Pole prędkości.

W obrazie natury, który sobie wytwarza człowiek, ruch ciał odgrywa rolę zasadniczą, i dla tego też uważałbym za pożądane, aby szkoła ogólno-kształcąca dawała swym uczniom przynajmniej najogólniejsze wyobrażenie o tym zjawisku. Niżej podany zarys teorji ruchu ciała sztywnego ma okazać, że przedmiot ten daje się wyłożyć w sposób całkowicie elementarny i nie nastręczy uczącym się poważniejszych trudności. Wypada jednak zauważyć na wstępie, że w wykładzie szkolnym teorja powinna być ilustrowana odpowiedniemi przykładami, aby uczeń żywo odczuwał na każdym kroku związek pomiędzy nauką i światem realnym.

Zasadnicza właściwość ciała lub układu sztywnego polega na tym, że odległości pomiędzy jego punktami z biegiem czasu nie ulegają zmianom. Jeżeli nie chodzi nam o wykrycie wpływu, jaki na ruch takiego ciała wywierają ciała inne, lecz jedynie o odpowiedź na pytanie, jak się owo ciało porusza, to możemy całkowicie abstrahować od jego właściwości fizycznych. Również i kształt ciała, albo raczej powierzchnia, odgraniczająca je od otaczającej przestrzeni, nie odgrywa tu żadnej roli; dlatego też nie będziemy robili co do tej powierzchni żadnych założeń, pozostawiając sobie prawo zaliczyć do układu, którego ruch badamy, dowolny punkt przestrzeni, jeżeli uznamy to za stosowne.

Musimy natomiast ściśle odróżniać punkty układu ruchomego od punktów przestrzeni nieruchomej, w której ruch się odbywa. Aby i zewnętrznie różnicę tę zaznaczyć, będziemy litery, oznaczające punkty, proste lub płaszczyzny przestrzeni nieruchomej, stawiali w nawiasie.

Przedewszystkim ograniczymy przedmiot badania i wytkniemy cel, do którego dążyć mamy.

Wyobraźmy sobie układ sztywny, poruszający się jakkolwiek. Każdy punkt tego układu posiada w danej chwili pewną prędkość, którą można całkowicie wyobrazić zapomocą odcinka odpowiedniej długości i kierunku. Powiemy, że te wszystkie prędkości tworzą pole prędkości. Właśnie owo pole prędkości ma stanowić przedmiot naszych badań.

Pole prędkości jest to coś zmieniającego się z czasem, bo punkty układu ruchomego zmieniają położenia w przestrzeni, i prędkości ich ulegają zmianom. My będziemy jednak rozważali pole prędkości w pewnej określonej chwili. Chodzi tu jakby o przekrój zjawiska w czasie. Przyswojenie sobie tego punktu widzenia może stanowić dla uczącego się pewną trudność, tymbardziej, że język nasz, jak zresztą i inne, nie posiada wyrazu na oznaczenie takiego przekroju, gdyż wyrazy „chwila", „moment" i t. d. według rozumienia powszechnego oznaczają zawsze pewne trwanie, jakkolwiek bardzo krótkie.

Niech będzie jakikolwiek punkt A układu ruchomego. Posiada on pewną określoną prędkość v. Wyjdźmy z tego punktu A i wędrujmy w kierunku prędkości v do nieskończenie blizkiego punktu A_1. Ten punkt A_1 posiada prędkość v_1, różniącą się nieskończenie mało od v tak pod względem wielkości jak i kierunku. Posuwajmy się dalej w kierunku tej prędkości v_1 aż do nieskończenie blizkiego punktu A_2; prędkość jego v_2 różni się znowu nieskończenie mało od v_2. Posuwamy się znowu w kierunku v_2 do nieskończenie blizkiego punktu A_3 i t. d. Tym sposobem zakreślimy w przestrzeni linję $AA_1A_2A_3$...., którą nazwiemy linją prędkości. Oczywiście przez każdy punkt układu przechodzi taka linja prędkości.

Możemy teraz ściślej określić cel naszego badania. Chodzi nam mianowicie o rozpoznanie kształtu linji prędkości.

Naprzód warto jest wskazać na dwie właściwości zasadnicze tych linji. Jedna z nich polega na tym, że prędkość (właściwie odcinek, wyobrażający prędkość) każdego punktu jest styczna do linji prędkości, przez ten punkt przechodzącej. Wynika to stąd, że prędkość łączy dwa nieskończenie blizkie punkty linji prędkości.

