Włodarski - GEOMETRIA ANAL. PŁASKA

opis: 46949

Dr. FRANCISZEK WŁODARSKI

GEOMETRJA ANALITYCZNA PŁASKA

CZĘŚĆ I.

1924
POZNAŃ: FISZER i MAJEWSKI
WARSZAWA: E. WENDE i SKA. ŁÓDŹ: L. FISZER.
TORUŃ: TOWARZYSTWO WYDAWNICZE „IGNIS".

Odbito w Drukarni Uniwersytetu Poznańskiego pod zarządem Józefa Winiewicza.

PRZEDMOWA.

Inicjatywa do napisania przeze mnie podręcznika Geometrji analitycznej wyszła z Koła matematycznego słuchaczy Uniwersytetu Poznańskiego.

Pisząc ten podręcznik, starałem się utrzymać w nim wykład, przynajmniej w pierwszych sześciu Rozdziałach, na takim poziomie, aby był on dostępny dla czytelnika, który, poza ogólnem wykształceniem średniem, specjalnego przygotowania matematycznego nie posiada. Jedyne może odstępstwo od tej zasady stanowi stosowanie przeze mnie Teorji wyznaczników, jednak ograniczam się tu tylko do rzeczy najprostszych, z któremi czytelnik, zupełnie nie znający Teorji wyznaczników, z łatwością może się sam zapoznać.

Wszystkie rysunki wykonała moja żona, jak również moja żona okazała mi pomoc przy czytaniu korekty.

Dr. Franciszek Włodarski.

W Poznaniu, 3-go grudnia 1923 r.

SPIS RZECZY.

WSTĘP.

ROZDZIAŁ I.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

Wstęp.

I. Nauki matematyczne. — 1. Człowiek, żyjąc i obserwując wszystko to, co oddziaływa na jego zmysły, robi pewne spostrzeżenia, które notuje w swej pamięci i które później tworzą zbiór jego wiadomości. Te wiadomości, utrzymywane w stanie chaotycznym, nauki nie stanowią, stanowią one dopiero materjał naukowy. Nauka powstaje wtedy, gdy człowiek zdobyty materjał naukowy ujmuje w pewien systemat.

Różnorodność obserwowanych przez człowieka zjawisk, i skutkiem tego różnorodność poczynionych przezeń spostrzeżeń, utrudnia ujęcie całego nagromadzonego materjału naukowego w ramy jednej nauki. Dlatego też człowiek dzieli zdobyty materjał naukowy na części i każdą taką część ujmuje w ramy nauki specjalnej. Wtedy nie potrzebuje on już wiązać z sobą faktów, które on przy dokonywaniu podziału materjału naukowego na części zaliczył do części różnych, pozostaje mu tylko ująć w systemat fakty, zaliczone do jednej i tej samej części.

Za podstawę podziału materjału naukowego na różne części, z których każda, ujęta w systemat, tworzy specjalną naukę, przyjęto podział zjawisk, względnie własności zjawisk, do których ten materjał naukowy się odnosi, na grupy, przyczem do jednej grupy zalicza się zjawiska, względnie własności zjawisk, posiadające pewne cechy wspólne. I te właśnie cechy wspólne pewnej kategorji zjawisk, względnie własności zjawisk, stanowią więź logiczną, łączącą różne fakty naukowe w jeden organizm, tworzący pewną naukę. Dlatego też w definicji jakiejkolwiek nauki podaje się zazwyczaj przedmiot jej badań, t. zn. określa się zjawiska, względnie własności zjawisk, których badaniem dana nauka się zajmuje.

2. Każdej powstałej w ten sposób nauce można podporządkować pewną odpowiadającą jej naukę matematyczną. W tym celu należy postępować w sposób następujący.

Pewne fakty danej nauki przyjmujemy zgóry jako prawdziwe: nazywają się one wtedy pewnikami. Wszystkie pozostałe fakty, które wtedy noszą nazwę twierdzeń, wyprowadzamy z pewników za pomocą rozumowania logicznego, t. zn. wykazujemy, iż prawdziwość pewników pociąga za sobą prawdziwość twierdzeń: wtedy te twierdzenia nazywają się dowiedzionemi. Przyczem z chwilą przyjęcia pewnych faktów danej nauki za pewniki, przestajemy je już uważać za fakty, odnoszące się do pewnych psychologicznie określonych pojęć, uważamy je natomiast za zależności, zachodzące pomiędzy pewnemi kategorjami objektów różnych, psychologicznie nieokreślonych. Wtedy również dowiedzione w oparciu o takie pewniki twierdzenia też nie będą się już odnosiły do pewnych psychologicznie określonych pojęć, lecz tylko do pewnych objektów psychologicznie nieokreślonych. Zbiór w ten sposób ustalonych pewników oraz dowiedzionych za pomocą nich twierdzeń tworzy naukę matematyczną, odpowiadającą danej nauce niematematycznej.

3. Mówiliśmy tu o tworzeniu nauki matematycznej, odpowiadającej jakiejś nauce niematematycznej. Naukę matematyczną możnaby jednak stworzyć zupełnie niezależnie od jakiejkolwiek nauki i nawet wogóle nie opierając się na żadnych psychologicznie określonych pojęciach. Możnaby mianowicie przyjąć, iż będziemy rozpatrywali kilka kategorji psychologicznie nieokreślonych objektów, nadać tym objektom różne nazwy, następnie ustalić pomiędzy nimi pewne zależności, przyjąć te zależności jako pewniki i na tych pewnikach zbudować naukę matematyczną.

4. Pewniki nauki matematycznej nie mogą, oczywiście, być wybrane zupełnie dowolnie, albowiem muszą one spełniać pewien warunek, mianowicie: pomiędzy tymi pewnikami nie mogą istnieć sprzeczności. I to jest jedyny warunek konieczny, jakiemu pewniki nauki matematycznej muszą czynić zadość. Poza tym warunkiem koniecznym istnieje jeszcze inny warunek, którego spełnienie nie jest konieczne, a tylko

bardzo pożądane, mianowicie wzajemna niezależność pewników, t. zn. żaden pewnik nie powinien twierdzić tego, co może być dowiedzione na mocy pozostałych pewników. Pewnik, któryby tego warunku nie spełniał, byłby jako pewnik zbyteczny i mógłby być podany, jako twierdzenie.

5. Z tego, co powiedzieliśmy o naukach matematycznych wogóle, wynika więc, iż przedmiotem badań jakiejś nauki matematycznej nie są wcale psychologicznie określone pojęcia, lecz zależności, zachodzące pomiędzy pewnymi psychologicznie nieokreślonymi objektami. Cechą charakterystyczną jakiejś nauki matematycznej, wyróżniającą ją z pośród innych nauk matematycznych, jest zbiór jej pewników.

Pomimo to, iż, jak powiedzieliśmy przed chwilą, przedmiotem badań jakiejś nauki matematycznej są zależności, zachodzące pomiędzy pewnymi psychologicznie nieokreślonymi objektami, otrzymane w tej nauce wyniki mogą być stosowane również do pojęć psychologicznie określonych. Mogą one mianowicie być stosowane do wszelkich kategorji pojęć psychologicznie określonych, jeżeli tylko pomiędzy temi kategorjami można ustalić zależności, jakie na mocy pewników danej nauki matematycznej zachodzą pomiędzy rozpatrywanemi w niej kategorjami objektów psychologicznie nieokreślonych. Jeżeli więc przy tworzeniu danej nauki matematycznej punktem wyjścia były zależności, zachodzące pomiędzy pewnemi kategorjami pojęć psychologicznie określonych, to wyniki, otrzymane w danej nauce matematycznej, w pierwszej linji mogą być stosowane do tych właśnie pojęć psychologicznie określonych.

Stosowanie jednak wyników, otrzymanych w jakiejś nauce matematycznej, do pojęć psychologicznie określonych wogóle ma pewne granice, a to skutkiem niedoskonałości odpowiedniości, zachodzącej pomiędzy rozpatrywanymi w tej nauce matematycznej psychologicznie nieokreślonymi objektami oraz pojęciami psychologicznie określonemi.

6. Z rozważań powyższych wynika więc, iż najwłaściwszą definicją jakiejś nauki matematycznej byłoby wymienienie wszystkich pewników, na których się ta nauka opiera. Zazwyczaj jednak postępują inaczej, wymieniają mianowicie te

1*

pojęcia psychologicznie określone, które były punktem wyjścia dla danej nauki matematycznej. I przytem często zamiast powiedzieć, iż wymienione pojęcia są punktem wyjścia dla danej nauki matematycznej, mówią wprost, iż dana nauka matematyczna zajmuje się badaniem tych pojęć.

II. Geometrja. — 1. Geometrja jest to nauka matematyczna, dla której punktem wyjścia są własności przestrzenne, t. zn. zależności, zachodzące pomiędzy elementami złożonego pojęcia przestrzeni.

Chociaż więc przedmiotem badań Geometrji, jako nauki matematycznej, są psychologicznie nieokreślone objekty, to jednak otrzymane w niej wyniki mogą być stosowane do pojęć psychologicznie określonych, wynikających z pojęcia złożonego przestrzeni. Poza tem, oczywiście, mogą one być stosowane do wszelkich pojęć psychologicznie określonych, o ile tylko pomiędzy temi pojęciami można ustalić zależności, jakie na mocy pewników Geometrji zachodzą pomiędzy rozpatrywanymi w niej objektami.

2. Objektom psychologicznie nieokreślonym, stanowiącym przedmiot badań Geometrji, możnaby nadać nazwy dowolne, możnaby np. oznaczyć je za pomocą liter. Ponieważ jednak celem Geometrji jest otrzymanie takich wyników, które mogłyby być stosowane do pojęć przestrzennych, przeto rozpatrywanym w Geometrji objektom nadajemy takie same nazwy, jakie posiadają odpowiadające im pojęcia przestrzenne. Dla tej samej przyczyny również na oznaczenie zależności, zachodzących pomiędzy rozpatrywanymi w Geometrji objektami, używamy tych samych wyrażeń, jakich używa się na oznaczenie zależności odpowiednich, zachodzących pomiędzy odpowiadającemi tym objektom pojęciami przestrzennemi.

A więc rozpatrywane w Geometrji psychologicznie nieokreślone objekty nazywamy punktami, prostemi, płaszczyznami, i t. d. Zachodzące pomiędzy nimi zależności wyrażamy, mówiąc, iż pewne punkty leżą na pewnych prostych lub też w pewnych płaszczyznach, pewne proste przechodzą przez pewne punkty lub też leżą w pewnych płaszczyznach, pewne płaszczyzny zawierają pewne punkty lub też pewne proste, i t. d.

Zawdzięczając przyjęciu w Geometrji takiej właśnie terminologji, stosowanie otrzymanych w niej wyników do pojęć przestrzennych nie przedstawia naogół trudności. Pewne trudności mogą istnieć tylko w tych przypadkach, gdy w otrzymanych wynikach występują objekty, które zostały wprowadzone do Geometrji nie jako odpowiedniki pewnych pojęć przestrzennych, lecz ze względu na potrzeby Geometrji, jako nauki matematycznej.

Zdarzają się jednak przypadki, iż, pomimo przyjęcia w Geometrji takiej terminologji, jakieś twierdzenie geometryczne można zastosować do pojęć przestrzennych nietylko uważając rozpatrywane w tem twierdzeniu objekty za odpowiedniki pojęć przestrzennych, posiadających takie same nazwy, lecz również i w jakiś inny sposób, t. zn. uważając rozpatrywane w tem twierdzeniu objekty za odpowiedniki pojęć przestrzennych o nazwach innych.

3. Często przy rozważaniach geometrycznych posługują się rysunkiem. Znaczenie jednak rysunku w Geometrji nie jest bynajmniej takie, abyśmy ze spostrzeżeń, wynikających z obserwacji rysunku i dotyczących zależności, jakie zachodzą pomiędzy pewnemi pojęciami przestrzennemi, mogli już wyprowadzać definitywne wnioski co do badanych w Geometrji objektów psychologicznie nieokreślonych, będących odpowiednikami tych pojęć przestrzennych. Spostrzeżenia takie mogą conajwyżej być dla nas wskazówką, jakich zależności pomiędzy rozpatrywanymi w Geometrji objektami można się spodziewać. Definitywne zaś wyprowadzenie wniosku o istnieniu w Geometrji tych zależności wymaga dowodu, t. zn. wymaga wykazania, iż wymienione zależności wypływają jako logiczna konieczność z tych zależności, o jakich jest mowa w pewnikach Geometrji oraz w dowiedzionych już jej twierdzeniach.

Poza tem znaczeniem rysunek w Geometrji posiada również znaczenie illustracji do naszych rozważań, ułatwiającej ich zrozumienie.

III. Punkty, proste, płaszczyzny właściwe i niewłaściwe. — 1. Tworząc naukę matematyczną, której wyniki mają być stosowane do pewnej kategorji pojęć psychologicznie określonych, winniśmy zarówno przy ustalaniu pewników tej nauki jak też i przy dalszem jej rozwijaniu zachowywać odpowiedniość pomiędzy badanymi w tej nauce psychologicznie nieokreślonymi objektami a pojęciami psychologicznie określonemi, należącemi do danej kategorji pojęć. Może się jednak okazać, iż, ze względu na budowę wewnętrzną danej nauki matematycznej, pożytecznem byłoby poczynienie w niej takich uogólnień, które wywołałyby pewien rozdźwięk pomiędzy daną nauką matematyczną a kategorją pojęć psychologicznie określonych, do której ta nauka matematyczna ma być stosowana. W takich razach decydującym dla nas będzie wzgląd na dobro danej nauki matematycznej, jako takiej, kwestję zaś większej lub też mniejszej harmonji pomiędzy tą nauką matematyczną a kategorją pojęć, stanowiącą dziedzinę jej zastosowań, pozostawiamy na dalszym planie. Postępując w ten sposób, my wprawdzie chwilami będziemy zatracali styczność z rozpatrywaną kategorją pojęć, jednak, ogólnie biorąc, wyniki, otrzymane w zbudowanej w ten sposób nauce matematycznej, w pewnych granicach będą mogły być do tej kategorji pojęć stosowane.

2. Dla takich właśnie względów zostały wprowadzone do Geometrji objekty, noszące nazwy punktów niewłaściwych albo nieskończenie dalekich (albo punktów, leżących w nieskończoności), prostych niewłaściwych albo nieskończenie dalekich (albo prostych, leżących w nieskończoności) i płaszczyzny niewłaściwej albo nieskończenie dalekiej (albo płaszczyzny, leżącej w nieskończoności). Są to objekty, którym w dziedzinie pojęć przestrzennych nie odpowiadają pojęcia, zwane punktami, prostemi i płaszczyzną, i które zostały wprowadzone do Geometrji ze względu na dobro Geometrji, jako nauki matematycznej.

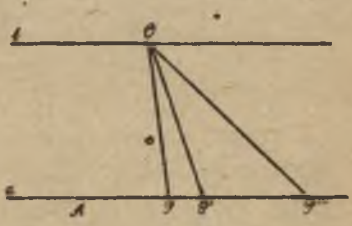
Punkty, proste i płaszczyzny, rozpatrywane w Geometrji elementarnej, t. zn. odpowiadające pojęciom przestrzennym, noszącym takie same nazwy, w odróżnieniu od wymienionych przed chwilą objektów nowych nazywamy punktami, prostemi i płaszczyznami właściwymi albo leżącymi w skończoności.

Ponieważ punkty, proste i płaszczyzna niewłaściwe w Geometrji elementarnej rozpatrywane nie są, my zaś w rozważaniach naszych, poświęconych Geometrji analitycznej, z nauk geometrycznych będziemy uważali za znaną tylko Geometrję elementarną oraz Trygonometrję płaską, t. zn. będziemy się opierali tylko na wynikach, otrzymanych w tych dwu naukach, przeto chcąc w wymienionych rozważaniach oprócz punktów, prostych i płaszczyzn właściwych rozpatrywać również punkty, proste i płaszczyznę niewłaściwe, musimy najpierw te objekty określić.

3. W Geometrji elementarnej każdą prostą właściwą uważaliśmy za pewien zbiór punktów właściwych. Tutaj każdą prostą właściwą też uważamy za pewien zbiór punktów, lecz już nie samych punktów właściwych, a punktów właściwych i **jednego** punktu niewłaściwego.

Dwie różne proste właściwe uważamy za posiadające ten sam punkt niewłaściwy wtedy i tylko wtedy, gdy są one do siebie równoległe, t. zn. gdy leżą w jednej płaszczyźnie właściwej i przytem nie posiadają punktu właściwego wspólnego.

O prostych właściwych równoległych mówimy, że posiadają jeden i ten sam kierunek, albo też, że ich kierunki są jednakowe; natomiast o prostych nierównoległych mówimy, że posiadają kierunki różne. Możemy zatem powiedzieć, że dwie proste właściwe posiadają punkt niewłaściwy wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy ich kierunki są jednakowe.


Rys. 1

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek prostą właściwą a (rys. 1). Przez dowolny punkt właściwy O, nie należący do prostej a, przesuńmy prostą właściwą b, równoległą do prostej a, oraz prostą właściwą c, nierównoległą do prostej a, której punkt przecięcia się z prostą a oznaczmy przez P. Jeżeli teraz prosta c będzie się obracała około punktu O w pewnym kierunku stałym, dążąc do prostej b, jako do położenia granicznego, to punkt przecięcia się prostej c z prostą a będzie się poruszał po prostej a w pewnym kierunku stałym (zajmując kolejno położenia P', P'', ...), dążąc do punktu niewłaściwego prostej a, jako do położenia granicznego.

Podczas wymienionego ruchu punkt P oddala się nieograniczenie od każdego dowolnie wybranego punktu właściwego A prostej a (jeżeli bowiem punkt P podczas wymienionego ruchu nie przechodzi przez punkt A, to w takim razie oddala się on nieograniczenie od punktu A już od samego początku ruchu; jeżeli zaś punkt P podczas wymienionego ruchu przechodzi przez punkt A, to oddala się on nieograniczenie od punktu A począwszy od chwili przejścia przez punkt A).

Dlatego też punkt niewłaściwy prostej właściwej uważamy za punkt, którego odległość od każdego punktu właściwego tej prostej jest nieskończenie wielka.

Punkt niewłaściwy uważamy za dany, jeżeli jest dana jakaś prosta właściwa, do której ten punkt należy.

Punkt niewłaściwy uważamy za leżący w pewnej płaszczyźnie właściwej, jeżeli w tej płaszczyźnie leży jakaś prosta właściwa, zawierająca wymieniony punkt.

Jeżeli więc prosta właściwa i płaszczyzna właściwa są do siebie równoległe, to punkt niewłaściwy danej prostej właściwej należy do danej płaszczyzny właściwej, albowiem w rozpatrywanym przypadku w danej płaszczyźnie właściwej istnieją proste właściwe, równoległe do danej prostej właściwej, a zatem posiadające z nią punkt niewłaściwy wspólny. Jeżeli natomiast prosta właściwa w pewnej płaszczyźnie właściwej nie leży i nie jest do niej równoległa, to w takim razie punkt niewłaściwy tej prostej właściwej w danej płaszczyźnie właściwej nie leży, albowiem w rozpatrywanym przypadku w danej płaszczyźnie właściwej niema prostej właściwej, równoległej do danej prostej właściwej.

Możemy więc powiedzieć, że: Punkt niewłaściwy danej prostej właściwej leży w danej płaszczyźnie właściwej wtedy i tylko wtedy, gdy dana prosta właściwa albo jest zawarta w danej płaszczyźnie właściwej albo też jest do niej równoległa.

Ponieważ w każdej płaszczyźnie właściwej proste właściwe istnieją, każda zaś z tych prostych właściwych posiada jeden (i tylko jeden) punkt niewłaściwy, przeto każda płaszczyzna właściwa oprócz punktów właściwych zawiera także punkty niewłaściwe.

Ogół punktów niewłaściwych, leżących w jednej płaszczyźnie właściwej, nazywamy prostą niewłaściwą. A więc w każdej płaszczyźnie właściwej mamy **jedną i tylko jedną** prostą niewłaściwą. Z definicji prostej niewłaściwej wynika, iż prosta niewłaściwa jest utworzona z samych punktów niewłaściwych, t. zn. nie zawiera ani jednego punktu właściwego.

Jeżeli 2 płaszczyzny właściwe są równoległe, to wtedy w każdej z nich istnieją proste właściwe, równoległe do jakiejś prostej właściwej, wziętej dowolnie w drugiej płaszczyźnie. Stąd możemy wyprowadzić wniosek, iż każdy punkt niewłaściwy, leżący w jednej z tych dwu płaszczyzn, leży również w drugiej płaszczyźnie, a zatem te 2 płaszczyzny posiadają tę samą prostą niewłaściwą. Jeżeli natomiast 2 płaszczyzny właściwe nie są równoległe, to wtedy w jednej z nich istnieją proste właściwe, równoległe do jakiejś prostej właściwej, leżącej w drugiej płaszczyźnie, tylko w tym przypadku, gdy ta ostatnia prosta właściwa jest równoległa do prostej właściwej, wspólnej obydwu płaszczyznom. Stąd wynika, iż 2 płaszczyzny właściwe nierównoległe oprócz pewnych punktów właściwych posiadają wspólnie jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy, mianowicie punkt niewłaściwy prostej właściwej, wspólnej obydwu płaszczyznom.

Mamy więc: Dwie różne płaszczyzny właściwe posiadają tę samą prostą niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy są do siebie równoległe.

Prostą niewłaściwą uważamy za daną, jeżeli jest dana jakaś płaszczyzna właściwa, do której ta prosta należy.

Ogół **wszystkich** punktów niewłaściwych nazywamy płaszczyzną niewłaściwą. A zatem oprócz płaszczyzn właściwych mamy **jedną i tylko jedną** płaszczyznę niewłaściwą. Z definicji płaszczyzny niewłaściwej wynika, że płaszczyzna niewłaściwa jest utworzona z samych punktów niewłaściwych, t. zn. nie zawiera ani jednego punktu właściwego.

4. W Geometrji elementarnej mamy zależność, iż jeżeli są dane dwa punkty różne, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna prosta, do której te punkty należą. Przez punkty i proste rozumiemy tam oczywiście punkty i proste właściwe. Czy mamy tę zależność również i teraz, gdy przez punkty i proste rozumiemy nietylko punkty i proste właściwe, lecz również punkty i proste niewłaściwe? Chcąc na to pytanie odpowiedzieć, musimy rozpatrzeć dwa przypadki, mianowicie gdy jeden z punktów danych jest punktem właściwym, drugi zaś niewłaściwym, oraz gdy obydwa punkty dane są punktami niewłaściwymi.

Powiedzenie, iż są dane dwa punkty różne, z których jeden jest punktem właściwym, drugi zaś niewłaściwym, jest równoznaczne z powiedzeniem, iż jest dany jakiś punkt właściwy oraz jakaś prosta właściwa, zawierająca punkt niewłaściwy, który uważamy za dany. W tym przypadku istnieją dwie możliwości: albo dany punkt właściwy należy do danej prostej właściwej, albo nie należy.

Jeżeli dany punkt właściwy należy do danej prostej właściwej, dana prosta właściwa posiada wtedy tę własność, iż zawiera obydwa punkty dane. I przytem dana prosta właściwa jest wtedy jedyną prostą, posiadającą tę własność, albowiem wszelka inna prosta, przechodząca przez dany punkt właściwy, jest prostą właściwą (gdyż zawiera punkt właściwy, mianowicie d a n y punkt właściwy), nierównoległą do danej prostej właściwej (gdyż posiada ona z daną prostą właściwą punkt właściwy wspólny, mianowicie d a n y punkt właściwy), a zatem nie przechodzącą przez jej punkt niewłaściwy.

Jeżeli zaś dany punkt właściwy nie należy do danej prostej właściwej, to wtedy prosta właściwa, przechodząca przez dany punkt właściwy i równoległa do danej prostej właściwej, posiada tę własność, iż zawiera obydwa punkty dane. I jest ona wtedy jedyną prostą, posiadającą tę własność, albowiem wszelka inna prosta, przechodząca przez dany punkt właściwy, jest prostą właściwą, nierównoległą do danej prostej właściwej (gdyż, jak wiemy z Geometrji elementarnej, przez dany punkt właściwy, leżący zewnątrz danej prostej właściwej, przechodzi jedna i tylko jedna prosta właściwa, równoległa do danej prostej właściwej).

Widzimy więc, że: gdy są dane dwa punkty (różne), z których jeden jest punktem właściwym, drugi zaś niewłaściwym, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna prosta, do której te punkty należą.

Pozostaje nam więc jeszcze rozpatrzeć przypadek, gdy są dane 2 różne punkty niewłaściwe, czyli, innemi słowy, gdy są dane 2 różne i nierównoległe proste właściwe, zawierające punkty niewłaściwe, które uważamy za dane. Zgóry możemy powiedzieć, że jeżeli w tym przypadku istnieje prosta, zawierająca obydwa punkty dane, to jest ona prostą niewłaściwą, albowiem każda prosta właściwa zawiera tylko jeden punkt niewłaściwy. Chodzi więc o to, czy w rozpatrywanym przypadku istnieją proste niewłaściwe, zawierające obydwa punkty dane, i jeżeli tak, to ile takich prostych istnieje.

W rozpatrywanym przypadku mamy 2 możliwości: albo 2 dane proste właściwe, różne i nierównoległe, leżą w jednej płaszczyźnie właściwej, albo nie leżą.

Jeżeli one leżą w jednej płaszczyźnie właściwej, to prosta niewłaściwa tej płaszczyzny właściwej zawiera obydwa punkty dane. I przytem jest ona jedyną prostą niewłaściwą, posiadającą tę własność. Jeżeli bowiem prosta niewłaściwa jakiejś innej płaszczyzny właściwej zawiera obydwa punkty dane, to ta płaszczyzna właściwa jest wtedy równoległa do każdej z dwu danych prostych właściwych, a zatem jest ona także równoległa do płaszczyzny właściwej, w której dane proste właściwe leżą, dwie zaś płaszczyzny właściwe równoległe posiadają tę samą prostą niewłaściwą.

Jeżeli natomiast 2 dane proste właściwe, różne i nierównoległe, nie leżą w jednej płaszczyźnie właściwej, to prosta niewłaściwa płaszczyzny właściwej, zawierającej jedną z dwu danych prostych właściwych i równoległej do drugiej z tych dwu prostych, zawiera obydwa punkty dane. I jest ona jedyną prostą niewłaściwą, posiadającą tę własność, jeżeli bowiem prosta niewłaściwa jakiejś innej płaszczyzny właściwej zawiera obydwa punkty dane, to ta płaszczyzna właściwa jest wtedy równoległa do wymienionej płaszczyzny właściwej, a zatem posiada z nią prostą niewłaściwą wspólną.

A więc, rozumiejąc ogólnie przez punkty i proste zarówno punkty i proste właściwe, jak też punkty i proste niewłaściwe, możemy powiedzieć, że:

a) Jeżeli są dane 2 punkty różne, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna prosta, do której te punkty należą.

Tak samo z łatwością moglibyśmy się przekonać, że ogólnie istnieją zależności:

b) Jeżeli są dane 3 punkty różne, nie należące do jednej prostej, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna płaszczyzna, do której one należą;

c) Jeżeli są dane punkt i prosta, nie należące do siebie, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna płaszczyzna, do której one należą.

Oprócz takich zależności, jak a), b), c), które mieliśmy już w Geometrji elementarnej, mamy teraz, o czem łatwo możemy się przekonać, i inne zależności:

d) Dwie płaszczyzny różne zawsze posiadają jedną i tylko jedną prostą wspólną;

e) Trzy płaszczyzny różne, nie zawierające jednej prostej, zawsze posiadają jeden i tylko jeden punkt wspólny;

f) Płaszczyzna i prosta, nie należące do siebie, zawsze posiadają jeden i tylko jeden punkt wspólny;

g) Dwie proste różne, leżące w jednej płaszczyźnie, zawsze posiadają jeden i tylko jeden punkt wspólny.

5. W Geometrji elementarnej rozpatruje się proste równoległe, prostą i płaszczyznę wzajemnie równoległe, płaszczyzny równoległe. Oczywiście są to proste i płaszczyzny właściwe. Tutaj własność dwu prostych, względnie dwu płaszczyzn, względnie prostej i płaszczyzny, którą nazywamy ich wzajemną równoległością, rozciągamy również na elementy niewłaściwe. Mianowicie równoległemi nazywamy jakiekolwiek 2 proste, posiadające punkt niewłaściwy wspólny, względnie jakąkolwiek prostą i jakąkolwiek płaszczyznę, posiadające punkt niewłaściwy wspólny, względnie jakiekolwiek 2 płaszczyzny, posiadające prostą niewłaściwą wspólną (nakrywanie się 2 prostych, względnie należenie prostej do płaszczyzny, względnie nakrywanie się dwu płaszczyzn, uważamy za przypadek szczególny równoległości). Na mocy tej definicji 2 proste niewłaściwe zawsze są do siebie równoległe, prosta niewłaściwa jest równoległa do każdej prostej właściwej, leżącej z nią w jednej płaszczyźnie właściwej, prosta niewłaściwa jest równoległa do każdej płaszczyzny (zarówno właściwej, jak też i niewłaściwej), płaszczyzna niewłaściwa jest równoległa do każdej prostej (zarówno właściwej, jak też i niewłaściwej), płaszczyzna niewłaściwa jest równoległa do każdej płaszczyzny (zarówno właściwej, jak też i niewłaściwej).

6. Wprowadzenie do Geometrji elementów niewłaściwych, t. zn. punktów, prostych i płaszczyzny niewłaściwych, często ułatwia nam rozumowanie, jak również pozwala na wypowiadanie różnych wniosków w formie ogólnej.

Jeżeli np. w jakiemś rozumowaniu geometrycznem występują 2 płaszczyzny różne, to na mocy zależności d) można stąd wywnioskować, że istnieje wtedy jedna i tylko jedna prosta, należąca do tych płaszczyzn, i ewentualnie można tę prostą wprowadzić do rozważań. Gdybyśmy zaś elementów niewłaściwych do Geometrji nie wprowadzili, to wtedy, w razie wystąpienia w jakiemś rozumowaniu geometrycznem dwu płaszczyzn różnych, moglibyśmy wywnioskować, iż te płaszczyzny albo posiadają prostą wspólną, albo też nie posiadają, mogłaby więc zajść potrzeba rozpatrywania każdego z tych dwu przypadków oddzielnie. Dzięki więc wprowadzeniu do Geometrji elementów niewłaściwych możemy czasami uniknąć rozbicia jakiegoś rozumowania na kilka części.

Korzyść, wynikającą z wprowadzenia do Geometrji elementów niewłaściwych, można do pewnego stopnia porównać z korzyścią, wynikającą z wprowadzenia do Algebry liczb zespolonych. Dzięki wprowadzeniu do Algebry liczb zespolonych mamy np. twierdzenie ogólne, iż każde równanie algebraiczne stopnia 2-ego posiada 2 pierwiastki, jak również możemy podać rozwiązanie ogólne takiego równania. Gdybyśmy zaś liczb zespolonych do Algebry nie wprowadzili, to zarówno nie mielibyśmy wymienionego twierdzenia ogólnego, dotyczącego liczby pierwiastków równania kwadratowego, jak też i nie mielibyśmy rozwiązania ogólnego takiego równania.

IV. Zwrot prostej, odcinka, promienia, pęku promieni, kąta. — 1. Zaznaczyliśmy już wyżej, że w rozważaniach naszych Geometrję elementarną będziemy uważali za znaną. Istnieją jednak takie podręczniki Geometrji elementarnej, w których pewne własności utworów geometrycznych, należące do zakresu tej Geometrji, wcale nie są omawiane lub też są omawiane bardzo pobieżnie. W wielu np. podręcznikach Geometrji elementarnej nie rozpatruje się wcale zwrotów prostej, odcinka, promienia, pęku promieni i kąta, chociaż powinny one być tam rozpatrywane. Dla tej właśnie przyczyny oraz ze względu na to, że w naszych rozważaniach wymienione zwroty będą odgrywały pewną rolę, poświęcimy im tu słów parę.

2. Przyjmijmy np. jako pewnik, że n a p r o s t e j i s t n i e j ą 2 w p r o s t s o b i e p r z e c i w n e p o r z ą d k i n a s t ę p s t w a p u n k t ó w, i te porządki nazwijmy z w r o t a m i prostej.

Jeżeli więc są dane na prostej 2 punkty A i B, to przy jednym zwrocie tej prostej punkt B następuje po punkcie A, przy drugim zaś jej zwrocie punkt A następuje po punkcie B. Ogół punktów prostej, które przy pierwszym z wymienionych jej zwrotów nie wyprzedzają punktu A i jednocześnie nie następują po punkcie B, a zatem które przy drugim zwrocie prostej nie wyprzedzają punktu B i jednocześnie nie następują po punkcie A, nazywamy *odcinkiem* prostej, posiadającym punkty krańcowe A i B.

Dwa wprost sobie przeciwne zwroty prostej określają na każdym odcinku, zawartym w tej prostej, *dwa wprost sobie przeciwne zwroty odcinka*.

Ogół punktów prostej, które przy pewnym zwrocie prostej jakiegoś jej punktu A nie wyprzedzają, a zatem które przy drugim zwrocie prostej po punkcie A nie następują, nazywamy *promieniem*. Pierwszy z wymienionych zwrotów prostej określa na rozpatrywanym promieniu pewien zwrot, który nazywamy *zwrotem promienia*. Ponieważ przy tym zwrocie punkt A jest pierwszym punktem promienia, przeto ten punkt nazywamy *punktem początkowym* albo też wprost *początkiem* promienia. Mówimy też, że rozpatrywany promień *wychodzi* z punktu A.

Chociaż każda prosta, względnie każdy odcinek, posiada 2 zwroty, to jednak czasami jeden zwrot prostej, względnie odcinka, będziemy wyróżniali.

Chcąc wyróżnić np. ten zwrot prostej, przy którym pewien punkt B tej prostej następuje po innym jej punkcie A, będziemy oznaczali rozpatrywaną prostą symbolem $\overline{AB}$. Gdybyśmy zaś chcieli wyróżnić drugi zwrot rozpatrywanej prostej, t. zn. zwrot, przy którym punkt A następuje po punkcie B, to oznaczylibyśmy tę prostą symbolem $\overline{BA}$. Jeżeli natomiast żadnego zwrotu rozpatrywanej prostej nie wyróżniamy, to oznaczamy ją wtedy dowolnie albo symbolem AB albo symbolem BA (t. zn. litery A i B piszemy w porządku dowolnym, przyczem nad temi literami nie piszemy już kreski poziomej).

Ten sam sposób oznaczania będziemy stosowali również do odcinków, z tem tylko zastrzeżeniem, że przez punkty A i B należy wtedy rozumieć punkty krańcowe odcinka. Przyczem punkt A będziemy nazywali *punktem początkowym*, albo wprost *początkiem*, odcinka $\overline{AB}$, punkt B zaś będziemy nazywali *punktem końcowym*, albo wprost *końcem*, tego odcinka. Dla odcinka $\overline{BA}$, odwrotnie, punkt B będzie początkiem, punkt A zaś końcem.

Zresztą w przypadku, gdy żadnego zwrotu rozpatrywanej prostej, względnie rozpatrywanego odcinka, nie wyróżniamy, możemy oznaczyć tę prostą, względnie ten odcinek, za pomocą jednej tylko litery. To samo stosuje się również wtedy, gdy jeden zwrot rozpatrywanej prostej, względnie rozpatrywanego odcinka, wyróżniamy, tylko że ten wyróżniony zwrot jest już w inny sposób określony, wobec czego nie jest koniecznem, aby symbol na oznaczenie wymienionej prostej, względnie wymienionego odcinka, określał ten zwrot.

Promień oznaczamy albo dwiema napisanemi obok siebie literami, z których pierwsza litera oznacza początek promienia, druga zaś jakikolwiek inny jego punkt, albo też jedną tylko literą.

Na rysunku zwrot przedstawiamy za pomocą strzałki. Np. prostą $\overline{AB}$, t. zn. prostą AB oraz ten jej zwrot, przy

Rys. 2

Rys. 3

którym punkt B następuje po punkcie A, przedstawiamy albo tak, jak na rysunku 2, albo tak, jak na rysunku 3.

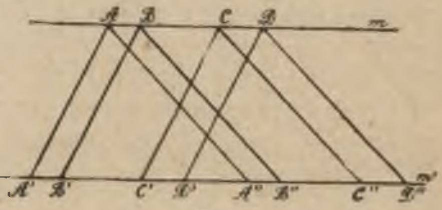
Jeżeli 3 punkty A, B, C, leżące na jednej prostej, przy jednym zwrocie tej prostej następują po sobie w kolei ABC, a zatem przy drugim jej zwrocie w kolei CBA, to mówimy wtedy, że punkt B leży *pomiędzy* punktami A i C, albo też, że punkty A i C leżą *po stronach przeciwnych* punktu B.

3. Przyjmijmy np. jako pewniki własności następujące:

Rys. 4

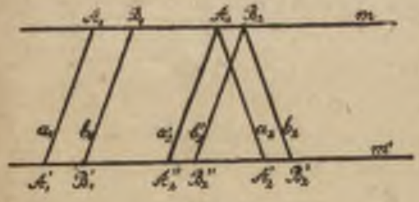
α) Jeżeli dwie jakiekolwiek proste m i m' (rys. 4), leżące w jednej płaszczyźnie, przetniemy prostemi $a, b, c, \ldots$, wzajemnie równoległemi, lecz nierównoległemi do żadnej z prostych m i m', odpowiednio w punktach $A, B, C, \ldots$ oraz $A', B', C', \ldots$, to koleje, w jakich następują po sobie punkty $A, B, C, \ldots$ prostej m (przy obydwu zwrotach tej prostej), są takie same, jak koleje, w jakich następują po sobie punkty $A', B', C', \ldots$ prostej m' (przy obydwu zwrotach tej prostej);

β) Jeżeli m i m' są dwiema prostemi równoległemi (rys. 5) i na jednej z nich, np. na prostej m, weźmiemy dowolną liczbę punktów $A, B, C, D, \ldots$, które przy jednym ze zwrotów prostej m następują po sobie np. w kolei $ABCD \ldots$, poprowadzimy przez te punkty proste równoległe (różne od prostej m), których punkty przecięcia się z prostą m' oznaczymy przez $A', B', C', D', \ldots$, oraz jakieś inne proste równoległe (różne od prostej m), których punkty przecięcia się z prostą m' oznaczymy przez $A'', B'', C'', D'', \ldots$, to wtedy przy jednym i tym samym zwrocie prostej m' punkty $A', B', C', D', \ldots$ będą następowały po sobie w kolei $A'B'C'D' \ldots$ oraz punkty $A'', B'', C'', D'', \ldots$ będą następowały po sobie w kolei $A''B''C''D'' \ldots$.



Rys. 5

Niechaj będą dane dwie proste równoległe m i m' (rys. 6). Przetnijmy te proste parą prostych równoległych a_1, b_1, oraz jakąś inną parą prostych równoległych a_2, b_2. Oznaczmy punkty przecięcia się prostych a_1 i b_1 z prostą m przez A_1 i B_1, z prostą zaś m' przez A_1' i B_1', oraz punkty przecięcia się prostych a_2 i b_2 z prostą m przez A_2 i B_2, z prostą zaś m' przez A_2' i B_2'. Przyjmijmy, że przy jednym i tym samym zwrocie prostej m punkt B_1 następuje po punkcie A_1 oraz punkt B_2 następuje po punkcie A_2. Poprowadźmy przez punkty A_1, B_1, A_2, B_2 cztery proste równoległe a_1, b_1, a_2', b_2'. Pierwsze dwie z pośród tych czterech prostych przecinają prostą m' w punktach A_1' i B_1', punkty zaś przecięcia się



Rys. 6

prostych a_2' i b_2' z prostą m' oznaczmy przez A_2'' i B_2''. Na mocy podanego wyżej pewnika α) możemy powiedzieć, że koleje, w jakich następują po sobie punkty A_1', B_1', A_2'', B_2'' przy obydwu zwrotach prostej m', są takie same, jak koleje, w jakich następują po sobie przy obydwu zwrotach prostej m punkty A_1, B_1, A_2, B_2. A ponieważ, według założenia, punkty A_1, B_1, A_2, B_2 przy jednym ze zwrotów prostej m następują po sobie w kolei, przy której punkt B_1 następuje po punkcie A_1 oraz jednocześnie punkt B_2 następuje po punkcie A_2, przeto przy jednym ze zwrotów prostej m' punkty A_1', B_1', A_2'', B_2'' następują po sobie w kolei, przy której punkt B_1' następuje po punkcie A_1' oraz jednocześnie punkt B_2'' następuje po punkcie A_2''. Lecz, biorąc pod uwagę parę prostych równoległych a_2, b_2, oraz parę prostych równoległych a_2', b_2', na mocy podanego wyżej pewnika β) możemy powiedzieć, że przy tym zwrocie prostej m', przy którym punkt B_2'' następuje po punkcie A_2'', również punkt B_2' następuje po punkcie A_2'.

Mamy zatem: Jeżeli m i m' są dwiema prostemi równoległemi, których punkty przecięcia się z jakąś parą prostych równoległych a_1, b_1 oznaczymy odpowiednio przez A_1, B_1, i A_1', B_1', oraz punkty przecięcia się z jakąś inną parą prostych równoległych a_2, b_2 oznaczymy odpowiednio przez A_2, B_2 i A_2', B_2', to w razie, gdy przy jednym i tym samym zwrocie prostej m punkt B_1 następuje po punkcie A_1 oraz punkt B_2 następuje po punkcie A_2, również przy jednym i tym samym zwrocie prostej m' punkt B_1' następuje po punkcie A_1' oraz punkt B_2' następuje po punkcie A_2'.

Zwroty dwu prostych równoległych m i m' połączmy teraz w 2 pary w sposób następujący: jeżeli A i B oraz A' i B' oznaczają punkty przecięcia się dwu prostych równoległych danych m oraz m' z dwiema jakiemikolwiek dowolnie wziętemi prostemi równoległemi a i b (które nie są równoległe do prostych m i m'), to do jednej pary zwrotów zaliczmy zwrot prostej m, przy którym punkt B następuje po punkcie A, oraz zwrot prostej m', przy którym punkt B' następuje po punkcie A', do drugiej zaś pary zwrotów zaliczmy 2 pozostałe zwroty prostych m i m'. Opierając się na twierdzeniu ostatniem możemy powiedzieć, że otrzymane w ten sposób pary zwrotów prostych m i m' nie zależą wcale od wyboru prostych równoległych a i b, są zatem zupełnie określone, jeżeli tylko są dane proste równoległe m i m'.

Takie 2 zwroty dwu prostych równoległych, jakie zaliczyliśmy przed chwilą do jednej i tej samej pary, będziemy nazywali zwrotami j e d n a k o w y m i. Natomiast takie dwa zwroty dwu prostych równoległych, jakie przy określonym przed chwilą podziale zwrotów tych dwu prostych na dwie pary zaliczyliśmy do par różnych, będziemy nazywali zwrotami p r z e c i w n y m i. Zwroty dwu prostych różnych i nierównoległych będziemy nazywali zwrotami różnymi.

Również jednakowymi będziemy nazywali zwrot prostej i określony przezeń zwrot jakiegoś odcinka albo promienia, zawartego w tej prostej. Natomiast przeciwnymi będziemy nazywali zwrot prostej i zwrot jakiegoś zawartego w niej odcinka albo promienia, określony przez drugi zwrot tej prostej.

Niechaj będą dane 3 proste równoległe m, m', m''. Jeden ze zwrotów prostej m oznaczmy przez z. Zwroty prostych m' i m'', jednakowe ze zwrotem z prostej m, oznaczmy odpowiednio przez z' i z''. Weźmy na prostej m jakiekolwiek 2 punkty A i B. Przypuśćmy, że przy zwrocie z prostej m punkt B następuje po punkcie A. Przez punkty A i B poprowadźmy 2 proste równoległe a i b (różne od prostej m). Punkty przecięcia się tych prostych z prostemi m' oraz m'' oznaczmy odpowiednio przez A' i B' oraz A'' i B''. Ponieważ zwroty z' i z'' prostych m' i m'' są jednakowe ze zwrotem z prostej m, przeto przy zwrocie z' prostej m' punkt B' następuje po punkcie A' oraz przy zwrocie z'' prostej m'' punkt B'' następuje po punkcie A''. Stąd zaś wynika, że zwroty z' i z'' prostych m' i m'' są jednakowe.

Otrzymaliśmy więc, że: jeżeli zwroty dwu prostych są jednakowe ze zwrotem trzeciej prostej, to te zwroty są również pomiędzy sobą jednakowe. W sposób analogiczny moglibyśmy się przekonać, że: jeżeli zwroty dwu prostych są

2*

przeciwne zwrotowi trzeciej prostej, to te zwroty są pomiędzy sobą jednakowe; jeżeli z pośród dwu prostych jedna posiada zwrot jednakowy ze zwrotem trzeciej prostej, druga zaś posiada zwrot przeciwny, aniżeli ta trzecia prosta, to w takim razie pierwsze dwie proste posiadają zwroty przeciwne.

Wprowadźmy teraz definicję następującą: jeżeli symbol r oznacza prostą, każdy zaś z symboli s i t oznacza dowolnie prostą, odcinek lub promień (przyczem niekoniecznie te 2 symbole oznaczają jednocześnie taki sam utwór geometryczny, t. zn. mogą one oznaczać jednocześnie różne utwory geometryczne, a więc np. jeden z nich może oznaczać prostą, drugi zaś odcinek, i t. p.), to w razie, gdy każdy z utworów geometrycznych s i t posiada zwrot jednakowy ze zwrotem prostej r, zwroty utworów s i t nazywamy jednakowymi, natomiast w razie, gdy jeden z utworów geometrycznych s i t posiada zwrot jednakowy ze zwrotem prostej r, drugi zaś posiada zwrot przeciwny zwrotowi prostej r, zwroty utworów s i t nazywamy przeciwnymi; jeżeli proste, zawierające utwory geometryczne s i t, nie są równoległe (a więc i nie nakrywają się), to zwroty utworów s i t nazywamy różnymi.

Opierając się na tej definicji oraz na podanych przedtem definicjach zwrotów jednakowych lub przeciwnych dwu prostych równoległych, względnie prostej i zawartego w niej odcinka lub promienia, będziemy mogli mówić również o zwrotach jednakowych lub przeciwnych prostej i odcinka, względnie promienia, zawartego w prostej równoległej, albo dwu odcinków, względnie dwu promieni, względnie odcinka i promienia, zawartych w jednej prostej lub też w dwu prostych równoległych. Tak np. zwroty dwu odcinków jednej prostej, określone przez jeden i ten sam zwrot tej prostej, będą zwrotami jednakowymi.

4. Jeżeli z następstwa pewnych elementów $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n$ po sobie w kolei $e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n$ wynika następstwo ich po sobie również w kolejach $e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1$, $e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2, \ldots, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}$, $e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}$, to mówimy wtedy, że rozpatrywane elementy znajdują się w *uporządkowaniu cyklicznem*. W razie więc uporządkowania cyklicznego

pewnych elementów, każdy element może być uważany za element pierwszy.

5. Ogół wszystkich promieni, wychodzących z jednego punktu i leżących w jednej płaszczyźnie, nazywamy **pękiem promieni**. Punkt, z którego wychodzą wszystkie promienie pęku, nazywamy **wierzchołkiem** pęku.

Przyjmijmy np. jako pewnik, że **w pęku promieni istnieją 2 wprost sobie przeciwne uporządkowania cykliczne promieni**, i te uporządkowania nazwijmy **zwrotami** pęku.

Jeżeli więc a i b są dwoma promieniami pęku, to przy każdym zwrocie pęku następują one po sobie zarówno w kolei ab, jak też w kolei ba.

Jeżeli a, b, c są trzema promieniami pęku i wiemy, że przy jednym zwrocie pęku następują one po sobie np. w kolei abc, to stąd możemy wywnioskować, że przy tym samym zwrocie pęku rozpatrywane promienie następują po sobie również w kolejach bca i cab, przy drugim zaś zwrocie pęku następują one po sobie w kolejach cba, bac, acb. Jak więc widzimy, 3 promienie a, b, c pęku przy obydwu zwrotach pęku następują po sobie we wszelkich możliwych kolejach, jednak przy każdym zwrocie w innych, t. zn. niema takiej kolei, w której następowałyby po sobie promienie a, b, c jednocześnie przy każdym zwrocie pęku.

Stąd wynika, że, chcąc wyróżnić jakiś zwrot pęku, wystarczy podać jedną z kolei, w jakich następują po sobie przy tym zwrocie pewne 3 promienie pęku.

Ponieważ obydwa uporządkowania promieni pęku są cykliczne, przeto zwrot pęku nie określa jednoznacznie następstwa promieni pęku. Zwrot pęku będzie jednak określał jednoznacznie następstwo promieni pęku, jeżeli pewien promień pęku przyjmiemy jako pierwszy.

Jeżeli np. są dane 2 promienie a i b pęku i jako promień pierwszy przyjmiemy promień a, względnie b, to przy każdym zwrocie pęku promień b będzie następował po a, względnie promień a będzie następował po b. Gdybyśmy zaś, mając dane 2 promienie a i b pęku, jako promień pierwszy pęku przyjęli jakiś promień c, różny od każdego z promieni a i b, to, wziąwszy pod uwagę 3 promienie *a*, *b*, *c* pęku, moglibyśmy powiedzieć, że przy jednym zwrocie pęku następują one po sobie w kolei *c a b*, przy drugim zaś zwrocie pęku w kolei *c b a* (albowiem z pośród wszelkich możliwych kolei, w jakich 3 promienie *a*, *b*, *c* pęku następować po sobie mogą, tylko w tych dwu kolejach promień *c* występuje jako pierwszy), a zatem przy jednym zwrocie pęku promień *b* następowałby wtedy po *a*, przy drugim zaś zwrocie pęku promień *a* następowałby po *b*.

6. Ogół promieni pęku, które przy pewnym zwrocie pęku i w razie uważania pewnego promienia *a* pęku za promień pierwszy nie następują po pewnym promieniu *b* pęku, nazywamy **kątem**, przyczem wierzchołek pęku nazywamy **wierzchołkiem** kąta, promienie *a* i *b* pęku **ramionami** kąta, wymieniony zaś zwrot pęku **zwrotem** kąta.

Kąt jest więc jednoznacznie określony, jeżeli są dane jego ramiona oraz jego zwrot, przytem jeżeli jest wiadomem, które z danych jego ramion jest uważane za ramię pierwsze. Symbol na oznaczenie kąta powinien zatem te wszystkie rzeczy określać. Ponieważ zaś, jak widzieliśmy wyżej, zwrot pęku, a zatem i zwrot zawartego w nim kąta, jest jednoznacznie określony, jeżeli jest dana jedna z kolei, w jakiej następują po sobie przy tym zwrocie pewne 3 promienie pęku, zatem jako symbol na oznaczenie kąta, którego ramionami są promienie *a* i *b*, przyczem promień *a* jest ramieniem pierwszem, możemy przyjąć symbol *a c b*, gdzie *c* oznacza jakiś promień, należący do tego kąta i różny od promieni *a* i *b*.

Przyjąwszy ten sposób oznaczania kątów możemy powiedzieć, że kąty *a c b* i *b c a* zajmują tę samą część płaszczyzny, różnią się zaś zwrotami.

Jeżeli zwrot kąta, którego ramionami są promienie *a* i *b*, przyczem promień *a* jest ramieniem pierwszem, jest nam skądinąd wiadomy, tak, że nie jest już koniecznem, aby symbol na oznaczenie tego kąta określał jego zwrot, to wtedy wymieniony kąt możemy oznaczyć wprost symbolem *a b*.

Istnieją również przypadki, w których kąt jest dla nas dostatecznie określony, gdy go oznaczymy w ten sposób, jak się najczęściej kąty w Geometrji elementarnej oznacza, a mianowicie za pomocą trzech liter, np. ABC, z których litera środkowa oznacza wierzchołek kąta, litery zaś krańcowe oznaczają jakiekolwiek 2 punkty ramion. Taki przypadek zachodzi np. wtedy, gdy rozpatrujemy kąty wewnętrzne trójkąta, przyczem zwroty kątów nas nie interesują.

Zresztą czasami wystarcza nam oznaczenie kąta za pomocą jednej tylko litery.

Jeżeli, mówiąc o jakimś kącie, oznaczonym za pomocą liter, chcemy uniknąć wymawiania wyrazu „kąt", to w takim razie przed literami, oznaczającemi rozpatrywany kąt, umieszczamy znak $\angle$ lub $\sphericalangle$.

Na rysunku zwrot pęku promieni albo też kąta przedstawiamy za pomocą strzałki (rys. 7).

Rys. 7

7. W Trygonometrji płaskiej kąt posiada znaczenie nieco szersze. Chcąc dać definicję kąta, rozpatrywanego w Trygonometrji płaskiej, powrócimy znów do uporządkowania cyklicznego elementów.

Z definicji uporządkowania cyklicznego elementów oraz stąd, iż jeżeli element e' następuje po elemencie e oraz element e'' następuje po elemencie e', to również element e'' następuje po elemencie e, wynika co następuje:

Jeżeli elementy $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n$ znajdują się w uporządkowaniu cyklicznem, to wtedy z następstwa tych elementów po sobie w kolei $e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n$ można wnioskować o następstwie ich po sobie w kolejach:

$e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$,

$e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$,

$e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$,

. . . .

$e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$,

$e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$,

t. zn. w kolejach, jakie otrzymamy, wypisując dowolną liczbę razy jedną z grup elementów: $e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n$, albo $e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1$, albo $e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2, \ldots\ldots$, albo $e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}$, albo $e_n\, e_1\, e_2 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}$.

Te grupy elementów będziemy nazywali cyklami. Każda z podanych wyżej kolei jest to więc dowolną liczbę razy powtórzony jakiś cykl.

Weźmy pod uwagę np. kolej

$$e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots\ldots$$

Każdy element występuje tu dowolną liczbę razy. Jeżeli więc wymienimy tylko nazwę elementu, to przez to nie określimy jeszcze miejsca, jakie ten element w rozpatrywanym szeregu zajmuje. To miejsce byłoby określone, gdybyśmy np. podali numer porządkowy elementu w rozpatrywanym szeregu. Byłoby ono również określone, gdybyśmy podali nazwę elementu oraz numer porządkowy cyklu $e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_{n-2}\, e_{n-1}\, e_n$, w którym ten element występuje. Np. zarówno powiedzenie, iż mamy na myśli element, którego numer porządkowy w rozpatrywanym szeregu wynosi $n+2$, jak też równoznaczne z niem powiedzenie, iż mamy na myśli element e_2, znajdujący się w cyklu drugim, dokładnie określa miejsce, jakie ten element w rozpatrywanym szeregu zajmuje.

Przejdźmy teraz do pęku promieni.

Na mocy przyjętego pewnika w pęku promieni istnieją 2 wprost sobie przeciwne uporządkowania cykliczne elementów, które nazwaliśmy zwrotami pęku. Weźmy pod uwagę jedno z tych uporządkowań. Każdy promień pęku może być uważany za promień pierwszy cyklu, utworzonego ze wszystkich promieni pęku. Kolej, w jakiej następują po sobie promienie pęku, jest to dowolną liczbę razy powtórzony jakiś cykl. W takiej kolei każdy promień występuje dowolną liczbę razy. Miejsce, jakie promień w takiej kolei zajmuje, jest dla nas dostatecznie określone, jeżeli jest podana nazwa promienia oraz numer porządkowy cyklu, w którym ten promień występuje.

Ogół promieni pęku, które przy pewnym zwrocie pęku w kolei, posiadającej promień a pęku jako element pierwszy, po pewnym promieniu b pęku, znajdującym się w cyklu o danym numerze porządkowym, nie następują, nazywamy **kątem**, przyczem wierzchołek pęku nazywamy **wierzchołkiem** kąta, promienie a i b pęku **ramionami** kąta, wymieniony zaś zwrot pęku **zwrotem** kąta.

Kąty, rozpatrywane przez nas dotychczas, są to więc kąty, których drugie ramię b znajduje się w cyklu pierwszym.

Dwa kąty, posiadające te same ramiona pierwsze i drugie oraz ten sam zwrot, różniące się zaś tylko tem, że dla jednego z tych kątów numer porządkowy cyklu, w którym występuje ramię drugie, wynosi i, dla drugiego zaś $i+k$, różnią się od siebie o k kątów pełnych, t. zn. o kąt $2k\pi$.

Kąt, którego drugie ramię b znajduje się w cyklu pierwszym, oznaczaliśmy symbolem acb. Kąt, którego drugie ramię b znajduje się w cyklu drugim, możemy oznaczyć np. symbolem $acbb$, gdzie c oznacza jakiś promień pęku, różny od promieni a i b i należący do kąta, który posiada z kątem rozpatrywanym te same ramiona pierwsze i drugie oraz ten sam zwrot, różni się zaś od tego kąta tylko tem, że drugie jego ramię b znajduje się w cyklu pierwszym. Analogicznie kąt, którego drugie ramię b znajduje się w cyklu trzecim, możnaby oznaczyć symbolem $acbbb$, gdzie c posiada takie same znaczenie, jak w przypadku poprzednim, i t. d.

8. Przyjmijmy np. jako pewnik, że: **Jeżeli promienie $a, b, c, d, e, \ldots$ oraz $a', b', c', d', e', \ldots$ dwu pęków różnych Π i Π', leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, posiadają zwroty odpowiednio jednakowe, i jeżeli promienie $a, b, c, d, e, \ldots$ pęku Π przy jednym z jego zwrotów możemy uważać za następujące po sobie np. w kolei $abcde\ldots$, to promienie $a', b', c', d', e', \ldots$ pęku Π' przy jednym ze zwrotów tego pęku możemy uważać za następujące po sobie w kolei $a'b'c'd'e'\ldots$**

Niechaj będą dane 2 pęki różne Π i Π', leżące w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych.

Weźmy w pęku Π dwie trójki promieni: a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2. Przypuśćmy, że przy jednym i tym samym zwrocie pęku Π promienie a_1, b_1, c_1 możemy uważać za następujące po sobie w kolei $a_1 b_1 c_1$, a zatem również w kolejach $b_1 c_1 a_1$ i $c_1 a_1 b_1$, oraz promienie a_2, b_2, c_2 możemy uważać za następujące po sobie w kolei $a_2 b_2 c_2$, a zatem również w kolejach $b_2 c_2 a_2$ i $c_2 a_2 b_2$.

Niechaj teraz a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2' oznaczają promienie pęku Π', posiadające zwroty odpowiednio jednakowe z promieniami a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 pęku Π.

Na mocy pewnika ostatniego możemy powiedzieć, że koleje, w jakich następują po sobie przy obydwu zwrotach pęku Π' promienie a'_1, b_1', c_1', a_2', b_2', c_2', są takie same, jak koleje, w jakich następują po sobie przy obydwu zwrotach pęku Π promienie a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. A ponieważ, według założenia, koleje, w jakich przy jednym ze zwrotów pęku Π następują po sobie promienie a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, są tego rodzaju, iż promienie a_1, b_1, c_1, traktowane oddzielnie, następują po sobie w kolejach $a_1\ b_1\ c_1$, $b_1\ c_1\ a_1$, $c_1\ a_1\ b_1$, oraz promienie a_2, b_2, c_2, traktowane oddzielnie, następują po sobie w kolejach $a_2\ b_2\ c_2$, $b_2\ c_2\ a_2$, $c_2\ a_2\ b_2$, przeto koleje, w jakich przy jednym ze zwrotów pęku Π' następują po sobie promienie a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2', są tego rodzaju, iż promienie a_1', b_1', c_1', traktowane oddzielnie, następują po sobie w kolejach $a_1'\ b_1'\ c_1'$, $b_1'\ c_1'\ a_1'$, $c_1'\ a_1'\ b_1'$, oraz promienie a_2', b_2', c_2', traktowane oddzielnie, następują po sobie w kolejach $a_2'\ b_2'\ c_2'$, $b_2'\ c_2'\ a_2'$, $c_2'\ a_2'\ b_2'$.

Otrzymaliśmy więc, że przy jednym i tym samym zwrocie pęku Π' promienie a_1', b_1', c_1' następują po sobie w kolejach $a_1'\ b_1'\ c_1'$, $b_1'\ c_1'\ a_1'$, $c_1'\ a_1'\ b_1'$, oraz promienie a_2', b_2', c_2' następują po sobie w kolejach $a_2'\ b_2'\ c_2'$, $b_2'\ c_2'\ a_2'$, $c_2'\ a_2'\ b_2'$.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące: Jeżeli promienie a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 oraz a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2' dwu pęków różnych Π i Π', leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, posiadają zwroty odpowiednio jednakowe, i jeżeli przy jednym i tym samym zwrocie pęku Π promienie a_1, b_1, c_1 oraz a_2, b_2, c_2 możemy uważać za następujące po sobie w kolejach $a_1\ b_1\ c_1$ oraz $a_2\ b_2\ c_2$, to w takim razie również przy jednym i tym samym zwrocie pęku Π' promienie a_1', b_1', c_1' oraz a_2', b_2', c_2' możemy uważać za następujące po sobie w kolejach $a_1' b_1' c_1'$ oraz $a_2' b_2' c_2'$.

Zwroty dwu różnych pęków promieni Π i Π', leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, połączmy teraz w dwie pary w sposób następujący: jeżeli promienie a, b, c pęku Π oraz promienie a', b', c' pęku Π' posiadają zwroty odpowiednio jednakowe, to do jednej pary zwrotów zaliczmy zwrot pęku Π, przy którym promienie a, b, c tego pęku można uważać za następujące po sobie w kolei $a\ b\ c$, oraz zwrot pęku Π', przy którym promienie a', b', c' tego pęku można uważać za następujące po sobie w kolei $a'\ b'\ c'$, do drugiej zaś pary zwrotów zaliczmy 2 pozostałe zwroty pęków Π i Π'. Opierając się na twierdzeniu ostatniem możemy powiedzieć, że otrzymane w ten sposób pary zwrotów pęków Π i Π' nie zależą od wyboru trójek promieni o zwrotach odpowiednio jednakowych a, b, c i a', b', c', są zatem zupełnie określone, jeżeli tylko są dane pęki Π i Π'.

Takie 2 zwroty dwu różnych pęków promieni, leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, jakie zaliczyliśmy przed chwilą do jednej i tej samej pary, będziemy nazywali zwrotami j e d n a k o w y m i. Natomiast takie 2 zwroty dwu różnych pęków promieni, leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, jakie zaliczyliśmy do par różnych, będziemy nazywali zwrotami p r z e c i w n y m i.

Zwroty dwu różnych pęków promieni, leżących w dwu płaszczyznach nierównoległych (a zatem i nie nakrywających się), będziemy nazywali zwrotami r ó ż n y m i.

Zwroty wszystkich pęków promieni, leżących w jednej płaszczyźnie, możemy podzielić na dwie grupy tego rodzaju, iż 2 zwroty, należące do jednej i tej samej grupy, będą jednakowe, 2 zaś zwroty, należące do grup różnych, będą przeciwne (wystarczy mianowicie w tym celu wyjść z jednego ze zwrotów jakiegokolwiek pęku promieni rozpatrywanej płaszczyzny, który oznaczmy np. przez z, i następnie do jednej grupy zaliczyć zwrot z oraz wszystkie zwroty, jednakowe ze zwrotem z, do drugiej zaś grupy zaliczyć wszystkie zwroty, przeciwne zwrotowi *z*). Możemy to wyrazić, mówiąc, iż na płaszczyźnie istnieją tylko 2 wprost sobie przeciwne zwroty pęków promieni.

Ponieważ zwrotem kąta nazwaliśmy jeden ze zwrotów pęku promieni, zawierającego ten kąt, przeto dwa kąty, leżące w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, posiadają zwroty jednakowe albo przeciwne, dwa zaś kąty, leżące w dwu płaszczyznach różnych nierównoległych, posiadają zwroty różne.

9. Na zakończenie musimy zaznaczyć, że w dalszych rozważaniach naszych będziemy się opierali nietylko na tych własnościach prostych, odcinków, promieni, pęków promieni i kątów, jakie podaliśmy tutaj, lecz wogóle będziemy się opierali na wszystkich ich własnościach, znanych z Geometrji elementarnej oraz z Trygonometrji płaskiej. Chociaż bowiem w naszych rozważaniach obecnych podaliśmy definicje odcinka, promienia, pęku promieni i kąta, to jednak nie oznacza to wcale, abyśmy sądzili, że czytelnik mógł przedtem tych utworów geometrycznych nie znać, przeciwnie, zakładamy, że zna on całą Geometrję elementarną oraz Trygonometrję płaską. Uczyniliśmy to ze względu na własności prostych,odcinków, promieni, pęków promieni i kątów, które nazywamy ich zwrotami i które w wielu podręcznikach Geometrji elementarnej nie są należycie uwzględnione.

Wogóle naszych rozważań obecnych nie należy uważać za systematyczny wykład jakiegoś działu Geometrji, lecz za pewnego rodzaju komentarze i uzupełnienia, dotyczące tych wiadomości, jakie w najczęściej spotykanych podręcznikach Geometrji elementarnej oraz Trygonometrji płaskiej są podawane. I to właśnie usprawiedliwia formę, w jakiej podaliśmy własność prostej oraz pęku promieni, iż każdy z tych utworów geometrycznych posiada 2 wprost sobie przeciwne zwroty, jak również pewne własności dwu prostych, leżących w jednej płaszczyźnie, względnie dwu pęków promieni, leżących w jednej płaszczyźnie lub też w dwu płaszczyznach równoległych, będące w związku z ich zwrotami. Powiedzieliśmy mianowicie, że te własności wymienionych utworów geometrycznych przyjmujemy, n a p r z y k ł a d, jako pewniki. W razie systematycznego wykładu wyraz „naprzykład" byłby tu nie na miejscu, albowiem wtedy należałoby albo te własności wprowadzić definitywnie w formie pewników, albo też dowieść ich na mocy innych pewników.

Uwaga. Uporządkowanie promieni pęku uważaliśmy za cykliczne, natomiast uporządkowania punktów prostej za cykliczne nie uważaliśmy. Tak rzecz się przedstawia z punktu widzenia Geometrji elementarnej. Z chwilą jednak wprowadzenia do Geometrji punktów niewłaściwych, również uporządkowanie punktów prostej można uważać za cykliczne, jak się to czyni w Geometrji rzutowej. W Geometrji rzutowej uważamy mianowicie prostą za linję zamkniętą, mogącą być opisaną w całej rozciągłości przez punkt, który, wyszedłszy z jakiegoś punktu A prostej, porusza się po niej stale w jednym i tym samym kierunku (zwrocie), początkowo oddalając się od punktu A i następnie, po przejściu przez punkt niewłaściwy, zbliżając się (z przeciwnej strony) do punktu A aż do nakrycia go.

V. Rzut prostokątny na prostą. — 1. Stosunek dwu wielkości geometrycznych jednorodnych (np. 2 odcinków, 2 kątów, i t. p.) jest zawsze pewną w zupełności określoną liczbą rzeczywistą nieujemną (wymierną lub niewymierną). Odwrotnie, jeżeli mamy daną wielkość geometryczną b i jakąkolwiek liczbę rzeczywistą nieujemną (wymierną lub niewymierną), wówczas istnieje zawsze wielkość geometryczna a, jednorodna z wielkością geometryczną b, której stosunek do b wyraża się daną liczbą.

Jeżeli więc jakiś odcinek przyjmiemy za jednostkę długości, to długość każdego odcinka będzie się wyrażała pewną w zupełności określoną liczbą rzeczywistą nieujemną, i odwrotnie, każdej liczbie rzeczywistej nieujemnej będzie odpowiadał pewien w zupełności określony odcinek, którego długość będzie się wyrażała właśnie tą liczbą.

Weźmy teraz pod uwagę jakąkolwiek prostą. Jeden zwrot tej prostej nazwijmy dodatnim, drugi zaś ujemnym. Ustaliwszy pewną jednostkę długości, każdemu odcinkowi naszej prostej, posiadającemu jeden zwrot, podporządkujmy liczbę, której wartość bezwzględna wyraża długość tego odcinka, która zaś jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy rozpatrywany odcinek posiada zwrot dodatni, czy też ujemny.

Liczby, podporządkowane w ten sposób odcinkom $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$, gdzie A i B oznaczają 2 dowolne punkty rozpatrywanej prostej, będą zatem posiadały tę samą wartość bezwzględną, znaki zaś będą posiadały przeciwne. Jeżeli więc liczbę, podporządkowaną jakiemuś odcinkowi, będziemy oznaczali takim samym symbolem, jakim oznaczamy sam odcinek, to będziemy mogli powiedzieć, że $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Niechaj A, B, C będą trzema punktami, należącymi do rozpatrywanej prostej. Jeżeli punkt B leży pomiędzy punktami A i C, to wtedy liczba, wyrażająca długość odcinka AC, jest równa sumie liczb, wyrażających długości odcinków AB i BC. Ponieważ znów z drugiej strony odcinki $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ posiadają w tym przypadku zwroty jednakowe, przeto odpowiadające im liczby są jednakowego znaku, a zatem pomiędzy temi liczbami zachodzi zależność: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Dowiedziemy teraz, że jeżeli $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}, A_n$ są n punktami, leżącymi na rozpatrywanej prostej, to wtedy, niezależnie od kolei, w jakiej te punkty przy każdym zwrocie rozpatrywanej prostej następują po sobie, mamy:

$$(1) \qquad \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0.$$

Dowiedziemy tego twierdzenia, stosując metodę indukcji matematycznej.

Przedewszystkiem jest jasnem, że twierdzenie to jest prawdziwe w razie $n = 2$, t. zn. w razie, gdy są dane tylko 2 punkty A_1 i A_2, albowiem wtedy $\overline{A_1A_2} = -\overline{A_2A_1}$, skąd wynika $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_1} = 0$.

Że to twierdzenie jest prawdziwe również wtedy, gdy $n = 3$, możemy się przekonać w sposób następujący.

Jeżeli są dane na rozpatrywanej prostej 3 punkty A_1, A_2, A_3, to istnieją wtedy 3 możliwości: albo punkt A_1 leży pomiędzy punktami A_2 i A_3, albo punkt A_2 leży pomiędzy punktami A_1 i A_3, albo, w końcu, punkt A_3 leży pomiędzy punktami A_1 i A_2. W pierwszym przypadku możemy powiedzieć, że $\overline{A_2 A_1} + \overline{A_1 A_3} = \overline{A_2 A_3}$, skąd $-\overline{A_2 A_1} + \overline{A_2 A_3} - \overline{A_1 A_3} = 0$, czyli $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_1} = 0$. W drugim przypadku możemy powiedzieć, że $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} = \overline{A_1 A_3}$, skąd $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} - \overline{A_1 A_3} = 0$, czyli $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_1} = 0$. W końcu, w trzecim przypadku możemy powiedzieć że $\overline{A_1 A_3} + \overline{A_3 A_2} = \overline{A_1 A_2}$, skąd $\overline{A_1 A_2} - \overline{A_3 A_2} - \overline{A_1 A_3} = 0$, czyli $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_1} = 0$. Widzimy więc, że w razie, gdy $n = 3$, twierdzenie nasze jest prawdziwe.

Przypuśćmy teraz, że nasze twierdzenie jest prawdziwe, gdy $n = m$. Dowiedziemy, że w takim razie jest ono prawdziwe również wtedy, gdy $n = m + 1$.

Niechaj bowiem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ będą $m + 1$ punktami, leżącymi na rozpatrywanej prostej. Na mocy założenia, że twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdy $n = m$, możemy powiedzieć, iż

$$(2) \qquad \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \ldots + \overline{A_{m-1} A_m} + \overline{A_m A_1} = 0.$$

Oznaczmy teraz punkt A_m symbolem A_1', punkt A_1 symbolem A_2' i punkt A_{m+1} symbolem A_3'. Jak widzieliśmy wyżej, twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdy $n = 3$, możemy je więc zastosować do trzech punktów A_1', A_2', A_3', t. zn. możemy powiedzieć, że $\overline{A_1' A_2'} + \overline{A_2' A_3'} + \overline{A_3' A_1'} = 0$, czyli $\overline{A_m A_1} + \overline{A_1 A_{m+1}} + \overline{A_{m+1} A_m} = 0$, skąd wynika $\overline{A_m A_1} = -\overline{A_{m+1} A_m} - \overline{A_1 A_{m+1}}$, czyli $\overline{A_m A_1} = \overline{A_m A_{m+1}} + \overline{A_{m+1} A_1}$. Wstawiwszy teraz w równość (2) zamiast $\overline{A_m A_1}$ sumę $\overline{A_m A_{m+1}} + \overline{A_{m+1} A_1}$, otrzymujemy

$$(3) \quad \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \ldots + \overline{A_{m-1} A_m} + \overline{A_m A_{m+1}} + \overline{A_{m+1} A_1} = 0,$$

t. zn. twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdy $n = m + 1$.

Jeżeli więc twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdy $n = m$, to jest ono prawdziwe również wtedy, gdy $n = m + 1$. A ponieważ jest ono prawdziwe, gdy n równa się 2 albo 3, przeto jest ono prawdziwe również wtedy, gdy $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$, t. zn. twierdzenie nasze jest prawdziwe zawsze.

2. Przez *rzut prostokątny punktu na prostą* rozumiemy spodek prostopadłej, spuszczonej z tego punktu na wymienioną prostą.

Przez rzut prostokątny jakiegoś odcinka MN na pewną prostą, leżącą z odcinkiem MN w jednej płaszczyźnie lub też nie leżącą, rozumiemy odcinek tej prostej, którego punktami krańcowymi są rzuty prostokątne punktów M i N na rozpatrywaną prostą. Przyczem jeżeli jeden ze zwrotów odcinka MN wyróżniamy, to wyróżniamy również jeden ze zwrotów jego rzutu. Jeżeli mianowicie rzuty punktów M i N oznaczymy odpowiednio przez M' i N', to w takim razie przez rzut odcinka $\overline{MN}$ będziemy rozumieli odcinek $\overline{M'N'}$, przez rzut zaś odcinka $\overline{NM}$ odcinek $\overline{N'M'}$.

Prostą, na którą rzutujemy, nazywamy osią rzutu.

Przyjąwszy jeden zwrot osi rzutu za dodatni, drugi zaś za ujemny, i ustaliwszy pewną jednostkę długości, rzutowi prostokątnemu każdego odcinka, posiadającego jeden zwrot, podporządkujmy liczbę, której wartość bezwzględna wyraża długość rzutu, która zaś jest dodatnia, lub ujemna w zależności od tego, czy rozpatrywany rzut posiada zwrot dodatni, czy też ujemny. Liczbę tę nazwijmy wielkością rzutu prostokątnego.

Ten zwrot osi rzutu, który przyjmujemy za dodatni, nazywamy też wprost zwrotem osi rzutu.

Powiedzenie, że wykonywamy rzut prostokątny na prostą daną, przyczem jako zwrot dodatni tej prostej przyjmujemy zwrot, przy którym pewien jej punkt B następuje po pewnym jej punkcie A, uważamy za równoznaczne z powiedzeniem, że wykonywamy rzut prostokątny na prostą $\overline{AB}$.

Dowiedziemy teraz twierdzenia następującego: Jeżeli $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$ są n punktami, leżącymi w jednej płaszczyźnie lub też nie leżącymi, to suma wielkości rzutów prostokątnych odcinków $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ na jakąkolwiek oś rzutu równa się wielkości rzutu prostokątnego odcinka $\overline{P_1P_n}$ na tę oś rzutu.

Jeżeli mianowicie punkty $P_1', P_2', P_3', \ldots, P_{n-1}', P_n'$ są rzutami prostokątnymi punktów $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$ na jakąś oś rzutu, to w takim razie rzutami prostokątnymi odcinków $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ na tę oś rzutu są odcinki $\overline{P_1'P_2'}, \overline{P_2'P_3'}, \overline{P_3'P_4'}, \ldots, \overline{P_{n-1}'P_n'}$. Jeżeli teraz wielkości tych rzutów oznaczymy tymi samymi symbolami, jakimi oznaczyliśmy same rzuty, to na mocy dowiedzionego wyżej twierdzenia, dotyczącego n punktów, leżących na jednej prostej (str. 30), będziemy mogli powiedzieć, że

$$\overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \overline{P_3'P_4'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} + \overline{P_n'P_1'} = 0,$$

skąd wynika

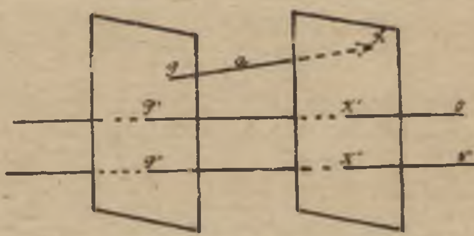
$$\overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \overline{P_3'P_4'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} = -\overline{P_n'P_1'}$$

czyli

$$\overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \overline{P_3'P_4'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} = \overline{P_1'P_n'},$$

czego właśnie chcieliśmy dowieść.

3. Niechaj będą dane 2 proste równoległe s i s' oraz jakiś odcinek a, posiadający jeden zwrot (rys. 8). Odcinek a może przytem leżeć z prostemi s i s' w jednej płaszczyźnie, lub też nie.



Rys. 8

Przesuńmy zarówno przez punkt początkowy P odcinka a jak też przez jego punkt końcowy K płaszczyznę, prostopadłą do prostych s i s'. Oznaczywszy punkty przecięcia się pierwszej płaszczyzny z prostemi s i s' odpowiednio przez P' i P'', oraz punkty przecięcia się drugiej płaszczyzny z prostemi s i s' odpowiednio przez K' i K'', możemy powiedzieć, że rzutami odcinka a na proste s i s' są odpowiednio docinki $\overline{P'K'}$ i $\overline{P''K''}$. Te 2 odcinki posiadają zarówno jednakowe długości, jak też jednakowe zwroty. Gdybyśmy więc jako zwroty dodatnie prostych s i s', a zatem również jako zwroty ujemne tych dwu prostych, przyjęli 2 ich zwroty jednakowe, to w takim razie wielkości rzutów odcinka a na każdą z prostych s i s' byłyby sobie równe. (Gdyby odcinek a oraz proste s i s' leżały w jednej płaszczyźnie, to nie potrzebowalibyśmy wtedy przesuwać przez punkty krańcowe odcinka a dwu płaszczyzn, prostopadłych do prostych s i s';

wystarczyłoby mianowicie wtedy spuszczenie z punktów krańcowych odcinka a na proste s i s' dwu prostych prostopadłych. Myśmy przesuwali płaszczyzny dlatego, aby rozumowanie nasze mogło być zastosowane zawsze, t. zn. nietylko wtedy, gdy odcinek a oraz proste s i s' leżą w jednej płaszczyźnie, lecz również wtedy, gdy one w jednej płaszczyźnie nie leżą).

Opierając się na tym wniosku, obliczymy wielkość rzutu jakiegoś odcinka a, posiadającego jeden zwrot, na jakąś oś rzutu s.

Jeżeli punkt początkowy P odcinka a leży na osi rzutu s, to bierzemy wtedy pod uwagę 2 promienie, dla których punkt P jest początkiem, mianowicie promień p_1, który jest zawarty w prostej s i którego zwrotem jest zwrot dodatni tej prostej, oraz promień p_2, który leży z odcinkiem a w jednej prostej i posiada taki sam zwrot, jak ten odcinek. Jeżeli natomiast punkt początkowy P odcinka a na osi rzutu s nie leży, to prowadzimy wtedy przez punkt P prostą s', równoległą do prostej s, i bierzemy następnie pod uwagę 2 promienie, dla których punkt P jest początkiem, mianowicie promień p_1, który jest zawarty w prostej s' i którego zwrotem jest zwrot dodatni prostej s, oraz promień p_2, który leży z odcinkiem a w jednej prostej i posiada taki sam zwrot, jak ten odcinek. Jeden z pośród kątów o ramionach p_1 i p_2, np. kąt, który nie jest większy od kąta półpełnego, t. zn. od kąta π, oznaczmy symbolem α.

Łatwo możemy spostrzec, że w pierwszym przypadku, t. zn. w przypadku, gdy początek P odcinka a leży na prostej s, iloczyn $a \cos \alpha$ (gdzie przez a rozumiemy liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka a) jest równy wielkości rzutu odcinka a na prostą s. A zatem w drugim przypadku, t. zn. w przypadku, gdy początek P odcinka a na prostej s nie leży, ten iloczyn będzie równy wielkości rzutu odcinka a na prostą s', jeżeli jako zwrot dodatni prostej s' przyjmiemy ten jej zwrot, który jest jednakowy ze zwrotem dodatnim prostej s. Lecz w tym ostatnim przypadku, jak widzieliśmy wyżej, wielkości rzutów odcinka a na proste s i s' są sobie równe.

Jeżeli więc w obydwu rozpatrywanych przypadkach kąt α nazwiemy kątem, jaki zwrot odcinka a tworzy ze zwrotem osi rzutu s, to w takim razie będziemy mogli wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Wielkość rzutu odcinka na prostą jest równa iloczynowi długości odcinka przez dostawę kąta, jaki zwrot odcinka tworzy ze zwrotem prostej.

Chociaż przez kąt, jaki zwrot odcinka a tworzy ze zwrotem prostej s, rozumieliśmy kąt α, t. zn. ten z pośród kątów, posiadających ramiona p_1 i p_2, który nie jest większy od kąta π, to jednak twierdzenie ostatnie będzie prawdziwe również wtedy, gdy przez wymieniony kąt będziemy rozumieli jakikolwiek kąt o ramionach p_1 i p_2. Albowiem każdy kąt o ramionach p_1 i p_2 posiada wielkość, równą $2k\pi \pm \alpha$, wiemy zaś z Trygonometrji, że $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$.

Rozdział I.

§ 1. Geometrja analityczna. — Jeżeli przyjrzymy się bliżej Algebrze i Geometrji elementarnej, jeżeli zwrócimy uwagę na metody, jakiemi się te dwie nauki posługują, jeżeli porównamy z sobą rozumowania algebraiczne i rozumowania geometryczne, to spostrzeżemy, że w większości przypadków rozumowanie algebraiczne mniej wyczerpuje umysł ludzki, aniżeli rozumowanie geometryczne.

Przyczyną wymienionego zjawiska jest ta okoliczność, że rozumowanie algebraiczne jest do pewnego stopnia, że się tak wyrażę, zmechanizowane. W Algebrze mianowicie mamy pewne działania, które wykonywamy według pewnych stałych reguł, czynimy to wprost mechanicznie, i dopiero otrzymane wyniki odczytujemy i zastanawiamy się nad ich znaczeniem. Jednem słowem rozumowanie algebraiczne składa się z kilku etapów: przejście od jednego etapu do drugiego odbywa się prawie zupełnie mechanicznie, dzięki właśnie istnieniu algorytmu, t. j. rachunku. W Geometrji zaś brak algorytmu wytwarza konieczność ciągłego napięcia umysłu podczas całego przebiegu rozumowania.

Samo przez się narzuca się więc pytanie, czy nie dałoby się ująć Geometrji w sposób, podobny do tego, w jaki została ujęta Algebra, innemi słowy, czy nie dałoby się za pomocą algorytmu, t. j. postępowania rachunkowego, zmechanizować również rozumowania geometryczne.

Istnieją 2 sposoby dojścia do tego celu. Pierwszy sposób polega na stworzeniu specjalnego rachunku geometrycznego, rachunku, w którym wykonywalibyśmy pewne działania według pewnych stałych reguł, lecz nie na liczbach, jak w Algebrze, a na utworach geometrycznych. Drugi sposób polega na zastosowaniu do Geometrji istniejącego już i znanego nam rachunku algebraicznego. Który z tych dwu sposobów jest lepszy, trudno orzec. Zarówno jeden, jak i drugi posiada swoje zalety i wady.

Stwarzając specjalny rachunek geometryczny, tem samem stworzylibyśmy nową naukę pomocniczą, i człowiek, chcący studjować Geometrję, musiałby najpierw z tą nauką, t. j. z tym rachunkiem, się zapoznać, stosując zaś do Geometrji ogólnie znany rachunek algebraiczny, zaoszczędzilibyśmy mu tej pracy przygotowawczej. Pod tym więc względem drugi sposób, t. j. sposób, polegający na niestwarzaniu specjalnego rachunku geometrycznego, lecz na zastosowaniu do Geometrji rachunku algebraicznego, wydaje się odpowiedniejszym.

Z drugiej strony jednak, gdybyśmy stwarzali specjalny rachunek geometryczny, czynilibyśmy to w myśli, że przeznaczeniem tego rachunku jest służenie Geometrji, skutkiem czego mógłby się on okazać bardziej dostosowanym do Geometrji, aniżeli rachunek algebraiczny, który powstał przecież zupełnie niezależnie od niej. Ten rachunek mógłby więc bardziej odpowiadać duchowi Geometrji, dzięki czemu takie zagadnienia geometryczne, które z punktu widzenia Geometrji wydają się bardzo prostemi, rozwiązywałyby się w tym rachunku również za pomocą rozważań prostych, gdy tymczasem te same zagadnienia, rozwiązywane za pomocą rachunku algebraicznego, mogłyby wymagać rozważań bardziej skomplikowanych. Zresztą wogóle wszelkie rozważania geometryczne w tym rachunku mogłyby się okazać prostszemi, aniżeli rozważania geometryczne w rachunku algebraicznym. Jeżeli jeszcze uwzględnimy, że stosowane metody mają również wpływ na zakres naszych badań, t. zn. każda metoda, stosowana w Geometrji, może służyć do wykrycia tylko pewnej kategorji własności geometrycznych, to będziemy mogli mieć zupełnie uzasadnioną obawę, że rachunek algebraiczny, jako taki, który powstał zupełnie niezależnie od Geometrji, może niekorzystnie ograniczyć zakres naszych badań geometrycznych. Z tego więc punktu widzenia wydaje się właściwszym sposób pierwszy dojścia do wymienionego celu, t. j. sposób, polegający na stworzeniu specjalnego rachunku geometrycznego.

Niejednokrotnie czyniono już próby stworzenia specjalnego rachunku geometrycznego i nawet zrobiono w tym kierunku dość znaczne postępy. Dotychczas jednak nie osiągnięto jeszcze celu ostatecznego, t. j. nie wynaleziono takiego rachunku geometrycznego, który sam w sobie byłby prosty i jednocześnie w zupełności odpowiadał swemu przeznaczeniu. Dlatego też ten sposób dojścia do zamierzonego celu znajduje się jeszcze w fazie prób, i jakkolwiek można mieć nadzieję dojścia po tej drodze do wyników bardzo pomyślnych, to jednak może to nastąpić dopiero w przyszłości.

Inaczej rzecz się przedstawia z drugim sposobem dojścia do wymienionego celu: próba ujęcia Geometrji w rachunku algebraicznym była uczyniona w wieku XVII przez Descartes'a, i to z bardzo pomyślnym wynikiem.

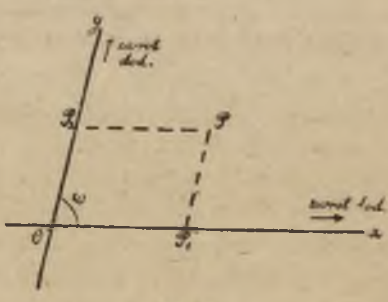
Geometrja Descartes'a dzięki pracom późniejszych matematyków dosięgła wysokiego stopnia rozwoju i obecnie znana jest pod nazwą Geometrji analitycznej.

Geometrja analityczna jest więc to nauka, której celem jest, tak samo zresztą, jak każdej innej nauki geometrycznej, badanie własności geometrycznych, t. j. przestrzennych, która odznacza się jednak tą właściwością, że w jej rozważaniach panuje wszechwładnie rachunek algebraiczny.

Ponieważ zaś własności geometryczne są to własności utworów geometrycznych, chcąc więc badać te własności za pomocą rachunku algebraicznego, musimy w rozważaniach naszych utwory geometryczne zastąpić utworami algebraicznymi, do których właśnie rachunek algebraiczny się stosuje. W Geometrji analitycznej zastępujemy więc utwory geometryczne utworami algebraicznymi, na tych utworach algebraicznych wykonywamy działania według reguł rachunku algebraicznego i otrzymane wyniki tłomaczymy znów na język geometryczny.

Pierwszem naszem zadaniem w Geometrji analitycznej jest więc wynalezienie sposobu zastępowania utworów geometrycznych utworami algebraicznymi. Ten sposób musi być przytem taki, aby nietylko utworom geometrycznym odpowiadały utwory algebraiczne, którebyśmy mogli, zamiast tych utworów geometrycznych, wprowadzić do naszych rozważań, lecz aby również, odwrotnie, utworom algebraicznym odpowiadały utwory geometryczne, gdyż tylko w tym przypadku wynik rachunku algebraicznego, wykonanego na utworach algebraicznych, który sam przecież jest utworem algebraicznym, będzie posiadał znaczenie geometryczne. Jednem słowem pierwszem naszem zadaniem w Geometrji analitycznej jest ustalenie odpowiedniości pomiędzy utworami geometrycznymi i utworami algebraicznymi, w której utworowi geometrycznemu odpowiadałby utwór algebraiczny i, odwrotnie, utworowi algebraicznemu — utwór geometryczny. Ustalenie takiej odpowiedniości będziemy nazywali w Geometrji analitycznej ustaleniem układu spółrzędnych.

Ponieważ zaś utwory geometryczne składają się z punktów, prostych i płaszczyzn, jest więc rzeczą zupełnie naturalną, że przedewszystkiem wzrok nasz padnie na te utwory elementarne i zechcemy ustalić odpowiedniość pomiędzy nimi i pomiędzy utworami algebraicznymi. Tak samo jest rzeczą zupełnie naturalną, że jako utwory algebraiczne, odpowiadające elementarnym utworom geometrycznym, zechcemy wybrać również utwory elementarne. A ponieważ najelementarniejszym utworem algebraicznym jest liczba, pierwszą więc naszą myślą będzie ustalenie odpowiedniości pomiędzy elementarnymi utworami geometrycznymi i liczbami, względnie grupami liczb.



Rys 9.

§ 2. Układ płaski spółrzędnych Descartes'a. — Niechaj będzie dana jakakolwiek płaszczyzna właściwa. Weźmy na tej płaszczyźnie 2 proste właściwe różne nierównoległe Ox i Oy (rys. 9). Na każdej z tych dwu prostych przyjmijmy jeden zwrot za dodatni, drugi zaś za ujemny. Weźmy poza tem jakikolwiek odcinek σ, który przyjmijmy za jednostkę długości. Jeżeli teraz jest dany na rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej jakikolwiek punkt właściwy P, to poprowadźmy przez ten punkt 2 proste odpowiednio równoległe do prostych Oy i Ox. Punkty przecięcia się tych prostych z prostemi Ox i Oy oznaczmy odpowiednio przez P_1 i P_2. Każdemu z odcinków OP_1 i OP_2 podporządkujmy liczbę, której wartość bezwzględna wyraża długość rozpatrywanego odcinka, która zaś jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy rozpatrywany odcinek posiada zwrot dodatni, czy też ujemny. Liczbę, podporządkowaną w ten sposób odcinkowi OP_1 prostej Ox, oznaczmy przez x, liczbę zaś, podporządkowaną w ten sposób odcinkowi OP_2 prostej Oy, oznaczmy przez y. Liczby x i y są określone, o ile są określone odcinki OP_1 i OP_2. Ponieważ zaś punkt P w zupełności te odcinki określa, przeto możemy powiedzieć, że punkt P w zupełności określa liczby x i y. Dlatego też te liczby możemy uważać za podporządkowane punktowi P.

Powyższa konstrukcja daje nam więc możność podporządkowania każdemu punktowi właściwemu rozpatrywanej płaszczyzny właściwej pary liczb rzeczywistych skończonych x, y.

I przytem każda para liczb rzeczywistych skończonych x, y może być uważana za podporządkowaną jakiemuś punktowi właściwemu rozpatrywanej płaszczyzny właściwej. Jeżeli bowiem jest dana jakaś para liczb rzeczywistych skończonych x, y, to, odmierzywszy na prostej Ox, począwszy od punktu O, odcinek OP_1, którego długość wyraża się wartością bezwzględną liczby x i który posiada zwrot dodatni lub też ujemny w zależności od tego, czy ta liczba jest dodatnia, czy też ujemna, i, analogicznie, odmierzywszy na prostej Oy, począwszy od punktu O, odcinek OP_2, którego długość wyraża się wartością bezwzględną liczby y i który posiada zwrot dodatni lub też ujemny w zależności od tego, czy ta liczba jest dodatnią, czy też ujemną, możemy poprowadzić przez punkty końcowe P_1 i P_2 tych odcinków proste, odpowiednio równoległe do prostych Oy i Ox: punkt przecięcia się P tych dwu prostych będzie punktem, któremu jest podporządkowana dana para liczb rzeczywistych skończonych x, y.

Ustaliliśmy więc tu pomiędzy punktami właściwymi rozpatrywanej płaszczyzny właściwej oraz parami liczb rzeczywistych skończonych odpowiedniość jednojednoznaczną, t. zn. taką, w której każdemu punktowi właściwemu odpowiada jedna i tylko jedna para liczb rzeczywistych skończonych, oraz, odwrotnie, każdej parze liczb rzeczywistych skończonych odpowiada jeden i tylko jeden punkt właściwy.

