

P. 167

W. 192

COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III

XXVI Année 1933

Fascicule 4—6

W. 192

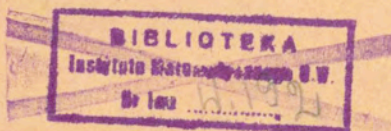
**SPRAWOZDANIA**  
z posiedzeń  
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO  
WARSZAWSKIEGO**

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVI 1933

Zeszyt 4—6



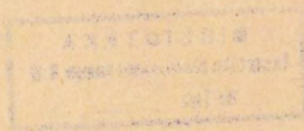
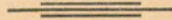
WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

Redaktor

**Bolesław Hryniewiecki**

Adres Redakcji: Warszawa, Nowy-Świat 72.



COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III

XXVI Année 1933

Fascicule 4—6

**SPRAWOZDANIA**  
z posiedzeń  
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO**  
**WARSZAWSKIEGO**

Wydział III  
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVI 1933

Zeszyt 4—6



WARSZAWA  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1934

<http://rcin.org.pl>

ALMA MATER

WYDZIAŁ FIZYKI  
KATEDRA MECHANIKI

Wke 76/I/27



## TREŚĆ ZESZYTU 4—6.

(Table des matières).

	Str.
<b>T. J. Wojno.</b> Przyczynki do metodyki justowania mikroskopu mineralogicznego i mikroskopu Fedorowa . . . . .	33
<b>Wł. Gorczyński i Fr. Ostrowski.</b> O wartościach rozproszonego promieniowania słonecznego dla Warszawy i niżu polskiego . . . . .	34
<b>W. Smosarski.</b> Polaryzacja światła nieba o zmroku . . . . .	52
<b>W. Sierpiński.</b> O pewnej własności rodzin zbiorów przeliczalnych . . . . .	56
<b>B. Olewski.</b> Przyczynek do badania przekształceń definicji zbioru mierzalnego $B$ . . . . .	58
<b>St. Mazurkiewicz.</b> O pewnym zagadnieniu p. Borsuka . . . . .	67
<b>J. Marcinkiewicz.</b> O pewnej klasie funkcji rzeczywistych i ich szeregach Fouriera . . . . .	70
<b>G. García.</b> Równania Lagrange'a i zasada Hamiltona w mechanice klasycznej oraz w mechanice względnościowej . . . . .	77
<b>St. Jaskólski.</b> Złoża srebrowo-cynowe Potosi w Boliwii . . . . .	84
<b>J. Kuhl.</b> Glinki boksytowe z Najdziszewa i złoża halozytu z Mierzęcice z półn. części Zagłębia Dąbrowskiego . . . . .	84

	Page
<b>T. J. Wojno.</b> Contributions aux méthodes pour régler le microscope minéralogique et le microscope de Fedorow . . . . .	33
<b>L. Gorczyński &amp; Fr. Ostrowski.</b> Values of diffused sky radiation at Warsaw and in Central Poland . . . . .	49
<b>W. Smosarski.</b> Polarisation des Himmelslichtes in der Dämmerung . . . . .	52
<b>W. Sierpiński.</b> Sur une propriété des familles d'ensembles dénombrables . . . . .	56
<b>B. Olewski.</b> Contribution à l'étude des transformations de la définition d'ensemble mesurable $B$ . . . . .	58
<b>St. Mazurkiewicz.</b> Sur un problème de M. Borsuk . . . . .	68
<b>J. Marcinkiewicz.</b> On a Class of Functions and their Fourier Series . . . . .	71
<b>G. García.</b> Las ecuaciones de Lagrange y el principio de Hamilton en la mecánica clásica y en la mecánica relativista . . . . .	77
<b>St. Jaskólski.</b> Les gisements argento stannifères de Potosi en Bolivie . . . . .	84
<b>J. Kuhl.</b> L'argile de boxide de Najdziszew et le gisement de halozyte de Mierzęcice de la partie Nord du Bassin de Dąbrowa . . . . .	84

# TRIC NESTYU 4-2

(Title of the document)

The following text is extremely faint and illegible. It appears to be a multi-paragraph document, possibly a technical report or a scientific paper, but the content cannot be discerned due to the low contrast and blurriness of the scan.

