O METODZIE TELEOLOGICZNEJ

HOENE-WROŃSKIEGO

ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

Osobne odbicie z XIX. Tomu Rozpr. i Spraw. Wydz. matem.-przyr. Akad. Umiejętn.

KRAKÓW.
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem A. M. Kosterkiewicza.
1889.

O metodzie teleologicznej
Hoene-Wrońskiego
rozwiązywania równań algebraicznych.

Przez

S. Dicksteina.

W artykule „O niektórych własnościach funkcyj alef,“ [1]) podałem spostrzeżenie, że metoda Fürstenaua rozwiązywania równań algebraicznych stopni wyższych jest w gruncie rzeczy identyczną z wcześniejszą o lat kilkadziesiąt metodą rozwiązywania, zwaną przez Wrońskiego teleologiczną.

W pracy niniejszej zamierzam metodę tę przedstawić, spostrzeżenie powyższe uzasadnić i zarazem wykazać stosunek metody Wrońskiego do metod analogicznych jego poprzedników i następców.

1. Z pomiędzy wielu metod rozwiązywania równań, metoda teleologiczna wyróżnia się tem, że jest niejako pośrednią pomiędzy metodami liczebnego i algebraicznego ich rozwiązywania. Z metodami pierwszemi ma tę cechę wspólną,

---

[1]) Pam. Akad. Um. Tom XII, str. 40.

że daje sposoby otrzymywania przybliżonych wartości pierwiastków; do metod zaś drugich zbliża się przez to, że daje dla pierwiastków wyrażenia w funkcyi współczynników równania. Wyrażenia te mają postać stosunku wyznaczników nieskończonych o zupełnie oznaczonym sposobie tworzenia.

Z odmiennego nieco punktu widzenia, można metodę teleologiczną uważać za metodę rozkładu wielomianów na czynniki, co ją wiąże z odpowiedniemi badaniami Eulera, Lagrangea i Gaussa. Oprócz tego, metoda teleologiczna pozostaje w ścisłym związku z teoryją szeregów zwrotnych, która jej dała początek oraz z teoryją funkcyj alef.[1]) Dodam jeszcze, że metoda teleologiczna może być podniesioną na stanowisko ogólniejsze przez uogólnienie funkcyj alef, jak to będzie okazanem w ostatnim ustępie pracy niniejszej.

2. Za twórcę metody teleologicznej rozwiązywania równań uważać należy Daniela Bernouilliego, który w rozprawie: „*Observationes de seriebus recurrentibus*" [2]) pierwszy podał nowy sposób obliczania pierwiastków równania, polegający na własności szeregów zwrotnych. Jeżeli danem jest równanie

$$1 = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots .$$

to Bernouilli tworzy szereg zwrotny, który ma tyle dowolnych początkowych wyrazów, jaki jest stopień równania, a którego każdy następujący wyraz E powstaje z poprzedzających..... A, B, C, D według prawidła

$$E = aD + bC + cB + dA + \ldots .$$

Jezeli M z N są dwa dostatecznie odległe wyrazy sze-

---

[1]) Własności funkcyj alef wyłożyłem w artykułach ogłoszonych w XII i XVI tomie Pamiętnika Akad. Umiejętności (1886, 1888).

[2]) Commentarii Academiae Petropolitanae, III, pag. 85—100. rok 1732.

regu, to iloraz $\frac{M}{N}$ wyraża przybliżoną wartość najmniejszego pierwiastka równania danego. Ten sam sposób, zastosowany do równania, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania danego, doprowadza z łatwością do przybliżonej wartości pierwiastka największego.

W dalszym ciągu swej rozprawy Bernouilli czyni uwagę, że metoda jego daje się zastosować i do innych pierwiastków, gdy znane są pierwsze ich przybliżenia, zastanawia się nad przypadkiem pierwiastków urojonych, którego jednak zadawalająco nie rozstrzyga, podaje zastosowanie swojej metody do wyciągania pierwiastków stopni wyższych z liczb; zaznacza wreszcie, że sposób przez niego podany daje się stosować i do równań literalnych, co na przykładzie objaśnia. Rozprawę Bernouilliego, mimo odmiennego zdania Wrońskiego, [1]) uważać musimy, jako zawierającą w sobie pomysły do wszystkich późniejszych ulepszeń i uogólnień w metodzie teleologicznej.

3. Euler [2]) wprowadził do powyższej metody ulepszenie przez uważanie szeregu zwrotnego, służącego do otrzymywania pierwiastków równania, jako utworzonego z ułamku, którego licznik jest wielomianem stopnia o jedność niższego od stopnia równania, mianownik zaś jest pierwszą stroną równania, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania badanego. Ale najważniejszy postęp w pracy Eulera stanowi bliższe zbadanie przypadku pierwiastków urojonych. Jeżeli mianowicie największy (lub najmniejszy) pierwiastek jest rzeczywisty, to do otrzymania tego pier-

---

[1]) Por. Résolution générale des équations de tous les degrés, str. 50, 52.

[2]) Introductio in analysin infinitorum, 1748. Cytujemy według najnowszego przekładu niemieckiego Masera, 1885, strona 273—292.

wiastka, można zawsze stosować metodę Bernouilliego, bez względu na to, czy pomiędzy następnemi pierwiastkami są urojone lub ich nie ma; gdy wszakże iloczyn dwóch pierwiastków urojonych sprzężonych jest większy (lub mniejszy) od kwadratu każdego z pierwiastków rzeczywistych, to szereg zwrotny Bernouilliego, jak to wykazuje Euler, nie doprowadza do żadnego rezultatu. W tym przypadku daje się wszakże wyznaczyć wielomian drugiego stopnia, będący czynnikiem równania danego. Jeżeli mianowicie Q, R, S, T są cztery kolejne, dostatecznie odległe współczynniki szeregu zwrotnego, jaki otrzymujemy z ułamku tworzącego, to czynnikiem stopnia drugiego będzie trójmian:

$$x^2 - \frac{RS-QT}{R^2-QS}x + \frac{S^2-RT}{R^2-QS},$$

który, przyrównany do zera, daje dwa pierwiastki urojone, sprzężone równania danego. Zobaczymy niżej, że trójmian ten daje nie tylko pierwiastki urojone, ale stosować się może i do przypadku dwóch pierwiastków rzeczywistych.

Euler pokazuje, że przypadek pierwiastków równych jakkolwiek teoretycznie podpada pod metodę Bernouilliego, do obliczania wszakże pierwiastków równych użyć się nie daje. Można atoli, gdy idzie o obliczanie pierwiastków równań liczebnych, uwolnić się znanym sposobem od pierwiastków równych i sprowadzić równanie do innego, posiadającego pierwiastki różne. [1])

---

[1]) Jan Śniadecki w „Rachunku algebraicznym teoryi przystosowanej do linij krzywych (Kraków 1783), Tom I, §. XXXVIII str. 197—199, podał za Eulerem metodę Bernouilliego, pominął jednak badanie dotyczące pierwiastków urojonych.

4. Lagrange w znakomitem dziele: „*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*“ [1]), poświęca całą notę V-ą wykładowi metod Bernouilliego i Eulera. Różnica w przedstawieniu Lagrangeowskiem polega na wprowadzeniu szeregów zwrotnych, których współczynniki są sumami jednakowych potęg pierwiastków równania, a które to szeregi otrzymują się z ułamku tworzącego, mającego za mianownik stronę pierwszą równania danego, za licznik zaś jej pochodną. Rozwijając taki ułamek według ujemnych potęg zmiennej, otrzymuje Lagrange, jako współczynniki rozwinięć, sumy jednakowych dodatnich potęg pierwiastków równania. Jeżeli dwa kolejne takie współczynniki są:

$$T = x_1^{\mu} + x_2^{\mu} + \dots + x_m^{\mu}; \quad U = x_1^{\mu+1} + x_2^{\mu+1} + \dots + x_m^{\mu+1}$$

i jeżeli x_1 jest największym z pierwiastków rzeczywistych i nierównych, to stosunek $\frac{U}{T}$ wyraża przybliżoną wartość pierwiastka x_1, i to z tem większem przybliżeniem, im bardziej odległe brać będziemy współczynniki. Rozwijając zaś powyższy ułamek, tworzący według dodatnich potęg zmiennej, otrzymujemy jako współczynniki rozwinięć sumy jednakowych ujemnych potęg pierwiastków, i podobnym sposobem dochodzimy do oznaczenia pierwiastka najmniejszego. W nocie XI-ej tego samego dzieła, zestawia Lagrange metodę Bernouilliego ze znaną metodą Newtona przybliżonego obliczania pierwiastków i otrzymuje ciekawe wyrażenie pierwiastka najmniejszego i całkowitej jego potęgi, mogące służyć do obliczania pierwiastków i będące zarazem wyrażeniem pierwiastka w funkcyi współczynników, a więc wyrażeniem teleologicznem, według terminologii Wrońskiego. [2])

---

[1]) Piewsze wydanie z r. 1798. Cytujemy według trzeciego (Poinsota) z roku 1826.