Liczby rzeczywiste skończone x i y, jakie w tej odpowiedniości jednojednoznacznej odpowiadają jakiemuś punktowi właściwemu P rozpatrywanej płaszczyzny właściwej, nazywamy spółrzędnemi punktu P w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a, przyczem liczbę x nazywamy odciętą punktu P, liczbę zaś y nazywamy rzędną punktu P. Proste Ox i Oy nazywamy osiami układu płaskiego spółrzędnych Descartes'a, przyczem prostą Ox nazywamy osią odciętych, lub też osią x-ów, prostą zaś Oy nazywamy osią rzędnych, lub też osią y-ów. Punkt O nazywamy początkiem układu płaskiego spółrzędnych Descartes'a.

Zamiast mówić: „punkt o spółrzędnych x i y", można powiedzieć wprost „punkt (x, y)".

Obiedwie spółrzędne początku układu spółrzędnych są równe 0. Odcięta każdego punktu osi rzędnych jest równa 0. Rzędna każdego punktu osi odciętych jest równa 0. Punkty, leżące z jednej strony osi rzędnych, posiadają odcięte dodatnie, punkty zaś, leżące z drugiej strony osi rzędnych posiadają odcięte ujemne. Punkty, leżące z jednej strony osi odciętych, posiadają rzędne dodatnie, punkty zaś, leżące z drugiej strony osi odciętych, posiadają rzędne ujemne. Np. w przypadku, jaki jest przedstawiony na rysunku 9, punkty, leżące z prawej strony osi rzędnych, posiadają odcięte dodatnie, punkty zaś, leżące z lewej strony osi rzędnych, posiadają odcięte ujemne; punkty, leżące nad osią odciętych, posiadają rzędne dodatnie, punkty zaś, leżące pod osią odciętych, posiadają rzędne ujemne.

W pęku promieni, którego wierzchołkiem jest początek O układu spółrzędnych, będziemy rozróżniali zwrot dodatni i zwrot ujemny. Przez zwrot dodatni wymienionego pęku będziemy rozumieli ten zwrot, przy którym promień p_x, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, promień p_y, posiadający zwrot dodatni osi y-ów, oraz promień p_x', posiadający zwrot ujemny osi x-ów, następują po sobie w kolei $p_x\ p_y\ p_x'$.

Zwrot jakiegokolwiek innego pęku promieni, leżącego w rozpatrywanej płaszczyźnie, nazywamy dodatnim lub ujemnym w zależności od tego, czy jest on jednakowy ze zwrotem dodatnim pęku promieni o wierzchołku O, czy też ze zwrotem ujemnym.

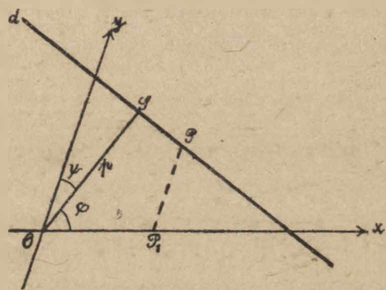
Przez kąty, jakie tworzą z sobą zwroty dodatnie osi spółrzędnych, będziemy rozumieli kąty o wierzchołku O, których ramionami są promienie, posiadające zwroty dodatnie osi spółrzędnych. Ten z pośród wymienionych kątów, który jest mniejszy od kąta półpełnego, będziemy oznaczali przez ω (rys. 9).

Jeżeli osi układu spółrzędnych są do siebie prostopadłe, czyli, innemi słowy, jeżeli $\omega = \frac{\pi}{2}$, to układ spółrzędnych nazywamy prostokątnym.

Punktów niewłaściwych przez spółrzędne Descartes'a nie przedstawiamy. Gdybyśmy bowiem definicję spółrzędnych Descartes'a rozszerzyli również na punkty niewłaściwe, to wtedy wprawdzie każdy punkt posiadałby spółrzędne Descartes'a, jednak punkty niewłaściwe, nie leżące na osiach spółrzędnych, nie byłyby przez swe spółrzędne Descartes'a jednoznacznie określone, albowiem za spółrzędne każdego z nich musielibyśmy uważać tę samą parę liczb $\pm\infty, \pm\infty$. Z pośród wszystkich punktów niewłaściwych jedynie tylko punkty niewłaściwe, należące do osi spółrzędnych, moglibyśmy określić jednoznacznie za pomocą spółrzędnych Descartes'a, a mianowicie punkt niewłaściwy osi x-ów za pomocą spółrzędnych, z których odcięta byłaby równa $\pm\infty$, rzędna zaś posiadałaby wartość dowolną, różną od $\pm\infty$, oraz punkt niewłaściwy osi y-ów za pomocą spółrzędnych, z których odcięta posiadałaby wartość dowolną, różną od $\pm\infty$, rzędna zaś byłaby równa $\pm\infty$.

§ 3. Równanie, przedstawiające ogół punktów właściwych prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a (rys. 10). Poza tem niechaj będzie dana w tej płaszczyźnie jakakolwiek prosta właściwa d.

Przez początek O układu spółrzędnych poprowadźmy prostą, prostopadłą do prostej d. Punkt przecięcia się tej prostej z prostą d oznaczmy przez S. Liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka OS, oznaczmy przez p.



Rys. 10.

Jeden z kątów o wierzchołku O, których ramionami są: promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, oraz promień, posiadający zwrot odcinka OS, oznaczmy przez φ. Jeden zaś z kątów o wierzchołku O, których ramionami są: promień, posiadający zwrot dodatni osi y-ów, oraz promień, posiadający zwrot odcinka OS, oznaczmy przez ψ. Przyczem jeżeli punkt S nakrywa punkt O, t. zn. jeżeli prosta d przechodzi przez początek O układu spółrzędnych, to przez zwrot odcinka OS, posiadającego w tym przypadku długość równą zeru, rozumiemy tu którykolwiek zwrot prostej, przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do prostej d.

Weźmy teraz na rozpatrywanej prostej dowolny zupełnie punkt właściwy P, którego spółrzędne oznaczmy przez x i y. Przez punkt P poprowadźmy prostą, równoległą do osi y-ów. Punkt przecięcia się tej prostej z osią x-ów oznaczmy przez P_1.

Obliczmy wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P i PS na prostą OS. Przyczem jeżeli punkt S nakrywa punkt O, t. zn. jeżeli prosta d przechodzi przez początek układu spółrzędnych, to przez prostą OS rozumiemy tu prostą, przechodzącą przez punkt O i prostopadłą do prostej d, oraz ten jej zwrot, który przyjęliśmy w tym przypadku za zwrot odcinka OS przy określaniu kątów φ i ψ.

Jeżeli punkt P posiada odciętą x nieujemną, to wtedy wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na prostą OS

równa się (str. 35) $OP_1 . \cos\varphi$, gdzie OP_1 oznacza liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka OP_1. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku $OP_1 = x$, przeto możemy powiedzieć, że w rozpatrywanym przypadku wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na prostą OS równa się $x\cos\varphi$.

Jeżeli zaś punkt P posiada odciętą x niedodatnią, to wtedy wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na prostą OS równa się $OP_1 . \cos(\pi - \varphi)$ albo $OP_1 . \cos(\varphi - \pi)$ w zależności od tego, czy kąt φ nie jest większy od π, czy też nie jest mniejszy od π. Lecz ponieważ $\cos(\pi - \varphi) = \cos(\varphi - \pi) = - \cos\varphi$, przyczem w rozpatrywanym przypadku $OP_1 = -x$, przeto możemy powiedzieć, że również w rozpatrywanym obecnie przypadku wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na prostą OS równa się $x\cos\varphi$.

Jeżeli punkt P posiada rzędną y nieujemną, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą OS równa się $P_1P . \cos\psi$, gdzie P_1P oznacza liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka P_1P. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku $P_1P = y$, przeto możemy powiedzieć, że w rozpatrywanym przypadku wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą OS równa się $y\cos\psi$.

Jeżeli zaś punkt P posiada rzędną y niedodatnią, to wtedy wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą OS równa się $P_1P . \cos(\pi - \psi)$ albo $P_1P . \cos(\psi - \pi)$ w zależności od tego, czy kąt ψ nie jest większy od π, czy też nie jest mniejszy od π. Lecz ponieważ $\cos(\pi - \psi) = \cos(\psi - \pi) = - \cos\psi$, przyczem w rozpatrywanym przypadku $P_1P = -y$, przeto możemy powiedzieć, że również w rozpatrywanym obecnie przypadku wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą OS równa się $y\cos\psi$.

Wielkość rzutu prostokątnego odcinka PS na prostą OS jest równa 0, ponieważ odcinek PS albo jest równy 0 (gdy punkt P nakrywa punkt S), albo też jest do prostej OS prostopadły.

Otrzymaliśmy więc, że wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P, PS na prostą OS są odpowiednio równe $x\cos\varphi$, $y\cos\psi$, 0. Ponieważ znów suma wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P, PS na prostą OS

równa się (str. 32) wielkości rzutu prostokątnego odcinka OS na prostą OS, ta zaś ostatnia wielkość jest równa p, mamy przeto $x \cos\varphi + y \cos\psi = p$, czyli

$$(1) \qquad x \cos\varphi + y \cos\psi - p = 0.$$

Ta równość będzie spełniona zawsze, bez względu na to, jaki punkt właściwy prostej właściwej d weźmiemy jako punkt P.

Uważajmy teraz w równości (1) x i y za niewiadome. Wtedy ta równość będzie równaniem stopnia 1-ego z dwiema niewiadomemi x i y. Z podanych wyżej rozważań wynika, że spółrzędne każdego punktu właściwego prostej d spełniają to równanie. Dowiedziemy teraz, że również, odwrotnie, każde 2 liczby rzeczywiste skończone, spełniające równanie (1), są spółrzędnemi pewnego punktu właściwego, należącego do prostej d.

Przyjmijmy bowiem, że 2 liczby rzeczywiste skończone x' i y' spełniają równanie (1), t. zn. że jest spełniona równość:

$$(2) \qquad x' \cos\varphi + y' \cos\psi - p = 0.$$

Punkt właściwy, którego spółrzędnemi są liczby x' i y', oznaczmy przez P'.

Liczba $\cos\varphi$ jest równa 0 tylko w tym przypadku, gdy prosta OS jest prostopadła do osi x-ów, czyli, gdy prosta d jest równoległa do osi x-ów (lub też nakrywa tę oś; tej ostatniej możliwości możemy jednak nie wymieniać, albowiem nakrywanie się dwu prostych możemy uważać za przypadek szczególny ich równoległości). Analogicznie, liczba $\cos\psi$ jest równa 0 tylko w tym przypadku, gdy prosta OS jest prostopadła do osi y-ów, czyli, gdy prosta d jest równoległa do osi y-ów. Stąd więc wynika, że nie jest możliwem, aby obiedwie liczby $\cos\varphi$ i $\cos\psi$ były jednocześnie równe 0. Przynajmniej jedna z tych dwu liczb jest od 0 różna.

Przypuśćmy najpierw, że $\cos\varphi \neq 0$, t. zn. że prosta d nie jest równoległa do osi x-ów. Poprowadźmy przez punkt $(0, y')$ prostą, równoległą do osi x-ów. Ta prosta nie będzie równoległa do prostej d, przetnie ona zatem prostą d w pewnym punkcie właściwym P'', którego rzędną będzie y', którego odciętą zaś oznaczmy przez x''. Ponieważ punkt P'' należy do prostej d, przeto jego spółrzędne spełniają równanie (1), t. zn. mamy

(3) $$x'' \cos\varphi + y' \cos\psi - p = 0.$$

Odejmijmy od równości (2) równość (3). Otrzymamy wtedy:

$$(x' - x'') \cos\varphi = 0.$$

A ponieważ, według założenia, $\cos\varphi \neq 0$, przeto $x' - x'' = 0$, czyli $x' = x''$, t. zn. punkt P' nakrywa punkt P'', a zatem punkt P' należy do prostej d, czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Przypuśćmy teraz, że $\cos\psi \neq 0$, t. zn. że prosta d nie jest równoległa do osi y-ów. Poprowadźmy w tym przypadku przez punkt $(x', 0)$ prostą, równoległą do osi y-ów. Ta prosta nie będzie równoległa do prostej d, przetnie ona zatem prostą d w pewnym punkcie właściwym P''', którego odciętą będzie x', którego rzędną zaś oznaczmy przez y'''. Ponieważ punkt P''' należy do prostej d, przeto jego spółrzędne spełniają równanie (1), t. zn. mamy

(4) $$x' \cos\varphi + y''' \cos\psi - p = 0.$$

Odejmijmy od równości (2) równość (4). Otrzymamy wtedy:

$$(y' - y''') \cos\psi = 0.$$

A ponieważ, według założenia, $\cos\psi \neq 0$, przeto $y' - y''' = 0$, czyli $y' = y'''$, t. zn. punkt P' nakrywa punkt P''', a zatem punkt P' należy do prostej d, czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Otrzymaliśmy więc, że spółrzędne każdego punktu właściwego prostej d spełniają równanie (1), oraz, odwrotnie, każde 2 liczby rzeczywiste skończone, spełniające to równanie, są spółrzędnemi pewnego punktu właściwego, należącego do prostej d.

A zatem ogół par liczb rzeczywistych skończonych, spełniających równanie (1), w geometrycznej interpretacji jest to ogół punktów właściwych prostej d. Wyrażamy to, mówiąc, iż równanie (1) przedstawia ogół punktów właściwych prostej d.

Liczby $\cos\varphi$, $\cos\psi$, p są rzeczywiste, przyczem przynajmniej jedna z liczb $\cos\varphi$ i $\cos\psi$ jest różna od 0. Oznaczywszy więc liczby $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $-p$ odpowiednio przez A, B, C, możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a ogół punktów właściwych prostej właściwej możemy przedstawić przez równanie $Ax+By+C=0$, którego spółczynniki A, B, C są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0.

Zamiast mówić, iż równanie $Ax+By+C=0$ przedstawia ogół punktów właściwych pewnej prostej właściwej, często mówimy wprost, iż ono przedstawia tę prostą, i przytem samo równanie nazywamy równaniem wymienionej prostej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a.

Tak samo, zamiast mówić: „prosta, którą przedstawia równanie $Ax+By+C=0$," często mówimy wprost: „prosta $Ax+By+C=0$".

§ 4. Spółrzędne punktów właściwych prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a. Poza tem niechaj będą dane w tej płaszczyźnie 2 punkty właściwe różne P_1 oraz P_2, których spółrzędne oznaczmy odpowiednio przez x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2.

Ponieważ punkty P_1 i P_2 są właściwe, przeto łącząca je prosta $P_1 P_2$ też jest właściwa, ogół jej punktów właściwych możemy zatem przedstawić przez równanie (§ 3):

$$(1) \qquad x\cos\varphi+y\cos\psi-p=0.$$

Spółrzędne punktów P_1 i P_2 muszą temu równaniu czynić zadość, t. zn. mamy:

$$(2) \qquad x_1\cos\varphi+y_1\cos\psi-p=0,$$

$$(3) \qquad x_2\cos\varphi+y_2\cos\psi-p=0.$$

Punkty P_1 i P_2 są, według założenia, różne, przeto nie jest możliwem, aby były spełnione jednocześnie dwie równości:

$x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Przynajmniej jedna z tych równości nie jest spełniona.

Przypuśćmy najpierw, że nie jest spełniona równość pierwsza, t. zn. przypuśćmy, że $x_1 \neq x_2$.

Czy jest możliwem, aby wtedy było $\cos\psi = 0$? Gdyby było $\cos\psi = 0$, to byłoby $\cos\varphi \neq 0$ (§ 3), a wtedy z równości (2) oraz (3) otrzymalibyśmy, że $x_1 = \frac{p}{\cos\varphi}$ oraz $x_2 = \frac{p}{\cos\varphi}$, skąd wynikałoby, że $x_1 = x_2$, to zaś byłoby w sprzeczności z założeniem. W rozpatrywanym więc przypadku $\cos\psi \neq 0$. Z równości (1), (2), (3) możemy zatem rozwiązać odpowiednio y, y_1, y_2. Otrzymamy wtedy:

$$y = \frac{p - x\cos\varphi}{\cos\psi}, \tag{4}$$

$$y_1 = \frac{p - x_1\cos\varphi}{\cos\psi}, \tag{5}$$

$$y_2 = \frac{p - x_2\cos\varphi}{\cos\psi}. \tag{6}$$

Równanie (4) jest równoznaczne z równaniem (1), t. zn. wartości na x i y, spełniające jedno z tych dwu równań, spełniają również drugie równanie. Lecz z równania (4) wynika, że, chcąc otrzymać na x i y takie 2 wartości rzeczywiste skończone, które spełniałyby to równanie, na x możemy wziąć dowolną wartość rzeczywistą skończoną, odpowiednia wartość na y będzie wtedy jednoznacznie określona. A zatem odciętemi punktów właściwych prostej $P_1 P_2$ są wszystkie liczby rzeczywiste skończone, przyczem każdej wartości odciętej odpowiada jedna i tylko jedna wartość rzędnej, t. zn. na rozpatrywanej prostej niema takich dwu punktów właściwych różnych, które posiadałyby tę samą odciętą.

Jeżeli λ_1 i λ_2 są dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, to $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ jest liczbą rzeczywistą skończoną. Przytem każdą liczbę rzeczywistą skończoną można przedstawić w postaci $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Aby mianowicie przedstawić w ten sposób jakąś liczbę rzeczywistą skończoną a, wystarczy wziąć $\lambda_1 = \varrho(x_2 - a)$ i $\lambda_2 = \varrho(a - x_1)$, gdzie ϱ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0: wtedy bowiem λ_1 i λ_2 będą liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ [gdyż $\lambda_1 + \lambda_2 = \varrho(x_2 - a) + \varrho(a - x_1) = \varrho(x_2 - x_1)$, różnica zaś $x_2 - x_1$ nie może być równa 0, ponieważ, według założenia, $x_1 \neq x_2$], przyczem będzie (co łatwo można sprawdzić) $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = a$. Widzimy więc, że jeżeli za λ_1 i λ_2 będziemy brali wszystkie liczby rzeczywiste skończone, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, to liczba $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ otrzyma wtedy wszystkie wartości rzeczywiste skończone.

Lecz, jak widzieliśmy wyżej, odciętemi punktów właściwych prostej $P_1 P_2$ są wszystkie liczby rzeczywiste skończone, możemy przeto powiedzieć, że liczba $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, jest odciętą jakiegoś punktu właściwego prostej $P_1 P_2$, i odwrotnie, odciętą każdego punktu właściwego prostej $P_1 P_2$ możemy przedstawić w tej postaci.

Zobaczmy teraz, jaka wartość rzędnej będzie odpowiadała wartości odciętej $\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. W tym celu wstawmy w równanie (4) zamiast x wyrażenie $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Otrzymamy wtedy:

$$y = \frac{p - \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cos\varphi}{\cos\psi},$$

czyli

$$y = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\, p - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \cos\varphi}{(\lambda_1 + \lambda_2) \cos\psi},$$

czyli

$$y = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(\lambda_1 \frac{p - x_1 \cos\varphi}{\cos\psi} + \lambda_2 \frac{p - x_2 \cos\varphi}{\cos\psi}\right),$$

czyli [równ. (5) i (6)]

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Otrzymamy więc spółrzędne wszystkich punktów właściwych prostej $P_1 P_2$, i przytem tylko tych punktów (t. zn. spółrzędnych punktów, nie należących do prostej $P_1 P_2$, nie otrzymamy), jeżeli w wyrażeniach $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ za λ_1 i λ_2 weźmiemy wszystkie liczby rzeczywiste skończone, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Do tego wniosku doszliśmy w założeniu, że $x_1 \neq x_2$. Gdyby zaś ten warunek nie był spełniony, to w takim razie byłby spełniony warunek $y_1 \neq y_2$. Rozpatrzmy więc teraz przypadek, gdy $y_1 \neq y_2$.

Przedewszystkiem możemy powiedzieć, że w tym przypadku $\cos\varphi \neq 0$. Gdyby bowiem było $\cos\varphi = 0$, to byłoby $\cos\psi \neq 0$ (§ 3), a wtedy z równości (2) oraz (3) otrzymalibyśmy, że $y_1 = \frac{p}{\cos\psi}$ oraz $y_2 = \frac{p}{\cos\psi}$, skąd wynikałoby, że $y_1 = y_2$, to zaś byłoby w sprzeczności z założeniem.

Ponieważ więc w rozpatrywanym przypadku $\cos\varphi \neq 0$, przeto z równości (1), (2), (3) możemy rozwiązać odpowiednio x, x_1, x_2. Otrzymamy wtedy:

$$x = \frac{p - y\cos\psi}{\cos\varphi}, \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{p - y_1\cos\psi}{\cos\varphi}, \tag{8}$$

$$x_2 = \frac{p - y_2\cos\psi}{\cos\varphi}. \tag{9}$$

Równanie (7) jest równoznaczne z równaniem (1). Lecz z równania (7) wynika, że, chcąc otrzymać na x i y takie 2 wartości rzeczywiste skończone, które spełniałyby to równanie, na y możemy wziąć dowolną wartość rzeczywistą skończoną, odpowiednia wartość na x będzie wtedy jednoznacznie określona. A zatem rzędnemi punktów właściwych prostej P_1P_2 są wszystkie liczby rzeczywiste skończone, przyczem każdej wartości rzędnej odpowiada jedna tylko wartość odciętej, t. zn. na rozpatrywanej prostej niema takich dwu punktów właściwych różnych, które posiadałyby tę samą rzędną.

Ponieważ znów w rozpatrywanym przypadku $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, jest zawsze liczbą rzeczywistą skończoną, przyczem każdą liczbę rzeczywistą skończoną możemy przedstawić w tej postaci, przeto ogół wartości rzędnych punktów właściwych prostej P_1P_2 jest równoznaczny w rozpatrywanym przypadku z ogółem liczb, jakie otrzymamy, kładąc w wyrażeniu $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ za λ_1 i λ_2 wszystkie liczby rzeczywiste skończone, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Aby teraz otrzymać wartość odciętej, odpowiadającą wartości rzędnej $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, należy wstawić w równanie (7) zamiast y wyrażenie $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Jeżeli to uczynimy i następnie uwzględnimy równości (8) i (9), to otrzymamy:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

A zatem otrzymany przez nas wynik w założeniu, że $y_1 \neq y_2$, jest taki sam, jak wynik, który otrzymaliśmy w założeniu, że $x_1 \neq x_2$.

Możemy więc wypowiedzieć teraz twierdzenie następujące:

J e ż e l i P_1 (x_1, y_1) i P_2 (x_2, y_2) s ą d w o m a r ó ż n y m i p u n k t a m i w ł a ś c i w y m i, t o l i c z b y $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, g d z i e λ_1 i λ_2 s ą l i c z b a m i r z e c z y w i s t e m i s k o ń c z o n e m i, s p e ł n i a j ą c e m i w a r u n e k $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, są spółrzędnemi jakiegoś punktu właściwego prostej P_1P_2, i odwrotnie, spółrzędne każdego punktu właściwego prostej P_1P_2 możemy przedstawić w tej postaci. Jeżeli więc w wyrażeniach $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ za λ_1 i λ_2 weźmiemy wszystkie liczby rzeczywiste skończone, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, to otrzymamy spółrzędne wszystkich punktów właściwych prostej P_1P_2, i przytem tylko tych punktów.

§ 5. Ogół rozwiązań równania $Ax+By+C=0$, w którem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0. — Niechaj będzie dane równanie

(1) $$Ax+By+C=0,$$

którego spółczynniki A, B, C są liczbami niekoniecznie rzeczywistemi (lecz, oczywiście, skończonemi).

Gdyby wszystkie 3 spółczynniki A, B, C trójmianu $Ax+$ $+By+C$ były równe 0, to wtedy równość (1) nie byłaby równaniem, lecz tożsamością, byłaby bowiem spełniona dla wszelkich wartości (skończonych) x i y. Ponieważ zaś równość (1) nazwaliśmy wyżej równaniem, przeto tem samem założyliśmy, że przynajmniej jeden ze spółczynników A, B, C jest różny od 0.

Gdyby był różnym od 0 tylko spółczynnik C, natomiast spółczynniki A i B byłyby równe 0, to wtedy nie istniałyby takie liczby skończone x i y, które równaniu (1) czyniłyby zadość. Ponieważ zaś my ograniczamy się tu do rozpatrywania tylko liczb skończonych, przeto w wymienionym przypadku uważalibyśmy równanie (1) za nie posiadające rozwiązania.

Załóżmy więc, że przynajmniej jeden ze spółczynników A i B równania (1) jest różny od 0. Wtedy to równanie będzie posiadało rozwiązania, t. zn. będą istniały pary liczb skończonych, spełniające to równanie.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy np. $B \neq 0$.

W tym przypadku możemy z równania (1) rozwiązać y. Otrzymamy:

(2) $$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Równanie (2) jest równoznaczne z równaniem (1).

Z równania (2) wynika, że, chcąc otrzymać na x i y takie 2 wartości skończone, które spełniałyby to równanie, na x możemy wziąć dowolną wartość skończoną, odpowiednia wartość na y będzie wtedy jednoznacznie określona.

Weźmy na x dwie zupełnie dowolne wartości skończone różne x_1 i x_2, niekoniecznie rzeczywiste, i z równania (2) obliczmy odpowiadające im wartości na y, które oznaczmy przez y_1 i y_2. Każda z par liczb x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2 spełnia równanie (2), t. zn. mamy:

(3) $$y_1 = -\frac{Ax_1 + C}{B},$$

(4) $$y_2 = -\frac{Ax_2 + C}{B}.$$

Każdą liczbę skończoną możemy przedstawić w postaci $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Aby mianowicie przedstawić w ten sposób jakąś liczbę skończoną a (niekoniecznie rzeczywistą), wystarczy wziąć $\lambda_1 = \varrho\,(x_2 - a)$ i $\lambda_2 = \varrho\,(a - x_1)$, gdzie ϱ oznacza jakąkolwiek liczbę skończoną, różną od 0 (niekoniecznie rzeczywistą). Jeżeli więc za λ_1 i λ_2 będziemy brali wszystkie liczby skończone, rzeczywiste i nierzeczywiste, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, to liczba $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ otrzyma wtedy wszystkie wartości skończone, rzeczywiste i nierzeczywiste.

Lecz, jak powiedzieliśmy wyżej, chcąc otrzymać na x i y takie 2 wartości skończone, które spełniałyby równanie (2), na x możemy wziąć dowolną wartość skończoną, odpowiednia wartość na y będzie wtedy jednoznacznie określona. Możemy więc powiedzieć, że liczba $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2

są liczbami skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, zawsze może być uważana za liczbę skończoną x, spełniającą równanie (2), i odwrotnie, każdą liczbę skończoną x, spełniającą równanie (2), możemy przedstawić w tej postaci.

Aby otrzymać wartość liczby y, odpowiadającą wartości $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ liczby x, wstawmy w równanie (2) zamiast x wyrażenie $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Otrzymany wtedy:

$$y = -\frac{A\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + C}{B},$$

czyli

$$y = -\frac{A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + C(\lambda_1 + \lambda_2)}{B(\lambda_1 + \lambda_2)},$$

czyli

$$y = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(-\lambda_1 \frac{Ax_1 + C}{B} - \lambda_2 \frac{Ax_2 + C}{B}\right),$$

czyli [równ. (3) i (4)]

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Liczby więc $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami skończonemi (niekoniecznie rzeczywistemi), spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, stanowią rozwiązanie równania (1), i odwrotnie, każde 2 liczby skończone, stanowiące rozwiązanie równania (1), mogą być przedstawione w tej postaci.

Do tego wniosku doszliśmy w założeniu, że $B \neq 0$. Gdyby zaś ten warunek nie był spełniony, to w takim razie byłby spełniony warunek $A \neq 0$. Przypuśćmy więc, że jest spełniony warunek $A \neq 0$.

W tym przypadku możemy z równania (1) rozwiązać x:

(5) $$x = -\frac{By + C}{A}.$$

Następnie możemy wziąć na y dwie wartości skończone r ó ż n e y_1 i y_2, niekoniecznie rzeczywiste, i z równania (5) obliczyć odpowiadające im wartości na x, które oznaczmy np. przez x_1 i x_2. W końcu możemy wartości skończone na y, spełniające równanie (5), przedstawić w postaci $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, i z równania (5) obliczyć odpowiadające im wartości na x. Otrzymamy wtedy:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

I w ten sposób w przypadku, gdy $A \neq 0$, możemy dojść do takich samych wyników, do jakich doszliśmy w przypadku, gdy $B \neq 0$.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli przynajmniej jeden ze spółczynników A i B równania $Ax + By + C = 0$ jest różny od 0, to wtedy to równanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Przyczem jeżeli x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2 są dwoma **różnemi** rozwiązaniami skończonemi tego równania (t. zn. takiemi rozwiązaniami, że przynajmniej jedna z równości $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$ **nie** jest spełniona), to liczby $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, stanowią rozwiązanie skończone rozpatrywanego równania, i odwrotnie, każde 2 liczby skończone, stanowiące jego rozwiązanie, mogą być przedstawione w tej postaci. Jeżeli więc w wyrażeniach $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ za λ_1 i λ_2 weźmiemy wszystkie liczby skończone, rzeczywiste i nierzeczywiste, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, to otrzymamy w ten sposób parv liczb skończonych, stanowiące ogół rozwiązań skończonych rozpatrywanego równania.

Przypadkiem szczególnym tego twierdzenia jest twierdzenie następujące:

Jeżeli spółczynniki A, B, C równania $Ax+By+C=0$ są liczbami **rzeczywistemi**, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, to wtedy to równanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań, pomiędzy któremi znajduje się nieskończenie wiele rozwiązań **rzeczywistych**. Przyczem jeżeli x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2 są dwoma różnemi rozwiązaniami **rzeczywistemi** skończonemi tego równania, to liczby $\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami **rzeczywistemi** skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$, stanowią rozwiązanie **rzeczywiste** skończone rozpatrywanego równania, i odwrotnie, każde 2 liczby, stanowiące jego rozwiązanie **rzeczywiste** skończone, mogą być przedstawione w tej postaci. Jeżeli więc w wyrażeniach $\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ i $\frac{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ za λ_1 i λ_2 weźmiemy wszystkie liczby **rzeczywiste** skończone, spełniające warunek $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$, to otrzymamy w ten sposób pary liczb **rzeczywistych** skończonych, stanowiące ogół rozwiązań **rzeczywistych** skończonych rozpatrywanego równania.

§ 6. Interpretacja geometryczna równania $Ax+By+C=0$, którego spółczynniki A, B, C są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a. — Niechaj będzie dane równanie

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

którego spółczynniki A, B, C są liczbami rzeczywistemi (i, oczywiście, skończonemi), przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek płaszczyznę właściwą i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a. Jeżeli każdą parę liczb rzeczywistych skończonych będziemy uważali za spółrzędne jakiegoś punktu właściwego, to wtedy ogółowi rozwiązań rzeczywistych skończonych równania (1) będzie odpowiadał w rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej pewien zbiór punktów właściwych. O równaniu (1) będziemy mówili, że ono ten zbiór punktów przedstawia.

Z twierdzenia, podanego w § 4, oraz z drugiego twierdzenia, podanego w § 5, wynika twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a równanie $Ax+By+C=0$, którego spółczynniki A, B, C są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, przedstawia ogół punktów właściwych prostej właściwej.

To twierdzenie jest odwrotnem względem twierdzenia, wypowiedzianego w § 3.

Rozpatrzmy teraz kilka przypadków szczególnych równania $Ax+By+C=0$.

1. $C=0$. Równanie $Ax+By=0$ przedstawia prostą właściwą, przechodzącą przez początek układu spółrzędnych, albowiem spółrzędne początku układu spółrzędnych, t. j. liczby 0, 0, czynią temu równaniu zadość. Gdyby oprócz spółczynnika C był równym 0 spółczynnik B, względnie A, to równanie nasze redukowałoby się do równania $x=0$, względnie $y=0$, przedstawiałoby więc ono oś y-ów, względnie oś x-ów.

2. $B=0$. Równanie $Ax+C=0$ możemy sprowadzić do postaci $x=-\frac{C}{A}$, przedstawia więc ono prostą właściwą, równoległą do osi y-ów.

3. $A=0$. Równanie $By+C=0$ możemy sprowadzić do postaci $y=-\frac{C}{B}$, przedstawia więc ono prostą właściwą, równoległą do osi x-ów.

§ 7. Dwa równania jednoczesne $A_1x+B_1y+C_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2=0$, w których przynajmniej jeden ze spółczynników A_1 i B_1, jak również przynajmniej jeden ze spół-

czynników A_2 i B_2, jest różny od 0. — Niechaj będą dane 2 równania stopnia 1-go z dwiema niewiadomemi:

(1) $$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ i } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

których spółczynniki są liczbami niekoniecznie rzeczywistemi (lecz, oczywiście, skończonemi), przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A_1 i B_1, jak również przynajmniej jeden ze spółczynników A_2 i B_2, jest różny od 0.

Gdyby spółczynniki odpowiednie tych dwu równań były wzajemnie proporcjonalne, t. zn. gdyby było:

(2) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

to w takim razie każde 2 liczby x i y, spełniające jedno z tych dwu równań, spełniałyby również drugie równanie.

Załóżmy teraz, że

(3) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Łatwo możemy się przekonać, że w tym przypadku niema takich dwu liczb skończonych x i y, które obydwu równaniom (1) jednocześnie czyniłyby zadość.

Przypuśćmy bowiem, że takie 2 liczby skończone x' i y' istnieją, t. zn.

(4) $$A_1 x' + B_1 y' + C_1 = 0 \text{ i } A_2 x' + B_2 y' + C_2 = 0.$$

Wartość stosunków $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ oznaczmy przez ϱ, t. zn.

(5) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \varrho.$$

Z równości (5) wynika:

(6) $$A_1 = \varrho A_2 \text{ i } B_1 = \varrho B_2.$$

Pomnóżmy drugą z równości (4) przez ϱ. Otrzymamy wtedy $\varrho A_2 x' + \varrho B_2 y' + \varrho C_2 = 0$, czyli [równ. (6)]:

(7) $$A_1 x' + B_1 y' + \varrho C_2 = 0.$$

Odejmijmy teraz równość (7) od pierwszej z równości (4). Otrzymamy $C_1 - \varrho C_2 = 0$, skąd wynika:

(8) $$\frac{C_1}{C_2} = \varrho.$$

Z równości (5) i (8) wynika:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

co przeczy założeniu, że są spełnione warunki (3). A zatem nie jest możliwem, aby w rozpatrywanym przypadku istniały 2 liczby skończone x' i y', spełniające równania (1).

W końcu, jeżeli

(9) $$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

to istnieją wtedy dwie i tylko dwie liczby skończone x i y, spełniające równania (1), mianowicie liczby:

(10) $$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1, & C_1 \\ B_2, & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1, & A_1 \\ C_2, & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}}.$$

§ 8. **Warunek równoległości dwu prostych właściwych, leżących w jednej płaszczyźnie właściwej.** — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie 2 proste właściwe d_1 i d_2. Poza tem niechaj będzie dany w tej płaszczyźnie właściwej układ płaski spółrzędnych Descartes'a.

Ogół punktów właściwych prostej właściwej d_1 możemy przedstawić przez równanie

(1) $$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A_1 i B_1 jest różny od 0 (§ 3).

Analogicznie, ogół punktów właściwych prostej właściwej d_2 możemy przedstawić przez równanie

(2) $$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A_2 i B_2 jest różny od 0.

Gdyby spółczynniki odpowiednie równań (1) i (2) były wzajemnie proporcjonalne, t. zn. gdyby było

(3) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

to wtedy każde 2 liczby x i y, spełniające jedno z pośród równań (1) i (2), spełniałyby także drugie równanie, a zatem każdy punkt właściwy jednej z pośród prostych d_1 i d_2 należałby i do drugiej prostej, t. zn. proste d_1 i d_2 nakrywałyby się.

Jeżeli są spełnione warunki

(4) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},$$

to wtedy (§ 7) niema takich dwu liczb skończonych x i y, które spełniałyby jednocześnie obydwa równania (1) i (2), a zatem niema takiego punktu właściwego, który należałby jednocześnie do obydwu prostych właściwych d_1 i d_2, innemi słowy proste d_1 i d_2 są równoległe.

W końcu, jeżeli jest spełniony warunek

(5) $$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

to wtedy (§ 7) istnieją 2 i tylko 2 liczby skończone x i y, spełniające jednocześnie obydwa równania (1) i (2), mianowicie liczby:

(6) $$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1, & C_1 \\ B_2, & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1, & A_1 \\ C_2, & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}}.$$

A ponieważ te 2 liczby są rzeczywiste, przeto są one spółrzędnemi pewnego w zupełności określonego punktu właściwego. W tym więc przypadku proste d_1 i d_2 posiadają jeden i tylko jeden punkt właściwy wspólny.

Uważając więc nakrywanie się dwu prostych za przypadek szczególny ich równoległości, możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości dwu prostych właściwych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ jest spełnienie równości $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Jeżeli ponadto $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, to proste dane nakrywają się, jeżeli zaś $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, to te proste nie nakrywają się.

§ 9. Spółrzędne punktu w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a.

Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktu właściwego, którego spółrzędnemi Descartes'a są liczby x i y, nazywamy 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest różna od 0 i które spełniają warunek:

$$X : Y : Z = x : y : 1. \tag{1}$$

Z tej definicji wynika więc, że spółrzędne Descartes'a x, y jakiegoś punktu właściwego wyrażają się przez spółrzędne jednorodne Hesse'go X, Y, Z tego punktu w sposób następujący:

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}. \tag{2}$$

Punkt właściwy swoich spółrzędnych jednorodnych Hesse'go Z, Y, X nie określa jednoznacznie. Jeżeli mianowicie spółrzędnemi Descartes'a punktu właściwego są liczby x i y, to za spółrzędne jednorodne Hesse'go tego punktu możemy uważać każdą trójkę liczb $\lambda x, \lambda y, \lambda$, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0, przyczem poza temi trójkami niema innych trójek liczb rzeczywistych skończonych, które mogłyby być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go rozpatrywanego punktu właściwego.

Natomiast, odwrotnie, każde 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest różna od 0, możemy uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu właściwego, mianowicie punktu, którego spółrzędnemi Descartes'a są liczby $\frac{X}{Z}$ i $\frac{Y}{Z}$.

Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktu niewłaściwego, należącego do prostej właściwej $Ax+By+C=0$, nazywamy 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, spełniające warunki następujące:

1) liczba Z jest równa 0;

2) przynajmniej jedna z liczb X i Y jest różna od 0;

3) pomiędzy liczbami X i Y oraz spółczynnikami A i B równania prostej właściwej, zawierającej rozpatrywany punkt niewłaściwy, zachodzi zależność

$$X:Y=B:-A. \tag{3}$$

Według tej definicji spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu niewłaściwego zależą od spółczynników równania prostej właściwej, zawierającej ten punkt. Możnaby więc zapytać, jakie równanie prostej właściwej, zawierającej rozpatrywany punkt niewłaściwy, mamy w tej definicji na myśli, albowiem istnieje nieskończenie wiele równań, które przedstawiają prostą właściwą, zawierającą ten punkt niewłaściwy.

Aby otrzymać odpowiedź na to pytanie, zwróćmy uwagę na to, iż 2 proste właściwe posiadają ten sam punkt niewłaściwy wtedy i tylko wtedy (Wstęp, III), gdy są do siebie równoległe (nakrywanie się dwu prostych uważamy za przypadek szczególny ich równoległości). A zatem 2 równania $A_1x+B_1y+C_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2=0$, których spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem zarówno przynajmniej jeden ze spółczynników A_1 i B_1, jak też przynajmniej jeden ze spółczynników A_2 i B_2, jest różny od 0, przedstawiają 2 proste właściwe, posiadające ten sam punkt niewłaściwy, wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (§ 8):

(4) $$A_1 : A_2 = B_1 : B_2,$$

czyli

(5) $$B_1 : -A_1 = B_2 : -A_2.$$

Jeżeli zatem równania $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ przedstawiają 2 proste właściwe, posiadające ten sam punkt niewłaściwy, to wtedy powiedzenie, że 2 liczby X i Y spełniają warunek

(6) $$X : Y = B_1 : -A_1,$$

jest zupełnie równoznaczne z powiedzeniem, że te liczby spełniają warunek

(7) $$X : Y = B_2 : -A_2.$$

Stąd więc wynika, iż to, jakie równanie prostej właściwej, zawierającej rozpatrywany punkt niewłaściwy, będziemy mieli na myśli w podanej wyżej definicji spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktu niewłaściwego, nie będzie miało na tę definicję żadnego wpływu.

A zatem: W podanej wyżej definicji spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktu niewłaściwego przez równanie prostej właściwej, zawierającej ten punkt niewłaściwy, możemy rozumieć jakiekolwiek równanie takiej prostej.

Punkt niewłaściwy swoich spółrzędnych jednorodnych Hesse'go X, Y, Z nie określa jednoznacznie. Jeżeli mianowicie punkt niewłaściwy należy do prostej właściwej $Ax + By + C = 0$, to za spółrzędne jednorodne Hesse'go tego punktu możemy uważać każdą trójkę liczb $\lambda B, -\lambda A, 0$, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0, przyczem poza temi trójkami niema innych trójek liczb rzeczywistych skończonych, które mogłyby być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go rozpatrywanego punktu niewłaściwego.

Natomiast, odwrotnie, każde 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest równa 0, lecz przynajmniej jedna z liczb X i Y jest różna od 0, możemy uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu niewłaściwego, mianowicie punktu niewłaściwego, należącego do prostej właściwej $Yx - Xy + C = 0$, gdzie C oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną.

Z rozważań § niniejszego wynika więc, iż **każde 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu.** Liczby 0, 0, 0 za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu uważane być nie mogą.

Jeżeli pomiędzy trójką liczb rzeczywistych skończonych X_1, Y_1, Z_1, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, oraz trójką liczb rzeczywistych skończonych X_2, Y_2, Z_2, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, zachodzi zależność

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2, \tag{8}$$

to wtedy i tylko wtedy te obiedwie trójki, uważane za trójki spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktów, przedstawiają jeden i ten sam punkt.

Jeżeli z pośród trzech liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, liczba X, względnie Y, względnie Z jest równa 0, to wtedy i tylko wtedy te 3 liczby, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, przedstawiają punkt, leżący na osi y-ów, względnie na osi x-ów, względnie na prostej niewłaściwej.

Liczby 1, 0, 0, względnie 0, 1, 0, względnie 0, 0, 1, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, przedstawiają punkt niewłaściwy osi x-ów, względnie punkt niewłaściwy osi y-ów, względnie początek układu spółrzędnych.

Wprowadziliśmy tu spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, wyszedłszy z pewnego układu płaskiego spółrzędnych Descartes'a. I dlatego też te spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu będziemy nazywali **spółrzędnemi punktu** w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go, podporządkowanym danemu układowi płaskiemu spółrzędnych Descartes'a.

Zamiast mówić: „punkt, którego spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go są liczby X, Y, Z," często mówimy wprost: „punkt (X, Y, Z)".

§ 10. Równanie, przedstawiające ogół punktów prostej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a. Weźmy pod uwagę w tej płaszczyźnie jakąkolwiek prostą właściwą d.

W danym układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a ogół punktów właściwych prostej właściwej d możemy przedstawić przez równanie (§ 3)

(1) $$Ax + By + C = 0,$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0.

Wstawmy w równanie (1) zamiast x i y wyrażenia $\frac{X}{Z}$ i $\frac{Y}{Z}$ i następnie otrzymane w ten sposób równanie pomnóżmy przez Z. Otrzymamy wtedy równanie

(2) $$AX + BY + CZ = 0.$$

Spółrzędne Descartes'a x, y każdego punktu właściwego prostej właściwej d spełniają równanie (1), a zatem spółrzędne jednorodne Hesse'go X, Y, Z każdego punktu właściwego prostej d spełniają równanie (2).

Odwrotnie, weźmy pod uwagę jakiekolwiek 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest różna od 0 i które spełniają równanie (2). Te 3 liczby, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, przedstawiają punkt właściwy, którego spółrzędne Descartes'a spełniają równanie (1), który zatem należy do prostej właściwej d.

Jeżeli więc każde 3 liczby rzeczywiste skończone $X, Y, Z \neq 0$ będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, to w takim razie ogół trójek liczb rzeczywistych skończonych $X, Y, Z \neq 0$, spełniających równanie (2), będzie przedstawiał ogół punktów właściwych prostej właściwej d.

Mówiliśmy tu o trójkach liczb rzeczywistych skończonych $X, Y, Z \neq 0$, spełniających równanie (2). Te trójki nie stanowią jednak ogółu trójek liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, spełniających równanie (2). Otrzymamy mianowicie ogół trójek liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, spełniających równanie (2), jeżeli do wymienionych wyżej trójek liczb dołączymy wszystkie trójki liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, spełniające warunek

$$X : Y : Z = B : -A : 0,$$

innemi słowy wszystkie trójki liczb $\lambda B, -\lambda A, 0$, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną.

Do tych ostatnich trójek należy trójka 0, 0, 0, odpowiada ona mianowicie wartości $\lambda = 0$. I ta właśnie trójka liczb 0, 0, 0 jest jedyną trójką z pośród wymienionych trójek liczb $\lambda B, -\lambda A, 0$, nie mogącą być uważaną za trójkę spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktu. Każda inna z pośród wymienionych trójek liczb $\lambda B, -\lambda A, 0$, t. zn. każda trójka $\lambda B, -\lambda A, 0$, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, r ó ż n ą o d 0, może być uważana za trójkę spółrzędnych jednorodnych Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu, mianowicie punktu niewłaściwego prostej właściwej d (§ 9).

Jeżeli więc każde 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest od 0 różna, będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, to w takim razie ogół trójek liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest od 0 różna i które spełniają równanie (2), będzie przedstawiał o g ó ł punktów prostej właściwej d, t. zn. nietylko ogół punktów właściwych tej prostej, lecz ogół jej punktów właściwych oraz jej punkt niewłaściwy. Wyrażamy to, mówiąc, iż r ó w n a n i e (2) p r z e d s t a w i a o g ó ł p u n k t ó w p r o s t e j w ł a ś c i w e j d.

Weźmy teraz pod uwagę równanie

(3) $$0 . X + 0 . Y + C Z = 0,$$

gdzie C oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0.

Opierając się na definicji spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktu niewłaściwego (§ 9), możemy powiedzieć, iż spółrzędne jednorodne Hesse'go każdego punktu niewłaściwego spełniają równanie (3).

Odwrotnie, jeżeli jakieś 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, spełniają równanie (3), to w takim razie możemy powiedzieć, iż z pośród tych trzech liczb X, Y, Z liczba Z jest napewno równa 0, natomiast różną od 0 jest przynajmniej jedna z liczb X i Y, a zatem te 3 liczby, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, przedstawiają pewien punkt niewłaściwy.

Jeżeli więc każde 3 liczby rzeczywiste skończone X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, to w takim razie ogół trójek liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają równanie (3), będzie przedstawiał ogół punktów niewłaściwych danej płaszczyzny właściwej, innemi słowy ogół punktów prostej niewłaściwej, leżącej w danej płaszczyźnie właściwej. Wyrażamy to, mówiąc, iż *równanie* (3) *przedstawia ogół punktów prostej niewłaściwej, leżącej w danej płaszczyźnie właściwej*.

Ponieważ my tu ograniczamy się do rozpatrywania tylko liczb skończonych, przeto każdy z iloczynów $0 . X$ i $0 . Y$ jest zawsze równy 0, równanie (3) jest zatem równoznaczne z równaniem $C Z = 0$, czyli, ponieważ $C \neq 0$, z równaniem

(4) $$Z = 0.$$

Rozważania § niniejszego pozwalają nam więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go ogół punktów

5*

jakiejkolwiek prostej możemy przedstawić przez równanie $AX+BY+CZ=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z tych spółczynników jest różny od 0. Jeżeli dana prosta jest prostą właściwą, to w takim razie przynajmniej jeden ze spółczynników A i B wymienionego równania jest różny od 0, jeżeli zaś dana prosta jest prostą niewłaściwą, to wtedy każdy ze spółczynników A i B jest równy 0.

Zamiast mówić, iż równanie $AX+BY+CZ=0$ przedstawia ogół punktów pewnej prostej, często mówimy wprost, iż ono przedstawia tę prostą, i przytem samo równanie nazywamy równaniem wymienionej prostej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go.

Tak samo zamiast mówić: „prosta, którą przedstawia równanie $AX+BY+CZ=0$," często mówimy wprost: „prosta $AX+BY+CZ=0$".

§ 11. Interpretacja geometryczna równania $AX+BY+CZ=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go. — Niechaj będzie dane równanie

$$AX+BY+CZ=0, \tag{1}$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek płaszczyznę właściwą i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowany mu układ spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go. Jeżeli każdą trójkę liczb rzeczywistych skończonych, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, to wtedy ogółowi trójek liczb rzeczywistych skończonych X, Y, Z, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają równanie (1), będzie odpowiadał w rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej pewien zbiór punktów. O równaniu (1) będziemy mówili, że ono ten zbiór punktów przedstawia.

Przypuśćmy najpierw, że przynajmniej jeden ze spółczynników A i B równania (1) jest różny od 0. Możemy wtedy powiedzieć, że równanie

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

w rozpatrywanym układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a przedstawia ogół punktów właściwych pewnej prostej właściwej d (§ 6). A w takim razie, opierając się na rozważaniach, podanych w § 10, możemy powiedzieć, że równanie (1) przedstawia ogół punktów prostej właściwej d.

Przypuśćmy teraz, że każdy ze spółczynników A i B równania (1) jest równy 0. Wtedy, jak to widzieliśmy w § 10, równanie (1) przedstawia ogół punktów prostej niewłaściwej.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go równanie $AX + BY + CZ = 0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, przedstawia ogół punktów prostej. Jeżeli przynajmniej jeden ze spółczynników A i B rozpatrywanego równania jest różny od 0, to wymieniona prosta jest wtedy prostą właściwą, jeżeli zaś każdy ze spółczynników A i B jest równy 0, to wtedy jest ona prostą niewłaściwą.

To twierdzenie jest odwrotnem względem twierdzenia, wypowiedzianego w § 10.

Rozpatrzymy teraz kilka przypadków szczególnych równania $AX + BY + CZ = 0$.

1) $C = 0$. Równanie $AX + BY = 0$ przedstawia prostą, przechodzącą przez początek układu spółrzędnych, albowiem spółrzędne początku układu spółrzędnych, t. j. liczby (§ 9) 0, 0, 1, czynią temu równaniu zadość.

2) $B = 0$. Równanie $AX + CZ = 0$ przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt niewłaściwy osi y-ów, t. zn. rów-

noległą do osi y-ów, albowiem spółrzędne punktu niewłaściwego osi y-ów, t. j. liczby (§ 9) 0, 1, 0, czynią temu równaniu zadość.

3) $A=0$. Równanie $BY+CZ=0$ przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt niewłaściwy osi x-ów, t. zn. równoległą do osi x-ów, albowiem spółrzędne punktu niewłaściwego osi x-ów, t. j. liczby (§ 9) 1, 0, 0, czynią temu równaniu zadość.

4) Równanie $X=0$, względnie $Y=0$, względnie $Z=0$, przedstawia oś y-ów, względnie oś x-ów, względnie prostą niewłaściwą.

Uwaga. Rozpatrywaliśmy tu równanie jednorodne stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi $AX+BY+CZ=0$. Możnaby teraz zapytać, co przedstawia równanie ogólne stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi

$$AX+BY+CZ+D=0, \tag{3}$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, jeżeli przez niewiadome będziemy rozumieli w tem równaniu spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu.

Przypadek szczególny, gdy $D=0$, rozpatrzyliśmy już, możemy więc teraz założyć, że $D \neq 0$. Poza tem zakładamy, oczywiście, że przynajmniej jeden ze spółczynników A, B, C równania (3) jest różny od 0, w przeciwnym bowiem razie wartości skończone, spełniające równanie (3), nie istniałyby.

Jeżeli jakiś punkt należy do prostej $AX+BY+CZ=0$, to jego spółrzędne nie mogą, oczywiście, równaniu (3) czynić zadość.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt P, nie należący do prostej $AX+BY+CZ=0$. Niechaj X_1, Y_1, Z_1 będą spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go tego punktu. W takim razie liczby $\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1$, gdzie czynnik λ jest równy jakiejkolwiek liczbie rzeczywistej skończonej, różnej od 0, też możemy uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu P. Lecz czynnikowi λ zawsze możemy nadać taką wartość rzeczywistą skończoną, różną od 0, że liczby λX_1, λY_1, λZ_1 będą czyniły równaniu (3) zadość. Wystarczy mianowicie w tym celu wstawić w równanie (3) zamiast X, Y, Z wielkości λX_1, λY_1, λZ_1 i następnie obliczyć z tego równania λ. Otrzymamy wtedy

$$\lambda = -\frac{D}{AX_1 + BY_1 + CZ_1}.$$

Liczby zatem

$$-\frac{DX_1}{AX_1 + BY_1 + CZ_1}, -\frac{DY_1}{AX_1 + BY_1 + CZ_1},$$

$$-\frac{DZ_1}{AX_1 + BY_1 + CZ_1},$$

uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, przedstawiają punkt P, i przytem te liczby czynią równaniu (3) zadość, t. zn. punkt P należy do zbioru punktów, przedstawionego przez równanie (3).

A ponieważ punkt P jest dowolnym punktem rozpatrywanej płaszczyzny właściwej, nie należącym do prostej $AX + BY + CZ = 0$, przeto równanie (3) przedstawia ogół punktów rozpatrywanej płaszczyzny właściwej, z wyjątkiem punktów prostej $AX + BY + CZ = 0$.

Jeżeli trójka liczb, stanowiąca spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego punktu, czyni jakiemuś równaniu zadość, to wtedy i tylko wtedy każda inna trójka liczb, stanowiąca spółrzędne jednorodne Hesse'go tego samego punktu, też będzie czyniła wymienionemu równaniu zadość, gdy to równanie jest jednorodnem.

§ 12. Spółrzędne prostej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowany mu układ spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go.

Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go prostej $AX + BY + CZ = 0$ nazywamy 3 liczby rzeczywiste skończone U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają warunek:

(1) $$U : V : W = A : B : C.$$

Mogłoby tu powstać pytanie, jakie równanie rozpatrywanej prostej mamy w tej definicji na myśli, albowiem istnieje nieskończenie wiele równań, przedstawiających tę samą prostą. Aby otrzymać odpowiedź na to pytanie, zwróćmy uwagę na to, iż jeżeli 2 równania $A_1X+B_1Y+C_1Z=0$ i A_2X+B_2Y+ $+C_2Z=0$ przedstawiają jedną i tę samą prostą, to wtedy każde 3 liczby rzeczywiste skończone, spełniające którekolwiek z tych dwu równań, spełniają również drugie równanie, to zaś, jak wiemy z Algebry, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$, czyli

$$(2) \qquad A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2.$$

Stąd więc wynika, iż to, jakie równanie rozpatrywanej prostej będziemy mieli na myśli w podanej wyżej definicji spółrzędnych jednorodnych Hesse'go prostej, nie będzie miało na tę definicję żadnego wpływu. Możemy więc przez wymienione tam równanie rozumieć jakiekolwiek równanie rozpatrywanej prostej.

Prosta swoich spółrzędnych jednorodnych Hesse'go U, V, W nie określa jednoznacznie. Za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej $AX+BY+CZ=0$ możemy mianowicie uważać każdą trójkę liczb λA, λB, λC, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0, przytem poza temi trójkami niema innych trójek liczb rzeczywistych skończonych, które mogłyby być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go rozpatrywanej prostej.

Natomiast, odwrotnie, każde 3 liczby rzeczywiste skończone U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, możemy uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnej w zupełności określonej prostej, mianowicie prostej $UX+VY+WZ=0$. Liczby 0, 0, 0 za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej uważane być nie mogą.

Jeżeli z pośród 3-ech liczb rzeczywistych skończonych U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, liczba U, względnie V, względnie W, jest równa 0, to wtedy i tylko wtedy te 3 liczby, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej, przedstawiają prostą $UX+VY+WZ=0$, której równaniu czynią zadość wartości $X=1$, $Y=0$, $Z=0$, względnie $X=0$, $Y=1$, $Z=0$, względnie $X=0$, $Y=0$, $Z=1$, która zatem przechodzi (§ 9) przez punkt niewłaściwy osi x-ów (t. zn. jest równoległa do osi x-ów), względnie przez punkt niewłaściwy osi y-ów (t. zn. jest równoległa do osi y-ów), względnie przez początek układu spółrzędnych.

Liczby 1, 0, 0, względnie 0, 1, 0, względnie 0, 0, 1, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej, przedstawiają oś y-ów, względnie oś x-ów, względnie prostą niewłaściwą.

Jeżeli pomiędzy trójką liczb rzeczywistych skończonych U_1, V_1, W_1, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, oraz trójką liczb rzeczywistych skończonych U_2, V_2, W_2, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, zachodzi zależność:

$$U_1 : V_1 : W_1 = U_2 : U_2 : W_2, \tag{3}$$

to wtedy i tylko wtedy te obiedwie trójki, uważane za trójki spółrzędnych jednorodnych Hesse'go prostych, przedstawiają jedną i tę samą prostą.

Zamiast mówić: „prosta, której spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go są liczby U, V, W," można powiedzieć wprost: „prosta (U, V, W)".

Wprowadziliśmy tu spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej, wyszedłszy z pewnego układu płaskiego spółrzędnych Descartes'a. I dlatego też te spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej będziemy nazywali *spółrzędnemi prostej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go, podporządkowanym danemu układowi płaskiemu spółrzędnych Descartes'a.*

Układ płaski spółrzędnych jednorodnych punktowych Hesse'go oraz układ płaski spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go, podporządkowane jednemu i temu samemu układowi spółrzędnych Descartes'a, nazywamy *związanymi* z sobą. Obydwa te układy, razem wzięte, tworzą *układ spółrzędnych jednorodnych Hess'ego, podporządkowany wymienionemu układowi spółrzędnych Descartes'a.*

§ 13. Równanie, przedstawiające ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt, w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowany mu układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go.

Weźmy w tej płaszczyźnie pod uwagę pewien punkt P, którego spółrzędne jednorodne Hesse'go oznaczmy przez X_1, Y_1, Z_1.

Niechaj prosta (U', V', W') będzie jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez punkt P. Ogół punktów prostej (U', V', W') możemy przedstawić przez równanie (§ 12):

$$U' X + V' Y + W' Z = 0. \tag{1}$$

Ponieważ, według założenia, punkt P do prostej (U', V', W') należy, przeto jego spółrzędne muszą równaniu (1) czynić zadość, t. zn. mamy:

$$U' X_1 + V' Y_1 + W' Z_1 = 0. \tag{2}$$

Weźmy teraz pod uwagę równanie

$$X_1 U + Y_1 V + Z_1 W = 0, \tag{3}$$

w którem U, V, W są niewiadomemi.

Z równości (2) wynika, iż spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej (U', V', W') czynią temu równaniu zadość. Lecz prosta (U', V', W') jest dowolną prostą, przechodzącą przez punkt P, możemy więc powiedzieć, iż spółrzędne jednorodne Hesse'go każdej prostej, przechodzącej przez punkt P, czynią równaniu (3) zadość.

Odwrotnie, niechaj U'', V'', W'' będą liczbami rzeczywistemi skończonemi, z których przynajmniej jedna jest różna od 0 i które spełniają równanie (3), t. zn. czynią zadość warunkowi:

$$X_1 U'' + Y_1 V'' + Z_1 W'' = 0. \tag{4}$$

Ponieważ przynajmniej jedna z liczb rzeczywistych skończonych U'', V'', W'' jest różna od 0, przeto możemy te liczby uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnej w zupełności określonej prostej (§ 12). Ogół punktów tej prostej przedstawia równanie:

(5) $$U'' X + V'' Y + W'' Z = 0.$$

Z równości (4) wynika, iż spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu P czynią równaniu (5) zadość, a zatem prosta (U'', V'', W'') przechodzi przez punkt P.

Jeżeli więc każde 3 liczby rzeczywiste skończone U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej, to w takim razie ogół trójek liczb rzeczywistych skończonych U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają równanie (3), będzie przedstawiał ogół prostych, przechodzących przez punkt P. Wyrażamy to, mówiąc, iż równanie (3) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt P.

Oznaczywszy liczby X_1, Y_1, Z_1 odpowiednio przez A, B, C, otrzymamy twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt, możemy przedstawić przez równanie $AU + BV + CW = 0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0.

Zamiast mówić, iż równanie $AU + BV + CW = 0$ przedstawia ogół prostych, przechodzących przez pewien punkt, często mówimy wprost, iż ono przedstawia ten punkt, i przytem samo równanie nazywamy równaniem wymienionego punktu w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go.

Tak samo zamiast mówić: „punkt, który przedstawia równanie $AU + BV + CW = 0$," często mówimy wprost: „punkt $AU + BV + CW = 0$".

§ 14. Interpretacja geometryczna równania $AU + BV + CW = 0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, w układzie

płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go. — Niechaj będzie dane równanie

(1) $$AU+BV+CW=0,$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek płaszczyznę właściwą i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowany mu układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Jeżeli każdą trójkę liczb rzeczywistych skończonych, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, będziemy uważali za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej, to wtedy ogółowi trójek liczb rzeczywistych skończonych U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają równanie (1), będzie odpowiadał w rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej pewien zbiór prostych. O równaniu (1) będziemy mówili, że ono ten zbiór prostych przedstawia.

Ponieważ przynajmniej jedna z liczb rzeczywistych skończonych A, B, C jest różna od 0, przeto możemy uważać te liczby za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu (§ 9). A w takim razie z rozważań, podanych w § 13, wynika, iż równanie (1) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez ten punkt.

Mamy zatem:

W układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go równanie $AU+BV+CW=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, przedstawia ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt.

To twierdzenie jest odwrotnem względem twierdzenia, wypowiedzianego w § 13.

Rozpatrzymy teraz kilka przypadków szczególnych równania $AU+BV+CW=0$.

1) $C=0$. Równanie $AU+BV=0$ przedstawia punkt (A, B, O), t. zn. (§ 9) pewien punkt, leżący na prostej niewłaściwej (a więc wszystkie proste, których spółrzędne czynią temu równaniu zadość, są do siebie równoległe).

2) $B=0$. Równanie $AU+CW=0$ przedstawia punkt (A, O, C), t. zn. (§ 9) pewien punkt, leżący na osi x-ów.

3) $A=0$. Równanie $BV+CW=0$ przedstawia punkt (O, B, C), t. zn. (§ 9) pewien punkt, leżący na osi y-ów.

4) Równanie $U=0$, względnie $V=0$, względnie $W=0$, przedstawia punkt $(1, 0, 0)$, względnie $(0, 1, 0)$, względnie $(0, 0, 1)$, t. zn. (§ 9) równanie $U=0$ przedstawia punkt niewłaściwy osi x-ów, równanie $V=0$ przedstawia punkt niewłaściwy osi y-ów, równanie $W=0$ przedstawia początek układu spółrzędnych.

Uwaga. Rozpatrywaliśmy tu równanie j e d n o r o d n e stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi $AU+BV+CW=0$. Równanie zaś $AU+BV+CW+D=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem zarówno spółczynnik D, jak też przynajmniej jeden ze spółczynników A, B, C, jest różny od 0, w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych linjowych Hesse'go przedstawia ogół prostych rozpatrywanej płaszczyzny właściwej, z wyjątkiem prostych, przechodzących przez punkt $AU+BV+CW=0$ (można tego dowieść za pomocą takiego samego rozumowania, jakie zastosowaliśmy w Uwadze do § 11).

§ 15. **Równanie** $UX+VY+WZ=0$. — Weźmy pod uwagę równanie

(1) $$UX+VY+WZ=0.$$

Uważajmy następnie występujące w tem równaniu wielkości X, Y, Z za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, natomiast wielkości U, V, W za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej.

Z rozważań § 12 wynika, iż jeżeli w równaniu (1) wielkości U, V, W są stałemi, wielkości zaś X, Y, Z zmiennemi, to w takim razie równanie (1) przedstawia ogół punktów prostej (U, V, W). Natomiast z rozważań § 13 i § 14 wynika, iż jeżeli w równaniu (1) wielkości X, Y, Z są stałemi, wielkości zaś U, V, W zmiennemi, to wtedy równanie (1) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt (X, Y, Z).

Równanie (1) przedstawia więc albo prostą albo punkt w zależności od tego, czy wielkości U, V, W uważamy za stałe, wielkości zaś X, Y, Z za zmienne, czy też odwrotnie. Dlatego też równanie (1) nazywamy równaniem prostej, względnie punktu, w postaci dwoistej w spółrzędnych jednorodnych.

Przykłady. Prostą (2, 1, 3) możemy przedstawić przez równanie $2X+Y+3Z=0$. Punkt (1, —3, 4) możemy przedstawić przez równanie $U-3V+4W=0$. Za spółrzędne prostej $5X-2Y+3Z=0$ możemy uważać liczby $5, -2, 3$. Za spółrzędne punktu $2U+5V-W=0$ możemy uważać liczby $2, 5, -1$.

§ 16. Układ płaski spółrzędnych Plücker'a. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowany mu układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek prostą (U, V, W). Jeżeli ta prosta nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, to w takim razie $W \neq 0$ (§ 12).

Spółrzędnemi Plücker'a prostej, nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych, nazywamy 2 liczby u i v, które ze spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go U, V, W tej prostej znajdują się w zależności

$$U:V:W=u:v:1, \tag{1}$$

t. zn. które przez spółrzędne U, V, W wyrażają się w sposób następujący:

$$u=\frac{U}{W}, \quad v=\frac{V}{W}. \tag{2}$$

Każda prosta, nie przechodząca przez początek układu spółrzędnych, określa swe spółrzędne Plücker'a jednoznacznie. Chociaż bowiem w podanej przed chwilą definicji spółrzędne Plücker'a prostej wyraziliśmy przez jej spółrzędne jednorodne Hesse'go, prosta zaś swych spółrzędnych jednorodnych Hesse'go nie określa jednoznacznie, to jednak (§ 12) dwie trójki liczb U_1, V_1, W_1 oraz U_2, V_2, W_2, będące dwiema trójkami spółrzędnych jednorodnych Hesse'go jednej i tej samej prostej, znajdują się w zależności wzajemnej:

(3) $$U_1 : V_1 : W_1 = U_2 : V_2 : W_2;$$

jeżeli zatem przedstawiona przez te trójki liczb prosta nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, to wtedy $W_1 \neq 0$ i $W_2 \neq 0$, stosunki więc $\frac{U_1}{W_1}, \frac{U_2}{W_2}, \frac{V_1}{W_1}, \frac{V_2}{W_2}$ są napewno liczbami oznaczonemi, przyczem z proporcji (3) wynika, że:

(4) $$\frac{U_1}{W_1} = \frac{U_2}{W_2} \text{ oraz } \frac{V_1}{W_1} = \frac{V_2}{W_2}.$$

Odwrotnie, weźmy teraz pod uwagę jakiekolwiek 2 liczby rzeczywiste skończone u, v. Równanie

(5) $$uX + vY + Z = 0$$

przedstawia ogół punktów pewnej w zupełności określonej prostej d (§ 11). Ta prosta nie przechodzi przytem przez początek układu spółrzędnych, albowiem wartości $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$, będące spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go początku układu spółrzędnych (§ 9), nie czynią równaniu (5) zadość. Spółrzędne jednorodne Hesse'go U, V, W prostej d czynią zadość warunkowi (§ 12) $U : V : W = u : v : 1$, skąd wynika $u = \frac{U}{W}$ i $v = \frac{V}{W}$, to zaś dowodzi, że liczby u i v są spółrzędnemi Plücker'a prostej d.

Otrzymaliśmy więc, że każda prosta, nie przechodząca przez początek układu spółrzędnych, posiada 2 w zupełności określone spółrzędne Plücker'a u i v, oraz odwrotnie, każde 2 liczby rzeczywiste skończone u i v mogą być uważane za spółrzędne Plücker'a pewnej w zupełności określonej prostej, nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych, mianowicie prostej

(6) $$uX + vY + Z = 0.$$

Jeżeli z pośród dwu liczb rzeczywistych skończonych u i v liczba u jest równa 0, natomiast liczba v jest różna od 0, to wtedy i tylko wtedy te 2 liczby, uważane za spółrzędne Plücker'a, przedstawiają pewną prostą, równoległą do osi x-ów, lecz różną od tej osi. Jeżeli z pośród dwu liczb rzeczywistych skończonych u i v liczba v jest równa 0, natomiast liczba u jest różna od 0, to wtedy i tylko wtedy te 2 liczby, uważane za spółrzędne Plücker'a, przedstawiają pewną prostą, równoległą do osi y-ów, lecz różną od tej osi. Liczby 0, 0, uważane za spółrzędne Plücker'a, przedstawiają prostą niewłaściwą.

Zamiast mówić: „prosta o spółrzędnych Plücker'a u i v", można powiedzieć wprost: „prosta (u, v)".

Niechaj u i v będą spółrzędnemi Plücker'a jakiejś prostej właściwej d, nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych. Ponieważ, według założenia, prosta d jest prostą właściwą, przeto przynajmniej jedna z liczb u i v jest różna od 0. Ogół punktów prostej d przedstawia równanie (6). A zatem ogół punktów właściwych prostej d przedstawia równanie (§ 10)

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{7}$$

Przypuśćmy najpierw, że prosta właściwa d nie jest równoległa do żadnej z osi spółrzędnych, a zatem żadna z liczb u i v nie jest równa 0. Prosta d przecina wtedy oś x-ów, względnie oś y-ów, w punkcie właściwym, który oznaczmy przez A, względnie przez B. Odciętą punktu A oznaczmy przez a, rzędną zaś punktu B oznaczmy przez b. Spółrzędnemi Descartes'a punktu A są więc liczby a, 0, spółrzędnemi zaś Descartes'a punktu B są liczby 0, b. Ponieważ każdy z tych dwu punktów należy do prostej d, przeto spółrzędne Descartes'a każdego z nich muszą równaniu (7) czynić zadość, t. zn. mamy $ua + 1 = 0$ oraz $vb + 1 = 0$, skąd wynika:

$$u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}. \tag{8}$$

Wyrażamy to, mówiąc, iż w rozpatrywanym przypadku spółrzędne Plücker'a prostej d są ujemnemi odwrotnościami odcinków, jakie ta prosta odcina od osi spółrzędnych.

Przypuśćmy teraz, że prosta właściwa d jest równoległa do osi x-ów (i przytem różna od tej osi), t. zn. $u=0$, lecz $v \neq 0$. Równanie (7) redukuje się wtedy do równania

$$vy+1=0. \tag{9}$$

Prosta d przecina w tym przypadku oś y-ów w jakimś punkcie właściwym B, którego rzędną oznaczmy przez b, którego zatem spółrzędnemi Descartes'a są liczby $0, b$. Ponieważ punkt B należy do prostej d, przeto jego spółrzędne czynią równaniu (9) zadość, t. zn. mamy $vb+1=0$, skąd wynika $v=-\frac{1}{b}$. W tym więc przypadku spółrzędna u prostej d jest równa 0, spółrzędna zaś v jest równa ujemnej odwrotności odcinka, jaki prosta d odcina od osi y-ów. Jeżeli jednak nie ograniczymy się do rozpatrywania samych liczb skończonych, to będziemy mogli powiedzieć, że także w tym przypadku spółrzędne Plücker'a prostej d możemy uważać za równe ujemnym odwrotnościom odcinków, jakie prosta d odcina od osi spółrzędnych, albowiem za odciętą a punktu niewłaściwego A, w jakim prosta d przecina oś x-ów, winniśmy uważać $\pm\infty$ (§ 2).

Gdyby prosta właściwa d była równoległa do osi y-ów (i przytem różna od tej osi), t. zn. gdyby było $v=0$ i $u \neq 0$, to wtedy, oznaczywszy przez a odciętą punktu właściwego A, w jakim prosta d przecina oś x-ów, oraz przyjąwszy $\pm\infty$ za rzędną b punktu niewłaściwego B, w jakim prosta d przecina oś y-ów, moglibyśmy znów równości (8) uważać za spełnione.

W końcu, jeżeli jest dana prosta niewłaściwa, t. zn. prosta o spółrzędnych Plücker'a 0, 0, to przyjąwszy $\pm\infty$ zarówno za odciętą a punktu niewłaściwego A, w jakim prosta dana przecina oś x-ów, jak też za rzędną b punktu niewłaściwego B, w jakim prosta dana przecina oś y-ów, znów równości (8) będziemy mogli uważać za spełnione.

Gdybyśmy się więc nie ograniczali do rozpatrywania samych liczb skończonych, to spółrzędne Plücker'a moglibyśmy wtedy zdefinjować w sposób następujący:

S p ó ł r z ę d n e m i P l ü c k e r ' a u, v p r o s t e j, n i e p r z e c h o d z ą c e j p r z e z p o c z ą t e k u k ł a d u s p ó ł-rzędnych, nazywamy ujemne odwrotności odcinków, jakie ta prosta odcina od osi spółrzędnych, t. zn.

$$u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}, \tag{10}$$

gdzie a oznacza odciętą punktu, w jakim rozpatrywana prosta przecina oś x-ów, b zaś rzędną punktu, w jakim rozpatrywana prosta przecina oś y-ów.

Prostych, przechodzących przez początek układu spółrzędnych, przez spółrzędne Plücker'a nie przedstawiamy. Gdybyśmy bowiem nawet w pierwszej, względnie w drugiej, definicji spółrzędnych Plücker'a usunęli ograniczenie, iż ta definicja odnosi się specjalnie do prostych, nie przechodzących przez początek układu spółrzędnych, to chociaż wtedy każda prosta posiadałaby spółrzędne Plücker'a, jednak proste, przechodzące przez początek układu spółrzędnych i różne od osi spółrzędnych, przez swe spółrzędne Plücker'a nie byłyby jednoznacznie określone, albowiem za spółrzędne każdej z nich musielibyśmy uważać tę samą parę liczb $\pm\infty$, $\pm\infty$.

Z pośród wszystkich prostych, przechodzących przez początek układu spółrzędnych, jedynie tylko osi spółrzędnych moglibyśmy określić jednoznacznie za pomocą spółrzędnych Plücker'a, a mianowicie oś x-ów za pomocą spółrzędnych, z których spółrzędna u posiadały wartość dowolną, różną od $\pm\infty$, spółrzędna zaś v byłaby równa $\pm\infty$, oraz oś y-ów za pomocą spółrzędnych $u = \pm\infty$ i $v \neq \pm\infty$. Opierając się bowiem np. na drugiej definicji spółrzędnych Plücker'a, możemy powiedzieć, że prostą o spółrzędnych Plücker'a $u \neq \pm\infty$ i $v = \pm\infty$ jest prosta, przechodząca przez punkty $\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$ i $(0, 0)$, t. zn. oś x-ów, prostą zaś o spółrzędnych Plücker'a $u = \pm\infty$ i $v \neq \pm\infty$ jest prosta, przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $\left(0, -\frac{1}{v}\right)$, t. zn. oś y-ów.

Wprowadziliśmy tu układ płaski spółrzędnych Plücker'a, wyszedłszy z pewnego układu płaskiego spółrzędnych Descartes'a oraz podporządkowanego mu układu płaskiego spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Otóż ten układ spółrzędnych Plücker'a oraz wymieniony układ spółrzędnych Descartes'a nazywamy związanymi z sobą. Oś x-ów w układzie Descartes'a nazywamy osią u-ów w układzie Plücker'a, oś y-ów w układzie Descartes'a nazywamy osią v-ów w układzie Plücker'a, początek układu spółrzędnych Descartes'a nazywamy początkiem układu spółrzędnych Plücker'a. Układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowany układowi spółrzędnych Descartes'a, nazywamy też podporządkowanym temu układowi spółrzędnych Plücker'a, który jest z wymienionym układem spółrzędnych Descartes'a związany.

§ 17. Równanie, przedstawiające ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt, różny od początku układu spółrzędnych, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych, w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a. — Niechaj będzie dana płaszczyzna właściwa i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Descartes'a, związany z nim układ spółrzędnych Plückera oraz podporządkowany tym dwu układom układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go.

Weźmy w tej płaszczyźnie pod uwagę pewien punkt P, różny od początku układu spółrzędnych, którego spółrzędne jednorodne Hesse'go oznaczmy przez X_1, Y_1, Z_1. Ponieważ, według założenia, punkt P jest różny od początku układu spółrzędnych, przeto przynajmniej jedna z liczb X_1 i Y_1 jest różna od 0.

Niechaj d będzie jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez punkt P, lecz nie przechodzącą przez początek układu spółrzędnych. Ponieważ prosta d nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, przeto możemy przedstawić ją przez spółrzędne Plücker'a które oznaczmy np. przez u' i v'. Ogół punktów prostej d możemy przedstawić przez równanie (§ 16):

(1) $$u'X + v'Y + Z = 0.$$

Ponieważ, według założenia, punkt P do prostej d należy, przeto jego spółrzędne muszą równaniu (1) czynić zadość, t. zn. mamy:

(2) $$u' X_1 + v' Y_1 + Z_1 = 0.$$

Weźmy pod uwagę równanie

(3) $$X_1 u + Y_1 v + Z_1 = 0,$$

w którem u i v są niewiadomemi.

Z równości (2) wynika, iż spółrzędne Plücker'a prostej d czynią temu równaniu zadość. Lecz prosta d jest dowolną prostą, przechodzącą przez punkt P, możemy więc powiedzieć, iż spółrzędne Plücker'a każdej prostej, przechodzącej przez punkt P, lecz nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych, czynią równaniu (3) zadość.

Odwrotnie, niechaj u'' i v'' będą liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi równanie (3), t. zn. czyniącemi zadość warunkowi:

(4) $$X_1 u'' + Y_1 v'' + Z_1 = 0.$$

Ponieważ liczby u'' i v'' są liczbami rzeczywistemi skończonemi, przeto możemy je uważać za spółrzędne Plücker'a pewnej w zupełności określonej prostej, nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych (§ 16). Ogół punktów tej prostej przedstawia równanie (§ 16):

(5) $$u'' X + v'' Y + Z = 0.$$

Z równości (4) wynika, iż spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu P czynią równaniu (5) zadość, a zatem prosta (u'', v'') przechodzi przez punkt P.

Jeżeli więc każde 2 liczby rzeczywiste skończone u i v będziemy uważali za spółrzędne Plücker'a, to w takim razie ogół par liczb rzeczywistych skończonych u i v, spełniających równanie (3), będzie przedstawiał ogół prostych, przechodzących przez punkt P, z wyjątkiem prostej, łączącej punkt P z początkiem układu spółrzędnych. Wyrażamy to, mówiąc, iż równanie (3) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt P, z wyjątkiem prostej, łączącej punkt P z początkiem układu spółrzędnych.

Oznaczywszy liczby X_1, y_1, Z_1 odpowiednio przez A, B, C, otrzymamy twierdzenie następujące:

W układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt, różny od początku układu spółrzędnych, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych, możemy przedstawić przez równanie $Au+Bv+C=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0.

Zamiast mówić, iż równanie $Au+Bv+C=0$ przedstawia ogół prostych, przechodzących przez pewien punkt, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych, często mówimy wprost, iż ono przedstawia ten punkt, i przytem samo równanie nazywamy równaniem wymienionego punktu w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a.

Tak samo zamiast mówić: „punkt, który przedstawia równanie $Au+Bv+C=0$," często mówimy wprost: „punkt $Au+Bv+C=0$".

§ 18. Interpretacja geometryczna równania $Au+Bv+$ $+C=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a. — Niechaj będzie dane równanie

$$Au+Bv+C=0, \tag{1}$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek płaszczyznę właściwą i w tej płaszczyźnie układ spółrzędnych Plücker'a. Jeżeli każdą parę liczb rzeczywistych skończonych będziemy uważali za spółrzędne Plücker'a, to wtedy ogółowi par liczb rzeczywistych skończonych u i v, spełniających równanie (1), będzie odpowiadał w rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej pewien zbiór prostych. O równaniu (1) będziemy mówili, że ono ten zbiór prostych przedstawia.

Ponieważ przynajmniej jedna z liczb A i B jest różna od 0, przeto liczby A, B, C, uważane za spółrzędne punktu w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym rozpatrywanemu układowi spółrzędnych Plücker'a, przedstawiają pewien punkt, różny od początku układu spółrzędnych (§ 9). A w takim razie z rozważań, podanych w § 17, wynika, iż równanie (1) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt (A, B, C), z wyjątkiem prostej, łączącej punkt (A, B, C) z początkiem układu spółrzędnych.

Mamy zatem:

W układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a równanie $Au+Bv+C=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, przedstawia ogół prostych, przechodzących przez jeden punkt, różny od początku układu spółrzędnych, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych.

To twierdzenie jest odwrotnem względem twierdzenia, wypowiedzianego w § 17.

Przypadki szczególne równania $Au+Bv+C=0$:

1) $C=0$; równanie $Au+Bv=0$ przedstawia pewien punkt, leżący na prostej niewłaściwej;

2) $B=0$; równanie $Au+C=0$ przedstawia pewien punkt, leżący na osi u-ów;

3) $A=0$; równanie $Bv+C=0$ przedstawia pewien punkt, leżący na osi v-ów;

4) równanie $u=0$, względnie $v=0$, przedstawia punkt niewłaściwy osi u-ów, względnie punkt niewłaściwy osi v-ów.

§ 19. Równanie $ux+vy+1=0$. — Weźmy pod uwagę równanie

(1) $$ux+vy+1=0.$$

Uważajmy następnie występujące w tem równaniu wielkości x i y za spółrzędne Descartes'a punktu właściwego, natomiast wielkości u i v za spółrzędne Plücker'a prostej, nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych.

Przyjmijmy, że wielkości u i v są stałemi, przyczem przynajmniej jedna z nich jest różna od 0, wielkości zaś x i y są zmiennemi. Prosta (u, v) jest wtedy prostą właściwą. Z rozważań § 16 wynika, że równanie (1) przedstawia w tym przypadku ogół punktów właściwych prostej (u, v).

Odwrotnie, przyjmijmy, że wielkości x i y są stałemi, przyczem przynajmniej jedna z nich jest różna od 0, wielkości zaś u i v są zmiennemi. Punkt (x, y) jest wtedy różny od początku układu spółrzędnych, przyczem za spółrzędne jednorodne Hesse'go tego punktu możemy przyjąć liczby x, y, 1. A zatem, opierając się na rozważaniach § 17, możemy powiedzieć, że równanie (1) przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt (x, y), z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych.

Równanie (1) przedstawia więc albo prostą właściwą, nie przechodzącą przez początek układu spółrzędnych, albo też punkt właściwy, różny od początku układu spółrzędnych, w zależności od tego, czy wielkości u i v uważamy za stałe, wielkości zaś x i y za zmienne, czy też odwrotnie. Dlatego też równanie (1) nazywamy *równaniem prostej, względnie punktu, w postaci dwoistej w spółrzędnych niejednorodnych.*

Przykłady. Prostą (2, 3) możemy przedstawić przez równanie $2x + 3y + 1 = 0$. Punkt $(1, -2)$ możemy przedstawić przez równanie $u - 2v + 1 = 0$. Spółrzędnemi prostej $5x + 4y + 7 = 0$ są liczby $\frac{5}{7}$ i $\frac{4}{7}$. Spółrzędnemi punktu $4u - 3v + 2 = 0$ są liczby 2 i $-\frac{3}{2}$.

§ 20. Streszczenie wyników, otrzymanych w §§ poprzednich. — Wprowadziliśmy 3 układy płaskie spółrzędnych: Descartes'a, Plücker'a i Hesse'go.

W układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a każdy punkt właściwy możemy przedstawić przez spółrzędne x, y (§ 2), każdą prostą właściwą możemy przedstawić przez równanie $Ax+By+C=0$ (§ 3); odwrotnie, każde 2 liczby rzeczywiste skończone x i y mogą być uważane za spółrzędne pewnego w zupełności określonego punktu (§ 2), oraz każde równanie $Ax+By+C=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, może być uważane za równanie pewnej w zupełności określonej prostej (§ 6).

W układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a każdą prostą, nie przechodzącą przez początek układu spółrzędnych, możemy przedstawić przez spółrzędne u i v (§ 16), każdy punkt, różny od początku układu spółrzędnych, możemy przedstawić przez równanie $Au+Bv+C=0$ (§ 17); odwrotnie, każde 2 liczby rzeczywiste skończone u i v możemy uważać za spółrzędne pewnej w zupełności określonej prostej (§ 16), oraz każde równanie $Au+Bv+C=0$, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, możemy uważać za równanie pewnego w zupełności określonego punktu (§ 18).

W układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go każdy punkt i każdą prostą możemy przedstawić zarówno przez 3 spółrzędne (§ 9 i § 12), jak też przez równanie jednorodne stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi (§ 13 i § 10), przyczem ani punkt, ani też prosta swych spółrzędnych jednoznacznie nie określają, określają one jednoznacznie tylko stosunki pomiędzy swemi spółrzędnemi; odwrotnie, każde 3 liczby rzeczywiste skończone, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, możemy uważać za spółrzędne zarówno pewnego w zupełności określonego punktu (§ 9), jak też pewnej w zupełności określonej prostej (§ 12), oraz każde równanie jednorodne stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi, którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, możemy uważać za równanie zarówno pewnej w zupełności określonej prostej (§ 11), jak też pewnego w zupełności określonego punktu (§ 14).

Aby przejść od równania prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a do równania tej samej prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym wymienionemu układowi płaskiemu spółrzędnych Descartes'a, wystarczy w tem równaniu zamiast x i y napisać X i Y oraz wyraz niezależny pomnożyć przez Z. Odwrotnie, aby przejść od równania prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go do równania tej samej prostej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a, któremu wymieniony układ płaski spółrzędnych jednorodnych Hesse'go jest podporządkowany, wystarczy w tem równaniu wielkości X, Y, Z zastąpić wielkościami $x, y, 1$.

Aby przejść od równania punktu, różnego od początku układu spółrzędnych, w układzie płaskim spółrzędnych Plückera do równania tego samego punktu w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym wymienionemu układowi płaskiemu spółrzędnych Plücker'a, wystarczy w tem równaniu zamiast u i v napisać U i V oraz wyraz niezależny pomnożyć przez W. Odwrotnie, aby przejść od równania punktu, różnego od początku układu spółrzędnych, w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go do równania tego samego punktu w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a, któremu wymieniony układ płaski spółrzędnych jednorodnych Hesse'go jest podporządkowany, wystarczy w tem równaniu wielkości U, V, W zastąpić wielkościami $u, v, 1$.

Równanie $UX + VY + WZ = 0$ przedstawia prostą albo punkt w zależności od tego, czy wielkości U, V, W uważamy za stałe, wielkości zaś X, Y, Z za zmienne, czy też odwrotnie.

Równanie $ux + vy + 1 = 0$ przedstawia prostą albo punkt w zależności od tego, czy wielkości u i v uważamy za stałe, wielkości zaś x i y za zmienne, czy też odwrotne.

Rozdział II.

§ 21. Spółrzędne punktu, wspólnego dwu prostym danym, względnie spółrzędne prostej, przechodzącej przez dwa punkty dane.

Niechaj równania

(1a) $\begin{cases} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0 \end{cases}$	(1b) $\begin{cases} A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0 \end{cases}$
przedstawiają dwie proste	przedstawiają dwa punkty

różne, t. zn. niechaj warunek

(2) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

nie będzie spełniony. Spółrzędne

X, Y, Z punktu, wspólnego obydwu prostym (1a), muszą obydwu równaniom (1a)	U, V, W prostej, przechodzącej przez obydwa punkty (1b), muszą obydwu równaniom (1b)

czynić zadość, a zatem stosunki pomiędzy temi spółrzędnemi są:

(3a) $X : Y : Z = \begin{vmatrix} B_1, C_1 \\ B_2, C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1, A_1 \\ C_2, A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{vmatrix}.$	(3b) $U : V : W = \begin{vmatrix} B_1, C_1 \\ B_2, C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1, A_1 \\ C_2, A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{vmatrix}.$

Stąd więc wynika, że

punkt, wspólny obydu prostym (1a), wtedy i tylko wtedy jest punktem niewłaściwym,	prosta, łącząca obydwa punkty (1b), wtedy i tylko wtedy przechodzi przez początek układu spółrzędnych,

gdy jest spełniona równość:

(4) $$\begin{vmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ ta równość byłaby spełniona również wtedy, gdyby

proste (1 a) nakrywały się, przeto, uważając nakrywanie się dwu prostych za przypadek szczególny ich równoległości,

punkty (1 b) nakrywały się, przeto, uważając nakrywanie się dwu punktów za przypadek szczególny tej ich własności, iż łącząca je prosta przechodzi przez początek układu spółrzędnych,

będziemy mogli wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym

równoległości dwu prostych $A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0$ i $A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0$

na to, aby dwa punkty $A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0$ i $A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0$ leżały na jednej prostej z początkiem układu spółrzędnych,

jest spełnienie równości

$$\begin{vmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Rozpatrywaliśmy tu przypadek, gdy 2

proste dane są określone przez swe równania. Gdyby zaś 2 proste dane były określone przez swe spółrzędne U_1, V_1, W_1 oraz U_2, V_2, W_2, to, chcąc znaleść spółrzędne punktu, wspólnego tym dwu prostym, moglibyśmy napisać ich równania (§ 15) $U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0$ oraz $U_2 X + V_2 Y + W_2 Z = 0$ i następnie z tych równań wyznaczyć stosunki pomiędzy spółrzędnemi X, Y, Z szukanego

punkty dane są określone przez swe równania. Gdyby zaś 2 punkty dane były określone przez swe spółrzędne X_1, Y_1, Z_1 oraz X_2, Y_2, Z_2, to, chcąc znaleść spółrzędne prostej, przechodzącej przez te dwa punkty, moglibyśmy napisać ich równania (§ 15) $X_1 U + Y_1 V + Z_1 W = 0$ oraz $X_2 U + Y_2 V + Z_2 W = 0$ i następnie z tych równań wyznaczyć stosunki pomiędzy spółrzędnemi U, V, W szupunktu. Otrzymalibyśmy w ten sposób:

(5a) $$X : Y : Z = \begin{vmatrix} V_1, W_1 \\ V_2, W_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} W_1, U_1 \\ W_2, U_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_1, V_1 \\ U_2, V_2 \end{vmatrix}.$$

kanej prostej. Otrzymalibyśmy w ten sposób:

(5b) $$U : V : W = \begin{vmatrix} Y_1, Z_1 \\ Y_2, Z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z_1, X_1 \\ Z_2, X_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1, Y_1 \\ X_2, Y_2 \end{vmatrix}.$$

Stąd więc wynika, że warunkiem koniecznym i dostatecznym

równoległości dwu prostych (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2) jest:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

na to, aby dwa punkty (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) leżały na jednej prostej z początkiem układu spółrzędnych, jest:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}.$$

Jeżeli

żadna z dwu prostych danych nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, to wtedy każdą z nich możemy określić przez spółrzędne Plücker'a.

żaden z dwu punktów danych nie jest punktem niewłaściwym, to wtedy każdy z nich możemy określić przez spółrzędne Descartes'a.

Z rozważań powyższych wynika, iż warunkiem koniecznym i dostatecznym

równoległości dwu prostych (u_1, v_1) i (u_2, v_2) jest:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

na to, aby dwa punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) leżały na jednej prostej z początkiem układu spółrzędnych, jest:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Zastosowanie. Niechaj będzie dana prosta właściwa d, przedstawiona przez równanie $Ax + By + C = 0$. Prosta właściwa d', przedstawiona przez równanie $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, jest do prostej d równoległa wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$. Oznaczmy wartość równych sobie stosunków $\frac{A}{A_1}$ i $\frac{B}{B_1}$ przez ϱ (liczba ϱ jest skończona i różna od 0, albowiem nie jest możliwe, aby każda z liczb A_1 i B_1, lub też każda z liczb A i B, była równa 0). Mamy więc: $A = \varrho A_1$ i $B = \varrho B_1$. Pomnóżmy równanie prostej d' przez ϱ. Otrzymamy wtedy $\varrho A_1 x + \varrho B_1 y + \varrho C_1 = 0$, czyli $Ax + By + C' = 0$, gdzie symbolem C' oznaczyliśmy iloczyn ϱC_1. Otrzymaliśmy więc:

Równanie każdej prostej właściwej, równoległej do prostej właściwej $Ax + By + C = 0$, możemy napisać w postaci $Ax + By + C' = 0$.

Rozwiążemy teraz zadanie następujące: dana prosta właściwa $Ax + By + C = 0$ oraz punkt właściwy (x_1, y_1), napisać równanie prostej właściwej, przechodzącej przez punkt dany i równoległej do prostej danej.

