OM NAGRA AF RIEMANN ICKE BETRAKTADE MINIMALYTSTYCKEN, HVILKAS BEGRÄNSNING BILDAS AF TRE RÄTA LINIER.

AF

E. R. NEOVIUS.

I en afhandling »Ueber die Fläche vom kleinsten Flächeninhalt bei gegebener Begrenzung« löser *Riemann* (*Bernhard Riemann's* gesammelte Werke Leipzig 1876. Sid. 283 ff.) problemet att analytiskt bestämma en minimalyta, hvars begränsning bildas af en följd af räta linier, af hvilka två på hvarandra följande antingen skära hvarandra eller ock korsa hvarandra i rymden. I det senare fallet sträcker sig minimalytstycket i oändligheten och det antagandet göres, at dessa s. k. sektorer i oändligheten asymptotiskt närma sig en skrufyta, som bestämmes genom de två räta linierna.

Såsom en användning af den allmänna teorin löser *Riemann* problemet i det speciella fall, i hvilket begränsningen bildas af tre räta linier, som korsa hvarandra (sid 304). Äro de tre räta linierna »parallela med koordinataxlarna« (i ett rätvinkligt koordinatsystem), så uppställer *Riemann* (sid 307) i sluten form uttryckena för de rätvinkliga koordinaterna för en godtycklig punkt på ytstycket. Härvid antages att de skrufytor, till hvilka de tre sektorerna i oändligheten närma sig, hafva amplituden $\frac{\pi}{2}$ och icke en godtycklig udda multipel af $\frac{\pi}{2}$.

I uttryckena för koordinaterna x, y och z ingå två af hvarandra oberoende parametrar $p:r$ och $q:r$, af hvilkas värden minimalytstyckets form är beroende. *Riemann* ingår ej i någon diskussion af de olika former, som de genom hans formler bestämda ytorna kunna antaga. Man finner endast den korta anmärkningen, att ytans sfäriska bild, förmedlad genom parallela normaler, kan hafva antingen en förgreningspunkt i det inre eller ock två s. k. återvändspunkter för normalerna på begränsningen.

I en uppsats »Ueber Minimalflächenstücke, deren Begrenzung von drei geradlinigen Theilen gebildet wird. Theil II. (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, 1893) stälde jag mig uppgiften at bestämma *alla* de olika former, som de genom *Riemann's* formler analytiskt bestämda minimalytstyckena kunna antaga, genom att åt parametrarna $p : r$ och $q : r$ gifvas alla reella värden från $-\infty$ till $+\infty$.

Ett specielt intresse erbjöd härvid frågan huruvida ett minimalytstycke var entydigt bestämdt genom afstånden A, B, C emellan de tre begränsande räta linierna, då afseende fästes såväl vid dessa afstånds absoluta storlek som ock vid deras förtecken. Ett afstånd emellan två begränsande linier infördes såsom positivt eller negativt allt efter som den sektor, som sträcker sig i oändligheten emellan dessa linier, har formen af en högervriden eller en venstervriden skrufyta.

För afstånden A, B, C uppställer *Riemann* (sid 306) följande uttryck:

$$\frac{1}{\pi} \cdot A = 4p^2 - (p + q + r)^2,$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot B = 4q^2 - (p + q + r)^2,$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot C = 4r^2 - (p + q + r)^2.$$

Dessa uttryck kunna sättas i formen

$$\frac{1}{\pi} \cdot A = (3p + q + r)(p - q - r) = A_2 \cdot A_1$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot B = (p + 3q + r)(-p + q - r) = B_2 \cdot B_1,$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot C = (p + q + 3r)(-p - q + r) = C_2 \cdot C_1.$$

Genom dessa uttryck äro afstånden A, B, C bestämda såväl till storlek som förtecken, då värdena på parametrarna p, q, r äro antagna. Uppfattas parametrarna såsom homogena koordinater för en punkt i ett plan, så synes, att afstånden A, B, C äro lika med noll för värden af parametrarna, som geometriskt representeras genom punkterna på de *sex* räta linierna $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; $B_1 = 0$, $B_2 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Genom dessa sex räta linier indelas hela p, q, r-planet i 16 områden och innanför hvart och ett af dessa områden äro förtecknena för afståndena A, B, C bestämda; de förändras ej för olika värdesystem p, q, r innanför ett område. Ett ombyte af ett förtecken kan ega rum endast genom att någon af linierna A_1, A_2, $\cdots$ öfverskrides.