[2]) Legendre w „Théorie de nombres“ i Cauchy w „Cours d'analyse algébrique“ wykładają metodę Bernouilliego, nie dodając do niej nic nowego.

5. Wroński starał się nadać metodzie teleologicznej cechę zupełnej ogólności przez uważanie jej za metodę rozkładu wielomianów na czynniki stopnia niższego od stopnia równania danego. Już w r. 1827 [1]) ogłosił on szkic swej metody w zastosowaniu do równań stopnia 5-go, ale dopiero w 1847 w dziele p. t. „*Résolution générale des équations algébriques de tous les degrés*“ [2]), przedstawił metodę teleologiczną w zupełnem rozwinięciu (bez podania dowodu wzorów zasadniczych) dla równań wszelkiego stopnia. U Wrońskiego, jak i u Lagrangea, odegrywają główną rolę funkcyje symetryczne pierwiastków, lecz już nie sumy jednakowych potęg pierwiastków, tylko funkcyje alef, z upodobaniem stosowane przez Wrońskiego w rozmaitych poszukiwaniach. Prócz wszakże funkcyj alef, których własności przedstawiłem w wyżej cytowanych artykułach, a które Wroński nazywa pojedynczemi, wprowadza on funkcyje alef złożone różnych rzędów. Przed przedstawieniem przeto metody Wrońskiego, winienem poświęcić słów kilka wykładowi sposobu powstawania tych nowych funkcyj.

Jeżeli szereg

$$\aleph_1, \aleph_2 \ldots\ldots \aleph_{k-1}, \aleph_k, \aleph_{k+1}, \aleph_{k+2}, \ldots\ldots \aleph_{k+\alpha}, \aleph_{k+\alpha+1}, \ldots\ldots$$

przedstawia funkcyje alef pojedyncze, odnoszące się do równania algebraicznego, stopnia m-go:

$$1)\quad x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} \ldots + (-1)^m A_m = 0,$$

to funkcyje alef złożone 1-go rzędu, określa Wroński za pomocą następującego wzoru: [3])

---

[1]) Canons de logarithmes de H. W. Paryż, str. 59—64.

[2]) Dzieło to stanowi tom III większej całości, p. t.: „Réforme absolue et par conséquent finale du savoir humain.“ I w tomie II-gim ostatniego dzieła stronnice LXX—LXXX, poświęcone są metodzie teleologicznej.

[3]) Podajemy znakowanie Wrońskiego, nieco tylko zmienione.

$$\aleph_{k,\alpha} = \aleph_k \aleph_{k+\alpha} - \aleph_{k-1} \aleph_{k+\alpha+1}. \qquad 2)$$

Funkcyje alef złożone 2go rzędu, powstają z funkcyj alef 1go rzędu, według prawidła:

$$\aleph_{k,(\alpha_1,\alpha_2),\beta} = \aleph_{k,\alpha_1} \aleph_{k+\beta,\alpha_2} - \aleph_{k-1,\alpha_1} \aleph_{k+\beta+1,\alpha_2} \qquad 3)$$

Funkcyje alef złożone 3go rzędu powstają z funkcyj 2go rzędu przy pomocy wzoru:

$$\aleph_{k,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),(\beta_1,\beta_2),\gamma} = \aleph_{k,(\alpha_1,\alpha_2),\beta_1} \aleph_{k+\gamma,(\alpha_3,\alpha_4),\beta_2}$$
$$- \aleph_{k-1,(\alpha_1,\alpha_2),\beta_1} \aleph_{k+\gamma+1,(\alpha_3,\alpha_4),\beta_2} \qquad 4)$$

gdzie α, α_1, α_2, ... β_1, β_2, γ są dowolnemi liczbami całkowitemi, dodatniemi lub ujemnemi, (nie wyłączając zera). W tenże sam sposób z funkcyj alef złożonych 3go rzędu otrzymamy funkcyje rzędu 4go, i w ogóle funkcyje rzędu n-go z funkcyj rzędu $(n-1)$-go.

Oznaczmy kolejne funkcyje alef pojedyncze, począwszy od $(k-1)$ej, dla skrócenia, w ten sposób:

$$\aleph_{k-1} = P,\ \aleph_k = Q,\ \aleph_{k+1} = R.\ \aleph_{k+2} = S,\ \aleph_{k+3} = T,$$
$$\aleph_{k+4} = U,\ \aleph_{k+5} = V,\ \aleph_{k+6} = W.$$

Przy pomocy wzorów 2) i 3) otrzymujemy z łatwością następujące wyrażenia funkcyj alef złożonych 1go i 2go rzędu:

$$\aleph_{k,0} = Q^2 - PR,\ \aleph_{k+1,0} = R^2 - QS,\ \aleph_{k+2,0} = S^2 - RT;$$
$$\aleph_{k,1} = QR - PS,\ \aleph_{k+1,1} = RS - QT,\ \aleph_{k+1,2} = ST - RU;$$
$$\aleph_{k,2} = QS - PT,\ \aleph_{k+1,2} = RT - QU,\ \aleph_{k+2,2} = SU - RV;$$
$$\aleph_{k,3} = QT - PU,\ \aleph_{k+1,3} = RU - QV,\ \aleph_{k+2,3} = SV - RW.$$

$$\aleph_{k+2,(0,1),-1} = (S^2 - RT)(RS - QT) - (R^2 - QS)(ST - RU);$$
$$\aleph_{k+2,(0,2),-1} = (S^2 - RT)(RT - QU) - (R^2 - QS)(SU - RV);$$

$$\aleph_{k+2,(0,3),-1} = (S^2-RT)(RU-QV)-(R^2-QS)(SU-RW);$$
$$\aleph_{k,(0,0),0} = (R^2-QS)(R^2-QS)-(Q^2-PR)(S^2-RT).$$

Drugie strony wszystkich powyższych równości dają się przedstawić w postaci wyznaczników, których elementami są funkcyje alef pojedyńcze; w szczególności cztery ostatnie funkcyje alef 2go rzędu, które oznaczmy dla krótkości przez Φ, ψ, χ i K, dają się przedstawić w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = R\begin{vmatrix} S, & R, & Q \\ T, & S, & R \\ U, & T, & S \end{vmatrix}, \quad \psi = R\begin{vmatrix} T, & R, & Q \\ U, & S, & R \\ V, & T, & S \end{vmatrix}, \\ \chi = R\begin{vmatrix} U, & R, & Q \\ V, & S, & R \\ W, & T, & S \end{vmatrix}, \quad K = R\begin{vmatrix} R, & Q, & P \\ S, & R, & Q \\ T, & S, & R \end{vmatrix}. \end{array}\right\} \quad \text{a)}$$

Do podobnej formy sprowadzić się dają funkcyje alef złożone rzędu 3go, 4go i wyższych. Można też funkcyje alef złożone przedstawić wprost w postaci wyznaczników, których elementami są współczynniki równania. [1]) Okażemy tę własność dla funkcyj alef złożonych pierwszego rzędu, określonych równaniem 2). Przedstawmy w postaci wyznaczników funkcyje alef pojedyńcze, znajdujące się po drugiej stronie tego równania:

$$\aleph_k = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & \dots & A_{k-1}, & A_k \\ 1, & A_1, & \dots & A_{k-2}, & A_{k-1} \\ 0, & 1 & \dots & A_{k-3}, & A_{k-2} \\ & & & & \\ 0, & 0 & \dots & 1, & A_1 \end{vmatrix}, \quad \aleph_{k-1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{k-2}, & A_{k-1} \\ 1, & A_1 & \dots & A_{k-3}, & A_{k-2} \\ 0, & 1 & \dots & A_{k-4}, & A_{k-3} \\ & & & & \\ 0, & 0 & \dots & 1, & A_1 \end{vmatrix}$$

---

[1]) Porówn. Fürstenau. Darstellung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten. Marburg, 1860, str. 9—11.