Szukana prosta ma być równoległa do prostej $Ax + By + C = 0$, jej równanie można więc napisać w postaci $Ax + By + C' = 0$. Szukana prosta ma przechodzić przez punkt (x_1, y_1), zatem spółrzędne tego punktu muszą równaniu szukanej prostej czynić zadość, t. zn. musi być spełniona równość $Ax_1 + By_1 + C' = 0$, skąd wynika: $C' = -Ax_1 - By_1$. Szukaną prostą możemy zatem przedstawić przez równanie $Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$, czyli przez równanie $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.

§ 22. Równanie prostej, łączącej dwa punkty dane, względnie równanie punktu, wspólnego dwu prostym danym.

Niechaj będą dane 2

punkty różne (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2). Wobec założenia, że te 2 punkty są różne, ich spółrzędne warunku $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$	proste różne (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2). Wobec założenia, że te 2 proste są różne, ich spółrzędne warunku $\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{W_1}{W_2}$

nie spełniają. Za spółrzędne prostej, łączącej te 2 punkty, możemy uważać liczby (§ 21, strona prawa):

$$\begin{vmatrix} Y_1, Z_1 \\ Y_2, Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1, X_1 \\ Z_2, X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1, Y_1 \\ X_2, Y_2 \end{vmatrix}.$$

A zatem za **równanie** tej prostej możemy uważać równanie (§ 15):

$$\begin{vmatrix} Y_1, Z_1 \\ Y_2, Z_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} Z_1, X_1 \\ Z_2, X_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} X_1, Y_1 \\ X_2, Y_2 \end{vmatrix} Z = 0,$$

czyli

$$\text{(1a)} \quad \begin{vmatrix} X, Y, Z \\ X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2, Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

nie spełniają. Za spółrzędne punktu, wspólnego tym dwu prostym, możemy uważać liczby (§ 21, strona lewa):

$$\begin{vmatrix} V_1, W_1 \\ V_2, W_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} W_1, U_1 \\ W_2, U_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} U_1, V_1 \\ U_2, V_2 \end{vmatrix}.$$

A zatem za **równanie** tego punktu możemy uważać równanie (§ 15):

$$\begin{vmatrix} V_1, W_1 \\ V_2, W_2 \end{vmatrix} U + \begin{vmatrix} W_1, U_1 \\ W_2, U_2 \end{vmatrix} V + \begin{vmatrix} U_1, V_1 \\ U_2, V_2 \end{vmatrix} W = 0,$$

czyli

$$\text{(1b)} \quad \begin{vmatrix} U, V, W \\ U_1, V_1, W_1 \\ U_2, V_2, W_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Do równania

(1a) prostej, łączącej dwa punkty różne (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2),

(1b) punktu, wspólnego dwu prostym różnym (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2),

można dojść również za pomocą innego rozumowania, a mianowicie następującego.

Prosta, łącząca dwa punkty różne (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2), istnieje, a ponieważ każdą prostą można przedstawić przez równanie, przeto istnieje równanie

$$\text{(2a)} \quad AX + BY + CZ = 0,$$

Punkt, wspólny dwu prostym różnym (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2), istnieje, a ponieważ każdy punkt można przedstawić przez równanie, przeto istnieje równanie

$$\text{(2b)} \quad AU + BV + CW = 0,$$

którego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0, przedstawiające

szukaną prostą. Niechaj (X', Y', Z') będzie dowolnym

szukany punkt. Niechaj (U', V', W') będzie dowolną prostą punktem szukanej prostej. Spółrzędne tego punktu muszą równaniu (2 a) czynić zadość, t. zn. mamy:

(3 a) $AX' + BY' + CZ' = 0.$

Poza tem spółrzędne dwu punktów danych też muszą równaniu (2 a) czynić zadość, mamy więc

(4 a) $\begin{cases} AX_1 + BY_1 + CZ_1 = 0, \\ AX_2 + BY_2 + CZ_2 = 0. \end{cases}$

Rugując z równań (3 a) i (4 a) wielkości $A, B, C,$ otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} X', & Y', & Z' \\ X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Liczby X', Y', Z' czynią więc równaniu

(5 a) $$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

zadość. A ponieważ X', Y', Z' są to spółrzędne dowolnego punktu szukanej prostej, przeto możemy powiedzieć, że spółrzędne każdego punktu szukanej prostej czynią równaniu (5 a) zadość.

Lecz gdybyśmy wyznacznik, stanowiący stronę lewą równania (5 a), rozwinęli według elementów pierwszego

przechodzącą przez szukany punkt. Spółrzędne tej prostej muszą równaniu (2 b) czynić zadość, t. zn. mamy:

(3 b) $AU' + BV' + CW' = 0.$

Poza tem spółrzędne dwu prostych danych też muszą równaniu (2 b) czynić zadość, mamy więc

(4 b) $\begin{cases} AU_1 + BV_1 + CW_1 = 0, \\ AU_2 + BV_2 + CW_2 = 0. \end{cases}$

Rugując z równań (3 b) i (4 b) wielkości $A, B, C,$ otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} U', & V', & W' \\ U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Liczby U', V', W' czynią więc równaniu

(5 b) $$\begin{vmatrix} U, & V, & W \\ U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \end{vmatrix} = 0$$

zadość. A ponieważ U', V', W' są to spółrzędne dowolnej prostej, przechodzącej przez szukany punkt, przeto możemy powiedzieć, że spółrzędne każdej prostej, przechodzącej przez szukany punkt, czynią równaniu (5 b) zadość.

Lecz gdybyśmy wyznacznik, stanowiący stronę lewą równania (5 b), rozwinęli we-wiersza, to spotrzeglibyśmy, że równanie (5a)

dług elementów pierwszego wiersża, to spostrzeglibyśmy, że równanie (5b)

jest równaniem jednorodnem stopnia 1-ego oraz że spółczynniki tego równania są liczbami rzeczywistemi, przyczem przynajmniej jeden z nich jest różny od 0 [albowiem wszystkie 3 spółczynniki tego równania byłyby równe 0 tylko w tym przypadku, gdyby

punkty (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) nakrywały się]. Równanie (5a) przedstawia więc pewną w zupełności określoną prostą (§ 11). A ponieważ, jak widzieliśmy, spółrzędne każdego punktu szukanej prostej czynią równaniu (5a) zadość, przeto równanie (5a) przedstawia szukaną prostą.

proste (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2) nakrywały się]. Równanie (5b) przedstawia więc pewien w zupełności określony punkt (§ 14). A ponieważ, jak widzieliśmy, spółrzędne każdej prostej przechodzącej przez szukany punkt, czynią równaniu (5b) zadość, przeto równanie (5b) przedstawia szukany punkt.

Zresztą możnaby rozumować jeszcze inaczej, a mianowicie w ten sposób.

Dane są 2 punkty różne (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2). Dowiedziemy, że równanie

$$(6a)\qquad \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

przedstawia prostą, przechodzącą przez te 2 punkty.

Dane są 2 proste różne (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2). Dowiedziemy, że równanie

$$(6b)\qquad \begin{vmatrix} U, & V, & W \\ U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \end{vmatrix} = 0$$

przedstawia punkt, wspólny tym 2 prostym.

W tym celu zwróćmy uwagę na to, że gdybyśmy wyznacznik, stanowiący stronę lewą rozpatrywanego równania, rozwinęli według elementów pierwszego wiersza, to wtedy stałoby się widocznem, że rozpatrywane równanie jest równaniem stopnia 1-ego, że jego spółczynniki są liczbami rzeczywistemi i że przynajmniej jeden z tych spółczynników jest różny od 0. To równanie przedstawia zatem pewną w zupełności określoną prostą. Lecz gdybyśmy w wyznacznik, stanowiący stronę lewą równania (6 a), zamiast niewiadomych X, Y, Z wstawili liczby X_1, Y_1, Z_1, względnie X_2, Y_2, Z_2,

pewien w zupełności określony punkt. Lecz gdybyśmy w wyznacznik, stanowiący stronę lewą równania (6 b), zamiast niewiadomych U, V, W wstawili liczby U_1, V_1, W_1, względnie U_2, V_2, W_2,

to wtedy wiersz pierwszy tego wyznacznika byłby taki sam, jak wiersz drugi, względnie trzeci, wynacznik byłby więc równy 0, t. zn. spółrzędne obydwu

punktów danych czynią równaniu (6 a) zadość, a zatem prosta, jaką równanie (6 a) przedstawia, przechodzi przez obydwa punkty dane.

prostych danych czynią równaniu (6 b) zadość, a zatem punkt, jaki równanie (6 b) przedstawia, należy do obydwu prostych danych.

Rozpatrywaliśmy tu przypadek, gdy 2

punkty dane są określone przez swe spółrzędne jednorodne Hesse'go. Gdyby jednak żaden z tych 2 punktów danych nie był punktem niewłaściwym, to wtedy te punkty mogłyby być określone przez swe spółrzędne Descartes'a x_1, y_1 oraz x_2, y_2. Otrzymamy równanie prostej, łączącej te 2 punkty, zastępując w równaniu (6 a) wielkości X_1, Y_1, Z_1 wielkościami x_1, y_1, 1, wielkości X_2, Y_2, Z_2 wielkościami x_2, y_2, 1, oraz, ewentualnie, wielkości X, Y, Z wielkościami x, y, 1.

proste dane są określone przez swe spółrzędne jednorodne Hesse'go. Gdyby jednak żadna z tych 2 prostych danych nie przechodziła przez początek układu spółrzędnych, to wtedy te proste mogłyby być określone przez swe spółrzędne Plücker'a u_1, v_1 oraz u_2, v_2. Otrzymamy równanie punktu, wspólnego tym 2 prostym, zastępując w równaniu (6 b) wielkości U_1, V_1, W_1 wielkościami u_1, v_1, 1, wielkości U_2, V_2, W_2 wielkościami u_2, v_2, 1, oraz, ewentualnie, wielkości U, V, W wielkościami u, v, 1.

A zatem za równanie

prostej, łączącej dwa punkty

punktu, należącego do dwu

dane (x_1, y_1) i (x_2, y_2), możemy uważać równanie

$$(7a) \quad \begin{vmatrix} x, y, 1 \\ x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli rówanie

$$(8a) \quad (y_1 - y_2) x - (x_1 - x_2) y + \\ + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

prostych danych (u_1, v_1) i (u_2, v_2), możemy uważać równanie

$$(7b) \quad \begin{vmatrix} u, v, 1 \\ u_1, v_1, 1 \\ u_2, v_2, 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli równanie

$$(8b) \quad (v_1 - v_2) u - (u_1 - u_2) v + \\ + (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0.$$

§ 23. Trzy punkty, leżące na jednej prostej, względnie trzy proste, przechodzące przez jeden punkt.

Niechaj będą dane 3

punkty (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3). Równania

$$(1a) \quad \begin{vmatrix} X_1 U + Y_1 V + Z_1 W = 0, \\ X_2 U + Y_2 V + Z_2 W = 0, \\ X_3 U + Y_3 V + Z_3 W = 0 \end{vmatrix}$$

są równaniami tych 3-ech punktów. Wymienione punkty dane leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy równania (1 a) posiadają rozwiązanie, różne od 0, 0, 0.

proste (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), (U_3, V_3, W_3). Równanie

$$(1b) \quad \begin{vmatrix} U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0, \\ U_2 X + V_2 Y + W_2 Z = 0, \\ U_3 X + V_3 Y + W_3 Z = 0 \end{vmatrix}$$

są równaniami tych 3-ech prostych. Wymienione proste dane przechodzą przez jeden punkt wtedy i tylko wtedy, gdy równania (1 b) posiadają rozwiązanie, różne od 0, 0, 0.

A zatem warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby 3

punkty (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) leżały na jednej prostej, jest spełnienie równości:

$$(2a) \quad \begin{vmatrix} X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2, Z_2 \\ X_3, Y_3, Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

proste (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), (U_3, V_3, W_3) przechodziły przez jeden punkt, jest spełnienie równości:

$$(2b) \quad \begin{vmatrix} U_1, V_1, W_1 \\ U_2, V_2, W_2 \\ U_3, V_3, W_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Gdyby 3

punkty dane były określone przez swe równania

$$(3a)\quad \begin{cases} A_1U+B_1V+C_1W=0, \\ A_2U+B_2V+C_2W=0, \\ A_3U+B_3V+C_3W=0, \end{cases}$$

proste dane były określone przez swe równania

$$(3b)\quad \begin{cases} A_1X+B_1Y+C_1Z=0, \\ A_2X+B_2Y+C_2Z=0, \\ A_3X+B_3Y+C_3Z=0, \end{cases}$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby te 3

punkty leżały na jednej prostej,

proste przechodziły przez jeden punkt,

byłoby spełnienie równości:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby 3

punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) leżały na jednej prostej, jest spełnienie równości:

$$(5a)\qquad \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

proste (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) przechodziły przez jeden punkt, jest spełnienie równości:

$$(5b)\qquad \begin{vmatrix} u_1, v_1, 1 \\ u_2, v_2, 1 \\ u_3, v_3, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 24. Jakakolwiek liczba skończona punktów, leżących na jednej prostej, względnie jakakolwiek liczba skończona prostych, przechodzących przez jeden punkt.

Niechaj będzie danych n

punktów (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), . . ., (X_n, Y_n, Z_n).

prostych (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), . . ., (U_n, V_n, W_n).

Dowiedziemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wszystkie

punkty dane leżały na jednej prostej, jest znikanie wszyst-

proste dane przechodziły przez jeden punkt, jest znikanie

7*

kich wyznaczników rzędu 3-go macierzy

$$(1a)\quad \begin{vmatrix} X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2, Z_2 \\ \ldots\ldots \\ X_n, Y_n, Z_n \end{vmatrix}.$$

wszystkich wyznaczników rzędu 3-ego macierzy

$$(1b)\quad \begin{vmatrix} U_1, V_1, W_1 \\ U_2, V_2, W_2 \\ \ldots\ldots \\ U_n, V_n, W_n \end{vmatrix}.$$

Że ten warunek jest konieczny, wynika bezpośrednio z rozważań § 23. Że zaś jest on dostateczny, możemy dowieść w sposób następujący.

Przypuśćmy, że wszystkie wyznaczniki rzędu 3-go macierzy (1 a) są równe 0. Istnieją 2 możliwości: albo wszystkie punkty dane nakrywają się, albo też nie. Gdyby wszystkie punkty dane nakrywały się, to, oczywiście, moglibyśmy uważać je za leżące na jednej prostej. Pozostaje nam więc rozpatrzeć przypadek, gdy niewszystkie punkty dane nakrywają się, t. zn. gdy istnieją pomiędzy nimi przynajmniej 2 punkty różne. Niechaj więc np. punkty (X_k, Y_k, Z_k) i (X_l, Y_l, Z_l) będą dwoma punktami różnymi (t. zn. nie nakrywającymi się), należącymi do punktów danych. Istnieje jedna i tylko jedna prosta d, przechodząca przez te 2 punkty. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} X_i, Y_i, Z_i \\ X_k, Y_k, Z_k \\ X_l, Y_l, Z_l \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie i oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią całkowitą nie-

(1 b) są równe 0. Istnieją 2 możliwości: albo wszystkie proste dane nakrywają się, albo też nie. Gdyby wszystkie proste dane nakrywały się, to, oczywiście, moglibyśmy uważać je za przechodzące przez jeden punkt. Pozostaje nam więc rozpatrzeć przypadek, gdy niewszystkie proste dane nakrywają się, t. zn. gdy istnieją pomiędzy niemi przynajmniej 2 proste różne. Niechaj więc np. proste (U_k, V_k, W_k) i (U_l, V_l, W_l) będą dwiema prostemi różnemi (t. zn. nie nakrywającemi się), należącemi do prostych danych. Istnieje jeden i tylko jeden punkt P, należący do tych 2 prostych. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} U_i, V_i, W_i \\ U_k, V_k, W_k \\ U_l, V_l, W_l \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie i oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią całkowitą nie-większą od n, przeto (§ 23) każdy z punktów danych leży z punktami (X_k, Y_k, Z_k) i (X_l, Y_l, Z_l) na jednej prostej, t. zn. każdy z punktów danych leży na prostej d.

większą od n, przeto (§ 23) każda z prostych danych przechodzi z prostemi (U_k, V_k, W_k) i (U_l, V_l, W_l) przez jeden punkt, t. zn. każda z prostych danych przechodzi przez punkt P.

Twierdzenie nasze zostało zatem dowiedzione.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby

punkty

$$(2a)\quad \left|\begin{array}{l} A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n U + B_n V + C_n W = 0 \end{array}\right.$$

leżały na jednej prostej,

proste

$$(2b)\quad \left|\begin{array}{l} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n X + B_n Y + C_n Z = 0 \end{array}\right.$$

przechodziły przez jeden punkt,

jest znikanie wszystkich wyznaczników rzędu 3-ego macierzy

$$(3)\quad \left\| \begin{array}{c} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ \dots\dots \\ A_n, B_n, C_n \end{array} \right\| .$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby

punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ leżały na jednej prostej, jest znikanie wszystkich wyznaczników rzędu 3-go macierzy

$$(4a)\quad \left\| \begin{array}{c} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ \dots\dots \\ x_n, y_n, 1 \end{array} \right\| .$$

proste $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ przechodziły przez jeden punkt, jest znikanie wszystkich wyznaczników rzędu 3-ego macierzy

$$(4b)\quad \left\| \begin{array}{c} u_1, v_1, 1 \\ u_2, v_2, 1 \\ \dots\dots \\ u_n, v_n, 1 \end{array} \right\| .$$

§ 25. Równanie oraz spółrzędne prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się dwu innych prostych, względnie równanie oraz spółrzędne punktu, należącego do prostej, łączącej dwa inne punkty.

Niechaj będą dane 2

proste różne d_1 i d_2, przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(1a)\quad \begin{cases} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0. \end{cases}$$

punkty różne P_1 i P_2, przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(1b)\quad \begin{cases} A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0. \end{cases}$$

Ponieważ, według założenia, proste d_1 i d_2

Ponieważ, według założenia, punkty P_1 i P_2

są różne, przeto warunek

$$(2)\quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

nie jest spełniony. Oznaczmy trójmiany

$A_1 X + B_1 Y + C_1 Z$ i $A_2 X + B_2 Y + C_2 Z$ odpowiednio przez $L_1(X, Y, Z)$ i $L_2(X, Y, Z)$, lub też wprost przez L_1 i L_2, t. zn.

$$(3a)\quad \begin{cases} L_1 \equiv L_1(X, Y, Z) \equiv \\ \quad \equiv A_1 X + B_1 Y + C_1 Z, \\ L_2 \equiv L_2(X, Y, Z) \equiv \\ \quad \equiv A_2 X + B_2 Y + C_2 Z \end{cases}$$

$A_1 U + B_1 V + C_1 W$ i $A_2 U + B_2 V + C_2 W$ odpowiednio przez $M_1(U, V, W)$ i $M_2(U, V, W)$, lub też wprost przez M_1 i M_2, t. zn.

$$(3b)\quad \begin{cases} M_1 \equiv M_1(U, V, W) \equiv \\ \quad \equiv A_1 U + B_1 V + C_1 W, \\ M_2 \equiv M_2(U, V, W) \equiv \\ \quad \equiv A_2 U + B_2 V + C_2 W \end{cases}$$

(znak $\equiv$ oznacza tu tożsamość). Równania

prostych d_1 i d_2 możemy więc napisać w ten sposób:

$$(4a)\quad \begin{cases} L_1(X, Y, Z) = 0, \\ L_2(X, Y, Z) = 0, \end{cases}$$

albo też wprost tak:

$$(5a)\quad L_1 = 0 \text{ i } L_2 = 0.$$

punktów P_1 i P_2 możemy więc napisać w ten sposób:

$$(4b)\quad \begin{cases} M_1(U, V, W) = 0, \\ M_2(U, V, W) = 0, \end{cases}$$

albo też wprost tak:

$$(5b)\quad M_1 = 0 \text{ i } M_2 = 0.$$

Weźmy pod uwagę równość

(6a) $\lambda_1 . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0,$ | (6b) $\lambda_1 . M_1(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0,$

gdzie λ_1 i λ_2 są to jakieś dwie liczby rzeczywiste skończone stałe, z których przynajmniej jedna jest różna od 0. Czy jest możliwem, aby ta równość była tożsamością, t. zn. aby była spełniona dla wszelkich wartości niewiadomych? Ta równość byłaby tożsamością wtedy i tylko wtedy, gdyby po wykonaniu redukcji każdy spółczynnik trójmianu, stanowiącego stronę lewą tej równości, był równy 0, t. zn. gdyby było:

(7) $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0.$

Lecz ze spełnienia warunków (7) wynika spełnienie warunków (2), a ponieważ warunki (2) nie są spełnione, przeto nie mogą być spełnione i warunki (7), t. zn. rozpatrywana równość nie może być tożsamością. Rozpatrywana równość jest więc równaniem i przytem równaniem jednorodnem stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi

$X, Y, Z,$ przedstawia zatem pewną w zupełności określoną prostą d. | $U, V, W,$ przedstawia zatem pewien w zupełności określony punkt P.

Dowiedziemy, że

prosta d przechodzi przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2. | punkt P należy do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2.

Oznaczmy w tym celu spółrzędne punktu przecięcia się tych dwu prostych przez X_0, Y_0, Z_0. Punkt (X_0, Y_0, Z_0) należy do każdej z prostych d_1 i d_2, zatem jego spółrzędne równaniu każdej z tych dwu prostych muszą czynić zadość, t. zn. mamy:

(8a) $\begin{cases} L_1(X_0, Y_0, Z_0) = 0, \\ L_2(X_0, Y_0, Z_0) = 0. \end{cases}$

Oznaczmy w tym celu spółrzędne prostej, łączącej te dwa punkty, przez U_0, V_0, W_0. Prosta (U_0, V_0, W_0) przechodzi przez każdy z punktów P_1 i P_2, zatem jej spółrzędne równaniu każdego z tych dwu punktów muszą czynić zadość, t. zn. mamy:

(8b) $\begin{cases} M_1(U_0, V_0, W_0) = 0, \\ M_2(U_0, V_0, W_0) = 0. \end{cases}$

Lecz spełnienie równości (8a) pociąga za sobą spełnienie równości

(9a) $\lambda_1 . L_1(X_0, Y_0, Z_0) +$
$+ \lambda_2 . L_2(X_0, Y_0, Z_0) = 0,$

ze spełnienia zaś tej ostatniej równości wynika, że spółrzędne punktu (X_0, Y_0, Z_0) czynią zadość równaniu (6a), przedstawiającemu prostą d, a zatem prosta d przez punkt (X_0, Y_0, Z_0) przechodzi,

Lecz spełnienie równości (8b) pociąga za sobą spełnienie równości

(9b) $\lambda_1 . M_1(U_0, V_0, W_0) +$
$+ \lambda_2 . M_2(U_0, V_0, W_0) = 0,$

ze spełnienia zaś tej ostatniej równości wynika, że spółrzędne prostej (U_0, V_0, W_0) czynią zadość równaniu (6b), przedstawiającemu punkt P, a zatem punkt P do prostej (U_0, V_0, W_0) należy,

czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Dowiedziemy teraz, że, odwrotnie, równanie

każdej prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, można napisać w tej postaci, w jakiej jest napisane równanie (6a), innemi słowy dowiedziemy, że: jeżeli d' jest jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, to wielkościom λ_1 i λ_2 można nadać takie 2 wartości rzeczywiste skończone, iż równanie (6a) będzie przedstawiało prostą d'.

Niechaj bowiem d' będzie dowolną prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2. Weźmy na prostej d' dowolny punkt (X', Y', Z'), różny od punktu przecięcia się prostych d_1 i d_2. Wstawmy następnie w równanie (6a) za-

każdego punktu, należącego do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, można napisać w tej postaci, w jakiej jest napisane równanie (6b), innemi słowy dowiedziemy, że: jeżeli P' jest jakimkolwiek punktem, należącym do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, to wielkościom λ_1 i λ_2 można nadać takie 2 wartości rzeczywiste skończone, iż równanie (6b) będzie przedstawiało punkt P'.

Niechaj bowiem P' będzie dowolnym punktem, należącym do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2. Przesuńmy przez punkt P' dowolną prostą (U', V', W'), różną od prostej, łączącej punkty P_1 i P_2. Wstawmy następnie w równanie miast niewiadomych X, Y, Z wartości X', Y', Z' i obliczmy wtedy z tego równania λ_1 i λ_2. Otrzymamy

(10a) $\lambda_1 : \lambda_2 = L_2(X', Y', Z') : -L_1(X', Y', Z')$.

Jeżeli więc wielkościom λ_1 i λ_2 nadamy wartości

(11a) $\begin{cases} \lambda_1 = \varrho \cdot L_2(X', Y', Z'), \\ \lambda_2 = -\varrho \cdot L_1(X', Y', Z'), \end{cases}$

(6b) zamiast niewiadomych U, V, W wartości U', V', W' i obliczmy wtedy z tego równania λ_1 i λ_2. Otrzymamy

(10b) $\lambda_1 : \lambda_2 = M_2(U', V', W') : -M_1(U', V', W')$.

Jeżeli więc wielkościom λ_1 i λ_2 nadamy wartości

(11b) $\begin{cases} \lambda_1 = \varrho \cdot M_2(U', V', W'), \\ \lambda_2 = -\varrho \cdot M_1(U', V', W'), \end{cases}$

gdzie ϱ oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną, różną od 0, to wtedy równanie

(6a) będzie przedstawiało prostą d', innemi słowy równanie

(12a) $\varrho . L_2(X', Y', Z') . L_1(X, Y, Z) - \varrho . L_1(X', Y', Z') . L_2(X, Y, Z) = 0$

przedstawia prostą d'. Albowiem to równanie przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2 oraz przez punkt (X', Y', Z'), posiadającą więc z prostą d' dwa różne punkty wspólne, a zatem nakrywającą ją.

(6b) będzie przedstawiało punkt P', innemi słowy równanie

(12b) $\varrho . M_2(U', V', W') . M_1(U, V, W) - \varrho . M_1(U', V', W') . M_2(U, V, W) = 0$

przedstawia punkt P'. Albowiem to równanie przedstawia punkt, należący do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, oraz do prostej (U', V', W'), będący więc punktem przecięcia się tych dwu prostych, a zatem nakrywający punkt P'.

Przyczem poza wartościami

(11 a) niema innych wartości na λ_1 i λ_2, którym odpowiadałaby prosta d'.

(11 b) niema innych wartości na λ_1 i λ_2, którym odpowiadałby punkt P'.

Jeżeli zatem λ_1', λ_2' oraz λ_1'', λ_2'' oznaczają 2 pary wartości, którym odpowiada

jedna i ta sama prosta,

jeden i ten sam punkt,

to wtedy i tylko wtedy zachodzi równość $\lambda_1' : \lambda_2' = \lambda_1'' : \lambda_2''$.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli równania

$$\text{(13 a)} \quad \left| \begin{aligned} L_1(X,Y,Z) &= A_1 X + \\ &+ B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ L_2(X,Y,Z) &= A_2 X + \\ &+ B_2 Y + C_2 Z = 0 \end{aligned} \right.$$

przedstawiają 2 proste różne d_1 i d_2, to wtedy równanie

$$\text{(14 a)} \quad \lambda_1 . L_1(X,Y,Z) + \lambda_2 . L_2(X,Y,Z) = 0,$$

$$\text{(13 b)} \quad \left| \begin{aligned} M_1(U,V,W) &= A_1 U + \\ &+ B_1 V + C_1 W = 0, \\ M_2(U,V,W) &= A_2 U + \\ &+ B_2 V + C_2 W = 0 \end{aligned} \right.$$

przedstawiają 2 punkty różne P_1 i P_2, to wtedy równanie

$$\text{(14 b)} \quad \lambda_1 . M_1(U,V,W) + \lambda_2 . M_2(U,V,W) = 0,$$

gdzie λ_1 i λ_2 są jakiemikolwiek dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, przedstawia

prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, i przytem każdą prostą, przechodzącą przez wymieniony punkt, można przedstawić przez równanie tej postaci.

punkt, należący do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, i przytem każdy punkt, należący do wymienionej prostej, można przedstawić przez równanie tej postaci.

Dwu parom wartości λ_1', λ_2' oraz λ_1'', λ_2'' odpowiada

jedna i ta sama prosta

jeden i ten sam punkt

wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona równość $\lambda_1' : \lambda_2' = \lambda_1'' : \lambda_2''$.

Jeżeli więc za λ_1 i λ_2 będziemy brali wszystkie pary liczb rzeczywistych skończonych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, to równanie

(14 a) będzie przedstawiało ogół prostych, przechodzących przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2.

(14 b) będzie przedstawiało ogół punktów, należących do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2.

Gdybyśmy zamiast dwu czynników nieoznaczonych λ_1 i λ_2 wprowadzili tylko jeden czynnik nieoznaczony λ, t. zn. gdybyśmy zamiast równania

(14a) rozpatrywali równanie

(15a) $L_1(X, Y, Z) + \lambda . L_2(X, Y, Z) = 0$,

względnie

(16a) $\lambda . L_1(X, Y, Z) + L_2(X, Y, Z) = 0$,

(14b) rozpatrywali równanie

(15b) $M_1(U, V, W) + \lambda . M_2(U, V, W) = 0$,

względnie

(16b) $\lambda . M_1(U, V, W) + M_2(U, V, W) = 0$,

to wprawdzie moglibyśmy powiedzieć, że przy każdej wartości rzeczywistej skończonej czynnika λ równanie

(15a), względnie (16a), przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, nie moglibyśmy jednak powiedzieć, że, również odwrotnie, każdą prostą, przechodzącą przez wymieniony punkt,

(15b), względnie (16b), przedstawia punkt, należący do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, nie moglibyśmy jednak powiedzieć, że, również odwrotnie, każdy punkt, należący do wymienionej prostej,

możemy przedstawić przez równanie tej postaci. Mianowicie przez równanie tej postaci, jaką posiada równanie

(15a), względnie (16a), moglibyśmy przedstawić każdą prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, z wyjątkiem prostej d_2, wzgl. d_1.

(15b), względnie (16b), moglibyśmy przedstawić każdy punkt, należący do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, z wyjątkiem punktu P_2, wzgl. P_1.

Jeżeli więc za λ będziemy brali wszystkie wartości rzeczywiste skończone, to równanie

(15a), względnie (16a), będzie przedstawiało ogół prostych, przechodzących przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, z wyjątkiem prostej d_2, wzgl. d_1.

(15b), względnie (16b), będzie przedstawiało ogół punktów, należących do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, z wyjątkiem punktu P_2, względnie P_1.

Niechaj będą dane 2

proste różne (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2). Te proste możemy przedstawić przez równania

$$(17a)\quad \begin{cases} U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0, \\ U_2 X + V_2 Y + W_2 Z = 0. \end{cases}$$

O równaniu

$$\lambda_1 (U_1 X + V_1 Y + W_1 Z) + \\ + \lambda_2 (U_2 X + V_2 Y + W_2 Z) = 0,$$

czyli

$$(18a)\quad (\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) X + \\ + (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) Y + \\ + (\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2) Z = 0$$

moglibyśmy powiedzieć to, co powiedzieliśmy wyżej o równaniu (14a), a ponieważ za spółrzędne prostej, jaką równanie (18a) przedstawia, możemy uważać liczby
$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$,

punkty różne (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2). Te punkty możemy przedstawić przez równania

$$(17b)\quad \begin{cases} X_1 U + Y_1 V + Z_1 W = 0, \\ X_2 U + Y_2 V + Z_2 W = 0. \end{cases}$$

O równaniu

$$\lambda_1 (X_1 U + Y_1 V + Z_1 W) + \\ + \lambda_2 (X_2 U + Y_2 V + Z_2 W) = 0,$$

czyli

$$(18b)\quad (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) U + \\ + (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) V + \\ + (\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2) W = 0$$

moglibyśmy powiedzieć to, co powiedzieliśmy wyżej o równaniu (14b), a ponieważ za spółrzędne punktu, jaki równanie (18b) przedstawia, możemy uważać liczby
$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$,

mamy przeto twierdzenie następujące:

Jeżeli

(U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2) są dwiema prostemi różnemi, to spółrzędne

$$(19a)\quad \left|\begin{array}{l} \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \\ \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \\ \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2, \end{array}\right.$$

(X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) są dwoma punktami różnymi, to spółrzędne

$$(19b)\quad \left|\begin{array}{l} \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, \\ \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2, \end{array}\right.$$

gdzie λ_1 i λ_2 są jakiemikolwiek dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, przedstawiają

prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia

punkt, należący do prostej, łączącej punkty się prostych (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2), i przytem każdą prostą, przechodzącą przez wymieniony punkt, można przedstawić przez spółrzędne tej postaci.

(X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2), i przytem każdy punkt, należący do wymienionej prostej, można przedstawić przez spółrzędne tej postaci.

I gdybyśmy tu znów zamiast dwu czynników nieoznaczonych λ_1 i λ_2 wprowadzili tylko jeden czynnik nieoznaczony λ, t. zn. gdybyśmy zamiast spółrzędnych

(19a) rozpatrywali spółrzędne

$$\text{(20a)} \quad \left| \begin{array}{l} U_1 + \lambda U_2, \\ V_1 + \lambda V_2, \\ W_1 + \lambda W_2, \end{array} \right.$$

względnie

$$\text{(21a)} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda U_1 + U_2, \\ \lambda V_1 + V_2, \\ \lambda W_1 + W_2, \end{array} \right.$$

(19b) rozpatrywali spółrzędne

$$\text{(20b)} \quad \left| \begin{array}{l} X_1 + \lambda X_2, \\ Y_1 + \lambda Y_2, \\ Z_1 + \lambda Z_2, \end{array} \right.$$

względnie

$$\text{(21b)} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda X_1 + X_2, \\ \lambda Y_1 + Y_2, \\ \lambda Z_1 + Z_2, \end{array} \right.$$

to moglibyśmy powiedzieć, że przy każdej wartości rzeczywistej skończonej czynnika λ spółrzędne

(20a), względnie (21a), przedstawiają prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych (U_1,V_1,W_1) i (U_2,V_2,W_2), oraz że przez spółrzędne tej postaci, jaką posiadają spółrzędne (20a), względnie (21a), można przedstawić każdą prostą, przechodzącą przez wymieniony punkt, z wyjątkiem prostej (U_2, V_2, W_2), względnie (U_1, V_1, W_1).

(20b), względnie (21b), przedstawiają punkt, należący do prostej, łączącej punkty (X_1,Y_1,Z_1) i (X_2,Y_2,Z_2), oraz że przez spółrzędne tej postaci, jaką posiadają spółrzędne (20b), względnie (21b), można przedstawić każdy punkt, należący do wymienionej prostej, z wyjątkiem punktu (X_2,Y_2,Z_2), względnie (X_1,Y_1,Z_1).

Niechaj będą dane 2 różne

proste właściwe d_1 i d_2, przedstawione przez równania:

$$(22\ a) \quad \begin{cases} L_1(x, y, 1) = A_1 x + \\ \quad + B_1 y + C_1 = 0, \\ L_2(x, y, 1) = A_2 x + \\ \quad + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

punkty P_1 i P_2, z których żaden nie nakrywa początku układu spółrzędnych, przedstawione przez równania

$$(22\ b) \quad \begin{cases} M_1(u, v, 1) = A_1 u + \\ \quad + B_1 v + C_1 = 0, \\ M_2(u, v, 1) = A_2 u + \\ \quad + B_2 v + C_2 = 0. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę równania:

$$(23\ a) \quad \lambda_1 . L_1(x, y, 1) + \lambda_2 . L_2(x, y, 1) = 0,$$

$$(24\ a) \quad L_1(x, y, 1) + \lambda . L_2(x, y, 1) = 0,$$

$$(25\ a) \quad \lambda . L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) = 0.$$

$$(23\ b) \quad \lambda_1 . M_1(u, v, 1) + \lambda_2 . M_2(u, v, 1) = 0,$$

$$(24\ b) \quad M_1(u, v, 1) + \lambda . M_2(u, v, 1) = 0,$$

$$(25\ b) \quad \lambda . M_1(u, v, 1) + M_2(u, v, 1) = 0.$$

Jeżeli

proste d_1 i d_2 nie są do siebie równoległe, to o równaniach (23 a), (24 a), (25 a) możemy powiedzieć to, co powiedzieliśmy wyżej o równaniach (14 a), (15 a), (16 a).

punkty P_1 i P_2 nie leżą na jednej prostej z początkiem układu spółrzędnych, to o równaniach (23 b), (24 b), (25 b) możemy powiedzieć to, co powiedzieliśmy wyżej o równaniach (14 b), (15 b), (16 b).

Przypadek zaś, gdy

proste d_1 i d_2 są wzajemnie równoległe,

punkty P_1 i P_2 leżą na jednej prostej z początkiem układu spółrzędnych,

różni się od przypadku poprzedniego tem, że w pierwszem z pośród 3-ech rozpatrywanych równań czynnikom λ_1 i λ_2 nie można nadawać wartości, spełniających warunek $\lambda_1 : \lambda_2 = A_2 : -A_1 = B_2 : -B_1$, w drugiem z pośród 3-ech rozpatrywanych równań czynnikowi λ nie można nadawać wartości $\lambda =$

$= -\frac{A_1}{A_2} = -\frac{B_1}{B_2}$, w końcu, w trzeciem z pośród trzech rozpatrywanych równań czynnikowi λ nie można nadawać wartości $\lambda = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{B_2}{B_1}$ (albowiem przy tych wartościach wymienionych czynników spółczynniki przy niewiadomych w rozpatrywanych równaniach po wykonaniu redukcji stają się równe 0), oraz że

prostej niewłaściwej, która w rozpatrywanym przypadku jest przecież prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, w układzie spółrzędnych Descartes'a wogóle przez równanie przedstawić nie można.

początku układu spółrzędnych, który w rozpatrywanym przypadku jest przecież punktem, leżącym na prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, w układzie spółrzędnych Plücker'a wogóle przez równanie przedstawić nie można.

Niechaj będą dane 2 różne

proste d_1 i d_2, z których żadna nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych. Te proste możemy więc przedstawić przez spółrzędne Plücker'a u_1, v_1 oraz u_2, v_2. Za spółrzędne jednorodne Hesse'go tych dwu prostych możemy uważać trójki liczb $u_1, v_1, 1$ oraz $u_2, v_2, 1$. Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go prostych, przechodzących przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, są więc liczby [patrz (19 a)]: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,\ \lambda_1 + \lambda_2$. Z pośród tych wszystkich prostych jednej tylko prostej, mianowicie prostej, łączącej punkt przecięcia się prostych

punkty właściwe P_1 i P_2. Te punkty możemy więc przedstawić przez spółrzędne Descartes'a x_1, y_1 oraz x_2, y_2. Za spółrzędne jednorodne Hesse'go tych dwu punktów możemy uważać trójki liczb $x_1, y_1, 1$ oraz $x_2, y_2, 1$. Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktów, należących do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, są więc liczby [patrz (19 b)]: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ \lambda_1 + \lambda_2$. Z pośród tych wszystkich punktów jednego tylko punktu, mianowicie punktu niewłaściwego prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, nie możemy przedstawić przez spółrzędne Descartes'a (temu punktowi

d_1 i d_2 z początkiem układu spółrzędnych, nie możemy przedstawić przez spółrzędne Plücker'a (tej prostej odpowiadają wartości λ_1 i λ_2, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$). Wszystkie zaś pozostałe proste, przechodzące przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, mogą być przedstawione przez spółrzędne Plücker'a, któremi są liczby:

$$\frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ i } \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

odpowiadają wartości λ_1 i λ_2, spełniające warunek $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$). Wszystkie zaś pozostałe punkty prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, mogą być przedstawione przez spółrzędne Descartes'a, któremi są liczby:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ i } \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli

$d_1 (u_1, v_1)$ i $d_2 (u_2, v_2)$ są dwiema różnemi prostemi (z których żadna nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych), to liczby

$$\frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ i } \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$P_1 (x_1, y_1)$ i $P_2 (x_2, y_2)$ są dwoma różnymi punktami (właściwymi), to liczby

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ i } \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami rzeczywistemi skończonemi, spełniającemi warunek $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, są spółrzędnemi

jakiejś prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, i odwrotnie, spółrzędne każdej prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2, z wyjątkiem prostej, łączącej

jakiegoś punktu, należącego do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, i odwrotnie, spółrzędne każdego punktu, należącego do wymienionej prostej, z wyjątkiem jej punktu niewłaściwego, mogą być wymieniony punkt z początkiem układu spółrzędnych, mogą być przedstawione w tej postaci.

przedstawione w tej postaci (porównaj z twierdzeniem, podanem w § 4).

Uwaga. Jeżeli równania

$L_1(X, Y, Z) = 0$ i $L_2(X, Y, Z) = 0$ przedstawiają jedną i tę samą prostą d, to przy pewnych wartościach λ_1 i λ_2 równość

(26 a) $\lambda_1 \,.\, L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 \,.\, L_2(X, Y, Z) = 0$

jest tożsamością. Jeżeli zaś wartości λ_1 i λ_2 są wtedy tak wybrane, że równość (26 a) tożsamością nie jest, to jest ona równaniem prostej d, albowiem spółrzędne każdego punktu prostej d, spełniając każde z równań $L_1(X, Y, Z) = 0$ i $L_2(X, Y, Z) = 0$, muszą równaniu (26 a) czynić zadość.

$M_1(U, V, W) = 0$ i $M_2(U, V, W) = 0$ przedstawiają jeden i ten sam punkt P, to przy pewnych wartościach λ_1 i λ_2 równość

(26 b) $\lambda_1 \,.\, M_1(U, V, W) + \lambda_2 \,.\, M_2(U, V, W) = 0$

jest tożsamością. Jeżeli zaś wartości λ_1 i λ_2 są wtedy tak wybrane, że równość (26 b) tożsamością nie jest, to jest ona równaniem punktu P, albowiem spółrzędne każdej prostej, przechodzącej przez punkt P, spełniając każde z równań $M_1(U, V, W) = 0$ i $M_2(U, V, W) = 0$, muszą równaniu (26 b) czynić zadość.

Stąd wynika, że: jeżeli spółrzędne

U_1, V_1, W_1 oraz U_2, V_2, W_2 przedstawiają jedną i tę samą prostą d, to przy pewnych wartościach λ_1 i λ_2 wszystkie 3 liczby $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$ są równe 0; jeżeli zaś wartości λ_1 i λ_2 są wtedy tak wybrane, że przynajmniej jedna z liczb $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$ jest różna od 0, to wymienione trzy liczby są spółrzędnemi prostej d.

X_1, Y_1, Z_1 oraz X_2, Y_2, Z_2 przedstawiają jeden i ten sam punkt P, to przy pewnych wartościach λ_1 i λ_2 wszystkie 3 liczby $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ są równe 0; jeżeli zaś wartości λ_1 i λ_2 są wtedy tak wybrane, że przynajmniej jedna z liczb $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ jest różna od 0, to wymienione trzy liczby są spółrzędnemi punktu P.

§ 26. **Inna postać warunku przechodzenia trzech prostych przez jeden punkt, względnie należenia trzech punktów do jednej prostej.** Niechaj będą dane 3

proste d_1, d_2, d_3, przedstawione odpowiednio przez równania:

(1a) $$\begin{cases} L_1(X,Y,Z)=A_1X+ \\ \quad +B_1Y+C_1Z=0, \\ L_2(X,Y,Z)=A_2X+ \\ \quad +B_2Y+C_2Z=0, \\ L_3(X,Y,Z)=A_3X+ \\ \quad +B_3Y+C_3Z=0. \end{cases}$$

punkty P_1, P_2, P_3, przedstawione odpowiednio przez równania:

(1b) $$\begin{cases} M_1(U,V,W)=A_1U+ \\ \quad +B_1V+C_1W=0, \\ M_2(U,V,W)=A_2U+ \\ \quad +B_2V+C_2W=0, \\ M_3(U,V,W)=A_3U+ \\ \quad +B_3V+C_3W=0. \end{cases}$$

Przyjmijmy, że istnieje tożsamość:

(2a) $$k_1.L_1(X,Y,Z)+ \\ +k_2.L_2(X,Y,Z)+ \\ +k_3.L_3(X,Y,Z)=0,$$

(2b) $$k_1.M_1(U,V,W)+ \\ +k_2.M_2(U,V,W)+ \\ +k_3.M_3(U,V,W)=0,$$

gdzie k_1, k_2, k_3 są to pewne 3 liczby skończone, z których przynajmniej jedna jest różna od 0. Wykażemy, że w takim razie

proste d_1, d_2, d_3 przechodzą przez jeden punkt.

punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej.

Powiedzieliśmy, że przynajmniej jedna z liczb k_1, k_2, k_3 jest różna od 0. Przypuśćmy np., że $k_1 \neq 0$. Z danej tożsamości wyprowadzamy wtedy tożsamość:

(3a) $$k_1.L_1(X,Y,Z)= \\ =-k_2.L_2(X,Y,Z)- \\ -k_3.L_3(X,Y,Z).$$

(3b) $$k_1.M_1(U,V,W)= \\ =-k_2.M_2(U,V,W)- \\ -k_3.M_3(U,V,W).$$

Proste d_2 i d_3 posiadają (przynajmniej) jeden punkt (X_0, Y_0, Z_0) wspólny. Spółrzędne tego punktu spełniają równania prostych d_2 i d_3, t. zn. mamy:

(4a) $$\begin{cases} L_2(X_0,Y_0,Z_0)=0, \\ L_3(X_0,Y_0,Z_0)=0. \end{cases}$$

Istnieje (przynajmniej) jedna prosta (U_0, V_0, W_0), przechodząca przez każdy z punktów P_2 i P_3. Spółrzędne tej prostej spełniają równania punktów P_2 i P_3, t. zn. mamy:

(4b) $$\begin{cases} M_2(U_0,V_0,W_0)=0, \\ M_3(U_0,V_0,W_0)=0. \end{cases}$$

Z drugiej znów strony równość

(3 a) jest tożsamością, jeżeli więc zamiast niewiadomych X, Y, Z wstawimy w tę równość X_0, Y_0, Z_0, to ta równość będzie spełniona, mamy więc:

(5 a) $k_1 . L_1 (X_0, Y_0, Z_0) = - k_2 . L_2 (X_0, Y_0, Z_0) - k_3 . L_3 (X_0, Y_0, Z_0)$.

(3 b) jest tożsamością, jeżeli więc zamiast niewiadomych U, V, W wstawimy w tę równość U_0, V_0, W_0, to ta równość będzie spełniona, mamy więc:

(5 b) $k_1 . M_1 (U_0, V_0, W_0) = - k_2 . M_2 (U_0, V_0, W_0) - k_3 . M_3 (U_0, V_0, W_0)$.

Z równości zaś

(4 a) i (5 a) wynika równość

(6 a) $k_1 . L_1 (X_0, Y_0, Z_0) = 0$,

(4 b) i (5 b) wynika równość

(6 b) $k_1 . M_1 (U_0, V_0, W_0) = 0$,

a ponieważ, według założenia, $k_1 \neq 0$, przeto z równości

(6 a) wynika równość

(7 a) $L_1 (X_0, Y_0, Z_0) = 0$.

(6 b) wynika równość

(7 b) $M_1 (U_0, V_0, W_0) = 0$.

Lecz ze spełnienia równości

(7a) wynika, że punkt (X_0, Y_0, Z_0) należy do prostej d_1, a zatem punkt (X_0, Y_0, Z_0) należy do każdej z trzech prostych d_1, d_2, d_3,

(7 b) wynika, że prosta (U_0, V_0, W_0) przechodzi przez punkt P_1, a zatem prosta (U_0, V_0, W_0) przechodzi przez każdy z trzech punktów P_1, P_2, P_3,

co właśnie dowodzi prawdziwości tego, czego chcieliśmy dowieść.

Odwrotnie, przyjmijmy, że 3

proste dane d_1, d_2, d_3, przedstawione odpowiednio przez równania (1 a), przechodzą przez jeden punkt.

punkty dane P_1, P_2, P_3, przedstawione odpowiednio przez równania (1b), leżą na jednej prostej.

Wykażemy, że istnieją wtedy 3 liczby rzeczywiste skończone k_1, k_2, k_3, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, tego rodzaju, iż mamy tożsamość

(8 a) $k_1 . L_1 (X, Y, Z) + k_2 . L_2 (X, Y, Z) + k_3 . L_3 (X, Y, Z) = 0$.

(8 b) $k_1 . M_1 (U, V, W) + k_2 . M_2 (U, V, W) + k_3 . M_3 (U, V, W) = 0$.

Istnieją 2 możliwości: albo

proste d_1 i d_2 nakrywają się, albo też nie nakrywają się.	punkty P_1 i P_2 nakrywają się, albo też nie nakrywają się.

Rozpatrzymy najpierw przypadek pierwszy, t. zn. przypadek, gdy

proste d_1 i d_2	punkty P_1 i P_2

nakrywają się. W tym przypadku jest spełniony warunek

(9) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Oznaczmy wartość stosunków $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ przez ϱ. Mamy więc:

(10) $$\frac{A_1}{A_2}=\varrho, \quad \frac{B_1}{B_2}=\varrho, \quad \frac{C_1}{C_2}=\varrho.$$

Z równości (10) wynikają równości:

(11) $$A_1-\varrho A_2=0, \quad B_1-\varrho B_2=0, \quad C_1-\varrho C_2=0.$$

Z równości zaś (11) wynika tożsamość:

$(A_1-\varrho A_2)X+(B_1-\varrho B_2)Y+$ $+(C_1-\varrho C_2)Z=0,$	$(A_1-\varrho A_2)U+(B_1-\varrho B_2)V+$ $+(C_1-\varrho C_2)W=0,$
czyli	czyli
$L_1(X,Y,Z)-\varrho\,.\,L_2(X,Y,Z)=0,$	$M_1(U,V,W)-\varrho\,.\,M_2(U,V,W)=0,$
czyli	czyli
(12a) $L_1(X,Y,Z)-\varrho\,.\,L_2(X,Y,Z)+$ $+0\,.\,L_3(X,Y,Z)=0.$	(12b) $M_1(U,V,W)-\varrho\,.\,M_2(U,V,W)+$ $+0\,.\,M_3(U,V,W)=0.$

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli jako k_1, k_2, k_3 weźmiemy odpowiednio $1, -\varrho, 0$, to rzeczywiście będziemy mieli tożsamość, której istnienia chcieliśmy dowieść.

Pozostaje nam więc teraz rozpatrzeć przypadek drugi, t. zn. przypadek, gdy

proste d_1 i d_2	punkty P_1 i P_2

nie nakrywają się. W tym przypadku

każdą prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się	każdy punkt, należący do prostej, łączącej punkty P_1

prostych d_1 i d_2, można przedstawić przez równanie postaci (§ 25):

(13a) $\lambda_1 . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0,$

i P_2, można przedstawić przez równanie postaci (§ 25):

(13b) $\lambda_1 . M_1(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0,$

gdzie λ_1 i λ_2 są dwiema liczbami rzeczywistemi skończonemi z których przynajmniej jedna jest różna od 0.

A ponieważ

prosta d_3 przez punkt przecięcia się prostych d_1 i d_2 przechodzi,

punkt P_3 do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2, należy,

przeto czynnikom λ_1 i λ_2 można nadać takie 2 wartości rzeczywiste skończone λ_1' i λ_2', z których przynajmniej jedna jest różna od 0, że równanie

(13 a) będzie przedstawiało prostą d_3, innemi słowy równanie

(14 a) $\lambda_1' . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2' . L_2(X, Y, Z) = 0$

przedstawia prostą d_3.

(13 b) będzie przedstawiało punkt P_3, innemi słowy równanie

(14 b) $\lambda_1' . M_1(U, V, W) + \lambda_2' . M_2(U, V, W) = 0$

przedstawia punkt P_3.

Ponieważ więc trzecie z pośród równań

(1a) oraz równanie (14a) przedstawiają tę samą prostą,

(1b) oraz równanie (14b) przedstawiają ten sam punkt,

przeto spółczynniki tych dwu równań muszą być wzajemnie proporcjonalne, t. zn. mamy:

$$(15) \qquad \frac{\lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2}{A_3} = \frac{\lambda_1' B_1 + \lambda_2' B_2}{B_3} = \frac{\lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2}{C_3}.$$

Oznaczywszy wartość stosunków, występujących w równościach (15), przez ϱ, będziemy mieli równości:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2 - \varrho A_3 = 0, \quad \lambda_1' B_1 + \lambda_2' B_2 - \varrho B_3 = 0, \\ \qquad \lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2 - \varrho C_3 = 0. \end{array} \right.$$

Z równości (16) wynika tożsamość:

$$(\lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2 - \varrho A_3) X + (\lambda_1' B_1 + \lambda_2' B_2 - \varrho B_3) Y + (\lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2 - \varrho C_3) Z = 0,$$

czyli

$$\text{(17a)} \quad \lambda_1' . L_1 (X, Y, Z) + \lambda_2' . L_2 (X, Y, Z) - \varrho . L_3 (X, Y Z) = 0.$$

$$(\lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2 - \varrho A_3) U + (\lambda_1' B_1 + \lambda_2' B_2 - \varrho B_3) V + (\lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2 - \varrho C_3) W = 0,$$

czyli

$$\text{(17b)} \quad \lambda_1' . M_1 (U, V, W) + \lambda_2' . M_2 (U, V, W) - \varrho . M_3 (U, V, W) = 0.$$

Jeżeli więc jako k_1, k_2, k_3 weźmiemy odpowiednio $\lambda_1', \lambda_2', -\varrho$, to rzeczywiście będziemy mieli tożsamość, której istnienia chcieliśmy dowieść.

Mamy zatem twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym

przechodzenia trzech prostych | należenia trzech punktów

$$\text{(18a)} \quad \left| \begin{aligned} L_1 (X,Y,Z) &= A_1X + B_1Y + C_1 Z = 0, \\ L_2 (X,Y,Z) &= A_2X + B_2Y + C_2 Z = 0, \\ L_3 (X,Y,Z) &= A_3X + B_3Y + C_3 Z = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{(18b)} \quad \left| \begin{aligned} M_1(U,V,W) &= A_1U + B_1V + C_1W = 0, \\ M_2(U,V,W) &= A_2U + B_2V + C_2W = 0, \\ M_3(U,V,W) &= A_3U + B_3V + C_3W = 0 \end{aligned} \right.$$

przez jeden punkt | do jednej prostej

jest istnienie trzech liczb skończonych k_1, k_2, k_3, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, tego rodzaju, aby suma

$$\text{(19a)} \quad k_1 . L_1 (X,Y,Z) + k_2 . L_2 (X,Y,Z) + k_3 . L_3 (X,Y,Z)$$

$$\text{(19b)} \quad k_1 . M_1 (U,V,W) + k_2 . M_2(U,V,W) + k_3 . M_3(U,V,W)$$

była tożsamościowo równa 0.

Twierdzenia ostatniego możnaby dowieść też inaczej, a mianowicie w sposób następujący.

Istnienie trzech liczb skończonych k_1, k_2, k_3, czyniących zadość warunkom, o których mowa w twierdzeniu ostatniem, jest równoznaczne z istnieniem trzech liczb skończonych

k_1, k_2, k_3, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, spełniających warunki:

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = 0, \\ k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_3 B_3 = 0, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 = 0, \end{cases}$$

takie zaś liczby istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek:

$$\text{(21)} \qquad \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lecz w § 23 mieliśmy, że spełnienie równości (21) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby

proste, o których mowa w twierdzeniu ostatniem, przechodziły przez jeden punkt, | punkty, o których mowa w twierdzeniu ostatniem, leżały na jednej prostej,

a zatem twierdzenie ostatnie jest prawdziwe.

Jeżeli trzy

proste właściwe d_1, d_2, d_3 są przedstawione przez równania w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a, t. zn. przez równania

$$\text{(22a)} \begin{cases} L_1(x, y, 1) = A_1 x + \\ \quad + B_1 y + C_1 = 0, \\ L_2(x, y, 1) = A_2 x + \\ \quad + B_2 y + C_2 = 0, \\ L_3(x, y, 1) = A_3 x + \\ \quad + B_3 y + C_3 = 0, \end{cases}$$

| punkty P_1, P_2, P_3, różne od początku układu spółrzędnych, są przedstawione przez równania w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a, t. zn. przez równania

$$\text{(22b)} \begin{cases} M_1(u, v, 1) = A_1 u + \\ \quad + B_1 v + C_1 = 0, \\ M_2(u, v, 1) = A_2 u + \\ \quad + B_2 v + C_2 = 0, \\ M_3(u, v, 1) = A_3 u + \\ \quad + B_3 v + C_3 = 0, \end{cases}$$

to również warunkiem koniecznym i dostatecznym

przechodzenia tych prostych przez jeden punkt | należenia tych punktów do jednej prostej jest istnienie 3-ech liczb skończonych k_1, k_2, k_3, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, tego rodzaju, aby suma

(23a) $k_1 . L_1(x, y, 1) + k_2 . L_2(x, y, 1) + k_3 . L_3(x, y, 1)$ | (23b) $k_1 . M_1(u, v, 1) + k_2 . M_2(u, v, 1) + k_3 . M_3(u, v, 1)$

była tożsamościowo równa 0. Albowiem w układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go

proste d_1, d_2, d_3 możemy przedstawić przez równania

$$L_1(X, Y, Z) = 0, \quad L_2(X, Y, Z) = 0, \quad L_3(X, Y, Z) = 0,$$

punkty P_1, P_2, P_3 możemy przedstawić przez równania

$$M_1(U, V, W) = 0, \quad M_2(U, V, W) = 0, \quad M_3(U, V, W) = 0,$$

istnienie zaś tożsamości

$$k_1 . L_1(x, y, 1) + k_2 . L_2(x, y, 1) + k_3 . L_3(x, y, 1) = 0$$

$$k_1 . M_1(u, v, 1) + k_2 . M_2(u, v, 1) + k_3 . M_3(u, v, 1) = 0$$

jest równoznaczne z istnieniem tożsamości

$$k_1 . L_1(X, Y, Z) + k_2 . L_2(X, Y, Z) + k_3 . L_3(X, Y, Z) = 0.$$

$$k_1 . M_1(U, V, W) + k_2 . M_2(U, V, W) + k_3 . M_3(U, V, W) = 0.$$

Uwaga. W § niniejszym rozpatrywaliśmy 3 równania jednorodne stopnia 1-ego z 3-ma niewiadomemi, względnie 3 równania niejednorodne stopnia 1-ego z 2-ema niewiadomemi, i widzieliśmy, że niezawsze istnieją 3 liczby skończone k_1, k_2, k_3, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, tego rodzaju, aby suma iloczynów tych liczb przez strony lewe rozpatrywanych równań była tożsamościowo równa 0.

Jeżeli jednak jest danych $n > 3$ równań jednorodnych stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi ξ, η, ζ:

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta = 0, \quad A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta = 0, \quad \ldots, \quad A_n \xi + B_n \eta + C_n \zeta = 0,$$

lub też $n > 3$ równań niejednorodnych stopnia 1-go z 2-ema niewiadomemi ξ, η:

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 = 0, \quad A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_n \xi + B_n \eta + C_n = 0,$$

to wtedy zawsze istnieją takie liczby skończone $k_1, k_2, \ldots, k_n$, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, iż suma

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i (A_i \xi + B_i \eta + C_i \zeta), \text{ względnie } \sum_{i=1}^{i=n} k_i (A_i \xi + B_i \eta + C_i),$$

jest tożsamościowo równa 0.

Albowiem istnienie tożsamości $\sum_{i=1}^{i=n} k_i (A_i \xi + B_i \eta + C_i \zeta) = 0$, względnie $\sum_{i=1}^{i=n} k_i (A_i \xi + B_i \eta + C_i) = 0$, jest równoznaczne z istnieniem 3-ech równości:

$$\begin{aligned} k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_n A_n &= 0, \\ k_1 B_1 + k_2 B_2 + \ldots + k_n B_n &= 0, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + \ldots + k_n C_n &= 0, \end{aligned}$$

te zaś równości, uważane za równania względem $k_1, k_2, \ldots, k_n$, stanowią 3 równania jednorodne stopnia 1-go z n niewiadomemi, jeżeli więc $n > 3$, to posiadają one rozwiązania, różne od rozwiązania 0, 0, . . . , 0.

Przyczem jeżeli wszystkie liczby $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \ldots, A_n, B_n, C_n$ są liczbami rzeczywistemi, to pomiędzy rozwiązaniami tych 3-ech równań, różnemi od rozwiązania $0, 0, \ldots, 0$, zawsze istnieją rozwiązania, złożone z samych liczb rzeczywistych.

§ 27. Twierdzenie Desargues'a.

Na płaszczyźnie 3

punkty różne, nie należące do jednej prostej, określają trójkąt: figurę, złożoną z tych 3-ch punktów (wierzchołków) i z 3-ech prostych (boków), określonych przez każde 2 z pośród punktów danych.

proste różne, nie przechodzące przez jeden punkt, określają trójbok: figurę, złożoną z tych 3-ch prostych (boków) i z 3-ch punktów (wierzchołków), określonych przez każde 2 z pośród prostych danych.

Trójkąt jest trójbokiem, i odwrotnie.

Dwa

trójkąty nazywają się **odniesionymi** względem siebie, jeżeli wierzchołki jednego trójkąta uważamy za podporządkowane wierzchołkom drugiego w sposób jednojednoznaczny, t. nz. tak, że każdemu wierzchołkowi jednego trójkąta odpowiada jeden i tylko jeden wierzchołek drugiego trójkąta, i odwrotnie; 2 wierzchołki,

trójboki nazywają się **odniesionymi** względem siebie, jeżeli boki jednego trójboku uważamy za podporządkowane bokom drugiego w sposób jednojednoznaczny, t. zn. tak, że każdemu bokowi jednego trójboku odpowiada jeden i tylko jeden bok drugiego trójboku, i odwrotnie; 2 boki,

które uważamy za podporządkowane sobie, nazywają się **odpowiednimi** albo **homologicznymi**.

Jeżeli dwa

trójkąty są odniesione względem siebie, to są też podporządkowane sobie (odpowiednie, homologiczne) boki, określone przez pary wierzchołków odpowiednich.

trójboki są odniesione względem siebie, to są też podporządkowane sobie (odpowiednie, homologiczne) wierzchołki, określone przez pary boków odpowiednich.

Niechaj

A_1 i A_1', A_2 i A_2', A_3 i A_3' oznaczają pary wierzchołków odpowiednich dwu odniesionych względem siebie trójkątów $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$, leżących w jednej płaszczyźnie właściwej.

Boki trójkąta $A_1 A_2 A_3$, względnie $A_1' A_2' A_3'$, przeciwległe wierzchołkom A_1, A_2, A_3, względnie A_1', A_2', A_3', oznaczmy odpowiednio przez a_1, a_2, a_3, względnie a_1', a_2', a_3'.

a_1 i a_1', a_2 i a_2', a_3 i a_3' oznaczają pary boków odpowiednich dwu odniesionych względem siebie trójboków $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$, leżących w jednej płaszczyźnie właściwej.

Wierzchołki trójboku $a_1 a_2 a_3$, względnie $a_1' a_2' a_3'$, przeciwległe bokom a_1, a_2, a_3, względnie a_1', a_2', a_3', oznaczmy odpowiednio przez A_1, A_2, A_3, względnie A_1', A_2', A_3'.

Przyjmijmy, że

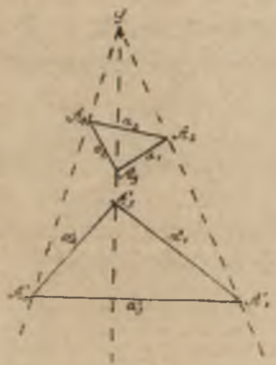
trójkąty $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$

trójboki $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$

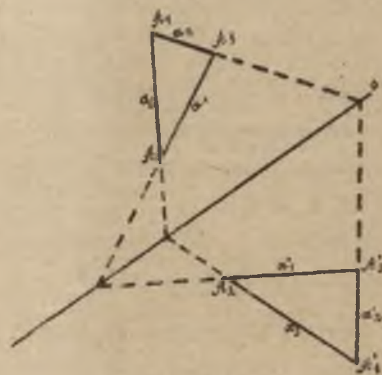
posiadają tę własność, iż

proste, łączące ich wierzchołki odpowiednie, t. zn. proste $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$, przechodzą przez jeden punkt, który oznaczmy np. przez S (rys. 11a).

punkty przecięcia się ich boków odpowiednich, t. zn. punkty $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$, $a_3 a_3'$, leżą na jednej prostej, którą oznaczmy np. przez s (rys. 11 b).



Rys. 11a.



Rys. 11b.

Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy

trójkąty $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$ nie posiadają ani jednego wierzchołka wspólnego.

trójboki $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$ nie posiadają ani jednego boku wspólnego.

Jeżeli więc w rozpatrywanym przypadku

punkt S nakrywa jeden z wierzchołków trójkąta $A_1 A_2 A_3$, to napewno nie nakrywa żadnego wierzchołka trójkąta $A_1' A_2' A_3'$, i odwrotnie, jeżeli nakrywa on jeden z wierzchołków trójkąta $A_1' A_2' A_3'$, to napewno nie nakrywa żadnego wierzchołka trójkąta $A_1 A_2 A_3$. A zatem przynajmniej jeden

prosta s nakrywa jeden z boków trójboku $a_1 a_2 a_3$, to napewno nie nakrywa żadnego boku trójboku $a_1' a_2' a_3'$, i odwrotnie, jeżeli nakrywa ona jeden z boków trójboku $a_1' a_2' a_3'$, to napewno nie nakrywa żadnego boku trójboku $a_1 a_2 a_3$. A zatem przynajmniej jeden z trójboków $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$

z trójkątów $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$ posiada wszystkie wierzchołki, różne od punktu S. Przypuśćmy np., że wszystkie 3 wierzchołki trójkąta $A_1 A_2 A_3$ są różne od punktu S.

posiada wszystkie boki, różne od prostej s. Przypuśćmy np., że wszystkie 3 boki trójboku $a_1 a_2 a_3$ są różne od prostej s.

Weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych. Niechaj równaniami

punktów S, A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio równania: $M(U, V, W) = 0$, $M_1(U, V, W) = 0$, $M_2(U, V, W) = 0$, $M_3(U, V, W) = 0$.

Ponieważ punkty S i A_1 są różne, punkt zaś A_1' jest różny od punktu A_1, przeto (§ 25) punkt A_1' możemy przedstawić przez równanie:

(1a) $M_1'(U, V, W) = M(U, V, W) + \lambda_1 . M_1(U, V, W) = 0.$

Analogicznie, punkty A_2' i A_3' możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

(2a) $M_2'(U, V, W) = M(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0,$

(3a) $M_3'(U, V, W) = M(U, V, W) + \lambda_3 . M_3(U, V, W) = 0.$

prostych s, a_1, a_2, a_3 w tym układzie będą odpowiednio równania: $L(X, Y, Z) = 0$, $L_1(X, Y, Z) = 0$, $L_2(X, Y, Z) = 0$, $L_3(X, Y, Z) = 0$.

Ponieważ proste s i a_1 są różne, prosta zaś a_1' jest różna od prostej a_1, przeto (§ 25) prostą a_1' możemy przedstawić przez równanie:

(1b) $L_1'(X, Y, Z) = L(X, Y, Z) + \lambda_1 . L_1(X, Y, Z) = 0.$

Analogicznie, proste a_2' i a_3' możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

(2b) $L_2'(X, Y, Z) = L(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0,$

(3b) $L_3'(X, Y, Z) = L(X, Y, Z) + \lambda_3 . L_3(X, Y, Z) = 0.$

Równanie

(4a) $M_1'(U, V, W) - M_2'(U, V, W) = 0$

przedstawia (§ 25) pewien punkt, należący do prostej $A_1' A_2'$, t. zn. do prostej a_3'. Wziąwszy jednak pod uwagę, iż [równ.

(4b) $L_1'(X, Y, Z) - L_2'(X, Y, Z) = 0$

przedstawia (§ 25) pewną prostą, przechodzącą przez punkt $a_1' a_2'$, t. zn. przez punkt A_3'. Wziąwszy jednak pod uwagę, (1a) oraz (2a)] $M_1'(U, V, W) = M(U, V, W) + \lambda_1 . M_1(U, V, W)$ i $M_2'(U, V, W) = M(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W)$, równanie (4a) możemy napisać w postaci:

(5a) $\lambda_1 . M_1(U, V, W) - \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0.$

Równanie (5a) przedstawia więc pewien punkt, należący do prostej a_3'. Z formy jednak tego równania widać (§ 25), iż przedstawia ono pewien punkt, należący do prostej $A_1 A_2$, t. zn. do prostej a_3. A zatem równanie (5a) przedstawia punkt, wspólny prostym a_3 i a_3', t. zn. punkt $a_3 a_3'$.

iż [równanie (1b) oraz (2b)] $L_1'(X, Y, Z) = L(X, Y, Z) + \lambda_1 . L_1(X, Y, Z)$ oraz $L_2'(X, Y, Z) = L(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z)$, równanie (4b) możemy napisać w postaci:

(5b) $\lambda_1 . L_1(X, Y, Z) - \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0.$

Równanie (5b) przedstawia więc pewną prostą, przechodzącą przez punkt A_3'. Z formy jednak tego równania widać (§ 25), iż przedstawia ono pewną prostą, przechodzącą przez punkt $a_1 a_2$, t. zn. przez punkt A_3. A zatem równanie (5a) przedstawia prostą, zawierającą obydwa punkty A_3 i A_3', t. zn. prostą $A_3 A_3'$.

Za pomocą rozumowania analogicznego możemy przyjść do wniosku, że równanie

$M_2'(U, V, W) - M_3'(U, V, W) = 0,$

czyli

(6a) $\lambda_2 . M_2(U, V, W) - \lambda_3 . M_3(U, V, W) = 0$

przedstawia punkt $a_1 a_1'$, oraz równanie $M_3'(U, V, W) - M_1'(U, V, W) = 0$, czyli

(7a) $\lambda_3 . M_3(U, V, W) - \lambda_1 . M_1(U, V, W) = 0$

przedstawia punkt $a_2 a_2'$.

$L_2'(X, Y, Z) - L_3'(X, Y, Z) = 0,$

czyli

(6b) $\lambda_2 . L_2(X, Y, Z) - \lambda_3 . L_3(X, Y, Z) = 0$

przedstawia prostą $A_1 A_1'$, oraz równanie $L_3'(X, Y, Z) - L_1'(X, Y, Z) = 0$, czyli

(7 b) $\lambda_3 . L_3(X, Y, Z) - \lambda_1 . L_1(X, Y, Z) = 0$

przedstawia prostą $A_2 A_2'$.

Otrzymaliśmy więc, że

punkty $a_3 a_3', a_1 a_1', a_2 a_2'$ możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(8\,a)\quad \left|\begin{array}{l} M_{12}(U,V,W) = \\ = \lambda_1 . M_1(U,V,W) - \\ - \lambda_2 . M_2(U,V,W) = 0, \\ M_{23}(U,V,W) = \\ = \lambda_2 . M_2(U,V,W) - \\ - \lambda_3 . M_3(U,V,W) = 0, \\ M_{31}(U,V,W) = \\ = \lambda_3 . M_3(U,V,W) - \\ - \lambda_1 . M_1(U,V,W) = 0. \end{array}\right.$$

proste $A_3 A_3', A_1 A_1', A_2 A_2'$ możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(8\,b)\quad \left|\begin{array}{l} L_{12}(X,Y,Z) = \\ = \lambda_1 . L_1(X,Y,Z) - \\ - \lambda_2 . L_2(X,Y,Z) = 0, \\ L_{23}(X,Y,Z) = \\ = \lambda_2 . L_2(X,Y,Z) - \\ - \lambda_3 . L_3(X,Y,Z) = 0, \\ L_{31}(X,Y,Z) = \\ = \lambda_3 . L_3(X,Y,Z) - \\ - \lambda_1 . L_1(X,Y,Z) = 0. \end{array}\right.$$

Ponieważ

$$M_{12}(U,V,W) + M_{23}(U,V,W) + M_{31}(U,V,W) = \lambda_1 . M_1(U,V,W) - \lambda_2 . M_2(U,V,W) + \lambda_2 . M_2(U,V,W) - \lambda_3 . M_3(U,V,W) + \lambda_3 . M_3(U,V,W) - \lambda_1 . M_1(U,V,W) = 0,$$

$$L_{12}(X,Y,Z) + L_{23}(X,Y,Z) + L_{31}(X,Y,Z) = \lambda_1 . L_1(X,Y,Z) - \lambda_2 . L_2(X,Y,Z) + \lambda_2 . L_2(X,Y,Z) - \lambda_3 . L_3(X,Y,Z) + \lambda_3 . L_3(X,Y,Z) - \lambda_1 . L_1(X,Y,Z) = 0,$$

przeto (§ 26)

punkty $a_3 a_3', a_1 a_1', a_2 a_2'$ leżą na jednej prostej.

proste $A_3 A_3', A_1 A_1', A_2 A_2'$ przechodzą przez jeden punkt.

Do tego wniosku przyszliśmy w założeniu, że

trójkąty $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$ nie posiadają ani jednego wierzchołka wspólnego.

trójboki $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$ nie posiadają ani jednego boku wspólnego.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy

trójkąty $A_1 A_2 A_3$ i $A_1' A_2' A_3'$ posiadają przynajmniej jeden wierzchołek wspólny.

trójboki $a_1 a_2 a_3$ i $a_1' a_2' a_3'$ posiadają przynajmniej jeden bok wspólny.

W tym przypadku istnieją 2 możliwości: albo

jakiś wierzchołek trójkąta $A_1 A_2 A_3$ nakrywa wierzchołek odpowiedni trójkąta $A_1' A_2' A_3'$, albo też nieodpowiedni.

jakiś bok trójboku $a_1 a_2 a_3$ nakrywa bok odpowiedni trójboku $a_1' a_2' a_3'$, albo też nieodpowiedni.

Przypuśćmy najpierw, że jakiś

wierzchołek trójkąta $A_1 A_2 A_3$, np. wierzchołek A_1, nakrywa wierzchołek odpowiedni trójkąta $A_1' A_2' A_3'$, t. zn. wierzchołek A_1'. Wtedy punkt A_1 (lub A_1') jest zarówno punktem $a_2 a_2'$, jak też punktem $a_3 a_3'$, wobec czego punkty $a_2 a_2'$, $a_3 a_3'$, $a_1 a_1'$ możemy uważać za leżące na jednej prostej.

bok trójboku $a_1 a_2 a_3$, np. bok a_1, nakrywa bok odpowiedni trójboku $a_1' a_2' a_3'$, t. zn. bok a_1'. Wtedy prosta a_1 (lub a_1') jest zarówno prostą $A_2 A_2'$, jak też prostą $A_3 A_3'$, wobec czego proste $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$, $A_1 A_1'$ możemy uważać za przechodzące przez jeden punkt.

Przypuśćmy teraz, że jakiś

wierzchołek trójkąta $A_1 A_2 A_3$, np. wierzchołek A_1, nakrywa jakiś wierzchołek nieodpowiedni trójkąta $A_1' A_2' A_3'$, np. wierzchołek A_2'.

Gdyby wtedy prosta $A_1 A_1'$ była różna od prostej $A_2 A_2'$, to jedyny punkt, wspólny tym dwu prostym, mianowicie punkt A_1 (lub A_2'), musiałby nakrywać punkt S, a zatem przez punkt A_1 (lub A_2') przechodziłaby wtedy również prosta $A_3 A_3'$, innemi słowy punkty A_1 (lub A_2'), A_3, A_3' leżałyby na jednej prostej; lecz w rozpatrywanym przypadku punkt A_1 (lub A_2') byłby punktem $a_3 a_3'$, punkt A_3 byłby punktem $a_1 a_1'$, oraz punkt A_3' byłby punktem $a_2 a_2'$, a więc punkty $a_3 a_3'$, $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$ leżałyby na jednej prostej.

Gdyby zaś proste $A_1 A_1'$ i $A_2 A_2'$ nakrywały się, to, po-

bok trójboku $a_1 a_2 a_3$, np. bok a_1, nakrywa jakiś bok nieodpowiedni trójboku $a_1' a_2' a_3'$, np. bok a_2'.

Gdyby wtedy punkt $a_1 a_1'$, był różny od punktu $a_2 a_2'$, to jedyna prosta, zawierająca te 2 punkty, mianowicie prosta a_1 (lub a_2'), musiałaby nakrywać prostą s, a zatem na prostej a_1 (lub a_2') leżałby wtedy również punkt $a_3 a_3'$, innemi słowy proste a_1 (lub a_2'), a_3, a_3' przechodziłyby przez jeden punkt; lecz w rozpatrywanym przypadku prosta a_1 (lub a_2') byłaby prostą $A_3 A_3'$, prosta a_3 byłaby prostą $A_1 A_1'$, oraz prosta a_3' byłaby prostą $A_2 A_2'$, a więc proste $A_3 A_3'$, $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ przechodziłyby przez jeden punkt.

Gdyby zaś punkty $a_1 a_1'$ i $a_2 a_2'$ nakrywały się, to, ponieważ prosta $A_1 A_1'$ jest jednocześnie prostą $A_2' A_1'$, t. zn. prostą a_3', oraz prosta $A_2 A_2'$ jest jednocześnie prostą $A_2 A_1$, t. zn. prostą a_3, za punkt $a_3 a_3'$ moglibyśmy uważać każdy punkt prostej a_3 (lub a_3'), a zatem punkty $a_3 a_3'$, $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$ moglibyśmy uważać za leżące na jednej prostej.

nieważ punkt $a_1 a_1'$ jest jednocześnie punktem $a_2' a_1'$, t. zn. punktem A_3', oraz punkt $a_2 a_2'$ jest jednocześnie punktem $a_2 a_1$, t. zn. punktem A_3, za prostą $A_3 A_3'$ moglibyśmy uważać każdą prostą, przechodzącą przez punkt A_3 (lub A_3'), a zatem proste $A_3 A_3'$, $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ moglibyśmy uważać za przechodzące przez jeden punkt.

Otrzymaliśmy więc twierdzenie następujące:

J e ż e l i d w a

t r ó j k ą t y, leżące w jednej płaszczyźnie właściwej, są odniesione do siebie w ten sposób, że proste, łączące wierzchołki odpowiednie, przechodzą przez jeden punkt, to wtedy punkty przecięcia się boków odpowiednich leżą na jednej prostej.

t r ó j b o k i, leżące w jednej płaszczyźnie właściwej, są odniesione do siebie w ten sposób, że punkty przecięcia się boków odpowiednich leżą na jednej prostej, to wtedy proste, łączące wierzchołki odpowiednie, przechodzą przez jeden punkt.

Te 2 twierdzenia (z lewej i z prawej strony) można połączyć w jedno w sposób następujący:

Jeżeli dwa trójkąty (albo trójboki), leżące w jednej płaszczyźnie właściwej, są odniesione do siebie, to w razie, gdy proste połączenia wierzchołków odpowiednich przechodzą przez jeden punkt, punkty przecięcia się boków odpowiednich leżą na jednej prostej, i odwrotnie, w razie, gdy punkty przecięcia się boków odpowiednich leżą na jednej prostej, proste połączenia wierzchołków odpowiednich przechodzą przez jeden punkt.

To twierdzenie nazywa się **twierdzeniem Desargues'a.**

Jeżeli pomiędzy dwoma trójkątami (albo trójbokami) jednej płaszczyzny zachodzi zależność, o której mowa w twierdzeniu ostatniem, to te trójkąty (albo trójboki) nazywają się homologicznymi. Dlatego też twierdzenie Desargues'a nazywamy także twierdzeniem o trójkątach (albo trójbokach) homologicznych.

Uwaga. Wierzchołki, względnie boki, trójkątów (albo trójboków), rozpatrywanych w § niniejszym, nie muszą być punktami, względnie prostemi, właściwymi.

Rozdział III.

§ 28. Różne formy równania prostej oraz równania punktu. —W Rozdziale I równanie prostej właściwej w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a pisaliśmy w 3-ech postaciach, a mianowicie:

(1) w tak zwanej p o s t a c i o g ó l n e j (§ 6): $Ax+By+C=0$;

(2) w tak zwanej p o s t a c i d w o i s t e j (§ 19): $ux+vy+1=0$;

(3) w tak zwanej p o s t a c i n o r m a l n e j H e s s e ' g o (§ 3): $x\cos\varphi+y\cos\psi-p=0$.

Do tych 3-ech postaci równania prostej właściwej dołączymy jeszcze 2 inne, które wyprowadzimy teraz z równania w postaci ogólnej oraz z równania w postaci dwoistej.

Przypuśćmy mianowicie, że w równaniu $Ax+By+C=0$ spółczynnik B jest różny od 0. W takim razie możemy rozwiązać z tego równania y i otrzymamy wtedy równanie $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, lub też, oznaczywszy $-\frac{A}{B}$ i $-\frac{C}{B}$ odpowiednio przez m i b, równanie $y=mx+b$.

Jeżeli znów w równanie $ux+vy+1=0$ zamiast u oraz v wstawimy (§ 16) odpowiednio $-\frac{1}{a}$ oraz $-\frac{1}{b}$ i następnie pomnożymy to równanie przez -1, to otrzymamy wtedy równanie $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$.

Do wymienionych więc wyżej 3-ech równań prostej właściwej w 3-ech różnych postaciach dołączamy jeszcze:

(4) równanie w tak zw. p o s t a c i z w y c z a j n e j: $y=mx+b$;

(5) równanie w t. zw. postaci symetrycznej: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$.

Przez równanie w postaci ogólnej, albo też przez równanie w postaci normalnej Hesse'go, możemy przedstawić każdą prostą właściwą. Natomiast przez równanie w jednej z 3-ech pozostałych postaci możemy przedstawić już nie każdą prostą właściwą, a mianowicie: przez równanie w postaci dwoistej, jak też przez równanie w postaci symetrycznej, możemy przedstawić tylko taką prostą właściwą, która nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, przez równanie zaś w postaci zwyczajnej możemy przedstawić tylko taką prostą właściwą, która nie jest równoległa do osi y-ów (albowiem przy wyprowadzaniu równania w postaci zwyczajnej z równania w postaci ogólnej założyliśmy, że $B \neq 0$).

Przyczem co do równania w postaci symetrycznej zrobimy uwagę następującą.

Jeżeli rozpatrvwana prosta właściwa jest równoległa do osi x-ów, względnie do osi y-ów, to wtedy a, względnie b, równa się $\pm\infty$. Za równanie rozpatrywanej prostej właściwej w postaci symetrycznej należałoby więc w tym przypadku uważać równanie $\frac{x}{\pm\infty}+\frac{y}{b}-1=0$, względnie $\frac{x}{a}+\frac{y}{\pm\infty}-1=0$. Chcąc jednak uniknąć wprowadzania do równania liczby $\pm\infty$, piszemy zazwyczaj to równanie w ten sposób: $\frac{y}{b}-1=0$, względnie w ten sposób: $\frac{x}{a}-1=0$.

Spółczynniki równania prostej właściwej w postaci ogólnej nie mają żadnego określonego znaczenia geometrycznego. Natomiast spółczynniki równania prostej właściwej w pozostałych 4-ech z pośród 5-iu podanych wyżej postaci mają już zupełnie określone znaczenie geometryczne. Jakie znaczenie geometryczne posiadają spółczynniki równania prostej właściwej w postaci dwoistej, w postaci normalnej Hesse'go oraz w postaci symetrycznej, jest widoczne. Pozostaje nam zatem zbadać znaczenie geometryczne spółczynników równania prostej właściwej w postaci zwyczajnej.

Weźmy więc pod uwagę równanie prostej właściwej d w postaci zwyczajnej:

(6) $$y = mx + b$$

i najpierw znajdźmy punkt przecięcia się tej prostej z osią y-ów. W tym celu obliczamy z równania (6) wartość y, odpowiadającą wartości $x = 0$. Otrzymujemy wtedy wartość $y = b$, t. zn. b jest rzędną punktu, w jakim rozpatrywana prosta przecina oś y-ów. Jak więc widzimy, wielkość b w równaniu prostej właściwej w postaci zwyczajnej posiada zupełnie takie same znaczenie geometryczne, jak wielkość b w równaniu prostej właściwej w postaci symetrycznej, i dlatego też w obydwu przypadkach użyliśmy na oznaczenie tej wielkości tego samego symbolu.

Teraz należałoby przejść do szukania znaczenia geometrycznego spółczynnika m. Zanim jednak to uczynimy, powiemy najpierw, co nazywamy kątem jaki prosta właściwa tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów.

Prosta właściwa może być równoległą do osi x-ów lub też nie. Załóżmy najpierw, że mamy jakąś prostą właściwą, która równoległą do osi x-ów nie jest. Ta prosta przecina wtedy oś x-ów w jakimś punkcie właściwym, który oznaczmy np. literą M. Punkt M jest punktem początkowym dwu promieni, zawartych w rozpatrywanej prostej właściwej. Punkty właściwe, różne od punktu M, jednego z tych dwu promieni posiadają rzędne dodatnie, punkty właściwe zaś, różne od punktu M, drugiego promienia posiadają rzędne ujemne. Weźmy teraz pod uwagę kąty, dla których wierzchołkiem jest punkt M, ramionami zaś są: pierwszy z wymienionych przed chwilą promieni rozpatrywanej prostej właściwej oraz promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów. Jeden z tych kątów jest mniejszy od π, i ten właśnie kąt nazywamy kątem, jaki rozpatrywana prosta właściwa tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów. Jeżeli zaś mamy jakąś prostą właściwą, równoległą do osi x-ów, to przez kąt, jaki ta prosta tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, rozumiemy 0.

Z tej definicji kąta, jaki prosta właściwa tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, wynika, iż kąty, jakie ze zwrotem dodatnim osi x-ów. tworzą 2 proste właściwe wzajemnie równoległe, są równe.

A teraz przejdźmy do szukania znaczenia geometrycznego spółczynnika m w równaniu (6), przedstawiającem prostą właściwą d.

Oznaczmy kąt, jaki prosta właściwa d tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, przez α. Weźmy następnie pod uwagę równanie

$$(7) \qquad y = m x.$$

To równanie przedstawia prostą właściwą d', równoległą (§ 21) do prostej właściwej d i przechodzącą przez początek układu spółrzędnych. Prosta właściwa d' tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów też kąt α.

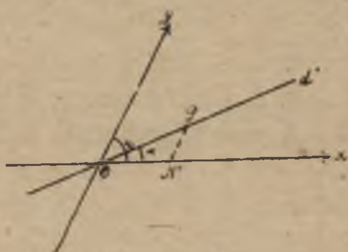
Prosta d może być równoległą do osi x-ów, lub też nie. Załóżmy najpierw, że prosta d równoległą do osi x-ów nie jest. Wtedy prosta d' osi x-ów nie nakrywa.

Weźmy na prostej d' jakikolwiek punkt P, posiadający rzędną y_1 dodatnią. Odciętą punktu P oznaczmy przez x_1. Ponieważ punkt P początku układu spółrzędnych nie nakrywa (albowiem, według założenia, $y_1 > 0$), przeto $x_1 \neq 0$. Gdyby bowiem $x_1 = 0$, to w takim razie punkt P należałby do osi y-ów, prosta d' więc, jako posiadająca z osią y-ów 2 różne punktv wspólne (mianowicie punkt P oraz początek układu spółrzędnych), musiałaby tę oś nakrywać, a zatem prosta d musiałaby być do osi y-ów równoległa, stąd zaś wynikałoby, że prostej d przez równanie w postaci zwyczajnej przedstawić nie można. Widzimy więc, że $x_1 \neq 0$, a zatem albo $x_1 > 0$ (rys. 12), albo $x_1 < 0$ (rys. 13).

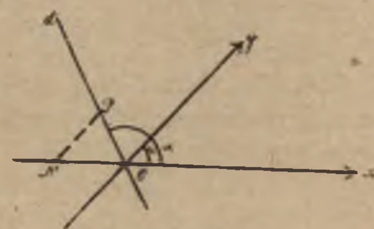
Punkt P do prostej d' należy, zatem jego spółrzędne muszą równaniu tej prostej czynić żadość, t. zn. mamy $y_1 = m x_1$, skąd wynika:

$$(8) \qquad m = \frac{y_1}{x_1}.$$

Poprowadźmy przez punkt P prostą, równoległą do osi y-ów. Punkt przecięcia się tej prostej z osią x-ów oznaczmy przez N.



Rys. 12.



Rys. 13.

Długości boków trójkąta są proporcjonalne do wstaw kątów tym bokom przeciwległych, z trójkąta zatem ONP wynika:

$$(9) \qquad \frac{NP}{ON} = \frac{\sin \sphericalangle NOP}{\sin \sphericalangle OPN},$$

gdzie przez NP i ON należy rozumieć liczby d o d a t n i e, wyrażające długości odcinków NP i ON.

W przypadku, gdy $x_1 > 0$ (rys. 12), mamy: $NP = y_1$, $ON = x_1$, $\sphericalangle NOP = \alpha$, $\sphericalangle OPN = \omega - \alpha$, z równości (9) wynika więc wtedy:

$$(10) \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)}.$$

W przypadku zaś, gdy $x_1 < 0$ (rys. 13), mamy: $NP = y_1$, $ON = -x_1$, $\sphericalangle NOP = \pi - \alpha$, $\sphericalangle OPN = \alpha - \omega$, a zatem z równości (9) wynika wtedy $\frac{y_1}{-x_1} = \frac{\sin (\pi - \alpha)}{\sin (\alpha - \omega)}$, czyli $\frac{y_1}{x_1} =$ $= \frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)}$, t. zn. znów równość (10).

Równość (10) jest więc spełniona zarówno wtedy, gdy $x_1 > 0$, jak też wtedy, gdy $x_1 < 0$.

Z równości (8) i (10) wynika równość:

$$(11) \qquad m = \frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)}.$$

Równość tę otrzymaliśmy w założeniu, że prosta d nie jest równoległa do osi x-ów. Jeżeli zaś prosta d jest równoległa do osi x-ów, to w takim razie kąt α równa się 0, zatem $\sin\alpha = 0$, lecz z drugiej strony wtedy również $m = 0$, skąd wynika, że równość (11) jest spełniona także i w tym przypadku.

A więc równość (11) wyraża, jakie znaczenie geometryczne posiada spółczynnik m.

W równaniach w postaci zwyczajnej dwu prostych właściwych spółczynniki przy x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy te proste są wzajemnie równoległe, innemi słowy, gdy posiadają one jeden i ten sam kierunek (Wstęp, III). Dlatego też spółczynnik m w równaniu prostej właściwej w postaci zwyczajnej nazywamy spółczynnikiem kierunkowym.

W równości (11) mamy spółczynnik m wyrażony przez kąty α i ω. Odwrotnie, wyrazimy teraz kąt α przez spółczynnik m i kąt ω. Pomnóżmy w tym celu równość (11) przez $\sin(\omega - \alpha)$. Otrzymamy wtedy: $m \sin(\omega - \alpha) = \sin\alpha$, czyli $m \sin\omega \cos\alpha - m \cos\omega \sin\alpha = \sin\alpha$, skąd wynika $\sin\alpha\,(1 + m\cos\omega) = m \sin\omega \cos\alpha$, a zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\sin\omega}{1 + m\cos\omega}. \tag{12}$$

Z równości (12) wynika, iż jeżeli α oznacza kąt, jaki prosta $Ax + By + C = 0$, nie będąca równoległą do osi y-ów, tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, to wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{A}{B}\sin\omega}{1 - \frac{A}{B}\cos\omega},$$

czyli

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A\sin\omega}{A\cos\omega - B}. \tag{13}$$

Wzór (13), wyprowadzony w założeniu, że rozpatrywana prosta nie jest równoległa do osi y-ów, jest prawdziwy jednak również wtedy, gdy ta prosta jest równoległa do osi y-ów.

Albowiem prosta $Ax+By+C=0$ jest równoległa do osi y-ów wtedy, gdy $B=0$, w tym zaś przypadku równość (13) sprowadza się do równości $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\omega$, która w rzeczywistości jest spełniona, ponieważ w rozpatrywanym przypadku $\alpha=\omega$.

Wzór (13) jest więc prawdziwy zawsze.