Blir ett af afståndena A, B, C analytiskt betraktadt lika med noll derigenom att parametrarna p, q, r antaga värden, som geometriskt representeras genom en punkt på en af räta linierna A_1, B_1 eller C_1, så öfvergår den skrufformiga sektorn i en plan lamell (ett fjerdedelsplan) emellan de två hvarandra skärande räta linierna. Ifrån den sfäriska bilden, som i allmänhet sammansättes af *fem* sfäriska oktanter, afskilja sig två oktanter.

Blir ett af afstånden A, B, C lika med noll derigenom att åt parametrarna gifvas värden, som geometriskt representeras af en punkt på en af linierna A_2, B_2 eller C_2, så afskiljes deremot icke ett fjerdedelsplan ifrån minimalytstycket utan två element af detsamma, med olika tangerande plan, närma sig hvarandra, så att vid fortsatt formförändring ytstycket kommer att genomskära sig sjelf. Den sfäriska bilden af ett dylikt ytstycke bildas äfven i gränsläget, då ett af afstånden blifvit noll, af *fem* sfäriska oktanter.

Den geometriska uttrycksformen för det ofvanstående är alltså följande: blir ett af afstånden A, B eller C lika med noll, så bestämmas genom den gifna begränsningen i allmänhet två fullkomligt olika minimalytstycken.

Äro två afstånd t. ex. A och B lika med noll, så bildas ytstyckets begränsning af tre räta linier, af hvilka en skär de två öfriga under räta vinklar. Analytiskt betraktadt kunna de två afstånden A och B blifva lika med noll antingen sålunda att åt parametrarna gifvas värden, som geometriskt representeras af skärningspunkterna emellan räta linierna A_1 och B_1, A_1 och B_2, A_2 och B_1 eller ock A_2 och B_2. Man erhåller sålunda genom samma begränsning fyra olika ytstycken. Detta resultat väckte en viss uppmärksamhet bland de matematiker, som närmare sysselsatt sig med teorin för dessa ytor, ty man synes ha antagit, att genom en begränsning, som bildas af tre räta linier, af hvilka en rätvinkligt skär de två öfriga, endast ett ytstycke, nämligen ett stycke af en vanlig skrufyta, blifver bestämdt. Såväl *Riemann* som *G. Darboux* lösa direkt detta problem och komma endast till skrufytan.

Beträffande antalet ytstycken, som blifva bestämda då de tre afståndena A, B, C äro gifna såväl till storlek som förtecken, fann jag att detta antal i allmänhet kan vara högst lika med *tre*. Äro endast absoluta storleken af afstånden gifna, så bestämmas 16, 14, 12 eller minst 10 olika ytstycken.

Under försöken att enligt den *Plateau*'ska metoden genom en lösning af tvål, vatten och glycerin experimentelt åskådliggöra de olika minimalytstyckena, stötte jag på ytstycken, hvilka icke analytiskt bestämmas genom de af *Riemann* uppstälda formlerna. Ett af dessa ytstycken uppträdde vid försöket att experimentelt framställa ett ytstycke med tre sektorer, som sträcka sig i oändligheten och där hafva karaktären af högervridna skrufytor ($A > 0$, $B > 0$, $C > 0$). Genom de undersökningar jag anstält angående formen af de ytor, som framställas genom *Riemann*'s formler, framgår det, att de ifrågavarande ytstyckena genomskära sig sjelfva och att de således ej utan vidare kunna framställas genom *Plateau*'s förfarande. Framställer man emellertid de begränsande räta linierna genom tunna järntrådar, hvilka i det ändliga förenas genom böjda trådar, och doppar man denna ställning i den *Plateau*'ska lösningen, så erhåller man, efter att hafva förstört en lamell, som bildar sig i det inre, ett ytstycke, som begränsas af de tre gifna linierna. Detta ytstycke är dubbelt-sammanhängande, är en såkallad dubbelyta, som har endast en sida (»einseitige Fläche«).

