Fünfter Artikel.

Über Anwendungen des Postulats der Stetigkeit in der elementaren Geometrie

von Giuseppe Vitali in Pisa.

§ 1. Das Postulat der Stetigkeit. Die Eigenschaften, die mit unseren anschaulichen Begriffen von Gerade, Ebene, Strecke, Winkel, Kongruenz verknüpft sind, finden ihre Formulierung in einem System von Postulaten[1]), die wenigstens in den gewöhnlichen Darstellungen an die Vorstellung, die wir uns von der Stetigkeit des Raumes machen, nicht appellieren.

Es gibt also noch andere anschauliche Tatsachen, die aus den vorher angegebenen nicht abgeleitet werden können; von diesen wollen wir einige Beispiele anführen.

1. Wenn in einer geraden Strecke sich zwei Punkte bewegen und dabei die Strecke im entgegengesetzten Sinne beschreiben, so begegnen sie sich in einem Punkte.

2. In der Ebene kann man sich eine geschlossene Kurve C denken, die die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, das eine das der inneren Punkte, das andere das der äußeren Punkte, in der Weise, daß, wenn A, B zwei Punkte der Ebene sind, von denen der eine ein innerer, der andere ein äußerer ist, die geradlinige Verbindungsstrecke AB der Punkte A und B mit der Kurve C mindestens einen Punkt gemeinsam hat.

3. Wenn in der Ebene eine geschlossene Kurve C gegeben ist, so hat eine beliebige Kurve, die einen inneren und einen äußeren Punkt für C enthält, mit C mindestens einen Punkt gemeinsam.

Diese und andere analoge anschauliche Eigenschaften berühren sich mit unserem rohen Begriff der Stetigkeit des Raumes. Es würde sicher schwer sein, genau all das anzugeben, was dieser zu-

1) Vgl. Art. 3, 4.

sammengesetzte Begriff in sich schließt; aber wir können verlangen, ihm irgend einen genau bestimmten Satz (der geeignet ist, als Postulat eingeführt zu werden) zu entnehmen, von dem aus sich die grundlegenden anschaulichen Eigenschaften herleiten lassen, die in unserem Geiste mit jenem Begriff in Verbindung stehen. Zu diesem Zwecke stellen wir die folgende Betrachtung an.

In einer geraden Strecke AB bestimmt ein Punkt C zwei Strecken AC, CB. Wenn man sich vornimmt, den Punkt C als einer einzigen der beiden Strecken AC, CB angehörig anzusehen, so hat man eine Zerlegung der Strecke AB in Teile, die nachstehende Eigenschaften besitzt:

1. Jeder Punkt der Strecke AB gehört einem der beiden Teile an.

2. Der Punkt A gehört einem Teile an (den wir den ersten nennen werden) und der Punkt B dem anderen; der Punkt C kann beliebig dem einen oder dem anderen Teile angehören, je nach der Festsetzung.

3. Jeder Punkt des ersten Teils geht jedem Punkte des zweiten Teils in der Reihenfolge AB der Strecke voraus.

Der Allgemeinheit wegen kann man auch den Fall in Betracht ziehen, in dem der Punkt C nach A oder nach B fällt.

Sieht man alsdann den Punkt C bzw. in beiden Fällen als dem ersten oder dem zweiten Teile angehörig an, so hat man auch eine Zerlegung in Teile, die den ausgesprochenen Eigenschaften genügt, wobei einer der Teile von dem Endpunkte A oder B der Strecke und der andere von allen übrigen ihrer Punkte gebildet wird.

Betrachtet man nun aufmerksam die Umkehrung des vorhergehenden Satzes, so sieht man, daß sie, obwohl sie logisch aus den in Artikel 3 ausgesprochenen Streckeneigenschaften nicht folgt, sich mit der Idee, die wir uns von der Stetigkeit der Geraden bilden, in Übereinstimmung befindet. Infolge hiervon werden wir das folgende Postulat[1]) annehmen.

Wenn eine gerade Strecke in zwei Teile zerlegt wird, in der Weise, daß:

1. jeder Punkt der Strecke AB einem der beiden Teile angehört,

2. der Endpunkt A dem ersten Teile und B dem zweiten angehört,

3. ein beliebiger Punkt des ersten Teils einem beliebigen Punkte des zweiten in der Reihenfolge AB der Strecke vor-

1) Vgl. R. Dedekind *„Stetigkeit und irrationale Zahlen“*. Braunschweig 1872.

angeht: so gibt es einen Punkt C der Strecke AB (der dem einen oder dem anderen Teile angehören kann) derart, daß jeder Punkt von AB, der C vorangeht, dem ersten Teile und jeder Punkt von AB, der auf C folgt, in der festgestellten Zerlegung dem zweiten Teile angehört.

Wenn einer der beiden Teile von dem Punkte A oder B allein gebildet wird, so ist C der genannte Endpunkt A oder B der Strecke.

Bemerkung. Das eingeführte Postulat kann man als der ersten der oben erwähnten anschaulichen Tatsachen entsprechend bezeichnen. In der Tat kann man die beiden Teile, in welche die Strecke AB zerlegt wird, als von zwei verschiedenen Punkten beschrieben denken, die sich im entgegengesetzten Sinne bewegen und dabei einander entgegengehen. Der Treffpunkt würde hier als beiden Teilen angehörig angesehen werden; aber man kann ihn sich auch dem einen allein zugeteilt (und dem andern weggenommen) denken, und das muß geschehen, um die über die gegebene Zerlegung in Teile aufgestellte Hypothese aufrecht zu erhalten. Das ausgesprochene Postulat heißt Postulat der Stetigkeit (oder von Dedekind).

Von dem soeben aufgestellten Postulat, das eine Eigenschaft gerader Strecken ausspricht, kann man auf logischem Wege eine analoge Eigenschaft für die Winkel ableiten.

Man weiß, daß man sich einen Winkel von einem Strahl beschrieben denken kann, der von seinem Scheitel ausgeht, oder als die Gesamtheit der Strahlen, welche die verschiedenen Lagen des beweglichen Strahles darstellen, der ihn beschreibt.

Wenn wir einen von den Strahlen a und b begrenzten konvexen Winkel betrachten und die Gerade ziehen, die einen Punkt A des Strahls a mit einem Punkte B des Strahls b verbindet, so sehen wir, daß die Punkte der begrenzten Strecke AB dieser Geraden gegenseitig eindeutig den Strahlen des Winkels entsprechen, wenn man als einem Strahl des Winkels entsprechend den Punkt ansieht, in dem dieser Strahl die Strecke AB trifft. Und es ist zu erkennen, daß, wenn man den Winkel als von einem beweglichen von a ausgehenden Strahl und entsprechend die Strecke AB von einem beweglichen von A ausgehenden Punkte erzeugt voraussetzt, die Punkte der Strecke AB einander in derselben Ordnung folgen wie die entsprechenden Strahlen des Winkels ab (Art. 3).

Hieraus folgt, daß, wenn man sich den Winkel ab in zwei Teile in der Weise zerlegt denkt, daß:

1. jeder Strahl des Winkels ab einem der beiden Teile angehört,
2. der Endstrahl a dem ersten Teile und b dem zweiten angehört,

3. ein beliebiger Strahl des ersten Teils einem beliebigen Strahl des zweiten vorangeht,

sich die entsprechenden Punkte der Strecke AB auch in der Weise in zwei Teile zerlegt finden, daß:

1. jeder Punkt der Strecke AB einem der beiden Teile angehört,
2. der Endpunkt A dem ersten Teile und B dem zweiten angehört,
3. ein beliebiger Punkt des ersten Teils einem beliebigen Punkte des zweiten vorangeht.

Aber nun gibt es einen Punkt C der Strecke AB (der dem einen oder dem andern der beiden Teile angehören kann) derart, daß jeder Punkt von AB, der C vorangeht, dem ersten Teile und jeder Punkt von AB, der auf C folgt, dem zweiten Teile in der aufgestellten Zerlegung angehört. Der Strahl c, der C entspricht, hat bezüglich der vorausgesetzten Zerlegung des Winkels ab in Teile die Eigenschaft, daß jeder Strahl des Winkels ab, der c vorangeht, dem ersten Teile angehört und jeder Strahl von ab, der auf c folgt, dem zweiten angehört. Der Strahl c wird dann den einzelnen Fällen gemäß dem einen oder dem andern Teile angehören.

