LÜROTH. GRUNDRISS DER MECHANIK

1699

1699

1 Grun 706

kat

GRUNDRISS

DER

MECHANIK

VON

DR. JAKOB LÜROTH

O. PROFESSOR DER K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN.

18/V 1887.

MÜNCHEN
THEODOR ACKERMANN
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.

1881.

Vorrede.

Bei der Abfassung des vorliegenden Schriftchens beabsichtigte ich die wichtigsten Begriffe und Sätze der Mechanik, die bei deren Anwendung am meisten gebraucht werden, in möglichster Kürze, aber doch streng wissenschaftlich zu entwickeln. Angeregt wurde ich dazu durch Vorlesungen, welchen die nämliche Aufgabe gestellt war und besonders durch eine inhaltreiche Abhandlung von H. Grassmann (Programm des Stettiner Gymnasiums für 1867), die mir zeigte, welch' grosser Nutzen aus der Anwendung der Rechnung mit Strecken zu ziehen sei. In Folge dessen habe ich mich auch bei der vorliegenden Darstellung der Streckenrechnung bedient, die nicht nur gestattet, je drei Gleichungen in einer einzigen zusammenzufassen, sondern auch erlaubt, die Benützung der analytischen Geometrie fast ganz zu vermeiden. Die Bezeichnungen TSV, sowie auch einzelne Betrachtungen, habe ich der Hamilton'schen Quaternionentheorie entnommen, weil sie weiter bekannt ist als die Grassmann'sche Ausdehnungslehre; doch hatte ich nicht nöthig die Quaternionen selbst einzuführen.

Den Unterschied zwischen der absoluten und der relativen Bewegung, die unsern Beobachtungen allein zugänglich ist, versuchte ich schärfer hervorzuheben als es gewöhnlich geschieht. Beispiele sind nur in geringer Zahl gegeben und nur solche, welche die Kenntniss wichtiger Naturgesetze vermitteln. Da die vorgetragenen Sätze allgemein bekannt sind, so habe ich nirgend die Quellen angeführt; für die Darstellung habe ich ausser den oben erwähnten Werken noch die bekannten grösseren Lehrbücher der Mechanik und — für die Theorie der Momentankräfte — eine Abhandlung von Darboux benützt.

München, im Juli 1881.

J. Lüroth.

Inhalt.

Seite

§ 1. Eintheilung der Mechanik 1

I. Die Bewegung an sich.

§ 2. Bestimmung des Ortes eines Punktes 1
§ 3. Verschiedene Coordinatensysteme 3
§ 4. Rechnung mit Strecken 4
§ 5. Coordinatentransformation 8
§ 6. Zeitmaass 9
§ 7. Geschwindigkeit und Beschleunigung 10
§ 8. Relative Bewegung 12

II. Mechanik des materiellen Punktes.

§ 9. Der materielle Punkt; seine Geschwindigkeit und Beschleunigung, seine Dichte. Kraft und Masse 14
§ 10. Maass der Kraft und Hypothesen über die Wirkungen der Kräfte 15
§ 11. Absolute und relative Kraft 19
§ 12. Masseneinheit; specifisches Gewicht 21
§ 13. Differentialgleichung der Bewegung. Probleme des freien Falls. Planetenbewegung. Fall auf der rotirenden Erde 23
§ 14. Bewegung eines nicht freien Punktes 28
§ 15. Tangential- und Normalbeschleunigung 30
§ 16. Bewegung auf Curven oder Flächen ohne und mit Reibung . 32
§ 17 u. 18. Fortsetzung der Rechnung mit Strecken 36
§ 19. Durchführung der in § 13 begonnenen Probleme 40

III. Mechanik eines beliebigen Körpers.

§ 20. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes. Massenkräfte und Flächenkräfte 43
§ 21. Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung. Flächensatz 46
§ 22. Lebendige Kraft; Arbeit. Prinzip der lebendigen Kraft . . . 50

Seite

IV. Mechanik des festen Körpers.

§ 23. Nachweis, dass durch die Sätze in § 20 und 21 die Bewegung eines festen Körpers vollständig bestimmt ist. Momentanaxe 54
§ 24. Ausdruck der Flächengeschwindigkeit. Trägheitsmoment. Trägheitsellipsoid; Zusammenhang der Momentanaxe mit der Flächengeschwindigkeit 58
§ 25. Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem festen Körper . . 61
§ 26. Aequivalenz von Kräftesystemen an einem festen Körper. Moment des Systems. Centralaxe. Kräftepaare. Parallele Kräfte . . 63
§ 27. Princip der lebendigen Kraft 67

V. Mechanik eines Systems von festen Körpern.

§ 28. Allgemeines. Kettenlinie 68
§ 29. Princip der lebendigen Kraft ohne und mit Rücksicht auf Reibung 70
§ 30. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 73
§ 31. D'Alembert'sches Princip 75

VI. Anhang.

§ 32. Momentankräfte 76
§ 33. Aenderungen der Maasszahlen bei Aenderung der Einheiten . 78

§ 1. Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung und deren Ursachen. Sie lehrt einerseits die näheren Umstände kennen, welche eine Bewegung charakterisiren, andererseits untersucht sie die Ursachen der Bewegungen, die Kräfte, und zeigt wie man die Bewegungen finden kann, wenn die Kräfte bekannt sind. Die Aufgabe die Bewegungen an sich zu studiren, fällt der Phoronomie oder Kinematik zu; diese ist eine rein mathematische Wissenschaft, die ausser den allgemeinen Hypothesen der Geometrie keiner weiteren Hypothesen bedarf. Die Betrachtung der Kräfte dagegen ist eigentlich ein Theil der Physik, die nicht nur die Erfahrungsthatsachen liefert, auf welche die Theorie der Kräfte oder Kinetik sich aufbaut, sondern auch die Kräfte selbst kennen lehrt, während der eigentlichen Mechanik die Aufgabe zufällt, bei gegebenen Kräften die Bewegungen zu bestimmen. Man theilt diesen Zweig wieder in die beiden Theile: Statik und Dynamik, indem man jener die Erforschung der Zustände zuweist, in welchen die Kräfte keine Wirkungen äussern, dieser aber die Ermittelung der Bewegungen selbst.

Mathematisch betrachtet ist die Aufsuchung der Kräfte eine Aufgabe der Differentialrechnung, die Erforschung der Bewegungen bei gegebenen Kräften dagegen eine, häufig sehr schwierige, Aufgabe der Integralrechnung.

I. Die Bewegung an sich.

§ 2. Die Bewegung eines Körpers ist im Allgemeinen eine sehr complicirte Erscheinung, weil sich der Körper bei seiner Bewegung drehen, ja auch Veränderungen in der Lage seiner Theile gegeneinander erfahren kann; man wird daher zweckmässig zuerst die Bewegung eines einzelnen mathematischen Punktes studiren. Die erhaltenen Resultate sind nicht nur, wie sich zeigen wird, die Grundlagen für die Erforschung der Bewegungen der Körper, sondern bieten auch desswegen directen Vortheil, weil wir manche Körper, z. B. die Fixsterne und viele Planeten, ohne merklichen Fehler bei unsern Beobachtungen als mathematische Punkte betrachten dürfen.

Um angeben zu können, wie sich ein Punkt bewegt, muss man vor Allem im Stande sein, zu sagen, wo er sich in jedem Augenblicke befindet.

Um den Ort eines Punktes anzugeben, benützt man die Coordinaten und zwar gewöhnlich die rechtwinkeligen.

Man wählt einen Punkt O zum Ursprung des Coordinatensystems, legt dessen x-Axe durch einen andern Punkt A und dessen xy-Ebene durch einen dritten B. Wenn man dann in O auf die Ebene OAB eine Senkrechte errichtet, so kann man diese zur z-Axe des Systems machen. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Punkte A und B ihre Entfernungen von einander und von O ändern oder nicht, wenn man nur im Stande ist, die Punkte OAB jederzeit wieder zu finden. Man kennt nun den Ort eines Punktes zu irgend einer Zeit, wenn man seine Coordinaten xyz für diese Zeit kennt und man kennt seine Bewegung wenn xyz als Functionen der Zeit t bekannt sind.

Wir haben aber kein anderes Mittel, drei Punkte OAB anzugeben, als indem wir sie mit Hilfe von Körpern definiren, z. B. als die Mittelpunkte von Kugeln oder Cylindern oder als die optischen Mittelpunkte von Linsen, oder als Marken an festen Körpern. In Folge dessen können wir in letzter Instanz die Lage eines Punktes immer nur gegen Körper festlegen und können daher auch nur seine Bewegung gegen Körper bestimmen d. h. wir sind nur im Stande, relative Bewegungen zu beobachten.

Legt man neue Punkte $O'A'B'$ zu Grunde, so kann man ein anderes System der $x'y'z'$ einführen. Die Coordinaten im letzteren System kann man aber aus den früheren berechnen, wenn man die Lage des zweiten Systems gegen das erste anzugeben im Stande ist. Man kann desshalb auch den Ort eines Punktes auf ein Coordinatensystem beziehen, dessen Axen nicht durch Körper bestimmt sind, wenn es nur möglich ist, die Lage dieses Systems gegen ein System anzugeben, welches durch Körper definirt ist. Die Coordinaten im ersten System sind dann freilich nur errechnete Grössen, deren Kenntniss aber, wie sich zeigen wird, gewisse Vortheile mit sich bringen kann.

§ **3.** Wie schon erwähnt, kennt man die Bewegung eines Punktes, wenn man seine Coordinaten als Functionen der Zeit, und das Coordinatensystem kennt, auf welches jene sich beziehen. Mit diesem Coordinatensystem wird sich auch das Gesetz der Bewegung ändern und es kann sich ein System vor dem andern dadurch auszeichnen, dass es das Gesetz einer bestimmten Bewegung besonders einfach erscheinen lässt. Ein grosser Theil der Fortschritte der Naturwissenschaften besonders der Astronomie besteht in der Erkenntniss der Nothwendigkeit, neue Coordinatensysteme beim Studium der Erscheinungen anzuwenden. Des Folgenden wegen ist es nöthig, einige dieser Systeme näher zu charakterisiren. Die ersten Beobachter des Himmels studirten die Bewegungen in einem System (I), dessen Ursprung der Ort des Beobachters auf der Erde, dessen xy-Ebene der Horizont und dessen x-Axe die Richtung nach irgend einem fixirten Punkte des Horizontes war. Von diesem System ging man über zu einem (II), dessen Ursprung der Erdmittelpunkt, dessen xy-Ebene der Erdäquator war und dessen x-Axe durch irgend einen festen Punkt dieses Aequators ging. Bald erkannte man, dass es zweckmässiger sei, die x-Axe nicht gegen die Erde, sondern gegen die Sterne festzulegen. Nun bestimmt die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Erde und Sonne zusammen mit der Richtung der Geschwindigkeit, welche die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne hat, eine Ebene, die sog. Ekliptik. Die Schnittlinie der Ekliptik mit dem Erdäquator heisst Nachtgleichenlinie, weil in ihr die Erde zur Zeit des Frühjahrs- und Herbstäquinoctiums sich befindet. Die eine Hälfte dieser Linie nimmt man zur x-Axe eines Coordinatensystems (III), dessen Ursprung der Mittelpunkt der Erde ist, während seine xy-Ebene die Ebene des Erdäquators ist. In Bezug auf dieses System dreht sich

1*

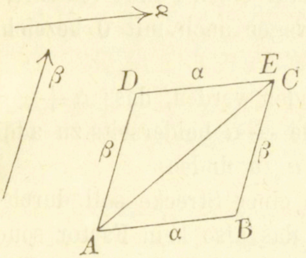
die Erde um die z-Axe, während die Sterne nahezu still stehen. Die Bewegungen der Planeten aber liessen sich, wie Copernikus entdeckte, noch viel einfacher darstellen, wenn man den Sonnenmittelpunkt zum Ursprung wählte und die Axen dieses neuen IV. Systems den Axen des III. parallel annahm. In Bezug auf dieses IV. System hat die Erde nicht nur eine Drehungsbewegung um ihre Axe, sondern auch ebenso wie alle Planeten noch eine fortschreitende Bewegung. Aber auch die Sterne zeigen noch Bewegungen, obgleich nicht sehr grosse, gegen das System. Man versuchte diese wegzuschaffen, indem man ein neues System (V) annahm und dessen Bewegung gegen IV so bestimmte, dass die Sterne ihre Lagen gegen das neue System nicht mehr änderten. Da sich diese Aufgabe nicht strenge erfüllen liess, musste man sich damit begnügen, es zu erreichen, dass im Mittel die Sterne keine Bewegungen gegen das System erkennen liessen. Die dann bei jedem einzelnen Sterne noch übrige Bewegung gegen System V ist die sogenannte Eigenbewegung im strengen Sinne. Häufig benützt man in der Astronomie auch ein System V′, dessen Axen denjenigen von V parallel sind, während sein Ursprung der Sonnenmittelpunkt ist. Die Bahnen der Planeten z. B. sind in diesem System nahezu Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die Astronomie zeigt, wie man die Coordinaten eines Punktes für diese verschiedenen Systeme finden kann, wenn sie für das erste bekannt sind.

§ 4. Im Folgenden werden wir uns zum Studium der Bewegung weniger der Coordinaten als der S t r e c k e n bedienen. Unter Strecke verstehen wir ein begrenztes Stück einer geraden Linie das mit einem bestimmten Sinn oder einer bestimmten Richtung versehen ist. Diesen Sinn kann man durch eine auf die Strecke gesetzte Pfeilspitze andeuten. Wir werden eine Strecke durch einen einzigen griechischen Buchstaben oder durch Nebeneinanderstellung der Namen für Anfangs- und Endpunkt bezeichnen und im letzten Falle stets den Namen des Anfangspunktes links von dem des Endpunktes stellen.

1) Mit Strecken sollen nun Rechnungsoperationen vorgenommen werden, d. h. es sollen Operationen angegeben werden, mit deren Hilfe man nach gewissen Gesetzen aus

gegebenen Strecken neue ableiten kann. Dabei nennen wir zwei Strecken gleich (bezeichnet durch $=$) wenn sie gleich gross, parallel und gleich gerichtet sind.

(Figur 1.)



2) Zwei Strecken α und β werden addirt, indem man (Figur 1) von einem Punkt A aus eine Strecke $AB = \alpha$ und von B aus $BC = \beta$ macht und dann die Strecke AC als die Summe $\alpha + \beta$ definirt. Es ist also hienach $AB + BC = AC$. Man sieht leicht ein, dass wenn man $AD = \beta$ und $DE = \alpha$ macht, E mit C coincidirt, also $AE = AC$ ist. Auch ergibt sich einfach, dass wenn man die Construction statt von A aus, von einem Punkte A' aus macht, eine Strecke erhalten wird, die mit der vorigen gleich gross, parallel und gleichgerichtet und folglich nach der Definition ihr gleich ist.

3) Soll nun $(\alpha + \beta) + \gamma$ gebildet werden, so construire man wie oben $\alpha + \beta = AC$ und setze an C die Strecke $CF = \gamma$ an. Dann ist $(\alpha + \beta) + \gamma = AC + CF = AF$. Es ist aber auch $AF = AB + BF$ und $BF = BC + CF$, daher $AF = \alpha + (\beta + \gamma)$, so dass $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ sich findet. Somit gelten alle Gesetze der Addition von Zahlen auch von den Strecken.

4) Ist a eine Zahl, so soll unter $a\alpha$ eine α parallele Strecke verstanden werden, die, wenn a positiv ist, mit α gleich gerichtet und a mal so gross, wenn dagegen a negativ ist, $(-a)$ mal so gross und entgegengesetzt gerichtet ist. Für $(-1)\,\alpha$, eine Strecke, die parallel und gleichgross mit α aber entgegengesetzt gerichtet ist, setzt man dabei einfach $-\alpha$, so dass $-AB = BA$ ist.

Man zeigt dann leicht, dass wenn b noch eine zweite Zahl ist, die Gleichungen

$$a\,(b\,\alpha) = (ab)\,\alpha = b\,(a\,\alpha)$$
$$(a + b)\,\alpha = a\,\alpha + b\,\alpha$$

bestehen; wie auch, wenn α und β Strecken sind

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$$

ist.

Bildet man nach der obigen Regel die Summe $\alpha + (-\alpha)$, so entsteht eine Strecke, die sich auf einen Punkt reducirt, die Länge Null hat, und die man desswegen auch mit 0 bezeichnet. Es ist klar, dass $\alpha + 0 = \alpha$ ist.

5) Soll die Strecke γ so gefunden werden, dass $\alpha + \gamma = \beta$ ist, so braucht man nur die Strecke $-\alpha$ beiderseits zu addiren um $\gamma = \beta + (-\alpha)$ oder $= \beta - \alpha$ zu finden.

6) Die Maasszahl der Länge einer Strecke soll durch ein vorgesetztes T bezeichnet werden, das also kein Factor sondern eine Art Funktionszeichen ist; besteht der Name der Strecke aus mehreren Theilen, so soll er dabei in Klammern eingeschlossen werden. Oder aber es wird für die Längenzahl ein besonderes Zeichen eingeführt.

Es ist offenbar

$$T(a\alpha) = [a] \cdot T\alpha$$

wenn $[a]$ den absoluten Werth von a bezeichnet. Zwischen zwei parallelen Strecken α und β besteht stets eine Gleichung von der Form

$$\beta = a\alpha$$

in der a eine Zahl ist. Dann setzt man

$$[a] = \frac{T\beta}{T\alpha}$$

und nimmt $a = +[a]$ oder $-[a]$, je nachdem β mit α gleichgerichtet ist oder nicht, so liefert $a\alpha$ eine mit β gleiche Strecke. Umgekehrt, wenn $\beta = a\alpha$ ist, so ist β mit $a\alpha$, also auch mit α parallel.

7) Wenn man weiss, dass zwischen zwei Strecken α und β, die nicht parallel sind, eine Gleichung wie

$$a\alpha + b\beta = 0$$

besteht, in der a und b Zahlen sind, so müssen diese beide gleich Null sein; denn sonst wäre $a\alpha = -b\beta$, also α und β parallel.

Sind $\alpha\beta\gamma$ drei Strecken, die nicht derselben Ebene angehören und nicht derselben Ebene parallel sind, so kann eine Gleichung

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

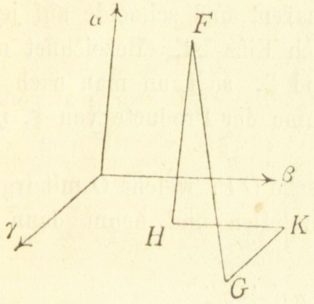
mit den drei Zahlen abc nur für $a = b = c = 0$ bestehen. Denn wäre z. B. $a \gtrless 0$, so wäre

$$\alpha = -\frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}\gamma.$$

Wenn man dann eine Strecke $AB = -\frac{b}{a}\beta$ und $AC = -\frac{c}{a}\gamma$ machte, so wäre $\alpha = AB + BC = AC$, daher AB, BC und α, und somit auch $\alpha\beta\gamma$ derselben Ebene parallel, weil AB und β, BC und γ parallel sind.

8) Ist δ eine vierte Strecke mit dem Anfangspunkt F und dem Endpunkt G (Figur 2), so lege man durch F eine Linie parallel α und bestimme auf ihr einen Punkt H durch eine Ebene, die G enthält und mit β und γ gleichzeitig parallel ist. In dieser Ebene lege man HK parallel mit β und bestimme K so, dass KG mit γ parallel ist. Dann ist

(Figur 2.)



$$FG = FH + HK + KG.$$

Weil die Strecken FH, HK, KG mit bezügl. α, β und γ parallel sind, kann man drei Zahlen abc so finden, dass

$$FH = a\alpha,\ HK = b\beta,\ KG = c\gamma$$

und folglich

$$\delta = FG = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

ist. Wäre durch eine andere Construction gefunden

$$FG = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$$

so müsste

$$0 = (a' - a)\,\alpha + (b' - b)\,\beta + (c' - c)\,\gamma$$

also nach dem Vorigen

$$a' = a,\ b' = b,\ c' = c$$

sein.

Wenn also α, β, γ drei Strecken sind, die weder in derselben Ebene liegen, noch derselben Ebene parallel sind, so kann man jede andere Strecke δ nur auf eine Weise als eine Summe von der Form

$$\delta = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

darstellen, wo abc Zahlen sind.

§ 5. Man kann sich der eben angegebenen Operationen bedienen, um den Begriff der Coordinaten und die Formeln zum Uebergang von einem Coordinatensystem zu einem andern aufzustellen.

Man lege durch einen Punkt O drei nicht derselben Ebene angehörige Linien, die Coordinatenaxen, und schneide auf jeder eine Strecke ab, deren Länge gleich Eins ist. Bezeichnet man diese Einheitsstrecken mit ξ, η und ζ, so kann man nach § 4 Nr. 8 jede andere Strecke als Summe der Producte von ξ, η, ζ in Zahlen darstellen.

Man kann also auch die Strecke OP, welche O mit irgend einem Punkte P verbindet, so darstellen und nennt dann die in der Gleichung

1) $$OP = x\xi + y\eta + z\zeta$$

auftretenden drei Zahlen xyz die Coordinaten des Punktes P.

Legt man durch einen Punkt O' drei neue Axen und sind ξ' η' ζ' die auf ihnen angenommenen Einheitsstrecken, x' y' z' die Coordinaten des nämlichen Punktes P in Bezug auf dieses zweite System, so ist

2) $$O'P = x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'.$$

Die drei Einheitsstrecken ξ' η' ζ' lassen sich aber wieder durch $\xi\eta\zeta$ und Zahlen darstellen. Sei

$$\begin{aligned} \xi' &= a\xi + b\eta + c\zeta \\ \eta' &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ \zeta' &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta \end{aligned}$$

und setzt man noch die Strecke OO'

$$OO' = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta$$

so folgt aus der Gleichung

3) $$OP = OO' + O'P$$

durch Eintragen eine Gleichung zwischen zwei Summen aus Producten von $\xi\,\eta\,\zeta$ in Zahlen. Weil $\xi\,\eta\,\zeta$ nicht derselben Ebene parallel sind, müssen die Coëfficienten der drei Strecken beiderseits gleich sein, wie aus Nr. 7 § 4 sich ergibt. So entstehen die Gleichungen.

4) $$\begin{aligned} x &= a_1 + a\,x' + a'\,y' + a''\,z' \\ y &= b_1 + b\,x' + b'\,y' + b''\,z' \\ z &= c_1 + c\,x' + c'\,y' + c''\,z', \end{aligned}$$

welche den Uebergang von den Coordinaten $x'\,y'\,z'$ des zweiten Systems zu den $x\,y\,z$ im ersten vermitteln.