## ERRATA.

W. Sierpiński. „O pewnej własności rodzin zbiorów przeliczalnych”.

„Sur une propriété des familles d'ensembles dénombrables”.

p. 2 ligne 15 *au lieu de* de  $S$   
*doit être* de  $S$  appartenant à la famille  $F$

p. 2 ligne 25 *au lieu de*  $T^{m+n}(E_1)$  et  $T^{m+n}(E_2)$   
*doit être*  $T^{m+n+1}(E_1)$  et  $T^{m+n+1}(E_2)$

Godofredo García. Las ecuaciones de Lagrange y el principio de Hamilton en la mecánica clásica y en la mecánica relativista.

p. 78 ligne 14 (5) *au lieu de*  $-\frac{\partial \bar{V}}{\partial M}$  *doit être*  $-\frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M}$

p. 78 ligne 20 (7)

*au lieu de* 
$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial M} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial M}$$
 *doit être* 
$$\frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M} = \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial M}$$

p. 78 ligne 24 *au lieu de* „recorvido” *doit être* „recorrido”

p. 78 ligne 26 (8)

*au lieu de* 
$$m_0 J \times \frac{\partial M}{\partial s} = \left( F_n - \frac{\partial \bar{V}}{\partial M} \right) \times \frac{\partial M}{\partial s}$$
 *doit être* 
$$m_0 J \times \frac{\partial M}{\partial s} = \left( F_n - \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M} \right) \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

p. 79 ligne 2 (10)

*au lieu de* 
$$Q_0 = F_n \times \frac{\partial M}{\partial s} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial M} \times \frac{\partial M}{\partial s}$$
 *doit être* 
$$Q_0 = F_c \times \frac{\partial M}{\partial s} = -\frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M} \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

p. 79 ligne 3 (11)

*au lieu de* 
$$Q = F_c \times \frac{\partial M}{\partial s} + Q_0$$
 *doit être* 
$$Q = F_n \times \frac{\partial M}{\partial s} + Q_0$$

p. 81 ligne 26 *au lieu de* „antenor” *doit être* „anterior”





SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ  
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

---

**Posiedzenie**

z dnia 29 kwietnia 1933 r.

Tadeusz Jerzy Wojno.

**Przyczynki do metodyki justowania mikroskopu  
mineralogicznego i mikroskopu Fedorowa.**

Komunikat zgłoszony dn. 29 kwietnia 1933 r.

Praca będzie wydrukowana w Archiwum Mineralogicznym  
Tow. Nauk. Warsz. Tom IX.

**Contributions aux méthodes pour régler le microscope  
minéralogique et le microscope de Fedorow.**

Note présentée dans la séance du 29 avril 1933.

Ce travail paraîtra dans „Archives de Minéralogie de la  
Société des Sciences et des Lettres de Varsovie”. Vol. IX.

Wł. Gorczyński i Fr. Ostrowski.

## **O wartościach rozproszonego promieniowania słonecznego dla Warszawy i niżu polskiego.**

Przedstawił W. Gorczyński dn. 29 kwietnia 1933 r.

### **WSTĘP.**

W komunikacie p. t. „Przyczynek do poznania wielkości promieniowania rozproszonego w bilansie ogólnym sum ciepła”, zgłoszonym na posiedzeniu majowym z r. 1932 Wydziału III T. N. W., podana była ocena przypuszczalnych wartości dyfuzji słonecznej dla Warszawy. Ocena ta, jako oparta na materiale porównawczym, zdobytych z jednej strony w okolicach śródziemnomorskich, a z drugiej strony w Europie północnej i zachodniej, musiała mieć z natury rzeczy charakter przybliżony w stosunku do Warszawy i do Polski wogóle. Aby zyskać dane bezpośrednie, zorganizowana została specjalna serja pomiarów solarymetrycznych i pyrhelometrycznych i to z jednej strony w Warszawie (na tarasie górnym gmachu T. N. W. przy ul. Śniadeckich 8, ponad Gabinetem Aktynometrycznym), a z drugiej strony w dwóch miejscowościach niziny Polskiej, a mianowicie w Remiszewicach, pow. łódzkiego, oraz Januszewicach, pow. opoczyńskiego.

