Przyczynek do teorji form.

Napisał

Włodzimierz Stożek.

Twierdzenie: Jeśli dane jest n^2 liczb rzeczywistych e_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots n)$, które czynią zadość następującym warunkom:

$$e_{pq} = \sum_{r=1}^{n} e_{pr}\, e_{rq} \quad (p, q = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

to suma $I_n = \sum_{r=1}^{n} e_{pp}$ jest liczbą całkowitą, nieujemną, która nie przekracza liczby n. Jeśli w szczególnym wypadku $I_n = 0$, to wówczas wszystkie e_{pq} $(p, q = 1, 2 \ldots n)$ równają się zeru, a jeśli $I_n = n$, to wówczas wszystkie e_{pp} $(p = 1, 2 \ldots n)$ równają się jedności, a wszystkie e_{pq} $(p \neq q)$ $(p, q = 1, 2 \ldots n)$ są równe zeru.

Dowód:

Uważajmy równanie pomocnicze:

$$A_n(x) = \begin{vmatrix} e_{11} - x, & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22} - x & \ldots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1}, & e_{n2} & \ldots & e_{nn} - x \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

Równanie to nie posiada innych pierwiastków, jak tylko zero lub jedność.

Aby to wykazać, przyjmijmy, że $\alpha \neq$ i β jest pierwiastkiem

www.rcin.org.pl

zespolonym tego równania. Wówczas istnieją liczby zespolone $l_p + i\, m_p\ (p = 1, 2, \ldots n)$, które czynią zadość następującym równaniom:

$$[e_{11} - (\alpha + i\beta)](l_1 + im_1) + \ldots\ e_{1n}(l_n + im_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_{q1}(l_1 + im_1) + \ldots [l_{qq} - (\alpha + i\beta)](l_q + im_q) + \ldots e_{qn}(l_n + im_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_{n1}(l_1 + im_1) + \ldots \qquad [e_{nn} - (\alpha + i\beta)](l_n + im_n) = 0$$

Wynika stąd, że liczby rzeczywiste $l_1 \ldots l_n$ i $m_1 \ldots n_n$, które nie wszystkie równają się zeru, spełniają odpowiednio dwa następujące systemy równań:

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & e_{q1}\, l_1 + e_{q2}\, l_2 + \ldots \quad e_{qn}\, l_n - \alpha\, l_q + \beta m_q = 0 \\ (4) & e_{q1}\, m_1 + e_{q2}\, m_2 + \ldots \quad e_{qn}\, m_n - \alpha m_q - \beta l_q = 0 \end{array}\right\}(q = 1, 2 \ldots n)$$

Pomnóżmy w systemie (3), względnie (4), równanie o wskaźniku q przez e_{pq} i dodajmy je ze względu na wskaźnik q od 1 do n, to otrzymamy po uwzględuieniu związku (1):

$$\left.\begin{array}{l} (1 - \alpha)[e_{p1}\, l_1 + \ldots\ e_{pn}\, l_n] + \beta\,[e_{p1}\, m_1 + \ldots\ e_{pn}] = 0 \\ (1 - \alpha)[e_{p1}\, m_1 + \ldots\ e_{pn} m_n] + \beta\,[e_{p1}\, l_1 + \ldots\ e_{pn}\, l_n] = 0 \end{array}\right\}(p = 1, 2 .. n)$$

albo:

$$\left.\begin{array}{l} [(1 - \alpha)^2 + \beta^2](e_{p1}\, l_1 + \ldots\ e_{pn}\, l_n) = 0 \\ [(1 - \alpha)^2 + \beta^2](e_{p1} m_1 + \ldots\ e_{pn} m_n) = 0 \end{array}\right\}(p = 1, 2 \ldots n)$$

Z ostatnich równań wynika, że zachodzić mogą dwa wypadki:

$$\text{I.}\quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} e_{p1}\, l_1 + \ldots\ e_{pn}\, l_n = 0 \\ e_{p1}\, m_1 + \ldots\ e_{pn} m_n = 0 \end{array}\right\}(p = 1, 2, \ldots n)$$

W przypadku I. równanie (2) posiada jako rozwiązanie jedność.