Die für einen konvexen Winkel bewiesene Eigenschaft gilt offenbar auch für die gestreckten und die konkaven Winkel. Dabei kann man einen gestreckten oder konkaven Winkel sich als Vereinigung zweier anliegenden konvexen Winkel denken.

Wenn ad, db zwei derartige konvexe Winkel sind und also ab der ganze Winkel ist, den wir als in Teile zerlegt voraussetzen, in der Weise, daß:

1. jeder Strahl des Winkels einem der beiden Teile angehört,
2. der Endstrahl a dem ersten Teile und b dem zweiten angehört,
3. ein beliebiger Strahl des ersten Teils einem beliebigen des zweiten vorangeht, so bieten sich drei Hypothesen dar:

1. Der Strahl d ist derart, daß alle Strahlen, die ihm vorangehen, dem ersten Teile angehören und daß diejenigen, die ihm folgen, dem zweiten angehören;

2. dem Strahl d folgt irgendein Strahl des ersten Teils. In diesem Falle findet sich der Winkel db nach denselben Gesetzen, nach denen der Winkel ab in Teile zerlegt ist, in Teile zerlegt. Aber der Winkel db ist konvex und infolgedessen gibt es einen Strahl c des Winkels db (der dem einen oder dem andern der beiden Teile angehören kann) von der Eigenschaft, daß jeder Strahl von db, der

c vorangeht, dem ersten Teile angehört und jeder Strahl, der auf c folgt, dem zweiten angehört; dieser Strahl c ist, da in der Zerlegung des Winkels ab in Teile die Strahlen des Winkels ad sämtlich dem ersten Teile angehören, von der Eigenschaft, daß jeder Strahl von ab, der c vorangeht, in der aufgestellten Zerlegung des Winkels ab dem ersten Teile und jeder Strahl von ab, der auf c folgt, dem zweiten angehört.

3. dem Strahl d geht irgend ein Strahl des zweiten Teils voraus. In diesem Falle gelangt man durch Betrachtungen, die zu den im vorangehenden Falle angestellten analog sind (indem man den Winkel db mit dem Winkel ad vertauscht), auch zu der Schlußfolgerung, daß es einen Strahl des Winkels ab (der dem einen oder dem anderen Teile, in die der Winkel ab zerlegt wird, angehören kann) von der Eigenschaft gibt, daß jeder Strahl von ab, der c vorangeht, dem ersten Teile angehört und jeder Strahl, der auf c folgt, dem zweiten.

Ein dem eingeführten Postulat analoger Satz gilt auch für Kreisbogen.

Wir betrachten auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte O einen Bogen, dessen Endpunkte A und B seien. Die Punkte dieses Bogens kann man gegenseitig eindeutig den Strahlen entsprechen lassen, die von O aus- und durch sie hindurchgehen. Diese Strahlen erfüllen einen Winkel, der durch die von O ausgehenden und durch A und B hindurchgehenden Strahlen begrenzt wird; diese Strahlen werden wir mit a und b bezeichnen. Und hier ist zu erkennen, daß, wenn man sich den Winkel durch einen von a ausgehenden beweglichen Strahl und entsprechend den Bogen AB durch einen von A ausgehenden beweglichen Punkt erzeugt denkt, die Strahlen des Winkels ab einander in derselben Ordnung folgen wie die Punkte des Bogens AB.

Hieraus folgt, daß, wenn man sich den Bogen AB in zwei Teile zerlegt denkt in der Weise, daß:

1. jeder Punkt des Bogens einem der beiden Teile angehört,

2. der Endpunkt A dem ersten Teile und B dem zweiten angehört,

3. ein beliebiger Punkt des ersten Teils einem beliebigen Punkte des zweiten vorangeht,

sich die entsprechenden Strahlen des Winkels ab auch in zwei Teile zerlegt finden, in der Weise, daß:

1. jeder Strahl des Winkels einem der beiden Teile angehört,

2. der Endstrahl a dem ersten Teile und b dem zweiten angehört,

3. ein beliebiger Strahl des ersten Teils einem beliebigen Strahl des zweiten vorangeht.

Aber nun gibt es einen Strahl c des Winkels ab (der dem einen oder dem andern Teile angehören kann) derart, daß jeder Strahl von ab, der c vorangeht, dem ersten Teile und jeder Strahl von ab, der auf c folgt, dem zweiten Teile angehört. Der Punkt C, in dem der Strahl c den Bogen AB trifft, hat in bezug auf die Zerlegung des Bogens AB in Teile die Eigenschaft, daß jeder Punkt des Bogens AB, der C vorangeht, dem ersten Teile und jeder Punkt des Bogens AB, der auf C folgt, dem zweiten angehört. Der Punkt C wird dann, den Fällen entsprechend, dem einen oder dem andern Teile angehören.

Erörterungen, die den vorangehenden ganz ähnlich sind, würden zu analogen Sätzen führen für Flächenwinkel, für Streifen der Ebene, die von zwei Parallelen eingeschlossen sind, und für Schichten des Raumes, die von zwei parallelen Ebenen eingeschlossen sind.

§ 2. Teilbarkeit der Strecke und des Winkels. Die erste Anwendung, die wir vom Postulat von Dedekind machen wollen, wird der Beweis der Teilbarkeit der Strecke in n gleiche Teile sein, ein Beweis, der von der gewöhnlichen Konstruktion, die sich auf das Parallelenpostulat gründet, unabhängig ist.

In ganz analoger Weise wird man die Teilbarkeit des Winkels oder des Kreisbogens in n gleiche Teile beweisen, indem man in der auf die Strecke bezüglichen Erörterung die Worte Punkt und Strecke durch die Worte Strahl und Winkel oder beziehungsweise durch die Worte Punkt und Bogen ersetzt.

Vor allem bemerken wir, daß es auf Grund der Postulate der Kongruenz (Art. 4) gelingt, die Teilbarkeit der Strecke, des Winkels und des Kreisbogens in zwei und demgemäß in 2^p gleiche Teile zu beweisen.

Die Zweiteilung kann man in der Tat erhalten:

1. für die Strecke AB, indem man (in einer Ebene durch AB) zwei gleiche Strecken AC, BD konstruiert, die auf AB senkrecht stehen und auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen, und dann den Schnittpunkt der Strecke CD mit AB in Betracht zieht,

2. für den Winkel, indem man auf seinen Schenkeln vom Scheitel aus zwei gleiche Strecken annimmt und die Grundlinie des so bestimmten gleichschenkligen Dreiecks halbiert,

3. für den Kreisbogen, indem man auf den Zentriwinkel zurückgeht.

Wir beweisen die Teilbarkeit der Strecke in n gleiche Teile, wenn das Postulat der Stetigkeit gegeben ist.

AB sei eine gerade Strecke und n eine ganze Zahl. Ich behaupte, daß es eine Strecke von der Art gibt, daß ihr n-faches gleich der Strecke AB ist. Hierzu denken wir die Strecke AB von A nach B geordnet und in der Weise in zwei Teile zerlegt, daß man, wenn H ein Punkt des ersten Teils ist, $nAH < AB$ hat, und wenn K ein Punkt des zweiten Teils ist, $nAK \geqq AB$ hat. Es ist offenbar, daß die Zerlegung in Teile den Bedingungen für die Anwendbarkeit des Postulats von Dedekind genügt und daß es demgemäß einen Punkt M derart gibt, daß jeder Punkt von AM dem ersten Teile und jeder Punkt von MB dem zweiten Teile angehört. Ich behaupte, daß $n \cdot AM = AB$ ist.

Nehmen wir an, es sei z. B. $n \cdot AM < AB$. In diesem Falle würde innerhalb der Strecke AB ein Punkt C liegen derart, daß $n \cdot AM = AC$ ist. Wir nehmen hinter M einen Punkt M' derart, daß $n \cdot MM' < CB$ ist (was man offenbar machen kann). Man wird alsdann $n \cdot AM + n \cdot MM' < AC + CB$ oder $n \cdot AM' < AB$ haben, was unmöglich ist, da der Punkt M' auf den Punkt M folgt und deshalb $n \cdot AM' > AB$ sein muß.