Właściwość druga wymaga nieco dłuższych rozważań.

Uważajmy pewien punkt (A) przestrzeni nieruchomej. W danej chwili przebiega przezeń punkt A układu ruchomego z prędkością v. W chwili następnej przez (A) będzie przebiegał inny punkt układu ruchomego A' z prędkością v', w dalszej chwili w (A) znajdzie się nowy punkt A'', posiadający prędkość v'' i t. d. Te prędkości v, v', v''... wogóle różnią się od siebie pod względem wielkości i kierunku, ale w wypadku szczególnym te wszystkie prędkości mogą być jednakowe, czyli, że zawsze ten punkt układu ruchomego, który przebiega przez punkt (A), może posiadać pewną prędkość v stałą pod względem wielkości i kierunku. Przypuśćmy, że toż samo dotyczy każdego innego punktu przestrzeni; w takim razie powiemy, że r u c h u k ł a d u jest j e d n o s t a j n y.

Jest rzeczą oczywistą, że przy ruchu jednostajnym linje prędkości nie zmieniają z czasem ani kształtu, ani położenia w przestrzeni, a przytym daje się łatwo okazać, że w tym razie linje te są zarazem torami punktów układu ruchomego. Uważajmy np. linję prędkości, przechodzącą przez punkty (A), (A_1), (A_2)... Ruchomy punkt A, który znajdzie się w (A), będzie miał prędkość skierowaną według $(A)(A_1)$, a zatym w najbliższej chwili dojdzie do (A_1); tutaj prędkość jego zmieni kierunek na $(A_1)(A_2)$, a zatym punkt A podąży do A_2 i t. d., a więc będzie obiegał linję prędkości.

Niech będzie układ, poruszający się jakkolwiek; jego punkty A, A_1, A_2.... zajmują w danej chwili położenia (A), (A_1), (A_2).... i posiadają odpowiednie prędkości v, v_1, v_2.... Możemy zawsze wyobrazić sobie inny układ, którego punkty B, B_1, B_2... zajmują również w danej chwili położenia (A), (A_1), (A_2)... i posiadają prędkości v, v_1, v_2..., ale którego ruch jest jednostajny. Powiemy, że ruch tego drugiego układu jest styczny do ruchu układu pierwszego. Mamy tu zetknięcie, które następuje nie w przestrzeni lecz w czasie.

Z tego wszystkiego wynika, że linje prędkości są torami punktów układu, którego ruch jest jednostajny i styczny w danej chwili do ruchu układu danego. To jest druga właściwość linji prędkości, o którą chodziło.

Układ sztywny może posiadać jednocześnie dwa lub więcej ruchów. Tak np. kółko zegarka posiada ruch obrotowy dokoła swej osi, lecz jednocześnie bierze udział w ruchu, który nadaliśmy zegarkowi. Kula ziemska obraca się dokoła osi i jednocześnie obiega swą drogę naokoło słońca, a wraz z całym układem słonecznym posiada jeszcze trzeci ruch w przestrzeni.

Jeżeli układ bierze udział w dwuch ruchach, to każdy punkt jego posiada dwie prędkości, a zatym istnieją dwa pola prędkości. Dla każdego punktu możemy wyznaczyć prędkość wypadkową, i te prędkości wypadkowe utworzą trzecie pole, które nazwiemy p o l e m w y p a d k o w y m, gdy dwa pola poprzedzające nazywamy s k ł a d o w e m i. Również w wypadku trzech ruchów jednoczesnych mamy trzy pola składowe i pole wypadkowe i t. d.

Prędkość punktu można rozłożyć na dwie, trzy i więcej prędkości składowych, tak samo dane pole prędkości można rozłożyć na dwa, trzy i więcej pól składowych. To rozkładanie pól prędkości na pola składowe ułatwia nieraz w wysokim stopniu badanie ruchu układu.

Z pośród różnorodnych ruchów, jakie może posiadać układ sztywny, dają się wyróżnić pewne ruchy proste, przy których obrazy pola prędkości są szczególnie wyraziste. Do takich należy przedewszystkim ruch postępowy. Tak nazywamy ruch układu, przy którym prędkości wszystkich punktów są równe i równoległe. W ruchu jednostajnym i stycznym do danego torami punktów byłyby oczywiście proste równoległe, a zatym przy ruchu postępowym taki właśnie przebieg posiadają linje prędkości.