Utgående ifrån denna dubbelyta, kommer man till en annan grupp af ytstycken, hvilkas begränsning äfven bildas af tre räta linier och som icke utgöra speciella fall af de ytstycken, som bestämmas genom *Riemann*'s formler, genom att låta två af de begränsande räta linierna närma sig hvarandra ända tills de skära sig i en punkt P. I detta gränsfall öfvergår det dubbeltsammanhängande ytstycket i ett enkelt-sammanhängande, ifall man tänker sig sammanhanget upplöst emellan de två delarna af ytstycket, som endast hafva punkten P gemensam.

Begränsningen af ett ytstycke, hörande till denna grupp, bildas af två räta linier X och Y, som skära hvarandra under rät vinkel i en punkt P, samt en tredje rät linie Z, som står vinkelrät emot det plan, som bestämmes af de två förstnämda linierna. Betecknar man de två ifrån punkten P utgående delarna af de obegränsade linierna X och Y med X_1 och X_2, Y_1 och Y_2, samt tänker man sig dessa delar förflyttade i planet X, Y, så att sammanhanget i punkten P fullkomligt upplöses, men likväl så, att halflinierna X_1 och X_2 samt Y_1 och Y_2

förblifva parallela, och att vinklarna $X_1 Y_2$ och $Y_1 X_2$ med spetsarna P_1 och P_2 förblifva räta, så erbjuder sig det allmännare problemet att bestämma ett minimalytstycke, hvars fullständiga begränsning bildas af de fyra halflinierna X_1, X_2, Y_1, Y_2 samt en femte åt hvardera sidan obegränsad linie Z, som står vinkelrät emot de fyra halfliniernas plan. Härvid böra halflinierna X_1 och Y_1 i oändligheten förknippas med hvarandra genom ett ytstycke, som asymptotiskt närmar sig planet $X_1 Y_1$, hvaremot de i oändligheten liggande ändpunkterna af linien Z förenas med de oändligt aflägsna punkterna af halflinierna X_2 och Y_2 genom ytsektorer, som hafva karaktären af skrufytor.

Den sfäriska bilden af ett sålunda begränsadt ytstycke kan sammansättas af *sju* oktanter och på begränsningen af denna bild kunna *tre* singulära punkter uppträda.

De rätvinkliga koordinaterna x och y för en punkt på ytstycket uttryckas genom de reella delarna af elliptiska integraler af tredje arten, medan koordinaten z, som räknas parallel med linien Z, framställes såsom den reella delen af en algebraisk funktion af en komplex variabel.

I uttryckena för de rätvinkliga koordinaterna uppträda tre af hvarandra oberoende parametrar a, b, c. Genom en af dessa, t. ex. c, bestämmes förhållandet emellan afstånden från linien Z till linierna X_1 och Y_1. De två andra parametrarna kunna bestämmas så, att punkterna P_1 och P_2 sammanfalla. I detta gränsfall erhålles ett ytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier, nämligen linierna $X_1 + X_2 = X$ och $Y_1 + Y_2 = Y$, som skära sig, samt linien Z.

Betecknas koordinaterna för punkterna P_1 och P_2 med resp. $(x_1, y_1, 0)$ och $(x_2, y_2, 0)$, så framställer sig frågan för huru många värdesystem af parametrarna a och b ekvationerna $x_1 = x_2$ och $y_1 = y_2$ samtidigt satisfieras. Resultatet af en genomförd undersökning ger vid handen, att det finnes *två* värdesystem (a_1, b_1) och (a_2, b_2) som satisfiera ofvanstående två ekvationer.