Rozpoczęte z końcem wiosny 1932 r. te serje obserwacyjne, obejmują już okres wielomiesięczny. Od października 1932 r. pomiary solarymetryczne i pyrhelometryczne prowadzone były przez drugiego z współautorów, jako stałego współpracownika Gabinetu Aktynometrycznego T. N. W.

### **I. Rezultaty pomiarów bezpośrednich promieniowania rozproszonego w Remiszewicach, Januszewicach oraz w Warszawie T. N. W.**

Do pomiarów promieniowania słonecznego służyły pyrhelometry termoelektryczne, oraz solarymetry nowej konstrukcji, wyrabiane w znanych zakładach Towarzystwa Jules Richard w Paryżu. Opis ostatnich modeli stanowiących połączenie solarymetru z pyrhelometrem rurkowym podany został w „Revue d'Optique” (T. 11 Paris, 1932), oraz w miesięczniku „Wszechświat” (Nr. 1 z r. 1933), a także w wspomnianym powyżej komunikacie na posiedzeniu T. N. W. z 28 maja 1932 r.

Wartość dyfuzji ( $Q_{diff}$ ) była wyznaczana z jednoczesnych pomiarów pyrhelimetru w rurce skierowanej normalnie względem promieni słonecznych, a także solarymetru, ustawionego poziomo, dającego natężenia promieniowania idącego wprost od słońca, oraz rozproszonego przez sklepienie niebieskie. Promieniowanie całkowite ( $Q_{glob}$ ) równa się

$$Q_{glob} = Q_{norm} \times \sin h + Q_{diff} = Q_{bor} + Q_{diff}$$

gdzie  $h$  oznacza wysokość słońca nad poziomem wyznaczaną teodolitem, lub obliczaną za pomocą znanego wzoru trygonometrii kulistej:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

gdzie  $\varphi$  oznacza szerokość geometryczną danego miejsca —  $\delta$  zboczenie słońca, a  $t$  kąt godzinny.

Wartości natężenia promieniowania rozproszonego ( $Q_{diff}$ ) mogą być wyznaczane nie tylko z różnicy między promieniowaniem całkowitem ( $Q_{glob}$ ) i składową poziomą promieniowania normalnego ( $Q_{bor} = Q_{norm} \times \sin h$ ), lecz wprost z odczytów bezpośrednich solarymetru; ten ostatni zaopatrzony jest w tym celu w ruchomy pręt z krążkiem, który stawia się ponad termostosem tak, aby cień od słońca pokrywał powierzchnię tego ostatniego. W ten właśnie nadzwyczaj prosty i dogodny sposób wyznacza się promieniowanie rozproszone dla dni nie tylko pogodnych, ale także całkowicie lub częściowo pochmurnych.

W tabl. I przedstawione są wartości natężeń promieniowania rozproszonego, wyrażone w częściach setnych kalorii gramowej na minutę i centymetr kwadratowy powierzchni poziomej. Odpowiednie serje pomiarów solarymetro-pyrhelometrycznych dokonane zostały w czerwcu i lipcu 1932 r. (13 dni obserwacyjnych) w majątku Remiszewice powiatu łódzkiego; w ciągu następnych trzech miesięcy (25 dni obserwacyjnych) przyrządy były zainstalowane w majątku Januszewice, powiatu opoczyńskiego. Odległość między tymi dwoma punktami obserwacyjnymi, dość podobnie położonymi, wynosi około 50 km. w linii powietrznej.