Jeżeli prędkości dwuch punktów układu np. A i B są równe zeru, to ruch nazwiemy obrotowym, a prostą AB osią tego ruchu. Oczywistą jest rzeczą, że prędkości wszystkich innych punktów osi są także równe zeru. Przywołując na pomoc ruch jednostajny i styczny do danego, dojdziemy z łatwością, że linje prędkości w tym razie są okręgami kół położonych w płaszczyznach prostopadłych do osi; środki tych kół leżą na osi.

Może się zdarzyć, że według posiadanych danych prędkość jednego punktu układu O jest równa zeru, a prędkości innych punktów są nieznane. Nie przesądzając, czy w układzie niema jeszcze innych punktów o prędkości zero, odróżnimy ten rodzaj ruchu od poprzedzającego, nazywając go ruchem kulistym; punkt O nazywa się środkiem ruchu kulistego, a prosta, łącząca dowolny punkt układu ze środkiem,— promieniem owego punktu. Wyobraźmy sobie teraz ruch jednostajny i styczny do danego. W tym ruchu punkt O pozostaje stale nieruchomy, i jakikolwiek punkt układu A zatacza linję, położoną na kuli o promieniu OA, gdyż odległość punktu A od nieruchomego punktu O pozostaje stałą. Stąd wynika, że w ruchu kulistym linjami prędkości są linje sferyczne, położone na kulach współśrodkowych, których wspólny środek leży w O. Prędkość jakiegokolwiek punktu A, jako styczna do takiej linji sferycznej, jest styczna do kuli, na której ta linja leży, a zatym jest prostopadła do promienia OA.

Opierając się na twierdzeniu powyższym, możemy okazać pewne twierdzenie zasadnicze w kinematyce układu sztywnego.

Niech będzie układ sztywny, poruszający się jakkolwiek. Weźmy dwa dowolne punkty tego układu, a mianowicie punkt A_1 o prędkości v_1 i punkt A_2 o prędkości v_2. Jasną jest rzeczą, że prędkości te nie mogą być całkowicie niezależne jedna od drugiej, i że pomiędzy niemi musi zachodzić jakiś związek. Chodzi nam właśnie o wykrycie tego związku.

W tym celu wyobraźmy sobie, że układ prócz ruchu, który posiada w danej chwili, otrzymał jeszcze ruch inny postępowy o prędkości u, i niech ta prędkość u będzie równa i odwrotna do v_1. Tym sposobem każdemu punktowi do prędkości, którą posiada, przybywa jeszcze nowa prędkość u, i dla każdego punktu można wyznaczyć przy pomocy równoległoboku prędkość wypadkową. Dla punktu A_1 ta prędkość wypadkowa jest oczywiście równa zeru, a zatym przez dodanie owego ruchu postępowego otrzymaliśmy ruch kulisty, którego środkiem jest punkt A_1. Prędkość wypadkową punktu A_2 oznaczmy literą w; jest ona prostopadła do promienia A_1A_2, a więc rzut jej na tę prostą jest równy zeru.

Wiadomo, że suma rzutów składowych na jakikolwiek kierunek jest równa rzutowi wypadkowej, a zatym suma rzutów prędkości n i v_2 na prostą A_1A_2 jest równa rzutowi prędkości w, czyli równa zeru.

Stąd wynika, że rzuty prędkości u i v_2 na A_1A_2 są równe i odwrotne, lub że rzuty prędkości v_1 i v_2 na ową prostą są równe. Tak więc, r z u t y p r ę d k o ś c i d w u c h p u n k t ó w u k ł a d u s z t y w n e g o n a p r o s t ą, ł ą c z ą c ą t e p u n k t y, s ą r ó w n e.

To jest właśnie twierdzenie, o które chodziło. Wyraża ono w sposób dla nas dogodny właściwość układu sztywnego, o której była mowa na początku, a mianowicie, że odległość pomiędzy dwoma punktami takiego układu jest wielkością stałą.

Jeżeli prędkości wszystkich punktów układu są równoległe do pewnej płaszczyzny (P), to ruch tego układu nazywamy p ł a s k i m. Przetnijmy układ płaszczyzną (Q), równoległą do (P). Punkty układu A_1, A_2, A_3..., leżące w płaszczyźnie (Q), posiadają odpowiednio prędkości v_1, v_2, v_3..., leżące również w płaszczyźnie (Q), a zatym linje prędkości, przechodzące przez te punkty, są płaskie i leżą w płaszczyźnie (Q). Jeżeli poznamy przebieg tych linji, to będziemy znali wogóle pole prędkości, bo przebieg linji prędkości w innych płaszczyznach równoległych do (P) będzie taki sam.