Also kann nicht $n \cdot AM < AB$ sein. In analoger Weise schließt man, daß nicht $n \cdot AM > AB$ ist. Also haben wir ohne weiteres $n \cdot AM = AB$. Wie wir bemerkt haben, beweist man in analoger Weise die Teilbarkeit des Winkels oder des Kreisbogens in n gleiche Teile.[1])

Aus der Möglichkeit, eine gerade Strecke und einen Winkel in n gleiche Teile zu zerlegen, folgt auch die Möglichkeit, einen Streifen, eine Schicht und einen Flächenwinkel in n gleiche Teile zu zerlegen. Offenbar aber würde man auf jede dieser Figuren auch die allgemeine Schlußweise anwenden können.

§ 3. Satz des Archimedes. Ein zweiter Satz, den man als Anwendung des Postulats von Dedekind beweist, ist derjenige, den man gewöhnlich mit dem Namen Postulat von Archimedes bezeichnet. Seine Fassung ist die folgende:

Sind zwei Strecken gegeben, so gibt es immer ein Vielfaches der einen, das größer ist als die andere.

Um dies zu beweisen, beginnen wir damit, eine der Strecken auf der Geraden der anderen in der Weise abzutragen, daß sie einen End-

1) Diese Teilbarkeit kann man nicht unabhängig von der Stetigkeit beweisen, auch wenn man alle Postulate zuläßt, die den gewöhnlichen Konstruktionen der Elementargeometrie zugrunde liegen, weil die Teilung mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar ist (vgl. Art. 7 im II. Teil).

punkt gemeinsam haben und beide auf derselben Seite von diesem Endpunkte liegen. Hiernach seien z. B. AB und AC die beiden Strecken und $AB < AC$ (Fig 31). Wir müssen beweisen, daß es eine ganze Zahl n gibt, für die man $n \cdot AB > AC$ hat.

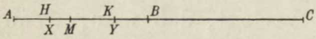

Fig. 31.

Setzen wir voraus, daß dies nicht der Fall sei; dann gibt es auf der Strecke AC Punkte B (die nicht mit dem Endpunkte A zusammenfallen) von der Eigenschaft, daß, wenn man eine beliebig große Zahl n wählt, $n \cdot AB < AC$ ist.

Wir stützen uns auf die vorangehende Annahme, um zu zeigen, daß sie zu einem Widerspruch führt.

Die Punkte der Strecke AC kann man sich in zwei Teile zerlegt denken:

1. Punkte H, für die es keine (ganze) Zahl n derart gibt, daß $n \cdot AH > AC$ ist,

2. Punkte K, für die es (ganze) Zahlen gibt, für die $n \cdot AK > AC$ ist. Diese Zerlegung in Teile genügt den Bedingungen für die Anwendung des Postulats von Dedekind, und demgemäß gibt es einen Punkt M derart, daß die Punkte von AM dem ersten Teile und diejenigen von MC dem zweiten Teile angehören. Nimmt man alsdann auf MC einen Punkt Y derart, daß $MY > AM$ ist, so wird die Mitte X von AY in AM fallen und deshalb dem ersten Teile angehören; aber da es eine (ganze) Zahl n gibt, für die $n \cdot AY > AC$ ist, so hat man $2n \cdot AX > AC$.

Dieser Widerspruch beweist den Satz von Archimedes. Den dargelegten Beweis verdankt man Stolz.

Aus dem Satz von Archimedes ergibt sich der folgende:

Zusatz. Sind zwei Strecken AB und CD gegeben, so gibt es immer irgendeinen aliquoten Teil der ersten, der kleiner als die zweite ist.

In der Tat gibt es ein Vielfaches $n \cdot CD$ von CD, das größer als AB ist. Der n^{te} Teil von AB ist also kleiner als CD.

§ 4. Andere Formen des Postulats der Stetigkeit. Nicht-Archimedisches Kontinuum. Wir wollen an diesem Punkte einen Exkurs einschieben, um andere Formen zu besprechen, die dem Postulat der Stetigkeit gegeben werden können. Anstatt die Formulierung von Dedekind zu wählen, kann man das folgende Postulat annehmen.

Wenn es zwei Klassen von geraden Strecken gibt derart, daß

1. keine Strecke der ersten Klasse größer als irgendeine Strecke der zweiten Klasse ist, daß ferner,

2. wenn eine beliebige kleine Strecke σ vorher festgesetzt ist, es eine Strecke der ersten und eine der zweiten Klasse gibt, deren Differenz kleiner als σ ist, so gibt es eine Strecke, die weder kleiner als irgendeine Strecke der ersten Klasse noch größer als irgendeine Strecke der zweiten ist.

Dies ist eine Folge des Postulats von Dedekind. In der Tat sei vorausgesetzt, daß wir zwei Klassen gerader Strecken von der Art haben, daß:

1. keine Strecke der ersten Klasse kleiner als irgendeine Strecke der zweiten ist,

2. daß, wenn eine beliebige kleine Strecke σ vorher festgesetzt ist, es eine Strecke der ersten Klasse und eine der zweiten gibt, deren Differenz kleiner als σ ist.

Wir werden dann eine Strecke AB der zweiten Klasse in Betracht ziehen und von der zweiten Klasse alle Strecken vernachlässigen können, die größer als AB sind. Die Strecken der ersten Klasse und die dieser so eingeschränkten zweiten Klasse wird man durch Punkte der Strecke AB darstellen können, wobei ein Punkt M von AB eine Strecke einer jener Klassen darstellt, wenn jene Strecke der Strecke AM gleich ist.

So haben wir auf der Strecke AB zwei Klassen von Punkten, die uns gestatten, die Strecke selbst in zwei Teile zu zerlegen, indem man der einen die Punkte zuteilt, die in der Ordnung AB der Strecke irgendeinem Punkte der ersten Klasse vorangehen, und der zweiten die übrigen. Diese Zerlegung der Strecke AB in zwei Teile genügt offenbar den Bedingungen, unter denen das Postulat von Dedekind anwendbar ist, und demgemäß können wir sagen, daß es einen Punkt C (der diesmal sicher dem zweiten Teile angehört) von der Eigenschaft gibt, daß jeder Punkt von AB, der C vorangeht, dem ersten Teile angehört und jeder andere übrigbleibende Punkt dem zweiten.

Die Strecke AC ist offenbar nicht kleiner als irgendeine Strecke der ersten gegebenen Klasse und auch nicht größer als irgendeine der zweiten. Aber wir können weiter hinzufügen, daß sie die einzige ist, die diese Eigenschaft besitzt; denn wenn eine andere von AC verschiedene Strecke AD dieser Bedingung genügte, so würden die

Strecken der beiden Klassen nicht der zweiten Bedingung gehorchen; und in der Tat würde es nicht eine Strecke der ersten Klasse und eine der zweiten geben, deren Differenz kleiner wäre als die Differenz, die zwischen AC und AD besteht.