Przypuśćmy, że jakaś prosta właściwa d jest przedstawiona przez równanie w postaci ogólnej:

$$Ax+By+C=0. \tag{14}$$

Jeżeli ta prosta nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, to zawsze od jej równania w postaci ogólnej możemy przejść do jej równania w postaci dwoistej lub też w postaci symetrycznej. Mianowicie równaniem rozpatrywanej prostej właściwej w postaci dwoistej będzie w tym przypadku równanie:

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0, \tag{15}$$

równaniem zaś tej prostej w postaci symetrycznej będzie równanie:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}-1=0. \tag{16}$$

Jeżeli zaś rozpatrywana prosta właściwa nie jest równoległa do osi y-ów, to od jej równania w postaci ogólnej zawsze możemy przejść do jej równania w postaci zwyczajnej. Tem równaniem będzie mianowicie:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}. \tag{17}$$

W końcu, bez względu na to, jaką jest rozpatrywana prosta właściwa, zawsze od jej równania w postaci ogólnej możemy przejść do jej równania w postaci normalnej Hesse'go. Poszukamy teraz czynnika ϱ, przez jaki należy pomnożyć równanie rozpatrywanej prostej właściwej w postaci ogólnej, t. zn. równanie (14), aby otrzymać równanie tej prostej w postaci normalnej Hesse'go, t. zn. równanie:

$$x\cos\varphi+y\cos\psi-p=0. \tag{18}$$

Szukany czynnik ϱ musi spełniać warunki następujące:

$$(19) \qquad \varrho A = \cos\varphi, \quad \varrho B = \cos\psi, \quad \varrho C = -p.$$

Przez φ rozumiemy (§ 3, rys. 10) jeden z kątów o wierzchołku O, których ramionami są: promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, oraz promień, posiadający zwrot odcinka OS, przyczem to, który z wymienionych kątów wybierzemy jako kąt φ, na wartość $\cos\varphi$ nie będzie miało żadnego wpływu. Weźmy więc np. jako kąt φ ten z pośród wymienionych kątów, który jest mniejszy od 2π, którego zwrotem jest zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O (§ 2) i którego pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów.

Przez ψ rozumiemy (§ 3, rys. 10) jeden z kątów o wierzchołku O, których ramionami są: promień, posiadający zwrot dodatni osi y-ów, oraz promień, posiadający zwrot odcinka OS, przyczem to, który z wymienionych kątów wybierzemy jako kąt ψ, na wartość $\cos\psi$ nie będzie miało żadnego wpływu. Weźmy więc np. jako kąt ψ ten z pośród wymienionych kątów, który jest mniejszy od 2π, którego zwrotem jest zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O (§ 2) i którego pierwszem ramieniem jest albo promień, posiadający zwrot odcinka OS, albo promień, posiadający zwrot dodatni osi y-ów, w zależności od tego, czy kąt φ nie jest większy, czy też nie jest mniejszy od kąta ω.

Przy takim wyborze kątów φ i ψ będziemy mogli powiedzieć, że w razie, gdy kąt φ nie jest większy od kąta ω, pomiędzy kątami φ i ψ zachodzi zależność $\varphi + \psi = \omega$, w razie zaś, gdy kąt φ nie jest mniejszy od kąta ω, pomiędzy kątami φ i ψ zachodzi zależność $\varphi - \psi = \omega$. A więc pomiędzy kątami φ i ψ, wybranymi w umówiony sposób, zachodzi zależność:

$$(20) \qquad \varphi \pm \psi = \omega,$$

gdzie znak $+$ odnosi się do pierwszego z wymienionych przypadków, znak $-$ zaś odnosi się do drugiego z tych przypadków.

Z równości (20) wynika: $\cos(\varphi + \psi) = \cos\omega$, czyli $\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos\omega$, czyli $\cos\varphi\cos\psi - \cos\omega = = + \sin\varphi\sin\psi$, a zatem $(\cos\varphi\cos\psi - \cos\omega)^2 = \sin^2\varphi\sin^2\psi$, czyli $(\cos\varphi\cos\psi - \cos\omega)^2 = (1 - \cos^2\varphi)(1 - \cos^2\psi)$, czyli $\cos^2\varphi\cos^2\psi + + \cos^2\omega - 2\cos\omega\cos\varphi\cos\psi = 1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi + \cos^2\varphi\cos^2\psi$, czyli $\cos^2\varphi + \cos^2\psi - 2\cos\omega\cos\varphi\cos\psi = 1 - \cos^2\omega$, czyli

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi - 2\cos\omega\cos\varphi\cos\psi = \sin^2\omega. \tag{21}$$

Wstawmy w równość (21) zamiast $\cos\varphi$ i $\cos\psi$ iloczyny ϱA i ϱB [równ. (19)]. Otrzymamy wtedy: $\varrho^2 A^2 + \varrho^2 B^2 - - 2\varrho^2 A B\cos\omega = \sin^2\omega$, czyli $\varrho^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega) = \sin^2\omega$, skąd wynika:

$$\varrho^2 = \frac{\sin^2\omega}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}. \tag{22}$$

Aby więc otrzymać ϱ, należy z ułamka, stanowiącego stronę prawą równości (22), wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Otrzymamy wtedy 2 wartości:

$$\frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \tag{23}$$

Chodzi teraz o to, która z tych dwu wartości będzie stanowiła szukany czynnik ϱ. Aby odpowiedzieć na to pytanie, zwróćmy uwagę na zależność [równ. (19)] $\varrho C = -p$. Wielkość p albo jest równa 0 albo też posiada wartość dodatnią. Jest ona mianowicie równa 0 wtedy, gdy rozpatrywana prosta przechodzi przez początek układu spółrzędnych, t. zn. gdy $C = 0$. Przypuśćmy najpierw, że rozpatrywana prosta przez początek układu spółrzędnych nie przechodzi. Wtedy $p > 0$, a zatem $\varrho C < 0$, skąd wynika, że ϱ posiada znak przeciwny, aniżeli C. A zatem z pośród dwu wartości (23) czynnik ϱ stanowi ta wartość, która jest znaku przeciwnego, aniżeli C. Ponieważ zaś $\sin\omega$ zawsze posiada wartość dodatnią (gdyż zawsze $\omega < \pi$) przeto otrzymamy szukany czynnik ϱ, jeżeli w mianowniku ułamka (23) przed symbolem, oznaczającym pierwiastek kwadratowy, weźmiemy znak, przeciwny temu znakowi, jaki posiada C. Symbolicznie wyrażamy to, umieszczając w mianowniku ułamka (23) przed symbolem, oznaczającym pierwiastek kwadratowy, symbol (— sign. C), t. zn. piszemy:

$$(24) \qquad \varrho = \frac{\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}.$$

Przy określaniu znaku czynnika ϱ założyliśmy, że rozpatrywana prosta nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych. Gdyby zaś rozpatrywana prosta przez początek układu spółrzędnych przechodziła, to wtedy znak czynnika ϱ nie byłby jednoznacznie określony, albowiem nie byłyby jednoznacznie określone znaki wielkości $\cos\varphi$ i $\cos\psi$, gdyż, jak to zaznaczyliśmy w § 3, za zwrot odcinka OS moglibyśmy wtedy uważać którykolwiek zwrot prostej, przechodzącej przez początek układu spółrzędnych i prostopadłej do rozpatrywanej prostej. Możemy więc powiedzieć, że równość (24) zachodzi zawsze, rozumiejąc to w ten sposób, iż w razie, gdy rozpatrywana prosta przechodzi przez początek układu spółrzędnych, t. zn. w razie, gdy $C=0$, symbol (— sign. C) oznacza obydwa znaki $+$ i $-$.

Z równości (19) i (24) wynika:

$$(25) \qquad \left|\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{A\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}},\\ \cos\psi &= \frac{B\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}},\\ -p &= \frac{C\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}.\end{aligned}\right.$$

Jeżeli więc prosta właściwa jest przedstawiona przez równanie w postaci ogólnej $Ax+By+C=0$, to równaniem tej prostej w postaci normalnej Hesse'go jest równanie:

$$(26) \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{A\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}\,x+\\ &+\frac{B\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}\,y+\\ &+\frac{C\sin\omega}{(-\text{sign. } C)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}=0.\end{aligned}\right.$$

Do tych wyników doszliśmy, zrobiwszy pewną umowę, dotyczącą kątów φ i ψ. Te wyniki są jednak od wymienionej umowy niezależne, albowiem wymieniona umowa dotyczy tylko samych kątów φ i ψ, natomiast na dostawy tych kątów, a tylko one przecież w otrzymanych wynikach występują, żadnego wpływu nie wywiera.

W Rozdziale I równanie punktu, różnego od początku układu spółrzędnych, w układzie płaskim spółrzędnych Plücker'a pisaliśmy w dwu postaciach, a mianowicie:

(27) w tak zwanej p o s t a c i o g ó l n e j (§ 17 i § 18):

$$Au + Bv + C = 0;$$

(28) w tak zwanej p o s t a c i d w o i s t e j (§ 19):

$$xu + yv + 1 = 0.$$

Przez równanie w postaci ogólnej możemy przedstawić każdy punkt, różny od początku układu spółrzędnych. Natomiast przez równanie w postaci dwoistej możemy przedstawić tylko każdy punkt w ł a ś c i w y, różny od początku układu spółrzędnych.

Jeżeli jakiś punkt właściwy, różny od początku układu spółrzędnych, jest przedstawiony przez równanie w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$, to od tego równania możemy przejść do równania rozpatrywanego punktu w postaci dwoistej, którem mianowicie będzie równanie:

(29) $$\frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v + 1 = 0.$$

W końcu, równanie prostej, względnie punktu, w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go pisaliśmy w Rozdziale I w dwu postaciach: $AX + BY + CZ = 0$ (§ 10 i § 11) oraz $UX + VY + WZ = 0$ (§ 15), względnie $AU + BV + CW = 0$ (§ 13 i § 14) oraz $XU + YV + ZW = 0$ (§ 15), przyczem równanie w drugiej postaci nazwaliśmy równaniem w postaci dwoistej. Lecz, właściwie biorąc, równanie w pierwszej postaci różni się tu od równania w drugiej postaci tylko tem, że w każdem z tych dwu równań spółczynniki są oznaczone innemi literami, natomiast znaczenie geometryczne tych spółczynników w obydwu przypadkach jest jednakowe. Albowiem bez względu na to, czy równanie prostej napiszemy w postaci $AX+BY+CZ=0$, czy też w postaci $UX+VY+WZ=0$, spółczynniki tego równania, t. zn. w pierwszym przypadku liczby A, B, C, w drugim zaś przypadku liczby U, V, W, będą mogły być uważane za spółrzędne tej prostej. Tak samo bez względu na to, czy równanie punktu napiszemy w postaci $AU+BV+CW=0$, czy też w postaci $XU+YV+ZW=0$, spółczynniki tego równania, t. zn. w pierwszym przypadku liczby A, B, C, w drugim zaś przypadku liczby X, Y, Z, będą mogły być uważane za spółrzędne tego punktu.

Dlatego też możemy powiedzieć, że w układzie płaskim spółrzędnych jednorodnych Hesse'go zarówno każde równanie prostej, jak też każde równanie punktu, możemy uważać za równanie w postaci dwoistej.

Poświęcimy jeszcze kilka słów przypadkowi, gdy układ płaski spółrzędnych Descartes'a, jakim się tu posługujemy, jest prostokątny, t. zn. gdy $\omega=\frac{\pi}{2}$.

W tym przypadku wzory (11) i (12) sprowadzają się do wzoru:

$$m=\operatorname{tg}\alpha. \tag{30}$$

Następnie, jeżeli przez φ będziemy rozumieli wtedy jakiś kąt o wierzchołku O (niekoniecznie mniejszy od 2π), którego (§ 3, rys. 10) p i e r w s z e m r a m i e n i e m jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, drugiem ramieniem jest promień, posiadający zwrot odcinka OS, oraz zwrotem jest z w r o t d o d a t n i pęku promieni o wierzchołku O, to będzie wtedy $\cos\psi=\sin\varphi$, a zatem równanie prostej właściwej w postaci normalnej Hesse'go będziemy mogli napisać tak:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0. \tag{31}$$

Przyczem tutaj obowiązuje podana przed chwilą umowa, dotycząca kąta φ. Gdybyśmy przez φ rozumieli jakiś kąt o wierzchołku O, którego (§ 3, rys. 10) pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, drugiem ramieniem jest promień, posiadający zwrot odcinka OS, oraz zwrotem jest zwrot ujemny pęku promieni o wierzchołku O, to, jako równanie prostej właściwej w postaci normalnej Hesse'go, zamiast równania (31) mielibyśmy równanie

$$x \cos\varphi - y \sin\varphi - p = 0. \tag{32}$$

Wzory (24) i (25) oraz równanie (26) w razie układu prostokątnego sprowadzają się do:

$$\varrho = \frac{1}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}; \tag{33}$$

$$\left|\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{A}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{B}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}, \\ -p &= \frac{C}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}; \end{aligned}\right. \tag{34}$$

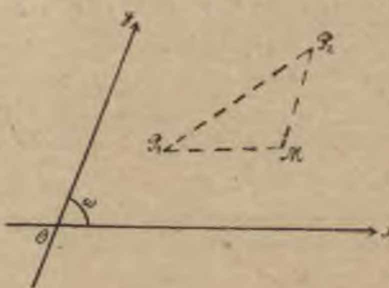
$$\left|\begin{aligned} &\frac{A}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \\ &\quad + \frac{C}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

§ 29. Odległość wzajemna dwu punktów właściwych. — Niechaj będą dane 2 punkty właściwe $P_1\,(x_1, y_1)$ oraz $P_2\,(x_2, y_2)$. Obliczymy ich odległość wzajemną δ.

Jeżeli punkty P_1 i P_2 nakrywają się, to wtedy ich odległość wzajemna równa się 0. Jeżeli punkty P_1 i P_2 leżą na prostej, równoległej do osi x-ów, względnie do osi y-ów, to wtedy ich odległość wzajemna wynosi $|x_1 - x_2|$, względnie $|y_1 - y_2|$ (dodanie kresek pionowych z obydwu stron symbolu, oznaczającego jakąś liczbę, oznacza, iż mamy na myśli wartość bezwzględną tej liczby, a więc np. przez $|x_1 - x_2|$ rozumiemy wartość bezwzględną różnicy $x_1 - x_2$).

Pozostaje nam więc jeszcze obliczyć odległość wzajemną punktów P_1 i P_2 w założeniu, że te punkty są różne i że łącząca je prosta nie jest równoległa ani do osi x-ów ani do osi y-ów. W tym przypadku odległość wzajemną dwu punktów oblicza się zazwyczaj w sposób następujący.

Przez jeden z dwu punktów danych prowadzimy prostą, równoległą do jednej z osi spółrzędnych, przez drugi zaś punkt dany prowadzimy prostą, równoległą do drugiej osi spółrzędnych, a więc np. przez punkt P_1 prowadzimy prostą, równoległą do osi x-ów, przez punkt P_2 zaś prostą, równoległą do osi y-ów (rys. 14). Punkt przecięcia się tych dwu prostych oznaczmy literą M.



Rys. 14.

Kwadrat boku trójkąta równa się sumie kwadratów dwu pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn tych dwu boków oraz dostawy kąta, zawartego pomiędzy nimi, a zatem z trójkąta P_1P_2M (rys. 14) wynika:

$$(1) \quad P_1P_2^2 = P_1M^2 + P_2M^2 - 2P_1M \,.\, P_2M \,.\, \cos \sphericalangle P_1MP_2.$$

Lecz w przypadku, przedstawionym na rysunku 14, mamy:

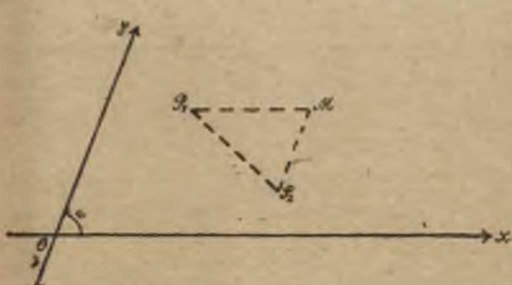
$$(2) \quad P_1P_2 = \delta,\ P_1M = x_2 - x_1,\ P_2M = y_2 - y_1,\ \sphericalangle P_1MP_2 = \pi - \omega,$$

zatem z równości (1) wynika:

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos(\pi - \omega),$$

czyli

$$(3) \quad \delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega.$$



Rys. 15.

Gdyby punkty dane P_1 i P_2 zajmowały jakieś inne położenie, aniżeli na rysunku 14, gdyby zajmowały one np. takie położenie, jak na rysunku 15, to wtedy równość (1) też byłaby spełniona, lecz zamiast równości (2) mielibyśmy równości:

(4) $P_1P_2=\delta,\ P_1M=x_2-x_1,\ P_2M=y_1-y_2,\ \sphericalangle P_1MP_2=\omega.$

Z równości (1) i (4) wynikałoby:

$$\delta^2=(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2-2(x_2-x_1)(y_1-y_2)\cos\omega,$$

czyli

$$\delta^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega,$$

t. zn. znów równość (3).

Równość (1) jest spełniona zawsze, bez względu na położenie punktów P_1 i P_2. Natomiast równości, wyrażające długości boków P_1M i P_2M oraz wielkość kąta P_1MP_2 trójkąta P_1MP_2, nie są już, jak widzieliśmy, od położenia punktów P_1 i P_2 niezależne. Pomimo to jednak, rozpatrując różne możliwości, moglibyśmy się przekonać, że równość (3) jest spełniona zawsze.

A zatem w przypadku, gdy rozpatrywane punkty P_1 i P_2 są różne i łącząca je prosta nie jest równoległa ani do osi x-ów ani do osi y-ów, odległość wzajemną δ tych dwu punktów wyraża wzór:

(5) $$\delta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

Lecz ten wzór możemy uważać za wyrażający odległość wzajemną rozpatrywanych punktów również wtedy, gdy te punkty nakrywają się, lub też gdy łącząca je prosta jest równoległa do osi x-ów, względnie do osi y-ów. Albowiem w przypadku, gdy punky P_1 i P_2 nakrywają się, mamy $x_1=x_2$ i $y_1=y_2$, a zatem z wzoru (5) wynika $\delta=0$; w przypadku zaś, gdy prosta, łącząca punkty P_1 i P_2, jest równoległa do osi x-ów, względnie do osi y-ów, mamy $y_1=y_2$, względnie $x_1=x_2$, z wzoru (5) wynika więc $\delta=|x_1-x_2|$, względnie $\delta=|y_1-y_2|$.

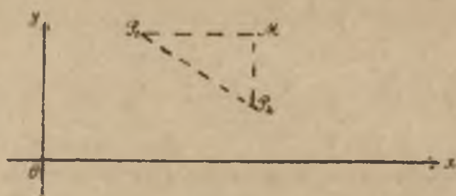
Wzór (5) jest zatem prawdziwy zawsze.

Jeżeli układ płaski spółrzędnych Descartes'a, jakim się tu posługujemy, jest prostokątny, t. zn. jeżeli $\omega=\frac{\pi}{2}$, to wzór (5) sprowadza się do:

(6) $$\delta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Podany tu sposób obliczania odległości wzajemnej dwu punktów w przypadku, gdy te punkty są różne, przyczem łącząca je prosta nie jest równoległa ani do osi x-ów, ani do osi y-ów, posiada pewne wady. Za wady bowiem należy uważać to, iż przy obliczaniu tej odległości posługujemy się tu wzorami, które zależą od położenia wzajemnego rozpatrywanych punktów, a mianowicie długość boku $P_1 M$ trójkąta $P_1 M P_2$ może być równa albo $x_1 - x_2$, albo $x_2 - x_1$, długość boku $P_2 M$ trójkąta $P_1 M P_2$ może być równa albo $y_1 - y_2$, albo $y_2 - y_1$, i w końcu wielkość kąta $P_1 M P_2$ trójkąta $P_1 M P_2$ może być równa albo ω, albo $\pi - \omega$. Właściwie więc należałoby rozpatrzeć tu wszystkie przypadki, jakie zachodzić mogą, i dopiero wtedy, gdybyśmy w każdym z tych przypadków otrzymali wzór (5), moglibyśmy powiedzieć, że ten wzór jest prawdziwy zawsze.

To, co powiedzieliśmy przed chwilą, dotyczy wzoru (5), nie zaś (6). Gdybyśmy bowiem chcieli bezpośrednio obliczyć odległość wzajemną dwu punktów właściwych w razie układu prostokątnego, to wymienione wyżej trudności moglibyśmy ominąć. Moglibyśmy bowiem rozumować w sposób następujący.


Rys. 16.

Trójkąt (rys. 16) $P_1 M P_2$ jest prostokątny, mamy zatem

(7) $P_1 P_2^2 = P_1 M^2 + P_2 M^2$.

Lecz $P_1 P_2 = \delta$, bez względu zaś na położenie punktów P_1 i P_2 możemy powiedzieć że $P_1 M = | x_1 - x_2 |$ oraz $P_2 M = | y_1 - y_2 |$, z równości zatem (7) wynika: $\delta^2 = | x_1 - x_2 |^2 + | y_1 - y_2 |^2$, czyli $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, skąd otrzymujemy:

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \text{ t. zn. znów wzór (6).}$$

Podamy teraz inny sposób wyprowadzania wzoru ogólnego, t. zn. (5), sposób, wolny już od tych wad, o których mówiliśmy wyżej. Mamy tu, oczywiście, na myśli tylko ten przypadek, gdy punkty P_1 i P_2 są różne, przyczem łącząca je prosta nie jest równoległa ani do osi x-ów, ani do osi y-ów.

Przesuwamy przez punkt P_1 prostą, równoległą do osi x-ów, przez punkt zaś P_2 prostą, równoległą do osi y-ów. Punkt przecięcia się tych dwu prostych oznaczmy literą M. (rys. 14 lub 15).

Boki trójkąta są proporcjonalne do wstaw kątów przeciwległych, biorąc zatem pod uwagę trójkąt $P_1 M P_2$, możemy powiedzieć, że:

$$\frac{P_1 P_2}{\sin \sphericalangle P_1 M P_2} = \frac{P_2 M}{\sin \sphericalangle P_2 P_1 M},$$

skąd wynika:

$$P_1 P_2 = \frac{P_2 M . \sin \sphericalangle P_1 M P_2}{\sin \sphericalangle P_2 P_1 M}. \tag{8}$$

Równość (8) zachodzi zawsze, bez względu na położenie wzajemne punktów P_1 i P_2.

Proste $P_1 M$ i $P_2 M$ są odpowiednio równoległe do osi spółrzędnych, zatem kąty, jakie one z sobą tworzą, są równe kątom, jakie tworzą z sobą osi spółrzędnych, stąd zaś wynika, że $\sphericalangle P_1 M P_2$ jest równy albo ω, albo $\pi - \omega$. W każdym z tych dwu przypadków mamy:

$$\sin \sphericalangle P_1 M P_2 = \sin \omega. \tag{9}$$

Kąt, jaki prosta $P_1 P_2$ tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, oznaczmy przez α.

Ponieważ prosta $P_1 M$ jest równoległa do osi x-ów, przeto $\sphericalangle P_2 P_1 M$ jest równy albo α, albo $\pi - \alpha$. W każdym z tych dwu przypadków mamy:

$$\sin \sphericalangle P_2 P_1 M = \sin \alpha. \tag{10}$$

Bok $P_2 M$ jest równy albo $y_1 - y_2$, albo $y_2 - y_1$. W każdym z tych dwu przypadków możemy powiedzieć, że:

$$P_2 M = |y_1 - y_2|. \tag{11}$$

Prostą $P_1 P_2$ możemy przedstawić przez równanie [§ 22, równ. (8 a), str. 98]:

$$(y_1 - y_2) x - (x_1 - x_2) y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0. \tag{12}$$

Stąd wynika [str. 135, wzór (13)]:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(y_1 - y_2)\sin\omega}{x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\cos\omega},$$

zatem

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = 1 : \left\{1 + \frac{[x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\cos\omega]^2}{(y_1 - y_2)^2\sin^2\omega}\right\},$$

czyli

$$(13)\quad \sin^2\alpha = \frac{(y_1 - y_2)^2\sin^2\omega}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}.$$

Z równości (10) i (13) wynika:

$$(14)\quad \sin^2 P_2P_1M = \frac{(y_1 - y_2)^2\sin^2\omega}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}.$$

Podnieśmy obiedwie strony równości (8) do kwadratu. Otrzymamy wtedy:

$$(15)\qquad P_1P_2^2 = \frac{P_2M^2.\sin^2\sphericalangle P_1MP_2}{\sin^2\sphericalangle P_2P_1M}.$$

Z równości (15), (9), (11), (14) oraz z równości $P_1P_2 = \delta$ wynika:

$$\delta^2 = [(y_1 - y_2)^2.\sin^2\omega] : \frac{(y_1 - y_2)^2\sin^2\omega}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega},$$

czyli

$$(16)\quad \delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega,$$

skąd znów otrzymujemy wzór (5).

§ 30. Kąty dwu prostych właściwych. — Niechaj będą dane 2 proste właściwe d_1 i d_2, przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(1)\qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ i } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Obliczymy wstawy, dostawy oraz styczne kątów, jakie te proste tworzą z sobą.

W tym celu przesuńmy przez początek układu spółrzędnych 2 proste d_1' i d_2', odpowiednio równoległe do prostych d_1 i d_2, które zatem możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(2)\qquad A_1x + B_1y = 0 \text{ i } A_2x + B_2y = 0.$$

Kąty, zawarte pomiędzy prostemi d_1' i d_2', są równe kątom, zawartym pomiędzy prostemi d_1 i d_2.

Kąty, jakie tworzą proste d_1' i d_2' ze zwrotem dodatnim osi x-ów, oznaczmy odpowiednio przez α_1 i α_2.

W zależności od tego, czy kąt α_1 nie jest mniejszy od kąta α_2, czy też kąt α_2 nie jest mniejszy od kąta α_1, różnica $\alpha_1 - \alpha_2$, albo różnica $\alpha_2 - \alpha_1$, jest równa jednemu z kątów, jakie tworzą z sobą proste d_1' i d_2', a zatem jest równa także jednemu z kątów, jakie tworzą z sobą proste d_1 i d_2. Oznaczywszy więc ten kąt przez Θ, będziemy mogli napisać:

$$\Theta = \pm (\alpha_1 - \alpha_2), \tag{3}$$

skąd wynika:

$$\operatorname{tg} \Theta = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \tag{4}$$

W § 28 mieliśmy, iż jeżeli α oznacza kąt, jaki prosta $Ax + By + C = 0$ tworzy ze zwrotem dodatnim osi x-ów, to w takim razie [str. 135, wzór (13)]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A \sin \omega}{A \cos \omega - B}. \tag{5}$$

Stąd wynika, że:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A_1 \sin \omega}{A_1 \cos \omega - B_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{A_2 \sin \omega}{A_2 \cos \omega - B_2}. \tag{6}$$

Z równości (4) i (6) otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \Theta = \pm \frac{\dfrac{A_1 \sin \omega}{A_1 \cos \omega - B_1} - \dfrac{A_2 \sin \omega}{A_2 \cos \omega - B_2}}{1 + \dfrac{A_1 \sin \omega}{A_1 \cos \omega - B_1} \cdot \dfrac{A_2 \sin \omega}{A_2 \cos \omega - B_2}},$$

czyli

$$\operatorname{tg} \Theta = \pm \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1) \sin \omega}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega}. \tag{7}$$

Otrzymaliśmy więc wzór na styczną jednego z kątów, jakie tworzą z sobą proste d_1 i d_2. W tym wzorze mamy jednak z prawej strony 2 znaki, $+$ i $-$. Mogłoby więc powstać pytanie, który z tych dwu znaków należy właściwie wziąć. Otóż można wziąć którykolwiek z nich. Albowiem 2 proste tworzą z sobą 2 pary kątów wierzchołkiem przeciwległych, i jeżeli styczna kąta, należącego do jednej z tych par, jest dodatnia, względnie ujemna, to wtedy styczna kąta, należącego do drugiej pary, jest ujemna, względnie dodatnia. Jeden więc znak, jaki mamy we wzorze (7), odnosi się do jednego z kątów, jakie tworzą z sobą proste d_1 i d_2, drugi zaś znak odnosi do drugiego z tych kątów.

Z równości (7) wynika:

$$\cos^2\Theta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\Theta} =$$
$$= \frac{[A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega]^2}{[A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega]^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \sin^2\omega},$$

czyli

$$\cos^2\Theta = \frac{[A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega]^2}{(A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos\omega)(A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos\omega)},$$

a zatem

$$(8) \qquad \cos\Theta =$$
$$= \pm\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos\omega)(A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos\omega)}}.$$

Jeżeli teraz równość (7) pomnożymy przez równość (8), to otrzymamy:

$$(9) \qquad \sin\Theta =$$
$$= \pm\frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)\sin\omega}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos\omega)(A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos\omega)}}.$$

Ponieważ przez kąty, jakie tworzą z sobą 2 proste właściwe, rozumiemy tu kąty, niewiększe od π, przeto wstawy tych kątów nie mogą być ujemne. Możemy więc powiedzieć, że we wzorze (9) należy wziąć taki znak, aby wartość na $\sin\Theta$ nie była ujemną. I dla tej także przyczyny, że $\Theta \leq \pi$, należy we wzorach (7) i (8) brać takie znaki, aby otrzymane z tych wzorów wartości obiedwie były jednocześnie albo nieujemne, albo niedodatnie.

Zamiast wzorów (7), (8), (9) moglibyśmy więc napisać wzory następujące:

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\Theta = \pm \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1| \sin\omega}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega},$$

$$\text{(11)} \qquad \cos\Theta =$$

$$= \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega}{\left|\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 - 2 A_1 B_1 \cos\omega)(A_2^2 + B_2^2 - 2 A_2 B_2 \cos\omega)}\right|},$$

$$\text{(12)} \qquad \sin\Theta =$$

$$= \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1| \sin\omega}{\left|\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 - 2 A_1 B_1 \cos\omega)(A_2^2 + B_2^2 - 2 A_2 B_2 \cos\omega)}\right|},$$

przyczem tutaj już moglibyśmy powiedzieć, że we wzorach (10) i (11) należy brać w obydwu jednocześnie albo znak $+$, albo znak $-$ [we wzorach (11) i (12) objęliśmy kreskami pionowemi również symbol $\sqrt{}$, w celu podkreślenia, że mamy tu na myśli pierwiastek dodatni; zresztą zwykle, jeżeli przed symbolem $\sqrt{}$ nie piszemy żadnego znaku, to już przez to samo rozumiemy, że należy tu wziąć pierwiastek dodatni; kreski pionowe w mianownikach wzorów (11) i (12) nie są więc konieczne].

Rozpatrywane proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin\Theta = 0$. A zatem:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości dwu prostych właściwych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ jest spełnienie równości

$$\text{(13)} \qquad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0.$$

Ten warunek mieliśmy już w § 8 (str. 61) oraz w § 21 (str. 91) (tylko że w § 21 odnosił się on do jakichkolwiek dwu prostych $A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0$ i $A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0$, niekoniecznie do dwu prostych właściwych).

Rozpatrywane proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\Theta = 0$. A zatem:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym prostopadłości dwu prostych właściwych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ jest spełnienie równości

(14) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega = 0.$$

Jeżeli układ płaski spółrzędnych Descartes'a, jakim się tu posługujemy, jest prostokątny, t. zn. jeżeli $\omega = \frac{\pi}{2}$, to wzory (7), (8), (9) sprowadzają się do:

(15) $$\operatorname{tg} \Theta = \pm \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2},$$

(16) $$\cos \Theta = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}},$$

(17) $$\sin \Theta = \pm \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}};$$

wzory (10), (11), (12) sprowadzają się do:

(18) $$\operatorname{tg} \Theta = \pm \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|,$$

(19) $$\cos \Theta = \pm \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}} \right|,$$

(20) $$\sin \Theta = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}} \right|;$$

warunek równoległości, t. zn. równość (13), pozostaje bez zmiany, warunek zaś prostopadłości, t. zn. równość (14), sprowadza się do:

(21) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Zastosowanie. Niechaj będzie dana prosta właściwa d, przedstawiona przez równanie $Ax + By + C = 0$. Prosta właściwa d', przedstawiona przez równanie $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, jest do prostej d prostopadła wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek $A A_1 + B B_1 - (A B_1 + A_1 B) \cos\omega = 0$, czyli $A_1 (B \cos\omega - A) - B_1 (B - A \cos\omega) = 0$, czyli

$$(22) \qquad \frac{B - A\cos\omega}{A_1} = \frac{B\cos\omega - A}{B_1}.$$

Oznaczmy wartość równych sobie stosunków, z których jeden stanowi stronę lewą równości (22), drugi zaś stronę prawą tej równości, przez ϱ. Liczba ϱ jest skończona, ponieważ nie jest możliwe, aby każda z liczb A_1 oraz B_1 była równa 0. Liczba ϱ jest różna od 0, ponieważ nie jest możliwe, aby każda z liczb $B - A\cos\omega$ oraz $B\cos\omega - A$ była równą 0; gdyby bowiem każda z tych dwu liczb była równa 0, to mielibyśmy wtedy $A = B\cos\omega$ oraz $B = A\cos\omega$, a zatem również $A = A\cos^2\omega$ oraz $B = B\cos^2\omega$, stąd zaś (ponieważ przynajmniej jedna z liczb A i B jest różna od 0) wynikałoby, że $\cos^2\omega = 1$, co nie jest możliwe, gdyż kąt ω jest różny zarówno od 0, jak też od π.

Mamy:

$$(23) \qquad B - A\cos\omega = \varrho A_1, \quad B\cos\omega - A = \varrho B_1.$$

Pomnóżmy równanie prostej d' przez ϱ. Otrzymamy wtedy $\varrho A_1 x + \varrho B_1 y + \varrho C_1 = 0$, czyli [równ. (23)] $(B - A\cos\omega) x + (B\cos\omega - A) y + C' = 0$, gdzie symbolem C' oznaczyliśmy iloczyn ϱC_1. Otrzymaliśmy więc:

Równanie każdej prostej właściwej, prostopadłej do prostej właściwej $Ax + By + C = 0$, możemy napisać w postaci $(B - A\cos\omega) x + (B\cos\omega - A) y + C' = 0$.

Jako przypadek szczególny otrzymujemy stąd:

W prostokątnym układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a równanie każdej prostej właściwej, prostopadłej do prostej właściwej $Ax + By + C = 0$, możemy napisać w postaci $Bx - Ay + C' = 0$.

Rozwiążemy teraz zadanie następujące: dana prosta właściwa $Ax + By + C = 0$ oraz punkt właściwy (x_1, y_1), napisać równanie prostej właściwej, przechodzącej przez punkt dany i prostopadłej do prostej danej.

Szukana prosta ma być prostopadła do prostej $Ax + By + C = 0$, jej równanie można więc napisać w postaci $(B - A\cos\omega)x + (B\cos\omega - A)y + C' = 0$. Szukana prosta ma przechodzić przez punkt (x_1, y_1), zatem spółrzędne tego punktu muszą równaniu szukanej prostej czynić zadość, t. zn. musi być spełniona równość $(B - A\cos\omega)x_1 + (B\cos\omega - A)y_1 + C' = 0$, skąd wynika: $C' = -(B - A\cos\omega)x_1 - (B\cos\omega - A)y_1$. Szukaną prostą możemy zatem przedstawić przez równanie $(B - A\cos\omega)x + (B\cos\omega - A)y - [(B - A\cos\omega)x_1 + (B\cos\omega - A)y_1] = 0$, czyli przez równanie $(B - A\cos\omega)(x - x_1) + (B\cos\omega - A)(y - y_1) = 0$.

Gdyby układ spółrzędnych Descartes'a, jakim się tu posługujemy, był prostokątny, to szukaną prostą moglibyśmy przedstawić przez równanie $Bx - Ay - (Bx_1 - Ay_1) = 0$, albo $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$.

§ 31. Odległość punktu właściwego od prostej właściwej. — Dana prosta właściwa d oraz punkt właściwy P. Obliczymy odległość δ punktu P od prostej d.

Oznaczmy spółrzędne punktu P przez x_1, y_1.

Każdą prostą właściwą możemy przedstawić przez równanie w postaci normalnej Hesse'go. Niechaj więc równanie

$$x\cos\varphi + y\cos\psi - p = 0 \tag{1}$$

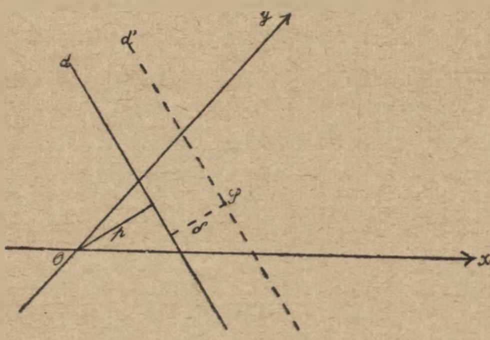
przedstawia prostą d.

Przez punkt P przesuńmy prostą d', równoległą do prostej d. Równaniem prostej d' w postaci normalnej Hesse'go niechaj będzie równanie

$$x\cos\varphi' + y\cos\psi' - p' = 0. \tag{2}$$

Rozpatrzymy wszystkie przypadki, jakie tu zachodzić mogą.

P r z y p a d e k 1-y. Prosta dana d nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, przyczem punkt dany P leży nie z tej samej strony prostej danej d, co początek układu spółrzędnych (t. zn. leży on albo na prostej d, albo też z przeciwnej strony prostej d, aniżeli początek układu spółrzędnych) (rys. 17).



Rys. 17.

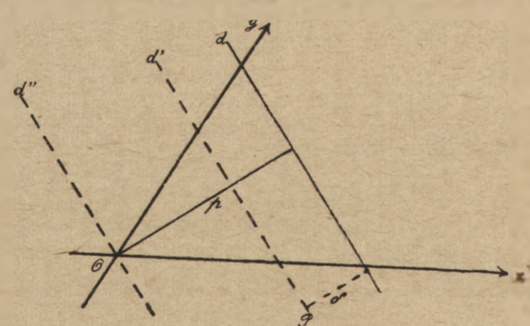
W tym przypadku mamy: $\cos\varphi' = \cos\varphi$, $\cos\psi' = \cos\psi$, $p' = p + \delta$, a zatem równanie prostej d' możemy napisać w ten sposób:

(3) $$x\cos\varphi + y\cos\psi - (p+\delta) = 0.$$

Punkt P do prostej d' należy, jego spółrzędne muszą zatem równaniu tej prostej czynić zadość, t. zn. mamy $x_1\cos\varphi + y_1\cos\psi - (p+\delta) = 0$, skąd wynika:

(4) $$\delta = x_1\cos\varphi + y_1\cos\psi - p.$$

P r z y p a d e k 2-i. Prosta dana d nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, punkt zaś dany P leży nie z przeciwnej strony prostej danej d, aniżeli początek układu spółrzędnych (t. zn. leży on albo na prostej d, albo też z tej samej strony prostej d, co początek układu spółrzędnych), przyczem leży on niezewnątrz (t. zn. wewnątrz lub na obwodzie) pasa,



Ryc. 18.

ograniczonego prostemi d i d'', gdzie d'' oznacza prostą, przechodzącą przez początek układu spółrzędnych i równoległą do prostej danej d (rys. 18).

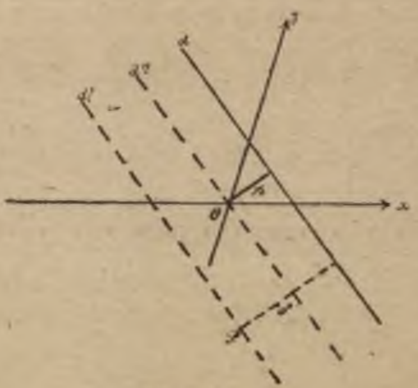
W tym przypadku mamy: $\cos\varphi' = \cos\varphi$, $\cos\psi' = \cos\psi$, $p' = p - \delta$, a zatem równanie prostej d' możemy napisać w ten sposób:

$$x\cos\varphi + y\cos\psi - (p - \delta) = 0. \tag{5}$$

Punkt P do prostej d' należy, jego spółrzędne muszą zatem równaniu tej prostej czynić zadość, t. zn. mamy $x_1\cos\varphi + y_1\cos\psi - (p - \delta) = 0$, skąd wynika:

$$\delta = -(x_1\cos\varphi + y_1\cos\psi - p). \tag{6}$$

P r z y p a d e k 3-i. Prosta dana d nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych, punkt zaś dany P leży z tej samej strony prostej danej, co i początek układu spółrzędnych, przyczem leży on niewewnątrz (t. zn. zewnątrz lub na obwodzie) pasa, ograniczonego prostemi d i d'', gdzie d'' oznacza prostą, przechodzącą przez początek układu spółrzędnych i równoległą do prostej d (rys. 19).



Rys. 19.

W tym przypadku mamy: $\cos\varphi' = -\cos\varphi$, $\cos\psi' = -\cos\psi$, $p' = \delta - p$, a zatem równanie prostej d' możemy napisać w ten sposób:

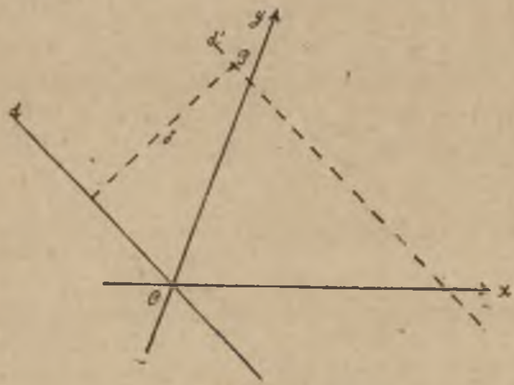
$$-x\cos\varphi - y\cos\psi - (\delta - p) = 0. \tag{7}$$

Punkt P do prostej d' należy, jego spółrzędne muszą zatem równaniu tej prostej czynić zadość, t. zn. mamy $-x_1\cos\varphi - y_1\cos\psi - (\delta - p) = 0$, skąd wynika:

$$\delta = -(x_1\cos\varphi + y_1\cos\psi - p). \tag{8}$$

Przypadek 4-y. Prosta dana d przechodzi przez początek układu spółrzędnych (rys. 20), a zatem $p = 0$, t. zn. równaniem prostej danej d jest równanie

(9) $$x \cos \varphi + y \cos \psi = 0.$$



Rys. 20.

W tym przypadku $p' = \delta$, natomiast pomiędzy wielkościami $\cos \varphi$, $\cos \psi$, $\cos \varphi'$, $\cos \psi'$ zachodzą albo zależności: $\cos \varphi' = \cos \varphi$, $\cos \psi' = \cos \psi$, albo zależności: $\cos \varphi' = - \cos \varphi$, $\cos \psi' = - \cos \psi$.

Równaniem prostej d' w postaci normalnej Hesse'go będzie więc albo równanie

(10) $$x \cos \varphi + y \cos \psi - \delta = 0,$$

albo równanie

(11) $$- x \cos \varphi - y \cos \psi - \delta = 0.$$

Punkt P do prostej d' należy, jego spółrzędne muszą zatem równaniu tej prostej czynić zadość, t. zn. mamy albo $x_1 \cos \varphi + y_1 \cos \psi - \delta = 0$, albo $- x_1 \cos \varphi - y_1 \cos \psi - \delta = 0$, skąd wynika:

albo

(12) $$\delta = x_1 \cos \varphi + y_1 \cos \psi,$$

albo

(13) $$\delta = -(x_1 \cos \varphi + y_1 \cos \psi).$$

Przyczem do wszystkich punktów, położonych z jednej strony prostej d, stosuje się wzór (12), do wszystkich zaś punktów, położonych z drugiej strony prostej d, stosuje się wzór (13) [do punktów, leżących na prostej d, stosuje się zarówno wzór (12), jak też wzór (13), albowiem dla tych punktów $\delta = 0$].

Możemy więc powiedzieć, że w każdym przypadku zachodzi równość:

$$\delta = |x_1 \cos\varphi + y_1 \cos\psi - p| . \tag{14}$$

Otrzymane wyniki upoważniają nas do wypowiedzenia twierdzenia następującego:

Jeżeli w stronę lewą równania w postaci normalnej Hesse'go, przedstawiającego prostą właściwą daną d, zamiast niewiadomych x i y wstawimy spółrzędne punktu właściwego danego P, to wartość bezwzględna wyniku tego podstawienia będzie wyrażała odległość δ punktu danego P od prostej danej d. Przyczem jeżeli prosta dana d nie przechodzi przez początek układu spółrzędnych i punkt P do tej prostej nie należy, to wartość względna wymienionego wyniku będzie dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy punkt dany P leży z przeciwnej strony prostej danej d, aniżeli początek układu spółrzędnych, czy też z tej samej strony, co początek układu spółrzędnych.

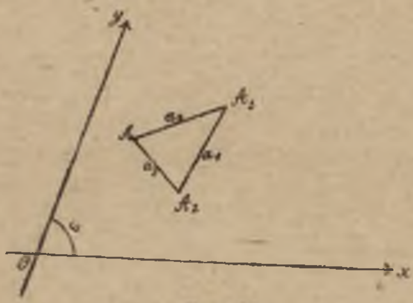
Jeżeli prosta dana d jest przedstawiona przez równanie w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$, to odległość δ punktu danego $P(x_1, y_1)$ od tej prostej możemy wyrazić w sposób następujący (§ 28):

$$\delta = \left| \frac{(Ax_1 + By_1 + C) \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \right| . \tag{15}$$

W razie układu prostokątnego (t. zn. gdy $\omega = \frac{\pi}{2}$) wzór (15) sprowadza się do:

$$\delta = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| . \tag{16}$$

§ 32. Pole trójkąta i wielokąta. — Dane są spółrzędne x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 wierzchołków A_1, A_2, A_3 trójkąta $A_1 A_2 A_3$ (rys. 21). Obliczymy pole tego trójkąta.



Rys. 21.

Boki rozpatrywanego trójkąta, przeciwległe wierzchołkom A_1, A_2, A_3, oznaczmy odpowiednio przez a_1, a_2, a_3. Kąt $A_2 A_1 A_3$ oznaczmy wprost przez A_1.

Możemy powiedzieć, że:

$$(1) \qquad \text{Pole} \triangle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} a_2 a_3 \sin A_1.$$

Mamy (§ 29):

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + 2(x_1 - x_3)(y_1 - y_3)\cos\omega}, \\ a_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}. \end{array} \right.$$

Proste $A_1 A_3$ i $A_1 A_2$ możemy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 22):

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (y_1 - y_3)x - (x_1 - x_3)y + (x_1 y_3 - x_3 y_1) = 0, \\ (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0. \end{array} \right.$$

Kąt A_1 jest jednym z kątów, jakie tworzą z sobą proste $A_1 A_3$ i $A_1 A_2$, mamy przeto [str. 150, wzór (12)]:

$$(4) \quad \sin A_1 = \left\{ \left| (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \right| \sin\omega \right\} :$$
$$: \left\{ [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + 2(x_1 - x_3)(y_1 - y_3)\cos\omega]\,[(x_1 - x_2)^2 + \right.$$
$$\left. + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Z równości (1), (2), (4) wynika:

$$(5) \quad \text{Pole} \triangle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \right| \sin\omega.$$

Mamy:

$$(6) \quad (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) -$$
$$- (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Lecz

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x_2-x_1, y_2-y_1 \\ x_3-x_1, y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & 0 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & 0 \end{vmatrix},$$

jeżeli więc do elementów zarówno drugiego, jak też trzeciego wiersza wyznacznika, stanowiącego stronę prawą równości (7), dodamy elementy wiersza pierwszego, to otrzymamy:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x_2-x_1, y_2-y_1 \\ x_3-x_1, y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix}.$$

Z równości (5), (6), (8) wynika:

$$(9)\qquad \text{Pole } \triangle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \sin\omega \left| \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Kreski pionowe zewnętrzne z prawej strony równości (9) oznaczają, że mamy tam na myśli wartość bezwzględną rozpatrywanego wyznacznika. Te kreski moglibyśmy opuścić tylko wtedy, gdybyśmy napewno wiedzieli, że wartość względna rozpatrywanego wyznacznika jest dodatnia.

Gdybyśmy zbadali cały szereg przypadków szczególnych, to spostrzeglibyśmy, że wartość względna wyznacznika, występującego we wzorze (9), jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy zwrot pęku promieni o wierzchołku S, leżącym gdziekolwiek wewnątrz trójkąta $A_1 A_2 A_3$, określony przez trójkę promieni SA_1, SA_2, SA_3, jest dodatni, czy też ujemny (§ 2). Wyrażamy to, mówiąc, że wartość względna rozpatrywanego wyznacznika jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy obieg trójkąta $A_1 A_2 A_3$ jest dodatni, czy też ujemny. Zresztą nie będziemy się tu tem szczegółowo zajmowali.

Jeżeli chcemy obliczyć pole jakiegoś wielokąta, to rozbijamy ten wielokąt przekątnemi na trójkąty (rys. 22), podanym wyżej sposobem obliczamy pole każdego trójkąta oddzielnie i następnie otrzymane w ten sposób liczby sumujemy.

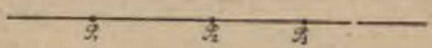
Rys. 22.

Jeżeli układ spółrzędnych Descartes'a, jakim się tu posługujemy, jest prostokątny, to wzór (9) sprowadza się do:

(10) $$\text{Pole } \triangle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} \right| .$$

Rozdział IV.

§ 33. Stosunek podziału 3-ech punktów, leżących na jednej prostej właściwej. — Niechaj będą dane 3 punkty właściwe P_1, P_2, P_3, leżące na jednej prostej właściwej (rys. 23).



Rys. 23.

Rozumiejąc przez stosunek $\frac{P_1P_3}{P_2P_3}$ stosunek odcinków P_1P_3 i P_2P_3, t. zn. stosunek $\frac{P_1P_3}{P_2P_3}$, wzięty ze znakiem $+$ albo $-$ w zależności od tego czy odcinki P_1P_3 i P_2P_3 posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne, ten stosunek nazywamy stosunkiem podziału punktu P_3 względem punktów P_1 i P_2, albo też wprost stosunkiem podziału 3-ech punktów P_1, P_2, P_3, i oznaczamy symbolem (P_1, P_2, P_3).

A więc:

$$(1) \qquad (P_1, P_2, P_3) = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} = \pm \frac{P_1P_3}{P_2P_3},$$

gdzie znak $+$ odnosi się do przypadku, gdy odcinki P_1P_3 i P_2P_3 posiadają zwroty jednakowe, znak $-$ zaś odnosi się do przypadku, gdy odcinki P_1P_3 i P_2P_3 posiadają zwroty przeciwne.

Według tej definicji $(P_2, P_1, P_3) = \frac{P_2P_3}{P_1P_3}$, a zatem:

$$(2) \qquad (P_2, P_1, P_3) = \frac{1}{(P_1, P_2, P_3)}.$$

Jeżeli punkty P_1, P_2, P_3 są różne, to istnieją wtedy trzy możliwości: albo punkty P_1, P_2, P_3 następują po sobie przy jednym zwrocie rozpatrywanej prostej w kolei $P_1\,P_2\,P_3$, zatem przy drugim zwrocie w kolei $P_3\,P_2\,P_1$; albo te punkty następują po sobie przy jednym zwrocie rozpatrywanej prostej w kolei $P_1\,P_3\,P_2$, zatem przy drugim zwrocie w kolei $P_2\,P_3\,P_1$ (w tym przypadku punkt P_3 leży pomiędzy punktami P_1 i P_2); albo, w końcu, wymienione punkty następują po sobie przy jednym zwrocie rozpatrywanej prostej w kolei $P_3\,P_1\,P_2$, zatem przy drugim zwrocie w kolei $P_2\,P_1\,P_3$. W pierwszym i trzecim przypadku odcinki $P_1\,P_3$ i $P_2\,P_3$ mają zwroty jednakowe, zatem stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) posiada wartość dodatnią, w drugim zaś przypadku odcinki $P_1\,P_3$ i $P_2\,P_3$ mają zwroty przeciwne, zatem stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) posiada wartość ujemną. Możemy to wyrazić w sposób następujący: stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) posiada wartość u j e m n ą wtedy, gdy punkt P_3 leży p o m i ę d z y punktami P_1 i P_2, wartość zaś d o d a t n i ą wtedy, gdy punkt P_3 pomiędzy punktami P_1 i P_2 n i e leży.

Jeżeli punkt P_3 nakrywa punkt P_1, stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) jest równy 0, jeżeli zaś punkt P_3 nakrywa punkt P_2, stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) jest równy $+\infty$. Jeżeli, w końcu, wszystkie 3 punkty P_1, P_2, P_3 nakrywają się, stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) posiada wartość nieoznaczoną.

Jeżeli punkty P_1 i P_2 nakrywają się, to każdy punkt właściwy prostej $P_1\,P_2$, różny od nakrywających się z sobą punktów P_1 i P_2, posiada względem tych punktów stosunek podziału równy 1.

Czy w razie, gdy punkty P_1 i P_2 są różne, istnieje na prostej $P_1\,P_2$ taki punkt właściwy P_3, którego stosunek podziału względem punktów P_1 i P_2 posiadałby wartość 1? Stosunek podziału (P_1, P_2, P_3) byłby równy 1 wtedy, gdyby punkt P_3 nie leżał pomiędzy punktami P_1 i P_2 i był od każdego z nich jednakowo odległy. Na prostej zaś $P_1\,P_2$ istnieje jeden tylko punkt właściwy, jednakowo odległy od punktów P_1 i P_2, którym jest środek odcinka o punktach krańcowych P_1 i P_2; ten punkt leży zatem pomiędzy punktami P_1 i P_2, a więc jego stosunek podziału względem punktów P_1 i P_2 jest równy —1. Możemy więc powiedzieć, że na prostej $P_1 P_2$ niema takiego punktu właściwego P_3, którego stosunek podziału względem punktów P_1 i P_2 byłby równy 1.

Umówmy się, że za stosunek podziału punktu niewłaściwego jakiejś prostej właściwej względem jakichkolwiek dwu punktów właściwych tej prostej będziemy uważali 1.

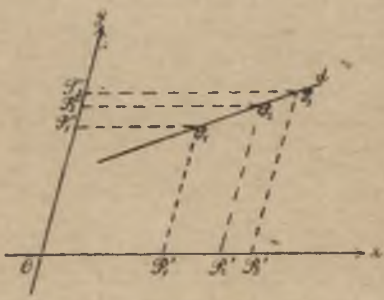
Ta umowa odpowiada uważaniu punktu niewłaściwego jakiejś prostej właściwej za punkt, którego odległość od każdego punktu właściwego tej prostej jest nieskończenie wielka (str. 8). Albowiem np. w przypadku, przedstawionym na rys. 23, możemy powiedzieć, że $(P_1, P_2, P_3) = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} = \frac{|P_1 P_3|}{|P_2 P_3|} = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} = \frac{P_1 P_2 + P_2 P_3}{P_2 P_3} = \frac{P_1 P_2}{P_2 P_3} + 1$, gdyby więc odległość punktu P_3 od punktu P_2 była nieskończenie wielka, to wtedy byłoby $\frac{P_1 P_2}{P_2 P_3} = 0$, a zatem $(P_1, P_2, P_3) = 1$.

Z definicji stosunku podziału punktu niewłaściwego względem dwu punktów właściwych wynika, że równość (2) zachodzi również wtedy, gdy punkt P_3 jest punktem niewłaściwym.

Uwaga. Zamiast uważać stosunek podziału 3-ech punktów właściwych P_1, P_2, P_3, leżących na jednej prostej właściwej, za iloraz samych odcinków $P_1 P_3$ i $P_2 P_3$, wzięty z odpowiednim znakiem, możemy, oczywiście, uważać ten stosunek za iloraz liczb, wyrażających długości tych odcinków przy dowolnie przyjętej jednostce długości, wzięty z odpowiednim znakiem.

Moglibyśmy też postąpić jeszcze inaczej, a mianowicie w sposób następujący: przyjąwszy jeden zwrot rozpatrywanej prostej, t. zn. prostej, na której leżą punkty P_1, P_2, P_3, za dodatni, drugi zaś za ujemny, i ustaliwszy pewną jednostkę długości, każdemu z odcinków $P_1 P_3$ i $P_2 P_3$ moglibyśmy podporządkować liczbę, której wartość bezwzględna wyraża długość odcinka i która jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy odcinek posiada zwrot dodatni, czy też ujemny, a wtedy stosunkiem podziału (P_1, P_2, P_3) moglibyśmy nazwać wprost iloraz liczb, podporządkowanych odcinkom P_1P_3 i P_2P_3.

§ 34. Spółrzędne oraz równanie punktu, którego stosunek podziału względem dwu danych punktów właściwych jest dany. — Niechaj będą dane 3 różne punkty właściwe $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, leżące na jednej prostej właściwej d. Przypuśćmy, że prosta d nie jest równoległa do żadnej z osi spółrzędnych (rys. 24).



Rys. 24.

Przesuńmy przez punkty P_2, P_2, P_3 trzy proste, równoległe do osi y-ów, których punkty przecięcia się z osią x-ów oznaczmy odpowiednio przez P_1', P_2', P_3', oraz trzy proste, równoległe do osi x-ów, których punkty przecięcia się z osią y-ów oznaczmy odpowiednio przez P_1'', P_2'', P_3''. Na mocy znanego twierdzenia z Geometrji elementarnej możemy powiedzieć, że:

$$\left|\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}\right| = \left|\frac{\overline{P_1'P_3'}}{\overline{P_2'P_3'}}\right| \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}\right| = \left|\frac{\overline{P_1''P_3''}}{\overline{P_2''P_3''}}\right|,$$

czyli

$$(1)\quad |(P_1, P_2, P_3)| = |(P_1', P_2', P_3')| \quad \text{oraz} \quad |(P_1, P_2, P_3)| = |(P_1'', P_2'', P_3'')|.$$

Z drugiej znów strony koleje, w jakich następują po sobie punkty P_1', P_2', P_3' osi x-ów, względnie punkty P_1'', P_2'', P_3'' osi y-ów, są takie same, jak koleje, w jakich następują po sobie punkty P_1, P_2, P_3 prostej d (str. 16 i 17). Jeżeli więc punkt P_3 leży pomiędzy punktami P_1 i P_2, to tak samo punkt P_3' leży pomiędzy punktami P_1' i P_2' oraz punkt P_3'' leży pomiędzy punktami P_1'' i P_2''. Jeżeli zaś punkt P_3 pomiędzy punktami P_1 i P_2 nie leży, to tak samo punkt P_3' nie leży pomiędzy punktami P_1' i P_2' oraz punkt P_3'' nie leży pomiędzy punktami P_1'' i P_2''. Stosunki podziału (P_1, P_2, P_3), (P_1', P_2', P_3'), (P_1'', P_2'', P_3'') są więc jednakowego znaku, a zatem z równości (1) wynika:

$$(2)\quad (P_1, P_2, P_3) = (P_1', P_2', P_3') \text{ oraz } (P_1, P_2, P_3) = (P_1'', P_2'', P_3'').$$

Wartość stosunku podziału (P_1, P_2, P_3) oznaczmy przez μ. Mamy więc:

(3) $$(P_1, P_2, P_3) = (P_1', P_2', P_3') = (P_1'', P_2'', P_3'') = \mu.$$

Istnieją tu 2 możliwości: albo punkt P_3 nie leży pomiędzy punktami P_1 i P_2, albo też leży. Każdą z tych dwu możliwości rozpatrzymy oddzielnie.

M o ż l i w o ś ć 1-a. Punkt P_3 nie leży pomiędzy punktami P_1 i P_2. Wtedy punkt P_3' nie leży pomiędzy punktami P_1' i P_2'. Możemy więc powiedzieć, że np. przy zwrocie dodatnim osi x-ów punkty P_1', P_2', P_3' następują po sobie w jednej z 4-ech kolei: $P_1' P_2' P_3'$, $P_2' P_1' P_3'$, $P_3' P_1' P_2'$, $P_3' P_2' P_1'$. W razie jednej z dwu pierwszych wymienionych kolei mamy równości: $|P_1' P_3'| = x_3 - x_1$ oraz $|P_2' P_3'| = x_3 - x_2$; w razie zaś jednej z dwu ostatnich wymienionych kolei mamy równości: $|P_1' P_3'| = x_1 - x_3$ oraz $|P_2' P_3'| = x_2 - x_3$. Bez względu więc na to, w której z 4-ech wymienionych wyżej kolei punkty P_1', P_2', P_3' przy zwrocie dodatnim osi x-ów następują po sobie, zawsze mamy równość: $|\mu| = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$. Lecz w rozpatrywanym przypadku μ posiada wartość dodatnią, a zatem $|\mu| = \mu$, skąd wynika:

(4) $$\mu = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}.$$

Za pomocą rozumowania zupełnie analogicznego, zastosowanego do punktów P_1'', P_2'', P_3'', otrzymamy:

(5) $$\mu = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

M o ż l i w o ś ć 2-a. Punkt P_3 leży pomiędzy punktami P_1 i P_2. Wtedy punkt P_3' leży pomiędzy punktami P_1' i P_2'. Możemy więc powiedzieć, że np. przy zwrocie dodatnim osi x-ów punkty P_1', P_2', P_3' następują po sobie w jednej z dwu kolei: $P_1' P_3' P_2'$ albo $P_2' P_3' P_1'$. W razie pierwszej z wymienionych kolei mamy równości $|P_1' P_3'| = x_3 - x_1$ oraz $|P_2' P_3'| = x_2 - x_3$, w razie zaś drugiej z tych kolei mamy równości $|P_1' P_3'| = x_1 - x_3$ oraz $|P_2' P_3'| = x_3 - x_2$. Bez względu więc na to, w której z dwu wymienionych kolei punkty P_1', P_2', P_3' przy zwrocie dodatnim osi x-ów następują po sobie, zawsze mamy równość: $\mu = -\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$. Lecz w rozpatrywanym obecnie przypadku μ posiada wartość ujemną, a zatem $\mu = -\mu$, skąd wynika $-\mu = -\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$, czyli $\mu = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$, t. zn. znów równość (4).

Za pomocą rozumowania zupełnie analogicznego, zastosowanego do punktów P_1'', P_2'', P_3'', otrzymamy znów równość (5).

Jak więc widzimy, równości (4) i (5) zachodzą w obydwu przypadkach.

Z równości (4) oraz (5) wynika $\mu(x_2 - x_3) = x_1 - x_3$ oraz $\mu(y_2 - y_3) = y_1 - y_3$, czyli $(1 - \mu)x_3 = x_1 - \mu x_2$ oraz $(1 - \mu)y_3 = y_1 - \mu y_2$, skąd otrzymujemy:

$$x_3 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}, \quad y_3 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}. \tag{6}$$

Równości (6) otrzymaliśmy w założeniu, że prosta, na której leżą punkty P_1, P_2, P_3, nie jest równoległa do żadnej z osi spółrzędnych. Gdyby zaś wymieniona prosta była równoległa do jednej z osi spółrzędnych, np. do osi x-ów, to w takim razie do punktów P_1', P_2', P_3' podane wyżej rozumowanie mogłoby być zastosowane, a zatem pierwsza z pośród równości (6) byłaby spełniona; druga z pośród równości (6), jak to łatwo możemy spostrzec bezpośrednio, też byłaby spełniona, albowiem w rozpatrywanym przypadku $y_1 = y_2 = y_3$.

Punkty P_1, P_2, P_3 uważaliśmy za różne. Gdyby jednak punkt P_3 nakrywał punkt P_1, t. zn. gdyby było $x_3 = x_1$, $y_3 = y_1$, $\mu = 0$, to równości (6) byłyby spełnione; gdyby zaś punkt P_3 nakrywał punkt P_2, t. zn. gdyby było $x_3 = x_2$, $y_3 = y_2$, $\mu = +\infty$, to byłyby spełnione równości (6), napisane w postaci:

$$x_3 = \frac{\frac{1}{\mu} x_1 - x_2}{\frac{1}{\mu} - 1}, \quad y_3 = \frac{\frac{1}{\mu} y_1 - y_2}{\frac{1}{\mu} - 1}. \tag{7}$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli P_1 i P_2 są dwoma różnymi punktami właściwymi o spółrzędnych Descartes'a x_1, y_1 i x_2, y_2, to spółrzędnemi Descartes'a punktu właściwego P, należącego do prostej $P_1 P_2$ i posiadającego względem punktów P_1 i P_2 stosunek podziału μ, są liczby $\frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}$ i $\frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}$ w przypadku, gdy μ jest liczbą skończoną, liczby zaś $\frac{\frac{1}{\mu} x_1 - x_2}{\frac{1}{\mu} - 1}$ i $\frac{\frac{1}{\mu} y_1 - y_2}{\frac{1}{\mu} - 1}$ w przypadku, gdy μ jest liczbą różną od 0.

W przypadku, gdy μ jest liczbą skończoną, za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu właściwego P, o którym mowa w twierdzeniu ostatniem, możemy uważać liczby $x_1 - \mu x_2$, $y_1 - \mu y_2$, $1 - \mu$, w przypadku znów, gdy μ jest liczbą różną od 0, za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu P możemy uważać liczby $\frac{1}{\mu} x_1 - x_2$, $\frac{1}{\mu} y_1 - y_2$, $\frac{1}{\mu} - 1$.

Punkt P, o którym mowa w twierdzeniu ostatniem, jest punktem właściwym, a zatem $\mu \neq 1$. Zobaczmy, co przedstawia trójka liczb $x_1 - \mu x_2$, $y_1 - \mu y_2$, $1 - \mu$, względnie $\frac{1}{\mu} x_1 - x_2$, $\frac{1}{\mu} y_1 - y_2$, $\frac{1}{\mu} - 1$, wtedy, gdy $\mu = 1$, innemi słowy, co przedstawia trójka liczb $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, 0. Ta trójka przedstawia (str. 64) punkt niewłaściwy prostej właściwej $(y_1 - y_2)\, x - (x_1 - x_2)\, y + C = 0$, gdzie C oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą skończoną. Lecz wymieniona prosta właściwa jest równoległa do prostej właściwej $(y_1 - y_2)\, x - (x_1 - x_2) y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$, łączącej punkty P_1 i P_2 (§ 22, str. 98), a zatem trójka liczb $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, 0 przedstawia punkt niewłaściwy prostej $P_1 P_2$. Ponieważ zaś stosunkiem podziału punktu niewłaściwego prostej $P_1 P_2$ względem punktów P_1 i P_2 jest właśnie 1, mamy przeto twierdzenie następujące:

Jeżeli P_1 i P_2 są dwoma różnymi punktami właściwymi o spółrzędnych Descartes'a x_1, y_1 i x_2, y_2, to za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu P (właściwego lub niewłaściwego), należącego do prostej $P_1 P_2$ i posiadającego względem punktów P_1 i P_2 stosunek podziału μ, możemy uważać liczby $x_1 - \mu x_2$, $y_1 - \mu y_2$, $1 - \mu$ w przypadku, gdy μ jest liczbą skończoną, liczby zaś $\frac{1}{\mu} x_1 - x_2$, $\frac{1}{\mu} y_1 - y_2$, $\frac{1}{\mu} - 1$ w przypadku, gdy μ jest liczbą różną od 0.

Za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktów właściwych $P_1(x_1, y_1)$ oraz $P_2(x_2, y_2)$ możemy uważać trójki liczb $x_1, y_1, 1$ oraz $x_2, y_2, 1$, zatem te punkty możemy przedstawić przez równanie (§ 15):

(8) $$x_1 U + y_1 V + W = 0,\ x_2 U + y_2 V + W = 0.$$

Punkt zaś P, o którym mowa w twierdzeniu ostatniem, możemy przedstawić przez równanie $(x_1 - \mu x_2) U + (y_1 - \mu y_2) V + (1 - \mu) W = 0$, względnie $\left(\frac{1}{\mu} x_1 - x_2\right) U + \left(\frac{1}{\mu} y_1 - y_2\right) V + \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) = 0$, czyli

(9) $$x_1 U + y_1 V + W - \mu (x_2 U + y_2 V + W) = 0,$$

względnie

(10) $$\frac{1}{\mu} (x_1 U + y_1 V + W) - (x_2 U + y_2 V + W) = 0.$$

Otrzymaliśmy więc twierdzenie:

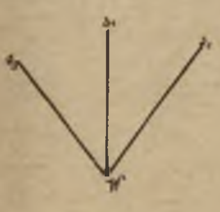
Jeżeli równania $m_1(U, V, W) = x_1 U + y_1 V + W = 0$ oraz $m_2(U, V, W) = x_2 U + y_2 V + W = 0$ przedstawiają 2 punkty właściwe różne P_1 oraz P_2, to punkt P, należący do prostej $P_1 P_2$ i posiadający względem punktów P_1 i P_2 stosunek podziału μ, możemy przedstawić przez równanie $m_1(U, V, W) - \mu . m_2(U, V, W) = 0$ w razie, gdy μ jest liczbą skończoną, przez równanie zaś $\frac{1}{\mu} . m_1(U,V,W) - m_2(U,V,W) = 0$ w razie, gdy μ jest liczbą różną od 0.

Przypadkiem szczególnym tego twierdzenia jest twierdzenie następujące:

Jeżeli równania $m_1(u, v, 1) = x_1 u + y_1 v + 1 = 0$ oraz $m_2(u, v, 1) = x_2 u + y_2 v + 1 = 0$ przedstawiają 2 punkty właściwe różne P_1 i P_2 (z których żaden nie nakrywa początku układu spółrzędnych), to punkt P, różny od początku układu spółrzędnych, należący do prostej $P_1 P_2$ i posiadający względem punktów P_1 i P_2 stosunek podziału μ, możemy przedstawić przez równanie $m_1(u, v, 1) - \mu \cdot m_2(u, v, 1) = 0$ w razie, gdy μ jest liczbą skończoną, przez równananie zaś $\frac{1}{\mu} \cdot m_1(u, v, 1) - m_2(u, v, 1) = 0$ w razie, gdy μ jest liczbą różną od 0.

Uwaga. Trójmian ogólny jednorodny stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi U, V, W, t. zn. trójmian $AU + BV + CW$, oznaczaliśmy w § 25, i tak samo nadal będziemy oznaczali, symbolem $M(U, V, W)$. Jeżeli zaś w tym trójmianie spółczynnik przy W, t. zn. spółczynnik C, jest równy 1, to, chcąc to specjalnie podkreślić, będziemy pisali w wymienionym symbolu na oznaczenie trójmianu zamiast dużej litery M małą literę m, t. zn. rozpatrywany trójmian będziemy oznaczali symbolem $m(U, V, W)$, co zresztą już w twierdzeniach § niniejszego stosowaliśmy.

§ 35. Stosunek wstaw 3-ch promieni, wychodzących z jednego punktu właściwego. — Niechaj będą dane 3 promienie s_1, s_2, s_3, wychodzące z jednego punktu właściwego W (rys. 25). Jeden z kątów, dla których pierwszem ramieniem jest promień s_1 oraz drugim ramieniem jest promień s_3, oznaczmy przez $s_1 s_3$, jeden zaś z kątów, dla których pierwszem ramieniem jest promień s_2 oraz drugiem ramieniem jest promień s_3, oznaczmy przez $s_2 s_3$.



Rys. 25.

Rozumiejąc przez stosunek $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3}$ iloraz wstaw kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$, t. zn. iloraz $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3}$, wzięty ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, czy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne, ten stosunek nazywamy stosunkiem wstaw promienia s_3 względem promieni s_1 i s_2, albo też wprost stosunkiem wstaw 3-ch promieni s_1, s_2, s_3, i oznaczamy symbolem (s_1, s_2, s_3).

A więc:

$$(1) \qquad (s_1, s_2, s_3) = \frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3} = \pm \frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3},$$

gdzie znak $+$ odnosi się do przypadku, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, znak $-$ zaś odnosi się do przypadku, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty przeciwne.

Pierwszem pytaniem, jakie narzuca się teraz samo przez się, jest pytanie następujące: czy wartość stosunku wstaw (s_1, s_2, s_3) trzech promieni s_1, s_2, s_3 zależy od wyboru kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$, czy też nie zależy.

Oznaczmy przez α, względnie przez β, jeden z kątów mniejszych od 2π, dla których pierwszem ramieniem jest promień s_1, względnie s_2, oraz drugiem ramieniem jest promień s_3. Każdy kąt $s_1 s_3$, posiadający taki sam zwrot, jak kąt α, nie wyłączając samego kąta α, możemy przedstawić w postaci $2k\pi + \alpha$, gdzie k oznacza liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną; każdy zaś kąt $s_1 s_3$, posiadający zwrot przeciwny, aniżeli kąt α, możemy przedstawić w postaci $2k\pi - \alpha$, gdzie k oznacza liczbę rzeczywistą całkowitą dodatnią w razie, gdy $\alpha \neq 0$, natomiast liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną w razie, gdy $\alpha = 0$. Analogicznie, każdy kąt $s_2 s_3$, posiadający taki sam zwrot, jak kąt β, nie wyłączając samego kąta β, możemy przedstawić w postaci $2k\pi + \beta$, gdzie k oznacza liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną; każdy zaś kąt $s_2 s_3$, posiadający zwrot przeciwny, aniżeli kąt β, możemy przedstawić w postaci $2k\pi - \beta$, gdzie k oznacza liczbę rzeczywistą całkowitą dodatnią w razie, gdy $\beta \neq 0$, natomiast liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną w razie, gdy $\beta = 0$.

Rozpatrzymy teraz wszystkie przypadki, jakie zachodzić mogą.

P r z y p a d e k 1 - y. Kąt $s_1 s_3$ posiada taki sam zwrot, jak kąt α, oraz kąt $s_2 s_3$ posiada taki sam zwrot, jak kąt β. W tym przypadku $\sphericalangle s_1 s_3 = 2k' \pi + \alpha$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 = 2k'' \pi + \beta$, a zatem $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Na mocy więc równości (1) możemy napisać:

$$(s_1, s_2, s_3) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{2}$$

gdzie znak + należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, znak — zaś należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty przeciwne. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są odpowiednio takie same, jak zwroty kątów α i β, przeto możemy powiedzieć, że we wzorze (2) należy wziąć znak + albo — w zależności od tego, czy kąty α i β posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne.

P r z y p a d e k 2 - i. Kąt $s_1 s_3$ posiada taki sam zwrot, jak kąt α, kąt zaś $s_2 s_3$ posiada zwrot przeciwny, aniżeli kąt β. W tym przypadku $\sphericalangle s_1 s_3 = 2k' \pi + \alpha$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 = 2k'' \pi - \beta$, a zatem $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Na mocy więc równości (1) możemy napisać:

$$(s_1, s_2, s_3) = \mp \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{3}$$

gdzie znak — należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, znak + zaś wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty przeciwne. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są jednakowe, gdy zwroty kątów α i β są wzajemnie przeciwne, oraz zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są wzajemnie przeciwne, gdy zwroty kątów α i β są jednakowe, przeto możemy powiedzieć, że w rozpatrywanym przypadku zachodzi równość:

$$(s_1, s_2, s_3) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{4}$$

gdzie należy wziąć znak $+$ albo — w zależności od tego, czy kąty α i β posiadają zwroty jednakowe, czy jeż przeciwne.

Przypadek 3-ci. Kąt $s_1 s_3$ posiada zwrot przeciwny, aniżeli kąt α, kąt zaś $s_2 s_3$ posiada taki sam zwrot, jak kąt β. W tym przypadku $\sphericalangle s_1 s_3 = 2k' \pi - \alpha$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 = 2k'' \pi + \beta$, a zatem $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Na mocy więc równości (1) możemy napisać:

$$(s_1, s_2, s_3) = \mp \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{5}$$

gdzie znak — należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, znak $+$ zaś wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty przeciwne. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są jednakowe, gdy zwroty kątów α i β są wzajemnie przeciwne, oraz zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są wzajemnie przeciwne, gdy zwroty kątów α i β są jednakowe, przeto możemy powiedzieć że w rozpatrywanym przypadku zachodzi równość:

$$(s_1, s_2, s_3) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{6}$$

gdzie należy wziąć znak $+$ albo — w zależności od tego, czy kąty α i β posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne.

Przypadek 4-y. Kąt $s_1 s_3$ posiada zwrot przeciwny, aniżeli kąt α, oraz kąt $s_2 s_3$ posiada zwrot przeciwny, aniżeli kąt β. W tym przypadku $\sphericalangle s_1 s_3 = 2k' \pi - \alpha$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 = 2k'' \pi - \beta$, a zatem $\frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Na mocy więc równości (1) możemy napisać:

$$(s_1, s_2, s_3) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{7}$$

gdzie znak $+$ należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty jednakowe, znak — zaś należy wziąć wtedy, gdy kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ posiadają zwroty przeciwne. A ponieważ w rozpatrywanym przypadku zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są jednakowe, gdy są jednakowe zwroty kątów α i β, oraz zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są wzajemnie przeciwne, gdy są wzajemnie przeciwne zwroty kątów α i β, przeto możemy powiedzieć że w rozpatrywanym przypadku należy wziąć we wzorze (7) znak $+$ albo $-$ w zależności od tego, czy kąty α i β posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne.

Otrzymaliśmy więc, iż bez względu na to, który z pośród kątów, posiadających promień s_1 jako ramię pierwsze oraz promień s_3 jako ramię drugie, weźmiemy jako kąt $s_1 s_3$, i który z pośród kątów, posiadających promień s_2 jako ramię pierwsze oraz promień s_3 jako ramię drugie, weźmiemy jako kąt $s_2 s_3$, zawsze będziemy mieli:

$$(s_1, s_2, s_3) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \tag{8}$$

gdzie należy wziąć znak $+$ albo $-$ w zależności od tego, czy kąty α i β posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne.

A zatem wartość stosunku wstaw (s_1, s_2, s_3) od wyboru kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ nie zależy.

Na mocy definicji stosunku wstaw 3-ch promieni możemy napisać: $(s_2, s_1, s_3) = \frac{\sin s_2 s_3}{\sin s_1 s_3}$. Z tej równości oraz z równości (1) wynika:

$$(s_2, s_1, s_3) = \frac{1}{(s_1, s_2, s_3)}. \tag{9}$$

Rys. 26.

Niechaj z jednego punktu właściwego W wychodzą 2 promienie s_1 i s_2, różne i nie leżące na jednej prostej (rys. 26).

Oznaczmy przez s_1', względnie s_2', promień, którego początkiem jest punkt W i który posiada zwrot przeciwny, aniżeli promień s_1, względnie s_2.

Jeżeli promień s_3 nakrywa promień s_1 lub s_1', to stosunek wstaw (s_1, s_2, s_3) jest równy 0. Jeżeli zaś promień s_3 nakrywa promień s_2 lub s_2', to stosunek wstaw $(s_1 s_2, s_3)$ jest równy $\pm \infty$.

Przy wierzchołku W mamy 4 kąty mniejsze od π, mianowicie kąty $s_1 s_2, s_2 s_1', s_1' s_2', s_2' s_1$, z których każde 2 sąsiednie, t. zn. kąty $s_1 s_2$ i $s_2 s_1'$, albo $s_2 s_1'$ i $s_1' s_2'$, albo $s_1' s_2'$ i $s_2' s_1$, albo $s_2' s_1$ i $s_1 s_2$, posiadają jedno ramię wspólne i które, wzięte wszystkie razem, wypełniają cały pęk promieni o wierzchołku W. Kąty $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$, jak też kąty $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$, tworzą parę kątów wierzchołkiem przeciwległych.

Niechaj teraz będzie dany jakiś promień s_3, dla którego punkt W jest początkiem i który jest różny od każdego z 4-ech promieni s_1, s_2, s_1', s_2'. Przy obliczaniu stosunku wstaw (s_1, s_2, s_3) przez kąt $s_1 s_3$, względnie $s_2 s_3$, możemy rozumieć jakikolwiek kąt, którego pierwszem ramieniem jest promień s_1, względnie s_2, drugiem zaś ramieniem jest promień s_3. Przyjmijmy więc np. jako kąty $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ kąty o zwrocie $s_1 s_2 s_1'$, mniejsze od 2π. Ponieważ wtedy zwroty kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$ są jednakowe, przeto zachodzi równość:

$$(10) \qquad (s_1, s_2, s_3) = \frac{\sin s_1 s_3}{\sin s_2 s_3}.$$

Jeżeli promień s_3 leży wewnątrz pierwszego z pośród 4-ech wymienionych wyżej kątów, wypełniających pęk promieni o wierzchołku W, t. zn. wewnątrz kąta $s_1 s_2$, to wtedy $\sphericalangle s_1 s_3 < \pi$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 > \pi$, zatem $(s_1, s_2, s_3) < 0$.

Jeżeli promień s_3 leży wewnątrz drugiego z pośród 4-ech wymienionych wyżej kątów, t. zn. wewnątrz kąta $s_2 s_1'$, to $\sphericalangle s_1 s_3 < \pi$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 < \pi$, zatem $(s_1, s_2, s_3) > 0$.

Jeżeli promień s_3 leży wewnątrz trzeciego z pośród 4-ech wymienionych wyżej kątów, t. zn. wewnątrz kąta $s_1' s_2'$, to $\sphericalangle s_1 s_3 > \pi$ oraz $\sphericalangle s_2 s_3 < \pi$, zatem $(s_1, s_2, s_3) < 0$.

W końcu, jeżeli promień s_3 leży wewnątrz ostatniego z pośród 4-ech wymienionych wyżej kątów, t. zn. wewnątrz kąta $s_2' s_1$, to $\sphericalangle s_1 s_3 > \pi$, oraz $\sphericalangle s_2 s_3 > \pi$, zatem $(s_1, s_2, s_3) > 0$.

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli promień s_3 leży wewnątrz kąta s_1, s_2 albo też wewnątrz kąta $s_1' s_2'$, to stosunek wstaw (s_1, s_2, s_3) posiada wartość ujemną, jeżeli zaś promień s_3 leży wewnątrz kąta $s_2 s_1'$ albo też wewnątrz kąta $s_2' s_1$, to stosunek wstaw (s_1, s_2, s_3) posiada wartość dodatnią.

Stąd więc wynika, że jeżeli promień s_3 jest dwusieczną kąta $s_1 s_2$ albo też kąta $s_1' s_2'$, to $(s_1, s_2, s_3) = -1$, jeżeli zaś promień s_3 jest dwusieczną kąta $s_2 s_1'$ albo też kąta $s_2' s_1$, to $(s_1, s_2, s_3) = 1$.

Jeżeli promień s_2 nakrywa promień s_1 (a zatem promień s_2' nakrywa promień s_1'), to dla każdego promienia s_3, wychodzącego z punktu W i różnego od promieni s_1 i s_1' (lub s_2 i s_2'), mamy $(s_1, s_2, s_3) = 1$, dla promienia zaś s_3, nakrywającego promień s_1 (lub s_2) albo też promień s_1' (lub s_2'), wartość stosunku wstaw (s_1, s_2, s_3) jest nieoznaczona.

Jeżeli promień s_2 nakrywa promień s_1' (a zatem promień s_2' nakrywa promień s_1), to dla każdego promienia s_3, wychodzącego z punktu W i różnego od promieni s_1 i s_1' (lub s_2' i s_2), mamy $(s_1, s_2, s_3) = -1$, dla promienia zaś s_3, nakrywającego promień s_1 (lub s_2') albo też promień s_1' (lub s_2), wartość stosunku wstaw (s_1, s_2, s_3) jest nieoznaczona.

Oznaczmy przez s_3' promień, którego początkiem jest punkt W i który posiada zwrot przeciwny, aniżeli promień s_3. Jeżeli przez kąty $s_1 s_3, s_2 s_3, s_1' s_3, s_2' s_3, s_1 s_3', s_2 s_3'$ będziemy rozumieli kąty o tym samym zwrocie, np. o zwrocie $s_1 s_2 s_1'$, mniejsze od 2π, to będziemy mogli powiedzieć, że kąt $s_1' s_3$, względnie $s_2' s_3$, względnie $s_1 s_3'$, względnie $s_2 s_3'$ jest niewiększy lub też niemniejszy od π w zależności od tego, czy kąt $s_1 s_3$, względnie $s_2 s_3$, względnie $s_1 s_3$, względnie $s_2 s_3$ jest niemniejszy lub też niewiększy od π. Stąd więc wynika, że:

$$
(11) \qquad \left| \begin{array}{l} (s_1', s_2, s_3) = -(s_1, s_2, s_3), \\ (s_1, s_2', s_3) = -(s_1, s_2, s_3), \\ (s_1, s_2, s_3') = (s_1, s_2, s_3). \end{array} \right.
$$

Z równości (11) wynika znów:

$(s_1', s_2', s_3) = -(s_1', s_2, s_3) = (s_1, s_2, s_3)$; $(s_1', s_2, s_3') = -(s_1, s_2, s_3') = -(s_1, s_2, s_3)$; $(s_1, s_2', s_3') = -(s_1, s_2, s_3') = -(s_1, s_2, s_3)$; $(s_1', s_2', s_3') = (s_1', s_2', s_3) = (s_1, s_2, s_3)$.

Skutkiem tego, że $(s_1, s_2, s_3') = (s_1, s_2, s_3)$, t. zn., że każdy z promieni s_3 i s_3' posiada względem promieni s_1 i s_2 taki sam stosunek wstaw, stosunek wstaw (s_1, s_2, s_3) lub (s_1, s_2, s_3')

nazywamy też stosunkiem wstaw prostej d_3, zawierającej promienie s_3 i s_3', względem promieni s_1 i s_2 i oznaczamy też symbolem (s_1, s_2, d_3).

Jeżeli 3 proste właściwe d_1, d_2, d_3 posiadają punkt właściwy W wspólny, to stosunkiem wstaw prostej d względem prostych d_1 i d_2, posiadających dane zwroty, nazywamy stosunek wstaw prostej d względem promieni s_1 i s_2, które wychodzą z punktu W, które są zawarte odpowiednio w prostych d_1 i d_2 i których zwrotami są odpowiednio dane zwroty prostych d_1 i d_2. Ten stosunek wstaw oznaczamy symbolem (d_1, d_2, d).

Jeżeli więc są dane tylko proste d_1, d_2, d, to symbol (d_1, d_2, d) żadnego znaczenia nie posiada. Ten symbol posiada znaczenie dopiero wówczas, gdy są dane również zwroty prostych d_1 i d_2.

Z pierwszych dwu z pośród równości (11) wynika, że:

Stosunek wstaw (d_1, d_2, d) zmieni znak, nie zmieniając jednak przytem swej wartości bezwzględnej, gdy zmienimy zwrot jednej z prostych d_1 i d_2 na przeciwny.

Jednoczesna zatem zmiana zwrotów prostych d_1 i d_2 na przeciwne nie wywiera na stosunek wstaw (d_1, d_2, d) żadnego wpływu.

Uwaga. Zamiast definjować stosunek wstaw 3-ech promieni s_1, s_2, s_3, wychodzących z jednego punktu właściwego, jako iloraz wstaw kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$, wzięty ze znakiem $+$ lub — w zależności od tego, czy te kąty posiadają zwroty jednakowe, czy też przeciwne, moglibyśmy postąpić inaczej, a mianowicie: przyjąwszy jeden zwrot pęku, zawierającego promienie s_1, s_2, s_3, za dodatni, drugi zaś za ujemny, i umówiwszy się, iż kąty o zwrotach dodatnich będziemy uważali za dodatnie, kąty zaś o zwrotach ujemnych za ujemne, moglibyśmy stosunek wstaw promieni s_1, s_2, s_3 zdefinjować wprost jako iloraz wstaw kątów $s_1 s_3$ i $s_2 s_3$.

§ 36. Równanie prostej właściwej, której stosunek wstaw względem dwu danych promieni jest dany. — Niechaj z jednego punktu właściwego W wychodzą 2 promienie s_1 i s_2, różne i nie leżące na jednej prostej (rys. 27). Poza tem niechaj przez punkt W przechodzi jakaś prosta d, która nie zawiera żadnego z promieni s_1 i s_2 i której stosunek wstaw względem tych promieni jest równy μ, t. zn.

(1) $$(s_1, s_2, d) = \mu.$$

Promień, wychodzący z punktu W i posiadający zwrot przeciwny, aniżeli promień s_1, względnie s_2, oznaczmy przez s_1', względnie s_2'. Prostą zawierającą promienie s_1 i s_1', względnie s_2 i s_2', oznaczmy przez d_1, względnie d_2.

Rys. 27.

Weźmy teraz jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek O nie leży ani na prostej d_1, ani na prostej d_2. Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych d_1 i d_2 będą w tym układzie odpowiednio równania

(2) $$\begin{cases} l_1(x, y, 1) = x\cos\varphi_1 + y\cos\psi_1 - p_1 = 0, \\ l_2(x, y, 1) = x\cos\varphi_2 + y\cos\psi_2 - p_2 = 0. \end{cases}$$

Weźmy na prostej d dowolny punkt właściwy P, różny od punktu W. Spółrzędne punktu P oznaczmy przez x', y'. Spuśćmy z punktu P na proste d_1 i d_2 prostopadłe, których spodki oznaczmy odpowiednio przez M_1 i M_2. Możemy powiedzieć, że $\mu = \frac{\sin \sphericalangle PWM_1}{\sin \sphericalangle PWM_2}$, lecz $\sin \sphericalangle PWM_1 = \frac{PM_1}{PW}$ oraz $\sin \sphericalangle PWM_2 = \frac{PM_2}{PW}$, zatem

(3) $$\mu = \frac{PM_1}{PM_2}.$$

PM_1, względnie PM_2, jest to odległość punktu P od prostej d_1, względnie d_2. Mając więc równania prostych d_1 i d_2

w postaci normalnej Hesse'go możemy te odległości łatwo obliczyć (§ 31). W tym celu będziemy odróżniali 2 przypadki.

P r z y p a d e k 1-y. Początek O układu spółrzędnych nie leży wewnątrz żadnego z mniejszych od π kątów $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$, leży więc on wewnątrz jednego z mniejszych od π kątów $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$ (rys. 27).

Przypuśćmy, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$. Punkt P leży wtedy albo z przeciwnej strony prostej d_1, aniżeli początek O układu spółrzędnych, a w takim razie z tej samej strony prostej d_2, co początek O układu spółrzędnych, albo też z tej samej strony prostej d_1, co początek O układu spółrzędnych, a w takim razie z przeciwnej strony prostej d_2, aniżeli początek O układu spółrzędnych. Mamy więc (§ 31) albo $PM_1 = l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = -l_2(x', y', 1)$, albo $PM_1 = -l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = l_2(x', y', 1)$, w każdym więc razie $\frac{PM_1}{PM_2} = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}$, a zatem [równ. (3)]:

$$\mu = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}. \tag{4}$$

Lecz wobec tego, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$, stosunek wstaw μ jest ujemny (§ 35), zatem $\mu = -\mu$, skąd wynika [równ. (4)]:

$$\mu = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}. \tag{5}$$

Przypuśćmy teraz, że prosta d wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$ nie leży, zatem leży ona wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$. Punkt P leży wtedy albo z przeciwnej strony zarówno prostej d_1, jak i prostej d_2, aniżeli początek O układu spółrzędnych, albo też z tej samej strony zarówno prostej d_1, jak i prostej d_2, co początek O układu spółrzędnych. Mamy więc (§ 31) albo $PM_1 = l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = l_2(x', y', 1)$, albo $PM_1 = -l_1(x', y' 1)$

i $PM_2 = -l_2(x', y', 1)$, w każdym więc razie $\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}$, a zatem [równ. (3)]:

(6) $$|\mu| = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}.$$

Lecz wobec tego, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$, stosunek wstaw μ jest dodatni (§ 35), zatem $|\mu| = \mu$, skąd wynika [równ. (6)]:

(7) $$\mu = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)},$$

t. zn. znów równość (5).

W rozpatrywanym więc przypadku zawsze zachodzi równość (7), a zatem także równość

(8) $$l_1(x', y', 1) - \mu \,.\, l_2(x', y', 1) = 0.$$

Punkt P uważaliśmy za różny od punktu W. Gdybyśmy jednak przez x', y' rozumieli spółrzędne punktu W, to równość (8) też byłaby spełniona, albowiem wtedy byłoby zarówno $l_1(x', y', 1) = 0$, jak i $l_2(x', y', 1) = 0$.

P r z y p a d e k 2-i. Początek O układu spółrzędnych leży wewnątrz jednego z mniejszych od π kątów $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$.

Przypuśćmy, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$. Punkt P leży wtedy albo z przeciwnej strony zarówno prostej d_1, jak i prostej d_2, aniżeli początek O układu spółrzędnych, albo też z tej samej strony zarówno prostej d_1, jak i prostej d_2, co początek O układu spółrzędnych. Mamy więc (§ 31) albo $PM_1 = l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = l_2(x', y', 1)$, albo $PM_1 = -l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = -l_2(x', y', 1)$, w każdym więc razie $\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}$, a zatem [równ. (3)]:

(9) $$|\mu| = \frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}.$$

Lecz wobec tego, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s_2'$, stosunek wstaw μ jest ujemny (§ 35), zatem $\mu = -\mu$, skąd wynika [równ. (9)]:

$$\mu = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}. \tag{10}$$

Przypuśćmy teraz, że prosta d wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_1 s_2$ i $s_1' s'_2$ nie leży, zatem leży ona wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$. Punkt P leży wtedy albo z przeciwnej strony prostej d_1, aniżeli początek O układu spółrzędnych, a w takim razie z tej samej strony prostej d_2, co początek O układu spółrzędnych, albo też z tej samej strony prostej d_1, co początek O układu spółrzędnych, a w takim razie z przeciwnej strony prostej d_2, aniżeli początek O układu spółrzędnych. Mamy więc (§ 31) albo $PM_1 = l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = -l_2(x', y', 1)$, albo $PM_1 = -l_1(x', y', 1)$ i $PM_2 = l_2(x', y', 1)$, w każdym więc razie $\frac{PM_1}{PM_2} = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}$, a zatem [równ. (3)]:

$$\mu = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}. \tag{11}$$

Lecz wobec tego, że prosta d leży wewnątrz kątów wierzchołkiem przeciwległych $s_2 s_1'$ i $s_2' s_1$, stosunek wstaw μ jest dodatni (§ 35), zatem $\mu = \mu$, skąd wynika [równ. (11)]:

$$\mu = -\frac{l_1(x', y', 1)}{l_2(x', y', 1)}, \tag{12}$$

t. zn. znów równość (10).