$$\aleph_{k+\alpha} = \begin{vmatrix} A_1, A_2 \dots A_{k+\alpha-1}, A_{k+\alpha} \\ 1, A_1 \dots A_{k+\alpha-2}, A_{k+\alpha-1} \\ 0, 1 \dots A_{k+\alpha-3}, A_{k+\alpha-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0 \dots 1 \quad A_1 \end{vmatrix} \quad \aleph_{k+\alpha+1} = \begin{vmatrix} A_1, A_2 \dots A_{k+\alpha-1} A_{k+\alpha+1} \\ 1, A_1 \dots A_{k+\alpha-1} A_{k+\alpha} \\ 0, 1 \dots A_{k+\alpha-2} A_{k+\alpha-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0 \dots 1, \quad A_1 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik $\aleph_k$ rozłóżmy według elementów pierwszej kolumny, wyznacznik zaś $\aleph_{k+\alpha}$, który jest stopnia $(k+\alpha)$-go, przedstawmy jako wyznacznik stopnia $(k+\alpha+1)$-go, dodając kolumnę $1, 0, 0 \dots 0$ jako pierwszą, i wiersz $1, A_2, A_3 \dots A_{k+\alpha}, A_{k+\alpha+1}$, jako pierwszy. Wykonywając następnie mnożenie i redukcyję, otrzymujemy z łatwością:

$$\aleph_{k+\alpha} = - \begin{vmatrix} \aleph'_{k-1}, & A_2, A_3 \dots A_k, \dots & A_{k+\alpha+1} \\ \aleph_{k-1}, & A_1, A_2 \dots A_{k-1}, \dots & A_{k+\alpha} \\ 0, & 1, A_1 \dots A_{k-2}, \dots & A_{k+\alpha-1} \\ & & \\ 0, & 0, \dots A_1 \dots & \\ 0, & 0, \dots 1 \dots & \\ 0, & 0, \dots A_1 & \end{vmatrix}$$

gdzie $\aleph'_{k-1}$ jest minorem wyznacznika $\aleph_k$ powstałym po odrzuceniu pierwszej kolumny i drugiego wiersza. Jeżeli teraz od elementów pierwszej kolumny otrzymanego wyznacznika $\aleph_{k,\alpha}$ odejmiemy odpowiednie elementy następnych $(k-1)$ kolumn, pomnożone przez kolejne minory wyznacznika $\aleph_k$ lub $\aleph'_{k-1}$, rozłożonego według elementów pierwszego wiersza, to wszystkie elementy pierwszej kolumny staną się zerami, z wyjątkiem elementu w wierszu $(k+1)$-ym od góry, lub $(\alpha+1)$-ym od dołu, który będzie równy $(-1)^{k-1}$. Wynika ztąd bezpośrednio, że funkcyja alef 2-go rzędu $\aleph_{k,\alpha}$ jest minorem rzędu 1go wyznacznika, przedstawiającego funkcyję alef pojedynczą $\aleph_{k+\alpha+1}$, otrzymującym się przez odrzucenie pierwszej kolumny i wiersza $(\alpha+1)$-go od dołu, lub, co na jedno wychodzi, przez odrzucenie kolumny $(\alpha+1)$-ej i ostatniego wiersza.

Stosując ten sam sposób rozkładu do funkcyj alef 2-go rzędu, określonych wzorem 3), okazaćby można, że powstają one z funkcyj 1-go rzędu, przez opuszczenie jednego wiersza i jednej kolumny, a więc, że są minorami 2-go rzędu odpowiednich wyznaczników, przedstawiających funkcyje alef pojedyncze. Funkcyje alef złożone 3go rzędu, będą minorami 3-go rzędu wyznaczników, przedstawiających funkcyje alef pojedyncze i td., jednem słowem teoryja funkcyj alef złożonych Wrońskiego jest, jak widzimy, identyczną z teoryją minorów wyrażeń wyznacznikowych, przedstawiających funkcyje alef pojedyncze. Można też funkcyje alef złożone wyrazić jako funkcyje pierwiastków równania. Nie przeprowadzając tego przekształcenia, powiemy tylko, że funkcyje alef złożone, równie jak i pojedyncze, wyrazić się dają jako ilorazy dwóch alternantów, których elementami są potęgi pierwiastków równania. [1])

W powyższych wzorach 2), 3), 4), uważaliśmy skaźnik k jako dodatni; wzory te wszakże stosują się i do ujemnych wartości skaźnika; otrzymujemy wtedy funkcyje alef złożone różnych rzędów o skaźniku ujemnym, mające własności zupełnie analogiczne z własnościami funkcyj alef złożonych o skaźniku dodatnim. Jedne i drugie funkcyje mają zastosowanie w metodzie Wrońskiego, do wykładu której przystępujemy:

Danem jest równanie 1), którego pierwiastki oznaczyć mamy. Tworzymy szereg funkcyj alef pojedynczych o skaźniku dodatnim i badamy, czy stosunek kolejnych funkcyj dąży do granicy oznaczonej. Jeżeli tak jest, to tworzymy równanie stopnia $(m-1)$go:

$$5)\qquad x^{m-1} - P_2\, x^{m-2} + P_3\, x^{m-3} \ldots . + (-1)^{m-1} P_m = 0,$$

---

[1]) Porówn. art. „O twierdzeniu Crocchiego,“ Pam. Akad. Um. T. XIV.

którego współczynniki maja wartości wyrażone wzorem:

$$P_\mu \aleph_k = A_\mu \aleph_{k-1} - A_{\mu+1} \aleph_{k-2} + A_{\mu+2} \aleph_{k-3} + \dots + (-1)^{m+\mu} A_\mu \aleph_{k-(m-\mu+1)} \qquad 6)$$

lub wzorem

$$P_\mu \aleph_k = A_{\mu-1} \aleph_k - A_{\mu-2} \aleph_{k+1} + A_{\mu-3} \aleph_{k+2} + \dots + (-1)^{\mu+1} A_0 \aleph_{x+\mu-1}$$
$$\mu = 2, 3 \dots m; \; A_0 = 1. \qquad 6')$$

Przejście od wzoru 6) do wzoru 6′) uskutecznia się z łatwością przy pomocy wzoru zasadniczego dla funkcyj alef.[1]) We wzorach 6) i 6′) należy uważać k za liczbę nieskończenie wielką, w zastosowaniu zaś do przybliżonego obliczania pierwiastków za liczbę skończoną, dostatecznie wielką. Jeżeli stosunek funkcyj alef pojedyńczych nie o skaźniku dodatnim, lecz o skaźniku ujemnym, dąży do granicy oznaczonej, w takim razie w równaniu 5) współczynniki P_μ mają wartości oznaczyć się dające z wzorów 6), 6′), w których liczbę k należy uważać za ujemną. Równanie 5) przedstawia tym sposobem dwa równania: jedno odpowiada skaźnikom dodatnim, drugie skaźnikom ujemnym funkcyj alef.

W jednym i drugim przypadku, równanie 5) jest czynnikiem stopnia $(m-1)$-go równania 1) i zawiera $m-1$ pierwiastków tegoż; pozostały pierwiastek równania danego znajdziemy, tworząc czynnik dopełniający stopnia 1go, który jak łatwo widzieć, będzie miał postać:

$$x - \frac{\aleph_{k+1}}{\aleph_k} = 0. \qquad 5a)$$

Jeżeli stosunek kolejnych funkcyj alef pojedynczych, czy to ze skaźnikiem dodatnim czy z ujemnym,

[1]) Porówn. „O niektórych własnościach funkcyj alef.“ Pam. Akad. Um. T. XII. str. 37.

nie dąży do granicy oznaczonej, to równanie 5) przestaje być czynnikiem równania 1), i wtedy przejść musimy do czynnika stopnia niższego. Przejście to dokonywa WROŃSKI, powiększając o jedność skaźniki we współczynikach równania 5), od tak zmienionego równania odejmując pierwotne i dzieląc następnie obie strony przez współczynnik przy niewiadomej w stopniu $(m-2)$-ym. Tym sposobem dochodzi do równania:

7) $$x^{m-2} - Q_3 x^{m-3} + Q_4 x^{m-4} \ldots + (-1)^{m-2} Q_m,$$

którego współczynniki otrzymują się z wzoru:

8) $$Q_\mu \aleph_{k+1,0} = A_\mu \aleph_{k,0} - A_{\mu+1} \aleph_{k-1,1} + A_{\mu+2} \aleph_{k-2,1} - \ldots + (-1)^{m-\mu} A_m \aleph_{k-(m-\mu),\, m-\mu}$$

lub z wzoru:

8′) $$Q_\mu \aleph_{k+1,0} = A_{\mu-2} \aleph_{k+1,0} - A_{\mu-3} \aleph_{k+1,1} + A_{\mu-4} \aleph_{k+1,2} - \ldots + (-1)^\mu A_0 \aleph_{k+1,\, m-\mu}$$

$$\mu = 3, 4, \ldots m; \quad A_0 = 1,$$

w których po drugich stronach znajdują się funkcyje alef złożone 1go rzędu, określone równaniem 2). Równanie 7) będzie czynnikiem $(m-2)$-go stopnia równania 1) tylko w takim przypadku, jeżeli stosunek funkcyj alef złożonych 1go rzędu, a mianowicie stosunek $\dfrac{\aleph_{k,\alpha}}{\aleph_{k-1,\alpha}}$ dąży do granicy oznaczonej; gdy w ogóle począwszy od wartości k dostatecznie wielkiej, jest:

$$\frac{\aleph_{k,\alpha_1}}{\aleph_{k-1,\alpha_1}} = \frac{\aleph_{k+\beta+1,\alpha_2}}{\aleph_{k+\beta_1\alpha_2}}$$

Może to mieć miejsce dla funkcyj alef o skaźniku dodatnim lub dla funkcyj o skaźniku ujemnym. W jednym lub drugim przypadku równanie 7) zawiera $m-2$ pierwiastków równania 1); pozostałe zaś dwa pierwiastki zawiera czynnik dopełniający, który, jak łatwo widzieć, będzie miał postać:

$$x^2 - \frac{\aleph_{k+1,1}}{\aleph_{k+1,0}}\, x + \frac{\aleph_{k+2,0}}{\aleph_{k+1,0}} = 0, \qquad 7a)$$

albo używając oznaczeń skróconych,

$$x^2 - \frac{RS-QT}{R^2-QS}\, x + \frac{S^2-RT}{R^2-QS} = 0, \qquad 7)$$

a więc postać zupełnie zgodną z równaniem Eulera.

W razie, jeżeli stosunek funkcyj alef 1-go rzędu, czy to o skażniku dodatnim czy o ujemnym, nie dąży do granicy oznaczonej, równanie 7) przestaje być czynnikiem równania 1) i należy przejść do czynnika stopnia niższego. Przejście to uskutecznia się w zupełnie ten sam sposób, w jaki od równania 5) przeszliśmy do równania 7). Powiększamy w równaniu 7) skaźniki we współczynnikach o jedność, od tak zmienionego równania odejmujemy pierwotne; dzieląc następnie obie strony przez współczynnik przy niewiadomej w potędze $(m-3)$ej, otrzymujemy równanie stopnia $(m-3)$-go:

$$x^{m-3} - R_4\, x^{m-4} + R_5\, x^{m-5} \ldots + (-1)^{m-3} R_m = 0, \qquad 9)$$

którego współczynniki otrzymać można z wzoru:

$$R_\mu\, \aleph_{k+2,(0,1),-1} = A_\mu\, \aleph_{k+1,(0,0),0} - A_{\mu+1}\, \aleph_{k,(1,0),1}$$
$$+ A_{\mu+2}\, \aleph_{k-1,(2,0),2} - \ldots + (-1)^{m+\mu} A_m\, \aleph_{k-(m-\mu-1)(m-\mu,0),m-\mu} \qquad 10)$$

lub z wzoru:

$$R_\mu\, \aleph_{k+2,(0,1),-1} = A_{\mu-3}\, \aleph_{k+2,(0,1),-1} - A_{\mu-4}\, \aleph_{k+2,(0,2),-1}$$
$$+ A_{\mu-5}\, \aleph_{k+2,(0,3),-1} - \ldots + (-1)^{\mu+1} A_0\, \aleph_{k+2,(0,\mu-2),-1}$$
$$\mu = 4, 5, \ldots m;\ A_0 = 1. \qquad 10')$$

Równanie 9) zawierać będzie $m-3$ pierwiastków równania danego, jeżeli stosunek funkcyj alef złożonych rzędu 2go, czy to o skaźniku dodatnim czy o ujemnym, dąży do granicy oznaczonej, tj. gdy począwszy od wartości k dostatecznie wielkiej, jest:

$$\frac{\aleph_{k,(\alpha_1,\alpha_2)\beta_1}}{\aleph_{k-1,(\alpha_1,\alpha_2)\beta_1}} = \frac{\aleph_{k+\gamma+1(\alpha_3,\alpha_4),\beta_2}}{\aleph_{k+\gamma(\alpha_3,\alpha_4),\beta_2}}$$

gdzie liczby całkowite α i β są zupełnie dowolne. Pozostałe trzy pierwiastki równania zawierać będzie czynnik dopełniający trzeciego stopnia, który, jak łatwo otrzymać można, będzie postaci:

9a) $$x^3 - C_1 x^2 + C_2 x - C_3 = 0$$

gdzie

$$C_1 = \frac{\aleph_{k,(0,2),-1}}{\aleph_{k,(0,1),-1}} = \frac{\aleph_{k+2,(0,2),-1}}{\aleph_{k+2,(0,1),-1}}$$

$$C_2 = \left[\frac{\aleph_{k,(0,2),-1}}{\aleph_{k,(0,1),-1}}\right]^2 - \frac{\aleph_{k,(0,3),-1}}{\aleph_{k,(0,1),-1}} = \left[\frac{\aleph_{k+2,(0,2),-1}}{\aleph_{k+2,(0,1),-1}}\right]^2 - \frac{\aleph_{k+2,(0,3),-1}}{\aleph_{k+2,(0,1),-1}}$$

$$C_3 = \frac{\aleph_{k,(0,1),-1}}{\aleph_{k-1(0,0),0}} = \frac{\aleph_{k+2,(0,1),-1}}{\aleph_{k+1(0,0),-0}}$$

Wprowadzając oznaczenia skrócone, wyżej użyte, możemy równanie 9a) napisać pod postacią:

9b) $$x^3 - \frac{\psi}{\Phi} x^2 + \left\{\left(\frac{\psi}{\Phi}\right)^2 - \frac{\chi}{\Phi}\right\} x - \frac{\Phi}{K} = 0$$

Możemy wreszcie wyrazić współczynniki C_1, C_2, C_3 pod postacią wyznaczników i równaniu 9a) nadać formę:

$$x^3 - \frac{\begin{vmatrix} T, & R, & Q \\ U, & S, & R \\ V, & T, & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S, & R, & Q \\ T, & S, & R \\ U, & T, & S \end{vmatrix}} x^2 + \frac{\begin{vmatrix} T, & S, & Q \\ U, & T, & R \\ V, & U, & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S, & R, & Q \\ T, & S, & R \\ U, & T, & S \end{vmatrix}} x - \frac{\begin{vmatrix} T, & S, & R \\ U, & T, & S \\ V, & U, & T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S, & R, & Q \\ T, & S, & R \\ U, & T, & S \end{vmatrix}} = 0$$

Współczynniki C_1 i C_3 sprowadzają się do formy wyznacznikowej na zasadzie wzorów a); co się zaś tyczy współczynnika $C_2 = \left(\frac{\psi}{\Phi}\right)^2 - \frac{\chi}{\Phi}$, to sprowadzamy go do formy żądanej, zastępując w wyrażeniu wyznacznikowem χ elementy pierwszej kolumny U, V, W ich wartościami

$$U = C_1\, T - C_2\, S + C_3\, R$$
$$V = C_1\, U - C_2\, T + C_3\, S$$
$$W = C_1\, V - C_2\, U + C_3\, T$$

i wykonywając redukcyję.

Gdy jednak stosunek funkcyj alef złożonych drugiego rzędu, czy to o skaźniku dodatnim czy o ujemnym, nie dąży do granicy oznaczonej, to przejść znowu musimy od równania 9) do równania stopnia niższego sposobem wyżej opisanym. Otrzymujemy tym sposobem czynnik stopnia $(m-4)$ i dopełniający stopnia 4-go, dalej czynnik stopnia $(m-5)$-go i dopełniający stopnia 5go. Postępowanie to prowadzić należy, oczywiście, najdalej do stopnia równego $\frac{m}{2}$ lub $\frac{m+1}{2}$.