So folgt auch das Postulat von Dedekind aus dem in diesem Paragraphen ausgesprochenen, wenn man noch das Postulat von Archimedes voraussetzt. In der Tat sei AB eine Strecke, die in zwei Teile zerlegt sei, wie es vom Postulat von Dedekind verlangt ist. Setzt man eine beliebig kleine Strecke σ fest, so wird es möglich sein, einen aliquoten Teil von AB zu finden, der kleiner als σ ist (S. § 3). Dieser sei $\frac{AB}{n}\cdot$ Wir teilen AB in n untereinander gleiche Teile. Sehen wir die beiden Endpunkte als jeder dieser Strecken angehörig an, so können wir leicht schließen, daß es unter ihnen eine und nur eine gibt, die Punkte der beiden Teile enthält, in die AB zerlegt ist. Nimmt man in dieser Strecke einen Punkt des einen und einen Punkt des andern Teils, so sieht man, daß diese Punkte einen Abstand haben, der kleiner als σ ist; hieraus kann man schließen, daß es, wenn man eine beliebig kleine Strecke vorher festsetzt, möglich ist, einen Punkt des ersten und einen des zweiten Teils zu finden, deren Abstand kleiner als σ ist. Nun lassen wir jedem Punkte von AB die gerade Strecke entsprechen, die ihn mit A verbindet. Wir erhalten in dieser Weise zwei Klassen von Strecken, die den Punkten der beiden Teile entsprechen, in die AB zerlegt ist. Diese beiden Klassen von Strecken sind derart, daß

1. keine Strecke der ersten Klasse größer ist als irgendeine Strecke der zweiten, daß

2., wenn eine beliebig kleine Strecke σ vorher festgesetzt ist, es eine Strecke der ersten und eine der zweiten Klasse gibt, deren Differenz kleiner als σ ist; also gibt es eine Strecke δ, die nicht kleiner als irgendeine Strecke der ersten Klasse und auch nicht größer als irgendeine der zweiten ist. Es sei M ein Punkt von AB derart, daß $AM = \delta$ ist. Jeder Punkt von AB, der M vorausgeht, gehört dem ersten Teile an und jeder Punkt, der auf M folgt, dem zweiten. Außerdem ist M der einzige Punkt, der diese Eigenschaft besitzt.

Wenn man dagegen vom Postulat des Archimedes absieht, so ist das in diesem Paragraphen ausgesprochene Postulat nicht mehr dem von Dedekind gleichwertig.

In der Tat sei AB eine Strecke, die in der Weise in zwei Teile zerlegt ist, daß:

1. jeder Punkt der Strecke AB einem der Teile angehört,

2. der Endpunkt A dem ersten Teil und B dem zweiten angehört,

3. ein beliebiger Punkt des ersten einem beliebigen Punkte des zweiten in der Reihenfolge AB der Strecke vorausgeht.

Dann können wir jedem Punkte von AB die Strecke entsprechen lassen, die ihn mit A verbindet. In dieser Weise erhalten wir zwei Klassen von Strecken, entsprechend den Punkten der beiden Teile, in die AB zerlegt ist. Diese beiden Klassen und Strecken sind von der Art, daß *keine Strecke der ersten Klasse größer als irgendeine Strecke der zweiten Klasse ist*; aber man kann nicht sagen, daß es, wenn eine beliebig kleine Strecke σ vorher festgesetzt ist, eine Strecke der ersten Klasse und eine der zweiten gibt, deren Differenz kleiner als σ ist; also können wir uns nicht des in diesem Paragraphen ausgesprochenen Postulats bedienen, um das von *Dedekind* zu beweisen.

Um den Unterschied der Tragweite der beiden Sätze noch besser klar zu stellen, betrachten wir zwei parallele Strahlen von demselben Richtungssinn, die von zwei Punkten A und B ausgehen, deren Verbindungslinie nicht die Richtung jener Strahlen hat (Fig. 32), und weiter betrachten wir insbesondere die Gesamtheit der Punkte dieser Strahlen, die in endlicher Entfernung liegen.

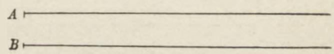

Fig. 32.

Wenn wir uns die Punkte des ersten Strahls geordnet denken in der natürlichen Ordnung, die von A ins Unendliche geht, und diejenigen des zweiten Strahls in der Ordnung, die der natürlichen entgegengesetzt ist, und wenn wir endlich voraussetzen, daß jeder Punkt des ersten Strahls jedem Punkte des zweiten vorangeht, so können wir die Gesamtheit dieser Punkte als eine Strecke auffassen, die von A nach B geht. Für diese Strecke gilt offenbar in allen Fällen das Postulat der Stetigkeit in der zweiten Form. Dagegen würde das in § 1 eingeführte Postulat nicht immer gelten und zwar gerade für die Zerlegung von AB in zwei solche Teile, daß dem ersten Teile alle Punkte des ersten Strahls und nur diese angehören. In der Tat gibt es für diese Zerlegung nicht einen Punkt, der die beiden Teile trennt. Wenn man außerdem weiter annimmt, wie wir es stillschweigend in § 3 getan haben, daß die Punkte einer geraden Strecke sämtlich in endlicher Entfernung sind, so sieht man, daß das Beispiel der Strecke, die der vorangehenden Figur entspricht, auch nicht unmöglich ist, auch wenn das zweite Postulat der Stetigkeit vorausgesetzt wird; aber seine Unverträglichkeit mit dem ersten Postulat würde außerordentlich groß werden, sobald es nicht möglich würde, sie durch Hinzufügung eines Punktes, der die beiden Strahlen trennt, aufzuheben.

In dem Vorangehenden haben wir bemerkt, daß das Postulat von Dedekind mit dem in diesem Paragraphen eingeführten Postulat (Postulat von Cantor) und dem von Archimedes gleichwertig ist. Indem wir nun das vorhin gegebene Beispiel ein wenig abändern, können wir mit Veronese ein Nicht-Archimedisches Kontinuum herstellen, durch das die gewöhnlichen Postulate der Anordnung und der Kongruenz befriedigt werden.

Zu diesem Zweck betrachten wir ein System von unendlich vielen parallelen Geraden, die einander wie in der beigefügten Figur (Fig. 33) in konstanten Abständen folgen.

Wir können die Punkte dieser Geraden ordnen, indem wir sie so betrachten, daß sie ein einheitliches Ganze bilden in der Weise, daß man jeden Punkt B, der von einem Punkte A aus auf derselben Geraden nach rechts fällt, als auf A folgend ansehen kann und jeden Punkt C, der höher ist als A, auch als auf ihn folgend ansehen muß. Alsdann liefert uns unser System von Geraden ein System, das wie das System der Punkte einer offenen Linie angeordnet ist; und weiter kann man in ihm die Kongruenz (endlicher und unendlicher) Strecken auf Grund des Umstandes definieren, daß das System durch eine Verschiebung der Ebene, bei der man einen Punkt nach irgend einem anderen bringt, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann.

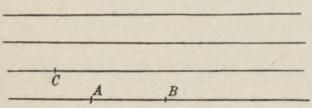

Fig. 33.

Das konstruierte System stellt ein Nicht-Archimedisches Kontinuum dar, das den Postulaten der Anordnung, der Kongruenz und dem Postulat von Cantor vollständig genügt.

Man kann auch die Unabhängigkeit des Postulats von Archimedes von der Gesamtheit der Postulate der Anordnung, der Kongruenz und des Einanderangehörens (der Verknüpfung) beweisen, indem man umgekehrt eine Nicht-Archimedische Geometrie einer Dimension, eine Nicht-Archimedische Geometrie der Ebene und des Raumes konstruiert. Diese von Veronese klar gestellte Konstruktion ist neuerdings von Hilbert wiederaufgenommen worden, dessen hervorragende Entwicklungen die auf die Grundlagen der Geometrie bezüglichen Untersuchungen neu belebt haben. Aber wir wollen uns auf diesem Gebiete nicht weiter aufhalten und wir beabsichtigen, indem wir nunmehr das Postulat der Stetigkeit in der Form von Dedekind wieder aufnehmen, daraus andere Folgerungen auf dem Gebiet der Elementargeometrie zu entwickeln.

§ 5. Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise. Eine andere Tatsache, die man auch durch Anwendung des Postulats von Dedekind beweist, ist die folgende:

Wenn eine Gerade einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb eines Kreises enthält, so hat sie mit dem Kreise zwei Punkte gemeinsam.[1])

Bevor wir den Beweis entwickeln, bemerken wir, daß man auf Grund der Postulate der Kongruenz (Art. 4) als bekannt ansehen kann die Eigenschaften, die sich auf senkrechte und schiefe Strecken beziehen, Folgerungen des Satzes: „Wenn ein Dreieck einen rechten oder stumpfen Winkel besitzt, so ist die ihm gegenüberliegende Seite größer als jede der beiden andern“, und außerdem die Eigenschaft, nach der „in einem Dreieck eine Seite kleiner als die Summe der beiden andern ist“, und dies unabhängig vom Parallelenpostulat.