§ 6. Um die Bewegung eines Körpers mit der Zeit vergleichen zu können, muss man im Stande sein, die verflossene Zeit in Zahlen angeben zu können. Dazu benützt man die Umdrehung der Erde um ihre Axe. Man legt durch die Richtung der Schwere an dem Beobachtungsorte sowie sie durch die Stellung eines frei hängenden Lothes gegeben ist, eine Ebene parallel mit der Richtung der Erdaxe und erhält so die Ebene des Meridians. Da die Erdaxe selbst ihre Lage im Erdkörper wechselt, so ist auch die Ebene des Meridians in der Erde nicht fest; indess ist die Veränderung so klein, dass man praktisch die Ebene des Meridians für jeden Erdort als eine mit der Erde fest verbundene ansehen kann. Als Sternzeit bezeichnet man dann den Winkel dieser Meridianebene mit der x-Axe des Systems (III) der in § 3 beschriebenen Coordinatensysteme, den man, um ihn in Stunden auszudrücken mit $\frac{24}{360}$ multiplicirt d. h. durch 15 dividirt. Da in Folge der Bewegung der Erde um die Sonne die Sternzeit nicht mit unsern von der Sonne abhängigen Tageszeiten übereinstimmt, hat man einen sog. mittleren Tag eingeführt, der gleich 24 Stunden, 3 Minuten, 56,555 Secunden Sternzeit ist. Diesen theilt man wieder in 24 Stunden zu 60 Minuten zu 60 Secunden, so dass eine Secunde mittlerer Zeit = 1,002738 Secunden Sternzeit ist. Die gewöhnlichen Uhren geben die mittlere Zeit an, und werden mit Hilfe der Sternzeit regulirt, die man aus den astronomischen Beobachtungen finden kann. In der Mechanik dient als Einheit der Zeit gewöhnlich die Secunde mittlerer Zeit, so dass die zwischen zwei Ereignissen verflossene Zeit in Secunden mittlerer Zeit anzugeben ist.

§ 7. Die Bewegung eines Punktes gegen ein bestimmtes Coordinatensystem ist vollständig bekannt, sowie man seine Coordinaten xyz in dem System als Functionen der Zeit kennt. Gesetzt es seien $x = f(t)$, $y = g(t)$ $z = h(t)$ diese drei Functionen. Construirt man nun mit irgend einem Werth t_1 einen Punkt P_1 mit den Coordinaten $x = f(t_1)$, $y = g(t_1)$, $z = h(t_1)$, und denkt sich P_1 fest mit dem Coordinatensystem verbunden, so dass seine Coordinaten im Laufe der Zeit sich nicht ändern, so wird offenbar zur Zeit t_1 der bewegliche Punkt mit dem Punkt P_1 zusammenfallen. Macht man diese Construction für alle möglichen Werthe von t_1, so erhält man eine mit dem Coordinatensystem fest verbundene Curve mit deren Punkten nach und nach der bewegliche Punkt zusammenfällt und die man die Bahn des Punktes in dem angenommenen Coordinatensystem nennt.

Sei zur Zeit t der bewegliche Punkt im Punkte P seiner Bahn, zur Zeit $t + t'$ im Punkte P'; P habe die Coordinaten xyz, P' die $x'y'z'$, dann ist

$$OP = \varrho = x\xi + y\eta + z\zeta$$
$$OP' = \varrho' = x'\xi + y'\eta + z'\zeta$$

folglich

$$PP' = \varrho' - \varrho = (x' - x)\,\xi + (y' - y)\,\eta + (z' - z)\,\zeta$$

Entwickelt man $x' - x = f(t + t') - f(t)$ nach dem Taylor'schen Satze, verfährt ebenso mit $y' - y$ und $z' - z$, so folgt durch Zusammenfassen der Glieder

$$1)\qquad \varrho' - \varrho = \gamma t' + \tfrac{1}{2}\beta t'^2 + \ldots.$$

wo

$$2)\qquad \begin{cases} \gamma = \dfrac{dx}{dt}\xi + \dfrac{dy}{dt}\eta + \dfrac{dz}{dt}\zeta \\[2ex] \beta = \dfrac{d^2x}{dt^2}\xi + \dfrac{d^2y}{dt^2}\eta + \dfrac{d^2z}{dt^2}\zeta \end{cases}$$

bestimmte Strecken sind, die nach Lage und Grösse noch von

t abhängig sein können. Man nennt die Strecke γ die Geschwindigkeit, die β die Beschleunigung zur Zeit t.

Aus Gl. (1) folgt:

$$\lim \frac{\varrho' - \varrho}{t'} = \frac{d\varrho}{dt} = \gamma$$

$$2 \lim \frac{\varrho' - \varrho - \gamma t'}{t'^2} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d\gamma}{dt} = \beta.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert

$$T\gamma = \lim T\left(\frac{\varrho' - \varrho}{t'}\right)$$

Es ist aber $\varrho' - \varrho$ die Sehne, welche die Punkte P und P' verbindet, folglich $T(\varrho' - \varrho)$ die Länge dieser Sehne. Ist die Länge des von ihr gespannten Bogens der Bahn s', so ist

$$\lim \frac{T(\varrho' - \varrho)}{t'} = \lim \left\{ \frac{T(\varrho' - \varrho)}{s'} \cdot \frac{s'}{t'} \right\}$$

und dies ist, weil der Grenzwerth des Quotienten $\frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$ gleich Eins ist, gleich $\lim \frac{s'}{t'}$. Diesen Grenzwerth nennt man die Geschwindigkeit in der Bahn. Bezeichnet man sie durch v so ist also

$$T\gamma = v.$$

Die Richtung von γ ist, weil t' eine Zahl ist, mit der von $\lim(\varrho' - \varrho)$ identisch; die Grenzlage der Sehne ist aber die Tangente der Bahn im Punkte P, folglich die Richtung der Geschwindigkeit die der Tangente an die Bahncurve.

Ist s die Länge des Bogens der Bahncurve von einem beliebigen Ursprung an gerechnet, so ist $v = \left[\frac{ds}{dt}\right]$.

Die drei Zahlen

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

die oben in Gl. 2) vorkamen, nennt man die Componenten der Geschwindigkeit nach den Coordinatenaxen, die

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$$

die Componenten der Beschleunigung nach den Coordinatenaxen.

Die Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{2}\delta t^2 + \varepsilon t + \vartheta$$

wo $\delta\,\varepsilon\,\vartheta$ gegebene Strecken sind, stellt eine Bewegung dar mit der constanten Beschleunigung δ und der Geschwindigkeit $\delta t + \varepsilon$; sie ist die einzige Bewegung mit der constanten Beschleunigung δ. Sind δ und ε parallel, so erfolgt die Bewegung in einer mit δ und ε parallelen Linie; sind δ und ε nicht parallel, so geht die Bewegung in einer Parabel vor sich, deren Ebene mit den beiden Strecken δ und ε parallel ist und deren Hauptaxe mit δ parallel ist.

§ 8. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer bestimmten Bewegung werden vom Coordinatensystem abhängen, in dem man die Bewegung beobachtet. Es soll nun der Zusammenhang zwischen jenen Strecken und dem Coordinatensystem untersucht werden.

Es beschreibe ein Punkt in einem Systeme Σ_1 eine Bahn C_1 und in einem zweiten Systeme Σ_2 die Bahn C_2. P_1 und P_2 seien die beiden Punkte von C_1 resp. C_2, in welchen sich der beobachtete Punkt zur Zeit t befindet und die natürlich zur Zeit t in demselben Raumpunkt vereinigt sein müssen. Beziehen sich die Einheitsstrecken $\xi\,\eta\,\zeta$ auf das System Σ_1, die $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ auf Σ_2, so wird nach § 5 (2) und (3) der Radius Vector ϱ im System Σ_1 gegeben durch

$$(1) \qquad \varrho = \lambda + x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'$$

wenn $x'\,y'\,z'$ die Coordinaten zur Zeit t im System Σ_2 und λ die Strecke $O\,O'$ ist, die den Anfangspunkt O von Σ_1 mit dem O' von Σ_2 verbindet. Die Strecken $\lambda\,\xi'\,\eta'\,\zeta'$ müssen als Functionen der Zeit mit Hilfe von Strecken, die im System Σ_1 fest sind, gegeben sein, oder mit andern Worten die in den Gll. (4) § 5 auftretenden 12 Zahlen $a_1 \ldots c''$ müssen als Functionen der Zeit bekannt sein, damit die Lage des zweiten Systems gegen das erste bekannt ist. Die Differentiation von (1) liefert nun

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt} + x'\frac{d\xi'}{dt} + y'\frac{d\eta'}{dt} + z'\frac{d\zeta'}{dt} \\ &\quad + \xi'\frac{dx'}{dt} + \eta'\frac{dy'}{dt} + \zeta'\frac{dz'}{dt}; \end{aligned}$$

$\frac{d\varrho}{dt}$ ist die Geschwindigkeit γ in Σ_1; die zweite Zeile gibt nach (2) § 7 die Geschwindigkeit γ' in Σ_2, deren Lage gegen Σ_1 bekannt ist, weil man die Lage von Σ_2 gegen Σ_1 kennt; die Summe in der ersten Zeile ist die Geschwindigkeit, die im Systeme Σ_1 ein Punkt hat, der sich gegen Σ_2 nicht bewegt, also mit ihm fest verbunden ist und die Coordinaten $x' y' z'$ besitzt. Diese Geschwindigkeit, die wir mit Γ bezeichnen wollen, heisst die Führungsgeschwindigkeit. Also ergibt sich die Beziehung

$$\gamma = \gamma' + \Gamma. \tag{2*}$$

Differentiirt man ein zweites Mal, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d^2\lambda}{dt^2} + x'\frac{d^2\xi'}{dt^2} + y'\frac{d^2\eta'}{dt^2} + z'\frac{d^2\zeta'}{dt^2}\\ + 2\left(\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\xi'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\eta'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\zeta'}{dt}\right)\\ + \frac{d^2x'}{dt^2}\cdot\xi' + \frac{d^2y'}{dt^2}\eta' + \frac{d^2z'}{dt^2}\zeta'\end{aligned} \tag{3}$$

Hier steht links die Beschleunigung β in Σ_1, rechts in der letzten Zeile, nach (2) § 7 die Beschleunigung β' in Σ_2, in der ersten Zeile die Beschleunigung, welche gegen Σ_1 ein Punkt zeigt, der mit Σ_2 fest verbunden ist und die Coordinaten $x' y' z'$ hat. Sie soll die Führungsbeschleunigung heissen. Die mittlere Zeile endlich stellt eine gewisse Strecke dar, die man die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung nennt. Bezeichnet man die Summen der ersten und zweiten Zeile mit B so ist demnach

$$\beta = \beta' + B \tag{3*}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) kann man also aus der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Punktes im System Σ_2 die entsprechenden Grössen, wie sie sich im System Σ_1 darstellen würden, bestimmen, wenn die Lage von Σ_2 gegen Σ_1 fur jede Zeit bekannt ist.

II. Mechanik des materiellen Punktes.

§ 9. Die Bewegung eines Körpers kann nur dadurch verfolgt werden, dass man die Aenderungen in der Lage und Gestalt seiner Oberfläche untersucht. Im Falle eines festen Körpers sind uns die Veränderungen im Innern zunächst ganz unzugänglich, bei flüssigen und gasförmigen kann man zwar innere Bewegungen studiren aber nur indem man kleine in den flüssigen Körpern suspendirte Körperchen beobachtet.

In vielen Fällen kann man sich nun damit begnügen, irgend einen mit dem Körper verbundenen oder an ihm befindlichen mathematischen Punkt zu beobachten und seinen Ort als Funktion der Zeit zu bestimmen. Man kann z. B. den Körper in ein rechteckiges Parallelepiped einschliessen, dessen Seiten den Coordinatenebenen parallel sind und dann die Coordinaten einer bestimmten der 8 Ecken als Funktionen der Zeit darstellen. Oder man kann statt dieses Punktes den Mittelpunkt des Parallelepipeds wählen. Die Unterschiede in den Coordinaten werden um so kleiner sein, je kleiner die Dimensionen des Körpers sind und sich mit diesen der Null nähern. Man nimmt nun an, dass auch die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen der verschiedenen Punkte, die man beobachten kann z. B. der Mitte und einer Ecke des Parallelepipeds Differenzen ergeben, die sich ebenfalls mit den Dimensionen des Körpers der Null nähern oder dass diese Differenzen unendlich klein sind für einen unendlich kleinen Körper. Einen physischen Körper, dessen Dimensionen so klein gemacht oder gedacht sein können als man will, nennt man einen materiellen Punkt, wenn man zugleich an einen mit der Verkleinerung der Dimensionen zu verbindenden Grenzübergang denkt.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der verschiedenen mit einem materiellen Punkt in Verbindung gesetzten geometrischen Punkte werden bei dem Grenzübergang gleich und man kann folglich von der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des materiellen Punktes sprechen.

Aus der Beobachtung der Thatsache, dass die physischen Körper auf einander Einwirkungen ausüben und aus den Gesetzen dieser Wirkungen hat man nun Hypothesen über die gegenseitigen Wirkungen von materiellen Punkten abgeleitet, die ihre Hauptstütze darin finden, dass die aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen.

Man macht zuerst die Annahme, dass zwei materielle Punkte, die aufeinander wirken, sich gegenseitig Beschleunigungen ertheilen, wenn sie vollständig frei den Einwirkungen folgen können. Das Studium der näheren Umstände, von welchen die Grösse und Richtung der Beschleunigung abhängt, die ein Punkt dem andern ertheilt, liegt der Physik ob; für die Mechanik ist es nur von Interesse zu wissen, dass eine Wirkung stattfindet und welche Beschleunigung als Resultat derselben sich ergibt, während ihr die physikalische Ursache, der wirkende Körper, gleichgültig ist. Man hat desshalb auch für diese Ursache einen allgemeinen Namen Kraft eingeführt, so dass man unter dem Ausspruche „es wirkt eine Kraft" nur versteht, dass eine Beschleunigungsursache vorhanden ist.

Um die verschiedenen Wirkungen derselben Ursache auf verschiedene Körper zu erklären, legt man jedem materiellen Punkt einen von seiner chemischen und physikalischen Beschaffenheit abhängigen Coefficienten die sog. Dichte bei, über deren Bestimmung nachher gehandelt werden wird. Das Product aus dem Volumen eines materiellen Punktes in seine Dichte heisst seine Masse.

§ **10.** Die Beschleunigung, die ein Körper einem andern ertheilt, ist natürlich ihrer Grösse und ihrer Richtung nach abhängig von dem Coordinatensystem, in dem man die Bewegung verfolgt. Gewöhnlich legt man nun um die Kraft zu messen, ein System zu Grunde, das absolut im Raume ruht. Allerdings ist man nach dem früher Gesagten nicht im Stande, die Bewegungen in Bezug auf ein solches System zu beobachten. Trotzdem kann man die Kräfte theilweise, auf Grund gewisser Hypothesen, erkennen, wie wir sehen werden. Dabei wird sich zeigen, dass man umgekehrt, wenn man beobachtbare Erscheinungen berechnen will, auch nicht mehr von den Kräften im absolut ruhenden System zu kennen braucht, als man in der That zu erkennen im Stande ist.

Gesetzt man habe die Wirkung einer bestimmten Kraft K auf einen materiellen Punkt beobachtet und in dem absolut ruhenden System die Beschleunigung gefunden, die nach Grösse und Richtung durch die Strecke β gegeben ist, so versteht man unter der Richtung der Kraft die Richtung von β, und unter der Grösse das Product aus der Grösse von β in die Masse des materiellen Punktes.

Ist also p die Dichte desselben und dV das unendlich kleine Volumen, so ist $p\,dV$ die Masse dm und $p\,dV \cdot T\beta$ die Grösse der Kraft. Man kann daher die Kraft nach Grösse und Richtung durch eine Strecke $\varkappa$ darstellen, die durch die Gleichung

$$1) \qquad \varkappa = p\,dV \cdot \beta$$

mit β zusammenhängt. Eine Kraft, die einem materiellen Punkt eine endliche Beschleunigung ertheilt, ist also unendlich klein und man denkt bei ihr auch immer, wie bei dem materiellen Punkt, an einen vorzunehmenden Grenzübergang.

Wenn im Folgenden gesagt ist, eine Kraft sei gegeben durch eine Strecke $\varkappa$, so soll diess stets heissen, dass sie einem materiellen Punkte von der Masse dm eine Beschleunigung gegen das absolut ruhende System zu ertheilen vermöge, die nach Grösse und Richtung durch die Strecke $\frac{\varkappa}{dm}$ gegeben wird.

Wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Punkt wirken, die demselben einzeln die Beschleunigungen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ gegen das absolut ruhende System ertheilen würden, so entsteht durch ihr Zusammenwirken eine Beschleunigung β, die, wie man als Hypothese annimmt, die Gleichung

$$3) \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$$

erfüllt. Die Kräfte, welche die Beschleunigungen $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n$ hervorbringen, sind gegeben durch die Strecken $\varkappa_1 = \beta_1 dm$, $\varkappa_2 = \beta_2 dm, \ldots$; die Beschleunigung β würde durch die Kraft $\varkappa = \beta\, dm$ hervorgerufen werden. Folglich ergibt sich, dass

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$$

ist, so dass mehrere gleichzeitig auf einen Punkt wirkende Kräfte durch eine einzige Kraft in ihrer Wirkung ersetzt werden können, die der Summe der gegebenen Kräfte gleich ist. Diese letzteren heissen die Componenten, die erstere die Resultante. Wirken nur zwei Kräfte, so ist $\varkappa$ die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind; desswegen heisst die obige Hypothese die vom Parallelogramm der Kräfte.

Die gegebene Definition der Kraft in Verbindung mit dem Parallelogrammgesetz kann man in die folgende Formulirung des Begriffes Kraft zusammenfassen. Wenn man die Strecke $p\,dV\cdot\beta$ als eine Summe von Strecken darstellt, so heisst jede dieser Strecken eine Kraft. Freilich kann diese Zerlegung auf unendlich viele Arten erfolgen; es gibt aber manchmal solche Zerlegungen, bei welchen die einzelnen Summanden sich in ursächlichen Zusammenhang mit Naturkörpern setzen lassen, oder vielleicht den bekannten Wirkungen derselben genau entsprechen. Zerlegungen dieser Art werden natürlich von höherem Interesse sein als die andern. Der Begriff der Kraft, wie er sich in dieser Auffassung darstellt, entspricht vollständig dem Verfahren, welches die Naturwissenschaft bei der Erkenntniss neuer Kräfte anwendet. Als z. B. von Adams und Leverrier die Beschleunigung des Planeten Uranus, wie sie sich aus den Beobachtungen ergeben hatte, in eine Summe von Strecken zerlegt wurde, welche einzeln die Einwirkungen der Sonne und der übrigen Planeten darstellten, so fand sich, dass noch ein Rest blieb. Unter der Annahme, dass dieser von einem noch unbekannten Planeten herrühre, gab dieser Rest die Richtung vom Uranus nach diesem neuen Körper und erlaubte so dessen Ort zu finden. In ähnlicher Weise führt jeder unerklärte Summand, der bei der Zerlegung einer Beschleunigung auftritt, zur Entdeckung einer neuen Kraft.

Das Gesetz der Trägheit ist in der oben gegebenen Definition der Kraft enthalten. Man kann aus ihm noch schliessen, dass wenn auf einen materiellen Punkt keine Kraft wirkt, derselbe im absolut ruhenden Coordinatensystem keine Beschleunigung hat, d. h. sich in gerader Linie mit constanter

Geschwindigkeit bewegt. Daraus folgt dann, dass zwei Punkte, auf die keine Kräfte wirken, sich so bewegen, dass die von ihnen in derselben Zeit durchlaufenen Strecken ein constantes Verhältniss haben. Man könnte also die von einem dieser Punkte durchlaufene Strecke zum Maass der Zeit nehmen und hätte dann ein vom gewählten Punkte nicht abhängiges Maass, wenn überhaupt die Beobachtung möglich wäre.

Eine letzte Hypothese der Mechanik ist die von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung oder der Action und Reaction. Sie sagt aus, dass, wenn ein materieller Punkt A_1 vom Volum dV_1 und der Dichte p_1 auf einen zweiten Punkt A_2 vom Volum dV_2 und der Dichte p_2 einwirkt und ihm die Beschleunigung β_2 ertheilt, umgekehrt der zweite dem ersten eine Beschleunigung β_1 ertheilt, die mit β_2 durch die Gleichung verbunden ist

$$4)\qquad p_1 dV_1 \cdot \beta_1 = -p_2 dV_2 \cdot \beta_2$$

oder einfacher, dass die von A_1 auf A_2 ausgeübte Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist mit der von A_2 auf A_1 ausgeübten. Die Gleichung (4) müsste, um einen mathematischen Sinn zu geben, geschrieben werden

$$4^*)\qquad p_1 \frac{\beta_1}{dV_2} = -p_2 \frac{\beta_2}{dV_1}$$

und dann müssten beiderseits die Grenzwerthe gesetzt werden, die der unendlichen Abnahme der beiden Volumina dV_1 und dV_2 entsprechen. Ohne diese Bedingungen muss auf der einen Seite noch eine Correction beigefügt werden, die mit dV_1 und dV_2 unendlich klein ist und die mit ε bezeichnet sein mag. Dann ist die Hypothese strenge durch die Gleichung

$$5^*)\qquad p_1 dV_1 \cdot \beta_1 = -p_2 dV_2 \cdot \beta_2 + dV_1 \cdot dV_2 \cdot \varepsilon$$

ausgesprochen.

Die Gleichung (4) könnte zunächst zur Bestimmung der Massenverhältnisse dienen (unter der Annahme, dass die Beobachtungen ausführbar wären). Sie hat aber noch eine weitere Bedeutung. Denkt man sich nämlich n Punkte miteinander verglichen, so entstehen $\frac{1}{2} n(n-1)$ Gleichungen wie (4), in welchen nur $n - 1$ Verhältnisse der Massen auftreten. Die Elimination dieser liefert $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Beziehungen zwischen den Beschleunigungen, die, wie jenes Princip aussagt, thatsächlich erfüllt werden. Somit ist die Möglichkeit für jeden materiellen Punkt einen bestimmten Werth der Masse zu finden, der allen anderen Punkten gegenüber derselbe bleibt, eine Folge des Princips der Gleichheit der Action und Reaction.

In den rein mechanischen Anwendungen ist die Dichte stets positiv, in den physikalischen Anwendungen auf die Theorie der Electricität und des Magnetismus kann der hier mit Dichte bezeichnete Coefficient auch negativ werden, wenn er sich auf einen materiellen Punkt bezieht, der Träger von negativer Electricität oder von negativem Magnetismus ist.

Die Dichte eines bestimmten materiellen Punktes ist variabel. Dagegen hat man bis jetzt noch keinen Grund gehabt, auch die Masse $= p\,d\,V$ als veränderlich mit der Zeit anzunehmen, obgleich der Mechanik aus variablen Massen nur mathematische Schwierigkeiten erwachsen würden.

§ 11. Der in Formel (3) des vorigen § angegebene Zusammenhang zwischen der Beschleunigung eines materiellen Punktes und den Kräften die auf den Punkt wirken, setzt voraus, dass, wie bei den vorigen Betrachtungen stets, das absolut im Raum ruhende Coordinatensystem zu Grunde gelegt ist, das wir künftig mit Σ bezeichnen wollen. Es soll nun untersucht werden, wie die Formel sich verändert, wenn man vom System Σ zu einem sich gegen Σ bewegenden System Σ' übergeht.