Poprowadźmy przez punkt A_1 w płaszczyźnie (Q) prostą a_1 prostopadle do v_1. Ponieważ rzut prędkości v_1 na a_1 jest równy zeru, przeto i rzut prędkości każdego innego punktu tej prostej na nią musi być równy zeru, czyli innemi słowy prędkość każdego punktu prostej a_1 jest do niej prostopadła. Poprowadźmy jeszcze przez punkt A_2 w płaszczyźnie (Q) prostą a_2 prostopadle do v_2; prędkości wszystkich punktów tej prostej będą również do niej prostopadłe. Prędkość punktu C, w którym przecinają się proste a_1 i a_2, musi być równa zeru, bo inaczej musiałaby ona być jednocześnie prostopadła do a_1 i a_2, co jest niemożliwe.

Tak więc w przekroju układu ruchomego, położonym w płaszczyźnie (Q), istnieje punkt C, którego prędkość jest równa zeru; stąd widać, że ten przekrój posiada ruch obrotowy dokoła punktu C, a cały układ posiada ruch obrotowy dokoła prostej c, przechodzącej przez C i prostopadłej do płaszczyzny (P). Punkt C nazywa się środkiem chwilowym, a prosta c — osią chwilową.

Powróćmy jeszcze do ruchu kulistego. Dajmy na to, środkiem jego jest punkt O, a punkty A_1, A_2, A_3..., posiadają odpowiednio prędkości v_1, v_2, v_3... Poprowadźmy przez A_1 płaszczyznę P_1 prostopadle do v_1. Płaszczyzna ta przejdzie przez O, gdyż promień OA_1 jest prostopadły do v_1. Weźmy w płaszczyźnie P_1 jakikolwiek punkt B; dowiedziemy z łatwością, że prędkość jego u jest prostopadła do owej płaszczyzny. Widać to stąd, że prędkość u jest prostopadła do dwuch prostych, położonych w płaszczyźnie P_1, a mianowicie przedewszystkim do OB, jako do promienia, a powtóre do BA_1, gdyż rzut prędkości u na BA_1 musi być równy rzutowi prędkości v_1, czyli zeru. Tak więc prędkość każdego punktu płaszczyzny P_1 jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Poprowadźmy jeszcze przez punkt A_2 płaszczyznę P_2 prostopadle do v_2. Dowiedziemy, jak poprzednio, że prędkość każdego punktu tej płaszczyzny jest do niej prostopadła. Prosta c, według której przecinają się płaszczyzny P_1 i P_2, przechodzi oczywiście przez środek O, bo przechodzą przezeń owe obydwie płaszczyzny. Prędkość jakiegokolwiek punktu prostej c musi być równa zeru, bo w razie przeciwnym musiałaby ona być jednocześnie prostopadła do obydwuch płaszczyzn P_1 i P_2.

Tak więc w układzie istnieje prosta c, której punkty mają prędkości równe zeru. Stąd wynika, że ruch układu jest obrotowy. Prosta c zowie się osią chwilową.

Ruch płaski można uważać za ruch kulisty o środku nieskończenie odległym; z tego punktu widzenia twierdzenie poprzednie jest tylko szczególnym wypadkiem ostatniego.

Pozostaje nam jeszcze rozważyć pewien ważny rodzaj ruchu, zwany śrubowym. Tak nazywamy ruch układu, jeżeli prędkości punktów pewnej jego prostej c są skierowane według tej prostej. Prosta c zowie się osią ruchu śrubowego. Jest rzeczą oczywistą, że prędkości wszystkich punktów osi są równe i pod względem wielkości. Oznaczmy tę prędkość, wspólną wszystkim punktom osi, literą v.

Ruch śrubowy daje się rozłożyć na dwa ruchy składowe: postępowy o prędkości v i obrotowy dokoła osi c. Widać to stąd, że gdy nadamy układowi ruch postępowy o prędkości równej i odwrotnej do v, to prędkości punktów osi staną się równemi zeru, i zatym pozostanie ruch obrotowy.