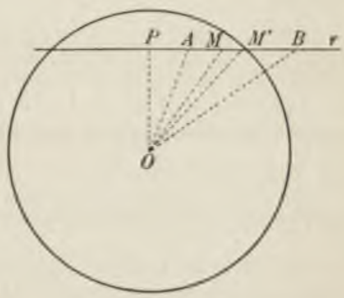

Fig. 34.

Nun betrachten wir einen Kreis C mit dem Mittelpunkte O und eine Gerade r, die den Punkt A innerhalb und den Punkt B außerhalb des Kreises enthält und die man als nicht durch O gehend voraussetzen kann. Nach der Definition hat man, wenn R der Radius des Kreises ist, $OA < R$, $OB > R$.

Wir ziehen von O auf die Gerade r die Senkrechte OP (Fig. 34). Da in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete immer kleiner als die Hypotenuse ist, so wird man (wenn P von A verschieden ist) haben

$$OP < OA,$$

und demgemäß in jedem Falle

$$OP < R,$$

oder P liegt innerhalb des Kreises.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die begrenzte Strecke PB. Sie kann in zwei Teile zerlegt werden, indem man in den ersten Teil

1) Dieser Satz erscheint in den Elementen von Euklid implizite wie ein Postulat. Übrigens kann er nicht aus den auf die Kongruenz bezüglichen Postulaten abgeleitet werden, die den mit dem Streckenübertrager ausführbaren Konstruktionen entsprechen und demgemäß nur einen besonderen Fall von ihm festzustellen gestatten, nämlich den Fall, in dem die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises geht. (Vgl. Art. 4 in II.)

die Punkte H setzt, für die $OH < R$ ist (innere Punkte für C), in den zweiten Teil die Punkte K, für die $OK \geqq R$ ist (Punkte außerhalb C oder auf C).

Erinnern wir uns nun, daß von zwei schiefen Strecken, die von einem und demselben Punkte nach einer Geraden gezogen sind, diejenige die größere ist, welche die größere Projektion hat, so können wir feststellen, daß alle Punkte der Strecke PB, die einem für C inneren Punkte vorangehen, für C innere sind und diejenigen, die einem auf C oder außerhalb von C gelegenen Punkte folgen, äußere Punkte für C sind. Aber dann gibt es nach dem Postulat der Stetigkeit auf der Strecke PB einen Punkt M von der Eigenschaft, daß alle Punkte, die ihm vorangehen, dem ersten Teile angehören und diejenigen, die ihm folgen, dem zweiten.

Ich behaupte, daß der Punkt M der Geraden r und dem Kreise C gemeinsam ist oder daß

$$OM = R$$

ist.

Nehmen wir z. B. an, es sei $OM < R$. Es wird dann eine Strecke σ geben, die kleiner als die Differenz zwischen R und OM ist. Wir betrachten den nach M folgenden Punkt M', für den

$$MM' = \sigma$$

ist.

Es ist sicher

$$OM' < OM + MM',$$

da eine Seite eines Dreiecks kleiner als die Summe der beiden anderen ist; aber es ist

$$OM + MM' = OM + \sigma < R,$$

also

$$OM' < R,$$

was unmöglich ist. In analoger Weise würde man zu einem Widerspruch gelangen, wenn man annehmen wollte, daß

$$OM > R$$

ist.

Man muß also, wie man wollte, schließen, daß

$$OM = R$$

ist.

Nachdem so bewiesen ist, daß es auf der begrenzten Strecke einen Punkt M gibt, der der Geraden r und dem Kreise C gemeinsam ist, sieht man sofort, daß es noch einen anderen Punkt gibt, der diese Eigenschaft besitzt, und daß er zu M in bezug auf P symmetrisch ist; daher können wir schließen, daß ein Kreis und eine Gerade, die durch einen inneren (und einen äußeren) Punkt von ihm geht, zwei Punkte gemeinsam haben.

§ 6. Schnittpunkte zweier Kreise. Eine zur vorhergehenden analoge Frage bietet sich für die Schnittpunkte zweier Kreise dar. Man hat den Satz:

Wenn in einer gegebenen Ebene ein Kreis C einen Punkt X enthält, der für einen anderen Kreis C' ein innerer ist, und einen Punkt Y, der ein äußerer ist, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten.

Beweis. Es seien O und O' die Mittelpunkte der beiden Kreise und R und R' ihre Radien. Die Gerade OO' trifft den Kreis C in zwei Punkten A und B. Offenbar ist von diesen Punkten einer ein innerer für C' und der andere ein äußerer.

In der Tat befinden sie sich auf der Geraden OO' auf verschiedenen Seiten von O. Es sei A derjenige, der sich auf der Seite von O' befindet. Die Strecke AO' wird gleich der Differenz der beiden Strecken OO' und R sein und dagegen wird $BO' = OO' + R$ sein.

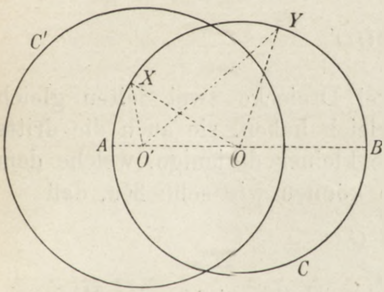

Fig. 35.

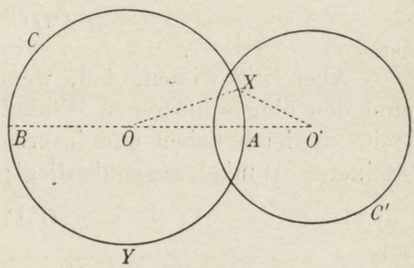

Fig. 36.

Aus dem Dreieck $OO'X$ (Fig. 35 u. 36) folgt, daß $O'X$ größer ist als die Differenz, die zwischen OO' und R besteht, und deshalb größer als OA. Aber $O'X$ ist kleiner als R', also ist $O'A$ kleiner als R' und A ist für C' ein innerer Punkt. Andererseits hat man aus dem Dreieck $OO'Y$ (Fig. 35)

$$O'Y < OO' + OY$$

oder

$$O'Y < OO' + R$$

und deshalb

$$O'Y < O'B.$$

Aber es ist

$$O'Y > R',$$

also

$$O'B > R$$

und B ist für C' ein äußerer Punkt.

Der Kreis C wird von den Punkten A und B in zwei Halbkreise zerlegt (Fig. 37). Betrachten wir einen beliebigen von ihnen und denken wir uns ihn (um einen Sinn festzulegen) von einem Punkte beschrieben, der sich von A nach B bewegt. Nehmen wir dann auf ihm zwei getrennte Punkte P und Q und setzen wir (um die Ideen zu fixieren) voraus, daß P vor Q vorangeht. Vergleichen wir die beiden Dreiecke $OO'P$, $OO'Q$, so sehen wir, daß sie die Seite OO' gemeinsam haben, daß

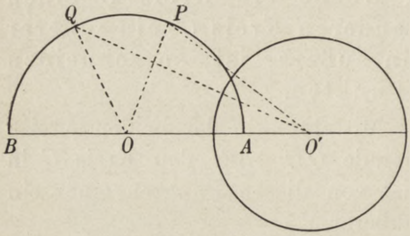

Fig. 37.

$$OP = OQ$$

und daß endlich

$$P\hat{O}O' < Q\hat{O}O'$$

ist.

Aber wir wissen, daß, wenn zwei Dreiecke zwei Seiten gleich und den eingeschlossenen Winkel ungleich haben, sie auch die dritte Seite ungleich haben und insbesondere kleiner diejenige, welche dem kleineren Winkel gegenüberliegt; also können wir schließen, daß

$$O'P < O'Q$$

ist.

Wenn man nun aber den genannten Halbkreis in der Weise in zwei Teile zerlegt denkt, daß die Punkte des ersten Teils für C' innere und diejenigen des zweiten für C' äußere sind oder auf C' liegen, so sieht man, daß die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Postulats von Dedekind[1]) erfüllt sind und daß es demgemäß einen Punkt M gibt, der die beiden Teile trennt. Ich behaupte, daß $O'M = R'$ ist. In der Tat nehmen wir an, es sei im Gegensatz hierzu z. B. $O'M < R'$. Alsdann nehmen wir, wenn mit σ die Differenz zwischen R' und $O'M$ bezeichnet wird, auf dem Halbkreise einen

1) In § 1 ist bewiesen, daß das von Dedekind für gerade Strecken ausgesprochene Postulat auch für den Kreisbogen gilt.