Es möge eine bestimmte Bewegungsursache einem materiellen Punkte eine Bewegung ertheilen, deren Beschleunigung im System Σ gleich β und im System Σ' gleich β' ist. Bezeichnet man die von der Bewegung des Systems Σ' gegen Σ herrührenden Zusätze, wie in Gl. (3*) § 8 mit B, so ist

$$\beta = \beta' + B.$$

Nach der Beobachtung im System Σ würde man der Bewegungsursache eine Kraft zuschreiben, die nach Grösse und

Richtung durch die Strecke $dm \cdot \beta$ dargestellt würde, wo $dm = p\,dV$ gesetzt ist. Man kann diese die absolute Kraft nennen; sie sei mit $\varkappa$ bezeichnet. Nach der Beobachtung im System Σ' dagegen würde man eine Kraft $\varkappa' = dm \cdot \beta'$ voraussetzen, die man die relative nennen kann. Zwischen beiden besteht die Beziehung

$$(1) \qquad \varkappa = \varkappa' + dm \cdot B$$

die angibt, wie man aus der relativen Kraft die absolute finden kann, wenn die Bewegung von Σ' gegen Σ bekannt ist. Wenden wir dies an auf den Fall, dass mehr als eine, etwa n Kräfte auf den Punkt wirken. Sind sie durch die Strecken $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ nach Grösse und Richtung im System Σ bestimmt, so ist nach (3) § 10

$$dm \cdot \beta = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$$

also

$$(2) \qquad dm \cdot \beta' = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots - dm \cdot B$$

$\varkappa_1 - dm \cdot B$ ist die der absoluten Kraft $\varkappa_1$ entsprechende relative Kraft, die wir mit $\varkappa_1'$ bezeichnen wollen. Somit hat man

$$(3) \qquad dm \cdot \beta' = \varkappa_1' + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$$

woraus man die Summe von $n - 1$ absoluten Kräften finden kann, wenn man die letzte im relativen System kennt.

Wenn also nur zwei Kräfte thätig sind und von diesen die eine relativ bekannt ist, so kann man die andere absolut finden. Bei den Bewegungen, die man auf der Erde gegen ein mit ihr fest verbundenes System beobachtet, kommt zu allen Kraftwirkungen stets noch die anziehende Kraft der Erde hinzu. Gegen das mit der Erde festverbundene System ist die relative Kraft der Erde leicht zu bestimmen: sie wirkt nämlich vertical nach abwärts und ihre Grösse ist an der Erdoberfläche in der geographischen Breite φ gegeben durch das Product der Masse in eine Zahl, die man mit g bezeichnet und deren Werth (nach Listing)

$$g = 9{,}780728 + 0{,}050875 \sin^2 \varphi$$

ist, wobei das Meter als Längeneinheit zu Grunde gelegt ist. Wenn man also bei Beobachtungen von Kräftewirkungen auf der Erde von dem beobachteten $dm \cdot \beta'$ die der Schwere entsprechende relative Kraft $\varkappa_1'$, wie sie eben beschrieben ist, abzieht, so bleibt die Summe der wirkenden absoluten Kräfte zurück. Insbesondere sind die auf diesem Wege gefundenen Wirkungsgesetze verschiedener Agentien die im absoluten Systeme geltenden.

§ 12. Die Beziehung $p\,dV \cdot \beta = \varkappa$ zwischen Kraft und Beschleunigung liefert in der Theorie ein Mittel, um die Verhältnisse der Massen zu bestimmen. Denn bringt eine zweite Kraft $\varkappa_1$, die auf einen Körper von der Masse $p_1\,d\,V_1$ wirkt, die Beschleunigung β_1 hervor, so ist

$$\frac{p}{p_1} \cdot \frac{d\,V}{d\,V_1} = \frac{T\varkappa}{T\varkappa_1} \cdot \frac{T\beta_1}{T\beta}.$$

Die Masse eines ganzen Körpers findet sich, wenn die Dichte in jedem einzelnen Punkte bekannt ist, durch Theilung in unendlich viele, unendlich kleine Theile und Summation von deren Massen gleich

$$lim\ \Sigma p \cdot d\,V = \int p\,d\,V$$

wo das Integralzeichen rechts die Stelle eines dreifachen vertritt, das sich über das ganze Innere des Körpers erstreckt. Ist die Dichte überall constant, so nennt man den Körper homogen mit Masse erfüllt. Die Masse ist dann $= p \int d\,V = p \cdot$ Volumen.

Andernfalls spricht man von einer mittleren Dichte, worunter man die Dichte versteht, welche eine homogene Massenvertheilung haben müsste, um dieselbe Masse für den Körper zu liefern, die er thatsächlich hat. Diese mittlere Dichte ist offenbar $= \int p\,d\,V : \int d\,V$.

Die Theorie der Waage zeigt nun, dass zwei Körper, die an der Waage sich als gleich schwer erweisen, die gleiche Masse haben. Man kann also mit diesem Instrumente bequem die uns zugänglichen Massen vergleichen.

Um die Massen durch Zahlen auszudrücken, muss man eine bestimmte Masse als Einheit wählen. Entweder wählt man nun nach Gauss als Einheit die Masse eines Kilogramms, wodurch die Masse eines Körpers, der G Kilogramm wiegt gleich G wird (absolutes Maasssystem); oder man setzt „Eins", die Masse von g Kilogramm, wo g die Beschleunigung der Schwere an einem bestimmten Erdorte ist, wodurch dann ein G Kilogramm wiegender Körper die Masse $\frac{G}{g}$ erhält (technisches System). Für viele, besonders technische, Zwecke kann man dabei $g = 9{,}81$ setzen, wenn das Meter als Längeneinheit angenommen wird.

Die Dichte p ist natürlich abhängig ausser von der Masseneinheit auch von der angenommenen Längeneinheit, die man zur Bestimmung der Volumzahl braucht; und zwischen der Dichte p, der Massenzahl dm und der Volumzahl dV oder, wie man kurz sagt, der Masse und dem Volum eines materiellen Punktes besteht die Gleichung

$$dm = p\,dV.$$

Für einen zweiten materiellen Punkt seien p_0, dm_0, dV_0 Dichte, Masse und Volum, dann ist

$$dm_0 = p_0\,dV_0;$$

daher

1) $$\frac{p}{p_0} = \frac{dm}{dV} : \frac{dm_0}{dV_0}$$

von den Einheiten unabhängig. Man nennt diesen Quotient das specifische Gewicht, indem man unter dem zweiten materiellen Punkt gewöhnlich ein Wassertheilchen von $4^0\,C$ versteht. Ist u das specifische Gewicht, so ist also

2) $$dm = u\,dV \cdot p_0 = u \cdot dV \cdot \frac{dm_0}{dV_0}.$$

Nach der Definition des Kilogramm ist ein Kilogramm an der Waage gleichschwer mit einem Cubikdecimeter Wasser von 4^0 C. Folglich hat 0,001 cbm Wasser von 4^0 C nach dem Gauss'schen System die Masse 1 und folglich haben dV_0 cbm die Masse $dm_0 = 1000\,dV_0$, so dass

3) $$dm = 1000\,u\,dV$$

ist. Nach dem technischen System dagegen wird

3*) $$dm = \frac{1000\,u\,d\,V}{g}.$$

In beiden Formeln 3) und 3*) ist $d\,V$ in Cubikmetern auszudrücken.

§ 13. Ist die auf einen Punkt von der Masse dm wirkende Kraft $\varkappa$ bekannt, und ist β die Beschleunigung im absolut ruhenden System Σ, so ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$\varkappa = dm \cdot \beta = dm \cdot \frac{d^2 \varrho}{d\,t^2}$$

wenn ϱ den Radius Vector in dem System Σ bezeichnet.

Wirken mehrere Kräfte und ist $\Sigma\varkappa$ ihre Summe so lautet die Gleichung

1) $$dm \cdot \frac{d^2 \varrho}{d\,t^2} = \Sigma\varkappa.$$

Soll aber die relative Bewegung gegen ein anderes System Σ' als das absolute bestimmt werden, so sei β' die Beschleunigung im zweiten System und nach § 8 (3*)

$$\beta = \beta' + B;$$

dann folgt, wenn ϱ' den Radius Vector im System Σ' bezeichnet,

$$d\,m \cdot \frac{d^2 \varrho'}{d\,t^2} = \Sigma\varkappa - d\,m \cdot B.$$

Damit die rechte Seite bekannt sei muss eine der gegebenen Kräfte $\varkappa_1\,\varkappa_2 \ldots, \varkappa_1$ z. B. nach ihrer relativen Grösse gegeben sein. Ist diese $\varkappa_1'$, so ist ja

$$\varkappa_1' = \varkappa_1 - dm \cdot B$$

und daher

2) $$dm \cdot \frac{d^2 \varrho'}{d\,t^2} = \varkappa_1' + \varkappa_2 + \ldots$$

die Bewegungsgleichung. Man sieht hieraus, dass man zur Untersuchung einer unserer Beobachtung zugänglichen Erscheinung nicht mehr von den absoluten Kräften zu wissen braucht, als man nach § 11 gerade zu erfahren im Stande ist.

Sei, unter Einführung der Coordinaten in Gl. 1),

$$\varrho = x\xi + y\eta + z\zeta$$
$$\varkappa = X\xi + Y\eta + Z\zeta$$

so wird aus Gleichung 1)

$$\left.\begin{aligned} dm\cdot\frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma X \\ dm\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma Y \\ dm\cdot\frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma Z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

XYZ nennt man die Componenten der Kraft $\varkappa$ nach den Coordinatenaxen.

Es sollen nun für einige Bewegungsprobleme die Gleichungen aufgestellt werden.

A) Wenn sich ein Punkt von der Masse dm in der Nähe der Erdoberfläche bewegt, so übt die Erde eine Kraft auf ihn aus, die, gemessen in dem mit der Erde fest verbundenen Coordinatensystem I des § 3, die Grösse $g\,dm$ hat (wo g die in § 11 gegebene Zahl ist) und vertical nach abwärts gerichtet ist. Bezeichnen wir mit α eine vertical nach abwärts gerichtete Strecke von der Länge Eins, so ist

$$dm\cdot\frac{d^2\varrho}{dt^2} = g\,dm\cdot\alpha$$

woraus

4) $$\varrho = \frac{1}{2}gt^2\alpha + \gamma_0 t + \varrho_0$$

folgt, wo γ_0 und ϱ_0 Geschwindigkeit und Radius Vector zur Zeit $t = 0$ bezeichnen. (Siehe Schluss von § 7).

B) Indem wir die Bewegung der Planeten um die Sonne betrachten, wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass ausser der Sonne nur zwei Planeten vorhanden seien und dass alle drei Körper als mathematische Punkte betrachtet werden können. Es sei m_0 die Masse der Sonne, m_1 und m_2 die Massen der beiden Planeten. Jeder der drei Körper übt auf die beiden andern eine Anziehung aus, die nach dem Newton'schen Gesetze gleich ist dem Product aus einer Constanten k in die Massen des anziehenden und angezogenen Körpers und in das reciproke Quadrat ihres Abstandes, und deren Richtung in die Verbindungslinie des anziehenden und angezogenen Punktes fällt. Ferner mögen von den Sternen her auf die drei Körper noch Kräfte ausgeübt werden, die nach Grösse und Richtung resp. $m_0 \varkappa_0'$, $m_1 \varkappa_1'$, $m_2 \varkappa_2'$ sein mögen. Bezeichnen wir mit β_0, β_1, β_2 die Beschleunigungen, bezogen auf das im Raum absolut ruhende Coordinatensystem, mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Strecken, die von der Masse m_0 nach m_1 und m_2 gehen, mit ϱ die Strecke von m_1 nach m_2 und mit $r\ r_1\ r_2$ die Längen dieser Strecken, so sind die drei Bewegungsgleichungen

$$5)\quad \begin{cases} m_0 \beta_0 = \dfrac{k m_0 m_1}{r_1^3} \varrho_1 + \dfrac{k m_0 m_2}{r_2^3} \varrho_2 + m_0 \varkappa_0' = m_0 (\varkappa_0 + \varkappa_0') \\ m_0 \beta_1 = - \dfrac{k m_1 m_0}{r_1^3} \varrho_1 + \dfrac{k m_1 m_2}{r^3} \varrho + m_1 \varkappa_1' = m_1 (\varkappa_1 + \varkappa_1') \\ m_2 \beta_2 = - \dfrac{k m_2 m_0}{r_2^3} \varrho_2 - \dfrac{k m_1 m_2}{r^3} \varrho + m_2 \varkappa_2' = m_2 (\varkappa_2 + \varkappa_2') \end{cases}$$

Nun soll die Bewegung auf das oben § 3 mit V' bezeichnete System bezogen werden, dessen Ursprung der Sonnenmittelpunkt ist. In diesem System hat also die Masse m_0 die Beschleunigung Null, die m_1 und m_2 mögen die Beschleunigungen β_1' und β_2' haben.

Die Beschleunigung im absoluten System wird aus der im bewegten System nach Formel (3) des § 8 durch Zusatz von gewissen Strecken gefunden, von welchen die erste dort mit $\dfrac{d^2 \lambda}{d t^2}$ bezeichnete hier gleich β_0 ist, wie man findet, wenn man jene Gleichung auf den Ursprung des Systems V' d. h. die Masse m_0 anwendet, für die $\dfrac{d^2 \varrho}{d t^2} = \beta_0$ ist, während die Coordinaten $x'\ y'\ z'$ und ihre Differentialquotienten verschwinden. Die andern noch zuzusetzenden Strecken mögen für die Masse m_1 die Summe α_1, für die m_2 die Summe α_2 haben. Dann ist

$$\beta_1 = \beta_1' + \beta_0 + \alpha_1$$
$$\beta_2 = \beta_2' + \beta_0 + \alpha_2$$

und folglich sind

$$\begin{cases} \beta_1' = \varkappa_1 - \beta_0 + \varkappa_1' - \alpha_1 \\ \beta_2' = \varkappa_2 - \beta_0 + \varkappa_2' - \alpha_2 \end{cases}$$

die Gleichungen für die Bewegung der beiden Planeten um die Sonne. Setzen wir für β_0 den Werth aus (5), so ergibt sich

6) $$\begin{cases} \beta_1' = \varkappa_1 - \varkappa_0 + \varkappa_1' - \varkappa_0' - \alpha_1 \\ \beta_2' = \varkappa_2 - \varkappa_0 + \varkappa_2' - \varkappa_0' - \alpha_2 \end{cases}$$

Die bisherigen Beobachtungen haben gezeigt, dass diese Gleichungen schon zu befriedigen sind, wenn man die Strecken $\varkappa_1' - \varkappa_0' - \alpha_1$ und $\varkappa_2' - \varkappa_0' - \alpha_2$ vernachlässigt.

Die Gleichungen, die dann entstehen

6*) $$\begin{cases} \beta_1' = \varkappa_1 - \varkappa_0 \\ \beta_2' = \varkappa_2 - \varkappa_0 \end{cases}$$

würden sich aber auch ergeben, wenn man das System V als ein absolut ruhendes betrachtete, in dem schon das Newton'sche Gesetz die Anziehungskräfte beherrscht. Somit kann man das System V als ein im Raume ruhendes betrachten innerhalb der Genauigkeit der Beobachtungen wie sie die heutige Astronomie liefert. Wenn man diese Annahme macht und auf Grund der Newton'schen Hypothese die Bewegung der Erde gegen das System V berechnet, indem man dabei die Erde nicht mehr als Punkt behandelt, so ist man im Stande, die in § 3 erwähnte empirisch gefundene Bewegung des Systems IV gegen das V. zu erklären; ja nur auf Grund dieser Hypothese gelang die feinere Erforschung jenes empirischen Gesetzes.

C) Es sei nach Grösse und Richtung $m\vartheta$ die Kraft, die die Erde auf einen Punkt von der Masse m ausübt, wenn man diese Kraft im absoluten System oder, was nach dem Obigen praktisch dasselbe ist, im System V misst, $m\vartheta'$ dagegen dieselbe Kraft, gemessen im System II. Ist λ der Radius Vector des Erdmittelpunktes im Systeme V, so folgt aus Formel (3) des § 8

$$\vartheta = \vartheta' + \frac{d^2\lambda}{dt^2} + B'$$

wenn B' die in der angezogenen Formel auftretenden Zusatz-Strecken ohne $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ sind.

Das System II dreht sich um die z-Axe des Systems III und dieses ist selbst in einer Bewegung gegen System V begriffen. Da diese letztere aber sehr langsam ist, so wollen wir von ihr absehen und annehmen, das System III sei gegen das V in Ruhe. Sind dann in den Formeln des § 5 $\xi' \eta' \zeta'$ die drei Einheitsstrecken auf den Axen des Systems II, dagegen $\xi \eta \zeta$ die auf den Axen von III, so ist wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet mit der II um die z-Axe von III sich dreht

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t \\ \eta' &= -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t \\ \zeta' &= \zeta \end{aligned}$$

daher die vorher mit B' bezeichnete Strecke

$$= -\omega^2 (x' \xi' + y' \eta') + 2\omega \left(\frac{dx'}{dt} \eta' - \frac{dy'}{dt} \xi' \right)$$

wird.

Folglich ergibt sich endlich

$$\vartheta = \vartheta' + \frac{d^2\lambda}{dt^2} - \omega^2 (x' \xi' + y' \eta') + 2\omega \left(\frac{dx'}{dt} \eta' - \frac{dy'}{dt} \xi' \right).$$

Ist ein Punkt in einem bestimmten Momente relativ zum System II in Ruhe (was nur eintritt, wenn ausser der Erde noch eine andere Kraft auf ihn wirkt), so ist die Beschleunigung gegen dieses System, welche ihm die Erde zu ertheilen strebt

$$\vartheta' = \vartheta - \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \omega^2 (x' \xi' + y' \eta').$$

$\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ ist jedenfalls eine Function der Zeit und sonach erscheint auch ϑ' obiger Gleichung gemäss als Funktion der Zeit; indessen hat man eine solche Abhängigkeit noch nicht nachweisen können. Man kann daher ϑ' nach Grösse und Richtung in Bezug auf die Zeit als constant betrachten. Dagegen ist es abhängig von dem Erdort, in dem die Beobachtung angestellt wird und zwar ist die Richtung stets die des Lothes und seine Grösse für einen Punkt an der Erdoberfläche die oben in § 11 gegebene Zahl g. Bezeichnet man daher wie in (A) mit α eine vertical nach abwärts gerichtete Einheitsstrecke, so ist

$$\vartheta - \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \omega^2(x'\xi' + y'\eta') = g\alpha$$

und die Gleichung für die Bewegung eines Punktes an der Erdoberfläche gegen das System II wird, wenn man seinen Radius Vector in diesem System ϱ' nennt,

$$\text{7)} \qquad \frac{d^2\varrho'}{dt^2} = g\alpha - 2\omega\left(\frac{dx'}{dt}\eta' - \frac{dy'}{dt}\xi'\right).$$

§ 14. Wenn ein materieller Punkt nicht frei ist, d. h. wenn er nicht jede beliebige Bewegung ausführen kann, sondern nur solche, die ihm von irgend welchen Hindernissen gestattet werden, so wird er auch der Wirkung einer auf ihn ausgeübten Kraft nicht folgen können. Vielmehr wird er, wenn er sich wirklich bewegt und nicht etwa trotz der Kraft in Ruhe bleibt, eine gewisse Beschleunigung besitzen, die von der verschieden sein kann, welche ihm die Kraft ertheilen würde, wenn das Bewegungshinderniss nicht da wäre. Sei nach Grösse und Richtung β die letztere Beschleunigung, β' die der wirklich eintretenden Bewegung, so kann man setzen

$$\beta' = \beta + (\beta' - \beta).$$

Ist ferner dm die Masse des materiellen Punktes und $\varkappa$ die auf ihn wirkende Kraft, in demselben System gemessen, auf das β sich bezieht, so ist $dm\cdot\beta = \varkappa$ und folglich

$$dm\cdot\beta' = \varkappa + dm\cdot(\beta' - \beta)$$

$dm\cdot\beta'$ ist die Kraft, welche dem Punkte die Beschleunigung β', die er in der That hat, ertheilen würde, wenn er frei wäre.

Also bewegt sich der Punkt so, als ob er frei wäre, aber eine Kraft $\varkappa + dm\cdot(\beta' - \beta)$ auf ihn wirkte. Das Hinderniss liefert demnach zu der wirkenden Kraft noch eine Zusatzcomponente $\triangle = dm\cdot(\beta' - \beta)$. Würde man ein anderes Coordinatensystem zu Grunde legen und wären $\beta_1 \beta_1'$ die β und β' entsprechenden Beschleunigungen, so wäre

$$\beta_1 = \beta + B,\ \beta_1' = \beta' + B$$

wo die Strecke B in beiden Fällen dieselbe ist, weil sich die Betrachtungen auf einen und denselben Zeitpunkt beziehen. Folglich ist $\beta' - \beta = \beta'_1 - \beta_1$ und somit hängt die Grösse und Richtung von $\triangle$ nicht von der Wahl des benutzten Coordinatensystems ab.

Wie gross diese Zusatzkraft $\triangle$ ist, welche ein bestimmtes Hinderniss verlangt oder ausübt und nach welchen Gesetzen sie wirkt, kann nur durch Erfahrungen und Versuche bestimmt werden. Man beobachtet zu dem Zwecke $\varkappa$ und β' und findet dann die gesuchte Zusatzkraft

1) $$\triangle = dm \cdot \beta' - \varkappa.$$

Man kann auch die obige Gleichung so schreiben

$$dm \cdot \beta' = \varkappa - (-\triangle)$$

und dann sagen, die wirkliche Beschleunigung kommt zu Stande, indem von $\varkappa$ durch das Hinderniss ein Theil $= (-\triangle)$ vernichtet wird, so dass nur noch der Rest die Bewegung hervorbringt. Die Beobachtungen haben nun gelehrt, dass jedes Hinderniss nur Kräfte vernichten kann, die ihrer Grösse nach unter einer bestimmten Grenze liegen, dass dagegen das Hinderniss überwunden wird wenn jene Grösse die besagte Grenze übersteigt, wobei mit dem Rest der Kraft dann diejenige Bewegung eintritt, die auch ohne das Hinderniss eintreten würde. Ist demnach $-\triangle$ der Theil der Kraft, der vernichtet werden muss, damit eine bestimmte Bewegung zu Stande kommt, k_0 die Grösse der Kraft, die höchstens noch vernichtet werden kann, wenn sie in der Richtung von $-\triangle$ wirkt, so wird $-\triangle$ vernichtet, wenn $T\triangle < k_0$.

Ist dagegen $T\triangle \geqq k_0$, so wird von der Kraft $\varkappa$ nur ein in der Richtung von $-\triangle$ wirkender Theil von der Grösse k_0 vernichtet, den man nach Grösse und Richtung $= -k_0 \dfrac{\triangle}{T\triangle}$ setzen kann und es tritt Bewegung trotz des Hindernisses ein mit einer Kraft, die gleich

$$= \varkappa + k_0 \frac{\triangle}{T\triangle}$$

ist.

Wie gross die Grenze k_0 ist, hängt von der Natur des Hindernisses ab und kann in manchen Fällen nur mit Hilfe der Elasticitätslehre gefunden werden; in der Mechanik wird diese Grenze natürlich als bekannt angenommen. Die in der Mechanik am meisten gebrauchten Hindernisse sind Fäden, Stäbe, Curven und Flächen. Ein Faden kann nur eine Kraft vernichten, die in seine Richtung fällt und ihn zu spannen strebt; dagegen kann ein Stab nicht nur spannende oder ziehende, sondern auch drückende Kräfte vernichten. Die Grenze k_0 ist aber im ersteren Falle grösser als im zweiten, weil im letzteren sich der Stab biegt. Bei Curven und Flächen ist zu unterscheiden, ob sie glatt sind oder eine Reibung ausüben. Im ersten Falle können sie nur Kräfte zerstören, die zu ihnen senkrecht sind und nach dem Innern des Widerstand leistenden Körpers gerichtet sind.