Jeżeli w ogóle:

$$x^{m-n} - B_{n+1}\, x^{m-n-1} + B_{n+2}\, x^{m-n-2} \ldots + (-1)^{m-n} B_m$$

przedstawia czynnik stopnia $(m-n)$-go, równania 1), czynnik, który Wroński nazywa głównym, to odpowiedni czynnik dopełniający stopnia n-go:

$$x^n - C_1\, x^{n-1} + C_2\, x^{n-2} \ldots + (-1)^n C_n$$

wyznacza się z łatwością przy pomocy związków:

$$C_1 = A_1 - B_{n+1}$$
$$C_2 = A_2 - C_1\, B_{n+1} - B_{n+2}$$
$$C_3 = A_3 - C_2\, B_{n+1} - C_1\, B_{n+2} - B_{n+3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n-1} = A_{n-1} - C_{n-2}\, B_{n+1} - C_{n-3}\, B_{n+2} \ldots - B_{2n-1}$$
$$C_n = \frac{A_n}{B_m}$$

Zdaje się, że wielce niedogodne znakowanie funkcyj alef złożonych wyższych rzędów było główną przeszkodą, dla której Wroński nie podał wyrażenia czynnika stopnia n-go niezależnie od czynnika głównego. Wyrażenie to podamy niżej, w ustępie 8-ym.

Tak się przedstawia co do swej istoty metoda teleologiczna, którą, w bardzo szczegółowem rozwinięciu wraz z zastosowaniem do równań stopnia 4go, 5go, 6go, 7go, przedstawił Wroński we wspomnianem dziele.

Uzasadnienie metody Wrońskiego podał, o ile wiemy, pierwszy Hanegraeff. [1]) Wychodzi on z rozwinięcia w szereg nieskończony odwrotności wielomianu, który jest pierwszą stroną równania danego, lub odwrotnością wielomianu, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania badanego. Przedstawimy tę metodę nieco uproszczoną, wychodząc z rozwinięć podanych w artykule: „O twierdzeniu Crocchiego.“ [2]) Współczynniki tych rozwinięć są funkcyjami alef pojedynczemi, o skaźniku dodatnim lub ujemnym. Mnożąc obie strony jednego z tych rozwinięć:

$$\frac{1}{fx}=\frac{1}{x^m}+\frac{\aleph_1}{x^{m+1}}+\ldots+\frac{\aleph_k}{x^{m+k+1}}+\ldots$$

przez $x-x_1$, gdzie x_1 jest największym pierwiastkiem równania danego $fx=0$, otrzymujemy po stronie drugiej rozwinięcie zbieżne dla wszystkich wartości zmiennej, których moduł jest większy od modułu każdego z pozostałych pierwiastków. Ze zbieżności tego rozwinięcia wynika, że

$$\lim_{k=\infty}(\aleph_k x_1-\aleph_{k+1})=0$$

a ztąd

$$x_1=\lim_{k=\infty}\frac{\aleph_{k+1}}{\aleph_k}$$

---

[1]) Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition succesive en facteurs. Bruksella, 1854.

[2]) Pam. Akad. Um. Tom XII, str. 41, 42.

Jeżeli więc istotnie stosunek funkcyj alef dąży do granicy oznaczonej, to granica ta równa się największemu (rzeczywistemu) pierwiastkowi równania. Będzie przeto:

$$x - \frac{\aleph_{k+1}}{\aleph_k} = 0$$

zgodnie z równaniem 5a), tj. z czynnikiem pierwszego stopnia równania 1), zkąd łatwo przejść do czynnika 5) stopnia $(m-1)$-go.

Jeżeli wszakże stosunek funkcyj alef pojedynczych nie dąży do granicy oznaczonej, to można otrzymać wprost czynnik stopnia 2-go, mnożąc obie strony powyższego rozwinięcia przez $(x-x_1)$ $(x-x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są dwa pierwsze pierwiastki. Otrzymujemy wtedy po stronie drugiej rozwinięcie zbieżne dla wszystkich wartości, których moduł jest większy od modułu każdego z pozostałych pierwiastków, a ze zbieżności tego szeregu wynika, że dla wartosci k nieskończenie wielkich:

$$\aleph_{k+2} - \aleph_{k+1}(x_1 + x_2) + x_1\, x_2\, \aleph_k = 0$$
$$\aleph_{k+3} - \aleph_{k+2}(x_1 + x_2) + x_1\, x_2\, \aleph_{k+1} = 0.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy następujące równanie dla wyznaczenia pierwiastków x_1 i x_2.

$$x^2 - \frac{\aleph_{k+1}\,\aleph_{k+2} - \aleph_k\,\aleph_{k+3}}{(\aleph_{k+1})^2 - \aleph_k\,\aleph_{k+2}}\, x - \frac{(\aleph_{k+1})^2 - \aleph_k\,\aleph_{k+2}}{(\aleph_k)^2 - \aleph_{k-1}\,\aleph_{k+1}} = 0$$

zgodne z równaniem 7a). Od tego czynnika stopnia 2-go łatwo przejść można do czynnika 7) stopnia $(m-2)$go. Rozumie się, że trójmian powyższy będzie czynnikiem równania 1) pod warunkiem, że stosunki funkcyj alef 1go rzędu stanowiące współczynniki jego, są oznaczone. Jeżeli ten warunek nie spełnia się, przechodzimy za pomocą wyłożonej metody do czynnika stopnia 3go i odpowiadającego mu czynnika stopnia $m-3$-go itd.

Wychodząc znowu z rozwinięcia funkcyi [1] $\frac{1}{f(x_x)}$ według dodatnych potęg zmiennej, możemy powyższe badanie zastosować do funkcyi alef o skaźniku ujemnym i dojść do odpowiednich czynników stopnia 1go, 2go, 3go i t. d.

W tym wywodzie metody Wrońskiego otrzymujemy najprzód czynniki dopełniające, a z nich czynniki główne; Bukaty dał inny wywód [2], w którym równanie 5) wyprowadza wprost z równania 1), dzieląc pierwszą stronę przez różnicę $x - \frac{\aleph_{k+1}}{\aleph_k}$; lecz dalsze rozwinięcie metody w przypadku, gdy stosunek funkcyj alef pojedynczych nie dąży do granicy oznaczonej, nie jest w wywodzie Bukatego dostatecznie uzasadnionem. Przytem przedstawienie czynników dopełniających stopnia 2go, 3go i t. d. Bukaty zupełnie pominął [3].

6. Fourier, w dziele p.t. „*Analyse des équations déterminées* [4]) (1831), ogłosił pomysły dotyczące rozwinięcia metody Bernouilliego. Za podstawę swej metody przyjmuje Fourier szereg zwrotny $A, B, C, D, E \ldots$, który się otrzymuje jak u Bernouilliego. Z tego szeregu pierwotnego wyprowadza 2 szeregi pochodne, które nazwijmy szeregami pochodnemi 1go rzędu:

$$AD-BC,\ BE-CD,\ CF-DE, \ldots$$
$$AC-B^2,\ BD-C^2,\ CE-D_1^2 \ldots;$$

z tych znów według tego samego prawidła szeregi pochodne

---

[1]) „O twierdzeniu Crocchiego" l. c. str. 43.

[2]) Résolution générale des équations. Méthode spéciale ou téléologique de H. Wroński, démontrée par A. Bukaty, Edité par L. N(iedźwiecki). Paryż, 1878.

[3]) Wykład metody teleologicznej dał Montferrier w „Encyclopédie mathématique" (Tom II. str. 184—229), ale powtarzając rzecz za Wrońskim, zasadniczych wzorów nie udowodnił.

[4]) Rozdział p. t. „Exposé synoptique" str. 68 i dalsze.

2go rzędu i t. d. Jeżeli pierwszy pierwiastek (największy) jest rzeczywisty, to zbliżać się do niego będziemy, dzieląc każdy wyraz szeregu pierwotnego przez wyraz poprzedzający. Dla otrzymania następnego z kolei pierwiastka, oznacza Fourier granicę, do których dążą stosunki wyrazów postępujących do poprzedzających w jednym i drugim szeregu pochodnym rzędu 1go; granica tego stosunku w pierwszym ma być według Fouriera równa sumie, w drugim iloczynowi dwóch pierwszych pierwiastków; te dwa szeregi zatem wystarczają do oznaczenia dwóch pierwiastków. W podobny sposób, za pomocą szeregów pochodnych 2go rzędu, wyznaczają się trzy pierwsze pierwiastki i t. d. Wszystko to ma miejsce atoli w przypadku zbieżności szeregu badanych stosunków; jeżeli pierwszy pierwiastek jest wszakże urojony, to szereg ilorazów w szeregu pierwotnym nie daje jednego rezultatu i wtedy następne dwa szeregi doprowadzają do wartości modułu pierwiastka urojonego. Jeżeli trzeci z kolei pierwiastek jest rzeczywisty, to odpowiadające mu szeregi ilorazów są zbieżne; jeżeli jest urojony, to należy się uciec do dalszych szeregów pochodnych i t. d.