Punkt M', der nach M folgt und die Eigenschaft hat, daß MM' nicht σ übertrifft.[1])

Aus dem Dreieck $O'MM'$ würde man erhalten

$$O'M' < O'M + MM' \leq O'M + \sigma$$

und also

$$OM' < R'.$$

Aber dann würde ein Punkt M' des Bogens MB für C' ein innerer sein, was unmöglich ist. Man erkennt, daß aus einer ähnlichen Schlußfolgerung hervorgehen würde, daß nicht $O'M > R'$ sein kann. Damit ist bewiesen, daß jeder der beiden Halbkreise, in die wir den Kreis zerlegt haben, den Kreis C' in einem Punkte trifft und daß folglich die beiden Kreise C und C' zwei Punkte gemeinsam haben. W. z. b. w.

Bemerkung. Eine andere Art, denselben Satz zu beweisen, würde man erhalten, wenn man die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kreise auf diejenige der Schnittpunkte eines der Kreise mit einer Geraden, der Radikalachse (Potenzlinie, Chordale) der beiden, zurückführt (vgl. Art. 3 in Teil II).

§ 7. Es ist bekannt, daß die einem einfachen anschaulichen Verfahren angepaßte Übereinkunft, auf Grund deren man die Länge der Kreislinie definiert, auf dem Satze beruht:

Für jede Kreislinie gibt es eine Strecke, die größer als die Umfänge aller einbeschriebenen Vielecke und kleiner als die Umfänge aller umbeschriebenen Vielecke ist.

Um ihn zu beweisen, wird man zunächst bemerken können, daß, da ein beliebiges einbeschriebenes Vieleck in jedem umbeschriebenen

---

1) Um einen solchen Punkt zu finden, wird man wie folgt vorgehen, (Fig. 38):

1. Wir ziehen durch M eine von OM verschiedene Gerade und nehmen auf dieser eine Strecke MP an, die gleich der Hälfte von σ ist. 2. Wir verbinden O mit P und konstruieren einen anderen Strahl OQ in der Weise, daß der Winkel POQ dem Winkel MOP gleich wird.

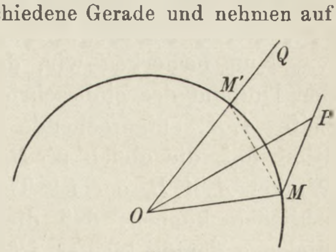

Fig. 38.

Der Punkt M', der Schnitt des Halbkreises mit OQ, ist grade ein solcher, daß $MM' < \sigma$ ist.

In der Tat trifft die Gerade MM' den Strahl OP in einem Punkte R rechtwinklig, und aus dem rechtwinkligen Dreieck MRP folgt $MR < MP$ (das Zeichen der Gleichheit gilt nur, wenn R mit P zusammenfällt) oder $MR \leq \frac{\sigma}{2}$. Aber MR ist die Hälfte von MM', also $MM \leq \sigma$.

Vieleck enthalten ist, der Umfang eines beliebigen der ersteren kleiner ist als der Umfang eines beliebigen der anderen. Es bleibt also zu beweisen, daß es für jede beliebig kleine Strecke ε ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes Vieleck gibt, deren Umfänge eine Differenz haben, die kleiner als ε ist.

Wir beginnen mit dem Beweise des Satzes:

Die Differenz zwischen den Umfängen der regelmäßigen einem Kreis ein- und umbeschriebenen Vielecke von $\mathfrak{n}$ Seiten ist kleiner als das Doppelte der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks, das den Umfang des einbeschriebenen Vielecks zur Grundlinie und je den $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teil von zwei Rechten zu gleichen Basiswinkeln hat. (S. Elementi di Geometria von Enriques und Amaldi. S. 362 u. f.)

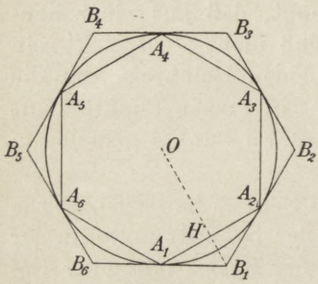

Fig. 39.

Es seien $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ die dem Kreise ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke. Die Dreiecke $A_1 B_1 A_2$, $A_2 B_2 A_3 \ldots$ sind gleich (kongruent). Fällt man von B_1 die Höhe $B_1 H$ auf $A_1 A_2$, so haben wir

$$B_1 H > A_1 B_1 - A_1 H, \quad B_1 H > A_2 B_1 - A_2 H$$

und demgemäß

$$2 B_1 H > A_1 B_1 + A_2 B_1 - (A_1 H + A_2 H)$$

oder

$$2 B_1 H > A_1 B_1 + A_2 B_1 - A_1 A_2$$

Man addiere Glied für Glied zu dieser Ungleichung die übrigen $n - 1$ analogen Ungleichungen, die den anderen $n - 1$ Dreiecken entsprechen, und man wird erhalten, daß die Differenz der beiden Vielecke kleiner als $2\mathfrak{n} \cdot B_1 H$ ist.

Nun bemerken wir, daß ein zu $A_1 A_2 B$ ähnliches Dreieck, das den Umfang des einbeschriebenen Vielecks oder $\mathfrak{n} \cdot A_1 A_2$ als die der Seite $A_1 A_2$ entsprechende Seite hat, eine zu dieser Seite gehörige Höhe hat, die gleich $\mathfrak{n} \cdot B_1 H$ ist; außerdem bemerken wir, daß der Winkel $A_2 A_1 B_1$ der $\mathfrak{n}^{\text{te}}$ Teil von zwei Rechten ist, und wir werden schließen können, daß die Differenz der Umfänge der betrachteten Vielecke gerade kleiner ist als das Doppelte der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks, das den Umfang des einbeschriebenen Vielecks zur Grundlinie und je den $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teil von zwei Rechten zu gleichen Basiswinkeln hat. W. z. b. w.

Der Umfang eines einbeschriebenen Vielecks ist immer kleiner als vier Durchmesser, weil vier Durchmesser der Umfang des umbeschriebenen Quadrats sind. Außerdem hat von zwei ähnlichen Dreiecken dasjenige die größere Höhe, das die größeren Seiten hat. Es gilt also der

Zusatz: Die Differenz der Umfänge der einem Kreise ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke von $\mathfrak{n}$ Seiten ist kleiner als das Doppelte der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks, das vier Durchmesser zur Grundlinie und je den $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teil von zwei Rechten zu gleichen Basiswinkeln hat.

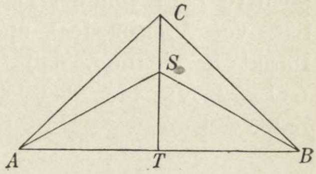

Fig. 40.

Es sei AB eine vier Durchmessern gleiche Strecke und ε eine andere beliebig kleine Strecke. Wir konstruieren über AB ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe CT gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ sei. Ist $\mathfrak{n}$ so groß, daß man

$$\mathfrak{n} \cdot \widehat{BAC} > 2R \quad \text{oder} \quad \widehat{BAC} > \frac{2R}{n}$$

hat, so wird das Dreieck ASB mit der Grundlinie AB und gleichen Basiswinkeln, die gleich $\frac{2R}{n}$ sind, eine Höhe haben, die kleiner als CT und also kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sein wird, und deshalb wird die Differenz der beiden ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke von $\mathfrak{n}$ Seiten kleiner als ε sein. Damit ist bewiesen, was wir wollten.

§ 8. Über die Theorie des Messens. Der Grundsatz der Stetigkeit findet schließlich seine vollkommene Anwendung in der Theorie des Messens.

Wir betrachten eine Halbgerade r, die einen bestimmten Anfangspunkt O hat, und tragen auf dieser von O aus jede gegebene Strecke ab.