§ 15. Wenn man die Probleme der Bewegung bei gegebenem Widerstande in geometrischer Weise behandeln will, muss man zuvor bestimmen, wie die Beschleunigung einer Bewegung mit der Krümmung der Bahn zusammenhängt.

Ist ϱ der Radius Vector eines Punktes P zur Zeit t und hat der Punkt auf seiner Bahn von einem beliebigen Anfangspunkt aus den Bogen s durchlaufen, so ist

$$\gamma = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

da man ϱ als Function von s ansehen kann, welches selbst eine Function von t ist. Dann folgt die Beschleunigung β' gleich

$$\beta' = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2\varrho}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2\varrho}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \gamma \cdot \left(\frac{d^2 s}{dt^2} : \frac{ds}{dt}\right)$$

Der absolute Werth des Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ ist aber nach § 7 die Geschwindigkeit in der Bahn $T\gamma$; im zweiten Gliede ist $\frac{d^2 s}{dt^2}$ die sog. Beschleunigung in der Bahn, weil dieser Differentialquotient die Veränderung der Geschwindigkeit in der Bahn misst. Um die Bedeutung von $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ zu erkennen, beachten wir, dass (wie wir schon in § 7 benutzten) $\frac{d\varrho}{ds}$ eine Strecke τ von der Länge Eins ist, die auf der Tangente der Bahn im Punkte P liegt.

Geht man zu einem unendlich benachbarten Punkt P' der Bahn über, welchem die Bogenlänge $s + ds$ entspricht, so wird die Strecke τ' von der Länge Eins, die auf die Tangente in P' liegt

$$\tau' = \frac{d\varrho}{ds} + \frac{d^2\varrho}{ds^2}\,ds$$

werden, so dass $\tau' = \tau + \frac{d^2\varrho}{ds^2}\,ds$ ist. Da ds eine Zahl ist, so zeigt diese Gleichung, dass die Strecken τ und $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ eine Ebene bestimmen, die sog. Schmiegungsebene, die mit τ' parallel ist. Weil die beiden Strecken τ und τ' die Länge Eins haben, steht die Strecke $\tau' - \tau$ nahezu senkrecht auf beiden und hängt mit dem Winkel $d\omega$ zwischen ihnen, dem Contingenzwinkel, durch die Gleichung

$$T(\tau' - \tau) = d\omega$$

zusammen. Es steht somit $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ auf der Tangente τ senkrecht und liegt in der Schmiegungsebene d. h. es hat die Richtung der Hauptnormalen und es ist

$$\frac{d\omega}{ds} = T\frac{d^2\varrho}{ds^2}$$

$\frac{ds}{d\omega}$ ist der Krümmungsradius r, den man sich vom Curvenpunkt aus auf der Hauptnormale nach der hohlen Seite der Curve aufgetragen denkt.

Wenn man aber den Radius Vector ϱ' von P' durch den Taylor'schen Satz ausdrückt, so ergibt sich

$$\varrho' = \varrho + \frac{d\varrho}{ds}\,ds + \frac{d^2\varrho}{ds^2}\,ds^2 + \ldots$$

$\varrho + \frac{d\varrho}{ds} ds$ ist der Radius Vector eines Punktes der Tangente in P; daher zeigt die Gleichung, dass die Curve von der Tangente sich nach der Seite hin abwendet, nach der $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ gerichtet ist, so dass die Richtung des Krümmungsradius mit der von $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ übereinstimmt. Bezeichnet man nun mit ν eine Einheitsstrecke, welche diese Richtung hat, so ist $T\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{1}{r}$, und folglich kann man nach den obigen Bemerkungen

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{\nu}{r}$$

setzen. Somit folgt endlich

1) $$\beta' = \frac{T\gamma^2}{r} \cdot \nu + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} : \frac{ds}{dt}\right) \cdot \gamma$$

Die Beschleunigung jeder Bewegung kann also als Summe von zwei Beschleunigungen dargestellt werden, die aufeinander senkrecht stehen: die eine hat die Richtung der Hauptnormale der Bahn, und zwar nach dem Krümmungsmittelpunkt hin, und die Grösse $\frac{T\gamma^2}{r}$, die zweite ist der Richtung der Geschwindigkeit parallel.

Eine Kraft $= \beta' dm$ wäre im Stande, einem freien Punkte die Beschleunigung β' zu ertheilen. Also kann eine gegebene Bewegung stets durch das Zusammenwirken einer

$$\text{Normalkraft} = dm \cdot \frac{T\gamma^2}{r} \cdot \nu$$

und einer

$$\text{Tangentialkraft} = dm \cdot \left(\frac{d^2 s}{dt^2} : \frac{d}{dt}\right) \cdot \gamma$$

erzeugt werden. Die Normalkraft wird auch zuweilen Centripetalkraft genannt.

§ **16.** Indem wir von der Behandlung der Reibung noch absehen, soll jetzt gezeigt werden, wie man die Bewegung finden kann, die unter dem Einfluss gegebener Kräfte und eines Hindernisses stattfindet. Da wir von Reibung absehen, kennt man die Richtung der Zusatzkraft $\triangle$, aber nicht deren Grösse; also tritt zu den drei unbekannten Coordinaten des beweglichen Punktes als vierte Unbekannte die Grösse von $\triangle$. Zu den drei Gleichungen, die aus der Gleichung

$$dm \cdot \beta' = \triangle + \varkappa$$

beim Uebergang zu Zahlen entspringen, kommt dann aber noch die Gleichung der Fläche hinzu, auf welcher der Punkt liegen soll, so dass ebensoviele Gleichungen als Unbekannte vorliegen. Bei der Bewegung auf einer Curve ist nur eine Ebene, die Normalebene nämlich, bestimmt, in der $\triangle$ liegen muss, so dass eine Unbekannte mehr da ist, dafür aber auch eine Gleichung mehr eintritt, weil die Curve durch deren zwei gegeben ist. Ist $\triangle$ bestimmt, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $T\triangle < k_0$ und $-\triangle$ hat die Richtung der Kräfte, welche durch den Körper vernichtet werden können, dann ist die gefundene Bewegung wirklich möglich und findet statt, indem ein Theil $= -\triangle$ der wirkenden Kraft vernichtet wird. Oder $-\triangle$ hat die besagte Richtung, aber es ist $T\triangle \geqq k_0$; dann wird das Hinderniss vernichtet und eine Bewegung unter Einfluss des Hindernisses ist nicht möglich. Wenn sich herausstellt, dass erst von einem gewissen Zeitpunkt an dies stattfindet, so ändert von diesem Punkt an die Aufgabe ihren Character, indem dann das Hinderniss nicht mehr in Betracht zu ziehen ist. Ist endlich $-\triangle$ nicht so gerichtet, dass es von dem Körper vernichtet werden kann, so ist eine Bewegung auf der Oberfläche des Körpers nicht möglich, es muss entweder der materielle Punkt das Hinderniss verlassen haben oder dieses muss seinen Character geändert haben in der Weise, dass, wenn z. B. das Hinderniss eine Fläche ist, die Seite der Fläche, die vorher mit Masse erfüllt war, jetzt hohl ist und umgekehrt.

Da die Kraft, welche, wenn der Punkt frei wäre, die Bewegung ebenso zu Stande bringen würde, wie sie verläuft, gleich $\beta' dm$ ist, so folgt aus (1) des vor. § in Verbindung mit (1) des § 14 dass, wenn man

$$\frac{ds}{dt} = s', \frac{d^2 s}{dt^2} = s'' \text{ setzt}$$

1) $$\varkappa + \triangle = \frac{T\gamma^2}{r} dm \cdot \nu + \frac{s''}{s'} dm \cdot \gamma$$

und folglich die zu vernichtende Kraft

$$-\triangle = \varkappa - \frac{T\gamma^2}{r} dm \cdot \nu - \frac{s''}{s'} dm \cdot \gamma$$

ist. Der Theil

$$-\frac{T\gamma^2}{r} dm \cdot \nu,$$

der normal zur Bahn gerichtet ist, heisst auch die Centrifugalkraft; insofern er zu Null wird, wenn die Geschwindigkeit γ zu Null wird, kann man die Geschwindigkeit als seine Ursache bezeichnen.

Wenn die Curve oder die Fläche, auf der der Punkt sich bewegen soll, rauh ist oder eine Reibung ausübt, so gibt sie zu zwei Widerständen Anlass oder sie kann zwei verschieden gerichtete Kräfte vernichten: nämlich einmal solche, die zu ihr senkrecht gerichtet sind und solche, die tangential gerichtet sind. Die letzteren müssen der Geschwindigkeit γ gleich gerichtet sein und dürfen eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten.

Aus den Beobachtungen hat sich ergeben, dass diese obere Grenze ein bestimmter Theil derjenigen Kraft ist, welche in normaler Richtung vernichtet wird. Bezeichnet man die Grösse dieser letzteren Kraft mit k, die der in tangentialer Richtung vernichteten mit k', so ist die erwähnte obere Grenze von k' gleich $f \cdot k$, unter f einen Zahlencoefficienten verstanden, der nur von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des beweglichen materiellen Punktes und des Körpers abhängt, auf dem die Bewegung vor sich geht. Von der Geschwindigkeit pflegt man diesen Reibungscoefficienten als unabhängig anzunehmen, obgleich die Beobachtungen zeigen, dass dies nicht der Fall ist, vielmehr f mit γ zuerst wächst und dann wieder abnimmt. Da nun der Widerstand der Reibung, der in einer γ

entgegengesetzten Richtung die Bewegung zu hemmen sucht, jedenfalls überwunden wird, wenn Bewegung eintritt, so muss für diesen Fall die Reibungskraft ihrer oberen Grenze fk gleich sein. Dann kann man also setzen

$$-\triangle = k \cdot \nu' + fk \frac{\gamma}{v},$$

wo der zweite Theil mit dem plus-Zeichen versehen ist, weil die Richtung der vernichteten Kraft die der Geschwindigkeit γ ist. Dabei ist mit ν' die Einheitsstrecke auf der Flächennormale oder derjenigen Curvennormalen bezeichnet, nach welcher die in normaler Richtung vernichtete Kraft von der Grösse k wirkt, und $T\gamma$ ist $= v$ gesetzt.

Folglich lautet die Gleichung der Bewegung

$$2) \qquad \varkappa - k \cdot \nu' - fk \frac{\gamma}{v} = \frac{v^2}{r} dm \cdot \nu + \frac{s''}{s'} dm \cdot \gamma.$$

Ist diese Gleichung für einen bestimmten Zeitpunkt durch den bekannten Werth von f nicht zu erfüllen, so zeigt diess, dass Bewegung nicht möglich ist.

Man sagt, die an einem materiellen Punkte wirkenden Kräfte seien im Gleichgewicht, wenn sie den ruhenden Punkt nicht in Bewegung setzen können. Da dann der Punkt keine Beschleunigung haben darf, so muss für einen freien Punkt

$$\varkappa = o$$

sein.

Ist der Punkt nicht frei, sondern irgendwie verhindert, der Wirkung einer Kraft zu folgen, so muss für das Gleichgewicht die wirkende Kraft durch das Hinderniss ganz vernichtet werden, also nach (1) $\varkappa + \triangle = o$ sein. Kann das Hinderniss eine Reibung ausüben, so kann die vernichtete Kraft $\triangle$ aus einem normalen Theil $k \cdot \nu'$ bestehen und einem tangentialen, dessen Grösse k' sei und diese beiden Theile können durch den Widerstand des Hindernisses vernichtet werden, wenn sie die betr. Maximalgrössen nicht erreichen, d. h. $k < k_0$ und $k' < f \cdot k$ ist. Setzt man $f = tg\,\psi$, so ist ψ der sog. Reibungswinkel und die Bedingung $k' < fk$ lässt sich dann so aussprechen: für das Gleichgewicht muss die wirkende Kraft $\varkappa$ in das Innere eines Kegels fallen, der mit dem halben Oeffnungswinkel ψ um die Flächennormale beschrieben ist; oder im Falle einer Curve: $\varkappa$ muss zwischen zwei Kegeln liegen, die mit den halben Oeffnungswinkeln $90^0 - \psi$ und $90^0 + \psi$ um die Tangente beschrieben sind.

§ **17.** Wir kehren nun zum Rechnen mit Strecken zurück und entwickeln zuerst eine gewisse Methode, um aus zwei Strecken eine Zahl abzuleiten.

Sind α und β die beiden Strecken, $(\alpha\beta)$ der Winkel zwischen ihren Richtungen, $\leqq 180^0$ genommen, so möge das Symbol $S\,(\alpha\beta)$ die Zahl $T\alpha \cdot T\beta \cdot \cos(\alpha\beta)$ vorstellen, so dass

$$1) \qquad S\,(\alpha\beta) = T\alpha \cdot T\beta \cdot \cos(\alpha\beta)$$

ist. Sind die Argumente nicht einfache Zeichen, so sollen sie nöthigenfalls durch ein Comma oder einen Strich ($|$) von einander getrennt werden. Statt zu sagen: es soll die Zahl $S\,(\alpha\beta)$ hergestellt werden, werden wir auch sagen: die Strecken α und β sollen nach der Regel S verbunden werden oder der Regel S unterworfen werden.

Aus der Gl. (1) ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

$$(2) \qquad \begin{cases} S\,(\alpha\beta) = S\,(\beta\alpha) \\ S\,(\alpha\alpha) = T\alpha^2 \\ S\,(\alpha\beta) = 0 \text{ wenn } \alpha \text{ senkrecht zu } \beta. \end{cases}$$

Ist a eine positive Zahl, so ist $S\,(a\alpha, \beta) = a\,T\alpha\,T\beta \cos(a\alpha, \beta)$ oder, weil die Richtung von $a\alpha$ mit der von α übereinstimmt, $= a\,T\alpha\,T\beta \cos(\alpha\beta)$, daher

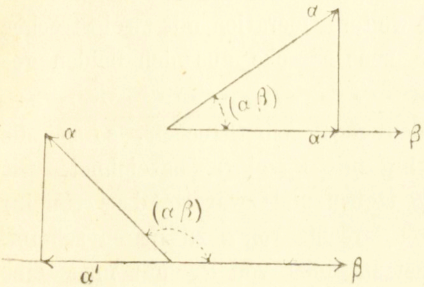
$$(3) \qquad S\,(a\alpha, \beta) = a\,S\,(\alpha\beta)$$

Ist aber a negativ $= -a'$, so ist $S\,(a\,\alpha, \beta) = a'\,T\alpha\,T\beta \cos(a\alpha, \beta)$ und dies $= -a'\,T\alpha\,T\beta \cos(\alpha\beta)$, weil die Richtungen $a\alpha$ und α entgegengesetzt sind, und daher die

Winkel $(a\alpha, \beta)$ und (α, β) sich zu 180° ergänzen. Also ergibt sich auch hier die Gl. (3), die demnach für jede Zahl a gilt.

Ist α' die senkrechte Projection von α auf β, in dem Sinne genommen, dass Anfangspunkt und Endpunkt von α sich in den Anfangspunkt und Endpunkt von α' projiciren, so ist, wie Figur 3 zeigt

(Figur 3.)



$$T\alpha' = T\alpha \cdot |\cos(\alpha\beta)|$$

und dabei α' mit β gleichgerichtet wenn $\cos(\alpha\beta) > o$, dagegen entgegengesetzt gerichtet wenn $\cos(\alpha\beta) < o$; folglich kann man setzen

$$S(\alpha\beta) = S(\alpha'\beta).$$

Setzt man $\alpha = \alpha' + \sigma'$, so ist σ' eine auf β senkrecht stehende Strecke und

$$S(\alpha' + \sigma', \beta) = S(\alpha', \beta);$$

Ist γ irgend eine andere Strecke und zerlegt man sie ebenfalls in die Summe $\alpha'' + \sigma''$ wo α'' parallel mit, σ'' senkrecht zu β ist, setzt ferner $\alpha' = a'\beta$, $\alpha'' = a''\beta$, unter a' und a'' Zahlen verstanden, so ist

$$S(\alpha + \gamma \mid \beta) = S\left((a' + a'')\beta + \sigma' + \sigma'' \mid \beta\right)$$

und dies nach dem bewiesenen, weil $\sigma' + \sigma''$ auf β senkrecht, dagegen $(a' + a'')\beta$ mit β parallel ist,

$$\begin{aligned} &= S\left((a' + a'')\beta \mid \beta\right) \\ &= (a' + a'')\, S(\beta \mid \beta) \\ &= S(a'\beta, \beta) + S(a''\beta, \beta) \\ &= S(a'\beta + \sigma', \beta) + S(a''\beta + \sigma'', \beta) \end{aligned}$$

so dass für beliebige Strecken $\alpha\beta\gamma$

(4) $$S(\alpha + \gamma, \beta) = S(\alpha\beta) + S(\gamma\beta)$$

sich ergibt. Aus diesem Distributionsgesetz folgt noch

(5) $$\begin{cases} S(\alpha + \gamma, \alpha + \gamma) = S(\alpha\alpha) + S(\gamma\gamma) + 2\,S(\alpha\gamma) \\ S(\alpha + \gamma, \beta + \delta) = S(\alpha\beta) + S(\alpha\delta) + S(\gamma\beta) + S(\gamma\delta). \end{cases}$$

Sind hier die Strecken γ und δ unendlich klein, so ist $S(\gamma\delta)$ unendlich klein zweiter Ordnung und folglich ist

$$S(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta) = S(\alpha\beta) + S(\beta, d\alpha) + S(\alpha, d\beta)$$

mit einem Fehler, der unendlich klein zweiter Ordnung ist.

§ 18. Nun muss eine weitere Operation mit zwei Strecken eingeführt werden, die eine neue Strecke aus den beiden gegebenen hervorgehen lässt.

Sind α und β die beiden gegebenen Strecken, so sei die neue mit $V(\alpha\beta)$, wenn nöthig mit $V(\alpha\,|\,\beta)$, bezeichnet. Sie möge senkrecht auf α und β stehen und zwar so, dass von ihr aus gesehen die Richtung von β rechts von α zu liegen scheint. Man könnte ebensogut festsetzen links von α, nur muss eine b e s t i m m t e Festsetzung getroffen werden. Ihre Länge sei gleich dem Inhalte des Parallelogramms, dessen Seiten α und β sind. Es möge gesagt werden, dass diese Strecke durch die Operation V aus α und β hervorgehe. Man sieht leicht, dass

(1)
$$\begin{cases} V(\beta\alpha) = -V(\alpha\beta) \\ -V(\alpha\beta) = V(\alpha, -\beta) = V(-\alpha, \beta) \end{cases}$$

ist. Es ist weiter

$$V(\alpha\alpha) = 0.$$

Ist a eine positive Zahl, so ist $a\,V(\alpha\beta)$ eine Strecke, die a-mal so lang ist als $V(\alpha\beta)$, aber deren Richtung hat. Das Gleiche gilt aber von $V(a\alpha, \beta)$, so dass

(2)
$$V(a\alpha, \beta) = a\,V(\alpha\beta)$$

ist, eine Gleichung, die man mit Hilfe von (1) auch leicht für negative a als giltig nachweist.

Nach der Definition ist

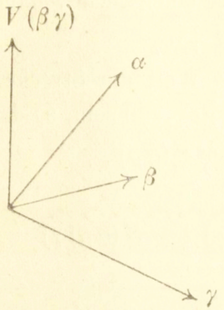
$$T\,V(\alpha\beta) = T\alpha\,T\beta \sin(\alpha, \beta)$$

daher

(3)
$$\begin{cases} T\,V(\alpha\beta)^2 = T\alpha^2\,T\beta^2\,(1 - \cos^2(\alpha, \beta)) \\ \qquad\qquad\;\; = S(\alpha\alpha)\cdot S(\beta\beta) - S(\alpha\beta)^2. \end{cases}$$

Für drei Strecken $\alpha\beta\gamma$ ist $S(\alpha\,V(\beta\gamma))$ seinem absoluten Werthe nach gleich dem Inhalte des aus β und γ zu bildenden

(Figur 4)



Parallelogrammes mal der Projection von α auf $V(\beta,\gamma)$ (Figur 4) d. h. gleich dem Volumen des Parallelepipeds, dessen Kanten den drei Strecken α, β, γ gleich sind. Dieser absolute Werth ist aber mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen, je nachdem α mit $V(\beta\gamma)$ einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Im ersten Fall liegt von α aus gesehen γ rechts von β, im zweiten Falle aber links von β. Gesetzt es liege γ rechts von β, so liegt auch wie man sieht, von β aus gesehen α rechts von γ und von γ gesehen β rechts von α; folglich ist

(4)

$$S(\alpha V(\beta\gamma)) = S(\beta V(\gamma\alpha)) = S(\gamma V(\alpha\beta))$$

und die nämlichen Gleichungen gelten im andern Falle.

Vertauscht man hier β mit γ, so folgen nach (1) die Gleichungen

$$S(\alpha V(\beta\gamma)) = -S(\alpha V(\gamma\beta)) = -S(\gamma V(\beta\alpha)) = \\ = -S(\beta V(\alpha\gamma));$$

daraus folgt

$$S(\alpha V(\alpha\beta)) = -S(\beta V(\alpha\alpha)) = 0.$$

Die Strecke

$$V(\alpha\beta) + V(\alpha\gamma)$$

ist als Summe von zwei auf α senkrechten Strecken wieder eine Strecke die auf α senkrecht steht und folglich $= V(\alpha\delta)$ gesetzt werden kann. Verbindet man die Strecke

$$V(\alpha\delta) = V(\alpha\beta) + V(\alpha\gamma)$$

mit irgend einer weitern Strecke ε, so folgt

$$S(\varepsilon V(\alpha\delta)) = -S(\beta V\alpha\varepsilon) - S(\gamma V\alpha\varepsilon)$$
$$= S(\varepsilon, V(\alpha, \beta+\gamma))$$
$$S(\varepsilon | V(\alpha\delta) - V(\alpha, \beta+\gamma)) = 0.$$

Weil dies für jede Strecke ε gilt, muss

5) $$V(\alpha, \beta+\gamma) = V(\alpha\beta) + V(\alpha\gamma)$$

sein.

Die Strecke $V(\alpha V(\beta\gamma)) = \vartheta$ steht auf der $V(\beta\gamma)$ senkrecht und liegt folglich mit β und γ in einer Ebene; daher man

$$V(\alpha V(\beta\gamma)) = b\beta + c\gamma$$

setzen kann, wo b und c Zahlen sind. Weil die Strecke auf α senkrecht stehen soll, muss $S(\alpha \mid \beta b + \gamma c) = 0$ sein, so dass man

$$b = dS(\alpha\gamma) \quad c = -dS(\alpha\beta)$$

setzen kann und

$$\vartheta = V(\alpha V(\beta\gamma)) = d(S(\alpha\gamma)\beta - S(\alpha\beta)\gamma)$$

wird, wo auch d eine Zahl ist.