Pomiary przeprowadzane były możliwie często w ciągu całego dnia między wschodem i zachodem słońca. Odnosne wartości promieniowania rozproszonego figurują w Tabl. I pod

Tab. I.

Wartości natężeń promieniowania rozproszonego w częściach setnych cal. gr. na minutę i  $\text{cm}^2$  powierzchni poziomej. Pomiary w Remiszewicach i Januszewicach w r. 1932.

Values of sky radiation intensity (in tenths of gr. cal. per minute and  $\text{cm}^2$  of horizontal surface).

Abstract of solar radiation measurements made in Remiszewice and Januszewice in Poland in the year 1932.

$b =$	60°	50°	40°	30°	20°	$b =$	50°	40°	30°	20°	10°
16.VI	23	19	18	15	11	15.VIII	18	15	9	8	5
19. „	17		12		9	16. „	18		12	11	5
21. „	23	22			9	18. „	18		10	8	
26. „	23		15	8	9	20. „	15			11	6
27.VI	22	18	15	12	9	21. „	15		13	9	
2.VII		18	15	12		22. „	17	16		9	
4. „		18			11	26.VIII		15	14	10	6
5. „				14	8	6.IX		16	12	9	6
6. „	21		17	13	9	7. „		14	11		
8. „	24	19			8	9. „		15	14		6
10. „	15	18		8		22. „		12	10	10	
11. „		18			9	24. „		15			
12.VII	24	19				27. „		15	15	11	7
6.VIII				12	9	29. „		15	12		
10. „			20	13	8	30.IX			14	8	6
11. „		17	13	12	10	7.X					9
12. „		18	12	12		13. „			13		
13. „		18	15	12	9	14. „			11	7	
14. „		18	10	12	10	18.X		15	13	9	6

N. B. Dni bez chmur w pobliżu słońca.

Days without clouds in the vicinity of the sun.

odpowiednimi wysokościami słońca  $h$ , z których dla oszczędzenia miejsca, podano w tabeli tylko niektóre wartości w odstępach dziesięciostopniowych.

Dane z 38 dni obserwacyjnych dla pięciu miesięcy 1932 r. zostały uszeregowane według wysokości słońca dla dni dostatecznie pogodnych, gdy nie było chmur, smug lub opon w bezpośrednim sąsiedztwie tarczy słonecznej. Mniejszy lub większy mimo tego stopień czystości nieba lub też wpływ ewentualny dalej położonych chmur lub obłoków wyraża się w pewnych wahaniach wartości dyfuzyjnych, jak to wskazuje przebieg wartości w Tabl. I. Tabela ta daje nam zresztą tylko krótki wyciąg z ogółu pomiarów solarymetryczno-pyrheliometrycznych, dokonanych w ciągu lata i jesieni 1932 r.

Biorąc średnie dla różnych położzeń słońca, otrzymujemy prawidłową zależność dyfuzji od wysokości słońca. Dla większej jasności i gwoli porównania danych polskich z odnośnymi przebiegami dla paru miejscowości zagranicznych, rezultaty zestawione są osobno w Tabl. II.

Obok danych kolumny pierwszej, streszczającej rezultaty zawarte już w Tabl. I dla dni pogodnych z Remiszewic i Januszewic, podane są w dwóch następnych kolumnach pionowych wartości następujące: Kolumna 3 daje natężenia promieniowania rozproszonego dla dni zupełnie pochmurnych z włączeniem także dni dżdżystych lub ze śniegiem. Wartości dyfuzji podane są w częściach setnych kalorii gramowej na minutę i  $\text{cm}^2$  powierzchni poziomej według pomiarów w Warszawie (taras górny Gabinetu Aktynometrycznego T. N. W. gmachu na ul. Śniadeckich 8).

Nie przytaczając, dla zaoszczędzenia miejsca, wszystkich obserwacji z dni poszczególnych, notujemy, że wartości dyfuzji w kolumnie 3 przedstawiają średnie obliczone dla z górą 50 dni obserwacyjnych z grubą pokrywą chmur w ciągu czterech miesięcy od listopada 1932 r. do lutego 1933 r. włącznie.