Wir setzen einen Punkt A fest und kommen überein, die Strecke OA als Einheitsstrecke anzunehmen. Wenn alsdann $\frac{m}{n}$ eine beliebige gebrochene Zahl ist (wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ganze und positive Zahlen sind), so werden wir sagen, daß die $\mathfrak{m}$-fache Strecke des $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teils von AB (s. § 2) die Zahl $\frac{m}{n}$ als Maß hat.

Aber nicht alle Strecken sind Vielfache von OA oder eines seiner aliquoten Teile. Wenn z. B. OB die Diagonale des Quadrats ist, dessen

10*

Seite gleich OA ist, so gibt es sicher nicht eine gebrochene Zahl, die man in dem vorgenannten Sinne ihr Maß nennen könnte. Aber es ist zu bemerken, daß, wenn OB eine Strecke ist, für die es als Maß keine gebrochene Zahl gibt, es Strecken gibt, die Brüche als Maß haben, die größer und kleiner als OB sind und die sich von OB um so wenig unterscheiden, wie man will. Und in der Tat, wenn MN eine beliebig kleine Strecke ist, so wissen wir, daß es eine ganze positive Zahl von der Eigenschaft gibt, daß $\mathfrak{n} \cdot MN > OA$ ist (s. den Satz von Archimedes), und wenn wir demgemäß mit C einen solchen Punkt bezeichnen, daß OC der $\mathfrak{n}^{\text{te}}$ Teil von OA ist (§ 2), so ist $OC < MN$. Nun bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}$ die größte ganze positive Zahl, für die

$$\mathfrak{m} \cdot OC > OB$$

ist, und es seien B' und B'' zwei derartige Punkte, daß

$$\mathfrak{m} \cdot OC = OB'$$

und

$$(\mathfrak{m} + 1) \cdot OC = OB''$$

ist.

Offenbar haben OB' und OB'' gebrochene Maßzahlen; die eine ist kleiner und die andere ist größer als OB, und sie unterscheiden sich von einander und demgemäß auch von OB um eine Differenz, die kleiner als MN ist.

Wir können also zwei Reihen von Strecken mit gebrochenen Maßen bilden, die erste, bestehend aus Strecken, die kleiner als OB sind, die zweite, aus größeren bestehend in der Weise, daß, wenn man eine beliebig kleine Strecke festsetzt, die Strecken der beiden Reihen von einem gewissen Punkte ab gegen OB eine Differenz haben, die kleiner als jene Strecke ist.

Die Maße der Strecken dieser beiden Reihen bilden offenbar zwei k o n v e r g e n t e Klassen von r a t i o n a l e n Zahlen, die eine i r r a t i o n a l e Zahl definieren. Diese Zahl nimmt man als Maß der Strecke OB an.

In dieser Weise kommen wir dazu, jeder Strecke eine positive rationale Zahl entsprechen zu lassen, die in dem definierten Sinne ihr Maß ausdrückt.

Andererseits sieht man, daß jede rationale Zahl das Maß einer Strecke ist.

Wir beweisen nun, daß auch eine irrationale positive Zahl immer das Maß einer bestimmten Strecke ist, so daß, wie jeder Strecke eine positive Zahl entspricht, auch jeder positiven Zahl eine Strecke entspricht.

Wir betrachten zwei konvergente Reihen positiver rationaler Zahlen, die eine irrationale positive Zahl α definieren. Entsprechend den rationalen Zahlen der beiden Reihen werden wir von O ausgehende Strecken haben, die sie zum Maß haben. Die Endpunkte dieser Strecken werden von der Eigenschaft sein, daß die den Zahlen der wachsenden Reihe entsprechenden Strecken kleiner sein werden als die den Zahlen der abnehmenden Reihe entsprechenden. Außerdem kann es nicht zwei verschiedene Punkte M und N geben, die auf alle der wachsenden Reihe entsprechenden Punkte folgen und allen der anderen Reihe entsprechenden Punkten vorangehen. In der Tat, setzt man voraus, daß M vor N vorangeht, so kann man, wie es kurz vorher in diesem Paragraphen bewiesen ist, einen Punkt X finden, der auf M folgt und die Eigenschaft hat, daß OX ein gebrochenes Maß hat und sich von OM um weniger als um MN unterscheidet. Der Punkt X fällt sicher zwischen M und N. Aber das Maß von OX ist eine rationale Zahl und deshalb ist es entweder kleiner als irgendeine Zahl der wachsenden Reihe oder größer als irgendeine der anderen Reihe, je nachdem sie kleiner oder größer als α ist. Also entweder geht M irgendeinem der der wachsenden Reihe entsprechenden Punkte voran oder N folgt irgendeinem der der anderen entsprechenden Punkte.

Deshalb geht, höchstens mit Ausnahme eines besonderen Punktes, ein Punkt unserer Halbgeraden entweder irgendeinem der der wachsenden Reihe entsprechenden Punkte voran, oder er folgt irgendeinem der der anderen entsprechenden Punkte. Man kann demgemäß die Halbgerade in der Weise in Teile zerlegen, daß der erste alle Punkte enthält, die irgendeinem der der wachsenden Reihe entsprechenden Punkte vorangehen, und der zweite alle übrigbleibenden. Bezeichnet man mit L irgend einen Punkt des zweiten Teils, so wird man in dieser Weise in der Strecke OL eine Zerlegung erhalten, die den für das Postulat von Dedekind geforderten Bedingungen genügt. Man wird so einen Punkt Y finden, der die beiden Teile von OL und demgemäß auch die beiden Teile der Halbgeraden $\boldsymbol{r}$ trennt. Dieser Punkt Y geht nicht irgend einem der der wachsenden Reihe entsprechenden Punkte voran, noch folgt er irgend einem der der anderen entsprechenden, und er ist der einzige, der diese Eigenschaft besitzt.

Dieser Punkt hat (der gegebenen Definition gemäß) gerade die Zahl α als Maß.

Wir können also behaupten, daß auch jede irrationale positive Zahl das Maß einer bestimmten Strecke ist.

Bemerkung. Wir ersehen, daß in dem Verfahren des Messens das Postulat von Archimedes und das Postulat von Cantor, welche die beiden Teile des Postulats von Dedekind ausmachen, nacheinander Verwendung finden:

1. Das Postulat von Archimedes bringt mit sich, daß jeder Strecke eine Zahl entspricht,

2. das Postulat von Cantor, daß umgekehrt jeder Zahl eine Strecke entspricht.

Nachdem dies festgestellt ist, kann man auch sagen, daß das Postulat des Archimedes, wenn man es den Postulaten der Anordnung und der Kongruenz für eine Dimension hinzufügt, die Möglichkeit ausdrückt, dies System als Teil eines gewöhnlichen geradlinigen Kontinuums anzusehen. Das Postulat von Cantor erscheint so als ein Postulat der Vollständigkeit, indem es die Unmöglichkeit ausdrückt, das System zu erweitern[1]), wenn man seine grundlegenden Eigenschaften beibehält (Hilbert).

1) Vgl. hierzu: F. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig und Berlin, 1909, § 8, insbesondere S. 184.

Druckfehler und Zusätze.

S. 38 Z. 3 v. o. lies Modena statt Bologna.
„ 40 „ 23 v. u. ist hinter „Linie" hinzuzufügen „als Länge ohne Breite" (Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές).
„ 98 „ 3 v. o. lies Prato statt Lodi.
„ 129 „ 3 v. o. „ Genua „ Pisa.
„ 194 ist nach dem Schluß von § 11 folgender Zusatz hinzuzufügen:

11a. Die oben angegebenen Beispiele lassen erkennen, daß aus der Voraussetzung der Volumengleichheit für zwei Polyeder durchaus nicht folgt, daß für sie der Fundamentalgleichung von Dehn genügt ist; diese ist vielmehr die notwendige Bedingung dafür, daß die beiden betrachteten Polyeder in kongruente polyederartige Teile zerlegbar sind. Es ist also in der Tat erwiesen, daß für die Polyeder (im Unterschied zu dem, was für die Polygone der Fall ist) die Gleichheit der Größe (oder des Volumens) eine allgemeinere Beziehung ist als die der Äquivalenz oder der Zerlegbarkeit in Teile, die miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Betrachtet man nun alle Polyeder, die mit einem bestimmten Polyeder, z. B. mit dem Einheitswürfel, gleiches Volumen haben, so können wir sie in viele Kategorien oder Typen klassifizieren, indem man verschiedenen Typen die Polyeder zuweist, die nicht in kongruente Teile zerlegbar sind, und in einen und denselben Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder alle Polyeder einschließt, die mit diesem äquivalent sind. Dehn hat darauf aufmerksam gemacht[1]), aus den vorangehenden Schlüssen von ihm folge, daß die Gesamtheit dieser Typen nicht abzählbar ist, d. h. nicht mit der Gesamtheit der ganzen Zahlen oder, was dasselbe ist, mit der Gesamtheit der rationalen Punkte der Abszisse zwischen dem Koordinatenanfang und dem Einheitspunkte in eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz gesetzt werden kann.