W tym więc przypadku zawsze zachodzi równość (12), a zatem także równość

$$l_1(x', y', 1) + \mu \, . \, l_2(x', y', 1) = 0. \tag{13}$$

Punkt P uważaliśmy za różny od punktu W. Gdybyśmy jednak przez x', y' rozumieli spółrzędne punktu W, to równość (13) też byłaby spełniona, albowiem wtedy byłoby zarówno $l_1(x', y', 1) = 0$, jak i $l_2(x', y', 1) = 0$.

Weźmy teraz pod uwagę równości:

(14) $$l_1(x, y, 1) - \mu \,.\, l_2(x, y, 1) = 0,$$

(15) $$l_1(x, y, 1) + \mu \,.\, l_2(x, y, 1) = 0.$$

Czy jest możliwe, aby w którejkolwiek z tych dwu równości po wykonaniu redukcji spółczynniki przy x i y stały się obydwa jednocześnie równe 0, innemi słowy, czy jest możliwe, aby były spełnione 2 równości $\cos\varphi_1 - \mu \,.\, \cos\varphi_2 = 0$ i $\cos\psi_1 - \mu \,.\, \cos\psi_2 = 0$, albo też 2 równości $\cos\varphi_1 + \mu \,.\, \cos\varphi_2 = 0$ i $\cos\psi_1 + \mu \,.\, \cos\psi_2 = 0$? To byłoby możliwe tylko wtedy, gdyby był spełniony warunek $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = \cos\psi_1 : \cos\psi_2$, t. zn. gdyby proste d_1 i d_2 były wzajemnie równoległe. Ponieważ zaś proste d_1 i d_2 równoległemi nie są (albowiem są one różne i przytem posiadają punkt właściwy W wspólnie), przeto nie jest możliwe, aby w którejkolwiek z równości (14) i (15) po wykonaniu redukcji spółczynniki przy x i y stały się obydwa jednocześnie równe 0. Każda więc z równości (14) i (15) jest równaniem stopnia 1-go z dwiema niewiadomemi x i y.

Z rozważań naszych wynika, iż w pierwszym, względnie drugim, z dwu rozpatrywanych wyżej przypadków spółrzędne każdego punktu właściwego prostej d spełniają równanie (14), względnie (15), a ponieważ to równanie, jako równanie stopnia 1-ego z dwiema niewiadomemi x i y, przedstawia pewną w zupełności określoną prostą właściwą (§ 6), przeto w pierwszym przypadku równanie (14), w drugim zaś przypadku równanie (15) przedstawia prostą d.

Prostą d uważaliśmy za różną od każdej z prostych d_1 i d_2. Gdyby jednak prosta d nakrywała prostą d_1, to jej stosunek wstaw μ względem prostych d_1 i d_2 byłby równy 0, a zatem też moglibyśmy powiedzieć, że równanie (14), wzgl. (15), przedstawia prostą d. Gdyby zaś prosta d nakrywała prostą d_2, to jej stosunek wstaw μ względem prostych d_1 i d_2 byłby równy $\pm\infty$, moglibyśmy więc powiedzieć, że równanie

(16) $$\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0,$$

względnie równanie

$$\frac{1}{\mu}\cdot l_1(x,y,1)+l_2(x,y,1)=0, \tag{17}$$

przedstawia prostą d.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli s_1 i s_2 są dwoma promieniami, wychodzącymi z jednego punktu właściwego W i nie leżącymi na jednej prostej, i jeżeli równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych d_1 i d_2, zawierających odpowiednio promienie s_1 i s_2, w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a, którego początek nie leży na żadnej z prostych d_1 i d_2, są odpowiednio równania $l_1(x,y,1)=x\cos\varphi_1+$ $+y\cos\psi_1-p_1=0$ i $l_2(x,y,1)=x\cos\varphi_2+y\cos\psi_2-p_2=0$, to prostą d, przechodzącą przez punkt W i posiadającą względem promieni s_1 i s_2 stosunek wstaw μ, możemy przedstawić albo przez równanie $l_1(x,y,1)-\mu\,.\,l_2(x,y,1)=0$, gdy μ jest liczbą skończoną, i przez równanie $\frac{1}{\mu}\cdot l_1(x,y,1)-l_2(x,y,1)=0$, gdy μ jest liczbą różną od 0, albo przez równanie $l_1(x,y,1)+\mu\,.\,l_2(x,y,1)=0$, gdy μ jest liczbą skończoną, i przez równanie $\frac{1}{\mu}\cdot l_1(x,y,1)+l_2(x,y,1)=0$, gdy μ jest liczbą różną od 0, w zależności od tego, czy początek układu spółrzędnych nie leży ani wewnątrz mniejszego od π kąta s_1s_2, ani też wewnątrz kąta, który jest względem wymienionego kąta s_1s_2 kątem wierzchołkiem przeciwległym, czy też początek układu spółrzędnych leży wewnątrz jednego z tych dwu kątów.

Gdybyśmy, zamiast mówić o stosunku wstaw prostej d względem promieni s_1 i s_2, chcieli mówić o stosunku wstaw prostej d względem prostych d_1 i d_2, to w takim razie twierdzenie ostatnie moglibyśmy wypowiedzieć w ten sposób:

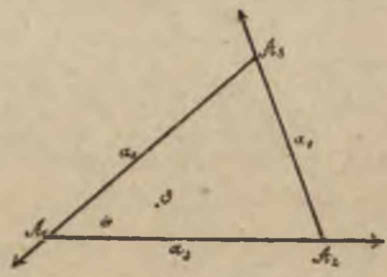
Jeżeli d_1 i d_2 są dwiema różnemi prostemi właściwemi, posiadającemi dane zwroty i spotykającemi się w punkcie właściwym W, i jeżeli równaniami w postaci normalnej Hesse'go tych prostych w układzie płaskim spółrzędnych Descartes'a, którego początek nie leży na żadnej z nich, są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = x \cos \varphi_1 + y \cos \psi_1 - p_1 = 0$ i $l_2(x, y, 1) = x \cos \varphi_2 + y \cos \psi_2 - p_2 = 0$, to prostą d, przechodzącą przez punkt W i posiadającą względem prostych d_1 i d_2 stosunek ustaw μ, możemy przedstawić albo przez równanie $l_1(x, y, 1) - \mu . l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ jest liczbą skończoną, i przez równanie $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ jest liczbą różną od 0, albo przez równanie $l_1(x, y, 1) + \mu . l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ jest liczbą skończoną, i przez równanie $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) + l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ jest liczbą różną od 0, w zależności od tego, czy początek układu spółrzędnych nie leży ani wewnątrz mniejszego od π kąta, utworzonego przez zwroty prostych d_1 i d_2, ani też wewnątrz kąta, który jest względem wymienionego przed chwilą kąta kątem wierzchołkiem przeciwległym, czy też początek układu spółrzędnych leży wewnątrz jednego z tych dwu kątów.

Uwaga 1. Podane tu twierdzenia odnoszą się do przypadku, gdy początek układu spółrzędnych nie leży na żadnej z prostych d_1 i d_2. Gdybyśmy sposobem analogicznym zbadali również przypadek, gdy początek układu spółrzędnych leży na którejkolwiek z prostych d_1 i d_2, to z łatwością przyszlibyśmy do wniosku, że prostą d, przechodzącą przez punkt W i posiadającą względem promieni s_1 i s_2 (albo względem prostych d_1 i d_2) stosunek wstaw μ, można przedstawić przez jedno z równań $l_1(x, y, 1) - \mu . l_2(x, y, 1) = 0$ i $l_1(x, y, 1) + \mu . l_2(x, y, 1) = 0$, albo przez jedno z równań $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0$

i $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) + l_2(x, y, 1) = 0$. Przyczem jeżeli jakąś prostą d, różną od każdej z prostych d_1 i d_2 i posiadającą względem promieni s_1 i s_2 (albo względem prostych d_1 i d_2) stosunek wstaw μ, można przedstawić przez równanie $l_1(x,y,1) - \mu . l_2(x,y,1) = 0$, a zatem także przez równanie $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x,y,1) - l_2(x,y,1) = 0$, to wtedy każdą prostą d', posiadającą względem promieni s_1 i s_2 (albo względem prostych d_1 i d_2) stosunek wstaw μ', można przedstawić przez jedno z równań $l_1(x,y,1) - \mu' . l_2(x,y,1) = 0$ i $\frac{1}{\mu'} \cdot l_1(x,y,1) - l_2(x,y,1) = 0$; jeżeli zaś jakąś prostą d, różną od każdej z prostych d_1 i d_2 i posiadającą względem promieni s_1 i s_2 (albo względem prostych d_1 i d_2) stosunek wstaw μ, można przedstawić przez równanie $l_1(x,y,1) + \mu . l_2(x,y,1) = 0$, a zatem także przez równanie $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x,y,1) + l_2(x,y,1) = 0$, to wtedy każdą prostą d', posiadającą względem promieni s_1 i s_2 (albo względem prostych d_1 i d_2) stosunek wstaw μ', można przedstawić przez jedno z równań $l_1(x,y,1) + \mu' . l_2(x,y,1) = 0$ i $\frac{1}{\mu'} \cdot l_1(x,y,1) + l_2(x,y,1) = 0$.

Uwaga 2. Trójmian ogólny stopnia 1-ego z dwiema niewiadomemi x i y, t. zn. trójmian $Ax + By + C$, oznaczaliśmy w § 25, i tak samo nadal będziemy oznaczali, symbolem $L(x,y,1)$. Jeżeli zaś ten trójmian jest stroną lewą równania prostej w postaci normalnej Hesse'go, innemi słowy, jeżeli jest spełniony warunek (§ 28) $\frac{\sin \omega}{(-\text{sign.}\, C)\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} = 1$, to, chcąc to specjalnie podkreślić, będziemy pisali w wymienionym symbolu na oznaczenie trójmianu zamiast dużej litery L małą literę l, t. zn. rozpatrywany trójmian będziemy oznaczali symbolem $l(x,y,1)$, co zresztą już w rozważaniach § niniejszego stosowaliśmy.

§ 37. Proste, przechodzące przez wierzchołki trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$, którego wierzchołki są punktami właściwymi (rys. 28). Boki tego trójkąta, przeciwległe wierzchołkom A_1, A_2, A_3, oznaczmy odpowiednio przez a_1, a_2, a_3. Prostej a_1 nadajmy ten zwrot, przy którym punkt A_3 następuje po punkcie A_2; prostej a_2 nadajmy ten zwrot, przy którym punkt A_1 następuje po punkcie A_3; w końcu, prostej a_3 nadajmy ten zwrot, przy którym punkt A_2 następuje po punkcie A_1.



Rys. 28.

Weźmy teraz jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek O znajduje się w e w n ą t r z (t. zn. nie zewnątrz i nie na obwodzie) trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 będą w tym układzie odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$.

Na mocy twierdzenia, podanego w § 36, możemy powiedzieć, że:

1) prostą, przechodzącą przez wierzchołek A_1 trójkąta $A_1 A_3 A_3$ i posiadającą względem prostych a_2 i a_3 stosunek wstaw μ, możemy przedstawić przez równanie $l_2(x, y, 1) - \mu . l_3(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość skończoną, oraz przez równanie $\frac{1}{\mu} . l_2(x, y, 1) - l_3(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość różną od 0;

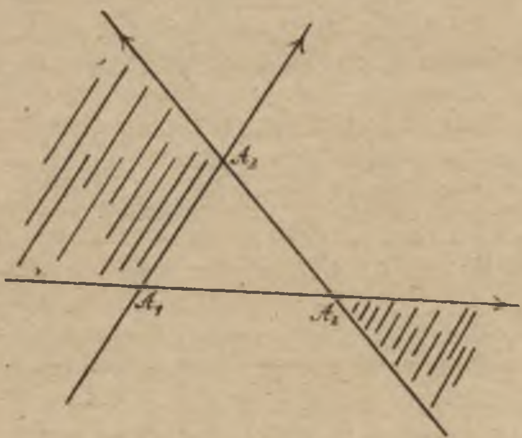
2) prostą, przechodzącą przez wierzchołek A_2 trójkąta $A_1 A_2 A_3$ i posiadającą względem prostych a_3 i a_1 stosunek wstaw μ, możemy przedstawić przez równanie $l_3(x, y, 1) - \mu . l_1(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość skończoną, oraz przez równanie $\frac{1}{\mu} . l_3(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość różną od 0;

3) prostą, przechodzącą przez wierzchołek A_3 trójkąta $A_1 A_2 A_3$ i posiadającą względem prostych a_1 i a_2 stosunek wstaw μ, możemy przedstawić przez równanie $l_1(x, y, 1) - \mu . l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość skończoną, oraz

przez równanie $\frac{1}{\mu} \cdot l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0$, gdy μ posiada wartość różną od 0.

Zresztą doszlibyśmy do tych samych wniosków, gdybyśmy zwroty prostych a_1, a_2, a_3 zmienili na przeciwne, t. zn. gdybyśmy, zamiast uważać proste a_1, a_2, a_3 za proste $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, uważali je za proste $A_3 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_1$.

Gdybyśmy natomiast zmienili na przeciwne zwroty tylko jednej lub dwu z pośród prostych a_1, a_2, a_3, to wnioski powyższe uległyby pewnym zmianom. Chcąc je zatrzymać, musielibyśmy układ spółrzędnych Descartes'a wybrać w inny sposób. Gdybyśmy np. proste a_1, a_2, a_3 uważali za proste $A_2 A_3$, $A_1 A_3$, $A_1 A_2$ (rys. 29), to, chcąc zatrzymać wnioski powyższe, musielibyśmy układ spółrzędnych Descartes'a wybrać w ten sposób, aby jego początek leżał wewnątrz jednej z tych dwu części płaszczyzny, które na rys. 29 są oznaczone kreskami.



Rys. 29.

W §§ następnych Rozdziału niniejszego podamy kilka twierdzeń z Geometrji trójkąta. We wszystkich tych §§ przez trójkąt będziemy rozumieli trójkąt, którego wierzchołki są punktami właściwymi. Wierzchołki rozpatrywanego trójkąta będziemy oznaczali przez A_1, A_2, A_3, boki zaś, tym wierzchołkom przeciwległe, odpowiednio przez a_1, a_2, a_3. Przyczem przez a_1, a_2, a_3 czasami będziemy rozumieli proste $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, czasami zaś odcinki $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$. Kąty wewnętrzne trójkąta $A_1 A_2 A_3$, t. zn. kąty $A_3 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_3 A_1$, często będziemy oznaczali wprost przez A_1, A_2, A_3. Jeżeli w którymkolwiek z tych §§ będziemy mówili o stosunku wstaw jakiejś prostej, przechodzącej przez jeden z wierzchołków rozpatrywanego trójkąta $A_1 A_2 A_3$, względem dwu boków, przecinających się w tym wierzchołku, i nie zaznaczymy wyraźnie, jakie nadaliśmy zwroty wymienionym bokom trójkąta, to w takim razie przez zwroty boków trójkąta należy wtedy rozumieć te zwroty, jakie posiadają boki trójkąta $A_1 A_2 A_3$ na rys. 28, t. zn. przez boki a_1, a_2, a_3 należy rozumieć odpowiednio proste $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$.

Również jeżeli w którymkolwiek z §§ następnych Rozdziału niniejszego boki rozpatrywanego trójkąta przedstawimy przez równania w postaci normalnej Hesse'go, to będziemy mieli na myśli równania, odniesione do takiego układu spółrzędnych Descartes'a, którego początek znajduje się wewnątrz rozpatrywanego trójkąta.

§ 38. Dwusieczne kątów trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 28). Dwusieczne kątów wewnętrznych $A_3 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_3 A_1$ tego trójkąta oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Mamy (§ 35 i § 37): $(a_2, a_3, d_1) = 1$, $(a_3, a_1, d_2) = 1$, $(a_1, a_2, d_3) = 1$.

Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 będą odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$. Proste d_1, d_2, d_3 możemy wtedy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 37):

$$L_1(x, y, 1) \equiv l_2(x, y, 1) - l_3(x, y, 1) = 0,$$
$$L_2(x, y, 1) \equiv l_3(x, y, 1) - l_1(x, y, 1) = 0,$$
$$L_3(x, y, 1) \equiv l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) = 0.$$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) \equiv l_2(x, y, 1) - l_3(x, y, 1) + l_3(x, y, 1) - l_1(x, y, 1) + l_1(x, y, 1) - l_2(x, y, 1) \equiv 0$, przeto (§ 26) proste d_1, d_2, d_3 posiadają jeden punkt wspólny.

Dowiedliśmy więc, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt jest, jak wiemy z Geometrji elementarnej, środkiem koła, wpisanego w trójkąt wewnętrznie.

Oznaczmy przez d_1', d_2', d_3' dwusieczne kątów zewnętrznych rozpatrywanego trójkąta, których wierzchołkami są odpowiednio punkty A_1, A_2, A_3. Mamy (§ 35 i § 37): $(a_2, a_3, d_1') = -1$, $(a_3, a_1, d_2') = -1$, $(a_1, a_2, d_3') = -1$. Proste d_1', d_2', d_3' możemy więc przedstawić odpowiednio przez równania (§ 37):

$$L_1'(x, y, 1) \equiv l_2(x, y, 1) + l_3(x, y, 1) = 0,$$
$$L_2'(x, y, 1) \equiv l_3(x, y, 1) + l_1(x, y, 1) = 0,$$
$$L_3'(x, y, 1) \equiv l_1(x, y, 1) + l_2(x, y, 1) = 0.$$

Ponieważ:

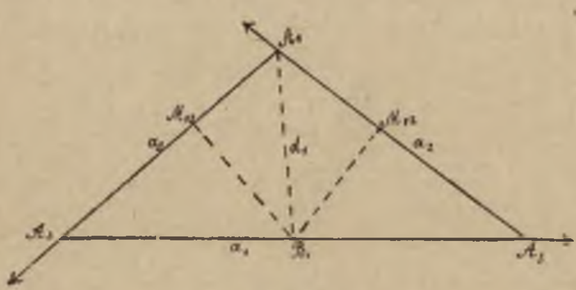
$$L_1'(x, y, 1) - L_2'(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0,$$
$$L_2'(x, y, 1) - L_3'(x, y, 1) + L_1(x, y, 1) = 0,$$
$$L_3'(x, y, 1) - L_1'(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) = 0,$$

przeto (§ 26) proste d_1', d_2', d_3, względnie d_2', d_3', d_1, względnie d_3', d_1', d_2, przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że **dwusieczne dwu kątów zewnętrznych trójkąta i jednego kąta wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie.**

Punkt przecięcia się prostych d_1', d_2', d_3, punkt przecięcia się prostych d_2', d_3', d_1, oraz punkt przecięcia się prostych d_3', d_1', d_2 są, jak wiemy z Geometrji elementarnej, **środkami 3-ech kół, wpisanych w trójkąt zewnętrznie.**

§ 39. Linje środkowe trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 30). Środki boków a_1, a_2, a_3 oznaczmy odpowiednio przez B_1, B_2, B_3. Linje środkowe $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ rozpatrywanego trójkąta oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3.



Rys. 30.

Przedstawimy proste d_1, d_2, d_3 przez równania, w założeniu, że równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$ (§ 37).

Możemy powiedzieć, że $(a_2, a_3, d_1) = \dfrac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}$. A ponieważ (§ 35 i § 37) $(a_2, a_3, d_1) > 0$, przeto $(a_2, a_3, d_1) = (a_2, a_3, d_1)$, a zatem:

(1) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}.$$

Spuśćmy z punktu B_1 na proste a_2 i a_3 prostopadłe, których spodki oznaczmy odpowiednio przez M_{12} i M_{13}. Ponieważ $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3 = \dfrac{B_1 M_{12}}{B_1 A_1}$ oraz $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2 = \dfrac{B_1 M_{13}}{B_1 A_1}$, przeto [równ. (1)]:

(2) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{B_1 M_{12}}{B_1 M_{13}}.$$

Jeżeli kąt A_3 nie jest rozwarty, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$, jeżeli zaś kąt A_3 nie jest ostry, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin (\pi - A_3) = B_1 A_3 . \sin A_3$, w każdym więc przypadku $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$. Analogicznie znajdziemy, iż bez względu na wielkość kąta A_2 zachodzi równość $B_1 M_{13} = B_1 A_2 . \sin A_2$. A zatem [równ. (2)] $(a_2, a_3, d_1) = \dfrac{B_1 A_3 . \sin A_3}{B_1 A_2 . \sin A_2}$, czyli (ponieważ $B_1 A_3 = B_1 A_2$):

(3) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin A_3}{\sin A_2}.$$

Prostą d_1 możemy więc przedstawić przez równanie (§ 37) $l_2(x, y, 1) \left(-\dfrac{\sin A_3}{\sin A_2}\right) \cdot l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $\sin A_2$, przez równanie:

(4) $$L_1(x, y, 1) = \sin A_2 . l_2(x, y, 1) - \sin A_3 . l_3(x, y, 1) = 0.$$

Analogicznie, dla prostych d_2 i d_3 otrzymamy odpowiednio równania:

(5) $$L_2(x, y, 1) = \sin A_3 . l_3(x, y, 1) - \sin A_1 . l_1(x, y\ 1) = 0,$$

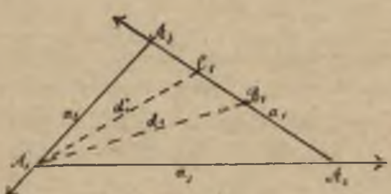
(6) $$L_3(x, y, 1) = \sin A_1 . l_1(x, y, 1) - \sin A_2 . l_2(x, y, 1) = 0.$$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0$, przeto (§ 26) proste d_1, d_2, d_3 przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że linje środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywa się środkiem ciężkości, albo barycentrem, trójkąta.

§ **40. Symedjany trójkąta.** — Prostą, która przechodzi przez wierzchołek trójkąta i jest symetryczna do linji środkowej, przechodzącej przez ten sam wierzchołek, względem dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta, dla którego wymieniony wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem, nazywamy symedjaną. W każdym trójkącie mamy więc 3 symedjany.

Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 31). Linje środkowe oraz symedjany tego trójkąta, przechodzące przez wierzchołki A_1, A_2, A_3, oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3 oraz d_1', d_2', d_3'.



Rys. 31.

Jeżeli środek boku a_1 oznaczymy przez B_1, punkt zaś, w jakim symedjana d_1' przecina prostą a_1, oznaczymy przez C_1, to będziemy mieli (§ 39):

(1) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2} \text{ oraz } (a_2, a_3, d_1') = \frac{\sin \sphericalangle C_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle C_1 A_1 A_2}.$$

Lecz z definicji symedjany wynika, że

$$\sphericalangle B_1 A_1 A_3 = \sphericalangle C_1 A_1 A_2 \text{ oraz } \sphericalangle B_1 A_1 A_2 = \sphericalangle C_1 A_1 A_3,$$

a zatem [równ. (1)]:

(2) $$(a_2, a_3, d_1') = \frac{1}{(a_2, a_3, d_1)}.$$

Z tej zaś równości oraz z równości (3) § 39 otrzymujemy:

(3) $$(a_2, a_3, d_1') = \frac{\sin A_2}{\sin A_3}.$$

Jeżeli więc równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$,

$l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$, to prostą d_1' możemy przedstawić przez równanie (§ 37) $l_2(x, y, 1) - \frac{\sin A_2}{\sin A_3} \cdot l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po podzieleniu przez $\sin A_2$, przez równanie

$$(4) \qquad L_1(x, y, 1) = \frac{l_2(x, y, 1)}{\sin A_2} - \frac{l_3(x, y, 1)}{\sin A_3} = 0.$$

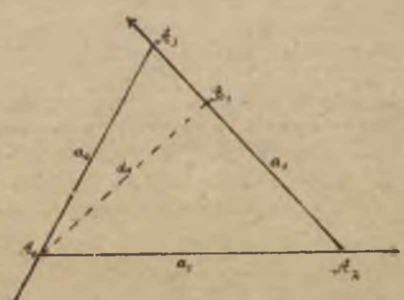
Analogicznie, dla prostych d_2' i d_3' otrzymamy odpowiednio równania:

$$(5) \qquad L_2(x, y, 1) = \frac{l_3(x, y, 1)}{\sin A_3} - \frac{l_1(x, y, 1)}{\sin A_1} = 0,$$

$$(6) \qquad L_3(x, y, 1) = \frac{l_1(x, y, 1)}{\sin A_1} - \frac{l_2(x, y, 1)}{\sin A_2} = 0.$$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0$, przeto (§ 26) proste d_1', d_2', d_3' przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że **symedjany trójkąta przecinają się w jednym punkcie.** Ten punkt nazywa się **punktem Lemoine'a.**



Rys. 32.

§ 41. Wysokości trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 32).

Prostopadłe, spuszczone z wierzchołków A_1, A_2, A_3 na boki przeciwległe a_1, a_2, a_3, oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Spodki tych prostopadłych oznaczmy odpowiednio przez B_1, B_2, B_3.

Możemy powiedzieć, że

$$(1) \qquad (a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}.$$

Lecz $\sphericalangle B_1 A_1 A_3 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_1 A_3 A_1$ oraz $\sphericalangle B_1 A_1 A_2 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_1 A_2 A_1$, a zatem [równ. (1)]

(2) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\cos \sphericalangle B_1 A_3 A_1}{\cos \sphericalangle B_1 A_2 A_1}.$$

Jeżeli kąt A_3 nie jest rozwarty, to $\sphericalangle B_1 A_3 A_1 = A_3$, jeżeli zaś kąt A_3 nie jest ostry, to $\sphericalangle B_1 A_3 A_1 = \pi - A_3$, w każdym więc razie $\cos \sphericalangle B_1 A_3 A_1 = |\cos A_3|$. Analogicznie znajdziemy, iż bez względu na wielkość kąta A_2 zachodzi równość $\cos \sphericalangle B_1 A_2 A_1 = |\cos A_2|$. A zatem [równ. (2)]:

(3) $$(a_2, a_3, d_1) = \left| \frac{\cos A_3}{\cos A_2} \right| .$$

Jeżeli obydwa kąty A_3 i A_2 są ostre, to wtedy z jednej strony $\frac{\cos A_3}{\cos A_2} > 0$, z drugiej zaś strony (§ 35) $(a_2, a_3, d_1) > 0$. Jeżeli jeden z kątów A_3 i A_2 jest rozwarty, to wtedy z jednej strony $\frac{\cos A_3}{\cos A_2} < 0$, z drugiej zaś strony (§ 35) $(a_2, a_3, d_1) < 0$. Jeżeli, w końcu, kąt A_3, względnie kąt A_2, jest prosty, to wtedy z jednej strony $\frac{\cos A_3}{\cos A_2}$ równa się 0, względnie $\pm \infty$, z drugiej zaś strony (§ 35) stosunek wstaw (a_2, a_3, d_1) równa się 0, względnie $\pm \infty$. Z równości (3) wynika zatem:

(4) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\cos A_3}{\cos A_2}.$$

Jeżeli więc równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$, to (§ 37) w razie, gdy kąt A_2 nie jest kątem prostym, prostą d_1 możemy przedstawić przez równanie $l_2(x, y, 1) - \frac{\cos A_3}{\cos A_2} . l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $\cos A_2$, przez równanie $\cos A_2 . l_2(x, y, 1) - \cos A_3 . l_3(x, y, 1) = 0$, w razie zaś, gdy kąt A_3 nie jest kątem prostym, prostą d_1, możemy przedstawić przez równanie

$\frac{\cos A_2}{\cos A_3} \cdot l_2(x, y, 1) - l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $\cos A_3$, przez równanie $\cos A_2 \cdot l_2(x, y, 1) - \cos A_3 \cdot l_3(x, y, 1) = 0$. Zawsze więc prostą d_1 możemy przedstawić przez równanie:

(5) $\qquad L_1(x, y, 1) = \cos A_2 \cdot l_2(x, y, 1) - \cos A_3 \cdot l_3(x, y, 1) = 0.$

Analogicznie, dla prostych d_2 i d_3 otrzymamy odpowiednio równania:

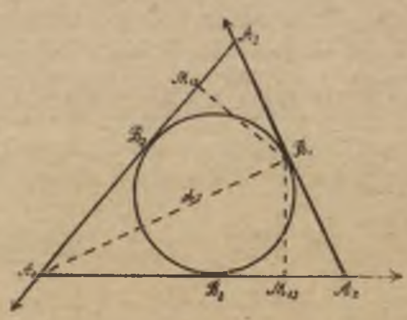
(6) $\qquad L_2(x, y, 1) = \cos A_3 \cdot l_3(x, y, 1) - \cos A_1 \cdot l_1(x, y, 1) = 0,$

(7) $\qquad L_3(x, y, 1) = \cos A_1 \cdot l_1(x, y, 1) - \cos A_2 \cdot l_2(x, y, 1) = 0.$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0$, przeto (§ 26) proste d_1, d_2, d_3 przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywa się ortocentrem trójkąta.

§ 42. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności boków przeciwległych z kołem, wpisanem w trójkąt wewnętrznie. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 33). Punkty styczności boków a_1, a_2, a_3 z kołem, wpisanem w trójkąt $A_1 A_2 A_3$ wewnętrznie, oznaczmy odpowiednio przez B_1, B_2, B_3. Proste $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3.



Rys. 33.

Możemy powiedzieć, że

$$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}.$$

A ponieważ (§ 35 i § 37) $(a_2, a_3, d_1) > 0$, przeto $(a_2, a_3, d_1) = |(a_2, a_3, d_1)|$, a zatem

(1) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}.$$

Spuśćmy z punktu B_1 na proste a_2 i a_3 prostopadłe, których spodki oznaczmy odpowiednio przez M_{12} i M_{13}. Ponieważ $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3 = \frac{B_1 M_{12}}{B_1 A_1}$ oraz $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2 = \frac{B_1 M_{13}}{B_1 A_1}$, przeto [równ. (1)]:

(2) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{B_1 M_{12}}{B_1 M_{13}}.$$

Jeżeli kąt A_3 nie jest rozwarty, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$, jeżeli zaś kąt A_3 nie jest ostry, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin(\pi - A_3) = B_1 A_3 . \sin A_3$, w każdym więc razie $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$. Analogicznie znajdziemy, iż bez względu na wielkość kąta A_2 zachodzi równość $B_1 M_{13} = B_1 A_2 . \sin A_2$. A zatem [równ. (2)]:

(3) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{B_1 A_3 . \sin A_3}{B_1 A_2 . \sin A_2}.$$

Obwód trójkąta $A_1 A_2 A_3$ oznaczmy przez $2s$, t. zn.

(4) $$a_1 + a_2 + a_3 = 2s.$$

Mamy więc: $B_1 A_3 + A_3 B_2 + B_2 A_1 + A_1 B_3 + B_3 A_2 + A_2 B_1 = 2s$, czyli

(5) $$(B_1 A_3 + A_3 B_2) + (B_2 A_1 + A_1 B_3) + (B_3 A_2 + A_2 B_1) = 2s.$$

Z Geometrji elementarnej wiemy, że długości dwu stycznych, wyprowadzonych z punktu do koła, są równe, a zatem:

(6) $$B_1 A_3 = A_3 B_2, \quad B_2 A_1 = A_1 B_3, \quad B_3 A_2 = A_2 B_1.$$

Z równości (5) i (6) wynika równość $2 B_1 A_3 + 2 A_1 B_3 + 2 B_3 A_2 = 2s$, czyli, po podzieleniu przez 2, równość $B_1 A_3 + A_1 B_3 + B_3 A_2 = s$, czyli $B_1 A_3 + a_3 = s$, skąd otrzymujemy:

(7) $$B_1 A_3 = s - a_3.$$

Analogicznie znajdziemy, iż

(8) $$B_1 A_2 = s - a_2.$$

Z równości (3), (7), (8) wynika:

(9) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{(s - a_3) . \sin A_3}{(s - a_2) . \sin A_2}.$$

Jeżeli więc równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$, to (§ 37) prostą d_1 możemy przedstawić przez równanie $l_2(x, y, 1) - \frac{(s - a_3) \cdot \sin A_3}{(s - a_2) \cdot \sin A_2} \cdot l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $(s - a_2) \sin A_2$, przez równanie:

$$(10) \quad L_1(x, y, 1) = (s - a_2) \sin A_2 \,.\, l_2(x, y, 1) - (s - a_3) \sin A_3 \,.\, l_3(x, y, 1) = 0.$$

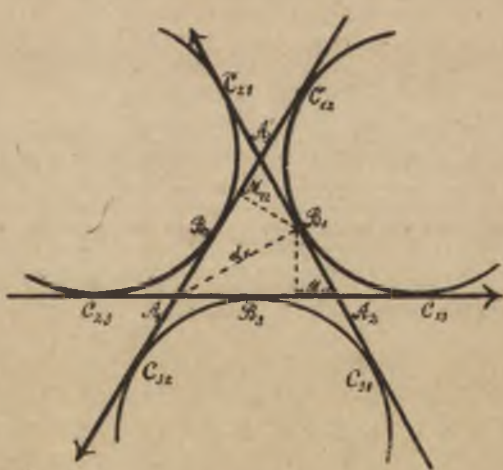
Analogicznie, dla prostych d_2 i d_3 otrzymamy odpowiednio równania:

$$(11) \quad L_2(x, y, 1) = (s - a_3) \sin A_3 \,.\, l_3(x, y, 1) - (s - a_1) \sin A_1 \,.\, l_1(x, y, 1) = 0,$$

$$(12) \quad L_3(x, y, 1) = (s - a_1) \sin A_1 \,.\, l_1(x, y, 1) - (s - a_2) \sin A_2 \,.\, l_2(x, y, 1) = 0.$$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0$, przeto (§ 26) proste d_1, d_2, d_3 przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności boków przeciwległych z kołem, wpisanem w trójkąt wewnętrznie, przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywa się punktem Gergonne'a.



Rys. 34.

§ 43. Proste, łączące wierzchołki trójkata z punktami styczności boków przeciwległych z kołami, wpisanemi w trójkąt zewnętrznie.— Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 34). Punkty styczności koła, wpisanego w trójkąt $A_1 A_2 A_3$ zewnętrznie i leżącego z przeciwnej strony prostej a_1, aniżeli punkt A_1, z prostemi a_1, a_2, a_3 oznaczmy odpowiednio przez B_1, C_{12}, C_{13}; punkty styczności koła, wpisanego w trójkąt $A_1 A_2 A_3$ zewnętrznie i leżącego z przeciwnej strony prostej a_2, aniżeli punkt A_2, z prostemi a_2, a_3, a_1 oznaczmy odpowiednio przez B_2, C_{23}, C_{21}; w końcu, punkty styczności koła, wpisanego w trójkąt $A_1 A_2 A_3$ zewnętrznie i leżącego z przeciwnej strony prostej a_3, aniżeli punkt A_3, z prostemi a_3, a_1, a_2 oznaczmy odpowiednio przez B_3, C_{31}, C_{32}. Proste $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3.

Możemy powiedzieć, że $(a_2, a_3, d_1) = \dfrac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}$.
A ponieważ (§ 35 i § 37) $(a_2, a_3, d_1) > 0$, przeto $(a_2, a_3, d_1) = |(a_2, a_3, d_1)|$, a zatem

(1) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3}{\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2}.$$

Spuśćmy z punktu B_1 na proste a_2 i a_3 prostopadłe, których spodki oznaczmy odpowiednio przez M_{12} i M_{13}. Ponieważ $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_3 = \dfrac{B_1 M_{12}}{B_1 A_1}$ oraz $\sin \sphericalangle B_1 A_1 A_2 = \dfrac{B_1 M_{13}}{B_1 A_1}$, przeto [równ. (1)]:

(2) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{B_1 M_{12}}{B_1 M_{13}}.$$

Jeżeli kąt A_3 nie jest rozwarty, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$, jeżeli zaś kąt A_3 nie jest ostry, to $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin(\pi - A_3) = B_1 A_3 . \sin A_3$, w każdym więc razie $B_1 M_{12} = B_1 A_3 . \sin A_3$. Analogicznie znajdziemy, iż bez względu na wielkość kąta A_2 zachodzi równość $B_1 M_{13} = B_1 A_2 . \sin A_2$. A zatem [równ. (2)]:

(3) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{B_1 A_3 . \sin A_3}{B_1 A_2 . \sin A_2}.$$

Obwód trójkąta $A_1 A_2 A_3$ oznaczmy przez $2s$, t. zn.

(4) $$a_1 + a_2 + a_3 = 2s.$$

Mamy więc:

(5) $$B_1 A_3 + A_3 A_1 + A_1 A_2 + A_2 B_1 = 2s.$$

Ponieważ długości dwu stycznych, wyprowadzonych z punktu do koła, są równe, przeto:

(6) $$B_1 A_3 = C_{12} A_3 \text{ oraz } A_2 B_1 = A_2 C_{13}.$$

Z równości (5) i (6) wynika równość $C_{12}A_3 + A_3A_1 + A_1A_2 + A_2C_{13} = 2s$, czyli $(C_{12}A_3 + A_3A_1) + (A_1A_2 + A_2C_{13}) = 2s$, czyli

(7) $$A_1C_{12} + A_1C_{13} = 2s.$$

Lecz znów na mocy twierdzenia, iż długości dwu stycznych, wyprowadzonych z punktu do koła, są równe, mamy:

(8) $$A_1C_{12} = A_1C_{13}.$$

Z równości (7) i (8) wynika $2A_1C_{12} = 2s$, skąd

(9) $$A_1C_{12} = s.$$

Lecz $A_1C_{12} = A_1A_3 + A_3C_{12}$, czyli [równ. (6)] $A_1C_{12} = A_1A_3 + B_1A_3$, czyli $A_1C_{12} = a_2 + B_1A_3$, a zatem [równ. (9)] $a_2 + B_1A_3 = s$, skąd wynika:

(10) $$B_1A_3 = s - a_2.$$

Analogicznie znajdziemy, iż

(11) $$B_1A_2 = s - a_3.$$

Z równości (3), (10), (11) wynika:

(12) $$(a_2, a_3, d_1) = \frac{(s-a_2) \cdot \sin A_3}{(s-a_3) \cdot \sin A_2}.$$

Jeżeli więc równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 są odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$, to (§ 37) prostą d_1 możemy przedstawić przez równanie $l_2(x, y, 1) - \dfrac{(s-a_2) \cdot \sin A_3}{(s-a_3) \cdot \sin A_2} \cdot l_3(x, y, 1) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $\dfrac{\sin A_2}{s-a_2}$, przez równanie:

(13) $$L_1(x, y, 1) = \frac{\sin A_2}{s-a_2} \cdot l_2(x, y, 1) - \frac{\sin A_3}{s-a_3} \cdot l_3(x, y, 1) = 0.$$

Analogicznie, dla prostych d_2 i d_3 otrzymamy odpowiednio równania:

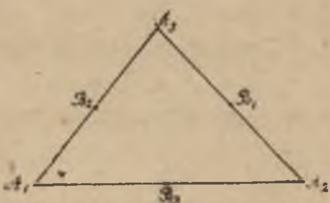
(14) $$L_2(x, y, 1) = \frac{\sin A_3}{s-a_3} \cdot l_3(x, y, 1) - \frac{\sin A_1}{s-a_1} \cdot l_1(x, y, 1) = 0,$$

(15) $$L_3(x, y, 1) = \frac{\sin A_1}{s-a_1} \cdot l_1(x, y, 1) - \frac{\sin A_2}{s-a_2} \cdot l_2(x, y, 1) = 0.$$

Ponieważ $L_1(x, y, 1) + L_2(x, y, 1) + L_3(x, y, 1) = 0$, przeto (§ 26) proste d_1, d_2, d_3 przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy więc, że proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności boków przeciwległych z kołami, wpisanemi w trójkąt zewnętrznie, przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywa się punktem Nagel'a.

§ 44. Równanie oraz spółrzędne środka ciężkości trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 35). Weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a (którego początek leży gdziekolwiek). Niechaj spółrzędnemi punktów A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3.



Rys. 35.

W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, punkty A_1, A_2, A_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(1)\quad \begin{cases} m_1(U, V, W) \equiv x_1 U + y_1 V + W = 0, \\ m_2(U, V, W) \equiv x_2 U + y_2 V + W = 0, \\ m_3(U, V, W) \equiv x_3 U + y_3 V + W = 0. \end{cases}$$

Środki boków a_1, a_2, a_3 trójkąta $A_1 A_2 A_3$ oznaczmy odpowiednio przez B_1, B_2, B_3. Mamy (§ 33):

(2) $(A_2, A_3, B_1) = -1$, $(A_3, A_1, B_2) = -1$, $(A_1, A_2, B_3) = -1$,

zatem punkty B_1, B_2, B_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 34):

$$(3)\quad \begin{cases} M_1(U, V, W) \equiv m_2(U, V, W) + m_3(U, V, W) = 0, \\ M_2(U, V, W) \equiv m_3(U, V, W) + m_1(U, V, W) = 0, \\ M_3(U, V, W) \equiv m_1(U, V, W) + m_2(U, V, W) = 0. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę równość:

$$(4)\quad M(U, V, W) \equiv m_1(U, V, W) + m_2(U, V, W) + m_3(U, V, W) = 0.$$

Czy jest możliwe, aby ta równość była tożsamością? Gdyby równość (4) była tożsamością, to w takim razie (§ 26) punkty $m_1(U, V, W) = 0$, $m_2(U, V, W) = 0$, $m_3(U, V, W) = 0$, t. zn. punkty A_1, A_2, A_3, leżałyby na jednej prostej. Ponieważ jednak te punkty są wierzchołkami pewnego trójkąta, przeto nie mogą one leżeć na jednej prostej, a zatem równość (4) nie może być tożsamością. Równość (4) jest więc równaniem jednorodnem stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi U, V, W, przedstawia ona zatem pewien w zupełności określony punkt P.

Równanie (4) możemy napisać też w ten sposób:

(5) $$M(U, V, W) \equiv m_1(U, V, W) + M_1(U, V, W) = 0,$$

skąd wynika (25), że przedstawiony przez to równanie punkt, t. zn. punkt P, leży z punktami $m_1(U,V,W) = 0$ i $M_1(U,V,W) = 0$, t. zn. z punktami A_1 i B_1, na jednej prostej, innemi słowy prosta $A_1 B_1$ prechodzi przez punkt P.

Równanie (4) możemy napisać również w ten sposób:

(6) $$M(U, V, W) \equiv m_2(U, V, W) + M_2(U, V, W) = 0,$$

skąd znów wynika (§ 25), że prosta $A_2 B_2$ przechodzi przez punkt P.

W końcu, równanie (4) możemy napisać w ten sposób:

(7) $$M(U, V, W) \equiv m_3(U, V, W) + M_3(U, V, W) = 0,$$

skąd wynika (§ 25), że prosta $A_3 B_3$ przechodzi przez punkt P.

Otrzymaliśmy więc, że każda z prostych $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ przechodzi przez punkt P, t. zn. te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy zatem poraz drugi, że linje środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Przy tej sposobności otrzymaliśmy równanie punktu przecięcia się tych linji środkowych, t. zn. równanie środka ciężkości trójkąta, którem jest równanie (4).

Po wykonaniu w równaniu (4) redukcji otrzymamy $(x_1 + x_2 + x_3) U + (y_1 + y_2 + y_3) V + 3W = 0$, a zatem za spółrzędne jednorodne Hesse'go środka ciężkości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ możemy uważać liczby $x_1 + x_2 + x_3$, $y_1 + y_2 + y_3$, 3. Stąd zaś wynika, że spółrzędnemi Descartes'a środka ciężkości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ są liczby: $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ oraz $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

Równania (5), (6), (7) możemy napisać w ten sposób:

$$(8)\quad \left|\begin{aligned} M(U,V,W) &= m_1(U,V,W) + 2\cdot\frac{M_1(U,V,W)}{2} = \\ &= m_1(U,V,W) + 2\,.\,m_1'(U,V,W) = 0, \\ M(U,V,W) &= m_2(U,V,W) + 2\cdot\frac{M_2(U,V,W)}{2} = \\ &= m_2(U,V,W) + 2\,.\,m_2'(U,V,W) = 0, \\ M(U,V,W) &= m_3(U,V,W) + 2\cdot\frac{M_3(U,V,W)}{2} = \\ &= m_3(U,V,W) + 2\,.\,m_3'(U,V,W) = 0, \end{aligned}\right.$$

gdzie przez $m_1'(U,V,W)$, $m_2'(U,V,W)$, $m_3'(U,V,W)$ oznaczyliśmy odpowiednio $\frac{1}{2}M_1(U,V,W)$, $\frac{1}{2}M_2(U,V,W)$, $\frac{1}{2}M_3(U,V,W)$, innemi słowy przez $m_1'(U,V,W)$, względnie $m_2'(U,V,W)$, względnie $m_3'(U,V,W)$, oznaczyliśmy stronę lewą równania punktu B_1, względnie B_2, względnie B_3, w takiej postaci, przy której spółczynnik przy W jest równy 1. Z równań (8) wynika (§ 34):

$$(9)\quad (A_1, B_1, P) = -2,\quad (A_2, B_2, P) = -2,\quad (A_3, B_3, P) = -2,$$

czyli (§ 33):

$$(10)\qquad \frac{A_1P}{B_1P} = -2,\quad \frac{A_2P}{B_2P} = -2,\quad \frac{A_3P}{B_3P} = -2,$$

Rys. 36.

a zatem środek ciężkości trójkąta odcina od każdej środkowej trzecią jej część, licząc od boku trójkąta.

§ 45. Równanie oraz spółrzędne punktu przecięcia się wysokości trójkąta. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1A_2A_3$ (rys. 36). Weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a. Niechaj spółrzędnemi punktów A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, punkty A_1, A_2, A_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(1) \quad \begin{cases} m_1(U,V,W) \equiv x_1 U + y_1 V + W = 0, \\ m_2(U,V,W) \equiv x_2 U + y_2 V + W = 0, \\ m_3(U,V,W) \equiv x_3 U + y_3 V + W = 0. \end{cases}$$

Spodki prostopadłych, spuszczonych z punktów A_1, A_2, A_3 odpowiednio na proste a_1, a_2, a_3, oznaczmy odpowiednio przez B_1, B_2, B_3. Mamy:

$$(2) \qquad (A_2, A_3, B_1) = \frac{B_1 A_2}{B_1 A_3}.$$

Jeżeli kąt A_2 nie jest rozwarty, to $B_1 A_2 = B_1 A_1 \,.\, \text{cotg}\, A_2$, jeżeli zaś kąt A_2 nie jest ostry, to $B_1 A_2 = B_1 A_1 \,.\, \text{cotg}\,(\pi - A_2) = -B_1 A_1 \,.\, \text{cotg}\, A_2$, w każdym więc razie $B_1 A_2 = B_1 A_1 \,.\, |\text{cotg}\, A_2|$. Analogicznie znajdziemy, iż niezależnie od wielkości kąta A_3 zachodzi równość $B_1 A_3 = B_1 A_1 \,.\, |\text{cotg}\, A_3|$. A zatem [równ. (2)]:

$$(3) \qquad |(A_2, A_3, B_1)| = \left|\frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3}\right|.$$

Jeżeli obydwa kąty A_2 i A_3 są ostre, to wtedy z jednej strony $\frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3} > 0$, z drugiej zaś strony (§ 33) $(A_2, A_3, B_1) < 0$. Jeżeli jeden z kątów A_2 i A_3 jest rozwarty, to wtedy z jednej strony $\frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3} < 0$, z drugiej zaś strony (§ 33) $(A_2, A_3, B_1) > 0$. Jeżeli, w końcu, kąt A_2, względnie A_3, jest prosty, to wtedy z jednej strony $\frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3}$ równa się 0, względnie $\pm\infty$, z drugiej zaś strony (§ 33) stosunek podziału (A_2, A_3, B_1) równa się 0, względnie $\pm\infty$. Z równości (3) wynika zatem:

$$(4) \qquad (A_2, A_3, B_1) = -\frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3}.$$

Jeżeli więc (§ 34) kąt A_3 nie jest kątem prostym, to punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie $m_2(U,V,W) + \frac{\text{cotg}\, A_2}{\text{cotg}\, A_3} \cdot m_3(U,V,W) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $\text{cotg}\, A_3$, przez równanie $\text{cotg}\, A_3 \,.\, m_2(U,V,W) + \text{cotg}\, A_2 \,.\, m_3(U,V,W) = 0$;

jeżeli zaś kąt A_2 nie jest kątem prostym, to punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie $-\frac{\operatorname{cotg} A_3}{\operatorname{cotg} A_2} \cdot m_2(U, V, W) -$ $- m_3(U, V, W) = 0$, czyli, po pomnożeniu przez $-\operatorname{cotg} A_2$, przez równanie $\operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_2(U, V, W) + \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_3(U, V, W) = 0$.

Zawsze więc punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie

$$(5) \quad M_1(U,V,W) \equiv \operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_2(U,V,W) + \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_3(U,V,W) = 0.$$

Analogicznie, dla punktów B_2 i B_3 otrzymamy odpowiednio równania:

$$(6) \quad M_2(U,V,W) \equiv \operatorname{cotg} A_1 \,.\, m_3(U,V,W) + \operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_1(U,V,W) = 0,$$

$$(7) \quad M_3(U,V,W) \equiv \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_1(U,V,W) + \operatorname{cotg} A_1 \,.\, m_2(U,V,W) = 0.$$

Weźmy teraz pod uwagę równość:

$$(8) \quad M(U, V, W) \equiv \operatorname{cotg} A_2 \,.\, \operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_1(U, V, W) + \\ + \operatorname{cotg} A_3 \,.\, \operatorname{cotg} A_1 \,.\, m_2(U,V,W) + \operatorname{cotg} A_1 \,.\, \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_3(U,V,W) = 0.$$

Czy jest możliwe, aby ta równość była tożsamością? Gdyby równość (8) była tożsamością, to w takim razie (§ 26) punkty A_1, A_2, A_3 leżałyby na jednej prostej. Ponieważ jednak te punkty są wierzchołkami pewnego trójkąta, przeto nie mogą one leżeć na jednej prostej, a zatem równość (8) nie może być tożsamością. Równość (8) jest więc równaniem jednorodnem stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi U, V, W, przedstawia ona zatem pewien w zupełności określony punkt P.

Równanie (8) możemy napisać też w ten sposób:

$$(9) \quad M(U, V, W) \equiv \operatorname{cotg} A_2 \,.\, \operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_1(U, V, W) + \\ + \operatorname{cotg} A_1 \,.\, M_1(U, V, W) = 0,$$

skąd wynika (§ 25), że przedstawiony przez to równanie punkt, t. zn. punkt P, leży z punktami $m_1(U, V, W) = 0$ i $M_1(U, V, W) = 0$, t. zn. z punktami A_1 i B_1, na jednej prostej, innemi słowy prosta $A_1 B_1$ przechodzi przez punkt P.

Równanie (8) możemy napisać również w ten sposób:

$$(10)\qquad M(U,V,W) = \operatorname{cotg} A_3 \,.\, \operatorname{cotg} A_1 \,.\, m_2(U,V,W) + \\ + \operatorname{cotg} A_2 \,.\, M_2(U,V,W) = 0,$$

skąd znów wynika (§ 25), że prosta $A_2 B_2$ przechodzi przez punkt P.

W końcu, równanie (8) możemy napisać w ten sposób:

$$(11)\qquad M(U,V,W) = \operatorname{cotg} A_1 \,.\, \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_3(U,V,W) + \\ + \operatorname{cotg} A_3 \,.\, M_3(U,V,W) = 0,$$

skąd wynika (§ 25), że prosta $A_3 B_3$ przechodzi przez punkt P.

Otrzymaliśmy więc, że każda z prostych $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ przechodzi przez punkt P, t. zn. te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

Dowiedliśmy zatem poraz drugi, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Przy tej sposobności otrzymaliśmy równanie punktu przecięcia tych wysokości, którem jest równanie (8).

Po wykonaniu w równaniu (8) redukcji spostrzeżemy, że za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu przecięcia się wysokości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ możemy uważać liczby: $x_1 \operatorname{cotg} A_2 \operatorname{cotg} A_3 + x_2 \operatorname{cotg} A_3 \operatorname{cotg} A_1 + x_3 \operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cotg} A_2$, $y_1 \operatorname{cotg} A_2 \operatorname{cotg} A_3 + y_2 \operatorname{cotg} A_3 \operatorname{cotg} A_1 + y_3 \operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cotg} A_2$, $\operatorname{cotg} A_2 \operatorname{cotg} A_3 + \operatorname{cotg} A_3 \operatorname{cotg} A_1 + \operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cotg} A_2$.

Gdyby trójkąt $A_1 A_2 A_3$ nie był prostokątny, to wtedy moglibyśmy pomnożyć równanie (8) przez $\operatorname{tg} A_1 \operatorname{tg} A_2 \operatorname{tg} A_3$, a zatem za równanie punktu przecięcia się wysokości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ moglibyśmy uważać równanie

$$(12)\qquad \operatorname{tg} A_1 \,.\, m_1(U,V,W) + \operatorname{tg} A_2 \,.\, m_2(U,V,W) + \\ + \operatorname{tg} A_3 \,.\, m_3(U,V,W) = 0.$$

Za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu przecięcia się wysokości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ moglibyśmy więc wtedy uważać liczby: $x_1 \operatorname{tg} A_1 + x_2 \operatorname{tg} A_2 + x_3 \operatorname{tg} A_3$, $y_1 \operatorname{tg} A_1 + y_2 \operatorname{tg} A_2 + y_3 \operatorname{tg} A_3$, $\operatorname{tg} A_1 + \operatorname{tg} A_2 + \operatorname{tg} A_3$.

§ 46. Równanie oraz spółrzędne środka koła, opisanego na trójkącie. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 37). Weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a. Niechaj spółrzędnemi punktów A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, punkty A_1, A_2, A_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

Ryc. 37.

$$(1)\quad \begin{cases} m_1(U, V, W) = x_1 U + y_1 V + W = 0, \\ m_2(U, V, W) = x_2 U + y_2 V + W = 0, \\ m_3(U, V, W) = x_3 U + y_3 V + W = 0. \end{cases}$$

Środek C koła, opisanego na trójkącie $A_1 A_2 A_3$, połączmy prostemi z wierzchołkami tego trójkąta. Punkt przecięcia się prostych $A_1 C$ i a_1, względnie $A_2 C$ i a_2, względnie $A_3 C$ i a_3, oznaczmy przez B_1, względnie B_2, względnie B_3. Mamy

$$(2)\qquad (A_2, A_3, B_1) = \frac{B_1 A_2}{B_1 A_3}.$$

Spuśćmy z punktu B_1 na proste a_2 i a_3 prostopadłe, których spodki oznaczmy odpowiednio przez M_{12} i M_{13}.

Jeżeli kąt A_2 nie jest rozwarty, to $B_1 A_2 = \frac{B_1 M_{13}}{\sin A_2}$, jeżeli zaś kąt A_2 nie jest ostry, to $B_1 A_2 = \frac{B_1 M_{13}}{\sin(\pi - A_2)} = \frac{B_1 M_{13}}{\sin A_2}$, w każdym więc razie $B_1 A_2 = \frac{B_1 M_{13}}{\sin A_2}$. Analogicznie znajdziemy, iż niezależnie od wielkości kąta A_3 zachodzi równość $B_1 A_3 = \frac{B_1 M_{12}}{\sin A_3}$. A zatem [równ. (2)]:

$$(3)\qquad (A_2, A_3, B_1) = \frac{B_1 M_{13}}{B_1 M_{12}} \cdot \frac{\sin A_3}{\sin A_2}.$$

Lecz $B_1 M_{13} = A_1 B_1 \,.\, \cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{13}$ oraz $B_1 M_{12} = = A_1 B_1 \,.\, \cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{12}$, przeto [równ. (3)]:

(4) $$(A_2, A_3, B_1) = \frac{\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{13}}{\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{12}} \cdot \frac{\sin A_3}{\sin A_2}.$$

Z punktu C spuśćmy na prostą a_3 prostopadłą, której spodek oznaczmy przez N_3. Ponieważ proste $B_1 M_{13}$ i $C N_3$ są wzajemnie równoległe, przeto $\sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = \sphericalangle A_1 C N_3$. Lecz $\sphericalangle A_1 C N_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1 C A_2$, a więc

(5) $$\sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = \tfrac{1}{2} \sphericalangle A_1 C A_2.$$

Kąt środkowy $A_1 C A_2$ i kąt wpisany $A_1 A_3 A_2$, t. zn. kąt A_3, opierają się na jednej i tej samej cięciwie, a zatem albo $\frac{1}{2} \sphericalangle A_1 C A_2 = A_3$, albo $\frac{1}{2} \sphericalangle A_1 C A_2 = \pi - A_3$. Z równości (5) wynika więc albo równość $\sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = A_3$, albo równość $\sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = \pi - A_3$. Stąd zaś otrzymujemy, że albo $\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = = \cos A_3$, albo $\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = \cos(\pi - A_3) = -\cos A_3$, w każdym więc razie $\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{13} = |\cos A_3|$. Analogicznie znajdziemy, że $\cos \sphericalangle A_1 B_1 M_{12} = |\cos A_2|$. A zatem [równ. (4)]: $|(A_2, A_3, B_1)| = \left|\frac{\cos A_3}{\cos A_2} \cdot \frac{\sin A_3}{\sin A_2}\right|$, skąd wynika

$|(A_2, A_3, B_1)| = \left|\frac{2 \sin A_3 \cos A_3}{2 \sin A_2 \cos A_2}\right|$, czyli

(6) $$|(A_2, A_3, B_1)| = \left|\frac{\sin 2 A_3}{\sin 2 A_2}\right|.$$

Jeżeli kąty A_2 i A_3 są ostre, to wtedy z jednej strony $\frac{\sin 2 A_3}{\sin 2 A_2} > 0$, z drugiej zaś strony (§ 33) $(A_2, A_3, B_1) < 0$. Jeżeli jeden z kątów A_2 i A_3 jest rozwarty, to wtedy z jednej strony $\frac{\sin 2 A_3}{\sin 2 A_2} < 0$, z drugiej zaś strony (§ 33) $(A_2, A_3, B_1) > 0$. Jeżeli, w końcu, kąt A_3, względnie kąt A_2, jest prosty, to wtedy z jednej strony $\frac{\sin 2 A_3}{\sin 2 A_2}$ równa się 0, względnie $\pm \infty$, z drugiej zaś strony

(§ 33) stosunek podziału (A_2, A_3, B_1) równa się 0, względnie $\pm\infty$. Z równości (6) wynika zatem:

$$(7) \qquad (A_2, A_3, B_1) = -\frac{\sin 2A_3}{\sin 2A_2}.$$

Jeżeli więc (§ 34) kąt A_2 nie jest kątem prostym, to punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie $m_2(U,V,W)+$ $+\frac{\sin 2A_3}{\sin 2A_2}.m_3(U,V,W)=0$, czyli, po pomnożeniu przez $\sin 2A_2$, przez równanie $\sin 2A_2 . m_2(U,V,W)+\sin 2A_3 . m_3(U,V,W)=0$; jeżeli zaś kąt A_3 nie jest kątem prostym, to punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie $-\frac{\sin 2A_2}{\sin 2A_3}.m_2(U,V,W)-$ $-m_3(U,V,W)=0$, czyli, po pomnożeniu przez $-\sin 2A_3$, przez równanie $\sin 2A_2 . m_2(U,V,W)+\sin 2A_3 . m_3(U,V,W)=0$.

Zawsze więc punkt B_1 możemy przedstawić przez równanie

$$(8) \quad M_1(U,V,W)=\sin 2A_2 . m_2(U,V,W)+ \\ +\sin 2A_3 . m_3(U,V,W)=0.$$

Analogicznie, dla punktów B_2 i B_3 otrzymamy odpowiednio równania:

$$(9) \quad M_2(U,V,W)=\sin 2A_3 . m_3(U,V,W)+ \\ +\sin 2A_1 . m_1(U,V,W)=0,$$

$$(10) \quad M_3(U,V,W)=\sin 2A_1 . m_1(U,V,W)+ \\ +\sin 2A_2 . m_2(U,V,W)=0.$$

Rozumując dalej w sposób analogiczny do tego, w jaki rozumowaliśmy w dwu §§ poprzednich, przyjdziemy do wniosku, że r ó w n a n i e

$$(11) \quad M(U,V,W)=\sin 2A_1 . m_1(U,V,W)+ \\ +\sin 2A_2 . m_2(U,V,W)+\sin 2A_3 . m_3(U,V,W)=0$$

p r z e d s t a w i a ś r o d e k k o ł a, o p i s a n e g o n a t r ó j k ą c i e $A_1 A_2 A_3$. Za s p ó ł r z ę d n e j e d n o r o d n e H e s s e'g o tego środka możemy więc uważać liczby: $x_1 \sin 2A_1+$ $+x_2 \sin 2A_2+x_3 \sin 2A_3$, $y_1 \sin 2A_1+y_2 \sin 2A_2+y_3 \sin 2A_3$, $\sin 2A_1+\sin 2A_2+\sin 2A_3$.

§ 47. Twierdzenie Euler'a. — Twierdzenie Euler'a brzmi w sposób następujący:

Środek ciężkości trójkąta, punkt przecięcia się wysokości trójkąta i środek koła, opisanego na trójkącie, leżą na jednej prostej.

Dowód. Weźmy pod uwagę jakikolwiek trójkąt $A_1 A_2 A_3$. W płaszczyźnie tego trójkąta weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a. Niechaj równaniami punktów A_1, A_2, A_3 w układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, będą odpowiednio równania:

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} m_1(U, V, W) = x_1 U + y_1 V + W = 0, \\ m_2(U, V, W) = x_2 U + y_2 V + W = 0, \\ m_3(U, V, W) = x_3 U + y_3 V + W = 0. \end{array} \right.$$

Środek ciężkości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ możemy wtedy przedstawić przez równanie (§ 44)

$$(2) \quad M(U,V,W) = m_1(U,V,W) + m_2(U,V,W) + m_3(U,V,W) = 0;$$

punkt przecięcia się wysokości trójkąta $A_1 A_2 A_3$ możemy przedstawić przez równanie (§ 45)

$$(3) \quad M'(U,V,W) = \operatorname{cotg} A_2 \operatorname{cotg} A_3 \,.\, m_1(U,V,W) + \\ + \operatorname{cotg} A_3 \operatorname{cotg} A_1 \,.\, m_2(U,V,W) + \operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cotg} A_2 \,.\, m_3(U,V,W) = 0;$$

w końcu, środek koła, opisanego na trójkącie $A_1 A_2 A_3$, możemy przedstawić przez równanie (§ 46)

$$(4) \quad M''(U,V,W) = \sin 2A_1 \,.\, m_1(U,V,W) + \sin 2A_2 \,.\, m_2(U,V,W) + \\ + \sin 2A_3 \,.\, m_3(U,V,W) = 0.$$

Pomnóżmy strony lewe równań (2), (3), (4) odpowiednio przez $\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$, $-\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$, $-\frac{1}{2}$, i otrzymane iloczyny dodajmy do siebie, innemi słowy utwórzmy sumę: $\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, M(U, V, W) -$

$- \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, M'(U,V,W) - \frac{1}{2} \cdot M''(U,V,W)$. Otrzymamy:

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, M(U,V,W) - \\ - \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, M'(U,V,W) - \\ -\frac{1}{2}\cdot M''(U,V,W) = \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, [M(U,V,W) - \\ - M'(U,V,W)] - \frac{1}{2}\cdot M''(U,V,W). \end{array}\right.$$

Lecz [równ. (2) i (3)]: $M(U, V, W) - M'(U, V, W) = (1 - \cot g A_2 \cot g A_3) \,.\, m_1(U,V,W) + (1 - \cot g A_3 \cot g A_1) \,.\, m_2(U,V,W) + (1 - \cot g A_1 \cot g A_2) \,.\, m_3(U, V, W)$, czyli

$$(6)\quad M(U,V,W) - M'(U,V,W) = -\frac{\cos(A_2+A_3)}{\sin A_2 \sin A_3}\cdot m_1(U,V,W) - \frac{\cos(A_3+A_1)}{\sin A_3 \sin A_1}\cdot m_2(U,V,W) - \frac{\cos(A_1+A_2)}{\sin A_1 \sin A_2}\cdot m_3(U,V,W).$$

Ponieważ kąty A_1, A_2, A_3 są kątami wewnętrznymi trójkąta, przeto $A_1 + A_2 + A_3 = \pi$, a zatem $\cos(A_2+A_3) = \cos(\pi - A_1) = -\cos A_1$, $\cos(A_3+A_1) = \cos(\pi - A_2) = -\cos A_2$, $\cos(A_1+A_2) = \cos(\pi - A_3) = -\cos A_3$. Tożsamość (6) możemy więc napisać w ten sposób:

$$(7)\quad M(U,V,W) - M'(U,V,W) = \frac{\cos A_1}{\sin A_2 \sin A_3}\cdot m_1(U,V,W) + \frac{\cos A_2}{\sin A_3 \sin A_1}\cdot m_2(U,V,W) + \frac{\cos A_3}{\sin A_1 \sin A_2}\cdot m_3(U,V,W).$$

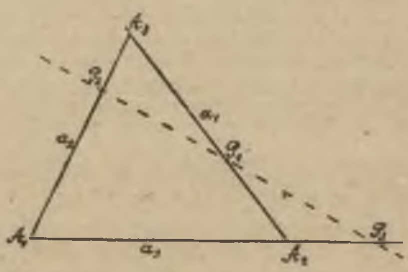
Z tożsamości (5) i (7) wynika: $\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \,.\, M(U,V,W) - \sin A_1 \sin A_1 \sin A_3 \,.\, M'(U,V,W) - \frac{1}{2}\,.\, M''(U,V,W) = \sin A_1 \cos A_1 \,.\, m_1(U,V,W) + \sin A_2 \cos A_2 \,.\, m_2(U,V,W) + \sin A_3 \cos A_3 \,.\, m_3(U,V,W) - \frac{1}{2}\,.\, M''(U,V,W) = \sin A_1 \cos A_1 \,.\, m_1(U,V,W) + \sin A_2 \cos A_2 \,.\, m_2(U,V,W) + \sin A_3 \cos A_3 \,.\, m_3(U,V,W) - \frac{1}{2}[\sin 2A_1 \,.\, m_1(U,V,W) + \sin 2A_2 \,.\, m_2(U,V,W) + \sin 2A_3 \,.\, m_3(U,V,W)] = (\sin A_1 \cos A_1 - \frac{1}{2}\sin 2A_1) \,.\, m_1(U,V,W) + (\sin A_2 \cos A_2 - \frac{1}{2}\sin 2A_2) \,.\, m_2(U,V,W) + (\sin A_3 \cos A_3 - \frac{1}{2}\sin 2A_3) \,.\, m_3(U,V,W) = 0 \,.\, m_1(U,V,W) + 0 \,.\, m_2(U,V,W) + 0 \,.\, m_3(U,V,W) = 0.$

Otrzymaliśmy więc, że

$$(8)\ \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 . M(U,V,W) - \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 . M'(U,V,W) - \\ - \frac{1}{2} . M''(U,V,W) = 0,$$

co dowodzi (§ 26) prawdziwości twierdzenia Euler'a.

§ 48. Twierdzenie Menelaus'a albo Carnot'a. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 38). Na bokach a_1, a_2, a_3 tego trójkąta niechaj będą dane odpowiednio 3 punkty (niekoniecznie właściwe) P_1, P_2, P_3, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d. Stosunki podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:



Rys. 38.

$$(1) \qquad (A_2, A_3, P_1) = \mu_1,\ (A_3, A_1, P_2) = \mu_2,\ (A_1, A_2, P_3) = \mu_3.$$

Założmy najpierw, że żaden z tych stosunków podziału nie jest równy $\pm\infty$. W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy j a k i k o l w i e k układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Niechaj równaniami punktów A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio równania $m_1(U, V, W) = 0$, $m_2(U, V, W) = 0$, $m_3(U, V, W) = 0$. Punkty P_1, P_2, P_3 możemy wtedy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 34):

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} m_2(U,V,W) - \mu_1 . m_3(U,V,W) = 0, \\ m_3(U,V,W) - \mu_2 . m_1(U,V,W) = 0, \\ m_1(U,V,W) - \mu_3 . m_2(U,V,W) = 0. \end{array} \right.$$

Spółrzędne prostej d oznaczmy przez U', V', W'. Prosta d przechodzi przez każdy z punktów P_1, P_2, P_3, zatem spółrzędne tej prostej muszą równaniom punktów P_1, P_2, P_3 czynić zadość, t. zn. mamy:

$$
(3) \qquad \left| \begin{array}{l} m_2(U', V', W') - \mu_1 \, . \, m_3(U', V', W') = 0, \\ m_3(U', V', W') - \mu_2 \, . \, m_1(U', V', W') = 0, \\ m_1(U', V', W') - \mu_3 \, . \, m_2(U', V', W') = 0. \end{array} \right.
$$

Czy jest możliwe, aby którakolwiek z liczb $m_1(U', V', W')$, $m_2(U', V', W')$, $m_3(U', V', W')$ była równa 0? Gdyby było $m_1(U', V', W') = 0$, to (ponieważ, według założenia, liczba μ_2 jest skończona) z drugiej z pośród równości (3) wynikałaby równość $m_3(U', V', W') = 0$, z tej zaś równości oraz z pierwszej z pośród równości (3) (wobec tego, że liczba μ_1 jest skończona) wynikałaby równość $m_2(U', V', W') = 0$. Byłyby więc wtedy spełnione 3 równości: $m_1(U', V', W') = 0$, $m_2(U', V', W') = 0$, $m_3(U', V', W') = 0$, skąd wynikałoby, że prosta d przechodzi przez każdy z punktów A_1, A_2, A_3, co nie jest możliwe (albowiem punkty A_1, A_2, A_3, będąc wierzchołkami trójkąta, nie mogą leżeć na jednej prostej). Nie jest więc możliwe, aby było $m_1(U', V', W') = 0$. Tak samo możemy się przekonać, że nie jest możliwe, aby było $m_2(U', V', W') = 0$ albo $m_3(U', V', W') = 0$. A zatem z równości (3) możemy wyprowadzić równości:

$$
(4) \quad \mu_1 = \frac{m_2(U', V', W')}{m_3(U', V', W')}, \quad \mu_2 = \frac{m_3(U', V', W')}{m_1(U', V', W')}, \quad \mu_3 = \frac{m_1(U', V', W')}{m_2(U', V', W')} .
$$

Z równości zaś (4) otrzymujemy:

$$
(5) \quad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = \frac{m_2(U', V', W')}{m_3(U', V', W')} \cdot \frac{m_3(U', V', W')}{m_1(U', V', W')} \cdot \frac{m_1(U', V', W')}{m_2(U', V', W')} = 1.
$$

Jak więc widzimy, iloczyn stosunków podziaju μ_1, μ_2, μ_3 jest równy 1.

Do tego wniosku przyszliśmy w założeniu, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $\pm\infty$.

Załóżmy teraz, że np. $\mu_1 = \pm\infty$. Wtedy punkt P_1 nakrywa punkt A_3, prosta d przechodzi więc przez punkt A_3. Gdyby prosta d była różna od prostej a_2, to punkt P_2, jako punkt, wspólny prostym d i a_2, też nakrywałby punkt A_3, t. zn. byłoby $\mu_2 = 0$. Gdyby zaś prosta d nakrywała prostą a_2, to wtedy punkt P_3, jako punkt, wspólny prostym d i a_3, nakrywałby punkt A_1, t. zn. byłoby $\mu_3 = 0$.

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli $\mu_1 = \pm\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_2 i μ_3 jest równa 0. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = \pm\infty$, względnie $\mu_3 = \pm\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_3 i μ_1, względnie jedna z liczb μ_1 i μ_2, jest równa 0.

Przyjmijmy teraz, że jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ oraz na jego bokach a_1, a_2, a_3 są dane odpowiednio 3 punkty P_1, P_2, P_3, co do których już nie zakładamy, że leżą na jednej prostej. Stosunki podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) znów oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3 t. zn.:

$$(A_2, A_3, P_1) = \mu_1, \quad (A_3, A_1, P_2) = \mu_2, \quad (A_1, A_2, P_3) = \mu_3. \tag{6}$$

Załóżmy, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $\pm\infty$, przyczem ich iloczyn jest równy 1, t. zn.:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1. \tag{7}$$

W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy j a k i k o l w i e k układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go i niechaj równaniami punktów A_1, A_2, A_3 będą w tym układzie odpowiednio równania $m_1(U, V, W) = 0$, $m_2(U, V, W) = 0$, $m_3(U, V, W) = 0$. Punkty P_1, P_2, P_3 możemy wtedy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$\left|\begin{array}{l} M_1(U, V, W) = m_2(U, V, W) - \mu_1 . m_3(U, V, W) = 0, \\ M_2(U, V, W) = m_3(U, V, W) - \mu_2 . m_1(U, V, W) = 0, \\ M_3(U, V, W) = m_1(U, V, W) - \mu_3 . m_2(U, V, W) = 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Mamy tożsamość: $M_1(U, V, W) + \mu_1 . M_2(U, V, W) + \mu_1 \mu_2 . M_3(U, V, W) = m_2(U, V, W) - \mu_1 . m_3(U, V, W) + \mu_1 . m_3 . (U, V, W) - \mu_1 \mu_2 . m_1(U, V, W) + \mu_1 \mu_2 . m_1(U, V, W) - \mu_1 \mu_2 \mu_3 . m_2(U, V, W)$, czyli tożsamość [równ. (7)]:

$$M_1(U, V, W) + \mu_1 . M_2(U, V, W) + \mu_1 \mu_2 . M_3(U, V, W) = 0, \tag{9}$$

skąd wynika (§ 26), że punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej.

Załóżmy teraz, że jedna z pośród liczb μ_1, μ_2, μ_3 jest równa $\pm\infty$, inna zaś jest równa 0. Przypuśćmy np., że $\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$. Wtedy zarówno punkt P_1, jak też punkt P_2, nakrywa punkt A_3, zatem punkty P_1, P_2, P_3 możemy uważać za leżące na jednej prostej. Gdyby zaś było

14*

$\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, to punkt P_1 nakrywałby punkt A_3, punkt P_3 zaś nakrywałby punkt A_1, obydwa punkty P_1 i P_3 leżałyby więc na prostej a_2, na której leży punkt P_2, a zatem punkty P_1, P_2, P_3 leżałyby na jednej prostej. Tak samo możemy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, albo $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$, to punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

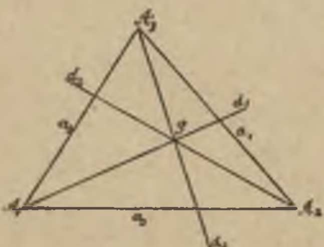
Jeżeli jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ i na jego bokach a_1, a_2, a_3 są dane odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3, to w razie, gdy żaden ze stosunków podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) nie jest równy $\pm\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej jest spełnienie równości

$$(A_2, A_3, P_1) \,.\, (A_3, A_1, P_2) \,.\, (A_1, A_2, P_3) = 1,$$

w razie zaś, gdy jeden z tych stosunków podziału jest równy $\pm\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków podziału.

To twierdzenie nazywamy *twierdzeniem Menelaus'a* albo *Carnot'a*.

§ 49. Twierdzenie Céva'y. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 39). Niechaj przez wierzchołki A_1, A_2, A_3 tego trójkąta przechodzą odpowiednio 3 proste d_1, d_2, d_3, posiadające jeden punkt P (niekoniecznie właściwy) wspólny. Prostym a_1, a_2, a_3 nadajmy *jakiekolwiek* zwroty i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:



Rys. 39.

(1) $$(a_2, a_3, d_1) = \mu_1, \; (a_3, a_1, d_2) = \mu_2, \; (a_1, a_2, d_3) = \mu_3.$$

Załóżmy najpierw, że żaden z tych stosunków wstaw nie jest równy $\pm\infty$. W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek leży wewnątrz trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 będą odpowiednio równania: $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$. Nadajmy teraz prostej a_1 ten zwrot, przy którym punkt A_3 następuje po punkcie A_2, prostej a_2 ten zwrot, przy którym punkt A_1 następuje po punkcie A_3, prostej a_3 ten zwrot, przy którym punkt A_2 następuje po punkcie A_1, i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1', μ_2', μ_3'. Ponieważ liczby μ_1', μ_2', μ_3' mogą się różnić od liczb μ_1, μ_2, μ_3 tylko znakami (§ 35), założyliśmy zaś, że liczby μ_1, μ_2, μ_3 są skończone, przeto liczby μ_1', μ_2', μ_3' też są skończone. W przyjętym układzie spółrzędnych Descartes'a proste d_1, d_2, d_3 możemy zatem przedstawić odpowiednio przez równania (§ 37): $l_2(x, y, 1) - \mu_1' . l_3(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) - \mu_2' . l_1(x, y, 1) = 0$, $l_1(x, y, 1) - \mu_3' . l_2(x, y, 1) = 0$. W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, proste d_1, d_2, d_3 możemy więc przedstawić odpowiednio przez równania:

$$
(2) \qquad \left| \begin{aligned}
& l_2(X, Y, Z) - \mu_1' . l_3(X, Y, Z) = 0, \\
& l_3(X, Y, Z) - \mu_2' . l_1(X, Y, Z) = 0, \\
& l_1(X, Y, Z) - \mu_3' . l_2(X, Y, Z) = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Spółrzędne punktu P oznaczmy przez X', Y', Z'. Punkt P należy do każdej z prostych d_1, d_2, d_3, zatem spółrzędne tego punktu muszą równaniom prostych d_1, d_2, d_3 czynić zadość, t. zn. mamy:

$$
(3) \qquad \left| \begin{aligned}
& l_2(X', Y', Z') - \mu_1' . l_3(X', Y', Z') = 0, \\
& l_3(X', Y', Z') - \mu_2' . l_1(X', Y', Z') = 0, \\
& l_1(X', Y', Z') - \mu_3' . l_2(X', Y', Z') = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Czy jest możliwe, aby którakolwiek z liczb $l_1(X', Y', Z')$, $l_2(X', Y', Z')$, $l_3(X', Y', Z')$ była równa 0? Gdyby było $l_1(X', Y', Z') = 0$, to (ponieważ liczba μ_2' jest skończona) z drugiej z pośród równości (3) wynikałaby równość $l_3(X', Y', Z') = 0$, z tej zaś równości oraz z pierwszej z pośród równości (3) (wobec tego, że liczba μ_1' jest skończona) wynikałaby równość $l_2(X', Y', Z')=0$. Byłyby więc wtedy spełnione 3 równości: $l_1(X', Y', Z')=0$, $l_2(X', Y', Z')=0$, $l_3(X', Y', Z')=0$, skąd wynikałoby, że punkt P należy do każdej z prostych a_1, a_2, a_3, co nie jest możliwe (albowiem proste a_1, a_2, a_3, będąc bokami trójkąta, nie mogą posiadać punktu wspólnego). Nie jest więc możliwe, aby było $l_1(X', Y', Z')=0$. Tak samo możemy się przekonać, że nie jest możliwe, aby było $l_2(X', Y', Z')=0$ albo $l_3(X', Y', Z')=0$. A zatem z równości (3) możemy wyprowadzić równości:

$$\mu_1'=\frac{l_2(X',Y',Z')}{l_3(X',Y',Z')},\ \mu_2'=\frac{l_3(X',Y',Z')}{l_1(X',Y',Z')},\ \mu_3'=\frac{l_1(X',Y',Z')}{l_2(X',Y',Z')}. \tag{4}$$

Z równości zaś (4) otrzymujemy:

$$\mu_1'\mu_2'\mu_3'=\frac{l_2(X',Y',Z')}{l_3(X',Y',Z')}\cdot\frac{l_3(X',Y',Z')}{l_1(X',Y',Z')}\cdot\frac{l_1(X',Y',Z')}{l_2(X',Y',Z')}=1. \tag{5}$$

Jak więc widzimy, zachodzi równość $\mu_1'\mu_2'\mu_3'=1$.

Lecz jeżeli zmienimy zwrot jednej z prostych a_1, a_2, a_3, np. prostej a_1, na przeciwny, to z pośród 3-ch stosunków wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) drugi i trzeci stosunek zmieni znak (§ 35), pierwszy zaś pozostanie bez zmiany, a zatem iloczyn tych stosunków wstaw nie ulegnie żadnej zmianie. Tak samo możemy się przekonać, że zmiana zwrotu prostej a_2, względnie prostej a_3, na przeciwny nie wpływa wcale na wartość iloczynu 3-ch rozpatrywanych stosunków wstaw. A zatem wartość iloczynu $(a_2, a_3, d_1)(a_3, a_1, d_2)(a_1, a_2, d_3)$ od wyboru zwrotów prostych a_1, a_2, a_3 nie zależy. Stąd zaś wynika, że równość $\mu_1'\mu_2'\mu_3'=1$ pociąga za sobą równość $\mu_1\mu_2\mu_3=1$.

Otrzymaliśmy zatem, że $\mu_1\mu_2\mu_3=1$.

Do tego wniosku przyszliśmy w założeniu, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $\pm\infty$.

Załóżmy teraz, że np. $\mu_1=\pm\infty$. Wtedy prosta d_1 nakrywa prostą a_3, punkt P należy zatem do prostej a_3. Gdyby punkt P był różny od punktu A_2, to prosta d_2, jako prosta, zawierająca punkty P i A_2, też nakrywałaby prostą a_3, t. zn.

byłoby $\mu_2 = 0$. Gdyby zaś punkt P nakrywał punkt A_2, to wtedy prosta d_3, jako prosta, zawierająca punkty P i A_3, nakrywałaby prostą a_1, t. zn. byłoby $\mu_3 = 0$.

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli $\mu_1 = \pm\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_2 i μ_3 jest równa 0. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = +\infty$, względnie $\mu_3 = +\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_3 i μ_1, względnie jedna z liczb μ_1 i μ_2, jest równa 0.

Przyjmijmy teraz, że jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$, przyczem przez jego wierzchołki A_1, A_2, A_3 przechodzą odpowiednio 3 proste d_1, d_2, d_3, co do których już nie zakładamy, że posiadają punkt wspólny. Stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3), odpowiadające pewnym wybranym przez nas dowolnie zwrotom prostych a_1, a_2, a_3, oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:

$$(6) \qquad (a_2, a_3, d_1) = \mu_1, \quad (a_3, a_1, d_2) = \mu_2, \quad (a_1, a_2, d_3) = \mu_3.$$

Załóżmy, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $\pm\infty$, przyczem ich iloczyn jest równy 1, t. zn.:

$$(7) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

Nadajmy prostej a_1 ten zwrot, przy którym punkt A_3 następuje po punkcie A_2, prostej a_2 ten zwrot, przy którym punkt A_1 następuje po punkcie A_3, prostej a_3 ten zwrot, przy którym punkt A_2 następuje po punkcie A_1, i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1', μ_2', μ_3'. Jak widzieliśmy wyżej, wartość iloczynu $(a_2, a_3, d_1)\,(a_3, a_1, d_2)\,(a_1, a_2, d_3)$ od wyboru zwrotów prostych a_1, a_2, a_3 nie zależy, zatem równość (7) pociąga za sobą równość

$$(8) \qquad \mu_1' \mu_2' \mu_3' = 1.$$

W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek znajduje się wewnątrz trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Proste d_1, d_2, d_3 możemy przedstawić w tym układzie odpowiednio przez równania (§ 37):

$$(9) \qquad \begin{cases} L_1(x,y,1) = l_2(x,y,1) - \mu_1' \, . \, l_3(x,y,1) = 0, \\ L_2(x,y,1) = l_3(x,y,1) - \mu_2' \, . \, l_1(x,y,1) = 0, \\ L_3(x,y,1) = l_1(x,y,1) - \mu_3' \, . \, l_2(x,y,1) = 0. \end{cases}$$

Mamy tożsamość: $L_1(x,y,1) + \mu_1' \, . \, L_2(x,y,1) + \mu_1' \mu_2' \, . \, L_3(x,y,1) = l_2(x,y,1) - \mu_1' \, . \, l_3(x,y,1) + \mu_1' \, . \, l_3(x,y,1) - \mu_1' \mu_2' \, . \, l_1(x,y,1) + \mu_1' \mu_2' \, . \, l_1(x,y,1) - \mu_1' \mu_2' \mu_3' \, . \, l_2(x,y,1)$, czyli tożsamość [równ. (8)]:

$$(10) \qquad L_1(x,y,1) + \mu_1' \, . \, L_2(x,y,1) + \mu_1' \mu_2' \, . \, L_3(x,y,1) = 0,$$

skąd wynika (§ 26), że proste d_1, d_2, d_3 posiadają punkt wspólny.

Załóżmy teraz, że jedna z pośród liczb μ_1, μ_2, μ_3 jest równa $\pm\infty$, inna zaś jest równa 0. Przypuśćmy np., że $\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$. Wtedy zarówno prosta d_1, jak też prosta d_2, nakrywa prostą a_3, zatem proste d_1, d_2, d_3 posiadają punkt wspólny. Gdyby zaś było $\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, to prosta d_1 nakrywałaby prostą a_3, prosta d_3 zaś nakrywałaby prostą a_1, obiedwie proste d_1 i d_3 przechodziłyby więc przez punkt A_2, przez który przechodzi prosta d_2, a zatem proste d_1, d_2, d_3 posiadałyby punkt wspólny. Tak samo możemy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, albo $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$, to proste d_1, d_2, d_3 posiadają punkt wspólny.

Mamy zatem twierdzenie następujące:

Jeżeli jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ i przez jego wierzchołki A_1, A_2, A_3 przechodzą odpowiednio proste d_1, d_2, d_3, to nadawszy prostym a_1, a_2, a_3 jakiekolwiek zwroty, możemy powiedzieć, że: w razie, gdy żaden ze stosunków wstaw (a_2, a_3, d_1), $(a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3)$ nie jest równy $\pm\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego jest spełnienie równości

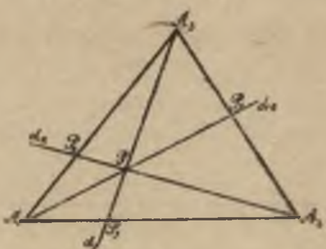
$$(a_2, a_3, d_1) \, . \, (a_3, a_1, d_2) \, . \, (a_1, a_2, d_3) = 1,$$

w razie zaś, gdy jeden z tych stosunków wstaw jest równy $\pm\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków wstaw.

To twierdzenie nazywamy twierdzeniem Céva'y.

Stosując twierdzenie Céva'y moglibyśmy z łatwością dowieść tych twierdzeń, jakich dowiedliśmy w §§ 38, 39, 40, 41, 42, 43. Chcąc np. dowieść, że dwusieczne d_1, d_2, d_3 kątów wewnętrznych trójkąta $A_1 A_2 A_3$ posiadają punkt wspólny, wystarczyłoby powołać się na to, iż przy nadaniu prostym a_1, a_2, a_3 odpowiednich zwrotów mamy (§ 38): $(a_2, a_3, d_1) = 1$, $(a_3, a_1, d_2) = 1$, $(a_1, a_2, d_3) = 1$, albowiem stąd wynikałoby, że $(a_2, a_3, d_1)\,(a_3, a_1, d_2)\,(a_1, a_2, d_3) = 1$.

§ 50. Inna postać twierdzenia Céva'y. — Niechaj będzie dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ (rys. 40). Niechaj przez wierzchołki A_1, A_2, A_3 tego trójkąta przechodzą odpowiednio 3 proste d_1, d_2, d_3, posiadające jeden punkt P (niekoniecznie właściwy) wspólny. Punkty przecięcia się prostych d_1, d_2, d_3 z prostemi a_1, a_2, a_3 oznaczmy odpowiednio przez P_1, P_2, P_3. Stosunki podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:



Rys. 40.

$$(1)\quad \left| \begin{aligned} &(A_2, A_3, P_1) = \mu_1,\ (A_3, A_1, P_2) = \\ &\qquad = \mu_2,\ (A_1, A_2, P_3) = \mu_3. \end{aligned} \right.$$

Załóżmy najpierw, że żaden z tych stosunków podziału nie jest równy $\pm\infty$. W płaszczyźnie trójkąta A_1, A_2, A_3 weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Niechaj równaniami punktów A_1, A_2, A_3 w tym układzie będą odpowiednio równania $m_1(U,V,W) = 0$, $m_2(U,V,W) = 0$, $m_3(U,V,W) = 0$. Punkty P_1, P_2, P_3 możemy wtedy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 34):

$$(2)\quad \left| \begin{aligned} &M_1(U, V, W) \equiv m_2(U, V, W) - \mu_1 \cdot m_3(U, V, W) = 0, \\ &M_2(U, V, W) \equiv m_3(U, V, W) - \mu_2 \cdot m_1(U, V, W) = 0, \\ &M_3(U, V, W) \equiv m_1(U, V, W) - \mu_3 \cdot m_2(U, V, W) = 0. \end{aligned} \right.$$

Gdyby punkt P nakrywał punkt A_1, to w takim razie prosta d_2, jako prosta, zawierająca punkty P i A_2, nakrywałaby prostą a_3, a zatem punkt P_2, jako punkt, wspólny prostym d_2 i a_2, nakrywałby punkt A_1, t. zn. byłoby $\mu_2 = \pm \infty$, co przeczyłoby założeniu. Nie jest więc możliwe, aby punkt P nakrywał punkt A_1. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że punkt P nie może nakrywać również żadnego z punktów A_2 i A_3.

Gdyby punkt P leżał na prostej a_1, to w takim razie prosta d_3, jako prosta, zawierająca punkt A_3 oraz różny od niego punkt P, nakrywałaby prostą a_1, a zatem punkt P_3, jako punkt, wspólny prostym d_3 i a_3, nakrywałby punkt A_2, t. zn. byłoby $\mu_3 = \pm \infty$, co przeczyłoby założeniu. Nie jest więc możliwe, aby punkt P leżał na prostej a_1. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że punkt P nie może leżeć również na żadnej z prostych a_2 i a_3. Stąd zaś wynika, że punkt P jest różny od każdego z punktów P_1, P_2, P_3.

Punkt P, jako leżący na prostej, łączącej punkty A_1 i P_1, i przytem różny od punktu P_1, możemy przedstawić przez równanie (§ 25): $M(U, V, W) = m_1(U, V, W) + \lambda . M_1(U, V, W) = 0$, czyli przez równanie

$$(3)\quad M(U, V, W) = m_1(U, V, W) + \lambda . m_2(U, V, W) - \lambda \mu_1 . m_3(U, V, W) = 0.$$

Z równania (3) wynika, że punkt P leży na prostej, łączącej punkt

$$(4)\qquad m_1(U, V, W) + \lambda . m_2(U, V, W) = 0$$

z punktem $m_3(U, V, W) = 0$, t. zn. z punktem A_3. Innemi słowy prosta, łącząca punkty P i A_3, t. zn. prosta d_3, przechodzi przez punkt, jaki przedstawia równanie (4). Lecz równanie (4) przedstawia pewien punkt, leżący na prostej, łączącej punkty $m_1(U, V, W) = 0$ i $m_2(U, V, W) = 0$, t. zn. na prostej a_3. A zatem punkt, jaki przedstawia równanie (4), należy do każdej z prostych d_3 i a_3, t. zn. jest punktem przecięcia się P_3 tych dwu prostych.

Z równania (4), przedstawiającego punkt P_3, wynika (§ 34): $(A_1, A_2, P_3) = -\lambda$. Lecz mieliśmy [równ. (1)] $(A_1, A_2, P_3) =$

$= \mu_3$, a zatem $\lambda = -\mu_3$. Równanie (3), przedstawiające punkt P, możemy więc napisać w ten sposób:

$$(5)\qquad M(U,V,W) = m_1(U,V,W) - \mu_3 . m_2(U,V,W) + \\ + \mu_1\mu_3 . m_3(U,V,W) = 0.$$

Z równania (5) wynika, że punkt P leży na prostej, łączącej punkt

$$(6)\qquad m_1(U,V,W) + \mu_1\mu_3 . m_3(U,V,W) = 0$$

z punktem $m_2(U,V,W) = 0$, t. zn. z punktem A_2. Innemi słowy prosta, łącząca punkty P i A_2, t. zn. prosta d_2, przechodzi przez punkt, jaki przedstawia równanie (6). Lecz równanie (6) przedstawia pewien punkt, leżący na prostej, łączącej punkty $m_1(U,V,W) = 0$ i $m_3(U,V,W) = 0$, t. zn. na prostej a_2. A zatem punkt, jaki przedstawia równanie (6), należy do każdej z prostych d_2 i a_2, t. zn. jest punktem przecięcia się P_2 tych dwu prostych.