Niech będzie jakikolwiek punkt układu A, którego prędkość jest równa w. Z uwagi poprzedzającej wynika, że prędkość tę można rozłożyć na dwie składowe, z których jedna jest równa v i równoległa do osi, a druga u jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez A i c. Łatwo teraz będzie dowieść, że w ruchu stycznym jednostajnym punkt A pozostaje wciąż na cylindrze kołowym, którego osią jest prosta c, i że jego torem jest linja śrubowa, a układ porusza się tak, jak śruba w mutrze. Stąd wynika, że w tym razie linje prędkości są linjami śrubowemi.

Rzut prędkości w na oś c jest oczywiście równy v, a więc w ruchu śrubowym rzuty prędkości wszystkich punktów na oś są równe; jest to zasadnicza właściwość ruchu śrubowego. Słuszne jest i twierdzenie odwrotne: jeżeli rzuty prędkości wszystkich punktów układu sztywnego na pewien kierunek są równe, to ruch układu jest śrubowy.

Przypuśćmy więc, że rzuty prędkości wszystkich punktów układu na pewną prostą a są równe. Przeprowadźmy płaszczyznę P, prostopadłą do prostej a, i rozłóżmy prędkość każdego punktu układu na dwie składowe, z których jedna v ma być równoległa do a, a druga u równoległa do płaszczyzny P. Składowa v jest równa rzutowi prędkości punktu układu na prostą a, a zatym według założenia jest jednakowa dla wszystkich punktów układu. Nadajmy teraz układowi nowy ruch postępowy o prędkości, równej i odwrotnej do v. Skutkiem tego znikną składowe, równoległe do a, i punkty układu zachowają tylko prędkości, równoległe do P, a więc ruch układu przekształci się na płaski. Oś chwilowa c tego ruchu jest prostopadła do P lub równoległa do a. Składowa u każdego punktu tej osi jest równa zeru, a więc poprzednio, zanim nadaliśmy układowi ów ruch dodatkowy, prędkość każdego punktu prostej c była równa v i skierowana według tej prostej; znaczy to, że ruch był śrubowy.

Niech będzie teraz układ sztywny, poruszający się jakkolwiek; prędkości dwuch jego punktów A_1 i A_2 oznaczmy odpowiednio przez v_1 i v_2. Nadajmy układowi nowy ruch postępowy, którego prędkość u ma być równa i odwrotna do v_1. Tym sposobem punkt A_2 będzie miał dwie prędkości v_2 i u; ich wypadkową oznaczmy przez w. Prędkość wypadkowa punktu A_1 jest równa zeru, a zatym ruch przekształca się na kulisty, lub obrotowy, którego osią jest pewna prosta a, przechodząca przez punkt A_1. Jest rzeczą oczywistą, że przy ruchu obrotowym prędkości wszystkich punktów są prostopadłe do osi, a zatym prędkość wypadkowa w jest prostopadła do a, i rzut tej wypadkowej na a jest równy zeru. Stąd wynika, że suma rzutów składowych v_2 i u na a jest także równa zeru, czyli że rzuty te są równe i odwrotne. Ostatecznie wypadnie, że rzut prędkości v_2 na a jest równy rzutowi prędkości v_1 na tę prostą. Tak samo dowiedziemy, że rzuty prędkości wszystkich innych punktów układu na a są równe rzutowi v_1, i na za sadzie twierdzenia poprzedzającego wnioskujemy, że ruch układu jest śrubowy.

Tak więc doszliśmy do ostatecznego wniosku, że w wypadku najogólniejszym ruch układu jest śrubowy, i linje prędkości są śrubowemi, i to jest odpowiedzią na pytanie, postawione na wstępie. W wypadkach szczególnych linje prędkości mogą być prostemi (w ruchu postępowym) lub kołami (w ruchu obrotowym), lecz zarówno linję prostą jak i koło można uważać za szczególne wypadki śrubowej; mianowicie śrubowa przechodzi w linję prostą, gdy promień staje się zerem, i w koło, gdy krok staje się zerem.

Warto jest jeszcze przytoczyć inny dowód ostatniego twierdzenia, podany przez Koenigsa [1]). Dowód ten wykazuje konieczność ruchu śrubowego w sposób nieoczekiwanie prosty i dobitny, ale (przynajmniej w wykładzie elementarnym) pozostawia on znaczną rolę intuicji ucznia, co może być z pewnego punktu widzenia poczytywane za wadę.