Um d zu bestimmen, betrachten wir zuerst den speciellen Fall, dass $\beta = \alpha$ ist, wobei $d = e$ sein möge. Dann folgt, wenn man $V(\alpha\gamma) = \delta$ setzt

$$V(\alpha\delta) = e(S(\alpha\gamma)\alpha - S(\alpha\alpha)\gamma)$$

$$S(\gamma V(\alpha\delta)) = -S(\delta V(\alpha\gamma)) = -S(\delta\delta) = \\ = e(S(\alpha\gamma)^2 - S(\alpha\alpha)S(\gamma\gamma)).$$

Aber $S(\delta\delta)$ ist $= (TV(\alpha\gamma))^2 = S(\alpha\alpha)S(\gamma\gamma) - S(\alpha\gamma)^2$ nach Gl. (3); also folgt $e = 1$ und

(6) $$V(\alpha V(\alpha\gamma)) = S(\alpha\gamma)\alpha - S(\alpha\alpha)\gamma.$$

Im allgemeinen Fall sei $V(\alpha\beta) = \lambda$ und $V(\beta\gamma) = \mu$, dann ist $\vartheta = V(\alpha\mu)$ und daher nach (ε)

$$S(\lambda\vartheta) = -S(\mu V(\alpha\lambda));$$

aber $V(\alpha\lambda)$ ist $= V(\alpha V(\alpha\beta)) = S(\alpha\beta)\alpha - S(\alpha\alpha)\beta$; somit weil $S(\beta\mu) = 0$ ist

$$S(\lambda\delta) = -S(\alpha\beta)S(\alpha\mu) = -S(\alpha\beta)S(\alpha V(\beta\gamma));$$

mit Hilfe des früher gefundenen Werthes von ϑ ergibt sich

$$S(\lambda\vartheta) = -dS(\alpha\beta)S(\lambda\gamma) = -dS(\alpha\beta)S(\gamma V(\alpha\beta)) \\ = -dS(\alpha\beta)S(\alpha V(\beta\gamma))$$

so dass $d = +1$ sein muss. Dies liefert die Gleichung

(7) $$V(\alpha V(\beta\gamma)) = S(\alpha\gamma)\beta - S(\alpha\beta)\gamma.$$

Durch cyclische Vertauschung und Addition ergibt sich noch

(8) $$V(\alpha V(\beta\gamma)) + V(\beta V(\gamma\alpha)) + V(\gamma V(\alpha\beta)) = 0.$$

§ **19.** A) Als Anwendungen der Operationen S und V sei zuerst das in § 15 begonnene Problem des freien Falles auf der Erdoberfläche zu Ende geführt. Ist das dort benützte System II so gewählt, dass

$$V(\xi'\eta') = \zeta',\ V(\eta'\zeta') = \xi',\ V(\zeta'\xi') = \eta'$$

ist, und bezeichnet ϱ' den Radius Vector des Punktes in Bezug auf dieses System, so ist

$$\beta' = \frac{d^2\varrho'}{dt^2},\ \gamma' = \frac{d\varrho'}{dt} = \xi'\frac{dx'}{dt} + \eta'\frac{dy'}{dt} + \zeta'\frac{dz'}{dt}$$

daher

$$V(\gamma'\zeta') = -\frac{dx'}{dt}\eta' + \frac{dy'}{dt}\xi'$$

ist. Hiemit wird die Gl. (7) des § 13

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\varrho'}{dt^2} = g\alpha + 2\omega V\left(\frac{d\varrho'}{dt}\zeta'\right).$$

Setzt man für ϱ' eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe $\varrho' = \delta + \varepsilon t + \vartheta t^2 + \iota t^3 + \ldots$ mit unbestimmten Coefficienten an, die selbst Strecken sind, und bezeichnet mit $\varrho_0' \gamma_0'$ Radius Vector und Geschwindigkeit für $t = o$, so ergibt sich leicht, dass

$$\delta = \varrho_0',\ \varepsilon = \gamma_0',\ 2\vartheta = g\alpha + 2\omega V(\gamma_0'\zeta')$$
$$6\iota = 4\omega V(\vartheta\zeta')$$

ist. Also ist $\vartheta = \frac{1}{2} g\alpha + \omega V(\gamma_0'\zeta')$.

$$\iota = \frac{2}{3}\omega\left\{\frac{1}{2} gV(\alpha\zeta') + \omega V(V(\gamma_0'\zeta')\zeta')\right\}$$
$$= \frac{2}{3}\omega\left\{\frac{1}{2} gV(\alpha\zeta') - \omega S(\gamma_0'\zeta')\zeta' + \omega S(\zeta'\zeta')\gamma_0'\right\}$$

(nach (6) des vorigen §). Ist $\gamma_0' = 0$, so folgt demnach

$$\text{2)} \qquad \varrho' = \varrho_0' + \frac{1}{2} g\alpha t^2 + \frac{1}{3}\omega V(\alpha\zeta')t^3 \ldots$$

B) Ferner soll die Bewegung eines Planeten um die Sonne behandelt werden. Nach den Erörterungen von § 13 ist die Gleichung für die Bewegung eines Planeten im System V′

$$\text{3)} \qquad \beta = -k\frac{m}{T\varrho^3}\varrho - k\frac{m_0\varrho}{T\varrho^3} = -\frac{k(m+m_0)\varrho}{T\varrho^3},$$

wenn β die Beschleunigung im System V′ und ϱ die Strecke vom Sonnenmittelpunkt nach dem Planeten bezeichnet, sowie m_0 und m Sonnenmasse und Planetenmasse sind.

Es folgt daraus

$$V(\beta\varrho) = V\left(\frac{d^2\varrho}{dt^2}\varrho\right) = 0.$$

Es ist aber $\dfrac{d}{dt}V\left(\varrho\dfrac{d\varrho}{dt}\right) = V\left(\varrho\dfrac{d^2\varrho}{dt^2}\right)$, also ergibt sich

4) $$V\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right) = \text{einer constanten Strecke } \lambda.$$

Weil hienach ϱ beständig senkrecht zu λ ist, geht die ganze Bewegung in einer Ebene vor sich und findet auch die Gleichung statt

$$S(\varrho\lambda) = 0.$$

Die Gl. (4) spricht ferner aus, dass die Fläche des vom Radius Vector beschriebenen Sectors der Zeit proportional ist, denn der Differentialquotient dieser Fläche ist

$$= \frac{1}{2}TV\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right) = \frac{1}{2}T\lambda.$$

Es ist aber auch

$$T\varrho^2 = S(\varrho\varrho),$$

daher

$$T\varrho\cdot\frac{dT\varrho}{dt} = S(\varrho\gamma)$$

und

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\varrho}{T\varrho} = \frac{\gamma}{T\varrho} - \frac{\varrho}{T\varrho^2}\cdot\frac{S(\varrho\gamma)}{T\varrho} = \frac{\gamma S(\varrho\varrho) - \varrho S(\varrho\gamma)}{T\varrho^3}$$

$$= -\frac{V(\varrho V(\varrho\gamma))}{T\varrho^3}$$

nach (6) § 18 und dieses wieder nach (4) $= -\dfrac{V(\varrho\lambda)}{T\varrho^3}$.

Also ist

$$V(\beta\lambda) = k(m + m_0)\frac{d}{dt}\frac{\varrho}{T\varrho},$$

woraus, unter ε eine constante Strecke verstanden,

$$V(\gamma\lambda) = \varepsilon + k(m + m_0)\frac{\varrho}{T\varrho}$$

durch Integration folgt. Weil $V(\gamma\lambda)$, ebenso wie ϱ, auf λ senkrecht ist, muss auch die constante Strecke ε auf λ senkrecht sein, d. h. in der Ebene der Bahn liegen. Combiniren wir dies mit ϱ selbst nach der Regel S, so ergibt sich, weil nach (ε)

$S\left(\varrho V(\gamma\lambda)\right) = -S\left(\lambda V(\gamma\varrho)\right) = S(\lambda\lambda)$ dass

$$S(\lambda\lambda) = S(\varrho\varepsilon) + k(m + m_0)\, T\varrho \tag{5}$$

ist. Hieraus folgt

$$T\varrho = \frac{S(\lambda\lambda)}{k(m + m_0) + T\varepsilon\cos(\varrho,\varepsilon)}, \tag{5a}$$

welches die Polargleichung eines Kegelschnittes ist, wenn der Pol im Brennpunkt liegt. Für den grössten und kleinsten Werth von $T\varrho$, falls die Curve eine Ellipse ist und e die numerische Excentricität bezeichnet, ergeben sich die Werthe

$$a(1+e) = \frac{S(\lambda\lambda)}{k(m + m_0) - T\varepsilon}$$

$$a(1-e) = \frac{S(\lambda\lambda)}{k(m + m_0) + T\varepsilon}$$

woraus $e = \dfrac{T\varepsilon}{k(m + m_0)}$, $a(1 - e^2) = \dfrac{S(\lambda\lambda)}{k(m + m_0)}$ folgt, wenn a die halbe grosse Axe. Ist U die Umlaufszeit, so ist weiter nach Gl. (4)

$$2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = U \cdot T\lambda;$$

daher durch Quadriren und Dividiren durch den obigen Werth von $a(1 - e^2)$

$$4\pi^2 a^3 = U^2 \cdot k\,(m + m_0)$$

folgt, welche Gleichung das dritte Keppler'sche Gesetz ausspricht.

III. Mechanik eines beliebigen Körpers.

§ **20.** Indem wir nun die Bewegung eines Körpers betrachten, nehmen wir an, derselbe sei, etwa durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel sind, in unendlich viele unendlich kleine materielle Punkte getheilt, die mit den Zahlen 1, 2 . . . n bezeichnet sein mögen. Es sei dm_i die Masse eines Punktes i, β_i seine Beschleunigung und $\varkappa_i$ die Summe aller Kräfte, welche auf den Punkt wirken, dann ist

$$dm_i \cdot \beta_i = \varkappa_i$$

und folglich, wenn wir die sämmtlichen Gleichungen, die sich auf alle die Punkte beziehen, in welche der Körper getheilt ist, addiren

$$\Sigma dm_i \cdot \beta_i = \Sigma \varkappa_i .$$

Unter den Kräften $\varkappa$, welche auf die materiellen Punkte des Körpers wirken, sind zwei verschiedene Arten zu unterscheiden, nämlich innere Kräfte und äussere Kräfte. Die Ersteren sind diejenigen Kräfte, welche die materiellen Punkte des Körpers auf einander ausüben, die letzteren dagegen diejenigen, welche von Punkten herrühren, die nicht dem Körper angehören. Die Kraft $\varkappa_i$ ist hienach gleich der Summe aus der äusseren Kraft α_i, die auf den Punkt i wirkt und den inneren Kräften, die von den anderen Punkten auf den i^{ten} ausgeübt werden; also

$$\varkappa_i = \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik}$$

wenn α_{ik} die vom k^{ten} Punkt auf den i^{ten} ausgeübte Kraft bezeichnet. Folglich ist

$$\Sigma \varkappa_i = \Sigma \alpha_i + \sum_i \sum_k \alpha_{ik} .$$

Nach dem Princip der Wirkung und Gegenwirkung, wie es in § 10 Gl. 5* gegeben ist, ist aber $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = dV_i \, dV_k \cdot \varepsilon_{ik}$, wenn dV_i und dV_k die Volumina des i^{ten}, resp. k^{ten} Punktes und ε_{ik} eine unendlich kleine Strecke bezeichnen und daher ist

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k dV_i \, dV_k \cdot \varepsilon_{ik} .$$

Ist V das Volumen des ganzen Körpers, so ist $\sum\limits_i dV_i = \sum\limits_k dV_k = V$ und somit

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot V^2 ,$$

wenn ε einen mittleren Werth der verschiedenen ε_{ik} bezeichnet. Beim Grenzübergang verschwindet also die Doppelsumme und es bleibt

$$\Sigma dm_i \beta_i = \Sigma \alpha_i .$$

Man unterscheidet nun zwei Arten von äusseren Kräften, nämlich Massenkräfte und Flächenkräfte. Die ersteren sind solche Kräfte, wie die Schwere, die elektrischen oder magnetischen Kräfte, welche alle materiellen Theilchen eines Körpers, auch die im Innern gelegenen angreifen. Man setzt voraus, dass der Quotient aus einer solchen Kraft und der Masse des Punktes, auf den sie wirkt, eine endliche Zahl sei. Ist demnach α eine Massenkraft und dm die Masse ihres Angriffspunktes, so kann man $\alpha = \mu\, dm$ setzen, wo μ eine Strecke derselben Richtung wie α ist, die man als die beschleunigende Kraft oder die Kraft bezogen auf die Masseneinheit bezeichnet. Es ist offenbar die Beschleunigung, die α dem Punkt dm ertheilen würde, wenn er frei wäre. Die Flächenkräfte dagegen greifen nur die an der Körperoberfläche liegenden materiellen Punkte an. Die Kräfte, die wir mit unseren Muskeln auszuüben im Stande sind, die Kräfte, welche Flüssigkeiten oder Gase auf Körper ausüben, die in sie eingetaucht sind, sind solche Flächenkräfte. Man bezeichnet sie auch als Druck- oder Zugkräfte resp. Pressungen oder Spannungen, je nachdem sie nach dem Inneren oder Aeusseren des Körpers gerichtet sind, auf welchen sie wirken. Man nimmt an, dass der Quotient aus der Grösse einer solchen Kraft durch den Flächeninhalt dO der freien, nach Aussen gerichteten Oberfläche des materiellen Punktes, auf welchen die Kraft wirkt, eine endliche Zahl sei. Ist also α eine Flächenkraft, so kann man $\alpha = dO \cdot \varphi$ setzen, wobei man die mit α gleichgerichtete Strecke φ als den Druck resp. Zug pro Flächeneinheit oder als die specifische Pressung resp. Spannung bezeichnet. Man kann daher $\Sigma\alpha_i$ zerlegen in die Summe der Massenkräfte $= \Sigma dm_i\, \mu_i$ plus der Summe der Flächenkräfte $= \Sigma dO_i\, \varphi_i$, so dass

$$\Sigma\alpha_i = \Sigma dm_i\, \mu_i + \Sigma dO_i\, \varphi_i$$

ist, wo sich die erste Summe rechts auf alle materiellen Punkte des Körpers und die zweite auf alle Elemente seiner Oberfläche bezieht. Führt man oben ein und geht zur Grenze über, indem man alle V_i unendlich klein werden lässt, so folgt

$$1)\qquad \int \beta\, dm = \int \mu\, dm + \int \varphi\, dO,$$

wobei die Integration links und die erste rechts sich über das Innere des Körpers, die zweite rechts sich auf seine Oberfläche bezieht.

Bestimmt man nun den Radius Vector P aus der Gleichung

$$2)\qquad P\int dm = \int dm\cdot\varrho,$$

wo sich die Integrationen über den ganzen Körper erstrecken, so wird die Gleichung (1), wenn man $\int dm$ d. h. die Gesammtmasse des Körpers mit M bezeichnet,

$$3)\qquad M\frac{d^2P}{dt^2}=\int\mu\, dm+\int\varphi\, dO.$$

Der Punkt mit dem Radius Vector P heisst der Schwerpunkt des Körpers. Nach der letzten Gleichung bewegt sich der Schwerpunkt so, als ob alle äusseren Kräfte an ihm angriffen und die Gesammtmasse des Körpers in ihm vereinigt wäre. Dies ist das Princip der Bewegung des Schwerpunktes.

§ 21. Der Radius Vector ϱ eines Punktes zur Zeit t und der $\varrho+d\varrho$ zur Zeit $t+dt$ schliessen ein unendlich schmales Dreieck ein, dessen Inhalt der halben Länge der Strecke $V(\varrho, \varrho+d\varrho) = V(\varrho, d\varrho)$ gleich ist und das in der Zelt dt vom Radius Vector durchlaufen wird. Der Quotient

$$\frac{1}{2}\frac{1}{dt}V(\varrho d\varrho)=\frac{1}{2}V\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right)$$

drückt also durch seine Länge die Geschwindigkeit aus, mit der der Radius Vector die Fläche beschreibt, die er überstreicht. Da die Strecke $V(\varrho, \varrho+d\varrho)$ aber auf ϱ und $\varrho+d\varrho$ senkrecht ist, gibt er gleichzeitig auch die Lage des unendlich kleinen Dreiecks im Raume an. Man bezeichnet, unter dm die Masse des Punktes verstanden, mit

$$\frac{dm}{2}V\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right)$$

die Flächengeschwindigkeit des Punktes. Ihr Differentialquotient nach t heisst die Flächenbeschleunigung. Diese ist

$$= \frac{dm}{2} V\left(\varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2}\right) = \frac{dm}{2} V(\varrho\,\beta)$$

wenn β die Beschleunigung des Punktes zur Zeit t ist. Wirkt auf den Punkt die Kraft $\varkappa$, so ist $\beta\, dm = \varkappa$ und daher die Beschleunigung

$$= \frac{1}{2} V(\varrho\,\varkappa).$$

Denken wir uns nun wie in § 21 den Körper in die n materiellen Punkte von den Massen $dm_1 \ldots dm_n$ getheilt und haben sie zu irgend einer Zeit die Radii-Vectoren $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n$, die Geschwindigkeiten $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ und die Beschleunigungen $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$, so hat der Punkt dm_i die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dm_i}{2} V(\varrho_i, \gamma_i).$$

Bildet man die Summe aller dieser Strecken, die sich auf die verschiedenen Punkte des Körpers beziehen, so entsteht eine Strecke

$$\frac{1}{2} \Sigma\, dm_i\, V(\varrho_i, \gamma_i)$$

deren Differentialquotient nach t

$$\frac{1}{2} \Sigma\, dm_i\, V(\varrho_i, \beta_i) = \frac{1}{2} \Sigma\, V(\varrho_i, \varkappa_i)$$

ist, so dass

1) $$\frac{d}{dt} \Sigma\, dm_i\, V(\varrho_i, \gamma_i) = \Sigma_i\, V(\varrho_i, \varkappa_i)$$

wird. Wie in § 21 ist $\varkappa_i = \alpha_i + \Sigma_k\, \alpha_{ik}$ wenn wir äussere und innere Kräfte unterscheiden; daher auch

$$\Sigma_i\, V(\varrho_i, \varkappa_i) = \Sigma_i\, V(\varrho_i, \alpha_i) + \Sigma_i \Sigma_k\, V(\varrho_i, \alpha_{ik}).$$

Die Doppelsumme besteht aus lauter Gliedern wie

$$V(\varrho_i, \alpha_{ik}) + V(\varrho_k, \alpha_{ki}).$$

Man nimmt an, dass zwei materielle Punkte aufeinander Kräfte ausüben, welche nicht nur das Princip der Gleichheit von Action und Reaction erfüllen, sondern auch die Richtung der Verbindungslinie beider Punkte haben. Setzt man also

$$\alpha_{ik} = p_{ik} (\varrho_i - \varrho_k)$$

wo p_{ik} eine Zahl ist, so wird nach dem angeführten Princip

$$\alpha_{ki} = -p_{ik}(\varrho_i - \varrho_k) + d\,V_i\,d\,V_k \cdot \varepsilon_{ik}.$$

Daher ist

$$V(\varrho_i\,\alpha_{ik}) + V(\varrho_k\,\alpha_{ki}) = d\,V_i\,d\,V_k.\ V(\varrho_k\,\varepsilon_{ki})$$

und es wird, wenn ε' eine unendlich kleine Strecke bezeichnet

$$\Sigma_i\,\Sigma_i\,V(\varrho_i,\alpha_{ik}) = V^2 \cdot \varepsilon';$$

daher verschwindet diese Summe beim Grenzübergang. Zerlegt man die α_i in die Massenkräfte und Flächenkräfte wie in § 20, so wird

$$\Sigma\,V(\varrho_i,\alpha_i) = \Sigma\,d\,m_i\ V(\varrho_i,\mu_i) + \Sigma\,d\,O_i\ V(\varrho_i,\varphi_i).$$

Geht man nun zur Grenze über, so entsteht die Gleichung

2) $$\frac{d}{dt}\int d\,m\,V(\varrho\,\gamma) = \int d\,m\,V(\varrho\,\mu) + \int d\,O\,V(\varrho\,\varphi)$$

wo das Integral links und das erste rechts sich über das ganze Innere des Körpers und das zweite rechts sich über seine Oberfläche erstreckt. Das halbe Integral links heisst die Flächengeschwindigkeit des ganzen Körpers und die Gleichung spricht das sog. Princip der Flächen aus.

Gesetzt es wirken auf einen Körper gar keine äusseren Kräfte, so ist nach Gl. (3) § 20 die Beschleunigung des Schwerpunktes gleich Null, daher dessen Geschwindigkeit constant oder der Schwerpunkt bewegt sich in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit. Nach der Gleichung (2) ist dann auch $\int d\,m\,V(\varrho\,\gamma)$ constant, d. h. es gibt eine Strecke, welche während der ganzen Bewegung ihre Lage nicht ändert. Eine auf dieser Strecke senkrechte Ebene ändert folglich ihre Lage auch nicht; man bezeichnet sie als die invariable Ebene.

Der Schwerpunkt des Körpers war in § 20 definirt als derjenige Punkt dessen Radius-Vector P der Gleichung

3) $$P\int d\,m = \int \varrho\,d\,m$$

genügt. Man könnte hienach glauben, dass der Schwerpunkt von dem zu Grunde gelegten Coordinatensystem abhängt. Um zu zeigen, dass dies nicht der Fall ist, nehmen wir an, in dem bis jetzt benutzten System seien $\xi\eta\zeta$ die drei auf den Axen gelegenen Einheitsstrecken, $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes ϱ, $x_0 y_0 z_0$ die des Schwerpunkts; dann folgt aus der Gl. (3)

$$
4)\qquad
\begin{aligned}
x_0 \int dm &= \int x\,dm \\
y_0 \int dm &= \int y\,dm \\
z_0 \int dm &= \int z\,dm.
\end{aligned}
$$

In einem neuen Coordinatensystem seien nun $\varrho'\,P'$ die Radii-Vectoren eines beliebigen Punktes und des Schwerpunktes, λ der Vector des Anfangspunktes des früheren Systems. Dann ist

$$\varrho' = \lambda + x\xi + y\eta + z\zeta$$

daher

$$\int \varrho'\,dm = \lambda \int dm + \xi \int x\,dm + \eta \int y\,dm + \zeta \int z\,dm$$

oder

$$P' = \lambda + x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta$$

d. h. der Punkt, der im alten System die Bedingung des Schwerpunktes erfüllt, erfüllt sie auch im neuen System. Es liegt daher nahe, bei der obigen Gleichung für die Flächengeschwindigkeit den Schwerpunkt als neuen Ursprung der Radii-Vectoren einzuführen. Wir denken uns durch ihn Coordinatenaxen gelegt, welche den alten Axen parallel sind und bezeichnen die Radii-Vectoren in Bezug auf dieses neue System mit ϱ', die Geschwindigkeiten mit γ', die Beschleunigungen mit β'. Dann ist

$$\varrho = P + \varrho'$$

$$\gamma = \gamma' + \frac{dP}{dt},\ \beta = \beta' + \frac{d^2P}{dt^2}$$

Aus $\varrho = \varrho' + P$ folgt

$$\int \varrho'\,dm = 0$$

und hieraus durch Differentiiren

$$\int \gamma'\,dm = 0.$$

Daher ist

$$\int dm\, V(\varrho\mu) = \int dm\, V(P\mu) + \int dm\, V(\varrho'\mu),$$

und ebenso

$$\int dO\, V(\varrho\varphi) = \int dO\, V(P\varphi) + \int dO\, V(\varrho'\varphi).$$

Ferner ist

$$V(\varrho\gamma) = V\left(P + \varrho', \frac{dP}{dt} + \gamma'\right)$$

$$= V\left(P\frac{dP}{dt}\right) + V\left(\varrho'\frac{dP}{dt}\right) + V(P\gamma') + V(\varrho'\gamma')$$

und damit ergibt sich

$$\int dm\, V(\varrho\gamma) = V\left(P\frac{dP}{dt}\right)\int dm + \int dm\, V(\varrho'\gamma')$$

$$\frac{d}{dt}\int dm\, V(\varrho\gamma) = \frac{d}{dt}\int dm\, V(\varrho'\gamma') + V\left(P\frac{d^2P}{dt^2}\right)\int dm$$

Setzt man hier für $\frac{d^2P}{dt^2}\int dm$ seinen Werth aus (3) § 20 so folgt endlich

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\int dm\, V(\varrho'\gamma') = \int dm\, V(\varrho'\mu) + \int dO\, V(\varrho'\varphi)$$

in welcher Gleichung die Kräfte $\mu\,\varphi$ aber in dem alten Coordinatensystem gemessen sind.