Man ledes sålunda till två olika typer af ytstycken, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka två skära hvarandra, medan den tredje står vinkelrät emot de två första liniernas plan. Det ena värdesystemet (a_1, b_1) leder till en begränsning af den beskaffenhet att linierna $X_1 + X_2 = X$ och $Y_1 + Y_2 = Y$ äro obegränsade i hvardera riktningen. Det andra värdesystemet (a_2, b_2) leder till en begränsning, som består af två ifrån en punkt P utgående halflinier och en tredje linie Z, som står vinkelrät emot dessa halfliniers plan. Man har att tänka sig, att före gränsöfvergången $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

halflinierna X_2 och Y_2 hvardera öfvergått i deras motsatta riktningar och att således i gränsläget $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ half-linierna x_1 och x_2 samt likaså halflinierna Y_1 och Y_2 täcka hvarandra. På den analytiska fortsättningen af detta senare ytstycke uppträda de sammanfallande halflinierna $X_1 + X_2$ och $Y_1 + Y_2$ såsom dubbellinier i den bemärkelse, att genom hvarje punkt af dessa linier — punkten P undantagen — gå två distinkta ytelement. Det kan väl antagas att *Riemann*, då han stälde problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af räta linier, icke tänkt på dylika ytstycken med dubbellinier. Men dessa ytstycken kunna ej uteslutas, emedan desamma framträda, då några i en allmännare lösning ingående parametrar variera kontinuerligt.

Utgår man ifrån det gränsläge $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, som motsvarar parametersystemet (a_1, b_1), och betraktar man räta linien Z såsom en rörlig linie, hvilken ständigt förblir vinkelrät emot planet $X_1 + X_2 = X$, $Y_1 + Y_2 = Y$, och låter man denna linie Z närma sig en af de båda halflinierna X_1 eller Y_1, t. ex. Y_1, medan afståndet från den andra halflinien X_1 bibehåller ett värde som är större än noll, så uppstår i gränsfallet, då det förstnämda afståndet är lika med noll, eller då linien Z skär halflinien Y_1 i en punkt P_3, ett minimalytstycke, som består af två skilda ytstycken, hvilka *icke* äro delar af samma analytiska yta. Det ena ytstycket är ett stycke af en skrufyta, hvars axel utgöres af den rätliniga sträckan PP_3 af halflinien Y_1 och på hvilket halflinien X_2 och den ena från punkten P_3 utgående halflinien Z_1 äro alstrande linier. Det andra ytstycket begränsas af de från punkterna P och P_3 utgående fyra halflinierna X_1, Y_2 samt Z_2, Y_3, hvilken senare utgör en del af halflinien Y_1 och således ligger i förlängningen af Y_2. Ytstyckets begränsning bildas alltså af tre räta linier, af hvilka två, X_1 och Z_2 skäras under räta vinklar af den tredje linien $Y_2 + Y_3$, som är afbruten emellan punkterna P och P_3.

Till de tidigare (sid 173) omnämda fyra ytstyckena, hvilkas begränsning äfven utgjordes af tre räta linier, af hvilka två skäras af den tredje under räta vinklar kommer således nu ett femte ytstycke, som ej framgår ur *Riemann's* formler.

Frågan uppstår nu huruvida härmed alla ytstycken äro bestämda, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka två skära den tredje rätvinkligt.

Riemann behandlar bland exemplen på minimalytor, hvilkas begränsning är föreskrifven följande fall (sid 417):

»Es soll die Fläche vom kleinsten Inhalt bestimmt werden, welche begrenzt ist von drei Geraden, die sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen ins Unendliche verlaufenden Sector besitzt.«

Genom tillsatsen »so dass die Fläche ....«, som utgör en närmare bestämning på den sökta ytans form, begränsas problemet så, att man i det speciella fall, då de begränsande linierna äro parallela med koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem, kommer till endast ett stycke af en skrufyta, således till endast ett af de fyra ytstycken, som framgå ur *Riemanns* allmännare formler (sid 307). Icke heller *G. Darboux* har fört lösningen af detta speciella problem vidare. (Leçons sur la théorie générale des surfaces, sid 483. Paris 1887).

Fattadt i största allmänhet är problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier som äro parallela med koordinataxlarna i ett rätvinkligt system, oändligt mångtydigt. Vid behandlingen af problemet måste således vissa inskränkningar göres.

Riemann uppställde, såsom redan framhölls, fordran att amplituden af en sektor, som sträcker sig i oändligheten och har karaktären af en skrufyta, bör hafva storleken $\frac{\pi}{2}$. Denna fordren kommer i det följande att upprätthållas.