Z równania (6), przedstawiającego punkt P_2, wynika (§ 34): $(A_3, A_1, P_2) = -\frac{1}{\mu_1\mu_3}$. Lecz mieliśmy [równ. (1)]: $(A_3, A_1, P_2) = \mu_2$, zatem $\mu_2 = -\frac{1}{\mu_1\mu_3}$, skąd wynika:

$$(7)\qquad \mu_1\mu_2\mu_3 = -1.$$

Do tego wniosku przyszliśmy w założeniu, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $+\infty$.

Załóżmy teraz, że np. $\mu_1 = +\infty$. Wtedy punkt P_1 nakrywa punkt A_3, a zatem prosta d_1 nakrywa prostą a_2, punkt P więc należy do prostej a_2. Gdyby punkt P był różny od punktu A_3, to prosta d_3, jako prosta, zawierająca punkty P i A_3, nakrywałaby prostą a_2, a zatem punkt P_3, jako punkt wspólny prostym d_3 i a_3, nakrywałby punkt A_1, t. zn. byłoby $\mu_3 = 0$. Gdyby zaś punkt P nakrywał punkt A_3, to prosta d_2, jako prosta, zawierająca punkty P i A_2, nakrywałaby prostą a_1, a zatem punkt P_2, jako punkt, wspólny prostym d_2 i a_2, nakrywałby punkt A_3, t. zn. byłoby $\mu_2 = 0$.

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli $\mu_1 = \pm\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_2 i μ_3 jest równa 0. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = \pm\infty$, względnie $\mu_3 = \pm\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_3 i μ_1, względnie jedna z liczb μ_1 i μ_2, jest równa 0.

Przyjmijmy teraz, że jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$, przyczem przez jego wierzchołki A_1, A_2, A_3 przechodzą odpowiednio 3 proste d_1, d_2, d_3, co do których już nie zakładamy, że posiadają punkt wspólny. Punkty przecięcia się prostych d_1, d_2, d_3 z prostemi a_1, a_2, a_3 oznaczmy odpowiednio przez P_1, P_2, P_3. Stosunki podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:

$$(8) \qquad (A_2, A_3, P_1) = \mu_1, \quad (A_3, A_1, P_2) = \mu_2, \quad (A_1, A_2, P_3) = \mu_3.$$

Załóżmy najpierw, że żaden z tych stosunków podziału nie jest równy $\pm\infty$, przyczem ich iloczyn jest równy -1, t. zn.:

$$(9) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1.$$

W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go i niechaj równaniami punktów A_1, A_2, A_3 będą w tym układzie odpowiednio równania $m_1(U, V, W) = 0$, $m_2(U, V, W) = 0$, $m_3(U, V, W) = 0$. Punkty P_1, P_2, P_3 możemy wtedy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(10) \qquad \left| \begin{aligned} M_1(U, V, W) &= m_2(U, V, W) - \mu_1 . m_3(U, V, W) = 0, \\ M_2(U, V, W) &= m_3(U, V, W) - \mu_2 . m_1(U, V, W) = 0, \\ M_3(U, V, W) &= m_1(U, V, W) - \mu_3 . m_2(U, V, W) = 0. \end{aligned} \right.$$

Weźmy teraz pod uwagę równość:

$$(11) \qquad \begin{aligned} M(U, V, W) = m_1(U, V, W) - \mu_3 . m_2(U, V, W) + \\ + \mu_1 \mu_3 . m_3(U, V, W) = 0. \end{aligned}$$

Gdyby równość (11) była tożsamością, to (§ 26) punkty A_1, A_2, A_3 leżałyby na jednej prostej, co nie jest możliwe. Równość (11) jest więc równaniem jednorodnem stopnia 1-ego z 3-ema niewiadomemi U, V, W, przedstawia ona zatem pewien w zupełności określony punkt P.

Równanie (11) możemy napisać też w ten sposób:

$$(12) \qquad M(U, V, W) = m_1(U, V, W) - \mu_3 \,.\, M_1(U, V, W) = 0,$$

skąd wynika (§ 25), że przedstawiony przez to równanie punkt, t. zn. punkt P, leży z punktami $m_1(U, V, W) = 0$ i $M_1(U, V, W) = 0$, t. zn. z punktami A_1 i P_1, na jednej prostej, innemi słowy prosta $A_1 P_1$, t. zn. prosta d_1, przechodzi przez punkt P.

Ze względu na równość (9) równanie (11) możemy napisać również w ten sposób:

$$(13) \qquad M(U, V, W) = -\mu_3 \,.\, m_2(U, V, W) + \mu_1 \mu_3 \,.\, M_2(U, V, W) = 0,$$

skąd znów wynika, że prosta d_2 przechodzi przez punkt P.

W końcu, równanie (11) możemy napisać w ten sposób:

$$(14) \qquad M(U, V, W) = \mu_1 \mu_3 \,.\, m_3(U, V, W) + M_3(U, V, W) = 0,$$

skąd wynika, że prosta d_3 przechodzi przez punkt P.

Otrzymaliśmy więc, że każda z prostych d_1, d_2, d_3 przechodzi przez punkt P, t. zn. te 3 proste posiadają punkt wspólny.

Załóżmy teraz, że jedna z pośród liczb μ_1, μ_2, μ_3 jest równa $\pm\infty$, inna zaś jest równa 0. Przypuśćmy np., że $\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$. Wtedy zarówno punkt P_1, jak też punkt P_2, nakrywa punkt A_3, obiedwie proste d_1 i d_2 przechodzą więc przez punkt A_3, przez który przechodzi również prosta d_3, a zatem proste d_1, d_2, d_3 posiadają punkt wspólny. Gdyby zaś było $\mu_1 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, to punkt P_1 nakrywałby punkt A_3, punkt P_3 zaś nakrywałby punkt A_1, każda więc z prostych d_1 i d_3 nakrywałaby prostą a_2, a zatem proste d_1, d_2, d_3 posiadałyby punkt wspólny. Tak samo możemy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, albo $\mu_2 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_2 = 0$, to proste d_1, d_2, d_3 posiadają punkt wspólny.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

J e ż e l i j e s t d a n y t r ó j k ą t $A_1 A_2 A_3$ i p r z e z j e g o w i e r z c h o ł k i A_1, A_2, A_3 p r z e c h o d z ą o d p o w i e d n i o p r o s t e d_1, d_2, d_3, k t ó r e p r z e c i n a j ą p r o s t e a_1, a_2, a_3

odpowiednio w punktach P_1, P_2, P_3, to w razie gdy żaden ze stosunków podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) nie jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego jest spełnienie równości

$$(A_2, A_3, P_1) \cdot (A_3, A_1, P_2) \cdot (A_1, A_2, P_3) = -1,$$

w razie zaś, gdy jeden z tych stosunków podziału jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków podziału.

To twierdzenie jest inną postacią twierdzenia Céva'y, podanego w § 49.

Stosując twierdzenie Céva'y w tej postaci moglibyśmy np. z łatwością dowieść, że linje środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Wystarczyłoby mianowicie powołać się na to, że punkty, w jakich linje środkowe przecinają boki przeciwległe, posiadają względem odpowiednich wierzchołków trójkąta stosunki podziału, równe — 1, albowiem stąd wynikałoby już, że iloczyn tych stosunków podziału jest równy — 1.

Uwaga. Twierdzenie Céva'y w podanej tu postaci oraz twierdzenie Menelaus'a albo Carnot'a, podane w § 48, możemy połączyć razem w sposób następujący:

Jeżeli jest dany trójkąt $A_1A_2A_3$ i na jego bokach a_1, a_2, a_3 są dane odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3, to w razie, gdy żaden ze stosunków podziału (A_2, A_3, P_1), (A_3, A_1, P_2), (A_1, A_2, P_3) nie jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej jest spełnienie równości

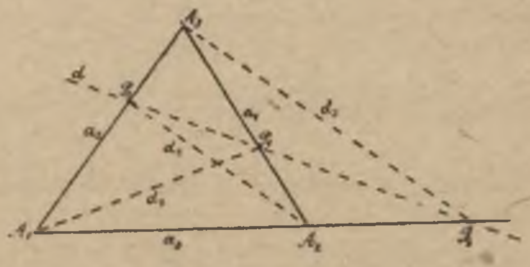
$$(A_2, A_3, P_1) \cdot (A_3, A_1, P_2) \cdot (A_1, A_2, P_3) = 1,$$

warunkiem zaś koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 punktu wspólnego jest spełnienie równości

$$(A_2, A_3, P_1) \cdot (A_3, A_1, P_2) \cdot (A_1, A_2, P_3) = -1,$$

oraz w razie, gdy jeden z tych stosunków podziału jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym zarówno należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej, jak też posiadania przez proste A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 punktu wspólnego, jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków podziału.

§ 51. **Inna postać twierdzenia Menelaus'a albo Carnot'a.**— Niechaj będzie dany trójkąt $A_1A_2A_3$ (rys. 41). Na bokach a_1, a_2, a_3 tego trójkąta niechaj będą dane odpowiednio 3 punkty (niekoniecznie właściwe) P_1, P_2, P_3, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d. Proste A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Prostym a_1, a_2, a_3 nadajmy jakiekolwiek zwroty



Rys. 41.

i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:

$$(1) \qquad (a_2, a_3, d_1) = \mu_1, \ (a_3, a_1, d_2) = \mu_2, \ (a_1, a_2, d_3) = \mu_3.$$

Załóżmy najpierw, że żaden z tych stosunków wstaw nie jest równy $+\infty$. W płaszczyźnie trójkąta $A_1A_2A_3$ weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek leży wewnątrz trójkąta $A_1A_2A_3$. Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 będą odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$. Nadajmy teraz prostej a_1 ten zwrot, przy którym punkt A_3 następuje po punkcie A_2, prostej a_2 ten zwrot, przy którym punkt A_1 następuje po punkcie A_3, prostej a_3 ten zwrot, przy którym punkt A_2 następuje po punkcie A_1, i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2),

(a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1', μ_2', μ_3'. W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, proste d_1, d_2, d_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 37):

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} L_1(X,Y,Z)=l_2(X,Y,Z)-\mu_1'.l_3(X,Y,Z)=0,\\ L_2(X,Y,Z)=l_3(X,Y,Z)-\mu_2'.l_1(X,Y,Z)=0,\\ L_3(X,Y,Z)=l_1(X,Y,Z)-\mu_3'.l_2(X,Y,Z)=0.\end{array}\right.$$

Gdyby prosta d nakrywała prostą a_1, to w takim razie punkt P_2, jako punkt, wspólny prostym d i a_2, nakrywałby punkt A_3, a zatem prosta d_2, jako prosta, zawierająca punkty A_2 i P_2, nakrywałaby prostą a_1, t. zn. byłoby $\mu_2 = \pm\infty$, co przeczyłoby założeniu. Nie jest więc możliwe, aby prosta d nakrywała prostą a_1. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że prosta d nie może nakrywać również żadnej z prostych a_2 i a_3.

Gdyby prosta d przechodziła przez punkt A_1, to w takim razie punkt P_3, jako punkt, wspólny prostej a_3 oraz różnej od niej prostej d, nakrywałby punkt A_1, a zatem prosta d_3, jako prosta, zawierająca punkty P_3 i A_3, nakrywałaby prostą a_2, t. zn. byłoby $\mu_3 = +\infty$, co przeczyłoby założeniu. Nie jest więc możliwe, aby prosta d przechodziła przez punkt A_1. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że prosta d nie może również przechodzić przez żaden z punktów A_2 i A_3 Stąd zaś wynika, że prosta d jest różna od każdej z prostych d_1, d_2, d_3.

Prostą d, jako przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych a_1 i d_1 i przytem różną od prostej d_1, możemy przedstawić przez równanie (§ 25): $L(X,Y,Z) = l_1(X,Y,Z) + \lambda . L_1(X,Y,Z) = 0$, czyli przez równanie

$$(3)\quad L(X,Y,Z) = l_1(X,Y,Z) + \lambda . l_2(X,Y,Z) - \lambda\mu_1' . l_3(X,Y,Z) = 0.$$

Z równania (3) wynika, że prosta d przechodzi przez punkt przecięcia się prostej

$$(4)\qquad l_1(X,Y,Z) + \lambda . l_2(X,Y,Z) = 0$$

z prostą $l_3(X,Y,Z) = 0$, t. zn. z prostą a_3. Innemi słowy punkt przecięcia się prostych d i a_3, t. zn. punkt P_3, należy do prostej, jaką przedstawia równanie (4). Lecz równanie (4) przedstawia pewną prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych $l_1(X, Y, Z) = 0$ i $l_2(X, Y, Z) = 0$, t. zn. przez punkt A_3. A zatem prosta, jaką przedstawia równanie (4), zawiera każdy z punktów P_3 i A_3, t. zn. jest prostą d_3.

Z równania (4), przedstawiającego prostą d_3, wynika (§ 37): $(a_1, a_2, d_3) = -\lambda$. Lecz mieliśmy $(a_1, a_2, d_3) = \mu_3'$, a zatem $\lambda = -\mu_3'$. Równanie (3), przedstawiające prostą d, możemy więc napisać w ten sposób:

(5) $L(X, Y, Z) = l_1(X, Y, Z) - \mu_3' . l_2(X, Y, Z) + \mu_1' \mu_3' . l_3(X, Y, Z) = 0.$

Z równania (5) wynika, że prosta d przechodzi przez punkt przecięcia się prostej

(6) $$l_1(X, Y, Z) + \mu_1' \mu_3' . l_3(X, Y, Z) = 0$$

z prostą $l_2(X, Y, Z) = 0$, t. zn. z prostą a_2. Innemi słowy punkt przecięcia się prostych d i a_2, t. zn. punkt P_2, leży na prostej, jaką przedstawia równanie (6). Lecz równanie (6) przedstawia pewną prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych $l_1(X, Y, Z) = 0$ i $l_3(X, Y, Z) = 0$, t. zn. przez punkt A_2. A zatem prosta, jaką przedstawia równanie (6), zawiera każdy z punktów P_2 i A_2, t. zn. jest prostą d_2.

Z równania (6), przedstawiającego prostą d_2, wynika (§ 37): $(a_3, a_1, d_2) = -\frac{1}{\mu_1' \mu_3'}$. Lecz mieliśmy $(a_3, a_1, d_2) = \mu_2'$, zatem $\mu_2' = -\frac{1}{\mu_1' \mu_3'}$, skąd wynika: $\mu_1' \mu_2' \mu_3' = -1$. Lecz, jak to widzieliśmy w § 49, wartość iloczynu $(a_2, a_3, d_1)(a_3, a_1, d_2)(a_1, a_2, d_3)$ od wyboru zwrotów prostych a_1, a_2, a_3 nie zależy, zatem równość $\mu_1' \mu_2' \mu_3' = -1$ pociąga za sobą równość $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1$.

Otrzymaliśmy więc, że $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1$.

Do tego wniosku przyszliśmy w założeniu, że żadna z liczb μ_1, μ_2, μ_3 nie jest równa $+\infty$.

Załóżmy teraz, że np. $\mu_1 = +\infty$. Wtedy prosta d_1 nakrywa prostą a_3, a zatem punkt P_1 nakrywa punkt A_2, prosta d więc przez punkt A_2 przechodzi. Gdyby prosta d była różna od prostej a_3, to punkt P_3, jako punkt, wspólny prostym d i a_3, nakrywałby punkt A_2, a zatem prosta d_3, jako prosta, zawierająca punkty P_3 i A_3, nakrywałaby prostą a_1, t. zn. byłoby $\mu_3 = 0$. Gdyby zaś prosta d nakrywała prostą a_3, to punkt P_2, jako punkt, wspólny prostym d i a_2, nakrywałby punkt A_1, a zatem prosta d_2, jako prosta, zawierająca punkty P_2 i A_2, nakrywałaby prostą a_3, t. zn. byłoby $\mu_2 = 0$.

Otrzymaliśmy więc, że jeżeli $\mu_1 = +\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_2 i μ_3 jest równa 0. Tak samo moglibyśmy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = +\infty$, względnie $\mu_3 = +\infty$, to w takim razie jedna z liczb μ_3 i μ_1, względnie jedna z liczb μ_1 i μ_2, jest równa 0.

Przyjmijmy teraz, że jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$, przyczem na jego bokach a_1, a_2, a_3 są dane odpowiednio punkty (niekoniecznie właściwe) P_1, P_2, P_3, co do których już nie zakładamy, że leżą na jednej prostej. Proste $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Prostym a_1, a_2, a_3 nadajmy j a k i e k o l w i e k zwroty i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) oznaczmy odpowiednio przez μ_1, μ_2, μ_3, t. zn.:

$$(7) \qquad (a_2, a_3, d_1) = \mu_1, \ (a_3, a_1, d_2) = \mu_2, \ (a_1, a_2, d_3) = \mu_3.$$

Załóżmy najpierw, że żaden z tych stosunków wstaw nie jest równy $+\infty$, przyczem ich iloczyn jest równy -1, t. zn.:

$$(8) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1.$$

W płaszczyźnie trójkąta $A_1 A_2 A_3$ weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych Descartes'a, którego początek leży w e w n ą t r z trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Niechaj równaniami w postaci normalnej Hesse'go prostych a_1, a_2, a_3 będą odpowiednio równania $l_1(x, y, 1) = 0$, $l_2(x, y, 1) = 0$, $l_3(x, y, 1) = 0$. Nadajmy teraz prostej a_1 ten zwrot, przy którym punkt A_3 następuje po punkcie A_2, prostej a_2 ten zwrot, przy którym punkt A_1 następuje po punkcie A_3, prostej a_3 ten zwrot, przy którym punkt A_2 następuje po punkcie A_1, i odpowiadające tym zwrotom stosunki wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3)

oznaczmy odpowiednio przez μ_1', μ_2', μ_3'. Równość (8) pociąga za sobą równość:

(9) $$\mu_1' \mu_2' \mu_3' = -1.$$

W układzie spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, podporządkowanym przyjętemu układowi spółrzędnych Descartes'a, proste d_1, d_2, d_3 możemy przedstawić odpowiednio przez równania (§ 37):

(10) $$\begin{cases} L_1(X,Y,Z) \equiv l_2(X,Y,Z) - \mu_1'.l_3(X,Y,Z) = 0, \\ L_2(X,Y,Z) \equiv l_3(X,Y,Z) - \mu_2'.l_1(X,Y,Z) = 0, \\ L_3(X,Y,Z) \equiv l_1(X,Y,Z) - \mu_3'.l_2(X,Y,Z) = 0. \end{cases}$$

Weźmy teraz pod uwagę równość:

(11) $$L(X,Y,Z) \equiv l_1(X,Y,Z) - \mu_3'.l_2(X,Y,Z) + \mu_1'\mu_3'.l_3(X,Y,Z) = 0.$$

Gdyby równość (11) była tożsamością, to (§ 26) proste a_1, a_2, a_3 posiadałyby punkt wspólny, co nie jest możliwe. Równość (11) jest więc równaniem jednorodnem stopnia 1-go z 3-ma niewiadomemi X, Y, Z, przedstawia ona zatem pewną w zupełności określoną prostą d.

Równanie (11) możemy napisać też w ten sposób:

(12) $$L(X,Y,Z) \equiv l_1(X,Y,Z) - \mu_3'.L_1(X,Y,Z) = 0,$$

skąd wynika (§ 25), że przedstawiona przez to równanie prosta, t. zn. prosta d, posiada z prostemi $l_1(X,Y,Z) = 0$ i $L_1(X,Y,Z) = 0$, t. zn. z prostemi a_1 i d_1, punkt wspólny, innemi słowy punkt przecięcia się prostych a_1 i d_1, t. zn. punkt P_1, należy do prostej d.

Ze względu na równość (9) równanie (11) możemy napisać również w ten sposób:

(13) $$L(X,Y,Z) \equiv -\mu_3'.l_2(X,Y,Z) + \mu_1'\mu_3'.L_2(X,Y,Z) = 0,$$

skąd znów wynika, że punkt P_2 należy do prostej d.

W końcu, równanie (11) możemy napisać w ten sposób:

(14) $$L(X,Y,Z) \equiv \mu_1'\mu_3'.l_3(X,Y,Z) + L_3(X,Y,Z) = 0,$$

skąd znów wynika, że punkt P_3 należy do prostej d.

Otrzymaliśmy więc, że każdy z punktów P_1, P_2, P_3 należy do prostej d, t. zn. te 3 punkty leżą na jednej prostej.

Załóżmy teraz, że jedna z pośród liczb μ_1, μ_2, μ_3 jest równa $+\infty$, inna zaś jest równa 0. Przypuśćmy np., że $\mu_1 = +\infty$ oraz $\mu_2 = 0$. Wtedy zarówno prosta d_1, jak też prosta d_2, nakrywa prostą a_3, obydwa punkty P_1 i P_2 leżą więc na prostej a_3, na której leży także punkt P_3, a zatem punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej. Gdyby zaś było $\mu_1 = +\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, to prosta d_1 nakrywałaby prostą a_3, prosta d_3 zaś nakrywałaby prostą a_1, każdy więc z punktów P_1 i P_3 nakrywałby punkt A_2, a zatem punkty P_1, P_2, P_3 moglibyśmy uważać za punkty, leżące na jednej prostej. Tak samo możemy się przekonać, że jeżeli $\mu_2 = +\infty$ oraz $\mu_3 = 0$, albo $\mu_2 = +\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = \pm\infty$ oraz $\mu_1 = 0$, albo $\mu_3 = +\infty$ oraz $\mu_2 = 0$, to punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej.

Mamy zatem twierdzenie następujące:

Jeżeli jest dany trójkąt $A_1 A_2 A_3$ i na jego bokach są dane odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3, to oznaczywszy proste $A_1 P_1, A_2 P_2, A_3 P_3$ odpowiednio przez d_1, d_2, d_3 oraz nadawszy prostym a_1, a_2, a_3 jakiekolwiek zwroty, możemy powiedzieć, że: w razie, gdy żaden ze stosunków wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) nie jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej jest spełnienie równości

$$(a_2, a_3, d_1)\ (a_3, a_1, d_2)\ (a_1, a_2, d_3) = -1,$$

w razie zaś, gdy jeden z tych stosunków wstaw jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym należenia punktów P_1, P_2, P_3 do jednej prostej jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków wstaw.

To twierdzenie jest inną postacią twierdzenia Menelaus'a albo Carnot'a, podanego w § 48.

Stosując twierdzenie Menelaus'a albo Carnot'a w tej postaci moglibyśmy np. z łatwością dowieść, że punkty, w jakich dwusieczne kątów zewnętrznych trójkąta, względnie dwusieczne dwu kątów wewnętrznych trójkąta oraz jednego zewnętrznego, przecinają boki przeciwległe, leżą na jednej prostej. Wystarczyłoby mianowicie w tym celu powołać się na to, że, w razie nadania bokom a_1, a_2, a_3 odpowiednich zwrotów, stosunek wstaw dwusiecznej kąta wewnętrznego względem boków, zawierających ramiona tego kąta, równa się 1, stosunek zaś wstaw dwusiecznej kąta zewnętrznego względem boków, zawierających ramiona tego kąta, równa się —1 (§ 38).

Uwaga. Twierdzenie Menelaus'a albo Carnot'a w podanej tu postaci oraz twierdzenie Céva'y, podane w § 49, możemy połączyć razem w sposób następujący:

Jeżeli jest dany trójkąt $A_1A_2A_3$ i przez jego wierzchołki przechodzą odpowiednio proste d_1, d_2, d_3, to, nadawszy prostym a_1, a_2, a_3 jakiekolwiek zwroty, możemy powiedzieć, że: w razie, gdy żaden ze stosunków wstaw (a_2, a_3, d_1), (a_3, a_1, d_2), (a_1, a_2, d_3) nie jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego jest spełnienie równości

$$(a_2, a_3, d_1) \,.\, (a_3, a_1, d_2) \,.\, (a_1, a_2, d_3) = 1,$$

warunkiem zaś koniecznym i dostatecznym należenia punktów $a_1 d_1$, $a_2 d_2$, $a_3 d_3$ do jednej prostej jest spełnienie równości

$$(a_2, a_3, d_1) \,.\, (a_3, a_1, d_2) \,.\, (a_1, a_2, d_3) = -1,$$

oraz w razie, gdy jeden z tych stosunków wstaw jest równy $+\infty$, warunkiem koniecznym i dostatecznym zarówno posiadania przez proste d_1, d_2, d_3 punktu wspólnego, jak też należenia punktów $a_1 d_1$, $a_2 d_2$, $a_3 d_3$ do jednej prostej, jest równość zeru jakiegoś innego z wymienionych stosunków wstaw.

Rozdział V.

§ 52. Stosunek podziału podwójnego 4-ech punktów, leżących na jednej prostej właściwej. — Niechaj będą dane 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej właściwej. Iloraz stosunków podziału (P_1, P_2, P_3) i (P_1, P_2, P_4) nazywamy stosunkiem podziału podwójnego punktów P_3 i P_4 względem punktów P_1 i P_2, albo też wprost stosunkiem podziału podwójnego 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, i oznaczamy symbolem (P_1, P_2, P_3, P_4), t. zn.:

$$(1) \qquad (P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(P_1, P_2, P_3)}{(P_1, P_2, P_4)}.$$

Stosunek podziału podwójnego nazywamy też inaczej dwustosunkiem.

Ponieważ w podanej przed chwilą definicji stosunku podziału podwójnego 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4 występują stosunki podziału (P_1, P_2, P_3) i (P_1, P_2, P_4), te zaś stosunki podziału istnieją tylko wtedy, gdy punkty P_1 i P_2 są właściwe (§ 33), przeto podana definicja stosunku podziału podwójnego 4-ech punktów stosuje się tylko do takich 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, z których punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi.

Stosunek podziału podwójnego (P_1, P_2, P_3, P_4) nazywamy harmonicznym, jeżeli jest on równy -1. Mówimy też wtedy, że punkty P_1, P_2, P_3, P_4 tworzą grupę harmoniczną 4-ech punktów, albo, że punkty P_3 i P_4 są sprzężone z sobą harmonicznie względem punktów P_1 i P_2.

Stosunek podziału podwójnego, nie będący harmonicznym, nazywamy anharmonicznym.

Przyjąwszy jeden zwrot prostej właściwej, zawierającej punkty P_1, P_2, P_3, P_4, za dodatni, drugi zaś za ujemny, i ustaliwszy pewną jednostkę długości, każdemu odcinkowi, zawartemu w tej prostej, podporządkujmy liczbę, której wartość bezwzględna wyraża długość odcinka, która zaś jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy wymieniony odcinek posiada zwrot dodatni, czy też ujemny. Rozumiejąc wtedy, w przypadku, gdy punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są punktami właściwymi, przez P_1P_3, P_2P_3, i t. d. liczby, podporządkowane odpowiednio odcinkom P_1P_3, P_2P_3, i t. d., możemy napisać:

$$(2)\quad (P_1,P_2,P_3,P_4)=\frac{(P_1,P_2,P_3)}{(P_1,P_2,P_4)}=\frac{P_1P_3}{P_2P_3}:\frac{P_1P_4}{P_2P_4}=\frac{P_1P_3 . P_2P_4}{P_2P_3 . P_1P_4}.$$

Lecz tak samo możemy wtedy napisać:

$$(3)\quad (P_2,P_1,P_4,P_3)=\frac{(P_2,P_1,P_4)}{(P_2,P_1,P_3)}=\frac{P_2P_4}{P_1P_4}:\frac{P_2P_3}{P_1P_3}=\frac{P_1P_3 . P_2P_4}{P_2P_3 . P_1P_4},$$

$$(4)\quad \left|\begin{aligned} &(P_3,P_4,P_1,P_2)=\frac{(P_3,P_4,P_1)}{(P_3,P_4,P_2)}=\frac{P_3P_1}{P_4P_1}:\frac{P_3P_2}{P_4P_2}=\\ &=\frac{P_3P_1 . P_4P_2}{P_3P_2 . P_4P_1}=\frac{(-P_1P_3).(-P_2P_4)}{(-P_2P_3).(-P_1P_4)}=\frac{P_1P_3 . P_2P_4}{P_2P_3 . P_1P_4},\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left|\begin{aligned} &(P_4,P_3,P_2,P_1)=\frac{(P_4,P_3,P_2)}{(P_4,P_3,P_1)}=\frac{P_4P_2}{P_3P_2}:\frac{P_4P_1}{P_3P_1}=\\ &=\frac{P_3P_1 . P_4P_2}{P_3P_2 . P_4P_1}=\frac{(-P_1P_3).(-P_2P_4)}{(-P_2P_3).(-P_1P_4)}=\frac{P_1P_3 . P_2P_4}{P_2P_3 . P_1P_4}.\end{aligned}\right.$$

Z równości (2), (3), (4), (5) wynika:

$$(6)\quad (P_1,P_2,P_3,P_4)=(P_2,P_1,P_4,P_3)=(P_3,P_4,P_1,P_2)=(P_4,P_3,P_2,P_1).$$

Równości (6) otrzymaliśmy w założeniu, że wszystkie 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są punktami właściwymi. Jeżeli natomiast punkt P_3 jest punktem niewłaściwym, punkty zaś P_1, P_2, P_4 są punktami właściwymi, to mamy wtedy:

$(P_1,P_2,P_3,P_4)=\dfrac{(P_1,P_2,P_3)}{(P_1,P_2,P_4)}=\dfrac{1}{(P_1,P_2,P_4)}$ oraz $(P_2,P_1,P_4,P_3)=$

$=\frac{(P_2, P_1, P_4)}{(P_2, P_1, P_3)} = (P_2, P_1, P_4)$, a zatem (§ 33) $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_2, P_1, P_4, P_3)$; jeżeli punkt P_4 jest punktem niewłaściwym, punkty zaś P_1, P_2, P_3 są punktami właściwymi, to mamy wtedy: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(P_1, P_2, P_3)}{(P_1, P_2, P_4)} = (P_1, P_2, P_3)$ oraz $(P_2, P_1, P_4, P_3) = \frac{(P_2, P_1, P_4)}{(P_2, P_1, P_3)} = \frac{1}{(P_2, P_1, P_3)}$, a zatem $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_2, P_1, P_4, P_3)$; jeżeli, w końcu, obydwa punkty P_3 i P_4 są punktami niewłaściwymi, punkty zaś P_1 i P_2 są punktami właściwymi, to wtedy zarówno $(P_1, P_2, P_3, P_4) = 1$, jak też $(P_2, P_1, P_4, P_3) = 1$, a zatem $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_2, P_1, P_4, P_3)$.

Jak więc widzimy, równość

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_2, P_1, P_4, P_3) \tag{7}$$

zachodzi zawsze, o ile tylko punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi. To ostatnie zastrzeżenie rozumie się samo przez się, albowiem w przypadku, gdy któryś z punktów P_1 i P_2 jest punktem niewłaściwym, symbol (P_1, P_2, P_3, P_4) nie ma dla nas narazie żadnego znaczenia.

W przypadku, gdy któryś z punktów P_3 i P_4 jest punktem niewłaściwym, symbole (P_3, P_4, P_1, P_2) i (P_4, P_3, P_2, P_1) nie mają dla nas narazie żadnego znaczenia, a zatem równość (7) jest j e d y n ą równością, jaka nam w tym przypadku ze wszystkich równości (6) pozostaje.

Ponieważ symbol (P_2, P_1, P_4, P_3), względnie (P_3, P_4, P_1, P_2), względnie (P_4, P_3, P_2, P_1), możemy otrzymać z symbolu (P_1, P_2, P_3, P_4), przestawiając w nim jednocześnie elementy P_1 i P_2 oraz P_3 i P_4, względnie P_1 i P_3 oraz P_2 i P_4, względnie P_1 i P_4 oraz P_2 i P_3, przeto równości (6) upoważniają nas do wypowiedzenia twierdzenia następującego:

Jeżeli punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są punktami właściwymi, to symbol (P_1, P_2, P_3, P_4) nie zmieni swej wartości, gdy przestawimy w nim jednocześnie elementy dwu jakichkolwiek par.

Ponieważ $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(P_1, P_2, P_3)}{(P_1, P_2, P_4)}, (P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{(P_1, P_2, P_4)}{(P_1, P_2, P_3)}, (P_2, P_1, P_3, P_4) = \frac{(P_2, P_1, P_3)}{(P_2, P_1, P_4)} = \frac{1}{(P_1, P_2, P_3)} : \frac{1}{(P_1, P_2, P_4)} = \frac{(P_1, P_2, P_4)}{(P_1, P_2, P_3)}$, mamy przeto 2 równości następujące:

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{l} (P_1, P_2, P_4, P_3) = \dfrac{1}{(P_1, P_2, P_3, P_4)}, \\ (P_2, P_1, P_3, P_4) = \dfrac{1}{(P_1, P_2, P_3, P_4)}, \end{array} \right.$$

które zachodzą zawsze (o ile, oczywiście, punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi).

Jeżeli $(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$, to wtedy [równ. (8)] również $(P_1, P_2, P_4, P_3) = -1$ oraz $(P_2, P_1, P_3, P_4) = -1$, mamy zatem:

Jeżeli dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) jest harmoniczny, to są spełnione równości:

$$(9) \qquad (P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_1, P_2, P_4, P_3) = (P_2, P_1, P_3, P_4).$$

Przyczem jeżeli punkty P_3 i P_4 są punktami właściwymi, to, oczywiście, oprócz równości (9) są wtedy spełnione także równości (6), jeżeli zaś któryś z punktów P_3 i P_4 jest punktem niewłaściwym, to oprócz równości (9) jest wtedy spełniona równość (7).

Jeżeli punkt P_3 jest środkiem odcinka $P_1 P_2$, to w takim razie $(P_1, P_2, P_3) = -1$. Punkt P_4 więc, który byłby w tym przypadku sprzężony harmonicznie z punktem P_3 względem punktów P_1 i P_2, musi spełniać warunek $(P_1, P_2, P_4) = 1$, a zatem tym punktem P_4 jest punkt niewłaściwy prostej $P_1 P_2$ (§ 33).

Niechaj 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, które leżą na jednej prostej właściwej i z których punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi, będą przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{l} M_1(U, V, W) \equiv A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ M_2(U, V, W) \equiv A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0, \\ \lambda_1 . M_1(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0, \\ \lambda_1' . M_1(U, V, W) + \lambda_2' . M_2(U, V, W) = 0. \end{array} \right.$$

Wobec założenia, że punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi, możemy powiedzieć, że zarówno $C_1 \neq 0$, jak też $C_2 \neq 0$. Rozpatrzymy teraz wszystkie możliwości, jakie tu istnieją.

Możliwość 1-a. Punkty P_1 i P_2 są różne, przyczem żaden z punktów P_3 i P_4 nie nakrywa punktu P_2. W tym przypadku liczby λ_1 i λ_1' są różne od 0, możemy więc równanie punktu P_3 podzielić przez λ_1 oraz równanie punktu P_4 przez λ_1'. Otrzymamy wtedy równania: $M_1(U, V, W) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot M_2(U, V, W) = 0$ oraz $M_1(U, V, W) + \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \cdot M_2(U, V, W) = 0$,

albo

$$C_1 \cdot \frac{M_1(U, V, W)}{C_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} C_2 \cdot \frac{M_2(U, V, W)}{C_2} = 0$$

oraz

$$C_1 \cdot \frac{M_1(U, V, W)}{C_1} + \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} C_2 \cdot \frac{M_2(U, V, W)}{C_2} = 0,$$

albo, po podzieleniu przez C_1, równania

$$\frac{M_1(U, V, W)}{C_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{M_2(U, V, W)}{C_2} = 0$$

oraz

$$\frac{M_1(U, V, W)}{C_1} + \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{M_2(U, V, W)}{C_2} = 0,$$

czyli równania

$$(11) \quad \left| \begin{array}{l} m_1(U, V, W) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot m_2(U, V, W) = 0 \\ \text{oraz} \\ m_1(U, V, W) + \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot m_2(U, V, W) = 0, \end{array} \right.$$

gdzie $m_1(U,V,W)$, względnie $m_2(U,V,W)$, oznacza stronę lewą równania punktu P_1, względnie P_2, w takiej postaci, przy której spółczynnik przy W jest równy 1. Z równań (11) wynika więc (§ 34), że $(P_1, P_2, P_3) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{C_2}{C_1}$ oraz $(P_1, P_2, P_4) = -\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \cdot \frac{C_2}{C_1}$, a zatem

$$(12) \qquad (P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(P_1, P_2, P_3)}{(P_1, P_2, P_4)} = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}.$$

Możliwość 2-a. Punkty P_1 i P_2 są różne, przyczem żaden z punktów P_3 i P_4 nie nakrywa punktu P_1. W tym przypadku liczby λ_2 i λ_2' są różne od 0, możemy więc równanie punktu P_3 podzielić przez λ_2 oraz równanie punktu P_4 przez λ_2'. Otrzymamy wtedy równania: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot M_1(U, V, W) + M_2(U, V, W) = 0$ oraz $\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \cdot M_1(U, V, W) + M_2(U, V, W) = 0$, albo

$$(13) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} \cdot m_1(U, V, W) + m_2(U, V, W) = 0 \\ \text{oraz } \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \cdot \frac{C_1}{C_2} \cdot m_1(U, V, W) + m_2(U, V, W) = 0, \end{array} \right.$$

skąd wynika (§ 34), że $(P_2, P_1, P_3) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{C_1}{C_2}$ oraz $(P_2, P_1, P_4) = -\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \cdot \frac{C_1}{C_2}$, a zatem

$$(14) \qquad (P_2, P_1, P_3, P_4) = \frac{(P_2, P_1, P_3)}{(P_2, P_1, P_4)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_2 \lambda_1'}.$$

Z równości zaś (14) oraz z drugiej z pośród równości (8) wynika:

$$(15) \qquad (P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'},$$

t. zn. znów równość (12).

Możliwość 3-a. Punkty P_1 i P_2 są różne, przyczem punkt P_3 nakrywa punkt P_1 oraz punkt P_4 nakrywa punkt P_2, względnie punkt P_3 nakrywa punkt P_2 oraz punkt P_4 nakrywa punkt P_1. W tym przypadku $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1' = 0$, $\lambda_2' \neq 0$, względnie $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1' \neq 0$, $\lambda_2' = 0$, a zatem $\frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'} = 0$, względnie $\frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'} = \pm \infty$. Z drugiej zaś strony w rozpatrywanym przypadku $(P_1, P_2, P_3) = 0$ oraz $(P_1, P_2, P_4) = \pm \infty$, względnie $(P_1, P_2, P_3) = \pm \infty$ oraz $(P_1, P_2, P_4) = 0$, a zatem $(P_1, P_2, P_3, P_4) = 0$, względnie $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \pm \infty$. Możemy więc powiedzieć, że również w rozpatrywanym obecnie przypadku zachodzi równość:

(16) $$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'},$$

t. zn. równość (12).

Możliwość 4-a. Punkty P_1 i P_2 nakrywają się. W tym przypadku (str. 113, Uwaga) punkty P_3 i P_4 nakrywają punkty P_1 i P_2, a zatem (§ 33) każdy ze stosunków wstaw (P_1, P_2, P_3) i (P_1, P_2, P_4) jest nieoznaczony, skąd wynika, że dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) też jest nieoznaczony. Możemy więc ten dwustosunek uważać za równy każdej liczbie, a więc, w szczególności, i liczbie $\frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$, t. zn. równość (12) możemy uważać za spełnioną również w rozpatrywanym obecnie przypadku.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli równaniami 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, które leżą na jednej prostej właściwej i z których punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi, są odpowiednio równania:

$$\begin{gathered} M_1(U, V, W) = A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ M_2(U, V, W) = A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0, \\ \lambda_1 . M_1(U, V, W) + \lambda_2 . M_2(U, V, W) = 0, \\ \lambda_1' . M_1(U, V, W) + \lambda_2' . M_2(U, V, W) = 0, \end{gathered}$$

to w takim razie zachodzi równość: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

Ponieważ za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktów $M_1(U,V,W)=0$, $M_2(U,V,W)=0$, $\lambda_1 . M_1(U,V,W) + \lambda_2 . M_2(U,V,W) = 0$, $\lambda_1' . M_1(U, V, W) + \lambda_2' . M_2(U, V, W) = 0$ możemy uważać odpopowiednio trójki liczb A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$; $\lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2$, $\lambda_1' B_1 + \lambda_2' B_2$, $\lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2$, pisząc więc zamiast symboli A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 odpowiednio symbole X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, które leżą na jednej prostej właściwej i z których punkty P_1 i P_2 są punktami właściwymi, są odpowiednio trójki liczb: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2$, $\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2$, $\lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, to w takim razie zachodzi równość: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

§ 53. Stosunek podziału podwójnego 4-ech prostych, przechodzących przez jeden punkt właściwy. — Niechaj będą dane 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt właściwy. Nadajmy prostym d_1 i d_2 pewne zwroty.

Iloraz stosunków wstaw (d_1, d_2, d_3) i (d_1, d_2, d_4) nazywamy stosunkiem podziału podwójnego prostych d_3 i d_4 względem prostych d_1 i d_2, albo też wprost stosunkiem podziału podwójnego 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, i oznaczamy symbolem (d_1, d_2, d_3, d_4), t. zn.:

(1) $$(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{(d_1, d_2, d_3)}{(d_1, d_2, d_4)}.$$

Stosunek podziału podwójnego nazywamy też inaczej dwustosunkiem.

Zmiana zwrotu prostej d_1, względnie d_2, powoduje (§ 35) zmianę znaku każdego ze stosunków wstaw (d_1, d_2, d_3) i (d_1, d_2, d_4), zatem na wartość dwustosunku (d_1, d_2, d_3, d_4) nie wpływa. A więc:

Wartość dwustosunku (d_1, d_2, d_3, d_4) nie zależy zupełnie od zwrotów prostych d_1 i d_2.

Dwustosunek (d_1, d_2, d_3, d_4) nazywamy harmonicznym, jeżeli jest on równy -1. Mówimy też wtedy, że proste d_1, d_2, d_3, d_4 tworzą grupę harmoniczną 4-ech prostych, jak również mówimy, że proste d_3 i d_4 są sprzężone z sobą harmonicznie względem prostych d_1 i d_2

Dwustosunek, nie będący harmonicznym, nazywamy anharmonicznym.

Za pomocą rozumowania, analogicznego do tego rozumowania, jakie podaliśmy w § poprzednim, otrzymamy równości:

(2) $$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (d_2, d_1, d_4, d_3) = (d_3, d_4, d_1, d_2) = (d_4, d_3, d_2, d_1),$$

będziemy zatem mogli wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli d_1, d_2, d_3, d_4 są 4-ema prostemi, przechodzącemi przez jeden punkt właściwy, to symbol (d_1, d_2, d_3, d_4) nie zmieni swej wartości, gdy przestawimy w nim jednocześnie elementy dwu jakichkolwiek par.

Tak samo z łatwością otrzymamy równości:

$$(3) \quad (d_1, d_2, d_4, d_3) = \frac{1}{(d_1, d_2, d_3, d_4)}, \quad (d_2, d_1, d_3, d_4) = \frac{1}{(d_1, d_2, d_3, d_4)},$$

oraz twierdzenie:

Jeżeli dwustosunek (d_1, d_2, d_3, d_4) jest harmoniczny, to są spełnione równości:

$$(4) \qquad (d_1, d_2, d_3, d_4) = (d_1, d_2, d_4, d_3) = (d_2, d_1, d_3, d_4).$$

Jeżeli prosta d_3 jest dwusieczną jednej z dwu par kątów wierzchołkiem przeciwległych, jakie tworzą proste d_1 i d_2, to $(d_1, d_2, d_3) = \pm 1$. Prosta więc d_4, która byłaby w tym przypadku sprzężona harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2, musi spełniać warunek $(d_1, d_2, d_4) = \mp 1$, a zatem tą prostą d_4 jest dwusieczna drugiej pary kątów wierzchołkiem przeciwległych, jakie tworzą proste d_1 i d_2.

Niechaj 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt właściwy, będą przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} L_1(X, Y, Z) = A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ L_2(X, Y, Z) = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0, \\ \lambda_1 . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0, \\ \lambda_1' . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2' . L_2(X, Y, Z) = 0. \end{array} \right.$$

Przypuśćmy, że proste d_1 i d_2 są różne, przyczem żadna z prostych d_3 i d_4 nie nakrywa prostej d_2. Liczby λ_1 i λ_1' są wtedy różne od 0, możemy więc równanie prostej d_3 podzielić przez λ_1 oraz równanie prostej d_4 przez λ_1'. Otrzymamy wtedy równania:

$$(6) \; L_1(X,Y,Z) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot L_2(X,Y,Z) = 0 \text{ oraz } L_1(X,Y,Z) + \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \cdot L_2(X,Y,Z) = 0.$$

Wielkości (§ 28):

$$\frac{\sin\omega}{(-\operatorname{sign}\cdot C_1)\sqrt{A_1^2+B_1^2-2A_1B_1\cos\omega}}$$

oraz

$$\frac{\sin\omega}{(-\operatorname{sign}\cdot C_2)\sqrt{A_2^2+B_2^2-2A_2B_2\cos\omega}}$$

oznaczmy odpowiednio przez ϱ_1 i ϱ_2 (jeżeli spółczynnik C_1, względnie C_2, jest równy 0, to w mianowniku pierwszego, względnie drugiego, ułamka możemy wziąć przed symbolem, oznaczającym pierwiastek kwadratowy, jakikolwiek znak, np. +).

Równania (6) możemy napisać w ten sposób:

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\varrho_1\cdot L_1(X,Y,Z)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1\varrho_2}\cdot\varrho_2\cdot L_2(X,Y,Z)=0$$

oraz

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\varrho_1\cdot L_1(X,Y,Z)+\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'\varrho_2}\cdot\varrho_2\cdot L_2(X,Y,Z)=0,$$

albo, po pomnożeniu przez ϱ_1, w ten sposób:

$$\varrho_1\cdot L_1(X,Y,Z)+\frac{\lambda_2\varrho_1}{\lambda_1\varrho_2}\cdot\varrho_2\cdot L_2(X,Y,Z)=0$$

oraz

$$\varrho_1\cdot L_1(X,Y,Z)+\frac{\lambda_2'\varrho_1}{\lambda_1'\varrho_2}\cdot\varrho_2\cdot L_2(X,Y,Z)=0,$$

czyli w ten sposób:

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{l} l_1(X,Y,Z)+\dfrac{\lambda_2\varrho_1}{\lambda_1\varrho_2}\cdot l_2(X,Y,Z)=0 \\ \text{oraz} \\ l_1(X,Y,Z)+\dfrac{\lambda_2'\varrho_1}{\lambda_1'\varrho_2}\cdot l_2(X,Y,Z)=0, \end{array}\right.$$

skąd wynika, że (§ 36): $(d_1, d_2, d_3)=+\frac{\lambda_2\varrho_1}{\lambda_1\varrho_2}$ oraz $(d_1, d_2, d_4)=$ $=+\frac{\lambda_2'\varrho_1}{\lambda_1'\varrho_2}$, przyczem w obydwu równościach ostatnich należy wziąć jednocześnie albo znak + albo znak —. A zatem:

$$(8)\qquad (d_1, d_2, d_3, d_4)=\frac{(d_1, d_2, d_3)}{(d_1, d_2, d_4)}=\frac{\lambda_2\lambda_1'}{\lambda_1\lambda_2'}.$$

Do tego wniosku doszliśmy w założeniu, że proste d_1 i d_2 są różne, przyczem żadna z prostych d_3 i d_4 nie nakrywa prostej d_2. Gdybyśmy teraz zbadali wszystkie inne możliwości, jakie tu istnieją, to przyszlibyśmy do wniosku, że równość (8) zachodzi zawsze.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli równaniami 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt właściwy, są odpowiednio równania:

$$L_1(X, Y, Z) = A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0,$$
$$L_2(X, Y, Z) = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0,$$
$$\lambda_1 \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$
$$\lambda_1' \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_2' \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$

to w takim razie zachodzi równość: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

Stąd zaś wynika twierdzenie następujące:

Jeżeli spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt właściwy, są odpowiednio trójki liczb: U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, to w takim razie zachodzi równość: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

§ 54. Stosunek podziału podwójnego jakichkolwiek 4-ech punktów, leżących na jednej prostej, względnie 4-ech prostych, przechodzących przez jeden punkt. Twierdzenie Pappus'a.

Niechaj 4

proste d_1, d_2, d_3, d_4, posiadające punkt (niekoniecznie właściwy) P wspólny, będą określone odpowiednio przez spółrzędne: U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2, \lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2, \lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$. Przetnijmy te proste jakąkolwiek prostą d, różną od każdej	punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d, będą określone odpowiednio przez spółrzędne: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2, \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2, \lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$. Połączmy te punkty z jakimkolwiek punktem P, różnym

z prostych d_1, d_2, d_3, d_4, której spółrzędne oznaczmy przez U, V, W. Punkty przecięcia się prostej d z prostemi d_1, d_2, d_3, d_4 oznaczmy odpowiednio przez P_1, P_2, P_3, P_4. Za spółrzędne punktów P_1, P_2, P_3, P_4 możemy uważać odpowiednio trójki liczb [str. 92, (5a)]:

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ V_1, & W_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} W, & U \\ W_1, & U_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} U, & V \\ U_1, & V_1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ V_2, & W_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} W, & U \\ W_2, & U_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} U, & V \\ U_2, & V_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, & \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} W, & U \\ \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2, & \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} U, & V \\ \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, & \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ \lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2, & \lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} W, & U \\ \lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2, & \lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} U, & V \\ \lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2, & \lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2 \end{vmatrix}.$$

Zważywszy zatem, że:

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, & \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 \end{vmatrix} = $$

$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} V, & W \\ V_1, & W_1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} V, & W \\ V_2, & W_2 \end{vmatrix}, \text{ i t. d.},$$

od każdego z punktów P_1, P_2, P_3, P_4, którego spółrzędne oznaczmy przez X, Y, Z. Proste, łączące punkt P z punktami P_1, P_2, P_3, P_4, oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3, d_4. Za spółrzędne prostych d_1, d_2, d_3, d_4 możemy uważać odpowiednio trójki liczb [str. 92, (5 b)]:

$$\begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_1, & Z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z, & X \\ Z_1, & X_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X, & Y \\ X_1, & Y_1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z, & X \\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X, & Y \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} Y, & Z \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, & \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} Z, & X \\ \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2, & \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} X, & Y \\ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, & \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} Y, & Z \\ \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2, & \lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} Z & X \\ \lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2, & \lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2, & \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2 \end{vmatrix}.$$

Zważywszy zatem, że

$$\begin{vmatrix} Y, & Z \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, & \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \end{vmatrix} = $$

$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_1, & Z_1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix}, \text{it.d.},$$

możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli 4

proste d_1, d_2, d_3, d_4, posiadające punkt (niekoniecznie właściwy) P wspólny, są określone odpowiednio przez spółrzędne: U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, to za spółrzędne punktów P_1, P_2, P_3, P_4, w jakich odpowiednio proste d_1, d_2, d_3, d_4 przecinają dowolną prostą d (U, V, W), różną od każdej z prostych d_1, d_2, d_3, d_4, możemy uważać odpowiednio trójki liczb: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2$, $\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2$, $\lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, gdzie

$$X_1 = \begin{vmatrix} V, & W, \\ V_1, & W_1 \end{vmatrix}, \quad Y_1 = \begin{vmatrix} W, & U \\ W_1, & U_1 \end{vmatrix},$$
$$Z_1 = \begin{vmatrix} U, & V \\ U_1, & V_1 \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} V, & W \\ V_2, & W_2 \end{vmatrix},$$
$$Y_2 = \begin{vmatrix} W, & U \\ W_2, & U_2 \end{vmatrix}, \quad Z_2 = \begin{vmatrix} U, & V \\ U_2, & V_2 \end{vmatrix}.$$

punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d, są określone odpowiednio przez spółrzędne: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2$, $\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2$, $\lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, to za spółrzędne prostych d_1, d_2, d_3, d_4, łączących odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3, P_4 z dowolnym punktem P (X, Y, Z), różnym od każdego z punktów P_1, P_2, P_3, P_4, możemy uważać odpowiednio trójki liczb: U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, gdzie

$$U_1 = \begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_1, & Z_1 \end{vmatrix}, \quad V_1 = \begin{vmatrix} Z, & X \\ Z_1, & X_1 \end{vmatrix},$$
$$W_1 = \begin{vmatrix} X, & Y \\ X_1, & Y_1 \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} Y, & Z \\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix},$$
$$V_2 = \begin{vmatrix} Z, & X \\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} X, & Y \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Weźmy teraz pod uwagę jakiekolwiek 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d. Zewnątrz prostej d weźmy dowolny punkt właściwy P i połączmy ten punkt prostemi z punktami P_1, P_2, P_3, P_4. Proste PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3, d_4.

Załóżmy najpierw, że punkty P_1 i P_2 są różne. Spółrzędne tych punktów oznaczmy odpowiednio prze X_1, Y_1, Z_1 oraz X_2, Y_2, Z_2. Spółrzędne punktów P_3 i P_4, jako leżących na prostej P_1P_2, możemy wtedy przedstawić w postaci (str. 108 i 109): $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ oraz $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2$, $\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2$, $\lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, a zatem spółrzędne prostych d_1, d_2, d_3, d_4 możemy przedstawić w postaci (patrz podane wyżej twierdzenie z prawej strony): U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, skąd wynika, że (str. 240): $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$. Ponieważ zaś liczby $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'$ zależą tylko od punktów P_1, P_2, P_3, P_4, natomiast od punktu P nie zależą one zupełnie, przeto również wartość dwustosunku prostych d_1, d_2, d_3, d_4, t. zn. prostych PP_1, PP_2, PP_3, PP_4, zależy tylko od punktów P_1, P_2, P_3, P_4, natomiast od punktu P nie zależy ona zupełnie.

Gdyby w rozpatrywanym przypadku obydwa punkty P_1 i P_2 były punktami właściwymi, to moglibyśmy też mówić o dwustosunku (P_1, P_2, P_3, P_4), i przytem mielibyśmy równość (str. 236 i 237): $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$, a zatem byłoby wtedy: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Założmy teraz, że punkty P_1 i P_2 nakrywają się. W takim razie nakrywają się również proste d_1 i d_2. Jeżeli przytem każdy z punktów P_3 i P_4 jest różny od nakrywających się z sobą punktów P_1 i P_2, to również każda z prostych d_3 i d_4 jest różna od nakrywających się z sobą prostych d_1 d_2, a zatem $(d_1, d_2, d_3, d_4) = 1$; jeżeli zaś przynajmniej jeden z punktów P_3 i P_4 nakrywa punkty P_1 i P_2, to również przynajmniej jedna z prostych d_3 i d_4 nakrywa proste d_1 i d_2, a zatem dwustosunek (d_1, d_2, d_3, d_4) jest nieoznaczony. Jak więc widzimy, także i w tym przypadku wartość dwustosunku (d_1, d_2, d_3, d_4) zależy jedynie od punktów P_1, P_2, P_3, P_4, od punktu zaś P nie zależy ona zupełnie.

Przyczem, gdyby w omawianym przed chwilą przypadku nakrywające się z sobą punkty P_1 i P_2 były punktami właściwymi, to moglibyśmy mówić również o dwustosunku (P_1, P_2, P_3, P_4) i, jak to łatwo możemy spostrzec, mielibyśmy równość: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Rozumiejąc więc przez „rzutowanie punktu z jakiegoś innego punktu“ łączenie tych dwu punktów linją prostą, możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Rzutując 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej, z dowolnego punktu właściwego P, leżącego zewnątrz tej prostej, otrzymujemy 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, których dwustosunek od punktu P zupełnie nie zależy.

To twierdzenie pozwala nam wprowadzić definicję następującą:

Jeżeli są dane 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej (niekoniecznie właściwej) d, przyczem przynajmniej jeden z punktów P_1 i P_2 jest punktem niewłaściwym, to dwustosunkiem (albo stosunkiem podziału podwójnego) punktów P_1, P_2, P_3, P_4, który oznaczamy symbolem (P_1, P_2, P_3, P_4), nazywamy dwustosunek 4-ech prostych, jakie otrzymamy, rzutując punkty P_1, P_2, P_3, P_4 z dowolnego punktu właściwego, leżącego zewnątrz prostej d. [Przyczem dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) nazywamy harmonicznym, jeżeli jest on równy -1, w przeciwnym zaś razie nazywamy ten dwustosunek anharmonicznym].

Ta definicja dwustosunku 4-ech punktów, oraz definicja, podana w § 52, razem wzięte, określają dwustosunek jakichkolwiek 4-ech punktów, leżących na jednej prostej.

Do prostych d_1, d_2, d_3, d_4, rzutujących punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej, z dowolnego punktu właściwego, leżącego zewnątrz tej prostej, stosują się równości (2), (3), oraz, w razie harmoniczności, (4), podane w § 53, a ponieważ na mocy rozważań ostatnich mamy: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, $(d_2, d_1, d_4, d_3) = (P_2, P_1, P_4, P_3)$, $(d_3, d_4, d_1, d_2) = (P_3, P_4, P_1, P_2)$, $(d_4, d_3, d_2, d_1) = (P_4, P_3, P_2, P_1)$, $(d_1, d_2, d_4, d_3) = (P_1, P_2, P_4, P_3)$, $(d_2, d_1, d_3, d_4) = (P_2, P_1, P_3, P_4)$, przeto możemy powiedzieć, że równości (6) i (8) z § 52 (str. 231 i 233) zachodzą zawsze, oraz równości (9) z § 52 (str. 233) zachodzą zawsze wtedy, gdy dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) jest harmoniczny.

Tak samo z łatwością możemy spostrzec, że zawsze są prawdziwe twierdzenia następujące:

Jeżeli równaniami 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, leżących na jednej prostej, są odpowiednio równania

$$M_1(U,V,W) = A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0,$$
$$M_2(U,V,W) = A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0,$$
$$\lambda_1 . M_1(U,V,W) + \lambda_2 . M_2(U,V,W) = 0,$$
$$\lambda_1' . M_1(U,V,W) + \lambda_2' . M_2(U,V,W) = 0,$$

to w takim razie zachodzi równość: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

Jeżeli spółrzędnemi 4-ech punktów P_1, P_2, P_3, P_4, leżących na jednej prostej, są odpowiednio trójki liczb: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2, \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2, \lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, to w takim razie zachodzi równość: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

Gdyby więc np. punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej, w przypadku szczególnym, gdy żaden z punktów P_3 i P_4 nie nakrywa punktu P_2, były przedstawione odpowiednio przez równania:

$$M_1(U,V,W) = A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0,$$
$$M_2(U,V,W) = A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0,$$
$$M_1(U,V,W) + \lambda . M_2(U,V,W) = 0,$$
$$M_1(U,V,W) + \lambda' . M_2(U,V,W) = 0,$$

to mielibyśmy wtedy: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda}{\lambda'}$.

Weźmy teraz pod uwagę jakiekolwiek 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt (niekoniecznie właściwy) P. Przetnijmy te proste dowolną prostą d, nie przechodzącą przez punkt P. Punkty przecięcia się prostych d_1, d_2, d_3, d_4 z prostą d oznaczmy odpowiednio przez P_1, P_2, P_3, P_4.

Załóżmy najpierw, że proste d_1 i d_2 różne. Spółrzędne tych prostych oznaczmy odpowiednio przez U_1, V_1, W_1 oraz

U_2, V_2, W_2. Spółrzędne prostych d_3 i d_4, jako przechodzących przez punkt, wspólny prostym d_1 i d_2, możemy wtedy przedstawić w postaci (str. 108 i 109): $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$ oraz $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, a zatem spółrzędne punktów P_1, P_2, P_3, P_4 możemy przedstawić w postaci (patrz twierdzenie, podane na str. 242 z lewej strony): X_1, y_1, Z_1; X_2, y_2, Z_2; $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$; $\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2$, $\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2$, $\lambda_1' Z_1 + \lambda_2' Z_2$, skąd wynika, że (patrz twierdzenie podane na str. 245): $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$. Ponieważ zaś liczby λ_1, λ_2, λ_1', λ_2', zależą tylko od prostych d_1, d_2, d_3, d_4, natomiast od prostej d nie zależą one zupełnie, przeto również wartość dwustosunku punktów P_1, P_2, P_3, P_4 zależy tylko od prostych d_1, d_2, d_3, d_4, natomiast od prostej d nie zależy ona zupełnie.

Gdyby w rozpatrywanym przypadku punkt P był punktem właściwym, to moglibyśmy też mówić o dwustosunku (d_1, d_2, d_3, d_4), i przytem mielibyśmy równość (§ 53): $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$, a zatem byłoby wtedy: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (d_1, d_2, d_3, d_4)$.

Załóżmy teraz, że proste d_1 i d_2 nakrywają się. W takim razie nakrywają się też punkty P_1 i P_2. Jeżeli przytem każda z prostych d_3 i d_4 jest różna od nakrywających się z sobą prostych d_1 i d_2, to również każdy z punktów P_3 i P_4 jest różny od nakrywających się z sobą punktów P_1 i P_2, a zatem $(P_1, P_2, P_3, P_4) = 1$; jeżeli zaś przynajmniej jedna z prostych d_3 i d_4 nakrywa proste d_1 i d_2, to również przynajmniej jeden z punktów P_3 i P_4 nakrywa punkty P_1 i P_2, a zatem dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) jest nieoznaczony. Jak więc widzimy, także i w tym przypadku wartość dwustosunku (P_1, P_2, P_3, P_4) zależy jedynie od prostych d_1, d_2, d_3, d_4, od prostej zaś d nie zależy ona zupełnie.

Przyczem, gdyby w omawianym przed chwilą przypadku proste d_1, d_2, d_3, d_4 posiadały punkt właściwy wspólny, to moglibyśmy mówić również o dwustosunku (d_1, d_2, d_3, d_4) i, jak to łatwo możemy spostrzec, mielibyśmy równość: $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (d_1, d_2, d_3, d_4)$.

Możemy teraz wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Przecinając 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt, dowolną prostą d, nie przechodzącą przez ten punkt, otrzymujemy 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, których dwustosunek od prostej d zupełnie nie zależy.

To twierdzenie pozwala nam wprowadzić definicję następującą:

Jeżeli 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4 przechodzą przez jeden punkt niewłaściwy P, to dwustosunkiem (albo stosunkiem podziału podwójnego) prostych d_1, d_2, d_3, d_4, który oznaczamy symbolem (d_1, d_2, d_3, d_4), nazywamy dwustosunek 4-ech punktów, jakie otrzymamy, przecinając proste d_1, d_2, d_3, d_4 dowolną prostą, nie przechodzącą przez punkt P. [Przyczem dwustosunek (d_1, d_2, d_3, d_4) nazywamy harmonicznym, jeżeli jest on równy -1, w przeciwnym zaś razie nazywamy ten dwustosunek anharmonicznym].

Ta definicja dwustosunku 4-ech prostych, oraz definicja, podana w § 53, razem wzięte, określają dwustosunek jakichkolwiek 4-ech prostych, przechodzących przez jeden punkt.

Z łatwością możemy spostrzec, że równości (2) i (3) z § 53 (str. 237 i 238) zachodzą zawsze, oraz równości (4) z § 53 (str. 238) zachodzą zawsze wtedy, gdy dwustosunek (d_1, d_2, d_3, d_4) jest harmoniczny.

Również z łatwością możemy spostrzec, że zawsze są prawdziwe twierdzenia następujące:

Jeżeli równaniami 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt, są odpowiednio równania:

$$L_1(X, Y, Z) = A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0,$$
$$L_2(X, Y, Z) = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0,$$
$$\lambda_1 . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2 . L_2(X, Y, Z) = 0,$$
$$\lambda_1' . L_1(X, Y, Z) + \lambda_2' . L_2(X, Y, Z) = 0,$$

to w takim razie zachodzi równość: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}$.

Jeżeli spółrzędnemi 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt, są odpowiednio trójki liczb: U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2; $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$; $\lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2$, $\lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, $\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_2$, to w takim razie zachodzi równość:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda_2 \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_2'}.$$

Gdyby np. proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt, w przypadku szczególnym, gdy żadna z prostych d_3 i d_4 nie nakrywa prostej d_2, były przedstawione odpowiednio przez równania:

$$\begin{aligned} L_1(X, Y, Z) &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \\ L_2(X, Y, Z) &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0, \\ L_1(X, Y, Z) &+ \lambda . L_2(X, Y, Z) = 0, \\ L_1(X, Y, Z) &+ \lambda' . L_2(X, Y, Z) = 0, \end{aligned}$$

to mielibyśmy wtedy: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\lambda}{\lambda'}$.

Niechaj 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej, będą przedstawione odpowiednio przez równania:

$$(1) \quad \left| \begin{aligned} M_1'(U, V, W) &= \lambda_{11} . M_1(U, V, W) + \lambda_{12} . M_2(U, V, W) = 0, \\ M_2'(U, V, W) &= \lambda_{21} . M_1(U, V, W) + \lambda_{22} . M_2(U, V, W) = 0, \\ M_3'(U, V, W) &= \lambda_{31} . M_1(U, V, W) + \lambda_{32} . M_2(U, V, W) = 0, \\ M_4'(U, V, W) &= \lambda_{41} . M_1(U, V, W) + \lambda_{42} . M_2(U, V, W) = 0. \end{aligned} \right.$$

Przypuśćmy najpierw, że punkty P_1 i P_2 są różne, a zatem równość

$$(2) \qquad \lambda_{11} : \lambda_{21} = \lambda_{12} : \lambda_{22}$$

nie jest spełniona (str. 106). W takim razie (str. 106) punkty P_3 i P_4 możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$(3) \quad \left| \begin{aligned} & \lambda_1 . M_1'(U, V, W) + \lambda_2 . M_2'(U, V, W) = 0 \\ \text{oraz} \quad & \lambda_1' . M_1'(U, V, W) + \lambda_2' . M_2'(U, V, W) = 0, \end{aligned} \right.$$

czyli [równ. (1)]:

$$(\lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_2 \lambda_{21}) . M_1(U, V, W) + (\lambda_1 \lambda_{12} + \lambda_2 \lambda_{22}) . M_2(U, V, W) = 0$$

oraz

$$(\lambda_1'\lambda_{11}+\lambda_2'\lambda_{21}).M_1(U,V,W)+(\lambda_1'\lambda_{12}+\lambda_2'\lambda_{22}).M_2(U,V,W)=0,$$

a zatem (str. 106)

$$\frac{\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_2\lambda_{21}}{\lambda_{31}}=\frac{\lambda_1\lambda_{12}+\lambda_2\lambda_{22}}{\lambda_{32}} \text{ oraz } \frac{\lambda_1'\lambda_{11}+\lambda_2'\lambda_{21}}{\lambda_{41}}=\frac{\lambda_1'\lambda_{12}+\lambda_2'\lambda_{22}}{\lambda_{42}},$$

skąd wynika:

$$(4)\qquad \lambda_1\lambda_{11}+\lambda_2\lambda_{21}=\varrho\lambda_{31},\quad \lambda_1\lambda_{12}+\lambda_2\lambda_{22}=\varrho\lambda_{32};$$

$$(5)\qquad \lambda_1'\lambda_{11}+\lambda_2'\lambda_{21}=\varrho'\lambda_{41},\quad \lambda_1'\lambda_{12}+\lambda_2'\lambda_{22}=\varrho'\lambda_{42},$$

gdzie ϱ i ϱ' są to 2 liczby skończone różne od 0.

Z równości (4) otrzymujemy:

$$(6)\qquad \lambda_1=-\varrho\frac{\begin{vmatrix}\lambda_{21}, \lambda_{31}\\ \lambda_{22}, \lambda_{32}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{21}\\ \lambda_{12}, \lambda_{22}\end{vmatrix}},\quad \lambda_2=\varrho\frac{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{31}\\ \lambda_{12}, \lambda_{32}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{21}\\ \lambda_{12}, \lambda_{22}\end{vmatrix}};$$

z równości zaś (5) otrzymujemy:

$$(7)\qquad \lambda_1'=-\varrho'\frac{\begin{vmatrix}\lambda_{21}, \lambda_{41}\\ \lambda_{22}, \lambda_{42}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{21}\\ \lambda_{12}, \lambda_{22}\end{vmatrix}},\quad \lambda_2'=\varrho'\frac{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{41}\\ \lambda_{12}, \lambda_{42}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{21}\\ \lambda_{12}, \lambda_{22}\end{vmatrix}}$$

[mianownik we wzorach (6) i (7) jest różny od 0, albowiem, według założenia, równość (2) nie jest spełniona].

Lecz $(P_1, P_2, P_3, P_4)=\frac{\lambda_2\lambda_1'}{\lambda_1\lambda_2'}$, a zatem [wz. (6) i (7)]:

$$(8)\qquad (P_1, P_2, P_3, P_4)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{31}\\ \lambda_{12}, \lambda_{32}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_{21}, \lambda_{41}\\ \lambda_{22}, \lambda_{42}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_{11}, \lambda_{41}\\ \lambda_{12}, \lambda_{42}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_{21}, \lambda_{31}\\ \lambda_{22}, \lambda_{32}\end{vmatrix}}.$$

Wzór (8) wyprowadziliśmy w założeniu, że punkty P_1 i P_2 są różne. Gdyby zaś punkty P_1 i P_2 nakrywały się, to wzór (8) też byłby prawdziwy.

W razie bowiem, gdyby punkty P_1 i P_2 nakrywały się, lecz żaden z punktów P_3 i P_4 nie nakrywałby punktów P_1 i P_2, to wtedy równość (2) byłaby spełniona, lecz żaden z wyznaczników, występujących we wzorze (8), nie byłby równy 0; z równości (2) wynikałoby, że $\lambda_{11} = \varrho \lambda_{21}$ oraz $\lambda_{12} = \varrho \lambda_{22}$, gdzie ϱ jest liczbą skończoną, różną od 0, a zatem strona prawa równości (8) byłaby równa 1; a ponieważ strona lewa tej równości też byłaby równa 1, przeto równość (8) byłaby spełniona.

W razie zaś, gdyby nietylko punkty P_1 i P_2 nakrywały się, lecz gdyby również (przynajmniej) jeden z punktów P_3 i P_4, np. punkt P_3, nakrywał punkty P_1 i P_2, to dwustosunek (P_1, P_2, P_3, P_4) byłby nieoznaczony, równość (8) moglibyśmy więc uważać za spełnioną; przyczem gdyby w tym ostatnim przypadku punkty $M_1(U, V, W) = 0$ i $M_2(U, V, W) = 0$ nie nakrywały się, to moglibyśmy powiedzieć, że nietylko strona lewa równości (8) jest nieoznaczona, lecz także strona prawa tej równości, albowiem każdy z wyznaczników $\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, \lambda_{32} \end{vmatrix}$ oraz $\begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, \lambda_{32} \end{vmatrix}$ byłby wtedy równy 0.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

J e ż e l i r ó w n a n i a m i 4-ech p u n k t ó w P_1, P_2, P_3, P_4, l e ż ą c y c h n a j e d n e j p r o s t e j, s ą o d p o w i e d n i o r ó w n a n i a:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} \,.\, M_1(U, V, W) + \lambda_{12} \,.\, M_2(U, V, W) = 0, \\ \lambda_{21} \,.\, M_1(U, V, W) + \lambda_{22} \,.\, M_2(U, V, W) = 0, \\ \lambda_{31} \,.\, M_1(U, V, W) + \lambda_{32} \,.\, M_2(U, V, W) = 0, \\ \lambda_{41} \,.\, M_1(U, V, W) + \lambda_{42} \,.\, M_2(U, V, W) = 0, \end{aligned}$$

t o w t a k i m r a z i e z a c h o d z i r ó w n o ś ć:

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, \lambda_{32} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{41} \\ \lambda_{22}, \lambda_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{41} \\ \lambda_{12}, \lambda_{42} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, \lambda_{32} \end{vmatrix}}.$$

Stąd wynika twierdzenie:

J e ż e l i s p ó ł r z ę d n e m i 4-ech p u n k t ó w P_1, P_2, P_3, P_4, l e ż ą c y c h n a j e d n e j p r o s t e j, s ą o d p o w i e d n i o t r ó j k i l i c z b: $\lambda_{11} X_1 + \lambda_{12} X_2$, $\lambda_{11} Y_1 + \lambda_{12} Y_2$, $\lambda_{11} Z_1 + \lambda_{12} Z_2$; $\lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2$, $\lambda_{21} Y_1 + \lambda_{22} Y_2$, $\lambda_{21} Z_1 + \lambda_{22} Z_2$; $\lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2$,

$\lambda_{31} Y_1 + \lambda_{32} Y_2$, $\lambda_{31} Z_1 + \lambda_{32} Z_2$; $\lambda_{41} X_1 + \lambda_{42} X_2$, $\lambda_{41} Y_1 + \lambda_{42} Y_2$, $\lambda_{41} Z_1 + \lambda_{42} Z_2$, to w takim razie zachodzi równość:

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, \lambda_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{41} \\ \lambda_{22}, \lambda_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{41} \\ \lambda_{12}, \lambda_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, \lambda_{32} \end{vmatrix}}.$$

W sposób analogiczny moglibyśmy wykazać, że są prawdziwe także twierdzenia następujące:

Jeżeli równaniami 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt, są odpowiednio równania:

$$\lambda_{11} \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_{12} \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$
$$\lambda_{21} \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_{22} \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$
$$\lambda_{31} \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_{32} \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$
$$\lambda_{41} \cdot L_1(X, Y, Z) + \lambda_{42} \cdot L_2(X, Y, Z) = 0,$$

to w takim razie zachodzi równość:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, \lambda_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{41} \\ \lambda_{22}, \lambda_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{41} \\ \lambda_{12}, \lambda_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, \lambda_{32} \end{vmatrix}}.$$

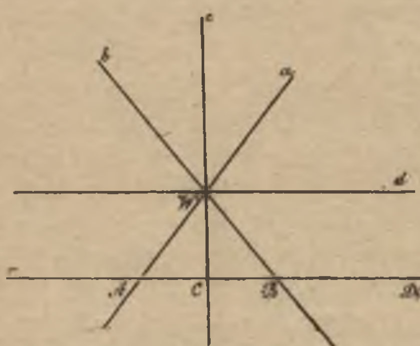
Jeżeli spółrzędnemi 4-ech prostych d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzących przez jeden punkt, są odpowiednio trójki liczb: $\lambda_{11} U_1 + \lambda_{12} U_2$, $\lambda_{11} V_1 + \lambda_{12} V_2$, $\lambda_{11} W_1 + \lambda_{12} W_2$; $\lambda_{21} U_1 + \lambda_{22} U_2$, $\lambda_{21} V_1 + \lambda_{22} V_2$, $\lambda_{21} W_1 + \lambda_{22} W_2$; $\lambda_{31} U_1 + \lambda_{32} U_2$, $\lambda_{31} V_1 + \lambda_{32} V_2$, $\lambda_{31} W_1 + \lambda_{32} W_2$; $\lambda_{41} U_1 + \lambda_{42} U_2$, $\lambda_{41} V_1 + \lambda_{42} V_2$, $\lambda_{41} W_1 + \lambda_{42} W_2$, to w takim razie zachodzi równość:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, \lambda_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{41} \\ \lambda_{22}, \lambda_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{41} \\ \lambda_{12}, \lambda_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, \lambda_{32} \end{vmatrix}}.$$

Rozważania § niniejszego upoważniają nas również do wypowiedzenia twierdzenia następującego, które nazywamy twierdzeniem Pappus'a:

Dwustosunek 4-ech punktów, względnie 4-ech prostych, pozostaje bez zmiany przy wszelkich rzutach, względnie przecięciach. (To twierdzenie należy pojmować w ten sposób: rzutując 4 punkty P_1, P_2, P_3, P_4, leżące na jednej prostej, z dowolnego punktu, leżącego zewnątrz tej prostej, otrzymujemy 4 proste, których dwustosunek jest równy dwustosunkowi punktów P_1, P_2, P_3, P_4; względnie, przecinając 4 proste d_1, d_2, d_3, d_4, przechodzące przez jeden punkt, dowolną prostą, nie przechodzącą przez ten punkt, otrzymujemy 4 punkty, których dwustosunek jest równy dwustosunkowi prostych d_1, d_2, d_3, d_4).

Niechaj będą dane 4 proste a, b, c, d, przechodzące przez jeden punkt właściwy W i spełniające warunek $(a, b, c, d) = -1$, przyczem niechaj proste c i d będą wzajemnie prostopadłe (rys. 42). Weźmy na prostej c dowolny punkt C, różny od punktu W, i poprowadźmy przez ten punkt prostą r, równoległą do prostej d. Punkty przecięcia się prostej r z prostemi a, b, d oznaczmy odpowiednio przez A, B, D. Punkt D jest, oczywiście, punktem niewłaściwym. Na mocy twierdzenia Pappus'a



Rys. 42.

mamy $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$, a ponieważ, według założenia, $(a, b, c, d) = -1$, przeto $(A, B, C, D) = -1$. Lecz punkt D jest punktem niewłaściwym, a zatem (str. 233) punkt C jest środkiem odcinka AB, t. zn. $CA = CB$. Stąd zaś wynika, że trójkąty (prostokątne) ACW i BCW są równe, a zatem $\sphericalangle CWA = \sphericalangle CWB$, t. zn. prosta c jest dwusieczną jednej pary kątów wierzchołkiem przeciwległych, jakie tworzą z sobą proste a i b. Prosta d, jako prostopadła do prostej c, jest więc dwusieczną drugiej pary kątów wierzchołkiem przeciwległych, utworzonych przez proste a i b. Otrzymaliśmy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli 2 proste c i d, które są przężone z sobą harmonicznie względem dwu innych pro-

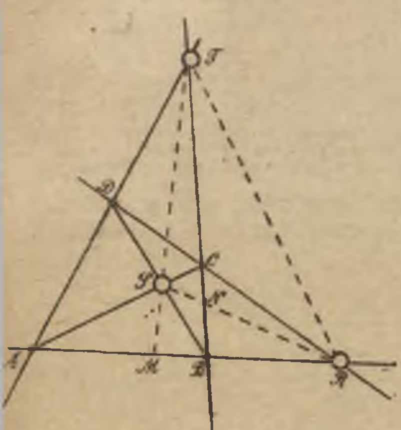
s t y c h *a* i *b*, p r z e c i n a j ą c y c h s i ę w p u n k c i e w ł a ś c i w y m, s ą w z g l ę d e m s i e b i e p r o s t o p a d ł e, t o s ą o n e d w u s i e c z n e m i k ą t ó w, u t w o r z o n y c h p r z e z p r o s t e *a* i *b*.

§ 55. Czworokąt płaski zupełny, względnie czworobok płaski zupełny.

Na płaszczyźnie 4

punkty, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, określają c z w o r o k ą t p ł a s k i z u p e ł n y: figurę, utworzoną z tych 4-ech punktów (w i e r z c h o ł k ó w) oraz z 6-iu prostych (b o k ó w), z których każda zawiera dwa z pośród 4-ech punktów danych.

Jeżeli więc np. 4 punkty dane, które przyjmujemy za

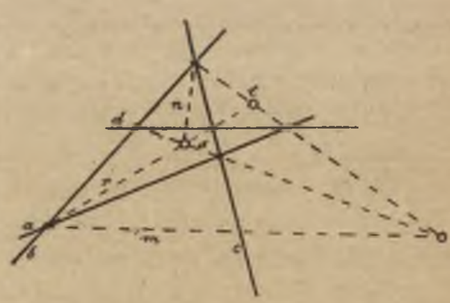


Rys. 43a.

wierzchołki czworokąta płaskiego zupełnego, oznaczymy przez A, B, C, D (rys. 43a), to

proste, z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt, określają c z w o r o b o k p ł a s k i z u p e ł n y: figurę, utworzoną z tych 4-ech prostych (b o k ó w) oraz z 6-iu punktów (w i e r z c h o ł k ó w), z których każdy jest punktem przecięcia się dwu z pośród 4-ech prostych danych.

Jeżeli więc np. 4 proste dane, które przyjmujemy za boki czworoboku płaskiego zupełnego, oznaczymy przez a, b, c, d (rys. 43b), to wierz-



Rys. 43b.

chołkami tego czworoboku będą punkty ab, ac, ad, bc, bd, cd.

bokami tego czworokąta będą proste AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Przez każdy wierzchołek przechodzą 3 boki czworokąta; każdy bok ma swój przeciwległy, którym jest bok, zawierający 2 wierzchołki, nie należące do boku pierwszego. Istnieją zatem 3 pary boków przeciwległych, określające 3 punkty (każdy, jako przecięcie dwu boków jednej pary); te 3 punkty nazywają się punktami przekątnymi danego czworokąta zupełnego; są one wierzchołkami trójkąta, którego każdy bok nazywamy prostą przekątną, albo wprost przekątną czworokąta.

Jeżeli więc wierzchołki czworokąta płaskiego zupełnego są oznaczone przez A, B, C, D, to 3-ema parami boków przeciwległych są pary: AB i CD, AC i BD, AD i BC. Punktami przekątnymi są wtedy (rys. 43a): punkt R, będący punktem przecięcia się boków AB i CD; punkt S, będący punktem przecięcia się boków AC i BD; oraz punkt T, będący punktem przecięcia się boków AD i BC. Przekątnemi są proste: RS, ST, TR.

Na każdym boku leżą 3 wierzchołki czworoboku; każdy wierzchołek ma swój przeciwległy, którym jest wierzchołek, będący punktem przecięcia się dwu boków, nie przechodzących przez wierzchołek pierwszy. Istnieją zatem 3 pary wierzchołków przeciwległych, określające 3 proste (każdą, jako prostą połączenia dwu wierzchołków jednej pary); te 3 proste nazywają się prostemi przekątnemi, albo wprost przekątnemi danego czworoboku zupełnego; są one bokami trójboku, którego każdy wierzchołek nazywamy punktem przekątnym czworoboku.

Jeżeli więc boki czworoboku płaskiego zupełnego są oznaczone przez a, b, c, d, to 3-ema parami wierzchołków przeciwległych są pary: ab i cd, ac i bd, ad i bc. Przekątnemi są wtedy (rys. 43 b): prosta r, łącząca punkty ab i cd; prosta s, łącząca punkty ac i bd; oraz prosta t, łącząca punkty ad i bc. Punktami przekątnymi sa punkty: rs, st, tr.

Dowiedziemy teraz, że:

Każde 2 boki przeciwległe czworokąta płaskiego zupełnego są sprzężone z sobą harmonicznie względem dwu przekątnych, przechodzących przez ich punkt przecięcia się.

Każde 2 wierzchołki przeciwległe czworoboku płaskiego zupełnego są sprzężone z sobą harmonicznie względem dwu punktów przekątnych, należących do ich prostej połączenia.

W tym celu weźmy jakikolwiek układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Wprowadziwszy takie oznaczenia, jakich użyliśmy na rysunku

43 a, przyjmijmy, że równaniami wierzchołków A, B, C, D rozpatrywanego czworokąta płaskiego zupełnego są odpowiednio równania:

$$M_1(U,V,W)=0,\quad M_2(U,V,W)=0,$$
$$M_3(U,V,W)=0,\quad M_4(U,V,W)=0.$$

43 b, przyjmijmy, że równaniami boków a, b, c, d rozpatrywanegó czworoboku płaskiego zupełnego są odpowiednio równania:

$$L_1(X,Y,Z)=0,\quad L_2(X,Y,Z)=0,$$
$$L_3(X,Y,Z)=0,\quad L_4(X,Y,Z)=0.$$

Jak wiemy (str. 120, Uwaga), zawsze istnieje tożsamość:

$$(1\,\mathrm{a})\quad k_1 . M_1(U, V, W) + k_2 . M_2(U, V, W) + k_3 . M_3(U, V, W) + k_4 . M_4(U, V, W) = 0,$$

$$(1\,\mathrm{b})\quad k_1 . L_1(X, Y, Z) + k_2 . L_2(X, Y, Z) + k_3 . L_3(X, Y, Z) + k_4 . L_4(X, Y, Z) = 0,$$

gdzie k_1, k_2, k_3, k_4 są liczbami rzeczywistemi skończonemi, z których przynajmniej jedna jest różna od 0. Z tej tożsamości wynikają tożsamości następujące:

$$(2\,\mathrm{a})\quad k_1 . M_1(U, V, W) + k_2 . M_2(U, V, W) = -[k_3 . M_3(U, V, W) + k_4 . M_4(U, V, W)],$$

$$(2\,\mathrm{b})\quad k_1 . L_1(X, Y, Z) + k_2 . L_2(X, Y, Z) = -[k_3 . L_3(X, Y, Z) + k_4 . L_4(X, Y, Z)],$$

$$(3\,\mathrm{a})\quad k_1 . M_1(U, V, W) + k_3 . M_3(U, V, W) = -[k_2 . M_2(U, V, W) + k_4 . M_4(U, V, W)],$$

$$(3\,\mathrm{b})\quad k_1 . L_1(X, Y, Z) + k_3 . L_3(X, Y, Z) = -[k_2 . L_2(X, Y, Z) + k_4 . L_4(X, Y, Z)],$$

(4 a) $k_1 . M_1 (U, V, W) +$
$+ k_4 . M_4 (U, V, W) =$
$= -[k_2 . M_2 (U, V, W) +$
$+ k_3 . M_3 (U, V, W)]$.

Strona lewa tożsamości (2a) zawsze jest równa stronie prawej tej tożsamości. Takie zatem wartości na U, V, W, które czynią równą 0 stronę lewą tożsamości (2a), czynią także równą 0 stronę prawą tej tożsamości, i odwrotnie. Stąd więc wynika, że równości:

$$(5\,a)\quad \left| \begin{array}{l} k_1 . M_1 (U, V, W) + \\ \quad + k_2 . M_2 (U, V, W) = 0, \\ k_3 . M_3 (U, V, W) + \\ \quad + k_4 . M_4 (U, V, W) = 0 \end{array} \right.$$

albo obiedwie jednocześnie są tożsamościami, albo też obiedwie jednocześnie są równaniami, przedstawiającemi jeden i ten sam punkt. Lecz skądinąd znów możemy wywnioskować, że nie jest możliwe, aby równości (5 a) były obiedwie jednocześnie tożsamościami. Wiemy mianowicie, że przynajmniej jedna z liczb k_1, k_2, k_3, k_4 jest różna od 0, jeżeli więc np. różną od 0 jest liczba k_1, to równość $k_1 . M_1 (U, V, W) + k_2 . M_2 (U,V,W) = 0$ mogłaby być tożsamością tylko w tym przypadku, gdyby (§ 25) równania $M_1 (U, V, W) = 0$ i

(4 b) $k_1 . L_1 (X, Y, Z) +$
$+ k_4 . L_4 (X, Y, Z) =$
$= -[k_2 . L_2 (X, Y, Z) +$
$+ k_3 . L_3 (X, Y, Z)]$.

Strona lewa tożsamości (2b) zawsze jest równa stronie prawej tej tożsamości. Takie zatem wartości na X, Y, Z, które czynią równą 0 stronę lewą tożsamości (2b), czynią także równą 0 stronę prawą tej tożsamości, i odwrotnie. Stąd więc wynika, że równości:

$$(5\,b)\quad \left| \begin{array}{l} k_1 . L_1 (X, Y, Z) + \\ \quad + k_2 . L_2 (X, Y, Z) = 0, \\ k_3 . L_3 (X, Y, Z) + \\ \quad + k_4 . L_4 (X, Y, Z) = 0 \end{array} \right.$$

albo obiedwie jednocześnie są tożsamościami, albo też obiedwie jednocześnie są równaniami, przedstawiającemi jedną i tę samą prostą. Lecz skądinąd znów możemy wywnioskować, że nie jest możliwe, aby równości (5b) były obiedwie jednocześnie tożsamościami. Wiemy mianowicie, że przynajmniej jedna z liczb k_1, k_2, k_3, k_4 jest różna od 0, jeżeli więc np. różną od 0 jest liczba k_1, to równość $k_1 . L_1 (X,Y,Z) + k_2 . L_2 (X,Y,Z) = 0$ mogłaby być tożsamością tylko w tym przypadku, gdyby (§ 25) równania $L_1 (X, Y, Z) = 0$ i $L_2 (X, Y, Z) = 0$

$M_2(U, V, W) = 0$ przedstawiały jeden i ten sam punkt, innemi słowy gdyby punkty A i B nakrywały się, to zaś nie jest możliwe, albowiem, według założenia, żadne 3 z pośród punktów A, B, C, D nie leżą na jednej prostej. A zatem równości (5 a) obiedwie jednocześnie są równaniami, przedstawiającemi jeden i ten sam punkt. Lecz, sądząc z formy równania $k_1 . M_1(U, V, W) + k_2 . M_2(U, V, W) = 0$, możemy powiedzieć, że punkt, jaki to równanie przedstawia, należy do prostej, łączącej punkty $M_1(U, V, W) = 0$ i $M_2(U, V, W) = 0$ (§ 25), t. zn. do prostej AB, sądząc zaś z formy równania $k_3 . M_3(U, V, W) + k_4 . M_4(U, V, W) = 0$, możemy powiedzieć, że punkt, jaki to równanie przedstawia, należy do prostej CD, a ponieważ każde z tych dwu równań przedstawia jeden i ten sam punkt, przeto każde z tych dwu równań przedstawia punkt przecięcia się prostych AB i CD, t. zn. punkt R.

Gdybyśmy teraz wyszli z tożsamości (3 a), względnie (4 a), to, rozumując w sposób analogiczny, przekonalibyśmy się, że każda z równości przedstawiały jedną i tę samą prostą, innemi słowy gdyby proste a i b nakrywały się, to zaś nie jest możliwe, albowiem, według założenia, żadne 3 z pośród prostych a, b, c, d nie przechodzą przez jeden punkt. A zatem równości (5b) obiedwie jednocześnie są równaniami, przedstawiającemi jedną i tę samą prostą. Lecz, sądząc z formy równania $k_1 . L_1(X, Y, Z) + k_2 . L_2(X, Y, Z) = 0$, możemy powiedzieć, że prosta, jaką to równanie przedstawia, przechodzi przez punkt przecięcia się prostych $L_1(X, Y, Z) = 0$ i $L_2(X, Y, Z) = 0$ (§ 25), t. zn. przez punkt ab, sądząc zaś z formy równania $k_3 . L_3(X, Y, Z) + k_4 . L_4(X, Y, Z) = 0$, możemy powiedzieć, że prosta, jaką to równanie przedstawia, przechodzi przez punkt cd, a ponieważ każde z tych dwu równań przedstawia jedną i tę samą prostą, przeto każde z tych dwu równań przedstawia prostą, łączącą punkty ab i cd, t. zn. prostą r.

Gdybyśmy teraz wyszli z tożsamości (3b), względnie (4b), to, rozumując w sposób analogiczny, przekonalibyśmy się, że każda z równości

$$(6\,a)\quad \left|\begin{aligned} & k_1 . M_1 (U, V, W) + \\ & + k_3 . M_3 (U, V, W) = 0, \\ & k_2 . M_2 (U, V, W) + \\ & + k_4 . M_4 (U, V, W) = 0 \end{aligned}\right.$$

jest równaniem, przedstawiającem punkt S, względnie każda z równości

$$(7\,a)\quad \left|\begin{aligned} & k_1 . M_1 (U, V, W) + \\ & + k_4 . M_4 (U, V, W) = 0, \\ & k_2 . M_2 (U, V, W) + \\ & + k_3 . M_3 (U, V, W) = 0 \end{aligned}\right.$$

jest równaniem, przedstawiającem punkt T.

$$(6\,b)\quad \left|\begin{aligned} & k_1 . L_1 (X, Y, Z) + \\ & + k_3 . L_3 (X, Y, Z) = 0, \\ & k_2 . L_2 (X, Y, Z) + \\ & + k_4 . L_4 (X, Y, Z) = 0 \end{aligned}\right.$$

jest równaniem, przedstawiającem prostą s, względnie każda z równości

$$(7\,b)\quad \left|\begin{aligned} & k_1 . L_1 (X, Y, Z) + \\ & + k_4 . L_4 (X, Y, Z) = 0, \\ & k_2 . L_2 (X, Y, Z) + \\ & + k_3 . L_3 (X, Y, Z) = 0 \end{aligned}\right.$$

jest równaniem, przedstawiającem prostą t.

A zatem równanie

$$(8a)\quad M (U, V, W) = k_1 . M_1 (U, V, W) + k_3 . M_3 (U, V, W) = 0$$

przedstawia punkt S, oraz równanie

$$(9a)\quad M' (U, V, W) = k_2 . M_2 (U, V, W) + k_3 . M_3 (U, V, W) = 0$$

przedstawia punkt T.

$$(8b)\quad L (X, Y, Z) = k_1 . L_1 (X, Y, Z) + k_3 . L_3 (X, Y, Z) = 0$$

przedstawia prostą s, oraz równanie

$$(9b)\quad L' (X, Y, Z) = k_2 . L_2 (X, Y, Z) + k_3 . L_3 (X, Y, Z) = 0$$

przedstawia prostą t.