§ 22. Wenn ein materieller Punkt von der Masse dm in einem gegebenen Augenblick die Geschwindigkeit γ hat, so nennt man die Grösse

$$1) \qquad \frac{1}{2}dm \cdot T\gamma^2 = \frac{1}{2}dm\, S(\gamma\gamma)$$

seine lebendige Kraft. Ist sie $= l$ so ist

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{2}dm\frac{d}{dt}S(\gamma\gamma) = dm\, S\left(\gamma\frac{d\gamma}{dt}\right)$$

$$= S(\gamma, dm\cdot\beta)$$

wenn β die Beschleunigung bezeichnet. Ist $\varkappa$ die Summe aller Kräfte, die auf den Punkt wirken und die thatsächlich stattfindende Beschleunigung β erzeugen, so ist $\varkappa = \beta\, dm$ und folglich

$$2) \qquad \frac{dl}{dt} = S(\gamma\varkappa).$$

Ist $d\varrho$ die in der unendlich kleinen Zeit beschriebene Sehne, so heisst $S(d\varrho, \varkappa)$ die Arbeit der Kräfte $\varkappa$ für den Weg $d\varrho$; die obige rechte Seite ist

$$=\frac{S(d\varrho, \varkappa)}{dt},$$

gibt also die Arbeit in der Zeiteinheit und misst daher die Leistungsfähigkeit des Körpers, der die Kraft ausübt; sie mag desswegen als die Leistungsfähigkeit bezeichnet werden.

Unter Umständen lässt die Gleichung 2) ohne Weiteres, d. h. ohne dass man die Bewegung wirklich zu kennen braucht, eine Integration zu. Dies tritt ein, wenn die rechte Seite ein Differentialquotient nach t ist und dies ist z. B. stets der Fall, wenn die Kraft k nach der Verbindungslinie des beweglichen Punktes mit einem festen gerichtet und ihrer Grösse nach eine Funktion nur dieser Entfernung ist. Ist ϱ_0 der Radius Vector des festen Punktes, so kann man in diesem Falle setzen, wenn man $T(\varrho - \varrho_0)$ mit r bezeichnet

$$\varkappa = f(r)(\varrho - \varrho_0).$$

Da $f(r)$ eine Zahl ist, so wird

$$S(\gamma \varkappa) = f(r)\, S(\gamma, \varrho - \varrho_0).$$

Aus der Gleichung

$$r^2 = T(\varrho - \varrho_0)^2 = S(\varrho - \varrho_0, \varrho - \varrho_0)$$

folgt aber durch Differentiiren

$$r\frac{dr}{dt} = S(\gamma, \varrho - \varrho_0)$$

so dass

$$S(\gamma \varkappa) = r f(r) \frac{dr}{dt}$$

und

$$\frac{dl}{dt} = r f(r) \frac{dr}{dt}$$

wird. Bezeichnet man das unbestimmte Integral

$$\int r f(r)\, dr \text{ mit } F(r)$$

so entsteht durch Integration zwischen den Grenzen t_1 und t_2

welchen die Grössen l_1, r_1 resp. l_2, r_2 von l und r entsprechen mögen

(3) $$l_2 - l_1 = F(r_2) - F(r_1).$$

Die rechte Seite ist hier ganz unabhängig vom Weg, den der materielle Punkt zwischen seiner ersten Lage (ϱ_1) und seiner zweiten (ϱ_2) zurückgelegt hat und hängt nur von diesen beiden Lagen ab. Das Gleiche gilt folglich auch von der lebendigen Kraft.

Dasselbe Resultat gilt auch, wenn mehrere Kräfte auf denselben Punkt wirken, die einzeln die nämliche Bedingung erfüllen, die eben festgesetzt war. Nur tritt dann an Stelle der einen Funktion in Gleichung (3) rechts eine Summe von solchen.

Ist $S(\gamma\varkappa)$ für jede Zeit bekannt, so kann man

$$\int_{t_1}^{t_2} S(\gamma\varkappa)\,dt$$

bilden und erhält so die Arbeit, welche die Kraft $\varkappa$ während der Zeit von t_1 bis t_2 an dem bewegten Punkt oder bei der Bewegung leistet. Die Gleichung

$$l_2 - l_1 = \int_{t_1}^{t_2} S(\gamma\varkappa)\,dt$$

spricht dann das Princip der lebendigen Kraft aus, wonach der Zuwachs der lebendigen Kraft der Arbeit gleich ist.

Man kann nun für die sämmtlichen Punkte eines Körpers die lebendige Kraft berechnen und die Summe bilden, die man als die lebendige Kraft des ganzen Körpers bezeichnet. Diese wird also sein

4) $$L = \frac{1}{2}\int dm\,S(\gamma\gamma).$$

Ebenso nennt man die Summe der Arbeiten, welche die Kräfte an den einzelnen Körperpunkten leisten, die Gesammtarbeit. Diese ist

$$A\,dt = \Sigma S(\varkappa_i, \gamma_i\,dt)$$

wenn $\varkappa_i$ die Summe aller Kräfte bezeichnet, die auf den i^{te} Punkt einwirken und γ_i dessen Geschwindigkeit ist.

Dann besteht die Gleichung

5) $$\frac{dL}{dt} = A.$$

Wenn man wie in § 20

$$\varkappa_i = \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik}$$

setzt, unter α_i die äusseren, unter α_{ik} die inneren Kräfte verstanden, so zerfällt A in die zwei Theile

$$\begin{aligned} A' &= \sum_i S(\alpha_i, \gamma_i) \\ A'' &= \sum_i S(\gamma_i, \sum_k \alpha_{ik}) \end{aligned} \qquad A = A' + A''.$$

Im zweiten Theile kommen die beiden Summanden vor

$$S(\gamma_i, \alpha_{ik}) + S(\gamma_k, \alpha_{ik}),$$

die sich mit Benutzung der in § 21 gebrauchten Werthe von α_{ik} und α_{ki} in

$$p_{ik}\, S(\gamma_i - \gamma_k, \varrho_i - \varrho_k) + d\,V_i\, d\,V_k\, S(\gamma_k, \varepsilon_{ik})$$

vereinigen. Bei der doppelten Summation, nach i und nach k, die zur Herstellurg von A'' nöthig ist und dem Grenzübergang verschwindet der zweite Theil, so dass man

$$A'' = \frac{1}{2} \sum_{i,k} p_{ik}\, S(\gamma_i - \gamma_k, \varrho_i - \varrho_k)$$

schreiben kann. Jedes Punktenpaar ik darf nur einmal in der Summe benützt werden, weil aber die Summe nach i und nach k sich von 1 bis n erstreckt, kommt jedes zweimal vor und desshalb ist $\frac{1}{2}$ zugesetzt.

Weil $\gamma_i - \gamma_k = \frac{d(\varrho_i - \varrho_k)}{dt}$ ist aber auch

$$A'' = \frac{1}{4} \sum_{i,k} p_{ik} \frac{d\,S(\varrho_i - \varrho_k, \varrho_i - \varrho_k)}{dt}$$

oder wenn man $T(\varrho_i - \varrho_k) = r_{ik}$ setzt

$$A'' = \frac{1}{2} \sum_{ik} p_{ik}\, r_{ik} \frac{d\,r_{ik}}{dt}.$$

Zerlegt man ferner A' in die beiden Theile, von welchen einer sich auf die Massenkräfte, der andere, auf die Flächenkräfte bezieht, so folgt endlich

$$(6)\quad \frac{dL}{dt} = \int S(\mu\gamma)\,dm + \int S(\varphi\gamma)\,dO + \frac{1}{2}\Sigma p_{ik} r_{ik} \frac{dr_{ik}}{dt}.$$

Man macht gewöhnlich die Annahme, dass die innern Kräfte, welche zwei Massenpunkte auf einander ausüben, nur von der Entfernung beider Punkte abhängen und dem Producte ihrer Massen proportional sind. Unter dieser Voraussetzung wird p_{ik} eine Funktion von r_{ik} und man kann setzen

$$p_{ik} = k \cdot dm_i\, dm_k\, f(r_{ik}),$$

wenn k eine Constante bezeichnet.

Damit wird der dritte Theil rechts in Gl. (6)

$$= \frac{1}{2} k \int dm \cdot dm'\, r f(r) \frac{dr}{dt},$$

wobei die Integration eigentlich eine sechsfache ist, die sich zweimal über den ganzen Körper erstreckt und r die Entfernung der beiden Massenpunkte dm und dm' bezeichnet. Setzt man noch

$$k \int r f(r)\, dr = F(r)$$

so entsteht endlich

$$(7)\quad \frac{dL}{dt} = \int S(\mu\gamma)\,dm + \int S(\varphi\gamma)\,dO + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int dm\, dm'\, F(r).$$

IV. Mechanik des festen Körpers.

§ 23. Die beiden Gleichungen (3) § 20 und (4) § 21

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\int \varrho\, dm &= \int \mu\, dm + \int \varphi\, dO \\ \frac{d}{dt}\int dm\, V(\varrho'\gamma') &= \int dm\, V(\varrho'\mu) + \int dO\, V(\varrho'\varphi) \end{aligned} \right.$$

gelten der Ableitung gemäss für jeden Körper, wie er auch beschaffen sein mag. Aber sie sind nicht für jeden Körper auch hinreichend zur Bestimmung der Bewegung, sondern es müssen je nach seiner Beschaffenheit noch Gleichungen hinzu kommen.

Diese zu entwickeln ist, wenn der Körper nicht als fest angenommen wird, die Aufgabe der Elasticitätstheorie resp. der Hydrodynamik.

Für einen festen Körper sind aber die Gll. (1) zur vollständigen Bestimmung der Bewegung hinreichend. Um dies zu zeigen, nehmen wir im Körper und mit ihm fest verbunden ein Coordinatensystem an, auf dessen Axen die drei Einheitsstrecken $\xi' \eta' \zeta'$ liegen mögen. Mit $x' y' z'$ seien die Coordinaten desjenigen Punktes bezeichnet, der die Masse dm hat resp. der in dem Oberflächenstück dO liegt. $x' y' z'$ sind dann Constante, dagegen sind $\xi' \eta' \zeta'$ als Functionen der Zeit zu bestimmen. Ferner sei λ der Radius Vector des Ursprungs des im Körper festen Systems in Bezug auf dasjenige, gegen welches die Bewegung zu bestimmen ist. Dann ist

$$\varrho = \lambda + x' \xi' + y' \eta' + z' \zeta'$$

und

$$\int \varrho \, dm = \lambda \int dm + \xi' \int x' \, dm + \eta' \int y' \, dm + \zeta' \int z' \, dm.$$

Bezeichnet P den Radius Vector des Schwerpunktes, so ist die linke Seite $= P \int dm$ und die Gleichung zeigt dann, dass der Schwerpunkt im Körper fest ist. Es wird sich also empfehlen, den Ursprung des im Körper festen Coordinatensystems in den Schwerpunkt zu verlegen, oder $\lambda = P$ zu setzen. Wenn wir dies annehmen, so wird

$$\int x' \, dm = 0, \quad \int y' \, dm = 0, \quad \int z' \, dm = 0.$$

Die erste Gleichung des Systems (1) wird nun

$$\frac{d^2 P}{d t^2} \int dm = \int \mu \, dm + \int \varphi \, dO.$$

Ist also für $t = 0$ Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunktes bestimmt, so ist hienach sein Ort für jede Zeit bekannt (von Integrationsschwierigkeiten abgesehen).

Da in der zweiten der Gleichungen (1) ϱ' den Radius Vector eines Punktes vom Schwerpunkt aus bezeichnet, so ist

$$\varrho' = x' \xi' + y' \eta' + z' \zeta'.$$

Trägt man dies in die erwähnte Gleichung ein, so erhält man drei Gleichungen für die drei Functionen $\xi' \eta' \zeta'$. Da wir nun annehmen, diese Strecken seien aufeinander senkrecht und alle drei von der Länge Eins, so ist

$$(2) \qquad S(\xi' \xi') = S(\eta' \eta') = 1 \quad S(\xi' \eta') = 0$$

und bei passender Wahl der Richtung der ζ' Axe kann man dann setzen

$$(2^*) \qquad \zeta' = V(\xi' \eta')$$

aus der

$$S(\xi' \zeta') = S(\eta' \zeta') = 0, \; S(\zeta' \zeta') = S(\xi' \xi') S(\eta' \eta') - S(\xi' \eta')^2 = 1$$

folgt.

Folglich sind nur die beiden Strecken ξ' und η' zu finden und zwischen den sechs Stücken, die zu deren Bestimmung nöthig sind, bestehen die drei Gleichungen (2), so dass nur noch drei übrig bleiben als deren Funktionen die drei anderen erscheinen. Zur Bestimmung der drei Unbekannten liefern aber die erwähnten Gleichungen (1) gerade drei Gleichungen.

Wenn man die Gleichungen (2) nach der Zeit differentiirt so folgt

$$S\left(\xi' \frac{d\xi'}{dt}\right) = 0, \; S\left(\eta' \frac{d\eta'}{dt}\right) = 0, \; S\left(\xi' \frac{d\eta'}{dt}\right) + S\left(\eta' \frac{d\xi'}{dt}\right) = 0.$$

Nach der ersten Gleichung ist $\frac{d\xi'}{dt}$ eine auf ξ' senkrechte Strecke, die folglich gleich $V(\xi' \varepsilon_1)$ gesetzt werden kann.

Ebenso kann nach der zweiten Gleichung $\frac{d\eta'}{dt} = V(\eta' \varepsilon_2)$ gesetzt werden. Damit liefert die dritte Gleichung nach § 18

$$0 = S(\xi' V(\eta' \varepsilon_2)) + S(\eta' V(\xi' \varepsilon_1)) = S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 | V(\xi' \eta'))$$

die aussagt, dass $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ mit ξ' und η' in derselben Ebene liegt. Desswegen gibt es Zahlen a und b die

$$\varepsilon_1 + a\xi' = \varepsilon_2 + b\eta' = \varepsilon$$

machen, womit

$$\frac{d\xi'}{dt} = V(\xi' \varepsilon) \quad \frac{d\eta'}{dt} = V(\eta' \varepsilon)$$

wird.

Aus $\zeta' = V(\xi' \eta')$ folgt nun

$$\frac{d\zeta'}{dt} = V\left(\frac{d\xi'}{dt}\eta'\right) + V\left(\xi'\frac{d\eta'}{dt}\right)$$
$$= V(V(\xi'\varepsilon), \eta') + V(\xi' V(\eta'\varepsilon))$$

oder mit Hilfe der Gleichung (8) des § 18

$$\frac{d\zeta'}{dt} = V\,(V(\xi'\eta')\varepsilon) = V(\zeta'\varepsilon).$$

Mit Benützung dieser Resultate findet man nun schliesslich

(3) $$\frac{d\varrho'}{dt} = V(\varrho'\varepsilon)$$

für jeden Punkt des festen Körpers. Die Strecke ε wird selbst eine Funktion der Zeit sein und ihren Ort im beweglichen Coordinatensystem und gegen das feste System mit der Zeit verändern. Diejenigen Punkte des Körpers, welche in einem gegebenen Augenblicke auf ε liegen, haben nach der obigen Gleichung in dem Momente die Geschwindigkeit Null; alle anderen Punkte aber haben Geschwindigkeiten, die auf der Ebene, welche ϱ' und ε enthält, senkrecht stehen und deren Grösse $= T\,V(\varrho'\varepsilon) = T\varrho' \cdot T\varepsilon \sin(\varrho'\varepsilon)$ ist, also gleich ist dem Product aus $T\varepsilon$ in den senkrechten Abstand des Punktes (ϱ') von der Strecke ε. Dieselben Geschwindigkeitsverhältnisse würden sich aber auch einstellen, wenn der Körper in einer Rotation um die Axe ε begriffen wäre, deren Winkelgeschwindigkeit $= T\varepsilon$ wäre. Man nennt desshalb auch die Strecke ε die Momentanaxe, oder die augenblickliche, die instantane Drehungsaxe und $T\varepsilon$ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit.

Nun war der Radius Vector ϱ in Bezug auf das feste System $= P + \varrho'$ gesetzt worden; folglich ist

(4) $$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{d\varrho'}{dt} = \frac{dP}{dt} + V(\varrho'\varepsilon)$$

d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes ist die Summe aus der Geschwindigkeit des Schwerpunktes und aus der Geschwindigkeit der Drehungsbewegung um die Momentanaxe.

§ **24.** Man kann jetzt die Differentialgleichungen (1) des vorigen Paragraphen so umschreiben, dass zunächst die Strecke ε gesucht wird. Es ist nämlich, weil $\gamma' = V(\varrho' \varepsilon)$, nach (6) § 18

$$V(\varrho' V(\varrho' \varepsilon)) = S(\varrho' \varepsilon)\, \varrho' - S(\varrho' \varrho')\, \varepsilon$$

also die Flächengeschwindigkeit Φ des ganzen Körpers

$$1)\qquad \Phi = \int dm \left\{ \varrho' S(\varrho' \varepsilon) - \varepsilon S(\varrho' \varrho') \right\}$$

Schreibt man

$$1^*)\quad -S(\varepsilon\varepsilon)\cdot\Phi = \varepsilon \int dm \left\{ S(\varrho' \varrho')\, S(\varepsilon\varepsilon) - S(\varrho' \varepsilon)^2 \right\} + \int dm \left\{ \varepsilon S(\varrho' \varepsilon) - \varrho' S(\varepsilon\varepsilon) \right\} \cdot S(\varrho' \varepsilon)$$

so ist der zweite Theil eine Summe von Strecken, von welchen jede, weil $S(\varepsilon \mid \varepsilon S(\varrho' \varepsilon) - \varrho' S(\varepsilon\varepsilon)) = 0$ ist, auf ε senkrecht steht und deren Summe daher ebenfalls auf ε senkrecht ist; der erste Summand von Φ ist eine Strecke, die aus ε durch Multiplikation mit der Zahl

$$2)\quad J = \frac{1}{S(\varepsilon\varepsilon)} \cdot \int dm \left\{ S(\varrho' \varrho')\, S(\varepsilon\varepsilon) - S(\varrho' \varepsilon)^2 \right\} = -\frac{S(\Phi\varepsilon)}{S(\varepsilon\varepsilon)}$$

hervorgeht, die offenbar nicht abhängt von der Länge von ε, und die das T r ä g h e i t s m o m e n t d e s K ö r p e r s u m d i e A x e ε heisst.

Ersetzt man im Zähler von J die Strecke ε durch eine unbestimmte Strecke σ, so kann man nach denjenigen Strecken σ fragen, für welche

$$3)\quad \int dm \left\{ S(\varrho' \varrho')\, S(\sigma\sigma) - S(\varrho' \sigma)^2 \right\} = \int dm\, T V(\varrho' \sigma)^2 = 1$$

ist. Die Endpunkte aller dieser Strecken bilden hienach eine Fläche zweiter Ordnung, die offenbar den Ursprung der Radii Vectoren, also hier den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, weil die linke Seite bei Vertauschung von σ mit $-\sigma$ sich nicht ändert. Setzt man für $T V(\varrho' \sigma)$ seinen Werth $T\varrho' \cdot T\sigma \sin(\varrho' \sigma)$, so wird die Gleichung

$$T\sigma^2 \int dm\, T\varrho'^2 \cdot \sin^2(\varrho' \sigma) = 1.$$

Weil die Fläche eine centrische Fläche zweiter Ordnung ist und die linke Seite ihrer Gleichung, wie die obige Form zeigt, nur positive Werthe annehmen kann, so ist sie ein Ellipsoid, das das Trägheitsellipsoid heisst.

Setzt man für σ seinen Ausdruck durch die Coordinaten $\sigma = X\xi' + Y\eta' + Z\zeta'$, so wird die Gleichung des Ellipsoids in Bezug auf das im Körper feste Coordinatensystem

$$= \int dm \left\{ (x'^2 + y'^2 + z'^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (x'X + y'Y + z'Z)^2 \right\}$$

also unabhängig von der Lage des Systems der $\xi'\eta'\zeta'$ gegen das System der $\xi\eta\zeta$. Das heist das Trägheitsellipsoid ist eine im bewegten Körper feste Fläche. Schneidet man diese Fläche durch die Momentanaxe ε indem man $\sigma = a \cdot \varepsilon$ setzt, wo a eine Zahl ist, so findet sich

$$(4) \quad a^2 \int dm \left\{ S(\varrho'\varrho')\, S(\varepsilon\varepsilon) - S(\varrho'\varepsilon)^2 \right\} = 1 = -a^2 S(\Phi, \varepsilon)$$

Daher

$$J = \frac{1}{a^2 S(\varepsilon\varepsilon)} = \frac{1}{T(a\varepsilon)^2}$$

so dass das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Axe dem Quadrat des Halbmessers des Trägheitsellipsoids reciprok ist, welcher in die Axe fällt. In dem Schnittpunkte der Strecke $a\varepsilon$ mit dem Ellipsoid soll nun die Tangentenebene an die Fläche gelegt werden. Ein Radius Vector σ' führt nach einem Punkte dieser Ebene, wenn die Verbindungslinie der Endpunkte von σ' mit $a\varepsilon$ nur in dem letzteren Punkt die Fläche trifft. Ein Punkt dieser Linie hat aber den Radius Vector $\sigma = a\varepsilon + b(\sigma' - a\varepsilon)$. Führt man dies in die Flächengleichung ein, setzt für a seinen Werth und stellt dann die Bedingung auf, dass $b = 0$ Doppelwurzel der entstehenden Gleichung ist, so folgt

$$\int dm \left\{ S(\varrho'\varrho')\, S(a\varepsilon \mid \sigma' - a\varepsilon) - S(\varrho' \mid a\varepsilon)\, S(\varrho' \mid \sigma' - a\varepsilon) \right\} = 0$$

als Gleichung der gesuchten Tangentenebene. Mit Hilfe des in Gl. (1) gegebenen Werthes von Φ kann man diese Gleichung

$$S\left(\sigma' - a\,\varepsilon \,\Big|\, \int dm \left\{ S(\varrho'\varrho')\,\varepsilon - \varrho' S(\varrho'\varepsilon) \right\}\right) = 0.$$

$$S(\Phi \,|\, \sigma' - a\,\varepsilon) = 0$$

schreiben, in welcher Form sie zeigt, dass Φ auf jeder in der Tangentenebene liegenden Strecke $\sigma' - a\,\varepsilon$, d. h. auf der Tangentenebene selbst senkrecht ist. Ist der Abstand der Tangentenebene vom Ursprung $= c\,\Phi$, so muss die obige Gleichung durch $\sigma' = c\,\Phi$ erfüllt werden, woraus

$$c = \frac{S(\Phi, a\,\varepsilon)}{S(\Phi\,\Phi)}$$

sich ergibt.