Aber so interessant diese Bemerkung ist, so fügt sie doch nur wenig zu den kargen Notizen hinzu, die wir über den Gegenstand besitzen.

Man weiß, daß jedem Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder auch das zu ihm (in bezug auf einen Punkt) symmetrische Polyeder gehört, da zwei symmetrische Polyeder immer in kongruente Teile zerlegt werden können.[2]) Man weiß außerdem aus den Elementen der Geometrie, daß alle Prismen (vom Volumen 1) demselben Typus angehören, da zwei Prismen von der Eigenschaft, daß keins von beiden ein größeres Volumen hat als

1) Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie. Math. Annalen Bd. LIX. 1904.

2) Diese Tatsache, die mit sehr bekannten Eigenschaften der sphärischen Polygone zusammenhängt, wurde, soviel ich weiß, zuerst von Gerling bemerkt in der Antwort auf einen der zu Beginn angeführten Briefe von Gauß (Gauß Werke, Bd. 8 S. 242).

das andere, äquivalent d. h. in kongruente Teile zerlegbar sind.[1]) Aber schon in diesem Typus, dem alle Prismen angehören, treten auch andere Polyeder aut, da Hill[2]) die Äquivalenz (Zerlegbarkeit in kongruente Teile) mit Prismen für Tetraeder einer gewissen Kategorie bemerkt hat, die für ein vorher bestimmtes Volumen, z. B. für das Volumen 1, auch von einem willkürlichen Werte eines Winkels abhängen. Wie Vogt[3]) bemerkt hat, sind dies die Tetraeder, die man in der Zahl sechs aus jedem Rhomboeder (Parallelepipedon mit gleichen Kanten erhält, wenn man durch die Hauptdiagonale die Ebenen legt, welche die sechs diese Diagonale treffenden Kanten projizieren. So hat Juel[4]) auf die Äquivalenz mit einem Würfel für jede der sechs gleichen Pyramiden hingewiesen, welche die Seitenflächen eines Würfels zu Grundflächen und seinen Mittelpunkt zur gemeinsamen Spitze haben.[5])

Außer den Tetraedern von Hill und der Pyramide von Juel kennt man keine anderen pyramidenartigen Polyeder, die mit Prismen äquivalent sind; und es wäre sicher wünschenswert, wenn in dieser Ideenrichtung durch die Arbeit derer, welche die elementare Geometrie pflegen, ein Material gesammelt werden könnte, das reicher an besonderen Ergebnissen wäre. Vielleicht würde man so einen Hinweis für den Weg erhalten, den man einschlagen muß, um das Problem in Angriff zu nehmen, das noch gänzlich ungelöst ist und sehr schwierig erscheint, nämlich das Problem, die hinreichende Bedingung dafür aufzustellen, daß zwei Polyeder in gleiche Teile zerlegbar sind.

Hinsichtlich dieses Punktes können wir nur aussagen, daß für diesen Zweck sicher nicht eine einfache Umkehrung des Ergebnisses von Dehn genügt. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man zwei beliebige gerade Prismen P und P', welche dieselbe Höhe haben, und bezeichne mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ und $\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_m'$ die Neigungswinkel der Flächenwinkel der Seiten (d. h. die Winkel der bezüglichen Grundflächen). Das System (S) aller linearen homogenen Beziehungen mit ganzen Koeffizienten, die zwischen den Kanten der beiden Prismen bestehen, wird vor allem das System (S_1) der

1) Vgl. z. B. Enriques-Amaldi, *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori, 4. Aufl. 1910.

2) Determination of the volumes of certain Species of Tetrahedra. Proceedings of the London Society.

3) Man vergleiche das erwähnte *Breslauer Programm*, das noch andere interessante Betrachtungen über Zerlegungen von Polyedern in Teile enthält, mit denen wir uns hier nicht beschäftigen können.

4) *Über das Volumen der Pyramide*: Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 15, 1904. Vgl. die Note desselben Verfassers: Egalité par addition de quelques polyèdres. Berichte der K. Gesell. der Wiss. zu Kopenhagen, 1903. — In der ersten dieser Noten ist angegeben, daß in Göttingen auf Anregung von F. Schur Modelle für die Zerlegung eines Tetraeders von Hill in Teile konstruiert worden sind, aus denen man ein dreiseitiges Prisma herstellen kann, das dieselbe Basis hat, während die Höhe einem Drittel der Höhe des Tetraeders gleich und die Seitenkanten einer Seitenkante des Tetraeders parallel sind

5) H. Vogt bemerkt in dem angeführten Programm, daß der achte Teil der Pyramide von Juel ein besonderes Tetraeder von Hill ist.

Gleichungen zwischen allen Seitenkanten der beiden Prismen enthalten, auf alle möglichen Weisen zu je zwei und zwei genommen; und außerdem wird es eventuell andere Gleichungen (S_2) umfassen, in denen die Kanten der Grundflächen auftreten. Jedenfalls werden in jeder ganzzahligen Lösung des Systems (S) die den Seitenkanten entsprechenden Zahlen sämtlich gleich sein; weiß man also, daß die auf alle anderen Kanten bezüglichen Flächenwinkel rechte sind, so folgt für die beiden Ausdrücke, von denen man auf Grund des Satzes von Dehn nachweisen muß, daß sie für den Modul π kongruent sind, daß sie, wie auch die ganzzahlige Lösung des betrachteten Systems (S) beschaffen sei, als zwei gleiche Vielfache der beiden Summen $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n$ und $\pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_m'$ gegeben sind, jedes vermehrt um ein bestimmtes Vielfaches von $\frac{\pi}{2}\cdot$ Aber jede dieser beiden Summen ist bekanntlich einem Vielfachen von π gleich; hieraus folgt, daß die beiden Prismen P und P' die Bedingung von Dehn erfüllen, sie mögen einander äquivalent sein oder nicht.[1])

Schließlich bleibt uns noch zu bemerken, daß die vorangehende Betrachtung, die sich auf das System der geraden Prismen bezieht, die eine bestimmte Höhe haben, im wesentlichen nur die Schlüsse von Dehn auf die vieleckigen Flächen (Polygone) überträgt; und da für diese, wie wir soeben gesehen haben, die Bedingung in jedem Falle gilt, unabhängig von jeder Voraussetzung bezüglich ihrer Äquivalenz, so ergibt sich, daß das Band, daß für die Polyeder zwischen ihrer Zerlegbarkeit in kongruente Teile und der Bedingung von Dehn besteht, einen Zufälligkeitscharakter besitzt. Eine kritische Untersuchung, die darauf gerichtet wäre, vermittels grundlegender Hypothesen den Ursprung für diese Charakterverschiedenheit zwischen den geometrischen Größen der Ebene und des Raumes genau festzustellen, würde sicher von großem Interesse sein.

S. 268, Z. 22 lies $\cos A \cos\pi(b) \cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} = 1$

statt $\cos A = \cos\pi(b) \cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} - 1$,

S. 276, Z. 13 lies mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{c}}$ statt mit des Radius $\sqrt{c}$,

S. 290, letzte Zeile lies $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$ statt $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{i\,2\sqrt{a}}$.

1) Die vorstehende Erörterung schließt übrigens nicht aus, daß die Bedingung von Dehn für die Äquivalenz ausreichend sein kann, wenn man zu ihr die Voraussetzung der Volumengleichheit hinzunimmt.