Fourier, jak to zauważył Stern [1]), pomylił się, twierdząc, że szereg ilorazów utworzonych z wyrazów szeregu

$$AD-BC,\ BE-CD,\ CF-DE\ldots.$$

dąży do granicy równej sumie pierwiastków; przeciwnie szereg tych ilorazów dąży, jak o tem łatwo przekonać się można, do granicy równej iloczynowi pierwiastków; do granicy zaś równej sumie pierwiastków dąży stosunek ilorazów powstałych z podzielenia wyrazów jednego z szeregów pochodnych 1go rzędu przez odpowiednie wyrazy drugiego. Po-

[1]) Remarque sur un théorème enoncé par M. Fourier, Crelle, IX, str. 305.

mijając ten błąd, widzimy, że metoda Fouriera nie różni się w zasadzie od metody Wrońskiego; kolejne bowiem szeregi zwrotne odpowiadają funkcyjom alef różnych rzędów.

7. Stern w kilka lat później [1]) ogłosił metodę rozwiązywania równań, w której za punkt wyjścia bierze, jak Lagrange, sumy jednakowych potęg pierwiastków. Jeżeli x_1, $x_2, \ldots x_n$ są pierwiastki równania 1), uporządkowane według malejących wielkości, to dla k dostatecznie wielkiego przyjąć można:

$$x_1 = \frac{s_{k+1}}{s_k}, \quad x_1 x_2 = \frac{s_{k+1}^2 - s_{2k+2}}{s_k^2 - s_{2k}}$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{s_{k+1}^3 - 3s_{k+1}s_{2k+2} + 2s_{3k+3}}{s_k^3 - 3s_k s_{2k} + 2s_{3k}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

gdzie wielkości s_i, oznaczające sumy i^{ych} potęg pierwiastków równania, zastąpić należy ich znanemi wyrażeniami w funkcyi współczynników tegoż. Utworzmy szeregi:

$$s_1, \; s_2, \; s_3 \ldots\ldots$$

$$s_1^2 - s_2, \; s_2^2 - s_4, \; s_3^2 - s_6 \ldots\ldots$$

$$s_1^3 - 3s_1 s_2, + 2s_2, \; s_2^2 - 3s_1, \; s_4 + 2s_6, \ldots\ldots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Iloraz dwóch dostatecznie odległych wyrazów szeregu pierwszego daje pierwiastek x_1, iloraz dwóch dostatecznie odległych wyrazów szeregu drugiego daje iloczyn $x_1 x_2$, iloraz takichże wyrazów szeregu trzeciego daje iloczyn $x_1 x_2 x_3 \ldots$ Jeżeli pomiędzy pierwiastkami są urojone, to szereg odpowiadający iloczynowi $x_1 x_2 \ldots x_r$, w którym pierwiastek x_r jest urojony, będzie rozbieżny, lecz następny sze-

---

[1]) Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Crelle, XI (1834) str. 293.

reg, odpowiadający iloczynowi $x_1 x_2 \ldots x_r \, x_{r+1}$, będzie zbieżny i posłuży do otrzymania iloczynu $x_r x_{r+1}$ pierwiastków sprzężonych. Jeżeli w ogóle jeden z dwóch kolejnych szeregów jest zbieżny, a drugi rozbieżny, dowód to, że równanie dane ma dwa pierwiastki urojone sprzężone.

Metoda Sterna jest, jak widzimy, pewną modyfikacyją metody Fouriera, a więc w gruncie rzeczy, jest identyczną z metodą Wrońskiego.

8. Fürstenau [1]) dochodzi do czynników niższego stopnia równania danego w sposób następujący. Mnożąc równanie dane przez kolejne potęgi zmiennej x, a mianowicie przez $x, x^2, x^3 \ldots$, a następnie rugując z otrzymanych równań ilości:

$$x^{n+1};\ x^{n+2}, \ldots\ x^{n+k-1},$$

dochodzi się, dla nieograniczenie rosnącej wartości k, do równania stopnia n^{go} postaci:

$$\overset{1,2,3\ldots n-1}{S_{k-1}}\, x^n + \overset{2,3,4,\ldots n}{S_k}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + \overset{1,2,3\ldots n-2,n}{S_k}\, x + \overset{1,2,3\ldots n-1}{S_k} = 0$$

dającego n największych pierwiastków $x_1, x_2 \ldots x_n$ równania danego. W równaniu Fürstenaua współczynniki mają następujące znaczenie:

$$S_k = (-1)^k \sum \frac{x_1^{\,k+m-1}}{f'(x_i)},$$

równa się zatem $(-1)^k \aleph_k$ i wyraża się w postaci znanego wyznacznika; z tego wyznacznika zaś otrzymuje się współczynniki powyższego równania przez odrzucenie $n-1$ kolumn

---

[1]) Darstellung der reellen Wurzeln etc. Marburg, 1860. Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen, Marburg, 1867. Metodę Fürstenaua uprościł Baltzer. (Zeitschrift für Mathematik und Physik VI Jahrgang, Literaturzeitung str. 9). Porówn. Günther Lehrbuch der Determinantentheorie str. 130.

(i odpowiednich wierszy), których skaźniki wypisane są nad głoską S. Współczynniki te zatem sprowadzają się do funkcyj alef złożonych rzędu $(n-1)$go, co stwierdza tożsamość metody FÜRSTENAUA z metodą WROŃSKIEGO. W samej rzeczy, bezpośrednio stwierdzić można, że czynnik stopnia 1go:

$$x S_k + S_{k-1} = 0$$

jest identyczny z czynnikiem

$$x - \frac{\aleph_{k+1}}{\aleph_k} = 0$$

WROŃSKIEGO; czynnik stopnia drugiego

$$S^1_{k+1} x^2 + S^2_{k+2} x + S^1_{k+2} = 0$$

jest identyczny z czynnikiem

$$x^2 - \frac{\aleph_{k+1,1}}{\aleph_{k+1,0}} x + \frac{\aleph_{k+2,0}}{\aleph_{k+1,0}} = 0;$$

czynnik trzeciego stopnia

$$S^{1,2}_{k+2} x^3 + S^{2,3}_{k+3} x^2 + S^{1,3}_{k+3} x + S^{1,2}_{k+3} = 0$$

sprowadza się do równania:

$$\begin{vmatrix} S, & R, & Q \\ T, & S, & R \\ U, & T, & S \end{vmatrix} x^3 - \begin{vmatrix} T, & R, & Q \\ U, & S, & R \\ V, & T, & S \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} T, & S, & Q \\ U, & T, & R \\ V, & U, & S \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} T, & S, & R \\ U, & T, & S \\ V, & U, & T \end{vmatrix} = 0$$

które otrzymaliśmy z równania WROŃSKIEGO [1]).

9. Najmniejszy pierwiastek równania algebraicznego daje się wyznaczyć jeszcze za pomocą następującego twierdzenia podanego przez KÖNIGA [2]). Niechaj w_n oznacza liczbę

---

[1]) Metodzie FÜRSTENAUA poświęcił obszerne studyjum NÄGELSBACH „Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten". (Archiv der Mathematik und Physik, Tom 59 i 61), gdzie bada zachowanie się funkcyj alef, które nazywa współczynnikami dzielenia (niektóre jego twierdzenia wyprowa-

zmian znaków w szeregu funkcyj alef o skaźniku ujemnym:

$$\aleph_{-(k+m)}\,,\quad \aleph_{-(k+m+1)}\,,\ \ldots\ \aleph_{-(k+m+n)}\,;$$

argument i moduł ρ i ω pierwiastka najmniejszego

$$x = \rho\,(\cos\omega + i\sin\omega)$$

dają się wyrazić w ten sposób:

$$\frac{\omega}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}$$

$$\rho = \operatorname*{mod}_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\aleph_{-(k+m+n)}}}\,.$$

Twierdzenie to daje się oczywiście zastosować i do pierwiastka największego. Jeżeli w_n oznacza liczbę zmian znaków w szeregu funkcyj alef o skaźniku dodatnim:

$$\aleph_0\,,\ \aleph_1\,,\ \aleph_2\,,\ \ldots\ \aleph_n\,;$$

to moduł i argument R i Ω pierwiastka największego

$$R\,(\cos\Omega + i\sin\Omega)$$

wyrażają się za pomocą wzorów:

$$\frac{\Omega}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}$$

$$R = \operatorname*{mod}_{n=\infty}\left(\sqrt[n]{\aleph_n}\right)\,.$$

Z twierdzenia tego możemy wyprowadzić niektóre ciekawe wnioski. Jeżeli szereg funkcyj alef, począwszy od pe-

---

dzamy niżej jako wniosek z twierdzenia Königa), oraz przybliżenia wartości pierwiastków, obliczanych zapomocą metody Fürstenaua. Związek pomiędzy metodą Fürstenaua a ułamkami ciągłemi wykazał Günther: „Ueber die allgemeine Auflösung der Gleichungen durch Kettenbrüche“ (Mathematische Annalen, Tom VI, str. 262.)