W przypadku II., po uwzględnieniu równań (3) i (4), znajdujemy:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\, l_p - \beta\, m_p = 0 \\ \alpha\, m_p + \beta\, l_p = 0 \end{array}\right\}(p = 1, 2 \ldots n)$$

www.rcin.org.pl

a zatem, ponieważ nie wszystkie l_p, m_p $(p = 1, 2 \ldots n)$ równają się zeru:

$$\alpha = \beta = 0.$$

W tym więc wypadku równanie (2) posiada pierwiastek, równy zeru.

Ponieważ równanie (2) innych pierwiastków jak jedność lub zero nie posiada, przeto jego lewa strona da się przedstawić w formie:

$$A_n(x) = (-1)^n x^r (x-1)^{n-r} \tag{5}$$

gdzie r jest liczbą całkowitą, nieujemną.

Rozwińmy wyznacznik (2) wedle potęg x:

$$A_n(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} A_1 x^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (-1) A_{n-1} x + A_n$$

przyczem A_k oznacza sumę wszystkich minorów głównych, rzędu k, należących do wyznacznika:

$$A = \begin{vmatrix} e_{11} \ldots e_{1n} \\ \ldots\ldots \\ e_{n1} \ldots e_{nn} \end{vmatrix}$$

Przez porównanie współczynników przy x^{n-1} w rozwinięciu i we wyrażeniu (5), otrzymujemy:

$$I_n = n - r \tag{6}$$

Aby wykazać drugą część twierdzenia, przyjmijmy, że $I_n = 0$. Wówczas równanie (2) innych pierwiastków jak zero nie posiada, jak to wynika ze związków (5) i (6). W tym wypadku wyznacznik:

$$A_n(1) = \begin{vmatrix} e_{11} - 1, e_{12} \ldots e_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ e_{n1}, e_{n2} \ldots e_{nn} - 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

jest napewne od zera odmienny, a zatem równania jednorodne:

$$(e_{11} - 1) x_1 + e_{12} x_2 + \ldots e_{1n} x_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_{n1} x_1 + \ldots (e_{nn} - 1) x_n = 0$$

posiadają jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$.

Ponieważ z drugiej strony ze związków (2) wynika, że możemy przyjąć jako rozwiązanie tego systemu równań $x_1 = e_{p1}$;

www.rcin.org.pl

$x_2 = e_{p2} \ldots x_n = e_{pn}$ przy każdem $p = 1, 2 \ldots n$, to wnosimy stąd, że wszystkie $e_{pq} (p, q = 1, 2 \ldots n)$ równają się zeru.

Przypadek, w którym $I_n = n$ można zredukować do poprzedniego. W tym celu połóżmy:

$$(8) \qquad \begin{cases} e'_{pq} = e_{pq} \; p \neq q \; (p, q = 1, 2 \ldots n) \\ e'_{pp} = 1 - e_{pp} \; (p = 1, 2 \ldots n) \end{cases}$$

Mamy:

$$e'_{pq} = \sum_{r=1}^{n} e'_{pr} \cdot e'_{rq} \; (p, q = 1, 2 \ldots n)$$

$$I'_n = e'_{11} + \ldots e'_{nn} = n - I_n$$

Ponieważ $I'_n = 0$, więc wszystkie $e'_{pq} (p, q = 1, \ldots n)$ muszą być zerami, a zatem na podstawie (8):

$$e_{pq} = 0 \; p \neq q \; (p_1 q = 1, 2 \ldots n)$$
$$e_{pp} = 1 \; (p = 1, 2 \ldots n)$$

Wniosek:

Jeżeli dana jest forma bilinarna

$$(9) \qquad \sum_{p,q=1}^{n} e_{pq} \, x_p \, y_q$$

której spółczynniki e_{pq} spełniają związki (1), to liczba I_n określona wyżej określa ilość par funkcji liniowych, zapomocą których forma (9) daje się przedstawić jako tak zwana forma kanoniczna.

www.rcin.org.pl