Ehuru *Riemann* ej tagit i betraktande ytstycken, på hvilkas analytiska fortsättning en eller flere af de begränsande linierna blifva dubbellinier, så vill jag dock på förut framhållna skäl tillåta antagandet att, då ett eller två af afstånden A, B, C äro lika med noll, en eller flere af de begränsande linierna kunna uppträda såsom dubbellinier på ytstyckets analytiska fortsättning. Däremot upptagas ej de fall till behandling, i hvilka en eller flere af de begränsande linierna blifva flerfaldiga linier på ytstyckets analytiska fortsättning.

Enär ett af de ytstycken, till hvilka de *Riemann*'ska formlerna leda, har en sektor med en amplitud af storleken $2 \cdot \frac{\pi}{2}$, hvarvid sektorns begränsning delvis bildas af två åt olika håll riktade delar af samma begränsande linie, så har vid det ifrågavarande speciella problemets behandling antagits, att de uppträdande sektorerna kunna hafva amplituden $2 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Under dessa antaganden har jag löst problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier X, Y och Z, af hvilka linien Z skär linierna X och Y under räta vinklar.

Undersökningen leder till det resultat, att de tre räta linierna bestämma icke mindre än *16* olika ytstycken, hvartill ännu strängt taget komma dessa ytors spegelbilder i ett af planen ZX eller ZY, betraktade såsom speglande plan. Bland dessa *16* ytstycken ingå de *4*, hvilka framgå ur *Riemann*'s formler. *Sex* af dessa ytstycken bestämmas genom de tre linierna med en och samma förknippning af liniernas oändligt aflägsna punkter

Prof. *H. A. Schwarz* torde vara den första som hänvändt uppmärksamheten på, att genom en och samma begränsning kan föras mer än ett minimalytstycke. Såsom exempel härpå betraktar Prof. *Schwarz* en sexhörning i rymden med två symmetriaxlar och visar, att genom densamma *tre* minimalytstycken äro bestämda.

Den analytiska behandlingen af de *12* nya ytstyckena, hvilka ej framgå ur *Riemanns* formler, försvåras genom den omständigheten, att de sfäriska bilderna af dessa ytor äro sammansatta antingen af 4, 5, 7, 9 eller 10 sfäriska oktanter, medan de sfäriska bilderna af de ytstycken, som framgå ur *Riemanns* formler, bildas af 1, 3, eller 5 oktanter.

Resultatet af den undersökning jag genomfört är följande.

Problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka hvar och en står vinkelrät emot riktningarna af de två öfriga, leder under vissa begränsande antagande (sid 177), förutom till de genom *Riemann*'s formler bestämda ytstyckena, till följande antal nya grupper af ytstycken eller til följande antal nya ytstycken.

I) Är intet af afstånden A, B, C emellan de tre begränsande linierna lika med noll, så föres man till endast *en* ny grupp ytstycken, förutsatt att hvarje begränsande linie bör vara en enkel linie på ytstyckenas analytiska fortsättning. Ytstyckena i denna grupp äro s. k. *dubbelytor* och äro dubbeltsammanhängande-

II) Är ett af afstånden A, B, C lika med noll, så ledes man till *tre* nya grupper af ytstycken. På den analytiska fortsättningen af ytstyckena, hörande till två af grupperna, äro de begränsande linierna *enkla* linier. Ytorna i den ena af dessa grupper äro *dubbelytor* med endast två sektorer af de resp. amplituderna $\frac{\pi}{2}$ och $2 \cdot \frac{\pi}{2}$. På den analytiska fortsättningen af ytstyckena, hörande til den tredje gruppen, äro *två* af de begränsande linierna *dubbellinier*.

III) Äro *två* af afstånden A, B, C lika med noll, så ledes man till *12* nya minimalytstycken eller inalles till *16* ytstycken genom samma tre räta linier. Af dessa ytstycken äro *10* så beskaffade, att de begränsande räta linierna äro *enkla* räta linier. På den analytiska fortsättningen af de öfriga *6* ytstyckena är antingen *en* eller ock äro *två* af de begränsande linierna *dubbellinier*.