[2]) Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{en} Grades. Mathematische Annalen. Tom IX. str. 530—540.

wnego miejsca, daje same tylko następstwa znaków, to $\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = 0$, $\Omega = 0$, zkąd wynika, że największy pierwiatek jest rzeczywisty dodatni; jeżeli daje same zmiany, to $\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = 1$, $\Omega = \pi$, co dowodzi, że największy pierwiastek jest rzeczywisty ujemny; jeżeli liczba zmian jest dwa razy większą od liczby następstw, otrzymujemy pierwiastek czysto urojony i t. d. [1])

10. Istota metody teleologicznej polega, jak widzieliśmy, przedewszystkiem na własności zasadniczej funkcyj symetrycznych pierwiastków równania, któreto funkcyje dają się wyrażać jako funkcyje jego współczynników. Wynika ztąd możność uogólnienia metody teleologicznej przez zastąpienie funkcyj symetrycznych samych pierwiastków równania ich funkcyjami symetrycznemi, ale zależnemi i od innych wielkości. Tak n. p. sumy równych potęg pierwiastków równania można zastąpić funkcyją $\sum_{\iota=\iota}^{\iota=m} (x-x_\iota)^k$; zamiast funkcyj alef samych pierwiastków równania, można wziąć funkcyje $\sum_{\iota=1}^{\iota=m} \frac{(x-x_\iota)^k}{f'(x)}$ i t. p. Na tej drodze metoda teleologiczna zdolna jest do dalszego rozwoju, jak to wykazują prace E. Schrödera i Rungego.

Pierwszy z nich [2]) za podstawę swojej metody przyjmuje funkcyję

$$C_k^\lambda(x) = \sum_{\iota=1}^{\iota=m} \frac{x_\iota^\lambda\, x^{(x)}}{(x-x_\iota)^{k+1}},$$

[1]) Sąto powyżej wspomniane, udowodnione na innej drodze twierdzenia Nägelsbacha.

[2]) E. Schröder. Ueber unendlich viele Logarithmen zur Auflösung der Gleichungen. Mathematische Annalen Tom II.

gdzie k, λ są liczby całkowite dodatnie (nie wyłączając i zera); $\chi(x)$ jest funkcyją, która dla żadnej wartości, równej któremukolwiek z pierwiastków równania danego $f(x) = 0$, nie staje się ani zerem ani nieskończonością. Dla $\chi(x) = \frac{1}{f'(x)}$ i $\chi(x) = 1$ otrzymuje SCHRÖDER specyjalniejsze funkcyje:

$$A_k^\lambda(x) = \sum_{\iota=1}^{\iota=m} \frac{x_\iota^\lambda}{(x - x_\iota)^{k+1} f'(x)}$$

$$B_k^\lambda(x) = \sum_{\iota=1}^{\iota=m} \frac{x_\iota^\lambda}{(x - x_\iota)^{k+1}}$$

które mogą służyć do otrzymywania pierwiastków. Jeżeli mianowicie oznaczymy przez $F(x)$ iloraz $\frac{A_k^{\lambda+h}(x)}{A_k^\lambda(x)}$, przez $F_1(x)$ iloraz $\frac{B^{\lambda+h}(x)}{B_k^\lambda(x)}$, to

$$\lim_{k=\infty} F(x) = \lim_{k=\infty} F_1(x) = x_1^h$$

gdzie x_1 jest ten z pierwiastków równania danego, który leży bliżej dowolnie przyjętej wartości początkowej x, niż każdy inny z pierwiastków. Dla $h=1$, otrzymujemy wprost pierwiastek x_1. Widoczna, że dla $\lambda = 0$, $h=1$, oraz dla wartości początkowej x równej 0 (lub ∞), metoda SCHRÖDERA schodzi się z metodą wynajdywania pierwiastka największego (lub najmniejszego), według FÜRSTENAUA lub WROŃSKIEGO.

RUNGE [1]) za podstawę metody swojej przyjmuje funkcyję

$$\sum_{\iota=1}^{\iota=m} \frac{1}{(x_\iota - x)^{k+1}}$$

i otrzymuje następujące wyrażenia dla pierwiastków równa-

---

[1]) Entwickelung des Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten, Acta mathematica, VI, str. 305—318.

nia $x_1, x_2, x_3 \ldots$, z których pierwszy leży bliżej wielkości x niż pozostałe, x_2 bliżej niż pozostałe prócz x_1, i t. d.

$$x_1 = x + R_k(x)_{k=\infty}$$

$$x_2 = x + \left|\frac{R_k^{(2)}(x)}{R_k^{(1)}(x)}\right|_{k=\infty}$$

$$x_3 = x + \left|\frac{R_k^{(3)}(x)}{R_k^{(2)}(x)}\right|_{k=\infty}$$

. . . .

gdzie wielkości R mają następujące znaczenie:

$$R_k(x) = \frac{\Sigma (x_\iota - x)^{-k}}{\Sigma (x_\iota - x)^{-k-1}}$$

$$R_k^{(2)}(x) = \frac{\Sigma[(x_\iota - x)(x_\varkappa - x)]^{-k}}{\Sigma[(x_\iota - x)(x_\varkappa - x)]^{-k-1}}$$

$$R_k^{(3)}(x) = \frac{\Sigma[(x_\iota - x)(x_\varkappa - x)(x_\lambda - x)]^{-k}}{\Sigma[(x_\iota - x)(x_\varkappa - x)(x_\lambda - x)]^{-k-1}}$$

. . . .

Sumy po drugiej stronie 1-go z tych wzorów rozciągają się na wszystkie wartości od 1 do 0, po drugiej stronie drugiego wzoru na wszystkie kombinacyje pierwiastków po dwa, po drugiej stronie trzeciego wzoru na wszystkie kombinacyje pierwiastków po trzy i t. d. Wyrażenia R dają się oczywiście przedstawić w funkcyi współczynników równania danego.

Warszawa, w Październiku 1888.

Dopełnienie artykułu

„O metodzie teleologicznej Hoene-Wrońskiego rozwiązywania równań algebraicznych“

przez

S. Dicksteina.

W artykule, ogłoszonym w Tomie XIX Rozpraw i Sprawozdań Wydziału matem.-przyr. Akademii Um. (str. 167—192), przedstawiając metody rozmaitych autorów analogiczne z metodą teleologiczną Wrońskiego, pominąłem rozprawę Jacobiego, ogłoszoną w r. 1835 w 13ym tomie dziennika Crellea: „*Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*“ (str. 310—355). W piątym ustępie tej rozprawy, zatytułowanym: „*Quomodo regula Bernouilliana ad investigandas radices quae maximam aut minimam sequuntur, extendi potest*“, Jacobi, pobudzony pomysłami Fouriera, ogłoszonemi w dziele: „*Analyse des équations déterminées*“ z r. 1831 [1]) rozwija

---

[1]) Porówn. O metodzie teleologicznej Rozpr. i Spraw. Akad. Um. T. XIX, str. 184.

metody Daniela Bernouilliego i Eulera [1]) i zestawia wywody swoje z metodą badania szeregów zwrotnych, podaną przez Lagrangea w r. 1772 [2]). Metoda Jacobiego rozwiązuje w zupełności zagadnienie Fouriera, jest zatem w istocie rzeczy identyczną z metodą Wrońskiego, podaną w r. 1827 i rozwiniętą w 1847 [3]). Opierając się na tej rozprawie Jacobiego [4]), podaję tu uzasadnienie metody teleologicznej, niepozostawiające, jak śmiem sądzić, nic do życzenia pod względem prostoty, i dopełniające tym sposobem poprzednią moją pracę.

Niech będzie równanie:

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots\ldots + (-1)^m A_m = 0, \tag{1}$$

pierwiastki jego, poczynając od mającego największą wartość bezwzględną i idąc kolejno do mającego wartość bezwzględną najmniejszą, oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots x_m$. Kolejne funkcyje alef równania (1) wyrażają się, jak wiadomo, we funkcyi tych pierwiastków przy pomocy wzoru [5]).

$$\aleph_k = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{x_i^{k+m-1}}{f'(x_i)} \tag{2}$$

$$k = 1, 2, \ldots\ldots \infty$$

---

[1]) Tamże str. 168—170.