Niech będzie układ sztywny, poruszający się jakkolwiek. Będziemy rozważali dwie nieskończenie blizkie chwile (dwa przekroje czasu), które oznaczymy literami α i β. W chwili α pewien punkt układu A zajmował położenie (A), a w chwili β — inne położenie (B); w tym położeniu (B) w chwili α był inny punkt układu B, który w chwili β doszedł do (C), w (C) w chwili α był jeszcze inny punkt układu C, który w β znalazł się w (D) i t. d. Punkty A, B, C... tworzą w układzie ruchomym linję, którą oznaczymy literą k, a punkty (A), (B), (C)... tworzą w przestrzeni nieruchomej linję (k). W chwili α linje te przystają do siebie i stanowią linję prędkości, bo prędkość punktu A przechodzi przez dwa nieskończenie blizkie punkty A i B linji k, a więc jest styczna do tej linji; również jest styczna do niej prędkość punktu B i t. d.

W chwili α linje k i (k) przystawały do siebie, a w czasie od α do β pierwsza z nich przesunęła się po drugiej, nie przestając przystawać; stąd wynika, że obydwie te linje są śrubowe, bo tylko linja śrubowa może przesunąć się po takiej samej śrubowej, nie zmieniając kształtu. Tak więc linją prędkości może być tylko linja śrubowa.

Powyższe proste rozważania, nadające się jak sądzę, zupełnie do

---

[1]) *G. Koenigs.* Leçons de cinématique. Paris, 1897.

wykładu w szkole średniej, stanowią podstawę kinematyki układu sztywnego. Mogą one jeszcze zdaniem moim być rozszerzone w dwuch kierunkach. Przedewszystkim wykład może objąć składanie ruchów, czyli składanie pól prędkości; jest to rozdział łatwy i ciekawy, a przytym stanowi bardzo użyteczne ćwiczenie wyobraźni przestrzennej. Powtóre, pożądanym dopełnieniem teorji powyższej byłaby nauka o ruchu ciągłym układu sztywnego, czyli o linjach środków chwilowych (polodja i herpolodja) i powierzchniach osi chwilowych. Jest to nauka bardzo łatwa; zajmie ona niewiele czasu, a da uczniom już dość pełny i przejrzysty obraz ruchu ciała.

Na zakończenie wspomnę jeszcze o pewnym doświadczeniu, obmyślanym przez Maxwella, które pozwala unaocznić istnienie osi chwilowej przy ruchu kulistym, albo, po odpowiedniej modyfikacji, środka chwilowego w ruchu płaskim.

Na osi bąka osadzamy kołową tarczę kartonową; tarcza jest podzielona na cztery wycinki, pomalowane na rozmaite kolory; np. jeden wycinek może być biały, drugi--czerwony, trzeci—zielony i czwarty—niebieski. Gdy puścimy bąk w ruch, to ruch ten będzie kulisty, a środek znajdzie się w punkcie oparcia, jeżeli ten punkt jest nieruchomy. Przez ten sam punkt musi także przechodzić oś chwilowa. Ponieważ ruch bąka jest bardzo szybki, przeto barwy tarczy się pomieszają, tworząc tło o nieokreślonym szarym zabarwieniu. Jedynie w najbliższych okolicach punktu, w którym oś chwilowa przecina tarczę, pozostanie plamka, zabarwiona wyraźnie na jeden ze wzmiankowanych kolorów; tutaj zmieszanie barw nie następuje, gdyż prędkość owego punktu przecięcia jest równa zeru, a prędkości punktów najbliższych bardzo małe.

Położenie owej zabarwionej plamki unaocznia położenie osi chwilowej w przestrzeni, gdyż oś ta stale przechodzi przez punkt oparcia bąka. Z czasem w zjawisku następują zmiany, które dostarczają wskazówek co do obydwuch stożków osi chwilowych. Przedewszystkim zauważymy, że plamka zmienia położenie w przestrzeni; obserwując jej drogę, zdamy sobie sprawę z położenia i rozwartości stożka stałego. Ponieważ oś bąka jest osią stożka ruchomego, przeto odległość plamki od osi i położenie tej osi dają wyobrażenie o położeniu i rozwartości stożka ruchomego. Spostrzeżemy następnie, że zmienia się zabarwienie plamki. Prędkość tych zmian pozwoli zdać sobie sprawę z prędkości ruchu obrotowego stożka ruchomego, a porządek, w którym następują po sobie barwy, określa kierunek ruchu tego stożka. Wyjdzie przytym na jaw, że stożek ruchomy toczy się po stożku stałym.

Zygmunt Straszewicz.