Stąd zaś wynika, że równanie

$$(10a)\quad M (U, V, W) - M' (U, V, W) = 0$$

przedstawia pewien punkt, należący do prostej ST (§ 25). Lecz z drugiej strony, ponieważ równanie (10a) możemy napisać w postaci [patrz równ. (8a) i (9a)]:

$$(11a)\quad k_1 . M_1 (U, V, W) - k_2 . M_2 (U, V, W) = 0,$$

$$(10b)\quad L (X, Y, Z) - L' (X, Y, Z) = 0$$

przedstawia pewną prostą, przechodzącą przez punkt st (§ 25). Lecz z drugiej strony, ponieważ równanie (10b) możemy napisać w postaci [patrz równ. (8b) i (9b)]:

$$(11b)\quad k_1 . L_1 (X, Y, Z) - k_2 . L_2 (X, Y, Z) = 0,$$

przeto przedstawia ono pewien punkt, należący do prostej AB. A zatem równanie (10a), czyli (11a), przedstawia punkt przecięcia się prostych AB i ST, który oznaczmy np. przez M (rys. 43 a).

przeto przedstawia ono pewną prostą, przechodzącą przez punkt ab. A zatem równanie (10b), czyli (11b), przedstawia prostą, łączącą punkty ab i st, którą oznaczmy np. przez m (rys. 43b).

Mamy więc, iż równaniami 4-ech

punktów A, B, R, M, leżących na jednej prostej, są odpowiednio równania:

$$(12\text{ a})\quad \left| \begin{array}{l} M_1(U, V, W) = 0, \\ M_2(U, V, W) = 0, \\ k_1 \cdot M_1(U, V, W) + \\ + k_2 \cdot M_2(U, V, W) = 0, \\ k_1 \cdot M_1(U, V, W) - \\ - k_2 \cdot M_2(U, V, W) = 0, \end{array} \right.$$

skąd wynika, że (str. 245):

$$(A, B, R, M) = \frac{k_2 \cdot k_1}{k_1 \cdot (-k_2)},$$

czyli

$$(13\text{ a})\quad (A, B, R, M) = -1.$$

Rzutując teraz punkty A, B, R, M z punktu S, względnie T, otrzymujemy (na mocy twierdzenia Pappus'a): $(SA, SB, SR, ST) = (A, B, R, M)$, względnie $(TA, TB, TR, TS) = (A, B, R, M)$, a zatem [równ. (13 a)]:

$$(14\text{a})\quad (SA, SB, SR, ST) = -1,$$

$$(15\text{a})\quad (TA, TB, TR, TS) = -1.$$

Przecinając proste SA, SB, SR, ST prostą BC, otrzymuje-

prostych a, b, r, m, przechodzących przez jeden punkt, są odpowiednio równania:

$$(12\text{ b})\quad \left| \begin{array}{l} L_1(X, Y, Z) = 0, \\ L_2(X, Y, Z) = 0, \\ k_1 \cdot L_1(X, Y, Z) + \\ \quad + k_2 \cdot L_2(X, Y, Z) = 0, \\ k_1 \cdot L_1(X, Y, Z) - \\ \quad - k_2 \cdot L_2(X, Y, Z) = 0, \end{array} \right.$$

skąd wynika, że (str. 247):

$$(a, b, r, m) = \frac{k_2 \cdot k_1}{k_1 \cdot (-k_2)},$$

czyli

$$(13\text{ b})\quad (a, b, r, m) = -1.$$

Przecinając teraz proste a, b, r, m prostą s, względnie t, otrzymujemy (na mocy twierdzenia Pappus'a): $(sa, sb, sr, st) = (a, b, r, m)$, względnie $(ta, tb, tr, ts) = (a, b, r, m)$, a zatem [równ. (13 b)]:

$$(14\text{ b})\quad (sa, sb, sr, st) = -1,$$

$$(15\text{ b})\quad (ta, tb, tr, ts) = -1.$$

Rzutując punkty sa, sb, sr, st z punktu bc, otrzymujemy my (na mocy twierdzenia Pappus'a): $(C, B, N, T) = (SA, SB, SR, ST)$, gdzie N oznacza punkt przecięcia się prostych SR i BC; a zatem [równ. (14 a)]:

(16a) $(C, B, N, T) = -1.$

Rzutując, w końcu, punkty C, B, N, T z punktu R, otrzymujemy (na mocy twierdzenia Pappus'a): $(RC, RB, RS, RT) = (C, B, N, T)$, a zatem [równ. (16 a)]:

(17a) $(RC, RB, RS, RT) = -1.$

Równości (14 a), (15 a), (17 a) dowodzą prawdziwości naszego twierdzenia.

(na mocy twierdzenia Pappus'a): $(c, b, n, t) = (sa, sb, sr, st)$, gdzie n oznacza prostą, łączącą punkty sr i bc; a zatem [równ. (14 b)]:

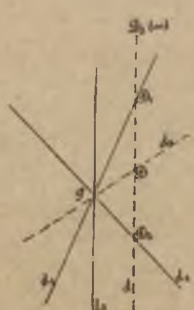
(16 b) $(c, b, n, t) = -1.$

Przecinając, w końcu, proste c, b, n, t prostą r, otrzymujemy (na mocy twierdzenia Pappus'a): $(rc, rb, rs, rt) = (c, b, n, t)$, a zatem [równ. (16 b)]:

(17 b) $(rc, rb, rs, rt) = -1.$

Równości (14 b), (15 b), (17 b) dowodzą prawdziwości naszego twierdzenia.

§56. Konstrukcje elementów harmonicznych. — Zadanie 1. Dane 3 proste (różne) d_1, d_2, d_3, przechodzące przez jeden punkt (właściwy) P. Wykreślić prostą d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2.



Rys. 44.

Kreślimy (rys. 44) jakąkolwiek prostą d, równoległą do prostej d_3, lecz różną od tej prostej. Punkty przecięcia się prostej d z prostemi d_1 i d_2 oznaczmy odpowiednio przez D_1 i D_2. Jeżeli teraz odcinek $D_1 D_2$ podzielimy na połowy i środek D_4 tego odcinka połączymy z punktem P, to otrzymana prosta d_4 będzie sprzężona harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2.

Oznaczywszy bowiem przez D_3 punkt niewłaściwy prostej d, możemy napisać (§ 52): $(D_1, D_2, D_3, D_4) = -1$, skąd wynika (na mocy twierdzenia Pappus'a), że $(d_1, d_2, d_3, d_4) = -1.$

Zamiast kreślić prostą d, równoległą do prostej d_3, moglibyśmy nakreślić prostą d, równoległą do jednej z prostych d_1 i d_2, np. do prostej d_2, i różną od tej prostej (rys. 45). Jeżeli mianowicie punkty przecięcia się prostej d z prostemi d_1 i d_3 oznaczymy wtedy odpowiednio przez D_1 i D_3, to odmierzywszy na prostej d odcinek $D_1 D_4$, równy odcinkowi $D_1 D_3$, i połączywszy punkt D_4 z punktem P, otrzymamy prostą d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2.

Rys. 45.

Konstrukcję prostej d_4 moglibyśmy wykonać jeszcze inaczej, a mianowicie w sposób następujący.

Na prostej d_3 (rys. 46) bierzemy dowolny punkt M, różny od punktu P, i przesuwamy przez ten punkt 2 proste odpowiednio równoległe do prostych d_1 i d_2, których punkty przecięcia się z prostemi d_2 i d_1 oznaczmy odpowiednio przez D_2 i D_1. Prostą szukaną d_4 będzie prosta, przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej $D_1 D_2$.

Rys. 46.

Zadanie 2. Dane 3 punkty (różne) P_1, P_2, P_3, leżące na jednej prostej d. Wykreślić punkt P_4, sprzężony harmonicznie z punktem P_3 względem punktów P_1 i P_2.

Zewnątrz prostej d weźmy jakikolwiek punkt (właściwy) P i zrzutujmy z tego punktu punkty P_1, P_2, P_3. Oznaczmy proste PP_1, PP_2, PP_3 odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Wykreślmy (Zadanie 1) prostą d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2. Punkt przecięcia się prostej d_4 z prostą d będzie szukanym punktem P_4 (twierdzenie Pappus'a).

Podamy jeszcze inne sposoby rozwiązania tych zadań.

Zadanie 2. Dane 3 punkty (różne) P_1, P_2, P_3, le-

Zadanie 1. Dane 3 proste (różne) d_1, d_2, d_3, przeżące na jednej prostej d. Wykreślić punkt P_4, sprzężony harmonicznie z punktem P_3 względem punktów P_1 i P_2.

Sposób 1-y. Zrzutujmy punkty P_1, P_2, P_3 z jakiegokolwiek punktu P, leżącego zewnątrz prostej d (rys. 47a).

Rys. 47a.

Na prostej PP_3 weźmy dowolny punkt J, różny od każdego z punktów P i P_3. Punkt przecięcia się prostej JP_1 z prostą PP_2 oznaczmy przez K, punkt zaś przecięcia się prostej JP_2 z prostą PP_1 oznaczmy przez L. Szukanym punktem P_4 będzie punkt przecięcia się prostych d i KL.

chodzące przez jeden punkt P. Wykreślić prostą d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2.

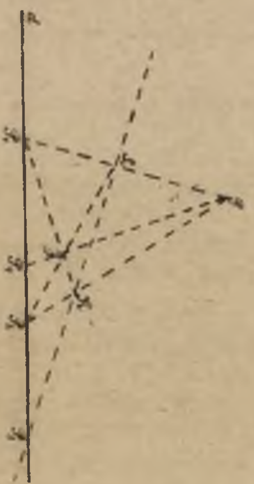
Sposób 1-y. Przetnijmy proste d_1, d_2, d_3 jakąkolwiek prostą d, nie przechodzącą przez punkt P (rys. 47b).

Rys. 47b.

Przez punkt dd_3 przesuńmy dowolną prostą j, różną od każdej z prostych d i d_3. Prostą, łączącą punkt jd_1 z punktem dd_2, oznaczmy przez k, prostą zaś, łączącą punkt jd_2 z punktem dd_1, oznaczmy przez l. Szukaną prostą d_4 będzie prosta, łącząca punkt P z punktem kl.

Oznaczywszy bowiem przez P_4 punkt przecięcia się prostych d i KL, możemy powiedzieć, że proste PP_1 i PP_2 są dwoma bokami przeciwległymi, proste zaś PP_3 i PP_4 są dwiema przekątnemi czworokąta płaskiego zupełnego, którego wierzchołkami są punkty P_1, P_2, K, L, a zatem (§ 55): $(PP_1,\ PP_2,\ PP_3,\ PP_4) = -1$, skąd znów wynika (na mocy twierdzenia Pappus'a), że $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4) = -1$, t. zn. że punkt P_4 jest punktem szukanym.

S p o s ó b 2-i. Zrzutujmy punkty P_1 i P_2 z jakiegokolwiek punktu P, leżącego zewnątrz prostej d (rys. 48 a).



Rys. 48 a.

Przez punkt P_3 przesuńmy jakąkolwiek prostą, różną od

Oznaczywszy bowiem przez d_4 prostą, łączącą punkty P i kl, możemy powiedzieć, że punkty dd_1 i dd_2 są dwoma wierzchołkami przeciwległymi, punkty zaś dd_3 i dd_4 są dwoma punktami przekątnymi czworoboku płaskiego zupełnego, którego bokami są proste d_1, d_2, k, l, a zatem (§ 55): $(dd_1, dd_2, dd_3, dd_4) = -1$, skąd znów wynika (na mocy twierdzenia Pappus'a), że $(d_1, d_2, d_3, d_4) = -1$, t. zn. że prosta d_4 jest prostą szukaną.

S p o s ó b 2-i. Przetnijmy proste d_1 i d_2 jakąkolwiek prostą d, nie przechodzącą przez punkt P (rys. 48 b). Na pro-

Rys. 48 b.

stej d_3 weźmy jakikolwiek punkt, różny od punktu P i nie prostej d i nie przechodzącą przez punkt P, której punkty przecięcia się z prostemi PP_2 i PP_1 oznaczmy odpowiednio przez K i L. Punkt przecięcia się prostych P_1K i P_2L oznaczmy przez J. Szukanym punktem P_4 będzie punkt przecięcia się prostych d i PJ.

Oznaczywszy bowiem przez P_4 punkt przecięcia się prostych d i PJ, możemy powiedzieć, że proste PP_1 i PP_2 są dwoma bokami przeciwległymi, proste zaś PP_3 i PP_4 są dwiema przekątnemi czworokąta płaskiego zupełnego, którego wierzchołkami są punkty P_1, P_2, K, L, a zatem (§ 55): $(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = -1$, skąd znów wynika (na mocy twierdzenia Pappus'a), że $(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$, t. zn. że punkt P_4 jest punktem szukanym.

Zadanie 1. Dane 3 proste (różne) d_1, d_2, d_3, przechodzące przez jeden punkt P. Wykreślić prostą d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2.

Przetnijmy proste d_1, d_2, d_3 jakąkolwiek prostą d, nie przechodzącą przez punkt P. Punkty dd_1, dd_2, dd_3 oznaczmy odpowiednio przez P_1, P_2, P_3. Wykreślmy (Zadanie 2) punkt leżący na prostej d, którego proste połączenia z punktami dd_2 i dd_1 oznaczmy odpowiednio przez k i l. Prostą, łączącą punkty d_1k i d_2l, oznaczmy przez j. Szukaną prostą d_4 będzie prosta, łącząca punkty P i dj.

Oznaczywszy bowiem przez d_4 prostą, łączącą punkty P i dj, możemy powiedzieć, że punkty dd_1 i dd_2 są dwoma wierzchołkami przeciwległymi, punkty zaś dd_3 i dd_4 są dwoma punktami przekątnymi czworoboku płaskiego zupełnego, którego bokami są proste d_1, d_2, k, l, a zatem (§ 55): $(dd_1, dd_2, dd_3, dd_4) = -1$, skąd znów wynika (na mocy twierdzenia Pappus'a), że $(d_1, d_2, d_3, d_4) = -1$, t. zn. że prosta d_4 jest prostą szukaną.

Zadanie 2. Dane 3 punkty (różne) P_1, P_2, P_3, leżące na jednej prostej d. Wykreślić punkt P_4, sprzężony harmonicznie z punktem P_3 względem punktów P_1 i P_2.

Zrzutujmy punkty P_1, P_2, P_3 z jakiegokolwiek punktu P, nie należącego do prostej d. Proste PP_1, PP_2, PP_3 oznaczmy odpowiednio przez d_1, d_2, d_3. Wykreślmy (Zadanie 1) prostą

P_4, sprzężony harmonicznie z punktem P_3 względem punktów P_1 i P_2. Prosta, łącząca punkty P i P_4, będzie szukaną prostą d_4 (twierdzenie Pappus'a).

d_4, sprzężoną harmonicznie z prostą d_3 względem prostych d_1 i d_2. Punkt przecięcia się prostych d i d_4 będzie szukanym punktem P_4 (twierdzenie Pappus'a).

Uwaga. Podane wyżej konstrukcje elementów harmonicznych, oparte na własnościach czworokąta, względnie czworoboku, płaskiego zupełnego, są wykonalne za pomocą samego tylko linjału (jeżeli, oczywiście, rozpatrywane punkty i proste są punktami i prostemi właściwymi). Natomiast konstrukcje, podane na początku § niniejszego, za pomocą samego tylko linjału wykonane być nie mogą, albowiem sam linjał nie wystarcza ani do wykreślania prostej, równoległej do innej prostej, ani do podziału odcinka na 2 części równe, ani do odmierzania odcinka, równego danemu odcinkowi.

Rozdział VI.

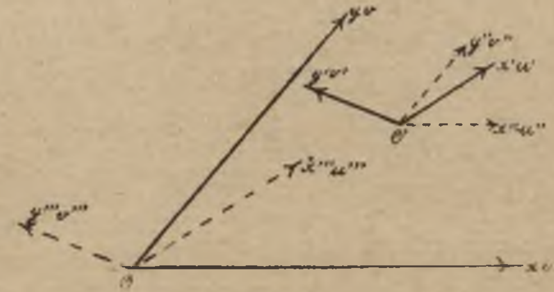
§ 57. **Zmiana układu spółrzędnych.** — Dotychczas w naszych rozważaniach przy rozwiązywaniu wszelkich zagadnień wystarczały nam 2 osi spółrzędnych. Może się jednak zdarzyć, iż zaczniemy rozwiązywać jakieś zagadnienie przy pewnych 2 osiach spółrzędnych, a następnie okaże się, że korzystniej byłoby wprowadzić inne 2 osi. Przez wprowadzenie jednak innych osi spółrzędnych, spółrzędne punktów oraz prostych ulegają zmianom. Otóż właśnie teraz stawiamy sobie za zadanie znalezienie zależności, zachodzących pomiędzy spółrzędnemi jednego i tego samego punktu, względnie jednej i tej samej prostej, odnoszącemi się do dwu układów o osiach różnych.

Zamiast jednak badać odrazu przejście od jakichś 2 osi spółrzędnych do jakichkolwiek innych 2 osi spółrzędnych, zbadamy najpierw 2 przypadki szczególne, a mianowicie:

1) przejście od osi x, y, względnie u, v, przecinających się w punkcie O, do osi x', y', względnie u', v', przecinających się w jakimś punkcie O', różnym od punktu O, posiadających jednak te same kierunki oraz te same zwroty dodatnie (a zatem i ujemne), co osi x, y, względnie u, v (t. zn. dawna oś x-ów, względnie u-ów, i nowa oś x'-ów, względnie u'-ów, są wzajemnie równoległe i posiadają jednakowe zwroty dodatnie, jak również dawna oś y-ów, względnie v-ów, i nowa oś y'-ów, względnie v'-ów, są wzajemnie równoległe i posiadają jednakowe zwroty dodatnie).

2) przejście od osi x, y, względnie u, v, przecinających się w punkcie O, do jakichś innych osi x', y', względnie u', v', przecinających się w tym samym punkcie O.

Jeżeli zbadamy te 2 przypadki szczególne, to potrafimy wtedy przejść od jakichś osi x, y, względnie u, v, do jakichkolwiek innych osi x', y', względnie u', v'. Aby mianowicie przejść od osi x, y, względnie u, v, do osi x', y', względnie u', v', przedstawionych na rysunku 49, możemy najpierw przejść od osi x, y, względnie u, v, do osi x'', y'', względnie u'', v'' (przypadek 1-y), następnie zaś od osi x'', y'', względnie u'', v'', do osi x', y', względnie u', v' (przypadek 2-i), albo też najpierw przejść od osi x, y, względnie u, v, do osi x''', y''', względnie u''', v''' (przypadek 2-i), następnie zaś od osi x''', y''', względnie u''', v''', do osi x', y', względnie u', v' (przypadek 1-y).

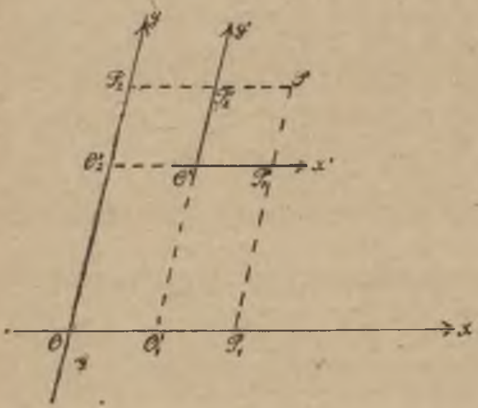


Rys. 49.

Ponieważ w pierwszym z dwu wymienionych wyżej przypadków szczególnych zmienia się tylko początek układu spółrzędnych, natomiast zwroty dodatnie (a zatem i ujemne) osi spółrzędnych nie ulegają zmianie, w drugim zaś z tych dwu przypadków szczególnych zmieniają się zwroty dodatnie (a zatem i ujemne) osi spółrzędnych, natomiast początek układu spółrzędnych nie ulega zmianie, zmianę osi spółrzędnych, jaka zachodzi w 1-ym przypadku, nazywamy *zmianą początku układu spółrzędnych*, zmianę zaś osi spółrzędnych, jaka zachodzi w 2-im przypadku, nazywamy *zmianą zwrotów osi spółrzędnych*. Zmianę początku układu spółrzędnych nazywamy też inaczej *przesunięciem równoległem osi spółrzędnych*.

Musimy przytem zaznaczyć, że wszelkie rozpatrywane tu przez nas zmiany osi spółrzędnych nie dotyczą jednostki długości σ, jaką posługujemy się przy obliczaniu spółrzędnych (§ 2), t. zn. zarówno przy dawnych osiach spółrzędnych, jak też przy nowych, posługujemy się tą samą jednostką długości σ.

§ 58. Zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi punktu w razie zmiany początku układu spółrzędnych. — Dany układ spółrzędnych Descartes'a o początku O i osiach x, y. Od tego układu przechodzimy do układu spółrzędnych o początku O' i osiach x', y', posiadających zwroty dodatnie (a zatem i ujemne) odpowiednio jednakowe ze zwrotami osi x, y (rys. 50). Spółrzędne Descartes'a początku O' nowego układu spółrzędnych w dawnym układzie oznaczmy przez x_0, y_0.



Rys. 50.

Weźmy jakikolwiek punkt właściwy P, którego spółrzędne Descartes'a w dawnym układzie spółrzędnych oznaczmy przez x, y, w nowym zaś układzie spółrzędnych przez x', y'.

Punkt przecięcia się osi x-ów z osią y'-ów oznaczmy przez O_1', punkt zaś przecięcia się osi y-ów z osią x'-ów oznaczmy przez O_2'. Punkty przecięcia się prostej, przechodzącej przez punkt P i równoległej do osi y-ów, z osiami x-ów i x'-ów oznaczmy odpowiednio przez P_1 i P_1', punkty zaś przecięcia się prostej, przechodzącej przez punkt P i równoległej do osi x-ów, z osiami y-ów i y'-ów oznaczmy odpowiednio przez P_2 i P_2'.

Jeżeli $x_0 \geq 0$, $x \geq 0$ oraz $x' \geq 0$, to $x_0 = OO_1'$, $x' = O'P_1' = O_1'P_1$, $x = OP_1 = OO_1' + O_1'P_1$ (gdzie przez OO_1' rozumiemy liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka OO_1', i t. d.), a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $x_0 \geq 0$, $x \geq 0$ oraz $x' \leq 0$, to $x_0 = OO_1'$, $x' = -O'P_1' = -O_1'P_1$, $x = OP_1 = OO_1' - O_1'P_1$, a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $x_0 \geq 0$, $x \leq 0$ (a zatem $x' \leq 0$), to $x_0 = OO_1'$, $x' = -O'P_1' = -O_1'P_1$, $x = -OP_1 = OO_1' - O_1'P_1$, a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $x_0 \leqq 0$, $x \geqq 0$ (a zatem $x' \geqq 0$), to $x_0 = -OO_1'$, $x' = O'P_1' = O_1'P_1$, $x = OP_1 = -OO_1' + O_1'P_1$, a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $x_0 \leqq 0$, $x \leqq 0$ oraz $x' \geqq 0$, to $x_0 = -OO_1'$, $x' = O'P_1' = O_1'P_1$, $x = -OP_1 = -OO_1' + O_1'P_1$, a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $x_0 \leqq 0$, $x \leqq 0$ oraz $x' \leqq 0$, to $x_0 = -OO_1'$, $x' = -O'P_1' = -O_1'P_1$, $x = -OP_1 = -OO_1' - O_1'P_1$, a zatem $x = x_0 + x'$.

Jeżeli $y_0 \geqq 0$, $y \geqq 0$ oraz $y' \geqq 0$, to $y_0 = OO_2'$, $y' = O'P_2' = O_2'P_2$, $y = OP_2 = OO_2' + O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Jeżeli $y_0 \geqq 0$, $y \geqq 0$ oraz $y' \leqq 0$, to $y_0 = OO_2'$, $y' = -O'P_2' = -O_2'P_2$, $y = OP_2 = OO_2' - O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Jeżeli $y_0 \geqq 0$, $y \leqq 0$ (a zatem $y' \leqq 0$), to $y_0 = OO_2'$, $y' = -O'P_2' = -O_2'P_2$, $y = -OP_2 = OO_2' - O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Jeżeli $y_0 \leqq 0$, $y \geqq 0$ (a zatem $y' \geqq 0$), to $y_0 = -OO_2'$, $y' = O'P_2' = O_2'P_2$, $y = OP_2 = -OO_2' + O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Jeżeli $y_0 \leqq 0$, $y \leqq 0$ oraz $y' \geqq 0$, to $y_0 = -OO_2'$, $y' = O'P_2' = O_2'P_2$, $y = -OP_2 = -OO_2' + O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Jeżeli $y_0 \leqq 0$, $y \leqq 0$ oraz $y' \leqq 0$, to $y_0 = -OO_2'$, $y' = -O'P_2' = -O_2'P_2$, $y = -OP_2 = -OO_2' - O_2'P_2$, a zatem $y = y_0 + y'$.

Rozpatrzyliśmy tu wszystkie możliwe przypadki i w każdym z nich otrzymaliśmy wyniki te same. Możemy więc powiedzieć, że zawsze zachodzą równości:

(1) $$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

Z tych równości wynikają równości:

(2) $$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0.$$

Równości (1) i (2) wyrażają zależności pomiędzy spółrzędnemi Descartes'a punktu właściwego P w układach spółrzędnych o osiach x, y oraz x', y'. Znajdziemy teraz zależności pomiędzy spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktu właściwego P w układach spółrzędnych, podporządkowanych wymienionym układom Descartes'a.

Jeżeli spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu właściwego P w obydwu wymienionych układach spółrzędnych oznaczymy odpowiednio przez X, Y, Z oraz X', Y', Z', to w takim razie będziemy mieli (§ 9): $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$, $x'=\frac{X'}{Z'}$, $y'=\frac{Y'}{Z'}$, z równości (1) i (2) otrzymamy zatem równości:

$$\frac{X}{Z}=\frac{X'+x_0 Z'}{Z'}, \quad \frac{Y}{Z}=\frac{Y'+y_0 Z'}{Z'}; \tag{3}$$

$$\frac{X'}{Z'}=\frac{X-x_0 Z}{Z}, \quad \frac{Y'}{Z'}=\frac{Y-y_0 Z}{Z}. \tag{4}$$

Z równości (3) i (4) wynikają proporcje:

$$X:Y:Z=(X'+x_0 Z'):(Y'+y_0 Z'):Z', \tag{5}$$

$$X':Y':Z'=(X-x_0 Z):(Y-y_0 Z):Z. \tag{6}$$

Proporcje (5) i (6) otrzymaliśmy w założeniu, że punkt P jest punktem właściwym. Wykażemy teraz, że te proporcje zachodzą jednak również wtedy, gdy punkt P jest punktem niewłaściwym.

Przyjmijmy mianowicie w tym celu, że punkt P jest punktem niewłaściwym prostej właściwej d, której równaniem w 1-ym układzie spółrzędnych Descartes'a jest równanie $Ax+By+C=0$. W takim razie spółrzędne X, Y, Z punktu P spełniają warunki (§ 9):

$$X:Y:Z=B:-A:0. \tag{7}$$

Równaniem prostej d w 2-im układzie spółrzędnych Descartes'a jest równanie $A(x'+x_0)+B(y'+y_0)+C=0$, czyli $Ax'+By'+(Ax_0+By_0+C)=0$, a zatem spółrzędne X', Y', Z' punktu P spełniają warunki (§ 9):

$$X':Y':Z'=B:-A:0. \tag{8}$$

Z proporcji (7) i (8) wynika:

$$X:Y=X':Y' \text{ oraz } Z=Z'=0. \tag{9}$$

Lecz jeżeli punkt P jest punktem niewłaściwym, t. zn. jeżeli liczby Z i Z' są obiedwie równe 0, to równości (5) i (6) są równoznaczne z równościami (9).

Możemy więc powiedzieć, że wzory (5) i (6) stosują się zawsze, t. zn. zarówno do punktów właściwych, jak też i niewłaściwych.

Uwaga. Opierając się na pewnych własnościach rzutów, wykonywanych w jednej płaszczyźnie, wzory (1) moglibyśmy wyprowadzić znacznie prościej, nie rozpatrując mianowicie tylu przypadków szczególnych. Wyjaśnimy tu tę rzecz bliżej.

Na płaszczyźnie rzutem dowolnego punktu P ze środka rzutu S na oś rzutu s nazywamy punkt P', w jakim prosta SP przecina prostą s; rzutem zaś jakiegoś odcinka nazywamy ogół rzutów punktów tego odcinka. Jeżeli osią rzutu s jest pewna prosta właściwa, środkiem zaś rzutu S jest punkt niewłaściwy prostej właściwej, prostopadłej do osi rzutu s, to rzut jest wtedy rzutem prostokątnym (Wstęp, V).

Przyjąwszy jako oś rzutu s jakąś prostą właściwą oraz jako środek rzutu S jakikolwiek punkt niewłaściwy, nie leżący na prostej s, i zdefinjowawszy w i e l k o ś ć r z u t u odcinka w ten sposób, jak ją zdefinjowaliśmy na str. 32 w przypadku rzutu prostokątnego, moglibyśmy powiedzieć, iż są prawdziwe twierdzenia następujące:

α) Jeżeli $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$ są n punktami (właściwymi), leżącymi w płaszczyźnie Ss (t. zn. w płaszczyźnie, zawierającej punkt S i prostą s), to suma wielkości rzutów odcinków $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}\, P_n$ równa się wielkości rzutu odcinka $P_1\, P_n$;

β) Jeżeli oś rzutu s', leżąca w płaszczyźnie Ss, posiada taki sam zwrot, jak oś rzutu s, to wielkości rzutów jakiegokolwiek odcinka, leżącego w płaszczyźnie Ss, wykonanych z punktu S na osi s i s', są równe.

Opierając się na tych własnościach rzutów, moglibyśmy z łatwością wyprowadzić wzory (1).

Przyjąwszy mianowicie jako oś rzutu oś x-ów i jako środek rzutu punkt niewłaściwy osi y-ów (rys. 50), moglibyśmy powiedzieć [twierd. α)], że suma wielkości rzutów odcinków OO' i $O'P$ równa się wielkości rzutu odcinka OP. Lecz wielkości rzutów odcinków OO' i OP są równe odpowiednio x_0 i x, wielkość zaś rzutu odcinka $O'P$ jest równa [twierdz. β)] wielkości rzutu odcinka $O'P$, wykonanego z punktu niewłaściwego osi y-ów na oś x'-ów, t. zn. jest równa x'. W ten sposób otrzymalibyśmy więc równość: $x = x_0 + x'$.

Przyjąwszy znów jako oś rzutu oś y-ów oraz jako środek rzutu punkt niewłaściwy osi x-ów, w sposób analogiczny otrzymalibyśmy równość: $y = y_0 + y'$.

§ 59. Zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi prostej w razie zmiany początku układu spółrzędnych. — Dany układ spółrzędnych Descartes'a, oraz związany z nim układ spółrzędnych Plücker'a, o początku O i osiach x, y, względnie u, v. Od tych układów przechodzimy do układów spółrzędnych o początku O' i osiach x', y', względnie u', v', posiadających zwroty dodatnie (a zatem i ujemne) odpowiednio jednakowe ze zwrotami osi x, y, względnie u, v. Spółrzędne Descartes'a początku O' nowego układu spółrzędnych w dawnym układzie oznaczmy przez x_0, y_0.

Weźmy jakąkolwiek prostą d. Spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej d w układach, podporządkowanych wymienionym układom Descartes'a i Plücker'a, oznaczmy odpowiednio przez U, V, W oraz U', V', W'. W tych układach prostą d możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$UX + VY + WZ = 0, \tag{1}$$

$$U'X' + V'Y' + W'Z' = 0. \tag{2}$$

Lecz jeżeli w równanie (1), przedstawiające prostą d w pierwszym układzie, zamiast X, Y, Z wstawimy odpowiednio [§ 58, wz. (5)]: $X' + x_0 Z'$, $Y' + y_0 Z'$, Z', to otrzymamy równanie prostej d w drugim układzie, t. zn. równanie

$$UX' + VY' + (Ux_0 + Vy_0 + W) Z' = 0 \tag{3}$$

przedstawia prostą d w drugim układzie.

Analogicznie, jeżeli w równanie (2), przedstawiające prostą d w drugim układzie, zamiast X', Y', Z' wstawimy odpowiednio [§ 58, wz. (6)]: $X - x_0 Z$, $Y - y_0 Z$, Z, to otrzymamy równanie prostej d w pierwszym układzie, t. zn. równanie

$$U'X + V'Y - (U'x_0 + V'y_0 - W') Z = 0 \tag{4}$$

przedstawia prostą d w pierwszym układzie.

Równania zatem (1) i (4) przedstawiają w pierwszym układzie jedną i tę samą prostą, równania zaś (2) i (3) przedstawiają w drugim układzie jedną i tę samą prostą, skąd wynika:

(5) $$U : V : W = U' : V' : -(U' x_0 + V' y_0 - W'),$$

(6) $$U' : V' : W' = U : V : (U x_0 + V y_0 + W).$$

Wzory (5) i (6) wyrażają zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go jakiejkolwiek prostej d.

Jeżeli prosta d nie przechodzi przez żaden z punktów O i O', to również w każdym z rozpatrywanych układów spółrzędnych Plücker'a możemy ją przedstawić przez spółrzędne. Aby w tym przypadku otrzymać zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi spółrzędnemi Plücker'a u, v prostej d oraz jej nowemi spółrzędnemi Plücker'a u', v', wystarczy we wzory (5) i (6) zamiast U, V, W, względnie U', V', W', wstawić $u, v, 1$, względnie $u', v', 1$. Otrzymamy wtedy:

(7) $$u : v : 1 = u' : v' : -(u' x_0 + v' y_0 - 1),$$

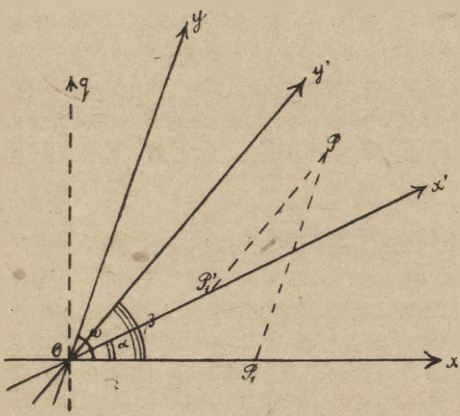
(8) $$u' : v' : 1 = u : v : (u x_0 + v y_0 + 1),$$

skąd wynika:

(9) $$u = -\frac{u'}{u' x_0 + v' y_0 - 1}, \quad v = -\frac{v'}{u' x_0 + v' y_0 - 1};$$

(10) $$u' = \frac{u}{u x_0 + v y_0 + 1}, \quad v' = \frac{v}{u x_0 + v y_0 + 1}.$$

§ 60. Zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi punktu w razie zmiany zwrotów osi spółrzędnych.— Dany układ spółrzędnych Descartes'a o osiach x, y. Od tego układu przechodzimy do układu spółrzędnych o osiach x', y', posiadającego ten sam początek O, co układ pierwszy (rys. 51). Przez ω oznaczmy, jak zwykle, kąt mniejszy od π, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie osi x-ów i osi y-ów (§ 2). Przez α oznaczmy jeden z kątów o wierzchołku O, których pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, drugiem zaś ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x'-ów, i których zwrotem jest zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O w pierwszym układzie spółrzędnych [przez zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O w pierwszym układzie spółrzędnych rozumiemy ten zwrot, przy którym promień p_x, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, promień p_y, posiadający zwrot dodatni osi y-ów,



Rys. 51.

oraz promień p_x', posiadający zwrot ujemny osi x-ów, następują po sobie w kolei $p_x\ p_y\ p_x'$ (§ 2)]. Przez β oznaczmy jeden z kątów o wierzchołku O, których pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów, drugiem zaś ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi y'-ów, i których zwrotem jest zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O w pierwszym układzie spółrzędnych.

Weźmy jakikolwiek punkt właściwy P, którego spółrzędne Descartes'a w dawnym układzie spółrzędnych oznaczmy przez x, y, w nowym zaś układzie spółrzędnych przez x', y'.

Przez punkt P przesuńmy prostą, równoległą do osi y-ów, której punkt przecięcia się z osią x-ów oznaczmy przez P_1, oraz prostą, równoległą do osi y'-ów, której punkt przecięcia się z osią x'-ów oznaczmy przez P_1'.

Obliczmy teraz wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P, OP_1', $P_1'P$ na oś x-ów.

Jeżeli $x \geqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na oś x-ów równa się OP_1 (gdzie OP_1 oznacza liczbę nieujemną, wyrażającą długość odcinka OP_1), jeżeli zaś $x \leqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na oś x-ów równa się $- OP_1$. Lecz w pierwszym przypadku $OP_1 = x$, w drugim zaś $OP_1 = - x$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na oś x-ów równa się x.

Jeżeli $y \geqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na oś x-ów równa się $P_1P . \cos\omega$, jeżeli zaś $y \leqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na oś x-ów równa się $P_1P . \cos(\pi - \omega)$, czyli $- P_1P . \cos\omega$. Lecz w pierwszym przypadku $P_1P = y$, w drugim zaś $P_1P = -y$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na oś x-ów równa się $y \cos\omega$.

Jeżeli $x' \geqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na oś x-ów równa się $OP_1' \cdot \cos\alpha$, jeżeli zaś $x' \leqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na oś x-ów równa się $OP_1' \cdot \cos(\alpha + \pi)$, czyli $- OP_1' \cdot \cos\alpha$. Lecz w pierwszym przypadku $OP_1' = x'$, w drugim zaś $OP_1' = - x'$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na oś x-ów równa się $x' \cos\alpha$.

Jeżeli $y' \geqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1'P$ na oś x-ów równa się $P_1'P \cdot \cos\beta$, jeżeli zaś $y' \leqq 0$, to wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1'P$ na oś x-ów równa się $P_1'P \cdot \cos(\beta + \pi)$, czyli $- P_1'P \cdot \cos\beta$. Lecz w pierwszym przypadku $P_1'P = y'$, w drugim zaś $P_1'P = - y'$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1'P$ na oś x-ów równa się $y' \cos\beta$.

Otrzymaliśmy więc, że wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P, OP_1', $P_1'P$ na oś x-ów są odpowiednio równe x, $y\cos\omega$, $x'\cos\alpha$, $y'\cos\beta$. Lecz suma wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1 i P_1P na oś x-ów równa się sumie wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1' i $P_1'P$ na tę oś (str. 32), mamy więc:

$$x + y\cos\omega = x'\cos\alpha + y'\cos\beta. \tag{1}$$

Przesuńmy teraz przez punkt O prostą q, prostopadłą do osi x-ów, i nadajmy tej prostej taki zwrot, aby promień, wychodzący z punktu O i posiadający ten zwrot, leżał z tej samej strony osi x-ów, z której leży promień, wychodzący z punktu O i posiadający zwrot dodatni osi y-ów.

Obliczmy wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1, P_1P, OP_1', $P_1'P$ na prostą q.

Wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1 na prostą q równa się 0.

Jeżeli $y \geqq 0$, to w razie, gdy $\omega \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą q równa się $P_1P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$, czyli $P_1P \cdot \sin\omega$, w razie zaś, gdy $\omega \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą q równa się $P_1P \cdot \cos\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$, czyli tak samo $P_1P \cdot \sin\omega$. Jeżeli $y \leqq 0$, to w razie, gdy $\omega \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą q równa się $P_1P \cdot \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right]$, czyli $P_1P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$, czyli $-P_1P \cdot \sin\omega$, w razie zaś, gdy $\omega \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą q równa się $P_1P \cdot \cos\left[\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right]$, czyli $P_1P \cdot \cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$, czyli tak samo $-P_1P \cdot \sin\omega$. Lecz w przypadku, gdy $y \geqq 0$, mamy $P_1P = y$, w przypadku zaś, gdy $y \leqq 0$, mamy $P_1P = -y$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka P_1P na prostą q równa się $y \sin\omega$.

Jeżeli $x' \geqq 0$, to w razie, gdy $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na prostą q równa się $OP_1' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, czyli $OP_1' \cdot \sin\alpha$, w razie zaś, gdy $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na prostą q równa się

$OP_1' \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, czyli tak samo $OP_1' \cdot \sin\alpha$. Jeżeli $x' \leqq 0$, to w razie, gdy $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na prostą q równa się $OP_1' \cdot \cos\left|\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right|$, czyli $OP_1' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, czyli $- OP_1' \cdot \sin\alpha$, w razie zaś, gdy $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na prostą q równa się $OP_1' \cdot \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right]$, czyli $OP_1' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, czyli tak samo $- OP_1' \cdot \sin\alpha$. Lecz w przypadku, gdy $x' \geqq 0$, mamy $OP_1' = x'$, w przypadku zaś, gdy $x' \leqq 0$, mamy $OP_1' = -x'$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka OP_1' na prostą q równa się $x' \sin\alpha$.

Jeżeli $y' \geqq 0$, to w razie, gdy $\beta \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1' P$ na prostą q równa się $P_1' P . \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, czyli $P_1' P . \sin\beta$, w razie zaś, gdy $\beta \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1' P$ na prostą q równa się $P_1' P . \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$, czyli tak samo $P_1' P . \sin\beta$. Jeżeli $y' \leqq 0$, to w razie, gdy $\beta \leqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1' P$ na prostą q równa się $P_1' P . \cos\left|\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right|$, czyli $P_1' P . \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$, czyli $- P_1' P \cdot \sin\beta$, w razie zaś, gdy $\beta \geqq \frac{\pi}{2}$, wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1' P$ na prostą q równa się $P_1' P \cdot \cos\left[\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right]$, czyli $P_1' P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$, czyli tak samo $- P_1' P . \sin\beta$. Lecz w przypadku, gdy $y' \geqq 0$, mamy $P_1' P = y'$, w przypadku zaś, gdy $y' \leqq 0$, mamy $P_1' P = -y'$, a zatem zawsze wielkość rzutu prostokątnego odcinka $P_1' P$ na prostą q równa się $y' \sin\beta$.

Otrzymaliśmy więc, że wielkości rzutów prostokątnych odcinków $OP_1, P_1P, OP_1', P_1'P$ na prostą q są odpowiednio równe 0, $y \sin\omega$, $x' \sin\alpha$, $y' \sin\beta$. Lecz suma wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1 i P_1P na prostą q równa się sumie wielkości rzutów prostokątnych odcinków OP_1' i $P_1'P$ na tę prostą (str. 32), mamy więc:

(2) $$y \sin\omega = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

A zatem pomiędzy dawnemi spółrzędnemi x, y punktu P oraz nowemi spółrzędnemi x', y' tego punktu zachodzą zależności [równ. (1) i (2)]:

(3) $$\begin{cases} x + y\cos\omega = x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \\ y\sin\omega = x'\sin\alpha + y'\sin\beta. \end{cases}$$

Rozwiążmy z równości (3) wielkości x i y. Otrzymamy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x'\cos\alpha + y'\cos\beta, & \cos\omega \\ x'\sin\alpha + y'\sin\beta, & \sin\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & \cos\omega \\ 0, & \sin\omega \end{vmatrix}} = \frac{x'\sin(\omega-\alpha) + y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$$

$$\text{oraz}\quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\omega}.$$

Rozwiążmy teraz z równości (3) wielkości x' i y'. Otrzymamy:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x + y\cos\omega, & \cos\beta \\ y\sin\omega, & \sin\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta \\ \sin\alpha, & \sin\beta \end{vmatrix}} = \frac{x\sin\beta + y\sin(\beta-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\text{oraz}\quad y' = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & x + y\cos\omega \\ \sin\alpha, & y\sin\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta \\ \sin\alpha, & \sin\beta \end{vmatrix}} = -\frac{x\sin\alpha + y\sin(\alpha-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Mamy więc:

(4) $$x = \frac{x'\sin(\omega-\alpha) + y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},\quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\omega};$$

(5) $$x' = \frac{x\sin\beta + y\sin(\beta-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)},\quad y' = -\frac{x\sin\alpha + y\sin(\alpha-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Znajdziemy teraz zależności pomiędzy spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktu właściwego P w układach spółrzędnych, podporządkowanych rozpatrywanym układom Descartes'a.

Jeżeli spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu właściwego P w obydwu wymienionych układach spółrzędnych oznaczymy odpowiednio przez X, Y, Z oraz X', Y', Z', to w takim razie będziemy mieli (§ 9): $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, $x' = \frac{X'}{Z'}$, $y' = \frac{Y'}{Z'}$, z równości (4) i (5) otrzymamy zatem równości:

$$(6)\quad \frac{X}{Z} = \frac{X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta)}{Z' \sin \omega}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{X' \sin \alpha + Y' \sin \beta}{Z' \sin \omega};$$

$$(7)\quad \frac{X'}{Z'} = \frac{X \sin \beta + Y \sin(\beta - \omega)}{Z \sin(\beta - \alpha)}, \quad \frac{Y'}{Z'} = -\frac{X \sin \alpha + Y \sin(\alpha - \omega)}{Z \sin(\beta - \alpha)}.$$

Z równości (6) i (7) wynikają proporcje:

$$(8)\quad X : Y : Z = [X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta)] : (X' \sin \alpha + Y' \sin \beta) : (Z' \sin \omega),$$

$$(9)\quad X' : Y' : Z' = [X \sin \beta + Y \sin(\beta - \omega)] : -[X \sin \alpha + Y \sin(\alpha - \omega)] : [Z \sin(\beta - \alpha)].$$

Proporcje (8) i (9) otrzymaliśmy w założeniu, że punkt P jest punktem właściwym. Wykażemy teraz, że te proporcje zachodzą jednak również wtedy, gdy punkt P jest punktem niewłaściwym.

Przyjmijmy mianowicie w tym celu, że punkt P jest punktem niewłaściwym prostej właściwej d, której równaniami w obydwu rozpatrywanych układach spółrzędnych Descartes'a są odpowiednio równania: $Ax + By + C = 0$, $A'x' + B'y' + C' = 0$. W takim razie spółrzędne X, Y, Z, względnie X', Y', Z', punktu P spełniają warunki (§ 9):

$$(10)\quad X : Y : Z = B : -A : 0,$$

$$(11)\quad X' : Y' : Z' = B' : -A' : 0.$$

Lecz jeżeli w równanie $Ax + By + C = 0$ zamiast x i y wstawimy strony prawe równości (4), to otrzymamy równanie prostej d w drugim układzie spółrzędnych Descartes'a, t. zn.

równanie $[A\sin(\omega-\alpha)+B\sin\alpha]\,x'+[A\sin(\omega-\beta)+B\sin\beta]\,y'+$ $+C\sin\omega=0$ przedstawia prostą d w drugim układzie spółrzędnych Descartes'a. Stąd wynika, że (§ 9):

$$(12)\quad X':Y':Z'=[A\sin(\omega-\beta)+B\sin\beta]:-[A\sin(\omega-\alpha)+$$
$$+B\sin\alpha]:0.$$

Analogicznie, jeżeli w równanie $A'x'+B'y'+C'=0$ zamiast x' i y' wstawimy strony prawe równości (5), to otrzymamy równanie prostej d w pierwszym układzie spółrzędnych Descartes'a, t. zn. równanie $(A'\sin\beta-B'\sin\alpha)\,x+[A'\sin(\beta-\omega)-$ $-B'\sin(\alpha-\omega)]\,y+C'\sin(\beta-\alpha)=0$ przedstawia prostą d w pierwszym układzie spółrzędnych Descartes'a, skąd znów otrzymujemy:

$$(13)\quad X:Y:Z=[A'\sin(\beta-\omega)-B'\sin(\alpha-\omega)]:-(A'\sin\beta-$$
$$-B'\sin\alpha):0.$$

Z proporcji (13) i (11) wynika: $X:Y:Z=[-Y'\sin(\beta-\omega)-$ $-X'\sin(\alpha-\omega)]:-(-Y'\sin\beta-X'\sin\alpha):0$, czyli:

$$(14)\quad \begin{cases} X:Y=[X'\sin(\omega-\alpha)+Y'\sin(\omega-\beta)]:(X'\sin\alpha+Y'\sin\beta) \\ \text{oraz}\ \ Z=0. \end{cases}$$

Z proporcji zaś (12) i (10) wynika: $X':Y':Z'=[-Y\sin(\omega-\beta)+$ $+X\sin\beta]:-[-Y\sin(\omega-\alpha)+X\sin\alpha]:0$, czyli:

$$(15)\quad \begin{cases} X':Y'=[X\sin\beta+Y\sin(\beta-\omega)]:-[X\sin\alpha+Y\sin(\alpha-\omega)] \\ \text{oraz}\ \ Z'=0. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy więc, że w razie, gdy punkt P jest punktem niewłaściwym, dawne oraz nowe spółrzędne jednorodne Hesse'go tego punktu spełniają równości (14) i (15). Te same jednak równości wynikają z proporcji (8) i (9), gdy położymy w tych proporcjach, że $Z=Z'=0$.

Możemy więc powiedzieć, że wzory (8) i (9) stosują się zawsze, t. zn. zarówno do punktów właściwych, jak też i niewłaściwych.

Przypadki szczególne.

1. Pierwotny układ spółrzędnych jest prostokątny, t. zn. $\omega=\frac{\pi}{2}$. Wzory (4), (5), (8), (9) sprowadzają się w tym przypadku do:

(16) $x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta;$

(17) $x' = \frac{x \sin\beta - y \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad y' = -\frac{x \sin\alpha - y \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)};$

(18) $X : Y : Z = (X' \cos\alpha + Y' \cos\beta) : (X' \sin\alpha + Y' \sin\beta) : Z';$

(19) $X' : Y' : Z' = (X \sin\beta - Y \cos\beta) : -(X \sin\alpha - Y \cos\alpha) :$
$: [Z \sin(\beta - \alpha)].$

2. Obydwa układy spółrzędnych są prostokątne, przyczem zwroty dodatnie pęku promieni o wierzchołku O w obydwu układach są jednakowe (ten przypadek zmiany osi spółrzędnych nazywamy też obrotem osi układu prostokątnego o kąt α). W tym przypadku oprócz równości $\omega = \frac{\pi}{2}$ mamy równość $\beta + 2k\pi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, gdzie k oznacza pewną liczbę rzeczywistą całkowitą. Uwzględniwszy tę ostatnią równość we wzorach (16), (17), (18), (19), otrzymamy:

(20) $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$

(21) $x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha;$

(22) $X : Y : Z = (X' \cos\alpha - Y' \sin\alpha) : (X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha) : Z';$

(23) $X' : Y' : Z' = (X \cos\alpha + Y \sin\alpha) : (-X \sin\alpha + Y \cos\alpha) : Z.$

§ 61. Zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi prostej w razie zmiany zwrotów osi spółrzędnych. — Dany układ spółrzędnych Descartes'a oraz związany z nim układ spółrzędnych Plücker'a o początku O i osiach x, y, względnie u, v. Od tych układów przechodzimy do układów spółrzędnych o początku O i osiach x', y', względnie u', v'. Przez α i β oznaczmy kąty, jakie w § poprzednim oznaczyliśmy temi literami.

Weźmy jakąkolwiek prostą d. Spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej d w układach, podporządkowanych wymienionym układom Descartes'a i Plücker'a, oznaczmy odpowiednio przez U, V, W oraz U', V', W'. W tych układach prostą d możemy przedstawić odpowiednio przez równania:

$$UX + VY + WZ = 0, \tag{1}$$

$$U'X' + V'Y' + W'Z' = 0. \tag{2}$$

Lecz jeżeli w równanie (1), przedstawiające prostą d w pierwszym układzie, zamiast X, Y, Z wstawimy odpowiednio [str. 279, wz. (8)]: $X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta)$, $X' \sin\alpha + Y' \sin\beta$, $Z' \sin\omega$, to otrzymamy równanie prostej d w drugim układzie, t. zn. równanie

$$[U \sin(\omega - \alpha) + V \sin\alpha]\, X' + [U \sin(\omega - \beta) + V \sin\beta]\, Y' + W \sin\omega \,.\, Z' = 0 \tag{3}$$

przedstawia prostą d w drugim układzie. Analogicznie, jeżeli w równanie (2), przedstawiające prostą d w drugim układzie, zamiast X', Y', Z' wstawimy odpowiednio [str. 279, wz. (9)]: $X \sin\beta + Y \sin(\beta - \omega)$, $-[X \sin\alpha + Y \sin(\alpha - \omega)]$, $Z \sin(\beta - \alpha)$, to otrzymamy równanie prostej d w pierwszym układzie, t. zn. równanie

$$(U' \sin\beta - V' \sin\alpha)\, X + [U' \sin(\beta - \omega) - V' \sin(\alpha - \omega)]\, Y + W' \sin(\beta - \alpha) \,.\, Z = 0 \tag{4}$$

przedstawia prostą d w pierwszym układzie.

Równania zatem (1) i (4) przedstawiają w pierwszym układzie jedną i tę samą prostą, równania zaś (2) i (3) przedstawiają w drugim układzie jedną i tę samą prostą, skąd wynika:

$$U : V : W = (U' \sin\beta - V' \sin\alpha) : [U' \sin(\beta - \omega) - V' \sin(\alpha - \omega)] : [W' \sin(\beta - \alpha)], \tag{5}$$

$$U' : V' : W' = [U \sin(\omega - \alpha) + V \sin\alpha] : [U \sin(\omega - \beta) + V \sin\beta] : (W \sin\omega). \tag{6}$$

Wzory (5) i (6) wyrażają zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go jakiejkolwiek prostej d.

Jeżeli prosta d nie przechodzi przez punkt O, to również w każdym z rozpatrywanych układów spółrzędnych Plücker'a możemy ją przedstawić przez spółrzędne. Aby w tym przypadku otrzymać zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi spółrzędnemi Plücker'a u, v prostej d oraz jej nowemi spółrzędnemi Plücker'a, wystarczy we wzory (5) i (6) zamiast U, V, W, względnie U', V', W', wstawić $u, v, 1$, względnie $u', v', 1$. Otrzymamy wtedy:

$$(7) \quad u : v : 1 = (u' \sin\beta - v' \sin\alpha) : [u' \sin(\beta - \omega) - \\ - v' \sin(\alpha - \omega)] : \sin(\beta - \alpha),$$

$$(8) \quad u' : v' : 1 = [u \sin(\omega - \alpha) + v \sin\alpha] : [u \sin(\omega - \beta) + v \sin\beta] : \sin\omega,$$

skąd wynika:

$$(9) \quad u = \frac{u' \sin\beta - v' \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad v = \frac{u' \sin(\beta - \omega) - v' \sin(\alpha - \omega)}{\sin(\beta - \alpha)};$$

$$(10) \quad u' = \frac{u \sin(\omega - \alpha) + v \sin\alpha}{\sin\omega}, \quad v' = \frac{u \sin(\omega - \beta) + v \sin\beta}{\sin\omega}.$$

Przypadki szczególne.

1. Pierwotny układ spółrzędnych jest prostokątny, t. zn. $\omega = \frac{\pi}{2}$. Wzory (5), (6), (9), (10) sprowadzają się w tym przypadku do:

$$(11) \quad U : V : W = (U' \sin\beta - V' \sin\alpha) : \\ : -(U' \cos\beta - V' \cos\alpha) : [W' \sin(\beta - \alpha)],$$

$$(12) \quad U' : V' : W' = (U \cos\alpha + V \sin\alpha) : (U \cos\beta + V \sin\beta) : W;$$

$$(13) \quad u = \frac{u' \sin\beta - v' \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad v = -\frac{u' \cos\beta - v' \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)};$$

$$(14) \quad u' = u \cos\alpha + v \sin\alpha, \quad v' = u \cos\beta + v \sin\beta.$$

2. Obydwa układy spółrzędnych są prostokątne, przyczem zwroty dodatnie pęku promieni o wierzchołku O w obydwu układach są jednakowe. W tym przypadku oprócz równości $\omega = \frac{\pi}{2}$ mamy równość $\beta + 2k\pi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, gdzie k oznacza pewną liczbę rzeczywistą całkowitą. Uwzględniwszy tę ostatnią równość we wzorach (11), (12), (13), (14), otrzymamy:

$$(15) \quad U : V : W = (U' \cos\alpha - V' \sin\alpha) : (U' \sin\alpha + V' \cos\alpha) : W';$$

$$(16) \quad U' : V' : W' = (U \cos\alpha + V \sin\alpha) : -(U \sin\alpha - V \cos\alpha) : W;$$

$$(17) \quad u = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha, \quad v = u' \sin\alpha + v' \cos\alpha;$$

$$(18) \quad u' = u \cos\alpha + v \sin\alpha, \quad v' = -u \sin\alpha + v \cos\alpha.$$

§ 62. Zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi punktu, względnie pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi prostej, w razie jakiejkolwiek zmiany osi spółrzędnych. — Dany układ spółrzędnych Descartes'a, oraz związany z nim układ spółrzędnych Plücker'a, o początku O i osiach x, y, względnie u, v. Od tych układów przechodzimy do układów spółrzędnych o początku O' i osiach x', y', względnie u', v'.

Spółrzędne Descartes'a początku O' nowego układu spółrzędnych w dawnym układzie oznaczmy przez x_0, y_0.

Jeżeli oś x-ów i oś x'-ów (względnie oś u-ów i oś u'-ów) nie są wzajemnie równoległe, to przez α oznaczamy jeden z kątów, których wierzchołkiem jest punkt przecięcia się tych dwu osi, których pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów (względnie osi u-ów), drugiem zaś ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x'-ów (względnie osi u'-ów), i których zwrot jest jednakowy ze zwrotem dodatnim pęku promieni o wierzchołku O w pierwszym układzie spółrzędnych. Jeżeli natomiast oś x-ów i oś x'-ów (względnie oś u-ów i oś u'-ów) są wzajemnie równoległe, to w razie, gdy zwroty dodatnie tych osi są jednakowe, przez α oznaczamy kąt $2k\pi$, w razie zaś, gdy zwroty dodatnie wymienionych osi są zwrotami przeciwnymi, przez α oznaczamy kąt $(2k+1)\pi$, gdzie k oznacza jąkąkolwiek liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną.

Jeżeli oś x-ów i oś y'-ów (względnie oś u-ów i oś v'-ów) nie są wzajemnie równoległe, to przez β oznaczamy jeden z kątów, których wierzchołkiem jest punkt przecięcia się tych dwu osi, których pierwszem ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi x-ów (względnie osi u-ów), drugiem zaś ramieniem jest promień, posiadający zwrot dodatni osi y'-ów (względnie osi v'-ów), i których zwrot jest jednakowy ze zwrotem dodatnim pęku promieni o wierzchołku O w pierwszym układzie spółrzędnych. Jeżeli natomiast oś x-ów i oś y'-ów (względnie oś u-ów i oś v'-ów) są wzajemnie równoległe, to w razie, gdy zwroty dodatnie tych osi są jednakowe, przez β oznaczamy kąt $2k\pi$, w razie zaś, gdy zwroty dodatnie wymienionych osi są zwrotami przeciwnymi, przez β

oznaczamy kąt $(2k+1)\pi$, gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą całkowitą nieujemną.

Oznaczmy przez x'', y'', względnie u'', v'', osi, przecinające się w punkcie O' i posiadające zwroty dodatnie (a zatem i ujemne) odpowiednio jednakowe ze zwrotami osi x, y, względnie u, v.

W razie przejścia od osi x, y, względnie u, v, do osi x'', y'', względnie u'', v'', mamy zależności [§ 58, wz. (5) i (6), oraz § 59, wz. (5) i (6)]:

$$X : Y : Z = (X'' + x_0 Z'') : (Y'' + y_0 Z'') : Z'', \tag{1}$$

$$X'' : Y'' : Z'' = (X - x_0 Z) : (Y - y_0 Z) : Z; \tag{2}$$

$$U : V : W = U'' : V'' : -(U'' x_0 + V'' y_0 - W''), \tag{3}$$

$$U'' : V'' : W'' = U : V : (U x_0 + V y_0 + W). \tag{4}$$

W razie przejścia od osi x'', y'', względnie u'', v'', do osi x', y', względnie u', v', mamy zależności [§ 60, wz. (8) i (9), oraz § 61, wz. (5) i (6)]:

$$\begin{aligned} X'' : Y'' : Z'' = [X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - {} \\ - \beta)] : (X' \sin\alpha + Y' \sin\beta) : (Z' \sin\omega), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} X' : Y' : Z' = [X'' \sin\beta + Y'' \sin(\beta - \omega)] : \\ : -[X'' \sin\alpha + Y'' \sin(\alpha - \omega)] : [Z'' \sin(\beta - \alpha)]; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} U'' : V'' : W'' = (U' \sin\beta - V' \sin\alpha) : [U' \sin(\beta - \omega) - {} \\ - V' \sin(\alpha - \omega)] : [W' \sin(\beta - \alpha)], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} U' : V' : W' = [U'' \sin(\omega - \alpha) + V'' \sin\alpha] : \\ : [U'' \sin(\omega - \beta) + V'' \sin\beta] : (W'' \sin\omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Z proporcji (1) i (5) wynika:

$$\begin{aligned} X : Y : Z = [X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta) + {} \\ + Z' x_0 \sin\omega] : (X' \sin\alpha + Y' \sin\beta + Z' y_0 \sin\omega) : (Z' \sin\omega). \end{aligned} \tag{9}$$

Z proporcji (6) i (2) wynika:

$$\begin{aligned} X' : Y' : Z' = \{X \sin\beta + Y \sin(\beta - \omega) - Z[x_0 \sin\beta + {} \\ + y_0 \sin(\beta - \omega)]\} : -\{X \sin\alpha + Y \sin(\alpha - \omega) - Z[x_0 \sin\alpha + {} \\ + y_0 \sin(\alpha - \omega)]\} : [Z \sin(\beta - \alpha)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Z proporcji (3) i (7) wynika:

$$(11)\quad U : V : W = (U' \sin\beta - V' \sin\alpha) : [U' \sin(\beta-\omega) - V' \sin(\alpha-\omega)] : -\{U'[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta-\omega)] - V'[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha-\omega)] - W' \sin(\beta-\alpha)\}.$$

Z proporcji (8) i (4) wynika:

$$(12)\quad U' : V' : W' = [U \sin(\omega-\alpha) + V \sin\alpha] : [U \sin(\omega-\beta) + V \sin\beta] : [(U x_0 + V y_0 + W) \sin\omega].$$

Wzory (9) i (10) wyrażają zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go jakiegokolwiek punktu, wzory zaś (11) i (12) wyrażają zależności, zachodzące pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go jakiejkolwiek prostej.

Z wzorów (9) i (10) wynikają wzory następujące, wyrażające zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi Descartes'a jakiegokolwiek punktu właściwego:

$$(13)\quad \left|\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\omega-\alpha) + y' \sin(\omega-\beta) + x_0 \sin\omega}{\sin\omega}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta + y_0 \sin\omega}{\sin\omega}; \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left|\begin{aligned} x' &= \frac{x \sin\beta + y \sin(\beta-\omega) - x_0 \sin\beta - y_0 \sin(\beta-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y' &= -\frac{x \sin\alpha + y \sin(\alpha-\omega) - x_0 \sin\alpha - y_0 \sin(\alpha-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

Z wzorów (11) i (12) wynikają wzory następujące, wyrażające zależności pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi Plücker'a jakiejkolwiek prostej, nie przechodzącej przez żaden z punktów O i O':

$$(15)\quad \left|\begin{aligned} u &= -(u' \sin\beta - v' \sin\alpha) : \{u'[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta-\omega)] - v'[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha-\omega)] - \sin(\beta-\alpha)\}, \\ v &= -[u' \sin(\beta-\omega) - v' \sin(\alpha-\omega)] : \{u'[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta-\omega)] - v'[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha-\omega)] - \sin(\beta-\alpha)\}; \end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad u' = \frac{u \sin(\omega - \alpha) + v \sin \alpha}{(u x_0 + v y_0 + 1) \sin \omega}, \qquad v' = \frac{u \sin(\omega - \beta) + v \sin \beta}{(u x_0 + v y_0 + 1) \sin \omega}.$$

Z wzorów (9) i (10) wynika:

$$(17)\quad \begin{cases} X = \varrho\,[X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta) + Z' x_0 \sin \omega], \\ Y = \varrho\,(X' \sin \alpha + Y' \sin \beta + Z' y_0 \sin \omega), \\ Z = \varrho \,.\, Z' \sin \omega; \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} X' = \varrho' \{ X \sin \beta + Y \sin(\beta - \omega) - Z\,[x_0 \sin \beta + y_0 \sin(\beta - \omega)]\}, \\ Y' = -\varrho' \{ X \sin \alpha + Y \sin(\alpha - \omega) - Z\,[x_0 \sin \alpha + y_0 \sin(\alpha - \omega)]\}, \\ Z' = \varrho' \,.\, Z \sin(\beta - \alpha). \end{cases}$$

Wstawiwszy w stronę prawą pierwszej z pośród równości (17) zamiast X', Y', Z' strony prawe równości (18), otrzymamy: $X = \varrho\varrho' \{ X \sin\beta \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\beta - \omega) \sin(\omega - \alpha) - Z\,[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta - \omega)] \sin(\omega - \alpha) - X \sin\alpha \sin(\omega - \beta) - Y \sin(\alpha - \omega) \sin(\omega - \beta) + Z\,[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha - \omega)] \sin(\omega - \beta) + Z x_0 \sin(\beta - \alpha) \sin\omega \} = \varrho\varrho' X\,[\sin\beta \sin(\omega - \alpha) - \sin\alpha \sin(\omega - \beta)] = \varrho\varrho' X (\sin\beta \sin\omega \cos\alpha - \sin\beta \cos\omega \sin\alpha - \sin\alpha \sin\omega \cos\beta + \sin\alpha \cos\omega \sin\beta) = \varrho\varrho' X \sin\omega (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = \varrho\varrho' X \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$, a więc $X = \varrho\varrho' X \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$. Analogicznie, wstawiwszy w stronę prawą drugiej z pośród równości (17) strony prawe równości (18), otrzymamy: $Y = \varrho\varrho' Y \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$, oraz wstawiwszy w stronę prawą trzeciej z pośród równości (17) strony prawe równości (18), otrzymamy: $Z = \varrho\varrho' Z \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$. Ponieważ przynajmniej jedna z liczb X, Y, Z jest różna od 0, przeto z równości $X = \varrho\varrho' X \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$, $Y = \varrho\varrho' Y \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$, $Z = \varrho\varrho' Z \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$ wynika:

$$(19)\qquad \varrho\varrho' \sin\omega \sin(\beta - \alpha) = 1.$$

Równość (19) wyraża zależność pomiędzy czynnikami ϱ i ϱ', występującymi w równościach (17) i (18).

W sposób podobny możemy się przekonać, że jeżeli wzory (11) i (12) zastąpimy wzorami:

$$(20)\quad \begin{cases} U = \varrho\,(U' \sin\beta - V' \sin\alpha), \\ V = \varrho\,[U' \sin(\beta - \omega) - V' \sin(\alpha - \omega)], \\ W = -\varrho \{ U'\,[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta - \omega)] - \\ \quad - V'\,[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha - \omega)] - W' \sin(\beta - \alpha) \}, \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} U' = \varrho' [U \sin(\omega - \alpha) + V \sin \alpha], \\ V' = \varrho' [U \sin(\omega - \beta) + V \sin \beta], \\ W' = \varrho' (U x_0 + V y_0 + W) \sin \omega, \end{cases}$$

to pomiędzy czynnikami ϱ i ϱ', występującymi w tych wzorach, również będzie zachodziła zależność (19).

P r z y p a d k i s z c z e g ó l n e.

1. Pierwszy układ spółrzędnych jest prostokątny, t. zn. $\omega = \frac{\pi}{2}$. Wzory (9), (10), (11), (12) sprowadzają się w tym przypadku do:

$$(22) \quad X : Y : Z = (X' \cos \alpha + Y' \cos \beta + Z' x_0) : (X' \sin \alpha + Y' \sin \beta + Z' y_0) : Z';$$

$$(23) \quad X' : Y' : Z' = [X \sin \beta - Y \cos \beta - Z(x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta)] : -[X \sin \alpha - Y \cos \alpha - Z(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha)] : [Z \sin(\beta - \alpha)];$$

$$(24) \quad U : V : W = (U' \sin \beta - V' \sin \alpha) : -(U' \cos \beta - V' \cos \alpha) : -[U'(x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta) - V'(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) - W' \sin(\beta - \alpha)];$$

$$(25) \quad U' : V' : W' = (U \cos \alpha + V \sin \alpha) : (U \cos \beta + V \sin \beta) : (U x_0 + V y_0 + W).$$

2. Obydwa układy spółrzędnych są prostokątne, przyczem zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki tych układów, są jednakowe. W tym przypadku oprócz równości $\omega = \frac{\pi}{2}$ mamy równość $\beta + 2k\pi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, gdzie k oznacza pewną liczbę rzeczywistą całkowitą. Uwzględniwszy tę ostatnią równość we wzorach (22), (23), (24), (25), otrzymamy:

$$(26) \quad X : Y : Z = (X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha + Z' x_0) : (X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha + Z' y_0) : Z';$$

$$(27) \quad X' : Y' : Z' = [X \cos \alpha + Y \sin \alpha - Z(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)] : -[X \sin \alpha - Y \cos \alpha - Z(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha)] : Z;$$

$$(28) \quad U : V : W = (U' \cos \alpha - V' \sin \alpha) : (U' \sin \alpha + V' \cos \alpha) : -[U'(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) - V'(x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) - W'];$$

$$(29) \quad U' : V' : W' = (U \cos \alpha + V \sin \alpha) : -(U \sin \alpha - V \cos \alpha) : (U x_0 + V y_0 + W).$$

3. Obydwa układy spółrzędnych są prostokątne, przyczem zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki tych układów, są przeciwne. W tym przypadku oprócz równości $\omega = \frac{\pi}{2}$ mamy równość $\alpha + 2k\pi = \beta + \frac{\pi}{2}$, gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą. Uwzględniwszy tę ostatnią równość we wzorach (22), (23), (24), (25), otrzymamy:

$$(30)\quad X : Y : Z = (X' \cos\alpha + Y' \sin\alpha + Z' x_0) : (X' \sin\alpha - Y' \cos\alpha + Z' y_0) : Z';$$

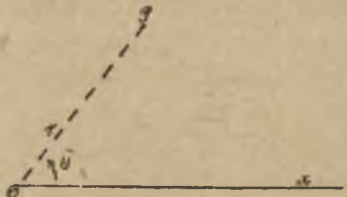
$$(31)\quad X' : Y' : Z' = [X \cos\alpha + Y \sin\alpha - Z(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha)] : [X \sin\alpha - Y \cos\alpha - Z(x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha)] : Z;$$

$$(32)\quad U : V : W = (U' \cos\alpha + V' \sin\alpha) : (U' \sin\alpha - V' \cos\alpha) : -[U'(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha) + V'(x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha) - W'];$$

$$(33)\quad U' : V' : W' = (U \cos\alpha + V \sin\alpha) : (U \sin\alpha - V \cos\alpha) : (U x_0 + V y_0 + W).$$

Uwaga. W razie przejścia od jakichś osi spółrzędnych do innych osi, każda równość, wyrażająca jakąś zależność, zachodzącą pomiędzy dawnemi spółrzędnemi pewnych punktów, względnie pewnych prostych, przekształca się na równość, wyrażającą zależność odpowiednią, zachodzącą pomiędzy nowemi spółrzędnemi tych punktów, względnie tych prostych. Z podanych wyżej wzorów wynika, że równość, odnosząca się do nowego układu spółrzędnych, jest względem spółrzędnych punktu, względnie prostej, tego samego stopnia, jakiego była równość pierwotna, odnosząca się do dawnego układu spółrzędnych.

§ 63. Spółrzędne biegunowe punktu. — Do wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie używamy niekiedy także s p ó ł r z ę d n y c h b i e g u n o w y c h. W tym przypadku obieramy na tej płaszczyźnie (rys. 52) punkt stały O, zwany b i e g u n e m, oraz promień stały Ox, wychodzący z punktu O, zwany o s i ą b i e-



Rys. 52.

gunową. Następnie pewien zwrot pęku promieni o wierzchołku O przyjmujemy za dodatni. Każdemu punktowi P, leżącemu w rozpatrywanej płaszczyźnie, podporządkowujemy 2 liczby, a mianowicie: liczbę nieujemną r, wyrażającą odległość punktu P od punktu O (przy pewnej z góry przyjętej jednostce długości σ), oraz liczbę Θ, której wartość bezwzględna wyraża wielkość jednego z kątów o wierzchołku O, posiadających oś biegunową jako ramię pierwsze oraz promień OP jako ramię drugie, i która jest dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy wymieniony kąt posiada zwrot dodatni, czy też ujemny. Liczby r i Θ nazywamy spółrzędnemi biegunowemi punktu P, przyczem liczbę r nazywamy promieniem wodzącym, liczbę zaś Θ amplitudą punktu P.

Z powyższego wynika więc, że punkt określa jednoznacznie tylko swój promień wodzący, natomiast swoją amplitudę określa on wieloznacznie. Jeżeli bowiem za amplitudę jakiegoś punktu możemy uważać Θ_1, to również za amplitudę tego punktu możemy uważać $\Theta_1 + 2k\pi$, gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą całkowitą, dodatnią lub ujemną. Odwrotnie jednak, spółrzędne biegunowe punktu określają ten punkt jednoznacznie, t. zn. do danego promienia wodzącego i danej amplitudy należy tylko jeden punkt.

Zamiast mówić „punkt o spółrzędnych biegunowych r, Θ", można powiedzieć wprost „punkt (r, Θ)".

Ustalmy teraz następujący układ prostokątny spółrzędnych Descartes'a; za początek tego układu przyjmijmy biegun O rozpatrywanego układu biegunowego; za oś x-ów przyjmijmy prostą, zawierającą oś biegunową; za zwrot dodatni osi x-ów przyjmijmy zwrot osi biegunowej; zwrot dodatni osi y-ów obierzmy w ten sposób, aby zwrot dodatni pęku promieni o wierzchołku O w przyjętym układzie Descartes'a był jednakowy ze zwrotem dodatnim tego pęku w rozpatrywanym układzie biegunowym; za jednostkę długości w układzie Descartes'a przyjmijmy ten odcinek σ, który jest jednostką długości w układzie biegunowym.

Jeżeli teraz spółrzędne jakiegoś punktu właściwego P w przyjętym układzie Descartes'a oznaczymy przez x, y, spółrzędne zaś tego punktu w rozpatrywanym układzie biegunowym oznaczymy przez r, Θ, to będziemy mieli zależności następujące:

(1) $$x = r\cos\Theta,\quad y = r\sin\Theta,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wyszedłszy z tych zależności, moglibyśmy, stosując wzory, podane w §§ poprzednich, znaleść zależności, zachodzące pomiędzy spółrzędnemi jakiegoś punktu właściwego w rozpatrywanym układzie biegunowym oraz spółrzędnemi tego punktu w jakimkolwiek układzie Descartes'a.

Rozwiążemy teraz zadanie następujące: dane 2 różne punkty właściwe (r_1, Θ_1) oraz (r_2, Θ_2); napisać równanie prostej, łączącej te punkty.

W układzie prostokątnym spółrzędnych Descartes'a, o którym mówiliśmy wyżej, spółrzędnemi punktów danych są liczby: $r_1\cos\Theta_1$, $r_1\sin\Theta_1$, oraz $r_2\cos\Theta_2$, $r_2\sin\Theta_2$. Prostą, łączącą te 2 punkty, możemy więc w tym układzie przedstawić przez równanie (§ 22, str. 98):

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ r_1\cos\Theta_1, & r_1\sin\Theta_1, & 1 \\ r_2\cos\Theta_2, & r_2\sin\Theta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Za równanie więc tej prostej w rozpatrywanym układzie biegunowym możemy uważać równanie:

(2) $$\begin{vmatrix} r\cos\Theta, & r\sin\Theta, & 1 \\ r_1\cos\Theta_1, & r_1\sin\Theta_1, & 1 \\ r_2\cos\Theta_2, & r_2\sin\Theta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli (po rozwinięciu)

(3) $$rr_1\sin(\Theta_1 - \Theta) + rr_2\sin(\Theta - \Theta_2) + r_1r_2\sin(\Theta_2 - \Theta_1) = 0.$$

Uwaga. Chociaż w zasadzie promień wodzący punktu należy uważać za liczbę nieujemną, to jednak zdarzają się przypadki, w których okazuje się korzystnem odstępstwo od tej zasady. W tych przypadkach przez punkt o spółrzędnych biegunowych r, Θ, gdzie r jest liczbą ujemną, rozumiemy punkt o spółrzędnych biegunowych $-r$, $\Theta + \pi$.

Rozdział VII.

§ 64. Modyfikacja definicji spółrzędnych jednorodnych Hesse'go. Punkty i proste urojone. — Jeżeli w Geometrji analitycznej posługujemy się układem spółrzędnych

Descartes'a, względnie Hesse'go, to rozwiązanie zagadnienia geometrycznego, w którem chodzi o znalezienie jakiegoś punktu, polega na wyznaczeniu spółrzędnych tego punktu,

Plücker'a, względnie Hesse'go, to rozwiązanie zagadnienia geometrycznego, w którem chodzi o znalezienie jakiejś prostej, polega na wyznaczeniu spółrzędnych tej prostej,

t. zn. na wyznaczeniu pary, względnie trójki, liczb rzeczywistych (przyczem w razie układu spółrzędnych Hesse'go, trójki liczb rzeczywistych, różnej od trójki 0, 0, 0). Tę parę, względnie trójkę, liczb rzeczywistych otrzymujemy z rachunku. Otóż może się zdarzyć, że rachunek, stosowany przy rozwiązywaniu takiego zagadnienia, nie może nas doprowadzić do pary, względnie trójki, liczb rzeczywistych, że może on nas natomiast doprowadzić do pary, względnie trójki liczb, z których przynajmniej jedna liczba rzeczywistą nie jest. Będzie to wtedy dla nas dowodem, że rozpatrywane zagadnienie geometryczne rozwiązania nie posiada.

Gdybyśmy jednak na stwierdzeniu nierozwiązalności tego rodzaju zagadnień geometrycznych poprzestali, to w takim razie zatrzymalibyśmy się w połowie drogi. Głównym bowiem celem zastosowania rachunku algebraicznego do Geometrji jest osiągnięcie w Geometrji tej doskonałości, do jakiej doszła Algebra. Algebra zaś swój wysoki stopień doskonałości zawdzięcza między innemi liczbom urojonym: gdybyśmy mianowicie liczb urojonych do Algebry nie wprowadzili, to zamiast pewnych zupełnie ogólnych i w zasadzie prostych twierdzeń, mielibyśmy cały szereg twierdzeń drobnych i skomplikowanych, które czyniłyby Algebrę nauką bardzo nieprzejrzystą i które znacznie utrudniałyby rachunek algebraiczny. Dobro więc Geometrji analitycznej, jako nauki matematycznej, wymaga, abyśmy odpowiedniość, zachodzącą pomiędzy utworami geometrycznymi i utworami algebraicznymi, zachowali również w tych przypadkach, gdy ta odpowiedniość, skutkiem wystąpienia w wymienionych utworach algebraicznych liczb urojonych, na mocy definicji dotychczasowych znika. Ten cel możemy osiągnąć przez wprowadzenie do Geometrji analitycznej nowych punktów i prostych, które nazywamy punktami i prostemi urojonymi. Punkty i proste, rozpatrywane przez nas dotychczas, w odróżnieniu od punktów i prostych urojonych, będziemy nazywali punktami i prostemi rzeczywistymi.

Zanim podamy definicję punktów, względnie prostych urojonych, zmodyfikujemy najpierw definicje spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktów i prostych rzeczywistych.

W definicjach spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktów i prostych rzeczywistych opuśćmy mianowicie zastrzeżenie, że te spółrzędne są liczbami rzeczywistemi. T. zn. (§ 9) przez spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu właściwego (rzeczywistego), którego spółrzędnemi Descartes'a są liczby x i y, będziemy rozumieli jakiekolwiek (niekoniecznie rzeczywiste) 3 liczby skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest różna od 0 i które spełniają warunek

(1) $$X:Y:Z=x:y:1,$$

oraz przez spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu niewłaściwego (rzeczywistego), należącego do prostej właściwej (rzeczywistej) $Ax+By+C=0$, będziemy rozumieli jakiekolwiek (niekoniecznie rzeczywiste) 3 liczby skończone X, Y, Z, z których liczba Z jest równa 0, lecz przynajmniej jedna z liczb X i Y jest różna od 0, i które spełniają warunek

(2) $$X:Y:Z=B:-A:0.$$

I tak samo (§ 12) przez spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej (rzeczywistej) $AX+BY+CZ=0$ będziemy rozumieli jakiekolwiek (niekoniecznie rzeczywiste) 3 liczby skończone U, V, W, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które spełniają warunek

(3) $$U : V : W = A : B : C.$$

Zatem za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu właściwego (rzeczywistego) o spółrzędnych Descartes'a X, Y, Z możemy uważać każdą trójkę liczb $\lambda x, \lambda y, \lambda$, za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu niewłaściwego (rzeczywistego) należącego do prostej właściwej (rzeczywistej) $Ax + By + C = 0$, możemy uważać każdą trójkę liczb $\lambda B, -\lambda A, 0$, i w końcu, za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej (rzeczywistej) $AX + BY + CZ = 0$ możemy uważać każdą trójkę liczb $\lambda A, \lambda B, \lambda C$, gdzie we wszystkich 3-ech przypadkach λ oznacza jakąkolwiek liczbę skończoną, różną od 0 (niekoniecznie rzeczywistą); przyczem w każdym z tych 3-ech przypadków poza wymienionemi trójkami liczb niema innych trójek liczb, które mogłyby być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go rozpatrywanego punktu właściwego, względnie rozpatrywanego punktu niewłaściwego, względnie rozpatrywanej prostej.

Każdy więc punkt rzeczywisty, jak również każdą prostą rzeczywistą, możemy przedstawić zarówno przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, będące liczbami rzeczywistemi, jak też przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, będące liczbami urojonemi. Jeżeli zatem jakiś punkt rzeczywisty jest przedstawiony, względnie jakaś prosta rzeczywista jest przedstawiona, przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, będące liczbami urojonemi, to zawsze istnieją 3 liczby rzeczywiste skończone, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, do których wymienione spółrzędne są proporcjonalne.

W § 9, względnie 12, mieliśmy, że każde 3 liczby rzeczywiste skończone, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu (rzeczywistego), względnie pewnej w zupełności określonej prostej (rzeczywistej). Teraz zaś możemy powiedzieć, że każde 3 liczby skończone (niekoniecznie rzeczywiste), z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, proporcjonalne do 3-ech liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0, mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu rzeczywistego, względnie pewnej w zupełności określonej prostej rzeczywistej (mianowicie punktu, względnie prostej, których spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go są wymienione liczby rzeczywiste).

A więc 3 liczby skończone zespolone $a_1 + i a_2, b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ (i oznacza $\sqrt{-1}$), z których przynajmniej jedna jest różna od 0, mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją 3 liczby skończone rzeczywiste p, q, r, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, spełniające warunek:

$$(a_1 + i a_2) : (b_1 + i b_2) : (c_1 + i c_2) = p : q : r. \tag{4}$$

Jeżeli zaś takie liczby p, q, r istnieją, to istnieje również liczba $m + i n$, spełniająca warunki:

$$a_1 + i a_2 = p(m + in),\ b_1 + i b_2 = q(m + in), c_1 + ic_2 = r(m + in),$$

czyli

$$a_1 = pm,\ a_2 = pn,\ b_1 = qm,\ b_2 = qn,\ c_1 = rm,\ c_2 = rn. \tag{5}$$

Z równości (5) wynika:

$$p : q : r = a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2. \tag{6}$$

Możemy więc powiedzieć, że warunkiem koniecznym na to, aby liczby $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ mogły być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej, jest spełnienie równości $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$. Łatwo jednak możemy się przekonać, że wymieniony warunek konieczny jest również warunkiem dostatecznym. Jeżeli bowiem równości $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ są spełnione, to również są spełnione równości $(a_1 + i a_2) : (b_1 + i b_2) : (c_1 + i c_2) = a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$, a ponieważ nie jest możliwem, aby zarówno każda z liczb a_1, b_1, c_1, jak też każda z liczb a_2, b_2, c_2, była równa 0 (albowiem wtedy każda z liczb $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ też byłaby równa 0, co przeczyłoby założeniu), przeto istnieją w tym przypadku 3 liczby skończone rzeczywiste, z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i które są proporcjonalne do liczb $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$, to zaś dowodzi, że liczby $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej.

Otrzymaliśmy więc, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby 3 liczby skończone $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, mogły być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej, jest spełnienie równości $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$; przyczem jeżeli liczby $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej, to za spółrzędne jednorodne Hesse'go tego punktu, względnie tej prostej, może być uważana również każda z trójek liczb a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2, różna od trójki 0, 0, 0.

Jeżeli trójka liczb X, Y, Z, względnie U, V, W, nie będąca trójką liczb rzeczywistych, jest trójką spółrzędnych jednorodnych Hesse'go punktu rzeczywistego, względnie prostej rzeczywistej, to w takim razie istnieją 3 liczby skończone rzeczywiste X', Y', Z', względnie U', V', W', z których przynajmniej jedna liczba jest różna od 0 i do których liczby X, Y, Z, względnie U, V, W, są proporcjonalne, które zatem mogą być uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go tego samego punktu, względnie tej samej prostej. Zatem punkt (X, Y, Z), względnie prostą (U, V, W), możemy przedstawić (§ 15) przez równanie $X' U + Y' V + Z' W = 0$, względnie przez równanie $U' X + V' Y + W' Z = 0$. Lecz każda trójka liczb U, V, W, spełniająca równanie $X' U + Y' V + Z' W = 0$, spełnia także równanie $X U + Y V + Z W = 0$, i odwrotnie, względnie każda trójka liczb X, Y, Z, spełniająca równanie $U' X + V' Y + W' Z = 0$, spełnia także równanie $U X + V Y + W Z = 0$, i odwrotnie, a zatem za równanie punktu (X, Y, Z) możemy uważać równanie $X U + Y V + Z W = 0$, względnie za równanie prostej (U, V, W) możemy uważać równanie $UX + VY + WZ = 0$. Jak więc widzimy, to, co powiedzieliśmy w § 15, stosuje się również wtedy, gdy punkt rzeczywisty, względnie prostą rzeczywistą, przedstawiamy przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, nie będące liczbami rzeczywistemi.

Jeżeli jest dany układ płaski spółrzędnych jednorodnych Hesse'go, to trzy liczby skończone X, Y, Z, względnie U, V, W, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, nie będące proporcjonalnemi do trzech liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, nazywamy spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu urojonego, względnie pewnej w zupełności określonej prostej urojonej, leżących w tej płaszczyźnie właściwej, do jakiej dany układ spółrzędnych jednorodnych Hesse'go się odnosi. Przyczem punkty urojone (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2), względnie proste urojone (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2), uważamy za nakrywające się wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione równości $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2$, względnie równości $U_1 : V_1 : W_1 = U_2 : V_2 : W_2$.

Teraz więc już każde 3 liczby skończone, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, możemy uważać za spółrzędne jednorodne Hesse'go pewnego w zupełności określonego punktu, względnie pewnej w zupełności określonej prostej.

Punkt (X, Y, Z) uważamy za należący do prostej urojonej (U, V, W), jeżeli jest spełniony warunek $UX + VY + WZ = 0$.

Równanie zatem $UX + VY + WZ = 0$, w którem U, V, W są spółrzędnemi jakiejś

Prostą (U, V, W) uważamy za przechodzącą przez punkt urojony (X, Y, Z), jeżeli jest spełniony warunek $XU + YV + ZW = 0$.

Równanie zatem $XU + YV + ZW = 0$, w którem prostej urojonej, wielkości zaś X, Y, Z są zmiennemi, przedstawia ogół punktów, należących do prostej urojonej (U, V, W). To równanie nazywamy równaniem prostej urojonej (U, V, W).

X, Y, Z są spółrzędnemi jakiegoś punktu urojonego, wielkości zaś U, V, W są zmiennemi, przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt urojony (X, Y, Z). To równanie nazywamy równaniem punktu urojonego (X, Y, Z).

Weźmy teraz pod uwagę

jakąkolwiek prostą rzeczywistą (U, V, W). Przypuśćmy, że ta prosta rzeczywista przechodzi przez jakiś punkt urojony (X', Y', Z'). Mamy wtedy równość (patrz wyżej, str. prawa) $X' U + Y' V + Z' W = 0$, t. zn. spółrzędne X', Y', Z' wymienionego punktu urojonego czynią równaniu $U X + V Y + W Z = 0$ prostej rzeczywistej (U, V, W) zadość. Odwrotnie, jeżeli spółrzędne jakiegoś punktu urojonego (X'', Y'', Z'') czynią równaniu prostej rzeczywistej (U, V, W) zadość, t. zn. jeżeli $U X'' + V Y'' + W Z'' = 0$, to wtedy (patrz wyżej, strona prawa) prosta rzeczywista (U, V, W) przechodzi przez punkt urojony (X'', Y'', Z''). Otrzymaliśmy więc, że spółrzędne każdego punktu urojonego, należącego do prostej rzeczywistej (U, V, W), czynią równaniu $U X + V Y + W Z = 0$ tej prostej zadość, i odwrotnie, jeżeli

jakikolwiek punkt rzeczywisty (X, Y, Z). Przypuśćmy, że ten punkt należy do jakiejś prostej urojonej (U', V', W'). Mamy wtedy równość (patrz wyżej, strona lewa) $U' X + V' Y + W' Z = 0$, t. zn. spółrzędne U', V', W' wymienionej prostej urojonej czynią równaniu $X U + Y V + Z W = 0$ punktu rzeczywistego (X, Y, Z) zadość. Odwrotnie, jeżeli spółrzędne jakiejś prostej urojonej (U'', V'', W'') czynią równaniu punktu rzeczywistego (X, Y, Z) zadość, t. zn. jeżeli $X U'' + Y V'' + Z W'' = 0$, to wtedy (patrz wyżej, strona lewa) punkt rzeczywisty (X, Y, Z) należy do prostej urojonej (U'', V'', W''). Otrzymaliśmy więc, że spółrzędne każdej prostej urojonej, przechodzącej przez punkt rzeczywisty (X, Y, Z), czynią równaniu $X U + Y V + Z W = 0$ tego punktu zadość, i odwrotnie, jeżeli spółrzędne

spółrzędne jakiegoś punktu urojonego czynią wymienionemu równaniu zadość, to ten punkt urojony należy do prostej rzeczywistej (U, V, W). Równanie $UX+VY+WZ=0$ przedstawia więc ogół punktów (rzeczywistych i urojonych), należących do prostej rzeczywistej (U, V, W).

jakiejś prostej urojonej czynią wymienionemu równaniu zadość, to ta prosta urojona przechodzi przez punkt rzeczywisty (X, Y, Z). Równanie $XU+YV+ZW=0$ przedstawia więc ogół prostych (rzeczywistych i urojonych), przechodzących przez punkt rzeczywisty (X, Y, Z).

Możemy więc powiedzieć ogólnie, że jeżeli w równaniu

$$UX+VY+WZ=0 \tag{7}$$

wielkości X, Y, Z uważamy za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu (rzeczywistego lub urojonego) oraz wielkości U, V, W za spółrzędne jednorodne Hessego prostej (rzeczywistej lub urojonej), to wtedy w razie, gdy w równaniu (7) wielkości U, V, W są stałemi, wielkości zaś X, Y, Z zmiennemi, to równanie przedstawia ogół punktów prostej (U, V, W), natomiast w razie, gdy w wymienionem równaniu wielkości X, Y, Z są stałemi, wielkości zaś U, V, W są zmiennemi, wymienione równanie przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt (X, Y, Z). I dla tej to przyczyny równanie (7) nazywamy równaniem prostej, względnie punktu, w postaci dwoistej w spółrzędnych jednorodnych Hesse'go (porówn. § 15).

W równaniu prostej, względnie punktu, zamiast oznaczać spółczynniki literami U, V, W, względnie X, Y, Z, często oznaczamy je (tak, jak to czyniliśmy w przypadku prostych i punktów rzeczywistych) literami A, B, C, t. zn. równanie prostej piszemy w ten sposób: $AX+BY+CZ=0$, równanie zaś punktu w ten sposób: $AU+BV+CW=0$.

Jeżeli proste (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2) są różne, to posiadają jeden i tylko jeden punkt wspólny (albowiem zawsze istnieje jeden i tylko jeden punkt, którego spółrzędne spełniają jedno-

Jeżeli punkty (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) są różne, to istnieje wtedy jedna i tylko jedna prosta, zawierająca obydwa wymienione punkty (albowiem zawsze istnieje jedna i tylko jedna prosta, której cześnie 2 równania $U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0$ i $U_2 X + V_2 Y + W_2 Z = 0$, jeżeli, oczywiście, nie jest spełniony warunek $U_1 : V_1 : W_1 = U_2 : V_2 : W_2$).

spółrzędne spełniają jednocześnie 2 równania $X_1 U + Y_1 V + Z_1 W = 0$ i $X_2 U + Y_2 V + Z_2 W = 0$, jeżeli, oczywiście, nie jest spełniony warunek $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2$).

