039	0·013408
75	18·945255	38·832686	79·056921	0·052784	0.025752	0·012649
76	19·703065	40·774320	83·800336	0·050754	0·024525	0.011933
77	20·491187	42·813036	88·828356	0·048801	0·023357	0·011258
78	21·310835	44·953688	94·158058	0·046924	0·022245	0·010620
79	22·163268	47·201372	99·807541	0·045120	0·021186	0·010019
80	23·049799	49·561441	105·795993	0·043384	0·020177	0·009452
81	23·971791	52·039513	112·143753	0·041716	0·019216	0·008917
82	24·930663	54·641489	118·872378	0·040111	0·018301	0·008412
83	25·927889	57·373563	126·004721	0·038569	0·017430	0·007936
84	26·965005	60·242241	133·565004	0·037085	0·016600	0·007487
85	28·043605	63·254353	141·578904	0·035659	0·015809	0·007063
86	29·165349	66·417071	150·073639	0·034287	0·015056	0·006663
87	30·331963	69·737925	159·078057	0·032969	0·014339	0·006286
88	31·545242	73·224821	168·612741	0·031701	0·013657	0·005930
89	32·807051	76·886062	178·740105	0·030481	0·013006	0·005595
90	34·119333	80·730365	189·464511	0·029309	0·012387	0·005278
91	35·484107	84·766883	200·832382	0·028182	0·011797	0·004979
92	36·903471	89·005227	212·882325	0·027098	0·011235	0·004697
93	38·379610	93·455489	225·655264	0·026056	0·010700	0·004432
94	39·914794	98·128263	239·194580	0·025053	0·010191	0·004181
95	41·511386	103·034676	253·546255	0·024090	0·009705	0·003944