Das Quadrat des kürzesten Abstandes ist folglich

$$= c^2 S(\Phi\,\Phi) = J \frac{T\varepsilon^2}{T\Phi^2}.$$

Also ergibt sich:

Wenn man das im Körper feste Trägheitsellipsoid durch die Momentanaxe schneidet und im Schnittpunkt die Tangentenebene an das Ellipsoid legt, so ist deren kürzester Abstand vom Schwerpunkt die Richtung der Gesammtflächengeschwindigkeit und seine Grösse ist der Grösse dieser Flächengeschwindigkeit umgekehrt proportional.

Schreibt man den Ausdruck von J in Gl. (2)

$$J = \frac{1}{S(\varepsilon\,\varepsilon)} \int dm\, T\varrho'^2\, T\varepsilon^2 \sin^2(\varrho'\,\varepsilon)$$

$$= \int dm\, T\varrho'^2 \cdot \sin^2(\varrho'\,\varepsilon),$$

so erkennt man, dass das Trägheitsmoment gleich ist der Summe der Producte aus den Massen der einzelnen materiellen Punkte in die Quadrate ihrer Abstände von der Axe. Diese Summe hat aber auch eine Bedeutung, wenn die Axe nicht durch den Schwerpunkt geht. Es sei J' das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe, welche ε parallel durch den Punkt $\varrho' = \varrho_0$ geht. Bezeichnet man dann $\varrho' - \varrho_0$ mit ϱ_1, so wird

$$J' = \int dm\, T \varrho_1^2 \sin^2 (\varrho_1 \varepsilon)$$
$$= \frac{1}{S(\varepsilon\varepsilon)} \int dm \left\{ S(\varrho_1 \varrho_1) S(\varepsilon\varepsilon) - S(\varrho_1 \varepsilon)^2 \right\}.$$

Weil aber $\int \varrho' \, dm = 0$ ist, so folgt, wenn man hier $\varrho_1 = \varrho' - \varrho_0$ setzt

$$J' = J + \frac{1}{S(\varepsilon\varepsilon)} \int dm \left\{ S(\varrho_0 \varrho_0) S(\varepsilon\varepsilon) - S(\varrho_0 \varepsilon)^2 \right\}$$
$$= J + T \varrho_0^2 \sin^2 (\varrho_0 \varepsilon) \cdot \int dm \cdot$$

Also ist das Trägheitsmoment um die durch den Punkt ϱ_0 gehende Axe gleich dem Trägheitsmoment um die parallele Schwerpunktsaxe plus dem Producte aus der Gesammtmasse in das Quadrat des Abstandes des Punktes ϱ_0 von der Schwerpunktsaxe.

Das Trägheitsellipsoid hat drei Hauptaxen die aufeinander senkrecht stehen; sie heissen die Hauptträgheitsaxen oder kurz die Hauptaxen des Körpers. Fällt ε mit einer dieser Axen zusammen so fällt auch Φ in diese Axe und folglich muss dann aus dem Ausdruck (1*) von Φ der zweite Summand verschwinden.

§ 25. Man sagt von einem Kräftesystem es sei an einem Körper im Gleichgewichte, wenn es nicht im Stande ist, den Körper in Bewegung zu setzen, falls er in Ruhe sich befindet.

Jedenfalls muss dann der Schwerpunkt sich in Ruhe befinden und darin bleiben, darf also keine Beschleunigung haben und desswegen muss nach (1) § 23

(1) $$\int \mu \, dm + \int \varphi \, dO = 0$$

sein.

Ferner aber muss die Flächengeschwindigkeit um den Schwerpunkt Null sein und bleiben, folglich die Flächenbeschleunigung verschwinden, wozu die Gleichung

(1*) $$\int V(\varrho' \mu) \, dm + \int V(\varrho' \varphi) \, dO = 0$$

erfüllt sein muss. Diese Gleichungen müssen für jeden Körper gelten. Ob sie aber auch hinreichend sind, muss für jede Gattung von Körpern besonders untersucht werden. Dabei zeigt sich, dass sie nicht hinreichen, wenn man den Körper als elastisch oder flüssig betrachtet, während in der That sich ergibt, dass für einen festen Körper die Gleichungen nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sind.

Vermöge der Gleichung (1) nämlich hat der Schwerpunkt keine Beschleunigung, kann also auch nicht in Bewegung kommen, wenn er in Ruhe war. Nach der zweiten Gleichung aber hat der Körper keine Flächenbeschleunigung, also auch, wenn er einmal in Ruhe war, keine Flächengeschwindigkeit. Dann ist die rechte Seite der Gleichung (1*) § 24 gleich Null; weil sie aber aus zwei auf einander senkrechten Strecken zusammengesetzt ist, muss jede einzeln gleich Null sein. Daher folgt $\varepsilon = 0$ d. h. eine Drehung um den Schwerpunkt findet nicht statt.

In Gl. (1*) ist ϱ' die Strecke, welche den Schwerpunkt mit dem Angriffspunkt der Kraft verbindet. Ist ϱ_0' die Strecke nach irgend einem andern festen Pnnkte und setzt man

$$\varrho' = \varrho_0' + \varrho''$$

so ist ϱ'' die Strecke vom Punkte (ϱ_0') nach dem Angriffspunkte der Kraft und man kann dann schreiben

(2)
$$\begin{aligned}\int V(\varrho'\mu)dm + \int V(\varrho'\varphi)dO = \\ \int V(\varrho''\mu)dm + \int V(\varrho''\varphi)dO + \\ + V(\varrho_0', \int \mu\, dm) + V(\varrho_0', \int \varphi\, dO)\end{aligned}$$

so dass die Gleichungen (1) und (1*) auch durch die beiden

(3)
$$\left\{\begin{aligned}\int \mu\, dm + \int \varphi\, dO = 0 \\ \int V(\varrho''\mu)\, dm + \int V(\varrho''\varphi)\, dO = 0\end{aligned}\right.$$

ersetzt werden können. Man nennt $V(\varrho''\mu)dm$ resp. $V(\varrho''\varphi)\, dO$ Das Moment der Kraft $\mu\, dm$ resp. $\varphi\, dO$ um den Punkt (ϱ_0'). Folglich muss für das Gleichgewicht nicht nur die Summe der Kräfte, sondern auch die Summe ihrer um irgend einen Punkt genommenen Momente verschwinden.

Bezeichnet man wie oben § 24 mit $\xi\eta\zeta$ die drei Einheitsstrecken auf den drei Coordinatenaxen, so kann man setzen

4) $$\begin{cases}\int\mu\, dm = X\xi + Y\eta + Z\zeta \\ \int\varphi\, dO = X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta\end{cases}.$$

Die Zahlen XYZ, resp. $X'\,Y'\,Z'$ heissen die Componenten der Kraft nach den Coordinatenaxen. Ferner sei

$$\varrho' = -P + x\xi + y\eta + z\zeta$$
$$\varrho_0' = -P + x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta,$$

so dass xyz die Coordinaten des Punktes (ϱ'), $x_0 y_0 z_0$ die des Punktes (ϱ_0') sind. Dann zerfallen die Gleichungen (2), indem man von den Gleichungen

$$V(\xi\eta) = \zeta,\ V(\eta\zeta) = \xi,\ V(\zeta\xi) = \eta$$

Gebrauch macht, in sechs Zahlengleichungen, die wenn man die Unterscheidung zwischen Massenkräften und Flächenkräften fallen lässt und die Integrale durch Summen ersetzt, lauten

$$(5)\begin{cases}\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z = 0 \\ \Sigma\Big\{(x-x_0)Y-(y-y_0)X\Big\} = 0 \quad \Sigma\Big\{(y-y_0)Z-(z-z_0)Y\Big\} = 0 \\ \Sigma\Big\{(z-z_0)X-(x-x_0)Z\Big\} = 0.\end{cases}$$

§ 26. Die Bewegung eines festen Körpers ist nach § 24 vollständig bestimmt, wenn für jede Zeit die Summe aller Kräfte und die Summe aller Kraftmomente um den Schwerpunkt oder einen andern Punkt gegeben ist, da man nach Gl. (2) im vor. § das letztere Moment auf das erste reduciren kann. Man nennt zwei Systeme von Kräften äquivalent, wenn beide dieselbe Kräftesumme und dieselbe Momentensumme liefern in Bezug auf denselben Punkt.

Aus der Definition folgt, dass man in einem Kräftesystem einen Theil durch ein ihm aequivalentes System ersetzen kann, ohne dass die Wirkung des ganzen Systems sich ändert. Denn diese hängt nur von den beiden Strecken $\Sigma\varkappa$ und $\Sigma V(\varrho\varkappa)$ ab, welche ja beide ungeändert bleiben. Weil nun $V(\varrho\varkappa) = V(\varrho + p\varkappa, \varkappa)$, wo p eine ganz beliebige Zahl ist, so ändert sich die Wirkung der Kraft $\varkappa$ nicht, wenn man sie am Punkte $(\varrho + p\varkappa)$ angreifen lässt, der mit dem ersten Angriffspunkt (ϱ) auf einer zur Kraftrichtung parallelen Geraden liegt. Man nennt diese Gerade die Wirkungslinie der Kraft und sieht also, dass man jede Kraft an jedem Punkt ihrer Wirkungslinie angreifen lassen kann, ohne Aenderung der Wirkung.

Die Kräftesumme ist von der Wahl des Punktes nicht abhängig in Bezug auf welchen die Momente genommen sind. Dagegen ändert sich die Momentensumme mit der Wahl dieses Punktes. Nimmt man die Momente um den Punkt ϱ_0 so ist $\varrho = \varrho_0 + \varrho - \varrho_0 = \varrho_0 + \varrho_0'$ zu setzen und damit wird

$$M = \Sigma V(\varrho\varkappa) = \Sigma V(\varrho_0'\varkappa) + \Sigma V(\varrho_0, \varkappa)$$
$$= \Sigma V(\varrho_0'\varkappa) + V(\varrho_0, \Sigma\varkappa),$$

so dass die neue Momentensumme

(1) $$M' = M - V(\varrho_0, \Sigma\varkappa)$$

wird. Ist $\Sigma\varkappa = K$ so folgt hieraus $S(M'K) = S(MK)$ d. h. die Projectionen von M und M' auf K sind gleich. Daher wird M' möglichst klein $= M_0$, wenn es die Richtung von K hat und somit $= qK$ gesetzt werden kann, wo q eine Zahl bezeichnet.

Combinirt man

$$M_0 = qK = M - V(\varrho_0, K)$$

mit K nach der Regel S, so folgt

$$qS(KK) = S(MK)$$

(2) $$q = \frac{S(MK)}{S(KK)}$$

so dass $TM_0 = \dfrac{|S(MK)|}{TK}$ die Grösse der kleinsten Momentensumme ist. Mit diesem Werth von q folgt

$$-KS(MK) + MS(KK) = V(\varrho_0 K)S(KK)$$

oder nach (6) § 18

$$V(\varrho_0 K)S(KK) = -V(K, V(KM))$$

$$V\left\{\varrho_0 S(KK) - V(KM), K\right\} = 0.$$

Ist also s eine ganz beliebige Zahl, so wird

(3) $$\varrho_0 = \frac{V(KM)}{S(KK)} + sK$$

indem beim zweiten Gliede der Nenner $S(KK)$ in s einbezogen ist. Diese Gleichung liefert aber wegen des beliebigen s eine Gerade, die mit K parallel durch den Punkt

$$\varrho = \frac{V(KM)}{S(KK)}$$

geht. Sie heisst die Centralaxe.

Ist $S(MK) = 0$, so verschwindet die kleinste Momentensumme und das ganze Kräftesystem ist dann der Kraft $K = \Sigma\varkappa$ äquivalent, die in der Centralaxe wirkt. Dies tritt ein, wenn K auf M senkrecht steht.

Die ganze Rechnung setzt aber voraus, dass TK nicht $=$ Null sei. Ist dies der Fall, so kann natürlich eine einzige Kraft dem ganzen Systeme nicht äquivalent sein. Die Gleichung (1) liefert dann $M' = M$ d. h. alle möglichen Momentensummen sind gleich.

Man kann dann versuchen, zwei Kräfte zu bestimmen, die dem ganzen System aequivalent sind. Da ihre Summe $= 0$ sein muss, so können wir sie λ und $-\lambda$ setzen. Ihre Angriffspunkte seien resp. (ϱ_1) und (ϱ_2). Dann muss

$$\begin{aligned} M &= V(\varrho_1 \lambda) + V(\varrho_2, -\lambda) \\ &= V(\varrho_1 - \varrho_2, \lambda) \end{aligned}$$

sein, so dass die Kräfte und ihre Angriffspunkte nicht vollständig bestimmt sind. Ein solches System von zwei gleich grossen aber entgegengesetzt gerichteten Kräften heisst nach Poinsot ein Kräftepaar. Sind λ' und $-\lambda'$ die Kräfte eines neuen Paares mit den Angriffspunkten ϱ_1' und ϱ_0' so ist dieses zweite System dem oben benutzten aequivalent, wenn

$$V(\varrho_1 - \varrho_2, \lambda) = V(\varrho_1' - \varrho_2', \lambda').$$

Der senkrechte Abstand der beiden Kräfte λ und $-\lambda$, der sog. Arm des Paares, sei $= h$, der des zweiten Paares h'; dann verlangt obige Gleichung, dass die Ebene durch λ und $-\lambda$ parallel sei mit der Ebene durch λ' und $-\lambda'$, dass

$$h \cdot T\lambda = h' \cdot T\lambda'$$

sei und dass die beiden oben mit V bezeichneten Strecken dieselbe

Richtung haben. Das Product $h \cdot T\lambda$ heisst das Moment des Paares. Folglich kann ein Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verlegt, und die Ebene parallel verschoben werden, ohne dass das Paar seine Wirkung ändert, wenn nur das Moment dasselbe bleibt.

Zwei specielle Fälle sind noch zu erwähnen. Liegen alle Wirkungslinien in einer Ebene, so gehört $\Sigma\varkappa$ dieser Ebene an und die Momentensumme M steht auf der Ebene senkrecht. Wenn also $\Sigma\varkappa$ nicht gleich Null ist, so kann ein solches System stets durch eine Einzelkraft ersetzt werden.

Sind zweitens alle Kräfte parallel, so kann man setzen $\varkappa = k \cdot \nu$, wo k Zahlen sind und die Strecke ν eine den gegebenen Kräften parallele Einheitsstrecke bezeichnet.

Dann ist $K = \nu \cdot \Sigma k$ und $M = \Sigma V(\varrho, k\nu) = \Sigma k V(\varrho\nu) = V(\Sigma k\varrho, \nu)$, so dass M auf K senkrecht steht. Ist somit K nicht $= 0$, so kann man das System durch eine einzige Kraft K ersetzen, deren Wirkungslinie parallel mit ν durch den Punkt

$$\varrho = \frac{V(K, V(\iota, \nu))}{S(KK)}$$

geht, wobei $\Sigma K\varrho = \iota$ gesetzt ist. Nach (7) § 18 wird dies

$$\varrho = \frac{\Sigma(k\varrho)}{\Sigma k} - \nu \cdot \frac{S(\nu, \Sigma k\varrho)}{\Sigma k}$$

Aendert sich ν in ν' so erhält man eine neue Wirkungslinie, die mit der vorigen den Punkt

$$\varrho = \frac{\Sigma k\varrho}{\Sigma k}$$

gemein hat, der der Mittelpunkt der parallelen Kräfte heisst. Ist die Kraft $\varkappa = dm \cdot a\nu$, wo dm die Masse des Punktes, auf den $\varkappa$ wirkt und a eine constante Zahl bezeichnet, so wird der Mittelpunkt dieser Parallelkräfte gegeben durch

$$\varrho = \frac{\int a\, dm \cdot \varrho}{\int a\, dm} = \frac{\int \varrho\, dm}{\int dm}$$

und ist folglich der Schwerpunkt, in dem man sich dann die Kraft $K = \int a\, dm \cdot \nu = a\nu \int dm$ wirkend denken muss.

§ 27. Wie für jeden Körper, so gilt auch für einen festen Körper das Princip der lebendigen Kraft, wie es in Gl. (7) § 22 ausgedrückt ist. Bei einem festen Körper ändert sich aber die Entfernung zweier Punkte von einander nicht und folglich ist r_{ik} von der Zeit nicht abhängig. Daher ist für einen festen Körper

$$\frac{dL}{dt} = \int dm\, S(\mu\gamma) + \int dO\, S(\varphi\gamma). \tag{1}$$

Nun war

$$L = \frac{1}{2}\int dm\, S(\gamma\gamma)$$

und die Geschwindigkeit γ war nach § 23 (4)

$$\gamma = \frac{dP}{dt} + V(\varrho'\varepsilon) = \gamma_0 + V(\varrho'\varepsilon)$$

Damit wird

$$S(\gamma\gamma) = S(\gamma_0\gamma_0) + 2\,S\big(\gamma_0, V(\varrho'\varepsilon)\big) + S\big(V(\varrho'\varepsilon), V(\varrho'\varepsilon)\big)$$

Wenn man L bildet, so wird

$$\int dm\, S\big(\gamma_0, V(\varrho'\varepsilon)\big) = S\big(\gamma_0, V\big(\int \varrho'\, dm, \varepsilon\big)\big) = 0$$

weil $\int \varrho'\, dm = 0$ ist, da ja ϱ' vom Schwerpunkt ausgeht.

Da ferner nach (3) § 18

$$S\big(V(\varrho'\varepsilon), V(\varrho'\varepsilon)\big) = S(\varepsilon\varepsilon)\, S(\varrho'\varrho') - S(\varrho'\varepsilon)^2$$

ist, so wird das Integral davon nach (2) § 24

$$= \int dm \Big\{ S(\varepsilon\varepsilon)\, S(\varrho'\varrho') - S(\varrho'\varepsilon)^2 \Big\}$$

$$= J \cdot S(\varepsilon\varepsilon)$$

wenn J das auf die Axe ε bezügliche Trägheitsmoment bezeichnet. Hiemit folgt endlich

$$L = \frac{1}{2} S(\gamma_0\gamma_0) \cdot \int dm + \frac{1}{2} J S(\varepsilon\varepsilon). \tag{2}$$

Wenn die Bewegung eines Körpers durch äussere Hindernisse so beschränkt ist, dass sein Ort von einer einzigen Veränderlichen abhängt, so reicht eine Gleichung zur Bestimmung der Bewegung hin. Als diese kann man dann die eben entwickelte der lebendigen Kraft wählen.

Dies tritt z. B. ein, wenn der Körper sich um eine in ihm feste Axe drehen soll, die auch gegen das zu Grunde gelegte Coordinatensystem fest ist. Dann ist ε und J constant und folglich erhält man

$$S\left(\gamma_0 \frac{d\gamma_0}{dt}\right)\int dm = \int dm\, S(\mu\gamma) + \int dO\, S(\varphi\gamma)$$

aus der γ_0 und der Ort des Schwerpunktes sich ergibt.

V. Mechanik eines Systems von festen Körpern.

§ 28. Wir betrachten jetzt noch ein System von mehreren festen Körpern die so miteinander verbunden sind, dass sie sich noch einzeln gegen einander bewegen können, dass sie also nicht zusammen ein starres System bilden. Die Art der Verbindung kann nur eine solche sein, dass die Körper sich gegenseitig berühren und dass diese Berührung während der Bewegung bestehen bleibt. An diesen Berührungsstellen üben die sich berührenden Körper Kräfte aufeinander aus die dem allgemeinen Gesetze der Gleichheit von Action und Reaction gehorchen. Jeder einzelne Körper des Systems bewegt sich unter dem Einfluss dieser Kräfte und der äusseren Kräfte, die sonst noch auf ihn ausgeübt werden, und man kann die Gleichungen aufstellen, die seine Bewegung ergeben. Da aber die in den Berührungsstellen thätigen Kräfte noch unbekannt sind, so muss man die Bewegungsgleichungen für die sämmtlichen Körper noch mit den geometrischen Bedingungen des Systems combiniren, um alle Unbekannte zu bestimmen. Häufig tritt dabei der Fall ein, dass die Gegenkräfte in den Berührungspunkten sich nicht bestimmen lassen. Diese Betrachtungen sind auch anzuwenden, wenn es sich um das Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem beweglichen System von Körpern handelt, nur werden dann auf der einen Seite der Bewegungsgleichungen die Beschleunigungen der Schwerpunkte und die Flächenbeschleunigungen der einzelnen Körper gleich Null zu setzen sein. Auch dabei tritt die erwähnte Unbestimmtheit auf, besonders wenn man annimmt, dass die sich berührenden Körper rauh sind und Reibung ausüben.

Als Beispiel möge das Gleichgewicht der Kräfte an einer Kette betrachtet werden. Es seien $g_1 g_2 \ldots g_n$ ihre Glieder. An g_i wirke die Kraft $\varkappa_i$ ($i = 2 \ldots n - 1$); an g_1 die beiden Kräfte $\varkappa$ und $\varkappa'$, an g_n die $\varkappa_n$ und $-\varkappa''$. Jedes Kettenglied möge dabei das vorhergehende und folgende berühren in je einem Punkte. An der Berührungsstelle von g_i mit g_{i-1} wirke auf g_i die Kraft λ_i, so dass auf g_{i-1} die Kraft $-\lambda_i$ wirkt. Bezeichnen noch ϱ', ϱ'', ϱ_i und ϱ_i' die Radii Vectoren der Angriffspunkte der Kräfte $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa_i$, λ_i resp. so gelten die Gleichungen für das Glied g_i

$$(1) \qquad \begin{cases} \varkappa_i + \lambda_i - \lambda_{i+1} = 0 \\ V(\varrho_i\, \varkappa_i) + V(\varrho_i'\, \lambda_i) - V(\varrho_{i+1}'\, \lambda_{i+1}) = 0. \end{cases}$$

Für das erste Glied lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{cases} \varkappa_1 + \varkappa' - \lambda_2 = 0 \\ V(\varrho_1\, \varkappa_1) + V(\varrho'\, \varkappa') - V(\varrho_2'\, \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

und für das letzte

$$\begin{cases} \varkappa_n - \varkappa'' + \lambda_n = 0 \\ V(\varrho_n\, \varkappa_n) - V(\varrho''\, \varkappa'') + V(\varrho_n'\, \lambda_n) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind freilich nicht hinreichend, um ohne weitere Angaben die Gestalt der Kette zu finden. Dagegen kann man mit ihrer Hilfe die Frage lösen, ob eine gegebene Anordnung Gleichgewichtsfigur sein kann.

Werden die Kettenglieder immer kleiner, so nähern sich die Linien, welche die Berührungspunkte der einzelnen Glieder verbinden, mehr und mehr einer Curve. Ist s die Bogenlänge der Curve bis zu dem Punkte (ϱ_i') und $s + ds$ bis zu (ϱ_{i+1}'), schreibt man ferner $\varkappa$, λ, ϱ für $\varkappa_i$, λ_i, ϱ_i, und $\lambda + d\lambda$, $\varrho + d\varrho$ für λ_{i+1}, ϱ_{i+1}, so werden die Gleichungen (1)

$$\varkappa = d\lambda$$
$$V(\varrho\varkappa) = d\,V(\varrho\,\lambda)$$

folglich ist

$$V(\varrho, d\lambda) = d\,V(\varrho\lambda) = V(\varrho, d\lambda) + V(d\varrho, \lambda),$$

so dass $V(d\varrho, \lambda) = 0$ ist. Ist die Schwere die einzige wirkende Kraft und bezeichnet α eine vertikal nach abwärts gerichtete

Strecke, so kann man setzen $\varkappa = q \alpha d s$, wo q eine Zahl ist. Ist q constant, so wird folglich

$$\lambda = q \alpha s + \beta$$

unter β eine constante Strecke verstanden und folglich ergibt sich die Differentialgleichung

$$V\left(\frac{d\varrho}{ds}, q\alpha s + \beta\right) = 0,$$

deren Integration am besten mit Einführung von Coordinaten erfolgt und zwischen diesen eine Gleichung der Form

$$y = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right\}$$

ergibt, wenn man das Coordinatensystem in passender Weise legt.