Punkt urojony (X, Y, Z) należy do prostej niewłaściwej wtedy i tylko wtedy, gdy jego trzecia spółrzędna Z jest równa 0 (albowiem wtedy i tylko wtedy jego spółrzędne spełniają równanie $Z = 0$ prostej niewłaściwej). A ponieważ prostą niewłaściwą uważamy za zbiór wszystkich punktów niewłaściwych, przeto punkt urojony, którego trzecia spółrzędna Z jest równa 0, nazywamy punktem urojonym niewłaściwym (albo nieskończenie dalekim), punkt zaś urojony, którego trzecia spółrzędna Z jest różna od 0, nazywamy punktem urojonym właściwym.

Każda prosta urojona (U, V, W) posiada jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy, mianowicie punkt $(V, -U, 0)$, który może być punktem rzeczywistym lub urojonym.

Dwie proste, posiadające punkt niewłaściwy wspólny, nazywamy równoległemi.

Spółrzędnemi Descartes'a punktu urojonego właściwego (X, Y, Z) nazywamy liczby $x = \frac{X}{Z}$ i $y = \frac{Y}{Z}$. Analogicznie, spółrzędnemi Plücker'a prostej urojonej (U, V, W), nie przechodzącej przez początek układu spółrzędnych (t. zn. prostej urojonej, której trzecia spółrzędna W jest różna od 0), nazywamy liczby $u = \frac{U}{W}$ i $v = \frac{V}{W}$.

Teraz więc już każde 2 liczby skończone (niekoniecznie rzeczywiste) możemy uważać za spółrzędne Descartes'a pewnego w zupełności określonego punktu, względnie za spółrzędne Plücker'a pewnej w zupełności określonej prostej.

Z rozważań powyższych łatwo możemy wywnioskować, że ogół

punktów właściwych każdej prostej właściwej możemy przedstawić przez równanie $Ax+By+C=0$,	prostych, przechodzących przez punkt, różny od początku układu spółrzędnych, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych, możemy przedstawić przez równanie $Au+Bv+C=0$,

w którem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0. Odwrotnie, równanie

$Ax+By+C=0$,	$Au+Bv+C=0$,

w którem przynajmniej jeden ze spółczynników A i B jest różny od 0, przedstawia ogół

punktów właściwych pewnej w zupełności określonej prostej właściwej.	prostych, przechodzących przez pewien punkt, różny od początku układu spółrzędnych, z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych.

Tak samo z łatwością możemy się przekonać, że jeżeli w równaniu

$$ux+vy+1=0 \tag{8}$$

wielkości u i v są stałemi, przyczem przynajmniej jedna z nich jest różna od 0, wielkości zaś x i y są zmiennemi, to wtedy to równanie przedstawia ogół punktów właściwych prostej (u, v), natomiast jeżeli w wymienionem równaniu wielkości x i y są stałemi, przyczem przynajmniej jedna z nich jest różna od 0, wielkości zaś u i v są zmiennemi, to wymienione równanie przedstawia ogół prostych, przechodzących przez punkt (x, y), z wyjątkiem prostej, łączącej ten punkt z początkiem układu spółrzędnych. Dlatego też równanie (8) nazywamy równaniem prostej, względnie punktu, w postaci dwoistej w spółrzędnych niejednorodnych (porównaj § 19).

Jak więc widzimy, wprowadzenie do Geometrji analitycznej punktów i prostych urojonych nie powoduje zmian zasadniczych twierdzeń podstawowych, podanych w Rozdziale I. Tak samo z łatwością możemy spostrzec, że jeżeli teraz, t. zn. po wprowadzeniu do Geometrji analitycznej punktów i prostych urojonych, w Rozdziale II opuścimy wszędzie przymiotnik „rzeczywisty" to ten Rozdział w całości pozostanie w mocy.

Niechaj będzie

dana prosta rzeczywista (U, V, W). Tę prostą możemy przedstawić przez równanie

(9a) $UX + VY + WZ = 0.$

Przynajmniej jedna z liczb U, V, W jest różna od 0. Przypuśćmy np., że liczba W jest różna od 0. Wstawmy w równanie (9 a) zamiast X i Y jakieś 2 liczby skończone X' i Y', z których każda jest różna od 0 i których stosunek $X' : Y'$ nie jest liczbą rzeczywistą, i znajdźmy liczbę Z', która wtedy równaniu (9a) będzie czyniła zadość (liczba Z' będzie skończona, ponieważ $W \neq 0$). Punkt (X', Y', Z') będzie punktem urojonym, należącym do prostej (U, V, W). Wstawmy teraz w równanie (9a) zamiast X i Y jakieś inne 2 liczby skończone X'' i Y'', z których każda jest różna od 0, których stosunek $X'' : Y''$ nie jest liczbą rzeczywistą i które nie spełniają warunku $X'' : Y'' = X' : Y'$, i znajdźmy

dany punkt rzeczywisty (X, Y, Z). Ten punkt możemy przedstawić przez równanie

(9b) $XU + YV + ZW = 0.$

Przynajmniej jedna z liczb X, Y, Z jest różna od 0. Przypuśćmy np., że liczba Z jest różna od 0. Wstawmy w równanie (9 b) zamiast U i V jakieś 2 liczby skończone U' i V', z których każda jest różna od 0 i których stosunek $U' : V'$ nie jest liczbą rzeczywistą, i znajdźmy liczbę W', która wtedy równaniu (9b) będzie czyniła zadość (liczba W' będzie skończona, ponieważ $Z \neq 0$). Prosta (U', V', W') będzie prostą urojoną, przechodzącą przez punkt (X, Y, Z). Wstawmy teraz w równanie (9 b) zamiast U i V jakieś inne 2 liczby skończone U'' i V'', z których każda jest różna od 0, których stosunek $U'' : V''$ nie jest liczbą rzeczywistą i które nie spełniają warunku $U'' : V'' = U' : V'$, liczbę Z'', która wtedy równaniu (9a) będzie czyniła zadość. Punkt (X'', Y'', Z'') będzie punktem urojonym, różnym od punktu (X', Y', Z') i należącym do prostej (U, V, W). I t. d.

i znajdźmy liczbę W'', która wtedy równaniu (9b) będzie czyniła zadość. Prosta (U'', V'', W'') będzie prostą urojoną, różną od prostej (U', V', W') i przechodzącą przez punkt (X, Y, Z). I t. d.

Możemy więc powiedzieć, że:

K a ż d a p r o s t a r z e c z y w i s t a o p r ó c z p u n k t ó w r z e c z y w i s t y c h z a w i e r a n i e s k o ń c z e n i e w i e l e p u n k t ó w u r o j o n y c h.

P r z e z k a ż d y p u n k t r z e c z y w i s t y o p r ó c z p r o s t y c h r z e c z y w i s t y c h p r z e c h o d z i n i e s k o ń c z e n i e w i e l e p r o s t y c h u r o j o n y c h.

Niechaj teraz będzie

dana jakakolwiek prosta urojona d. Spółrzędne tej prostej

dany jakikolwiek punkt urojony P. Spółrzędne tego punktu

oznaczmy przez $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$. Ponieważ założyliśmy, że

prosta d jest urojona,

punkt P jest urojony,

przeto warunek

(10) $$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

nie jest spełniony (a zatem nie jest np. możliwe, aby każda z liczb a_1, b_1, c_1, lub też każda z liczb a_2, b_2, c_2, była równa 0).

Prostą d możemy przedstawić przez równanie

(11b) $$(a_1 + i a_2) X + (b_1 + i b_2) Y + (c_1 + i c_2) Z = 0,$$

czyli przez równanie

(12) $$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + i (a_2 X + b_2 Y + c_2 Z) = 0.$$

Punkt P możemy przedstawić przez równanie

(11 b) $$(a_1 + i a_2) U + (b_1 + i b_2) V + (c_1 + i c_2) W = 0,$$

czyli przez równanie

(12 b) $$a_1 U + b_1 V + c_1 W + i (a_2 U + b_2 V + c_2 W) = 0.$$

Weźmy teraz pod uwagę 2 równania:

(13a) $$\begin{cases} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0. \end{cases}$$

(13b) $$\begin{cases} a_1 U + b_1 V + c_1 W = 0, \\ a_2 U + b_2 V + c_2 W = 0. \end{cases}$$

Te równania przedstawiają 2 różne

proste rzeczywiste d_1 i d_2. Proste rzeczywiste d_1 i d_2 posiadają jeden punkt rzeczywisty P wspólny. Lecz spółrzędne punktu rzeczywistego P, czyniąc zadość każdemu z równań (13a), muszą czynić zadość także równaniu (12a), czyli (11a), t. zn. punkt rzeczywisty P należy do prostej urojonej d. I przytem punkt rzeczywisty P jest jedynym punktem rzeczywistym, należącym do prostej urojonej d (albowiem przez 2 punkty różne prosta jest określona jednoznacznie, 2 zaś różne punkty rzeczywiste określają prostą rzeczywistą).

punkty rzeczywiste P_1 i P_2. Punkty rzeczywiste P_1 i P_2 leżą na jednej prostej rzeczywistej d. Lecz spółrzędne prostej rzeczywistej d, czyniąc zadość każdemu z równań (13b), muszą czynić zadość także równaniu (12b), czyli (11b), t. zn. prosta rzeczywista d przechodzi przez punkt urojony P. I przytem prosta rzeczywista d jest jedyną prostą rzeczywistą, przechodzącą przez punkt urojony P (albowiem 2 proste różne posiadają jeden i tylko jeden punkt wspólny, 2 zaś różne proste rzeczywiste posiadają punkt rzeczywisty wspólny).

Otrzymaliśmy więc, że:

Każda prosta urojona oprócz punktów urojonych zawiera jeden i tylko jeden punkt rzeczywisty.

Przez każdy punkt urojony oprócz prostych urojonych przechodzi jedna i tylko jedna prosta rzeczywista.

§ 65. Uzupełnienie definicji punktów i prostych urojonych. Niezależność własności szczególnych punktów i prostych urojonych, zdefinjowanych w § poprzednim, od układu spółrzędnych. Warunki równoległości i prostopadłości dwu prostych. Odległość wzajemna dwu punktów. Kąt dwu prostych. Odległość punktu od prostej. Środek odcinka. Dwusieczne kątów, utworzonych przez 2 proste. Dwustosunek. — Podana przez nas w § poprzednim definicja punktów, względnie prostych, urojonych byłaby wystarczająca tylko w tym przypadku, gdybyśmy, rozpatrując punkty, względnie proste, urojone, zawsze ograniczali się do jednego tylko układu spółrzędnych, t. zn. gdybyśmy w trakcie samego rozumowania, w którem występują punkty, względnie proste, urojone, nigdy nie zmieniali układu spółrzędnych. Chcąc tego ograniczenia uniknąć, uzupełnimy wymienioną definicję punktów, względnie prostych urojonych, dodając do niej, co następuje:

W razie przejścia w jakiejś płaszczyźnie właściwej od jednego układu spółrzędnych do innego układu spółrzędnych, punkty, względnie proste, urojone, leżące w tej płaszczyźnie, nie zmieniają się, mogą zmienić się tylko ich spółrzędne. Przyczem pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi wymienionych punktów, względnie prostych, urojonych, zachodzą takie same zależności, jakie zachodzą pomiędzy dawnemi i nowemi spółrzędnemi punktów, względnie prostych, rzeczywistych, leżących w rozpatrywanej płaszczyźnie właściwej (t. zn. zależności, podane w §§ 58, 59, 60, 61, 62).

Samo przez się nasuwa się tu pytanie, czy to, co chcemy teraz dołączyć do podanej w § poprzednim definicji punktów i prostych urojonych, nie jest z tą definicją w sprzeczności. Przypuśćmy bowiem, że spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktu urojonego P w pewnym układzie spółrzędnych są liczby X, Y, Z. Liczby X, Y, Z, jako spółrzędne punktu urojonego, spełniają warunki następujące: są liczbami skończonemi; przynajmniej jedna z nich jest różna od 0; nie są proporcjonalnemi do trzech liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0. Zmieńmy teraz układ spółrzędnych. Według tego, co chcemy dołączyć do definicji punktów i prostych urojonych, podanej w § poprzednim, spółrzędnemi punktu urojonego P w nowym układzie spółrzędnych będą liczby (str. 287):

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} X' = \varrho' \{ X \sin\beta + Y \sin(\beta-\omega) - Z[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta-\omega)]\}, \\ Y' = -\varrho' \{ X \sin\alpha + Y \sin(\alpha-\omega) - Z[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha-\omega)]\}, \\ Z' = \varrho' Z \sin(\beta-\alpha), \end{array}\right.$$

gdzie ϱ' oznacza jakąkolwiek liczbę skończoną, różną od 0. Otóż chodzi o to, czy liczby X', Y', Z', określone wzorami (1), zawsze mogą być uważane za spółrzędne punktu urojonego. Gdyby się okazało, iż może się zdarzyć, że liczby X', Y', Z', określone wzorami (1), nie spełniają tych warunków, jakie muszą spełniać spółrzędne każdego punktu urojonego, to byłoby to dowodem, że projektowane przez nas uzupełnienie definicji punktów urojonych, podanej w § poprzednim, nie jest dopuszczalne. Sprawdźmy zatem, czy liczby X', Y', Z', określone wzorami (1), zawsze spełniają warunki, jakie muszą spełniać spółrzędne punktu urojonego, t. zn. czy zawsze są liczbami skończonemi, czy zawsze przynajmniej jedna z nich jest różna od 0, i w końcu, czy nigdy nie są proporcjonalnemi do trzech liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0.

Że liczby X', Y', Z', określone wzorami (1), zawsze są liczbami skończonemi, widać wprost z wzorów (1). Aby zbadać, czy te liczby czynią również zadość pozostałym 2 warunkom, weźmy pod uwagę wzory, wyrażające dawne spółrzędne przez nowe, t. zn. wzory (str. 287):

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} X = \varrho\,[X' \sin(\omega - \alpha) + Y' \sin(\omega - \beta) + Z' x_0 \sin\omega], \\ Y = \varrho\,(X' \sin\alpha + Y' \sin\beta + Z' y_0 \sin\omega), \\ Z = \varrho\; Z' \sin\omega, \end{array} \right.$$

gdzie $\varrho = \dfrac{1}{\varrho' \sin\omega \sin(\beta - \alpha)}$. Ponieważ ϱ' jest liczbą skończoną i różną od 0, $\sin\omega$ i $\sin(\beta - \alpha)$ też są liczbami skończonemi i różnemi od 0 (albowiem oś odciętych i oś rzędnych nigdy nie mogą być wzajemnie równoległemi), przeto ϱ jest liczbą skończoną i różną od 0. Gdyby więc wszystkie 3 liczby X', Y', Z' były równe 0, to w takim razie (wobec tego, że ϱ jest liczbą skończoną) również wszystkie 3 liczby X, Y, Z byłyby równe 0, co przeczyłoby założeniu. Zatem przynajmniej jedna z liczb X', Y', Z' jest różna od 0. Gdyby liczby X', Y', Z' były proporcjonalne do 3-ech liczb skończonych rzeczywistych p, q, r, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, to w takim razie mielibyśmy: $X' = \varrho'' p$, $Y' = \varrho'' q$, $Z' = \varrho'' r$, gdzie ϱ''

byłoby liczbą skończoną i różną od 0; stąd zaś oraz z wzorów (2) wynikałoby:

$$(3)\qquad \begin{cases} X = \varrho\varrho'' \,[p \sin(\omega - \alpha) + q \sin(\omega - \beta) + r x_0 \sin \omega], \\ Y = \varrho\varrho'' \,(p \sin \alpha + q \sin \beta + r y_0 \sin \omega), \\ Z = \varrho\varrho'' \; r \sin \omega, \end{cases}$$

skąd znów otrzymalibyśmy

$$(4)\qquad X : Y : Z = [p \sin(\omega - \alpha) + q \sin(\omega - \beta) + r x_0 \sin \omega] : \\ : (p \sin \alpha + q \sin \beta + r y_0 \sin \omega) : (r \sin \omega),$$

t. zn. liczby X, Y, Z byłyby proporcjonalnemi do trzech liczb skończonych rzeczywistych $p \sin(\omega - \alpha) + q \sin(\omega - \beta) + r x_0 \sin \omega$, $p \sin \alpha + q \sin \beta + r y_0 \sin \omega$, $r \sin \omega$, z których przynajmniej jedna jest różna od 0 [gdyby bowiem wszystkie 3 wymienione liczby były równe 0, to wtedy, jak to widać z równości (3), byłyby równe 0 wszystkie 3 liczby X, Y, Z]. A ponieważ liczby X, Y, Z nie są proporcjonalnemi do 3-ch liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, przeto również liczby X', Y', Z', nie mogą być proporcjonalnemi do trzech liczb skończonych rzeczywistych, z których przynajmniej jedna jest różna od 0.

Przychodzimy więc do wniosku, że liczby X', Y', Z', określone wzorami (1), zawsze czynią zadość warunkom, jakim muszą czynić zadość spółrzędne punktu urojonego, a zatem projektowane przez nas uzupełnienie definicji punktów urojonych, podanej w § poprzednim, jest dopuszczalne. Tak samo moglibyśmy się z łatwością przekonać, że również dopuszczalnem jest projektowane przez nas uzupełnienie definicji prostych urojonych.

Wprowadźmy więc je.

Dokonane przez nas uzupełnienie definicji punktów i prostych urojonych, podanych w § poprzednim, pociąga za sobą pytanie, czy własności szczególne punktów i prostych urojonych, jakie zdefinjowaliśmy w § poprzednim, a mianowicie własność punktu i prostej, iż punkt należy do prostej (prosta przechodzi przez punkt), własność punktu, iż jest on punktem właściwym, względnie niewłaściwym, oraz własność 2 prostych, iż są one wzajemnie równoległe, są zależne od

20*

układu spółrzędnych, czy też nie są. Innemi słowy powstają pytania następujące:

1) jeżeli w jakimś układzie spółrzędnych punkt P należy do prostej d (prosta d przechodzi przez punkt P), to czy w razie zmiany układu spółrzędnych punkt P też będzie należał do prostej d?

2) jeżeli w jakimś układzie spółrzędnych punkt P jest punktem właściwym, względnie niewłaściwym, to czy w razie zmiany układu spółrzędnych punkt P też będzie punktem właściwym, względnie niewłaściwym?

3) jeżeli w jakimś układzie spółrzędnych proste d_1 i d_2 są wzajemnie równoległe, to czy w razie zmiany układu spółrzędnych proste d_1 i d_2 też będą wzajemnie równoległe?

Weźmy najpierw pod uwagę pytanie pierwsze.

Gbyby punkt i prosta, o których mowa w tem pytaniu, były rzeczywiste, to wtedy pytanie to nie miałoby, oczywiście, racji bytu. Albowiem nie punkt rzeczywisty i prostą rzeczywistą oraz ich własności zdefinjowaliśmy za pomocą układu spółrzędnych, lecz odwrotnie, opierając się na własnościach punktów i prostych rzeczywistych, znanych nam z Geometrji elementarnej, zdefinjowaliśmy układ spółrzędnych. Wobec tego własność pewnego punktu rzeczywistego oraz pewnej prostej rzeczywistej, że punkt należy do prostej, istnieje dla nas niezależnie od wszelkiego układu spółrzędnych. Z chwilą, gdy wprowadzamy układ spółrzędnych, to możemy tylko tej własności, istniejącej niezależnie od układu spółrzędnych, podporządkować w tym układzie pewien utwór algebraiczny. W razie zmiany układu spółrzędnych może zmienić się tylko utwór algebraiczny, podporządkowany wymienionej własności geometrycznej.

Inaczej rzecz się przedstawia, gdy albo punkt, o którym mowa w pytaniu pierwszem, jest urojony, albo prosta, o której mowa w tem pytaniu, jest urojona, albo, w końcu, zarówno punkt, jak i prosta, o których mowa w wymienionem pytaniu, są urojone.

Własność punktu i prostej, iż punkt należy do prostej w razie, gdy punkt jest urojony, albo gdy prosta jest urojona, albo gdy zarówno punkt, jak i prosta, są urojone, zdefinjowaliśmy w § 64 za pomocą spółrzędnych punktu i prostej, ta własność jest więc dla nas narazie ściśle z układem spółrzędnych związana. Pytanie więc, czy w razie zmiany układu spółrzędnych własność punktu i prostej, iż punkt należy do prostej, pozostanie zachowaną, jest w tym przypadku zupełnie na miejscu.

Aby odpowiedzieć na nasze pytanie, przyjmijmy, że w jakimś układzie spółrzędnych jest dany punkt P o spółrzędnych X, Y, Z oraz prosta d o spółrzędnych U, V, W. Zmieńmy teraz układ spółrzędnych. Spółrzędne punktu P, względnie prostej d, w nowym układzie oznaczmy przez X', Y', Z', względnie przez U', V', W'.

Możemy wtedy powiedzieć, że (str. 287 i 288):

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} X' = \varrho' \{X \sin\beta + Y \sin(\beta - \omega) - Z[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta - \omega)]\}, \\ Y' = -\varrho' \{X \sin\alpha + Y \sin(\alpha - \omega) - Z[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha - \omega)]\}, \\ Z' = \varrho' . Z \sin(\beta - \alpha), \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} U' = \varrho'' [U \sin(\omega - \alpha) + V \sin\alpha], \\ V' = \varrho'' [U \sin(\omega - \beta) + V \sin\beta], \\ W' = \varrho'' (U x_0 + V y_0 + W) \sin\omega, \end{array} \right.$$

gdzie ϱ' i ϱ'' oznaczają jakiekolwiek liczby skończone, różne od 0. Stąd otrzymujemy, że:

$U'X' + V'Y' + W'Z' = \varrho'\varrho'' [U \sin(\omega - \alpha) + V \sin\alpha] \{X \sin\beta + Y \sin(\beta - \omega) - Z[x_0 \sin\beta + y_0 \sin(\beta - \omega)]\} - \varrho'\varrho'' [U \sin(\omega - \beta) + V \sin\beta] \{X \sin\alpha + Y \sin(\alpha - \omega) - Z[x_0 \sin\alpha + y_0 \sin(\alpha - \omega)]\} + \varrho'\varrho'' (U x_0 + V y_0 + W) Z \sin\omega \sin(\beta - \alpha) = \varrho'\varrho'' U X [\sin(\omega - \alpha) \sin\beta - \sin(\omega - \beta) \sin\alpha] + \varrho'\varrho'' V Y [\sin\alpha \sin(\beta - \omega) - \sin\beta \sin(\alpha - \omega)] + \varrho'\varrho'' W Z \sin\omega \sin(\beta - \alpha)$, czyli

$$(7) \quad U'X' + V'Y' + W'Z' = \varrho'\varrho'' \sin\omega \sin(\beta - \alpha) . (UX + VY + WZ).$$

Z równości (7) wynika, że albo trójmiany $UX + VY + WZ$ oraz $U'X' + V'Y' + W'Z'$ obydwa jednocześnie są równe 0, albo też żaden z nich nie jest równy 0, t. zn. (§ 64) albo punkt P należy do prostej d w obydwu rozpatrywanych układach spółrzędnych, albo też punkt P nie należy do prostej d w żadnym z rozpatrywanych układów spółrzędnych. Własność zatem pewnego punktu i pewnej prostej, że punkt należy do prostej, nie zależy od układu spółrzędnych.

Przejdźmy teraz do pytania drugiego.

Jeżeli spółrzędnemi punktu P w jakimś układzie spółrzędnych są liczby X, Y, Z, to w razie zmiany układu spółrzędnych nowe spółrzędne X', Y', Z' punktu P wyrażają się przez dawne jego spółrzędne za pomocą wzorów (5). Mamy zatem $Z' = \varrho' Z \sin(\beta - \alpha)$, gdzie ϱ' jest liczbą skończoną, różną od 0. Stąd więc wynika, że albo liczby Z i Z' są obiedwie jednocześnie równe 0, albo też żadna z tych liczb nie jest równa 0, t. zn. albo punkt P jest jednocześnie w obydwu rozpatrywanych układach spółrzędnych punktem niewłaściwym, albo też jest on jednocześnie w obydwu rozpatrywanych układach spółrzędnych punktem właściwym. Własność zatem punktu, ze jest on punktem właściwym, względnie niewłaściwym, nie zależy od układu spółrzędnych.

Zwróćmy się, w końcu, do pytania ostatniego.

Przyjmijmy, że w jakimś układzie spółrzędnych są dane 2 proste d_1 i d_2 wzajemnie równoległe. Punkt niewłaściwy, wspólny tym dwu prostym, oznaczmy przez P. Zmieńmy teraz układ spółrzędnych. Z podanych wyżej rozważań wynika, że w nowym układzie spółrzędnych punkt P również będzie należał do każdej z prostych d_1 i d_2 i również będzie punktem niewłaściwym, proste więc d_1 i d_2 również w nowym układzie będą posiadały punkt niewłaściwy wspólny, t. zn. będą prostemi równoległemi. A zatem własność 2 prostych, iż są one wzajemnie równoległe, nie zależy od układu spółrzędnych.

Jak więc widzimy, wszystkie własności szczególne punktów i prostych, zdefinjowane w § poprzednim, są od układu spółrzędnych niezależne.

Weźmy pod uwagę jakiekolwiek 2 proste d_1 i d_2, przedstawione przez równania

$$(8) \qquad A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0, \; A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0.$$

Cały Rozdział II, jak to zaznaczyliśmy w § poprzednim, pozostanie w mocy, gdy opuścimy w nim wszędzie przymiotnik „rzeczywisty". Możemy zatem powiedzieć, że warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości prostych d_1 i d_2 jest (§ 21) spełnienie równości $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$.

Zmieńmy teraz układ spółrzędnych. Niechaj równania

(9) $A_1' X' + B_1' Y' + C_1' Z' = 0, \quad A_2' X' + B_2' Y' + C_2' Z' = 0$

przedstawiają proste d_1 i d_2 w nowym układzie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości prostych d_1 i d_2 w nowym układzie jest wtedy spełnienie równości $A_1' B_2' - A_2' B_1' = 0$. Lecz, jak widzieliśmy wyżej, proste d_1 i d_2 albo są równoległe w obydwu układach, albo nie są równoległe w żadnym układzie. Stąd więc wynika, że albo równości $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ i $A_1' B_2' - A_2' B_1' = 0$ obiedwie jednocześnie są spełnione, albo też żadna z tych równości nie jest spełniona.

Sprawdzimy teraz to bezpośrednio, mianowicie znajdziemy zależność, zachodzącą pomiędzy wyrażeniami $A_1 B_2 - A_2 B_1$ oraz $A_1' B_2' - A_2' B_1'$.

Liczby A_1, B_1, C_1, względnie A_2, B_2, C_2, możemy uważać za spółrzędne prostej d_1, względnie d_2, w pierwszym układzie spółrzędnych, liczby zaś A_1', B_1', C_1', względnie A_2', B_2', C_2', możemy uważać za spółrzędne prostej d_1, względnie d_2, w drugim układzie spółrzędnych, a zatem [równ. (6)]:

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} A_1' = \varrho_1 [A_1 \sin(\omega - \alpha) + B_1 \sin\alpha], \\ B_1' = \varrho_1 [A_1 \sin(\omega - \beta) + B_1 \sin\beta], \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} A_2' = \varrho_2 [A_2 \sin(\omega - \alpha) + B_2 \sin\alpha], \\ B_2' = \varrho_2 [A_2 \sin(\omega - \beta) + B_2 \sin\beta], \end{array} \right.$$

gdzie ϱ_1 i ϱ_2 są liczbami skończonemi, różnemi od 0. Mamy więc $A_1' B_2' - A_2' B_1' =$

$$= \varrho_1 \varrho_2 [A_1 \sin(\omega - \alpha) + B_1 \sin\alpha][A_2 \sin(\omega - \beta) + B_2 \sin\beta] -$$
$$- \varrho_1 \varrho_2 [A_2 \sin(\omega - \alpha) + B_2 \sin\alpha][A_1 \sin(\omega - \beta) + B_1 \sin\beta],$$

czyli (po wykonaniu redukcji):

$$(11) \quad A_1' B_2' - A_2' B_1' = \varrho_1 \varrho_2 \sin\omega \sin(\beta - \alpha) \cdot (A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Z równości (11) widać już bezpośrednio, że albo wielkości $A_1 B_2 - A_2 B_1$ oraz $A_1' B_2' - A_2' B_1'$ obiedwie jednocześnie są równe 0, albo też żadna z tych dwu wielkości nie jest równa 0.

Jeżeli proste d_1 i d_2, przedstawione przez równania (8), są właściwe i rzeczywiste, to warunkiem koniecznym i dostatecznym ich prostopadłości jest spełnienie równości (str. 151)

$$(12) \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos\omega = 0.$$

Spełnienie równości (12) będziemy uważali za warunek konieczny i dostateczny prostopadłości prostych, przedstawionych przez równanie (8), również w tym przypadku, gdy przynajmniej jedna z tych prostych jest niewłaściwa lub urojona. Innemi słowy wprowadzamy definicję następującą:

Dwie proste d_1 i d_2, przedstawione przez równania $A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0$ i $A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0$, z których przynajmniej jedna jest niewłaściwa lub urojona, nazywamy wzajemnie prostopadłemi, gdy jest spełniona równość $A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega = 0$.

Prostą niewłaściwą uważamy więc za prostopadłą do każdej prostej.

Sprawdźmy, czy własność 2 prostych, iż są one wzajemnie prostopadłe, jest niezależna od układu spółrzędnych. W tym celu winniśmy znaleść zależność pomiędzy wyrażeniami $A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega$ oraz $A_1' A_2' + B_1' B_2' - (A_1' B_2' + A_2' B_1') \cos \omega'$, gdzie A_1', B_1', A_2', B_2' mają takie znaczenie, jak we wzorach (10), kąt zaś ω' jest to kąt, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie nowych osi spółrzędnych. Możemy powiedzieć, że $\cos \omega' = \cos (\beta - \alpha)$ [nie moglibyśmy jednak powiedzieć, że $\sin \omega' = \sin (\beta - \alpha)$; moglibyśmy tylko powiedzieć, że $\sin \omega' = \pm \sin (\beta - \alpha)$]. Wstawiwszy w wyrażenie $A_1' A_2' + B_1' B_2' - (A_1' B_2' + A_2' B_1') \cos \omega'$ zamiast A_1', B_1', A_2', B_2' strony prawe równości (10) oraz zamiast dostawy kąta ω' dostawę kąta $\beta - \alpha$, otrzymamy (po wykonaniu redukcji oraz pewnych łatwych uproszczeń):

$$(13) \quad A_1' A_2' + B_1' B_2' - (A_1' B_2' + A_2' B_1') \cos \omega' = \\ = \varrho_1 \varrho_2 \sin^2 (\beta - \alpha) \, . [A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega].$$

Z równości (13) możemy wywnioskować, że własność 2 prostych, iż są one wzajemnie prostopadłe, jest niezależna od układu spółrzędnych.

Kwadrat odległości δ dwu punktów właściwych (x_1, y_1) i (x_2, y_2), z których przynajmniej jeden jest punktem urojonym, definjujemy za pomocą wzoru (§ 29)

$$(14) \quad \delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2 (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega;$$

styczne kątów, jakie tworzą z sobą dwie proste właściwe $A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = 0$ i $A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = 0$, z których przynajmniej jedna jest urojona, definjujemy za pomocą wzoru (§ 30)

$$(15) \qquad \operatorname{tg}\Theta = + \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)\sin\omega}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\cos\omega};$$

kwadrat odległości δ punktu właściwego P o spółrzędnych Descartes'a x_1 i y_1 od prostej właściwej d, przedstawionej przez równanie $AX + BY + CZ = 0$, w razie, gdy punkt P jest urojony, albo gdy prosta d jest urojona, albo, w końcu, gdy zarówno punkt P jak i prosta d są urojone, definjujemy za pomocą wzoru (§ 31)

$$(16) \qquad \delta^2 = \frac{(A x_1 + B y_1 + C)^2 \sin^2\omega}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}.$$

T. zn. wymienione wielkości definjujemy za pomocą wzorów, które otrzymaliśmy dawniej w przypadku punktów i prostych rzeczywistych.

Wstaw i dostaw kątów, jakie tworzą z sobą 2 proste właściwe, z których przynajmniej jedna jest urojona, definjować nie potrzebujemy, są one bowiem przez styczne tych kątów określone.

Łatwo moglibyśmy się przekonać, że liczba, wyrażająca kwadrat odległości dwu punktów właściwych, liczby, wyrażające styczne kątów, jakie tworzą z sobą 2 proste właściwe, oraz liczba, wyrażająca kwadrat odległości punktu właściwego od prostej właściwej, nie zależą od układu spółrzędnych.

Jeżeli przynajmniej jeden z 2 punktów właściwych $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ jest punktem urojonym, to środkiem odcinka, którego punktami krańcowymi są punkty P_1 i P_2, nazywamy punkt S o spółrzędnych $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ i $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Za pomocą bardzo prostego rachunku można wykazać, że jeżeli x_1' i y_1', względnie x_2' i y_2', oznaczają spółrzędne punktu P_1, względnie P_2, w jakimś innym układzie spółrzędnych, to spółrzędne punktu S w tym układzie spółrzędnych można napisać w postaci: $\frac{1}{2}(x_1' + x_2')$ i $\frac{1}{2}(y_1' + y_2')$, co dowodzi, że punkt S jest środkiem odcinka $P_1 P_2$ również w tym innym układzie spółrzędnych. A zatem środek odcinka od układu spółrzędnych nie zależy.

Jeżeli przynajmniej jedna z 2 różnych prostych właściwych nierównoległych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ jest prostą urojoną, to dwusiecznemi kątów, jakie tworzą z sobą te proste, nazywamy 2 proste

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos\omega}} + \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos\omega}} = 0,$$

gdzie w obydwu mianownikach przez pierwiastek kwadratowy rozumiemy którykolwiek pierwiastek kwadratowy z liczby, znajdującej się pod znakiem $\sqrt{}$.

Jeżeli, w założeniu, że

punkty (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) są różne, przynajmniej jeden z 4-ech punktów $P_1(\lambda_{11}X_1 + \lambda_{12}X_2, \lambda_{11}Y_1 + \lambda_{12}Y_2, \lambda_{11}Z_1 + \lambda_{12}Z_2)$, $P_2(\lambda_{21}X_1 + \lambda_{22}X_2, \lambda_{21}Y_1 + \lambda_{22}Y_2, \lambda_{21}Z_1 + \lambda_{22}Z_2)$, $P_3(\lambda_{31}X_1 + \lambda_{32}X_2, \lambda_{31}Y_1 + \lambda_{32}Y_2, \lambda_{31}Z_1 + \lambda_{32}Z_2)$, $P_4(\lambda_{41}X_1 + \lambda_{42}X_2, \lambda_{41}Y_1 + \lambda_{42}Y_2, \lambda_{41}Z_1 + \lambda_{42}Z_2)$, leżących na jednej prostej, jest punktem urojonym, to dwustosunkiem (P_1, P_2, P_3, P_4) tych czterech punktów

proste (U_1, V_1, W_1) i (U_2, V_2, W_2) są różne, przynajmniej jedna z 4-ech prostych $d_1(\lambda_{11}U_1 + \lambda_{12}U_2, \lambda_{11}V_1 + \lambda_{12}V_2, \lambda_{11}W_1 + \lambda_{12}W_2)$, $d_2(\lambda_{21}U_1 + \lambda_{22}U_2, \lambda_{21}V_1 + \lambda_{22}V_2, \lambda_{21}W_1 + \lambda_{22}W_2)$, $d_3(\lambda_{31}U_1 + \lambda_{32}U_2, \lambda_{31}V_1 + \lambda_{32}V_2, \lambda_{31}W_1 + \lambda_{32}W_2)$, $d_4(\lambda_{41}U_1 + \lambda_{42}U_2, \lambda_{41}V_1 + \lambda_{42}V_2, \lambda_{41}W_1 + \lambda_{42}W_2)$, przechodzących przez jeden punkt, jest prostą urojoną, to dwustosunkiem (d_1, d_2, d_3, d_4) tych 4-ech prostych

nazywamy liczbę
$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{31} \\ \lambda_{12}, & \lambda_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, & \lambda_{41} \\ \lambda_{22}, & \lambda_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{41} \\ \lambda_{12}, & \lambda_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{21}, & \lambda_{31} \\ \lambda_{22}, & \lambda_{32} \end{vmatrix}}.$$

Stąd wynika, że twierdzenia, dotyczące wartości dwustosunku 4-ech punktów, względnie 4-ech prostych, przedstawionych przez równania, lub spółrzędne, specjalnego kształtu, stosują się nietylko do punktów i prostych rzeczywistych, lecz do punktów i prostych jakichkolwiek.

Dwustosunek nazywamy harmonicznym, jeżeli jest on równy — 1.

Łatwo można dowieść, że dwusieczne kątów, utworzonych przez 2 proste, jak również dwustosunek 4-ech punktów, względnie 4-ech prostych, nie zależą od układu spółrzędnych.

Opierając się na podanych wyżej definicjach, można wykazać, że twierdzenie Pappus'a jest prawdziwe zawsze (t. zn. nietylko w przypadku punktów i prostych rzeczywistych), że środek odcinka, którego punktami krańcowymi są punkty właściwe P_1 i P_2, zawsze jest sprzężony harmonicznie z punktem niewłaściwym prostej $P_1 P_2$ względem punktów P_1 i P_2, jak również, że dwusieczne kątów, utworzonych przez proste d_1 i d_2, zawsze są sprzężone z sobą harmonicznie względem tych 2 prostych.

Uwaga 1. Wzór (15) możemy uważać za wzór, wyrażający styczne kątów, jakie tworzą z sobą jakiekolwiek 2 proste, niekoniecznie właściwe; będziemy mieli wtedy, że w razie, gdy przynajmniej jedna z 2 prostych d_1 i d_2 jest niewłaściwa, zawarte pomiędzy temi prostemi kąty są nieoznaczone. Tak samo, wzór (16) możemy uważać za wzór, wyrażający kwadrat odległości punktu właściwego od jakiejkolwiek prostej, niekoniecznie właściwej; z tego wzoru będzie wtedy wynikało, że odległość punktu właściwego od prostej niewłaściwej jest nieskończenie wielka.

Uwaga 2. W § niniejszym zaznaczyliśmy różnicę, jaka zachodzi pomiędzy punktami i prostemi rzeczywistymi z jednej strony, oraz punktami i prostemi urojonymi z drugiej strony. Powiedzieliśmy mianowicie, że punkty i proste rzeczywiste istnieją dla nas niezależnie od jakiegokolwiek układu spółrzędnych, wobec czego np. własność punktu i prostej, iż punkt należy do prostej, jest od układu spółrzędnych niezależna;

natomiast własności punktów i prostych urojonych uważaliśmy, początkowo przynajmniej, za związane z pewnym układem spółrzędnych, wobec czego w każdym poszczególnym przypadku zachodziła potrzeba badania, czy dana własność w razie zmiany układu spółrzędnych pozostanie zachowana. Nie należy jednak stąd wnioskować, żeby ta różnica pomiędzy punktami i prostemi rzeczywistymi oraz punktami i prostemi urojonymi zachodziła bezwzględnie. Jest ona zupełnie przypadkowa, odpowiada mianowicie ujęciu Geometrji analitycznej w ten, a nie inny, sposób. U nas pochodzi ona stąd, że na początku oparliśmy się tylko na Geometrji elementarnej, skutkiem czego z góry uważaliśmy za znane tylko punkty i proste rzeczywiste; punktów i prostych urojonych nie uważaliśmy za znane, a zatem musieliśmy je dopiero zdefinjować. Gdybyśmy zaś oparli się nietylko na Geometrji elementarnej, lecz również np. na Geometrji rzutowej, to moglibyśmy z góry uważać za znane nietylko punkty i proste rzeczywiste, lecz również punkty i proste urojone, a wtedy zarówno punkty i proste rzeczywiste, jak też punkty i proste urojone, oraz ich własności podstawowe istniałyby dla nas niezależnie od wszelkiego układu spółrzędnych.

Możnaby ująć Geometrję analityczną jeszcze inaczej, możnaby mianowicie każdy punkt i każdą prostą (nietylko punkt urojony i prostą urojoną) oraz wszelkie ich własności definjować za pomocą spółrzędnych. Gdybyśmy wtedy przyjęli możliwość zmiany układu spółrzędnych przyczem założylibyśmy, że zmiana układu spółrzędnych nie powoduje zmiany samych punktów i prostych, że może tylko spowodować zmianę ich spółrzędnych, to w takim razie zachodziłaby potrzeba sprawdzania, czy własności wszelkich punktów i prostych (nietylko punktów i prostych urojonych) są zależne od układu spółrzędnych. W tem ujęciu Geometrja analityczna posiadałaby wygląd raczej nauki algebraicznej.

Przy sprawdzaniu, czy dane własności są od układu spółrzędnych niezależne, jak również wogóle przy wyszukiwaniu własności, niezależnych od układu spółrzędnych, wielkie usługi może nam oddać t. zw. Teorja niezmienników.

§ 66. Punkty, względnie proste, sprzężone.

Dwa punkty nazywamy sprzężonymi jeżeli mogą one być | Dwie proste nazywamy sprzężonemi przedstawione przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, będące liczbami zespolonemi sprzężonemi.

A więc, np. trójki liczb $a_1 + i a_2$, $b_1 + i b_2$, $c_1 + i c_2$ oraz $a_1 - i a_2$, $b_1 - i b_2$, $c_1 - i c_2$, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go dwu punktów, przedstawiają 2 punkty sprzężone. Te 2 punkty | prostych, przedstawiają 2 proste sprzężone. Te 2 proste możemy przedstawić również przez spółrzędne $\varrho(a_1 + i a_2)$, $\varrho(b_1 + i b_2)$, $\varrho(c_1 + i c_2)$ oraz $\varrho'(a_1 - i a_2)$, $\varrho'(b_1 - i b_2)$, $\varrho'(c_1 - i c_2)$, gdzie ϱ i ϱ' są to jakiekolwiek 2 liczby skończone i różne od 0. Jeżeli $\varrho \neq \varrho'$, to pary liczb $\varrho(a_1 + i a_2)$ i $\varrho'(a_1 - i a_2)$, $\varrho(b_1 + i b_2)$ i $\varrho'(b_1 - i b_2)$, $\varrho(c_1 + i c_2)$ i $\varrho'(c_1 - i c_2)$ nie są parami liczb zespolonych sprzężonych, a zatem 2 punkty, względnie 2 proste, sprzężone mogą być przedstawione również przez spółrzędne jednorodne Hesse'go, nie będące liczbami zespolonemi sprzężonemi.

Jeżeli rozpatrywane punkty sprzężone są właściwe, to możemy je przedstawić również przez spółrzędne Descartes'a. Spółrzędnemi Descartes'a rozpatrywanych punktów | proste sprzężone nie przechodzą przed początek układu spółrzędnych, to możemy je przedstawić również przez spółrzędne Plücker'a. Spółrzędnemi Plücker'a rozpatrywanych prostych

są liczby $\frac{a_1 + i a_2}{c_1 + i c_2}$ i $\frac{b_1 + i b_2}{c_1 + i c_2}$ oraz $\frac{a_1 - i a_2}{c_1 - i c_2}$ i $\frac{b_1 - i b_2}{c_1 - i c_2}$. Lecz jeżeli liczby $\frac{a_1 + i a_2}{c_1 + i c_2}$ i $\frac{b_1 + i b_2}{c_1 + i c_2}$ oznaczymy odpowiednio przez $r_1 + i r_2$ oraz $s_1 + i s_2$, to liczby $\frac{a_1 - i a_2}{c_1 - i c_2}$ i $\frac{b_1 - i b_2}{c_1 - i c_2}$ będą wtedy równe odpowiednio $r_1 - i r_2$ oraz $s_1 - i s_2$. Jak więc widzimy, spółrzędne

Descartes'a dwu punktów | Plücker'a dwu prostych sprzężonych są zawsze liczbami zespolonemi sprzężonemi.

Własność dwu

punktów, iż są one punktami sprzężonemi, | prostych, iż są one prostemi sprzężonemi,

nie zależy od układu spółrzędnych.

Punkt rzeczywisty możemy uważać za sprzężony z samym sobą. Albowiem spółrzędne X, Y, Z punktu rzeczywistego, będące liczbami rzeczywistemi, możemy napisać zarówno w postaci: $X+i.0$, $Y+i.0$, $Z+i.0$, jak też w postaci $X-i.0$, $Y-i.0$, $Z-i.0$.

Prostą rzeczywistą możemy uważać za sprzężoną z samą sobą. Albowiem spółrzędne U, V, W prostej rzeczywistej, będące liczbami rzeczywistemi, możemy napisać zarówno w postaci: $U+i.0$, $V+i.0$, $W+i.0$, jak też w postaci $U-i.0$, $V-i.0$, $W-i.0$.

Odwrotnie, jeżeli 2

punkty sprzężone nakrywają się, to są one punktami rzeczywistymi. | proste sprzężone nakrywają się, to są one prostemi rzeczywistemi.

Przypuśćmy bowiem, że 2

punkty sprzężone $P_1(a_1+ia_2, b_1+ib_2, c_1+ic_2)$ oraz $P_2(a_1-ia_2, b_1-ib_2, c_1-ic_2)$ | proste sprzężone $d_1(a_1+ia_2, b_1+ib_2, c_1+ic_2)$ oraz $d_2(a_1-ia_2, b_1-ib_2, c_1-ic_2)$

nakrywają się. W takim razie są spełnione równości

(1) $(a_1+ia_2):(b_1+ib_2):(c_1+ic_2)=(a_1-ia_2):(b_1-ib_2):(c_1-ic_2)$,

t. zn. 3 równości: $(a_1+ia_2):(b_1+ib_2)=(a_1-ia_2):(b_1-ib_2)$, $(a_1+ia_2):(c_1+ic_2)=(a_1-ia_2):(c_1-ic_2)$, $(b_1+ib_2):(c_1+ic_2)=(b_1-ib_2):(c_1-ic_2)$, czyli

(2) $a_1b_2-a_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,\quad b_1c_2-b_2c_1=0.$

Lecz z równości (2) wynika:

(3) $$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2,$$

t. zn. (§ 64) punkty P_1 i P_2 są rzeczywiste.

A zatem 2

punkty urojone sprzężone | proste urojone sprzężone

zawsze są różne.

Niechaj będą dane 2

punkty urojone sprzężone P_1 $(a_1 + i a_2, b_1 + i b_2, c_1 + i c_2)$ oraz P_2 $(a_1 - i a_2, b_1 - i b_2, c_1 - i c_2)$. Te punkty możemy przedstawić przez równania $(a_1 + i a_2) U + (b_1 + i b_2) V + (c_1 + i c_2) W = 0$ oraz $(a_1 - i a_2) U + (b_1 - i b_2) V + (c_1 - i c_2) W = 0$, czyli przez równania

$$(4a) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 U + b_1 V + c_1 W + \\ + i(a_2 U + b_2 V + c_2 W) = 0, \\ a_1 U + b_1 V + c_1 W - \\ - i(a_2 U + b_2 V + c_2 W) = 0. \end{array} \right.$$

Stąd wynika, że prosta rzeczywista, łącząca punkty rzeczywiste

$$(5a) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 U + b_1 V + c_1 W = 0, \\ a_2 U + b_2 V + c_2 W = 0, \end{array} \right.$$

przechodzi przez każdy z punktów P_1 i P_2, jest zatem prostą, łączącą te 2 punkty.

proste urojone sprzężone d_1 $(a_1 + i a_2, b_1 + i b_2, c_1 + i c_2)$ oraz d_2 $(a_1 - i a_2, b_1 - i b_2, c_1 - i c_2)$. Te proste możemy przedstawić przez równania $(a_1 + i a_2) X + (b_1 + i b_2) Y + (c_1 + i c_2) Z = 0$ oraz $(a_1 - i a_2) X + (b_1 - i b_2) Y + (c_1 - i c_2) Z = 0$, czyli przez równania

$$(4b) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \\ + i(a_2 X + b_2 Y + c_2 Z) = 0, \\ a_1 X + b_1 Y + c_1 Z - \\ - i(a_2 X + b_2 Y + c_2 Z) = 0. \end{array} \right.$$

Stąd wynika, że punkt rzeczywisty, w jakim przecinają się proste rzeczywiste

$$(5b) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0, \end{array} \right.$$

należy do każdej z prostych d_1 i d_2, jest zatem punktem przecięcia się tych 2 prostych.

Mamy więc:

P r o s t a, ł ą c z ą c a d w a p u n k t y u r o j o n e s p r z ę ż o n e, j e s t z a w s z e p r o s t ą r z e c z y w i s t ą.

P u n k t p r z e c i ę c i a s i ę 2 p r o s t y c h u r o j o n y c h s p r z ę ż o n y c h j e s t z a w s z e p u n k t e m r z e c z y w i s t y m.

Przypuśćmy, że punkty urojone sprzężone P_1 i P_2 są właściwe. Możemy je wtedy przedstawić przez spółrzędne Descartes'a $r_1 + i r_2$, $s_1 + i s_2$, oraz $r_1 - i r_2$, $s_1 - i s_2$. Spółrzędnemi środka odcinka o punktach krańcowych P_1 i P_2 są wtedy liczby (§ 65): $\frac{1}{2}(r_1 + ir_2 + r_1 - ir_2) = r_1$ oraz $\frac{1}{2}(s_1 + i s_2 + s_1 - i s_2) = s_1$. Otrzymaliśmy, więc że ś r o d e k o d c i n k a, k t ó r e g o p u n k t a m i k r a ń c o w y m i s ą d w a p u n k t y właściwe urojone sprzężone, jest punktem rzeczywistym.

Weźmy teraz pod uwagę 2 proste właściwe nierównoległe urojone sprzężone $d_1(a_1+ia_2,\ b_1+ib_2,\ c_1+ic_2)$, oraz $d_2(a_1-ia_2,\ b_1-ib_2,\ c_1-ic_2)$. Te proste możemy przedstawić przez równania:

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l}(a_1+ia_2)X+(b_1+ib_2)Y+(c_1+ic_2)=0\\ \text{oraz}\\ (a_1-ia_2)X+(b_1-ib_2)Y+(c_1-ic_2)Z=0\end{array}\right.$$

Dwusiecznemi kątów, jakie tworzą z sobą proste d_1 i d_2, są proste (§ 65):

$$(7)\qquad \frac{(a_1+ia_2)x+(b_1+ib_2)y+c_1+ic_2}{\sqrt{m+in}}\pm$$
$$\pm\frac{(a_1-ia_2)x+(b_1-ib_2)y+c_1-ic_2}{\sqrt{m-in}}=0$$

gdzie $m=a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2-2(a_1b_1-a_2b_2)\cos\omega$ oraz $n=2[a_1a_2+b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\cos\omega]$. Jeżeli $\sqrt{m+in}$ oznaczymy przez $p+iq$, to w takim razie liczba $\sqrt{m-in}$ będzie równa albo $+(p-iq)$, albo $-(p-iq)$. Lecz jako $\sqrt{m-in}$ możemy wziąć którykolwiek pierwiastek kwadratowy z liczby $m-in$, weźmy więc np. $p-iq$. Równania (7) możemy wtedy napisać w postaci:

$$(8)\qquad \frac{a_1+ia_2}{p+iq}x+\frac{b_1+ib_2}{p+iq}y+\frac{c_1+ic_2}{p+iq}+$$
$$\pm\left(\frac{a_1-ia_2}{p-iq}x+\frac{b_1-ib_2}{p-iq}y+\frac{c_1-ic_2}{p-iq}\right)=0.$$

Oznaczywszy $\dfrac{a_1+ia_2}{p+iq},\ \dfrac{b_1+ib_2}{p+iq},\ \dfrac{c_1+ic_2}{p+iq}$ odpowiednio przez $r_1+ir_2,\ s_1+is_2,\ t_1+it_2$, jako równania rozpatrywanych dwusiecznych otrzymamy równania

$$(r_1+ir_2)x+(s_1+is_2)y+(t_1+it_2)\pm$$
$$\pm[(r_1-ir_2)x+(s_1-is_2)y+(t_1-it_2)]=0,$$

czyli (po podzieleniu przez 2, wzgl. $2i$) równania

(9) $$r_1 x + s_1 y + t_1 = 0 \text{ oraz } r_2 x + s_2 y + t_2 = 0.$$

A zatem dwusieczne kątów, utworzonych przez 2 proste właściwe nierównoległe urojone sprzężone, są prostemi rzeczywistemi.

§ 67. Punkty kołowe płaszczyzny. Proste zerowe. — W razie przejścia w płaszczyźnie właściwej od jednego układu spółrzędnych do innego układu, spółrzędne jakiegoś punktu, względnie jakiejś prostej, tej płaszczyzny mogą się zmienić. Mogą, lecz nie muszą. Samo przez się nasuwa się więc pytanie, czy w płaszczyźnie właściwej istnieją takie punkty, względnie proste, których spółrzędne we wszystkich układach spółrzędnych są jednakowe.

Przedewszystkiem możemy powiedzieć, że prosta niewłaściwa płaszczyzny właściwej we wszystkich układach spółrzędnych tej płaszczyzny posiada te same spółrzędne. Mianowicie za spółrzędne jednorodne Hesse'go prostej niewłaściwej w każdym z tych układów możemy uważać liczby 0, 0, 1.

Weźmy teraz pod uwagę jakąkolwiek prostą właściwą d, leżącą w rozpatrywanej płaszczyźnie. Przypuśćmy najpierw, że prosta d jest rzeczywista. Przyjąwszy 2 układy spółrzędnych, z których jeden posiada początek na prostej d, drugi zaś zewnątrz tej prostej, możemy powiedzieć, że prosta d w tych dwu układach nie może być przedstawiona przez te same spółrzędne: albowiem trzecia spółrzędna W prostej d w pierwszym z wymienionych układów jest równa 0, w drugim zaś z tych układów jest różna od 0. Przypuśćmy teraz, że prosta d jest urojona. Prosta d posiada wtedy jeden (i tylko jeden) punkt rzeczywisty P (§ 64). Jeżeli punkt P jest punktem właściwym, to przyjąwszy 2 układy spółrzędnych, z których jeden posiada jako początek punkt P, drugi zaś posiada jako początek jakiś punkt, różny od punktu P, możemy powiedzieć, że prosta d w tych dwu układach nie może być przedstawiona przez te same spółrzędne (albowiem trzecia spółrzędna W prostej d w pierwszym z wymienionych układów jest równa 0, w drugim zaś z tych układów jest różna od 0). Jeżeli natomiast punkt P jest punktem niewłaściwym, to przyjąwszy

2 układy spółrzędnych, z których jeden posiada jako oś u-ów prostą, przechodzącą przez punkt P (t. zn. równoległą do prostej d), drugi zaś posiada jako oś u-ów prostą, nie przechodzącą przez punkt P (t. zn. nierównoległą do prostej d), możemy powiedzieć, że prosta d w tych dwu układach nie może być przedstawiona przez te same spółrzędne: albowiem pierwsza spółrzędna U prostej d w pierwszym z wymienionych układów jest równa 0, w drugim zaś z tych układów jest różna od 0.

Przychodzimy więc do wniosku, że z pośród prostych, leżących w płaszczyźnie właściwej, tylko jedna prosta niewłaściwa we wszystkich układach spółrzędnych tej płaszczyzny posiada takie same spółrzędne.

Przejdźmy teraz do punktów. Niechaj P będzie jakimkolwiek punktem właściwym, leżącym w rozpatrywanej płaszczyźnie. Zawsze istnieje (przynajmniej jedna) prosta rzeczywista d, przechodząca przez punkt P. Prosta d jest właściwa, albowiem zawiera punkt właściwy P. Przyjąwszy 2 układy spółrzędnych, z których jeden posiada jako oś x-ów prostą d, drugi zaś posiada jako oś x-ów jakąś prostą, nie przechodzącą przez punkt P, możemy powiedzieć, że punkt P w tych dwu układach nie może być przedstawiony przez te same spółrzędne: albowiem druga spółrzędna y punktu P w pierwszym z wymienionych układów jest równa 0, w drugim zaś z tych układów jest różna od 0.

Pozostaje nam więc jeszcze pytanie: czy w płaszczyźnie właściwej istnieją punkty niewłaściwe, których spółrzędne we wszystkich układach spółrzędnych tej płaszczyzny są jednakowe?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, weźmy pod uwagę zbiór Σ wszystkich układów prostokątnych spółrzędnych. Ten zbiór rozbijmy następnie na 2 zbiory $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ w sposób następujący:

1) pewien, dowolnie zresztą wybrany, układ prostokątny $\mathbf{U}$ spółrzędnych zaliczamy do zbioru $\mathbf{G}_1$;

2) każdy inny układ prostokątny $\mathbf{U}'$ spółrzędnych zaliczamy do zbioru $\mathbf{G}_1$ lub $\mathbf{G}_2$ w zależności od tego, czy zwroty dodatnie

pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów **U** i **U'**, są jednakowe, czy też przeciwne.

Jeżeli więc jakieś 2 układy prostokątne spółrzędnych należą obydwa jednocześnie albo do zbioru $\mathbf{G}_1$, albo do zbioru $\mathbf{G}_2$, to w takim razie zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki wymienionych układów, są jednakowe. Jeżeli zaś z pośród 2 układów prostokątnych spółrzędnych jeden należy do zbioru $\mathbf{G}_1$, drugi zaś do zbioru $\mathbf{G}_2$, to w takim razie zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki wymienionych układów, są przeciwne.

Weźmy teraz pod uwagę jakikolwiek układ prostokątny spółrzędnych. Ten układ należy do jednego ze zbiorów $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$, np. do zbioru $\mathbf{G}_1$. Oznaczmy ten układ literą **U**. Spółrzędne jakiegokolwiek punktu niewłaściwego P w układzie **U** oznaczmy przez $X, Y, 0$. Jeżeli teraz spółrzędne punktu P w jakimkolwiek innym układzie **U'**, należącym do tego samego zbioru $\mathbf{G}_1$, oznaczymy przez $X', Y', 0$, to w takim razie będziemy mieli proporcję [str. 288, wz. (26)]:

(1) $$X : Y = (X' \cos\alpha - Y' \sin\alpha) : (X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha).$$

Przypuśćmy, że punkt P w obydwu układach **U** i **U'** posiada takie same spółrzędne, t. zn.

(2) $$X : Y = X' : Y'.$$

Z proporcji (1) i (2) wynika wtedy:

(3) $$X : Y = (X \cos\alpha - Y \sin\alpha) : (X \sin\alpha + Y \cos\alpha).$$

Stąd zaś otrzymujemy:

$$\begin{cases} \lambda X = X \cos\alpha - Y \sin\alpha, \\ \lambda Y = X \sin\alpha + Y \cos\alpha, \end{cases}$$

czyli

(4) $$\begin{cases} X(\cos\alpha - \lambda) - Y \sin\alpha = 0, \\ X \sin\alpha + Y(\cos\alpha - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ, według założenia, trzecia spółrzędna Z punktu P jest równa 0, przeto przynajmniej jedna ze spółrzędnych X i Y jest różna od 0, z równości (4) wynika zatem

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

czyli

(5) $$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0.$$

Z równania (5) otrzymujemy na λ dwie wartości:

(6) $$\lambda = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Wstawiwszy teraz w równości (4) zamiast λ najpierw wyrażenie $\cos\alpha - i\sin\alpha$, następnie wyrażenie $\cos\alpha + i\sin\alpha$, otrzymamy 2 pary równości:

(7) $$iX\sin\alpha - Y\sin\alpha = 0, \quad X\sin\alpha + iY\sin\alpha = 0;$$

(8) $$-iX\sin\alpha - Y\sin\alpha = 0, \quad X\sin\alpha - iY\sin\alpha = 0.$$

Gdyby było $\sin\alpha = 0$, t. zn. gdyby było $\alpha = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots\ldots$, to zarówno równości (7), jak też równości (8), byłyby spełnione zawsze, t. zn. bez względu na wartości X i Y. Innemi słowy, gdyby osi odciętych, a zatem także i osi rzędnych, obydwu układów **U** i **U'** były równoległe, to wtedy każdy punkt niewłaściwy w obydwu układach **U** i **U'** posiadałby takie same spółrzędne.

Przypuśćmy teraz, że $\sin\alpha \neq 0$. Równości (7) i (8) możemy w tym przypadku podzielić przez $\sin\alpha$. Otrzymamy wtedy:

(9) $$iX - Y = 0, \quad X + iY = 0;$$

(10) $$-iX - Y = 0, \quad X - iY = 0.$$

Z każdej z pośród równości (9) wynika $X : Y = 1 : i$ z każdej zaś z pośród równości (10) wynika $X : Y = 1 : -i$.

Jeżeli więc $\sin\alpha \neq 0$, to liczby $1, i, 0$, względnie $1, -i, 0$, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go punktu, w każdym z układów **U** i **U'** przedstawiają jeden i ten sam punkt niewłaściwy, który oznaczmy np. przez J_1, względnie J_2. Lecz widzieliśmy wyżej, że w razie, gdy $\sin\alpha = 0$, każdy punkt niewłaściwy posiada w obydwu układach **U** i **U'** jednakowe spółrzędne. Możemy więc powiedzieć, że bez względu na wartość kąta α, każdy z dwu punktów niewłaściwych J_1 oraz J_2 posiada w obydwu układach **U** i **U'** jednakowe spółrzędne. Ponieważ spółrzędne $1, i, 0$ oraz $1, -i, 0$ punktów J_1 oraz J_2

w układach **U** i **U'** nie zależą również od wielkości x_0, y_0, mamy zatem:

Na prostej niewłaściwej istnieją 2 i tylko 2 punkty J_1 oraz J_2, które we wszystkich układach prostokątnych, należących do zbioru $\mathbf{G}_1$, mogą być przedstawione przez te same spółrzędne, mianowicie przez spółrzędne $1, i, 0$ oraz $1, -i, 0$.

Zobaczmy teraz, jakie spółrzędne posiadają punkty J_1 oraz J_2 w układach prostokątnych, należących do zbioru $\mathbf{G}_2$.

W razie przejścia od jakiegokolwiek układu **U**, należącego do zbioru $\mathbf{G}_1$, do jakiegokolwiek układu **U'**, należącego do zbioru $\mathbf{G}_2$, mamy proporcję [str. 289, wz. (31)]:

$$(11) \quad X' : Y' : Z' = [X\cos\alpha + Y\sin\alpha - Z(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)] : \\ : [X\sin\alpha - Y\cos\alpha - Z(x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha)] : Z.$$

Aby więc znaleść spółrzędne punktu J_1, względnie J_2, w układzie **U'**, należy we wzór (11) zamiast X, Y, Z wstawić $1, i, 0$, względnie $1, -i, 0$. Otrzymamy wtedy: $X' : Y' : Z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha) : (\sin\alpha - i\cos\alpha) : 0$, względnie $X' : Y' : Z' = (\cos\alpha - i\sin\alpha) : (\sin\alpha + i\cos\alpha) : 0$, czyli $X' : Y' : Z' = 1 : -i : 0$, względnie $X' : Y' : Z' = 1 : i : 0$.

A zatem liczby $1, i, 0$, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go, w układzie **U'** nie przedstawiają już punktu J_1, lecz punkt J_2; liczby zaś $1, -i, 0$, uważane za spółrzędne jednorodne Hesse'go, w układzie **U'** nie przedstawiają już punktu J_2, lecz punkt J_1.

Możemy więc powiedzieć, że w płaszczyźnie właściwej niema takich punktów, które we wszystkich układach spółrzędnych tej płaszczyzny posiadałyby te same spółrzędne.

Chociaż w wyniku naszych rozważań doszliśmy do wniosku, że w płaszczyźnie właściwej punkty, o jakie nam chodziło, nie istnieją, to jednak te rozważania doprowadziły nas do dwu punktów J_1 i J_2, które odgrywają w Geometrji analitycznej znaczną rolę. Dlatego też zbadamy te punkty dokładniej, poszukamy mianowicie ich spółrzędnych również w układach nieprostokątnych.

Przejdźmy w tym celu od jakiegoś układu prostokątnego $\mathbf{U}_0$ do jakiegokolwiek innego układu **U** (niekoniecznie prostokątnego). Mamy wtedy proporcję [str. 288, wz. (23)]:

(12) $X' : Y' : Z' = [X\sin\beta - Y\cos\beta - Z(x_0\sin\beta - y_0\cos\beta)] :$
$: -[X\sin\alpha - Y\cos\alpha - Z(x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha)] : [Z\sin(\beta - \alpha)]$.

Wstawmy tu zamiast X, Y, Z liczby 1, i, 0, względnie 1, $-i$, 0. Otrzymamy wtedy:

(13) $X' : Y' = (\sin\beta - i\cos\beta) : -(\sin\alpha - i\cos\alpha)$,

względnie

(14) $X' : Y' = (\sin\beta + i\cos\beta) : -(\sin\alpha + i\cos\alpha)$.

Lecz $\sin\beta - i\cos\beta = -i(\cos\beta + i\sin\beta) = -ie^{i\beta}$ (gdzie e oznacza zasadę logarytmów naturalnych oraz β oznacza miarę bezwzględną kąta β), $\sin\alpha - i\cos\alpha = -i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -ie^{i\alpha}$, $\sin\beta + i\cos\beta = i(\cos\beta - i\sin\beta) = ie^{-i\beta}$, $\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = ie^{-i\alpha}$, z proporcji zatem (13), względnie (14), wynika: $X' : Y' = -e^{i\beta} : e^{i\alpha}$, względnie $X' : Y' = e^{-i\beta} : -e^{-i\alpha}$, czyli $X' : Y' = 1 : -e^{i(\alpha-\beta)}$, względnie $X' : Y' = 1 : -e^{i(\beta-\alpha)}$.

Otrzymaliśmy więc, że: punkt, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym $\mathbf{U}_0$ są liczby 1, i, 0, w układzie $\mathbf{U}$ posiada spółrzędne 1, $-e^{i(\alpha-\beta)}$, 0; punkt zaś, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym $\mathbf{U}_0$ są liczby 1, $-i$, 0, w układzie $\mathbf{U}$ posiada spółrzędne 1, $-e^{i(\beta-\alpha)}$, 0.

Lecz:

(15) $$\left| \begin{array}{l} e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta), \\ e^{i(\beta-\alpha)} = \cos(\beta - \alpha) + i\sin(\beta - \alpha). \end{array} \right.$$

Jeżeli zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów $\mathbf{U}_0$ i $\mathbf{U}$, są jednakowe, to wtedy zachodzi równość $\beta + 2k\pi = \alpha + \omega$, gdzie ω oznacza kąt mniejszy od π, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie osi układu $\mathbf{U}$, k zaś oznacza pewną liczbę rzeczywistą całkowitą, a zatem $\cos(\alpha - \beta) = \cos(2k\pi - \omega) = \cos\omega$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin(2k\pi - \omega) = -\sin\omega$, $\cos(\beta - \alpha) = \cos\omega$, $\sin(\beta - \alpha) = \sin\omega$. Z równości (15) wynika więc wtedy:

(16) $$\left| \begin{array}{l} e^{i(\alpha-\beta)} = \cos\omega - i\sin\omega = e^{-i\omega}, \\ e^{i(\beta-\alpha)} = \cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega}. \end{array} \right.$$

Jeżeli natomiast zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów $\mathbf{U}_0$ i $\mathbf{U}$, są przeciwne, to wtedy zachodzi równość $\alpha + 2k\pi = \beta + \omega$, a zatem $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\omega - 2k\pi) = \cos\omega$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\omega - 2k\pi) = \sin\omega$, $\cos(\beta - \alpha) = \cos\omega$, $\sin(\beta - \alpha) = -\sin\omega$. Z równości (15) wynika wtedy:

$$(17) \qquad \left| \begin{array}{l} e^{i(\alpha-\beta)} = \cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega}, \\ e^{i(\beta-\alpha)} = \cos\omega - i\sin\omega = e^{-i\omega}. \end{array} \right.$$

Jeżeli więc zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U_0 i U, są jednakowe, to punkt, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, i, 0$, w układzie U posiada spółrzędne $1, -e^{-i\omega}, 0$, punkt zaś, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, -i, 0$, w układzie U posiada spółrzędne $1, -e^{i\omega}, 0$. Jeżeli natomiast zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U_0 i U, są przeciwne, to punkt, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, i, 0$, w układzie U posiada spółrzędne $1, -e^{i\omega}, 0$, punkt zaś, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, -i, 0$, w układzie U posiada spółrzędne $1, -e^{-i\omega}, 0$.

Gdybyśmy teraz od układu prostokątnego U_0 przeszli do jakiegoś układu U', to oznaczywszy kąt mniejszy od π, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie osi tego układu, przez ω', mielibyśmy analogicznie, że:

Jeżeli zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U_0 i U', są jednakowe, to punkt, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, i, 0$, w układzie U' posiada spółrzędne $1, -e^{-i\omega'}, 0$, punkt zaś, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, -i, 0$, w układzie U' posiada spółrzędne $1, -e^{i\omega'}, 0$; jeżeli natomiast zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U_0 i U', są przeciwne, to punkt, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, i, 0$, w układzie U' posiada spółrzędne $1, -e^{i\omega'}, 0$, punkt zaś, którego spółrzędnemi w układzie prostokątnym U_0 są liczby $1, -i, 0$, w układzie U' posiada spółrzędne $1, -e^{-i\omega'}, 0$.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli U i U' oznaczają 2 jakiekolwiek układy spółrzędnych, przyczem ω oznacza kąt, mniejszy od π, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie osi układu U, ω' zaś oznacza kąt, mniejszy od π, jaki tworzą z sobą zwroty dodatnie osi układu U', to punkty, których spółrzędnemi w układzie U są trójki liczb $1, -e^{-i\omega}, 0$ oraz $1, -e^{i\omega}, 0$, w układzie U' posiadają jako spółrzędne odpowiednio trójki liczb $1, -e^{-i\omega'}, 0$ oraz $1, -e^{i\omega'}, 0$, albo $1, -e^{i\omega'}, 0$ oraz $1, -e^{-i\omega'}, 0$, w zależności od tego, czy zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U i U', są jednakowe, czy też przeciwne.

W przypadku szczególnym, gdy obydwa układy U i U' są prostokątne, mamy więc, iż punkty, których spółrzędnemi w układzie U są trójki liczb $1, i, 0$ oraz $1, -i, 0$, w układzie U' posiadają jako spółrzędne odpowiednio trójki liczb $1, i, 0$ oraz $1, -i, 0$, albo $1, -i, 0$ oraz $1, i, 0$, w zależności od tego, czy zwroty dodatnie pęków promieni, których wierzchołkami są początki układów U i U', są jednakowe, czy też przeciwne.

Punkty, o których mowa w twierdzeniu ostatniem, t. zn. punkty o spółrzędnych $1, -e^{-i\omega}, 0$ oraz $1, -e^{i\omega}, 0$, gdzie ω oznacza kąt, mniejszy od π, jaki tworzą z sobą osi spółrzędnych, nazywamy punktami kołowymi płaszczyzny.

Ponieważ liczby $-e^{-i\omega} = -\cos\omega + i\sin\omega$ oraz $-e^{i\omega} = -\cos\omega - i\sin\omega$ są liczbami zespolonemi sprzężonemi, przeto punkty kołowe płaszczyzny są punktami urojonymi sprzężonymi.

Proste właściwe, przechodące przez punkty kołowe, nazywamy prostemi zerowemi.

Każda prosta właściwa rzeczywista posiada punkt niewłaściwy rzeczywisty. Ponieważ zaś każda prosta zerowa jest prostą właściwą, posiadającą punkt niewłaściwy urojony, przeto każda prosta zerowa jest prostą urojoną.

Przez każdy punkt właściwy (x_0, y_0) przechodzą 2 proste zerowe, mianowicie proste

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ 1, -e^{-i\omega}, & & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ oraz } \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ 1, -e^{i\omega}, & & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0 \\ 1, & -e^{-i\omega} \end{vmatrix} = 0 \text{ oraz } \begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0 \\ 1, & -e^{i\omega} \end{vmatrix} = 0,$$

czyli (po rozwinięciu i pomnożeniu przez — 1)

(18) $(x - x_0)\, e^{-i\omega} + y - y_0 = 0$ oraz $(x - x_0)\, e^{i\omega} + y - y_0 = 0.$

W razie układu prostokątnego równania (18) sprowadzają się do:

(19) $-(x - x_0)\, i + (y - y_0) = 0$ oraz $(x - x_0)\, i + y - y_0 = 0.$

Prosta właściwa $AX + BY + CZ = 0$ jest prostą zerową wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi albo przez punkt $(1, -e^{-i\omega}, 0)$, albo przez punkt $(1, -e^{i\omega}, 0)$, t. zn. gdy jest spełniona, albo równość $A - Be^{-i\omega} = 0$, albo równość $A - Be^{i\omega} = 0$. Wstawiwszy w równanie $AX + BY + CZ = 0$ zamiast A wyrażenie $Be^{-i\omega}$ albo $Be^{i\omega}$, otrzymamy równanie $Be^{-i\omega}X + BY + CZ = 0$ albo $Be^{i\omega}X + BY + CZ = 0$, skąd po podzieleniu przez B otrzymujemy równanie $e^{-i\omega}X + Y + \frac{C}{B}Z = 0$ albo $e^{i\omega}X + Y + \frac{C}{B}Z = 0$. Oznaczywszy więc $\frac{C}{B}$ przez C' i wprowadziwszy zamiast spółrzędnych Hesse'go spółrzędne Descartes'a, możemy powiedzieć, że równanie każdej prostej zerowej może być sprowadzone do jednej z 2 postaci: albo $e^{-i\omega}x + y + C' = 0$, albo $e^{i\omega}x + y + C' = 0$. W razie więc układu prostokątnego równanie każdej prostej zerowej może być sprowadzone do jednej z dwu postaci: albo $-ix + y + C' = 0$, albo $ix + y + C' = 0$.

Podamy teraz kilka własności prostych zerowych. Ponieważ te własności są od układu spółrzędnych niezależne, przeto możemy oprzeć się na jakimkolwiek układzie.

W celu więc uproszczenia rachunku oprzyjmy się na jakimkolwiek układzie prostokątnym spółrzędnych.

Niechaj punkty właściwe $P_1(x_1, y_1)$ oraz $P_2(x_2, y_2)$ należą do jednej i tej samej prostej zerowej. Spółrzędne tych punktów czynią wtedy zadość albo równaniu $-ix+y+C'=0$, albo równaniu $ix+y+C'=0$, t. zn. są spełnione albo równości

(20) $$-ix_1+y_1+C'=0 \text{ oraz } -ix_2+y_2+C'=0,$$

albo równości

(21) $$ix_1+y_1+C'=0 \text{ oraz } ix_2+y_2+C'=0.$$

Odjąwszy od pierwszej z pośród równości (20), względnie (21), drugą równość, otrzymamy $-i(x_1-x_2)+y_1-y_2=0$, względnie $i(x_1-x_2)+y_1-y_2=0$.

Spółrzędne punktów P_1 i P_2 spełniają więc albo równość $-i(x_1-x_2)+y_1-y_2=0$, albo równość $i(x_1-x_2)+y_1-y_2=0$, mamy zatem $y_1-y_2=\pm i(x_1-x_2)$. Stąd wynika, że $(x_1-x_2)^2+$ $+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+[\pm i(x_1-x_2)]^2=(x_1-x_2)^2-(x_1-x_2)^2=0$. Lecz $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ jest kwadratem odległości wzajemnej punktów P_1 i P_2, otrzymaliśmy więc, że *odległość wzajemna jakichkolwiek dwu punktów właściwych, należących do jednej i tej samej prostej zerowej, jest równa zeru*, czyli, innemi słowy: *długość każdego odcinka, zawartego w prostej zerowej, jest równa 0*. Stąd właśnie pochodzi nazwa prostych zerowych.

Jeżeli punkt właściwy $P(x_1, y_1)$ nie należy do prostej zerowej $-ix+y+C'=0$, względnie $ix+y+C'=0$, to kwadrat odległości tego punktu od wymienionej prostej zerowej równa się $\frac{-ix_1+y_1+C'}{(-i)^2+1}=\pm\infty$, względnie $\frac{ix_1+y_1+C'}{i^2+1}=\pm\infty$, mamy więc: *odległość punktu właściwego od jakiejkolwiek prostej zerowej, nie zawierającej tego punktu, jest nieskończenie wielka.*

Styczne kątów, jakie jakakolwiek prosta właściwa $Ax+$ $+By+C=0$ tworzy z prostą zerową $-ix+y+C'=0$, względnie $ix+y+C'=0$, są równe $\pm\frac{A+iB}{-Ai+B}=\pm\frac{i(A+iB)}{i(-Ai+B)}=$

$= \pm \dfrac{i(A+iB)}{A+iB} = \pm i$, względnie $\pm \dfrac{A-iB}{Ai+B} = \pm \dfrac{-i(A-iB)}{-i(Ai+B)} =$

$= \pm \dfrac{-i(A-iB)}{A-iB} = \pm i$, t. zn. posiadają one wartości stałe $\pm i$. *Proste zerowe możemy więc uważać za proste, które ze wszystkiemi prostemi właściwemi tworzą jednakowe kąty.*

Każdą prostą właściwą możemy uważać za równoległą do samej siebie. Czy prosta właściwa może być prostopadłą do samej siebie? Prosta właściwa $Ax+By+C=0$ jest prostopadła do samej siebie wtedy i tylko wtedy, gdy spółczynniki jej równania spełniają warunek $A^2+B^2=0$ (ponieważ według założenia, układ spółrzędnych, jakim się tu posługujemy, jest prostokątny), t. zn. gdy $A = \pm Bi$. Równanie $Ax+By+C=0$ rozpatrywanej prostej możemy więc wtedy napisać w postaci $\pm Bix+By+C=0$, czyli, po podzieleniu przez B, w postaci $\pm ix+y+\dfrac{C}{B}=0$, ta prosta jest zatem prostą zerową.

Otrzymaliśmy więc, że *prosta właściwa jest prostopadła do samej siebie wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostą zerową.*

Uwaga. Podane tu własności prostych zerowych mogą nam nasunąć pewne wątpliwości co do tego, czy punkty i proste urojone, jakie w celu ułatwienia badań geometrycznych zostały wprowadzone do Geometrji analitycznej, odpowiadają swemu przeznaczeniu. Jest bowiem rzeczą jasną, że te punkty i proste urojone o tyle tylko będą nam oddawały usługi, o ile w naszych rozważaniach będziemy mogli traktować je narówni z punktami i prostemi rzeczywistymi. Gdybyśmy mianowicie w każdem rozumowaniu musieli stale odróżniać przypadki, gdy występujące w tem rozumowaniu punkty i proste są rzeczywiste, oraz gdy są one urojone, to w takim razie wprowadzenie do Geometrji analitycznej punktów i prostych urojonych nietylko że nie ułatwiłoby nam badań geometrycznych, lecz przeciwnie, utrudniłoby je. Otóż podane tu własności prostych zerowych są tak różne od własności prostych rzeczywistych, że mimowoli może powstać obawa, iż tych punktów i prostych urojonych, jakie zostały wprowadzone do Geometrji analitycznej, traktować w naszych rozumowaniach narówni z punktami i prostemi rzeczywistymi nie można.

Aby tę obawę usunąć, zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że podane tu własności prostych zerowych, które są tak zasadniczo różne od własności prostych rzeczywistych, są wszystkie własnościami miarowemi, t. zn. własnościami, dotyczącemi pewnych liczb, jakie otrzymujemy z pomiarów (długości, kąta, i t. d.). Oprócz jednak własności miarowych istnieją t. zw. własności opisowe, t. zn. własności, wynikające z położenia figur względem siebie (a więc np. własność punktu i prostej, iż punkt należy do prostej, jest ich własnością opisową; własność 3-ech punktów, iż leżą na jednej prostej, względnie własność 3-ech prostych, iż przechodzą przez jeden punkt, jest ich własnością opisową, i t. d.). Otóż jeżeli chodzi o własności opisowe, to punkty i proste urojone zachowują się tak samo, jak punkty i proste rzeczywiste, a zatem, w razie badania tych własności, odróżnianie punktów i prostych urojonych od punktów i prostych rzeczywistych jest zbyteczne.

Bez wątpienia byłoby o wiele lepiej, gdyby punkty i proste urojone również swemi własnościami miarowemi nie różniły się tak zasadniczo od punktów i prostych rzeczywistych. Ten cel możnaby osiągnąć przez pewną modyfikację definicji własności miarowych. A więc np. kwadratowi odległości dwu punktów możnaby nadać taką definicję, z której wynikałoby, iż odległość wzajemna dwu punktów jest równa 0 tylko w tym przypadku, gdy te punkty nakrywają się; należałoby mianowicie w tym celu kwadrat odległości wzajemnej dwu punktów zdefinjować nie za pomocą wzoru

$$(22) \quad \delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega,$$

lecz za pomocą odpowiednio dobranego wzoru ogólniejszego, który tylko w przypadku szczególnym, gdy rozpatrywane punkty są rzeczywiste, sprowadzałby się do wzoru (22).

§ 68. Odległość wzajemna dwu punktów właściwych oraz kąty dwu prostych, wyrażone za pomocą punktów kołowych. — Niechaj będą dane 2 jakiekolwiek punkty właściwe P_1 (x_1, y_1) oraz P_2 (x_2, y_2). Spółrzędnemi jednorodnemi Hesse'go punktów kołowych płaszczyzny są (§ 67) trójki liczb: $1, -e^{-i\omega}, 0$ oraz $1, -e^{i\omega}, 0$. Łatwo możemy się przekonać, że kwadrat odległości wzajemnej δ punktów P_1 i P_2 można wyrazić za pomocą wzoru:

$$(1)\qquad \delta^2 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ 1, & -e^{-i\omega}, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ 1, & -e^{i\omega}, & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

Albowiem z tego wzoru wynika:

$\delta^2 = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ 1, & -e^{-i\omega} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ 1, & -e^{i\omega} \end{vmatrix}$, czyli $\delta^2 = [(x_1 - x_2) e^{-i\omega} + y_1 - y_2] [(x_1 - x_2) e^{i\omega} + y_1 - y_2]$, czyli $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(e^{-i\omega} + e^{i\omega})$, czyli $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega$, t. zn. wzór, który rzeczywiście wyraża kwadrat odległości wzajemnej punktów P_1 i P_2.

Również z łatwością moglibyśmy się przekonać, że jeżeli Θ oznacza jeden z kątów, jakie tworzą z sobą 2 proste d_1 (U_1, V_1, W_1) i d_2 (U_2, V_2, W_2), to są spełnione równości następujące [porówn. wz. (7) na str. 148, wz. (8) i (9) na str. 149, wz. (15) na str. 313, oraz Uwaga 1 na str. 315]:

$$(2)\ \operatorname{tg}\Theta = \pm i \frac{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega}) - (U_1 - V_1 e^{i\omega})(U_2 - V_2 e^{-i\omega})}{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega}) + (U_1 - V_1 e^{i\omega})(U_2 - V_2 e^{-i\omega})},$$

$$(3)\ \cos\Theta = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega}) + (U_1 - V_1 e^{i\omega})(U_2 - V_2 e^{-i\omega})}{\sqrt{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_1 - V_1 e^{i\omega}) . (U_2 - V_2 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega})}},$$

$$(4)\ \sin\Theta = + \frac{i}{2} \cdot \frac{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega}) - (U_1 - V_1 e^{i\omega})(U_2 - V_2 e^{-i\omega})}{\sqrt{(U_1 - V_1 e^{-i\omega})(U_1 - V_1 e^{i\omega}) . (U_2 - V_2 e^{-i\omega})(U_2 - V_2 e^{i\omega})}}.$$

§ 69. Twierdzenie Laguerre'a. — Niechaj będą dane jakiekolwiek 2 proste właściwe d_1 i d_2, posiadające punkt właściwy wspólny, który oznaczmy przez P. Jeden z kątów, jakie te proste tworzą z sobą, oznaczmy przez Θ. Proste zerowe, przechodzące przez punkt P, oznaczmy przez j_1 oraz j_2. Dowiedziemy, że:

$$\Theta = \pm \frac{i}{2} \log (d_1, d_2, j_1, j_2), \tag{1}$$

gdzie Θ oznacza miarę bezwzględną rozpatrywanego kąta, i oznacza $\sqrt{-1}$, symbol log oznacza logarytm naturalny, oraz symbol (d_1, d_2, j_1, j_2) oznacza dwustosunek 4-ech prostych d_1, d_2, j_1, j_2.

W tym celu weźmy pod uwagę jakikolwiek układ prostokątny spółrzędnych. Spółrzędne punktu P w tym układzie oznaczmy przez x_0, y_0. Niechaj równania

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ oraz } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \tag{2}$$

przedstawiają w tym układzie odpowiednio proste d_1 i d_2. Ponieważ punkt P należy do każdej z prostych d_1 i d_2, przeto jego spółrzędne każdemu z równań (2) czynią zadość, t. zn. mamy:

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0 \text{ oraz } A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0. \tag{3}$$

Odjąwszy teraz od równań (2) odpowiednio równości (3), otrzymamy równania:

$$A_1 (x - x_0) + B_1 (y - y_0) = 0 \text{ oraz } A_2 (x - x_0) + B_2 (y - y_0) = 0. \tag{4}$$

Za równania prostych d_1 i d_2 możemy więc uważać odpowiednio równania (4).

Proste zerowe, przechodzące przez punkt P, możemy przedstawić przez równania (§ 67): $-i(x - x_0) + y - y_0 = 0$ oraz $i(x - x_0) + y - y_0 = 0$. Rozpatrzmy 2 przypadki: najpierw przypadek, gdy równaniem prostej j_1 jest równanie $-i(x - x_0) + y - y_0 = 0$, a zatem równaniem prostej j_2 jest równanie $i(x - x_0) + y - y_0 = 0$, następnie zaś przypadek, gdy równaniem prostej j_1 jest równanie $i(x - x_0) + y - y_0 = 0$, a zatem równaniem prostej j_2 jest równanie $-i(x - x_0) + y - y_0 = 0$.

Z równań (4), przedstawiających proste d_1 i d_2, oraz z równań prostych zerowych wynika, iż w pierwszym przypadku mamy:

$$(d_1, d_2, j_1, j_2) = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & -i \\ B_1, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2, & i \\ B_2, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & i \\ B_1, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2, & -i \\ B_2, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(A_1 + B_1 i)(A_2 - B_2 i)}{(A_1 - B_1 i)(A_2 + B_2 i)} =$$

$$= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - i(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{A_1 A_2 + B_1 B_2 + i(A_1 B_2 - A_2 B_1)} = \frac{1 - i\dfrac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}}{1 + i\dfrac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}},$$

czyli

$$(d_1, d_2, j_1, j_2) = \frac{1 \mp i \operatorname{tg} \Theta}{1 \pm i \operatorname{tg} \Theta} = \frac{\cos\Theta \mp i \sin\Theta}{\cos\Theta \pm i \sin\Theta} = \frac{e^{\mp i\Theta}}{e^{\pm i\Theta}} = e^{\mp 2i\Theta}.$$

Równość $(d_1, d_2, j_1, j_2) = e^{\mp 2i\Theta}$ otrzymaliśmy w założeniu, że $A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0$ (albowiem przez wielkość $A_1 A_2 + B_1 B_2$ dzieliliśmy licznik i mianownik rozpatrywanego wyżej ułamka). Gdybyśmy założyli, że $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$, to zamiast dzielić licznik i mianownik rozpatrywanego wyżej ułamka przez $A_1 A_2 + B_1 B_2$, podzielilibyśmy je przez $A_1 B_2 - A_2 B_1$ i w końcu doszlibyśmy do tej samej równości. Gdyby zaś było zarówno $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, jak też $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$, to wtedy z jednej strony mielibyśmy, że dwustosunek (d_1, d_2, j_1, j_2) jest nieoznaczony, z drugiej zaś strony moglibyśmy powiedzieć, że kąt Θ jest nieoznaczony [albowiem z równości $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ wynikałoby, że proste d_1 i d_2 są wzajemnie równoległe, a ponieważ posiadają one, według założenia, punkt właściwy P wspólny, przeto musiałyby się nakrywać; znów z równości $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ wynikałoby, że proste d_1 i d_2 są wzajemnie prostopadłe, a zatem musiałyby one nakrywać jedną z prostych zerowych j_1 lub j_2 (str. 331); lecz styczne kątów, jakie każda z prostych zerowych j_1 i j_2 tworzy z samą sobą, są równe $\pm \frac{i - i}{i^2 + 1} = \frac{0}{0}$], obiedwie zatem strony równości $(d_1, d_2, j_1, j_2) = e^{\mp 2i\Theta}$ byłyby nieoznaczone.

A więc $(d_1, d_2, j_1, j_2) = e^{\mp 2i\Theta}$, skąd wynika $\log (d_1, d_2, j_1, j_2) = \mp 2i\Theta$, zatem $\Theta = \mp \frac{1}{2i} \log (d_1, d_2, j_1, j_2)$, czyli $\Theta = \pm \frac{i}{2} \log (d'_1, d_2, j_1, j_2)$ [porówn. wz. (1)].

W drugim przypadku mamy:

$$(d_1, d_2, j_1, j_2) = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & i \\ B_1, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_2, & -i \\ B_2, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & -i \\ B_1, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_2, & i \\ B_2, & 1 \end{vmatrix}} = e^{\pm 2i\Theta},$$

skąd wynika: $\log (d_1, d_2, j_1, j_2) = \pm 2i\Theta$, zatem $\Theta = \pm \frac{1}{2i} \log (d'_1, d_2, j_1, j_2)$, czyli $\Theta = \mp \frac{i}{2} \log (d_1, d_2, j_1, j_2)$ [porówn. wz. (1)].

Jak więc widzimy, równość (1) zachodzi zawsze.

Równość (1) wyraża **twierdzenie Laguerre'a**.

SPOSTRZEŻONE BŁĘDY.

	Wydrukowano:	Powinno być:
Str. 31, wzór (6)	$A_m A_{m+1} + A_{m+1} A_1$	$A_m A_{m+1} + A_{m+1} A_1$
„ 53, wiersz 3 od góry	2)	(2)
„ 57, „ 10 „ „	es'a	tes'a
„ 61, „ 8 „ dołu	Z, Y, X	X, Y, Z
„ 73, wzór (3)	$U_2 : U_2 : W_2$	$U_2 : V_2 : W_2$
„ 90, wiersz 6 od dołu (strona lewa)	obydu	obydwu
„ 113, wzór (26a)	$\lambda_2 . L_2 (X, Y, Z)$.	$+ \lambda_2 . L_2 (X, Y, Z)$
„ 113, „ (26b)	$\lambda_2 . M_2 (U, V, W)$	$+ \lambda_2 . M_2 (U, V, W)$
„ 143, wiersz 21 od góry	2)	(2)
„ 164, „ 10 „ „	P_2, P_2, P_3	P_1, P_2, P_3
„ 169, „ 6 „ dołu	drugim	drugiem
176, „ 4 „ góry	d_1, d_2, d_3	d_1, d_2, d
„ 178, „ 1 „ dołu	$- l_1 (x', y' 1)$	$- l_1 (x', y', 1)$
„ 185, „ 6 „ „	$l_2 (x, y, 1)$	$l_1 (x, y, 1)$
„ 188, „ 2 „ góry	$d 1'$	d_1'
„ 189, „ 9 „ dołu	$l_2 (x, y, 1($	$l_2 (x, y, 1)$
„ 189, wzór (5)	$l_1 (x, y 1)$	$l_1 (x, y, 1)$
„ 190, „ (3)	$(a_2, a_3, d_1,')$	(a_2, a_3, d_1')
192, wiersz 1 od dołu	$d_1,$	d_1
194, „ 7 od góry	kąta A_3	kąta A_2
„ 204, rys. 37	Ryc. 37	Rys. 37
„ 208, wiersz 9 od dołu	$- \sin A_1 \sin A_1 \sin A_3$	$- \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$
„ 260, rys. 44	D	D_4
„ 279, wiersz 7 od góry	X, Y, Z oraz X', Y', Z'	X, Y, Z oraz X', Y', Z'
„ „ „ 8 „ „	$y = \frac{Y}{Z}$	$y = \frac{y}{Z}$
„ „ „ „ „ „	$y' = \frac{Y'}{Z'}$	$y' = \frac{y'}{Z'}$
„ 289, wiersz 5 od góry	całkowitą	rzeczywistą całkowitą
„ 290, „ 12 „ dołu	Descartes'a;	Descartes'a:
„ 294, „ 6 „ góry	X, Y, Z	x, y
„ 298, „ 12 „ dołu (strona prawa)	$V y''$	$y V''$
„ 300, wiersz 9 od dołu	$y = \frac{Y}{Z}$	$y = \frac{y}{Z}$
„ 303, „ 8 „ „ (strona lewa)	(11 b)	(11 a)
„ „ wiersz 5 od dołu (strona lewa)	(12)	(12 a)
„ 319, wiersz 2 od dołu	, więc	więc,
„ 320, „ 4 „ góry	, oraz	oraz
„ 333, wzór (4)	$\sin \Theta = +$	$\sin \Theta = \pm$