[2]) W rozprawie „*Recherches sur la manière de former des tables des planetes d'après les observations*“ w *Memoires de l'Acad. des Sciences de Paris.*

[3]) Rozpr. i Spraw. XIX, str. 172.

[4]) Jacobi nie używa jeszcze w tej rozprawie algorytmu wyznaczników, które bardzo upraszczają wywód; zasadnicza rozprawa Jacobiego o wyznacznikach była ogłoszoną dopiero w r. 1841 w 22im tomie dziennika Crellea.

[5]) O twierdzeniu Crocchiego, Pam. Akad. Um. T. XII.

lub też we funkcyi współczynników równania (1) przy pomocy wzoru [1])

$$\aleph_k = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 & \dots & A_{k-1}, & A_k \\ 1, & A_1, & A_2 & \dots & A_{k-2}, & A_{k-1} \\ 0, & 1, & A_1 & \dots & A_{k-3}, & A_{k-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & A_1 \end{vmatrix} . \tag{3}$$

W metodzie teleologicznej WROŃSKIEGO idzie przedewszystkiem o otrzymanie tak nazwanego czynnika głównego stopnia $n < m$ pierwszej strony równania (1), albo inaczej mówiąc, o otrzymanie równania stopnia n, którego pierwiastkami są pierwiastki $x_1, x_2, \dots x_n$ równania danego [2]). Aby otrzymać to równanie stopnia n^{go}, odrzućmy po drugiej stronie wzoru (2) wyrazy, zawierające pierwiastki $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_m$. Redukcyję taką czynimy na tej zasadzie, że stosunek sumy odrzuconych wyrazów do sumy wyrazów pozostawionych dąży do zera, gdy liczba k rośnie nieograniczenie. Oznaczając dla krótkości wyrazy pozostawione przez $R_1, R_2, \dots R_n$, otrzymujemy z wzoru (2) następujące:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \aleph_k & = & R_1 + R_2 + \dots R_n \\ \aleph_{k+1} & = & R_1 x_1 + R_2 x_2 + \dots + R_n x_n \\ \aleph_{k+2} & = & R_1 x_1^2 + R_1 x_2^2 + \dots + R_n x_n^2 \\ . & & . \quad . \quad . \quad . \\ \aleph_{k+n} & = & R_1 x_1^n + R_2 x_2^n + \dots + R_n x_n^n \end{array} \right. \tag{4}$$

---

[1]) O niektórych własnościach funkcyi alef. Pam. Akad. Um. T. XII.

[2]) Rozpr. i Spraw. XIX, str. 181.

Jeżeli szukanem równaniem stopnia n^{go} jest

$$x^n - B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n B_n = 0, \tag{5}$$

to oczywiście

$$x^n - B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^n B_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

będzie tożsamościowo zerem dla $x = x_1, x_2, \ldots x_n$.

Mnożąc zatem równania (4) odpowiednio przez B_n, B_{n-1}, . . . 1 i dodając je do siebie, otrzymujemy, przy uwzględnieniu powyższej uwagi, równość

$$\aleph_{k+n} - B_1 \aleph_{k+n-1} + B_2 \aleph_{k+n-2} - \ldots + (-1)^n \aleph_k = 0.$$

Kładąc tu kolejno za k liczby: $k, k+1, \ldots k+n-1$, otrzymujemy n równań, które wraz z równaniem (5) dają układ $n+1$ równań następujący:

$$(6)\quad \begin{cases} x^n & - B_1 x^{n-1} & + B_2 x^{n-2} & - \ldots + (-1)^n B_n & = 0 \\ \aleph_{k+n} & - B_1 \aleph_{k+n-1} & + B_2 \aleph_{k+n-2} & - \ldots + (-1)^n B_n \aleph_k & = 0 \\ \aleph_{k+n+1} & - B_1 \aleph_{k+n} & + B_2 \aleph_{k+n-1} & - \ldots + (-1)^n B_n \aleph_{k+1} & = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \aleph_{k+2n-1} & - B_1 \aleph_{k+2n-2} & + B_2 \aleph_{k+2n-3} & - \ldots + (-1)^n B_n \aleph_{k+n-1} & = 0 \end{cases}$$

Rugując z tych $n+1$ równań n współczynników B_1, B_2, ... B_n, otrzymujemy równanie stopnia n^{go}

$$(7)\quad \begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots & 1 \\ \aleph_{k+n}, & \aleph_{k+n-1}, & \aleph_{k+n-2}, & \ldots & \aleph_k \\ \aleph_{k+n+1}, & \aleph_{k+n}, & \aleph_{k+n-1}, & \ldots & \aleph_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \aleph_{k+2n-1}, & \aleph_{k+2n-2}, & \aleph_{k+2n-3}, & \ldots & \aleph_{k+n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

którego pierwiastki są tem bliższemi pierwiastków $x_1, x_2, \dots x_n$ równania (1), im liczba k jest większą.

Z równania (7) dla $n=1$ otrzymujemy bezpośrednio prawidło DANIELA BERNOUILLIEGO, dla $n=2$ znane prawidło EULERA.

Współczynniki równania (7) są oczywiście wyznacznikami, których elementa stanowią funkcyje alef; są to funkcyje alef złożone WROŃSKIEGO [1]); ponieważ zaś funkcyje te przy pomocy wzoru (3) dają się wyrazić przez współczynniki równania (1), przeto wszystkie współczynniki równania (7) są również oznaczonemi funkcyjami współczynników równania (1).

W zupełnie ten sam sposób można otrzymać bezpośrednio równanie, którego pierwiastkami są pierwiastki x_n, $x_{n-1} \dots x_{m+1}$ równania (1), poczynając od mającego najmniejszą wartość bezwzględną. W takim razie po pierwszej stronie równania (7) mieć będziemy funkcyje alef o skaźnikach ujemnych, zamiast funkcyi alef o skaźnikach dodatnych [2]).

---

[1]) Rozpr. i Spraw. XIX, str. 172—176.

[2]) Ten prosty wywód zawiera całą teoryję metody teleologicznej, której WROŃSKI poświęcił obszerny traktat: *Methode téléologique ou speciale pour la resolution générale des équations*" na 108 stronicach in folio. Praca ta nie zwróciła uwagi uczonych z przyczyny nieusprawiedliwionego ignorowania pomysłów WROŃSKIEGO; ale i rozprawa JACOBIEGO pozostała prawie nieznaną w samych Niemczech, tak, że FÜRSTENAU ogłaszając swoją metodę rozwiązywania równań był przekonany, iż ogłasza rzecz nową. Rzecz szczególna, że zdanie to podzielali BALTZER i GÜNTHER, którym przecież praca JACOBIEGO nie powinna była pozostać nieznaną.

Warszawa, w Marcu 1890.

Osobne odbicie z XX. Tomu Rozpr. i Spraw. Wydz. matem.-przyr. Akad. Umiejętn.

Kraków, 1890. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem A. M. Kosterkiewicza.

Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie.
Avril 1890.

S. Dickstein. „Dopełnienie do artykułu o metodzie teleologicznej Hoene-Wrońskiego." *(Sur la méthode téléologique de Hoene-Wroński)*.

Dans un mémoire: „*Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*" (*Journal de Crelle XIII*) Jacobi, en développant l'idée exposée dans l' „*Analyse des équations déterminées*" de Fourier, a donné une extension des méthodes de Daniel Bernouilli et de Euler pour la détermination de la plus grande et de la plus petite racine d'une équation algébrique du degré m. La méthode de Jacobi, étant au fond identique avec celle de Wroński, peut en même temps nous servir à établir très simplement la méthode téléologique de Wroński, ce qui fait l'objet de la note présente. En prenant pour point de départ les fonctions „aleph" de Wroński exprimées au moyen des racines de l'équation donnée et n'en retenant que les termes répondants aux plus grandes n racines ($n < m$), de l'équation donnée, on obtient un système d'équations dont la résultante est une équation algébrique du degré n. Les racines de cette équation sont égales aux n premières racines de l'équation donnée, avec une approximation d'autant plus grande, que l'est l'indice des fonctions aleph. Les coëfficients de l'équation résultante sont les fonctions aleph composées, de Wroński.

Cracovie, 1890. — Imprimerie de l'Université Jagellonne.