§ 29. Die allgemeinen Sätze über die Bewegung des Schwerpunktes, das Princip der Flächen und das der lebendigen Kraft, die wir oben in §§ 23—27 für einen festen Körper aufgestellt haben, lassen sich auch ausdehnen auf ein System von Körpern; da die beiden ersten Sätze für einen ganz beliebigen Körper aufgestellt wurden und ein irgendwie beschaffenes System von festen Körpern wieder einen, wenn auch nicht mehr festen, Körper darstellt, so gelten sie auch für ein solches System, wie wir es in den letzten §§ betrachteten.

Das Princip der lebendigen Kraft dagegen erfordert eine besondere Behandlung.

Sei L_1 die lebendige Kraft für den ersten Körper, L_2 die für den zweiten u. s. w., seien ferner $\varkappa_1$ irgend eine der am ersten Körper thätigen äusseren Kräfte, γ_1 die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, $\varkappa_2$ und γ_2 das entsprechende für den zweiten Körper u. s. w., so ist

$$\frac{dL_1}{dt} = \Sigma S(\varkappa_1 \gamma_1)$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma S(\varkappa_2 \gamma_2)$$

wo sich die Summe über alle an dem fraglichen Körper angreifende Kräfte erstreckt. Durch Addition folgt, wenn man

$$L_1 + L_2 + \ldots = L$$

setzt

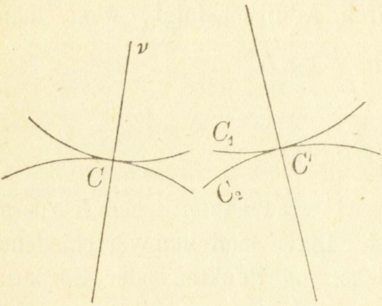
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\Sigma S(\varkappa\gamma)$$

wo nun die Summe rechts über alle an sämmtlichen Körpern wirksamen Kräfte zu nehmen ist. Deren sind nun verschiedene Gattungen: Erstens Kräfte, welche von Punkten oder Körpern die dem System nicht angehören, auf dessen Theile ausgeübt werden. Dazu gehören eigentlich auch die Kräfte, welche Hindernisse, die dem System nicht angehören, auf die Körper des Systems ausüben. Wir wollen diese aber als eine besondere Categorie aufführen. Zweitens Kräfte, welche die einzelnen Körper des Systems in den Berührungspunkten auf einander ausüben und die je paarweise gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind. Drittens Kräfte, die ebenfalls die einzelnen Körper des Systems auf einander ausüben, die aber, wie Anziehungs- und Abstossungskräfte nicht an den Berührungsstellen wirken. Endlich viertens die oben erwähnten Hinderniskräfte. Die Kräfte erster und dritter Art sind in der Rechnung zu berücksichtigen, wenn man auch in vielen Fällen die letzteren wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen darf. Die zweiter und vierter Art dagegen lassen eine Reduction zu.

Sei $\varkappa$ eine solche Kraft der zweiten Art, die z. B. den ersten Körper angreift, so wirkt die $-\varkappa$ auf den zweiten. Die Angriffspunkte beider Kräfte fallen in einen Berührungspunkt der beiden Körper zusammen, können aber verschiedene Geschwindigkeiten γ_1 und γ_2 haben. Dann tritt oben in der Summe auf $S(\varkappa\gamma_1)$ und $S(-\varkappa, \gamma_2)$ die zusammen $S(\varkappa, \gamma_1 - \gamma_2)$ geben. Nun zerlegen wir $\varkappa$ in eine Componente ν, die die Richtung der gemeinsamen Normalen beider Flächen in dem Punkt hat, in dem sie sich berühren und in eine darauf senkrechte, tangentiale Componente τ, so dass $\varkappa = \nu + \tau$ ist. Dann wird

$$S(\varkappa, \gamma_1 - \gamma_2) = S(\nu, \gamma_1 - \gamma_2) + S(\tau, \gamma_1 - \gamma_2).$$

(Figur 5.)



Man kann nachweisen, dass der erste Summand gleich Null ist. Es mögen (Figur 5) zur Zeit t die beiden Flächen sich im Punkte C berühren und zur Zeit $t + dt$ im Punkte C'. Zu dieser Zeit seien die beiden Punkte, welche zur Zeit t in C vereinigt lagen nach C_1 resp. C_2 gelangt, dann ist $CC_1 = \gamma_1 dt$, $CC_2 = \gamma_2 dt$, daher

$$(\gamma_1 - \gamma_2)\, dt = C_2 C_1 = C_2 C' + C' C_1.$$

Die Linie $C_2 C'$, die zwei unendlich nahe Punkte der ersten Fläche verbindet, bildet mit der Normalen im Punkte C' einen Winkel, der sich von einem Rechten unendlich wenig unterscheidet, und da die Normale in C' mit der in C selbst einen unendlich kleinen Winkel bildet, so ist auch der Winkel von $C' C_1$ mit ν unendlich wenig von einem Rechten verschieden. Das Gleiche gilt aber von $C_2 C'$, so dass

$$S(\nu, \gamma_1 - \gamma_2) = S(\nu, C_2 C') + S(\nu, C' C_1) = 0$$

ist. Ist somit $\tau = 0$ d. h. findet in dem betrachteten Berührungspunkt keine Reibung statt, so zerstören sich die Arbeiten der beiden Druckkräfte, die in dem betrachteten Punkt auf beide Körper wirken. Die oben charakterisirten Kräfte zweiter Art geben also zur Summe der Arbeiten keinen Beitrag, wenn die Berührung ohne Reibung stattfindet. Sind dagegen die Flächen rauh, so dass eine Reibung eintritt, so ist, wie die Erfahrung gelehrt hat, τ gleich gerichtet mit $\gamma_2 - \gamma_1$ und ihrer Grösse nach gleich $T\nu$ mal dem Reibungscoefficienten f, so dass die Arbeit dann einen negativen von Null verschiedenen Werth erhält, der $= -f \cdot T\nu \cdot T(\gamma_1 - \gamma_2)$ ist.

Ist $\varkappa$ eine Kraft der vierten Art, so ist die Arbeit $= S(\varkappa\gamma_1)$, wenn γ_1 die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes ist. Ist γ_2 die Geschwindigkeit desjenigen Punktes des Hindernisses, welcher mit dem Angriffspunkt von $\varkappa$ coincidirt, so ergibt sich nach dem eben Bewiesenen

$$S(\varkappa\gamma_1) = S(\varkappa\gamma_2) - fT\nu \cdot T(\gamma_1 - \gamma_2).$$

§ **30.** Man kann die Gleichgewichtsbedingungen noch in einer anderen symbolischen Form ausdrücken, zu deren Ableitung wir uns jetzt wenden.

Wir betrachten ein System von festen Körpern, die irgendwie mit einander verbunden sind und deren Bewegung durch andere, dem betrachteten System nicht angehörende, Körper beschränkt wird. Auf die Punkte der Körper mögen Kräfte wirken, die bei der Bewegung entweder constant bleiben oder ihre Grösse und Richtung blos desswegen ändern, weil ihre Angriffspunkte oder die Punkte, von welchen sie ausgehen, sich verschieben. Die im vor. § als Kräfte zweiter, dritter und vierter Art bezeichneten Kräfte haben diese Eigenschaft.

Zur Zeit $t = 0$ mögen alle Körper des Systems sich in Ruhe befinden oder die Geschwindigkeit Null haben. Da wir nicht voraussetzen können, dass zur Zeit $t = 0$ irgend ein Punkt existirt, der eine Beschleunigung besitzt, so wollen wir allgemein annehmen, dass der Radius Vector ϱ zur Zeit t, eines Punktes, der zur Zeit $t = 0$ sich in (ϱ_0) befand, durch die Gl.

1) $$\varrho = \varrho_0 + \beta t^n + \ldots$$

gegeben sei; wo also β der erste Coëfficient ist, der nicht für alle Punkte verschwindet, während alle die früheren für jeden Systempunkt $= 0$ sein mögen.

Ist $\varkappa$ die Kraft, die zur Zeit $t = 0$ auf den Punkt (ϱ_0) wirkt und ist sie zur Zeit t gleich $\varkappa_1$ geworden, so ist nach dem oben Bemerkten $\varkappa_1$ entweder $= \varkappa$ oder $\varkappa_1 - \varkappa$ lässt sich in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von $\varrho - \varrho_0$ fortschreitet und deren Coëfficienten von der Zeit nicht abhängen. Setzt man für $\varrho - \varrho_0$ seinen Werth aus (1) so wird

(2) $$\varkappa_1 = \varkappa + \varkappa' t^n + \ldots;$$

dieselbe Form ergibt sich wenn $\varkappa$ von mehr als einem Punkt abhängt, weil die Gleichung (1) für jeden Punkt gilt.

Ist nun L die gesammte lebendige Kraft des ganzen Systems zur Zeit t, und $A\,dt$ die Arbeit aller Kräfte in der Zeit dt, so ist

$$L = \int_0^t A\,dt,$$

weil ja zur Zeit $t = 0$ $L = 0$ ist. Hier ist

$$L = \frac{1}{2}\Sigma\int dm\,S(\gamma\gamma) = \frac{n^2}{2}t^{2n-2}\,\Sigma\int dm\,S(\beta\beta) + \ldots$$

wo das Integral sich je auf einen Körper bezieht und die Summe sich auf die verschiedenen Körper erstreckt.

Ferner ist $A = \Sigma S(\varkappa_1\gamma)$, wobei nach den Erörterungen des vor. § in der Summe die normalen Componenten der Widerstände in den Berührungspunkten nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Es ist aber

$$\frac{d}{dt}S(\varkappa_1,\ \varrho - \varrho_0) = S(\varkappa_1,\ \gamma) + S\left(\frac{d\varkappa_1}{dt},\ \varrho - \varrho_0\right)$$

Setzt man im zweiten Theile rechts die Reihen für $\frac{d\varkappa_1}{dt}$ und $\varrho - \varrho_0$, so erhält man eine mit t^{2n-1} beginnende Entwickelung, aus der durch Integration nach t eine mit t^{2n} beginnende folgt. Aus der linken Seite entsteht durch Integration $S(\varkappa_1, \varrho - \varrho_0)$. Wenn man hier für $\varkappa_1$ die Reihe einsetzt, so kommt $S(\varkappa, \varrho - \varrho_0)$ plus einer mit t^{2n} anfangenden Reihe. Also ergibt sich

$\int_0^t \Sigma S(\varkappa_1, \gamma)\,dt = \Sigma S(\varkappa, \varrho - \varrho_0) +$ einer mit t^{2n} beginnenden Reihe und dies ist wieder $= \frac{n^2}{2}\,t^{2n-2}\,\Sigma\int dm\,S(\beta\beta) + \ldots.$

so dass $\Sigma S(\varkappa, \varrho - \varrho_0)$ gleich wird einer mit t^{2n-2} beginnenden Reihe, deren erster Coëfficient positiv und nicht Null ist, weil nicht alle β Null sind.

Für gehörig kleine Werthe von t ist dieser Ausdruck sicher von Null verschieden und positiv. Folglich muss auch für gehörig kleine Werthe von t die $\Sigma S(\varkappa, \varrho - \varrho_0) > 0$ sein.

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung des Systems, die von der Ruhelage ausgeht, ist also die Summe

$$\Sigma S(\varkappa, \varrho - \varrho_0) \tag{3}$$

sicher positiv. Oder umgekehrt, wenn man für eine geometrisch und physikalisch mögliche Bewegung des Systems, bei der weder die einzelnen Körper noch ihre Verbindungen zerrissen werden, die obige Summe Null oder negativ findet, so kann man sicher sein, dass diese Bewegung **nicht** eine Folge der wirkenden Kräfte sein kann. Man nennt eine Bewegung des Systems, die geometrisch und physikalisch möglich ist, ohne die Verbindungen der Körper noch diese selbst zu vernichten, eine virtuelle Bewegung.

Findet sich nun, dass bei jeder virtuellen Bewegung die Summe (3) Null oder negativ ausfällt, so kann gar keine mögliche Bewegung die Folge der Kräfte $\varkappa$ sein, d. h. diese halten sich am System das Gleichgewicht. Man nennt $S(\varkappa\delta)$ die virtuelle Arbeit von $\varkappa$ bei der virtuellen Bewegung δ und kann dann sagen, nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts von Kräften an einem System von Körpern ist, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte, bei jeder virtuellen Bewegung des Systems nicht positiv sei.

§ 31. Auch die Gleichungen für die Bewegung eines Systems von festen Körpern lassen sich symbolisch zusammenfassen. An dem Punkte (ϱ_i) möge eine äussere Kraft α_i angreifen und bei der entstehenden Bewegung dieser Punkt die Beschleunigung β_i erhalten. Bezeichnet man mit $\Sigma\alpha_{ik}$ die Summe aller inneren Kräfte, welche auf den Punkt wirken und die durch die Kräfte α_i hervorgerufen werden, so ist

$$dm_i\beta_i = \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik}$$

oder

$$-dm_i\beta_i + \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik} = 0.$$

Wenn man nun annimmt, dass auf den Punkt (ϱ_i) eine Kraft $-dm_i\beta_i + \alpha_i$ einwirkt, so zeigt diese Gleichung, dass es immer Kräfte α_{ik} gibt, welche für jeden Punkt die genannte Kraft zerstören. Folglich halten sich die Kräfte $-dm_i\beta_i + \alpha_i$ an dem System das Gleichgewicht und folglich muss für jede mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung δ_i die Ungleichung bestehen

$$\Sigma S(-dm\beta + \alpha, \delta) \overline{\overline{<}} 0;$$

oder wenn man die Summen $\Sigma S(\alpha, \delta)$, die sich über einen einzelnen Körper erstrecken, in die Körper- und Flächenintegrale theilt

$$0 \overline{\overline{>}} \Sigma \int S(-dm\beta, \delta) + \Sigma \left\{ \int S(\mu\delta)\, dm + \int S(\varphi\delta)\, dO \right\}.$$

Weil von der wirkenden Kraft α nur ein Theil $dm\beta$ in der erzeugten Beschleunigung wieder zum Vorschein kommt, kann man die Kraft $\alpha - \beta dm$ als verlorene Kraft bezeichnen und dann die vorige Gleichung so aussprechen: Die verlorenen Kräfte halten sich an dem Punktsystem in jedem Augenblicke das Gleichgewicht. Dieser Satz heisst das d'Alembert'sche Princip.

VI. Anhang.

§ 32. Ist $\varkappa$ eine Kraft, die mit der Zeit variabel auf einen Punkt (ϱ) wirkt, und bezeichnet man sie als Function der Zeit mit $\varkappa(t)$, so findet sich die Geschwindigkeit γ zur Zeit t aus der γ_0 zur Zeit t_0 mit Hilfe der Gleichung

1) $$dm \cdot \gamma - dm \cdot \gamma_0 = \int_{t_0}^{t} \varkappa(t')\, dt'$$

und der Radius Vector ϱ zur Zeit t entsteht aus dem ϱ_0 zur Zeit t_0 nach der Beziehung

$$\gamma = \frac{d\varrho}{dt}, \quad \varrho = \varrho_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma\, dt$$

durch

2) $$\varrho = \varrho_0 + \gamma_0 (t - t_0) + \frac{1}{dm} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \varkappa(t'')\, dt''.$$

Nun möge t sich dem t_0 nähern und dabei $\varkappa(t)$ so in's Unendliche wachsen, dass γ von γ_0 verschieden wird.

Man kann sich dabei die Function $\varkappa(t)$ so beschaffen denken, dass bei diesem Grenzübergang $\varrho = \varrho_0$ wird. Dies würde z. B. eintreten, wenn man, unter α eine constante Strecke verstanden, setzt

$$\varkappa(t') = \frac{\alpha\, dm}{t - t_0},$$

womit

$$(\gamma - \gamma_0) = \alpha$$

$$\varrho = \varrho_0 + \gamma_0 (t - t_0) + \frac{\alpha}{2} (t - t_0)$$

wird, so dass mit abnehmendem $t - t_0$

$$\lim\,(\gamma - \gamma_0) = \alpha$$
$$\lim\,(\varrho - \varrho_0) = 0$$

wird. Dieser Grenzfall entspricht also einer plötzlichen Aenderung der Geschwindigkeit ohne Ortsveränderung. In der Natur kommt dies nicht vor, dagegen eine grosse Geschwindigkeitsänderung bei kleiner Ortsveränderung in einer sehr kleinen Zeit. Wirkungen mit solchem Erfolg werden Stosswirkungen genannt. Der oben untersuchte Grenzfall gibt näherungsweise an, wie sich die Stosswirkungen thatsächlich verhalten. Man wendet den Namen Momentankraft auf eine Kraft an, die während einer kleinen Zeit mit grosser Intensität wirkt und in der Grenze eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung ohne Ortsveränderung erzeugt.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Wirkung von Momentankräften auf einen festen Körper sich äussert. Ist $\int dm = M$ die Gesammtmasse, P der Radius Vector des Schwerpunktes, so ist

$$M\frac{d^2P}{dt^2} = \Sigma\varkappa + \Sigma\varkappa',$$

wenn $\varkappa$ die gewöhnliche, $\varkappa'$ die Momentankraft bezeichnet, die auf einen Punkt wirkt. Es folgt daraus

$$(3) \qquad M\left(\frac{dP}{dt_1} - \frac{dP}{dt_0}\right) = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}\varkappa\,dt + \Sigma\int_{t_0}^{t_1}\varkappa'\,dt$$

und folglich beim Grenzübergang

$$M\,lim\left\{\frac{dP}{dt_1} - \frac{dP}{dt_0}\right\} = \Sigma\,lim\int_{t_0}^{t_1}\varkappa'\,dt.$$

Ist ferner Φ die Flächengeschwindigkeit, so ist

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Sigma\,V(\varrho,\varkappa) + \Sigma\,V(\varrho,\varkappa'),$$

daher

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}V(\varrho,\varkappa)\,dt + \Sigma\int_{t_0}^{t_1}V(\varrho,\varkappa')\,dt.$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dt} V(\varrho, \int_{t_0}^{t} \varkappa' dt) = V(\gamma, \int_{t_0}^{t} \varkappa' dt) + V(\varrho, \varkappa')$$

daher, wenn $\varrho = \varrho_1$ für $t = t_1$, und $= \varrho_0$ für $t = t_0$ ist,

$$V(\varrho_1, \int_{t_0}^{t_1} \varkappa' dt) = \int_{t_0}^{t_1} V(\varrho, \varkappa dt) + \int_{t_0}^{t_1} dt\, V(\gamma, \int_{t}^{t_1} \varkappa' dt).$$

Geht man zur Grenze über, so verschwindet das zweite Glied rechts und es bleibt

$$lim \int_{t_0}^{t_1} V(\varrho, \varkappa') dt = lim\, V(\varrho_1, \int_{t_0}^{t_1} \varkappa' dt)$$

$$= V(\varrho_0, lim \int_{t_0}^{t_1} \varkappa' dt),$$

so dass

(4) $$lim (\Phi_1 - \Phi_0) = \Sigma V(\varrho_0, lim \int_{t_0}^{t_1} \varkappa' dt)$$

sich findet.

Die durch den Stoss bewirkte Aenderung in der Geschwindigkeit des Schwerpunktes und der Flächengeschwindigkeit hängt somit nur von

$$lim \int_{t_0}^{t_1} \varkappa' dt$$

ab, welche Strecke man nach Grösse und Richtung als das Maass der Momentankraft bezeichnet. Ist diese so bestimmte Strecke $= \varsigma$, so wird also durch den Stoss die Geschwindigkeit des Schwerpunktes um $\Sigma \varsigma$, die Flächengeschwindigkeit um $\Sigma V(\varrho \varsigma)$ geändert.

§ **33.** Zum Schlusse sollen noch die Aenderungen betrachtet werden, welche die Maasszahlen der in der Mechanik gebrauchten Grössen bei einer Veränderung der Einheiten erleiden. Seien t die Zeit, m die Masse, $T\varrho$, $T\gamma$, $T\beta$, $T\varkappa$ resp. die Längen- oder Maasszahlen von Radius Vector, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft bezogen auf die Einheiten: eine Secunde, ein Meter und ein Kilogramm von Zeit, Länge und

Masse. Nun mögen als neue Einheiten zu Grunde gelegt werden: Z Secunden, L Meter und M Kilogramm. Die oben angeführten Maasszahlen seien dann entsprechend t', m', $T\varrho'$, $T\gamma'$, $T\beta'$, $T\varkappa'$. Dann ist offenbar

1) $$t' = \frac{t}{Z}, m' = \frac{m}{M}, T\varrho' = \frac{T\varrho}{L}.$$

Aus $T\gamma = T\frac{d\varrho}{dt} = \frac{T d\varrho}{dt}$ folgt dann $T\gamma' = \frac{T d\varrho'}{dt'}$, daher

2) $$T\gamma' = T\gamma \cdot \frac{Z}{L}.$$

Ferner ergibt $T\beta = T\frac{d\gamma}{dt} = \frac{T d\gamma}{dt}$, $T\beta' = \frac{T d\gamma'}{dt'}$, dass

3) $$T\beta' = T\beta \cdot \frac{Z^2}{L}$$

ist. Weil $T\varkappa = m \cdot T\beta$ und $T\varkappa' = m' \cdot T\beta'$ so ist weiter

4) $$T\varkappa' = T\varkappa \cdot \frac{Z^2}{LM}.$$

Wenn ferner da und da' die Zahlen sind für die Arbeiten der Kraft $\varkappa$ längs des unendlich kleinen Weges $d\varrho$, so dass $da = S(\varkappa, d\varrho)$, $da' = S(\varkappa', d\varrho')$ ist, so folgt

5) $$da' = da \cdot \frac{Z^2}{L^2 M};$$

und für die Leistungsfähigkeit $A' = \frac{da'}{dt'}$ und $A = \frac{da}{dt}$ besteht die Beziehung

6) $$A' = A \cdot \frac{Z^3}{L^2 M}.$$

Sind l' und l die Werthe der lebendigen Kraft, also $l = \frac{1}{2} S(\gamma\gamma) dm$, $l' = \frac{1}{2} S(\gamma'\gamma') dm'$, so ergibt sich

7) $$l' = l \cdot \frac{Z^2}{ML^2},$$

daher ist $\frac{dl'}{dt'} = \frac{Z^2}{ML^2} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{Z^3}{ML^2} \cdot \frac{dl}{dt}$ in Uebereinstimmung mit dem für die Leistungsfähigkeit gefundenen Werth. Setzt man

(8) $$T\varkappa' = \frac{T\varkappa}{K},$$

so dass K alte Krafteinheiten eine neue sind, so folgt

(9) $$\begin{cases} K \cdot Z^2 = L \cdot M \\ da' = da\,\frac{1}{KL}\,;\; A' = A \cdot \frac{Z}{KL}. \end{cases}$$

Kgl. Hof-Buchdruckerei von E. Mühlthaler in München.