Kolumna 2 w Tab. II daje rezultaty pomiarów dyfuzji dla dni częściowo pochmurnych, kiedy były częste przejścia opon, smug lub obłoków przez tarczę słoneczną lub gdy obłoki odbijające lub filtrujące promienie słoneczne były w bezpośrednim sąsiedztwie słońca.

Dane kolumny 2-iej stosują się tylko w części do punktów obserwacyjnych poza Warszawą, a dla niższych wysokości słońca

Tab. II.

Wartości średnie  $Q_{diff}$  w setnych częściach kal. gr., na minutę i  $cm^2$  powierzchni poziomej.

Mean values of  $Q_{diff}$  (in tenths of gr. cal. per minute and  $cm^2$  of horizontal surface) in function of sun's altitude  $h$ .

$h$	Remiszewice, Januszewice, Warszawa (T. N. W.)			Conegliano (Italia)			Nice Thorenc		Paris, Helsinki	
	1. pogodnie	2. półpog.	3. pochm.	4. zachmurz. 0	5. — 1-3	6. cloudiness 4-7	7. pogod.	8. — clear	9. półpog.	10. — half
65°				17	23	32				
60°	21			17	23	32	17			
55°	19			16	22	31	16			
50°	18			16	22	31	15			25
45°	17	28		15	21	30	14	13	31	23
40°	15	25		14	21	29	13	12	27	22
35°	13	22		13	20	28	12	11	23	19
30°	12	19	13	12	18	27	12	10	19	15
25°	11	16	11	11	17	25	11	09	15	13
20°	09	14	09	10	15	23	10	08	12	10
15°	08	11	07	08	12	20			09	08
10°	06	07	05	06	09	15			06	06
5°	04	05	04		05				03	04

Objaśnienia dla kolumn Tab. II. — Explanation of Table II.

Kolumny 1, 2 i 3 dają  $Q_{diff}$  w Polsce dla dni pogodnych, półpogodnych i pochmurnych.

Kolumny 4, 5 i 6 dają  $Q_{diff}$  dla Conegliano (Italia) osobno dla dni z zachmurzeniem 0, 1 do 3 oraz 4 do 7.

Kolumny 7 i 8 są ułożone dla dni pogodnych w Nicei oraz w Thorenc w Alpach Nadmorskich na wysokości 1,2 km.

Kolumny 9 i 10 dają  $Q_{diff}$  dla Paryża (dni z większym zachmurzeniem) oraz dla Helsinek w Finlandji dla ogółu dni.

In columns 1, 2 and 3 the values of  $Q_{diff}$  are given for Polish stations (geographical latitude nearly 52° N). Column 1 — means for clear days, column 2 — for partly covered and column 3 — for heavy or rainy clouds.

In columns 4, 5 and 6 mean values of sky radiation are given for different degrees of cloudiness (namely 0, 1-3 and 4-7) for Conegliano (lat. 45° 9' N) in Italy not far from Venice. The corresponding data calculated by Professor A. Puppo, the distinguished chief of the Meteorological Observatory of Conegliano and author of some valuable contributions to the Actinometry.

In columns 7 and 8 mean values were formed for sufficiently clear days at Nice (lat. 43.7' N) and Thorenc (lat. 49.8' N), a mountain station near to Mediterranean shores. The height of Thorenc is about 1,2 km upon the sea-level.

The columns 9 and 10 give finally the  $Q_{diff}$  values for Paris (mostly covered days) and for Helsinki in Finland for all days.

(poniżej  $h=20^0$  w czasie zimy w Polsce) przedstawiają rezultaty, zebrane systematycznie i w większej liczbie, w Warszawie w Gabinetcie Aktynometrycznym T. N. W.

Wartości dyfuzji koło południa wahają się w dość wązkich granicach dla dni z grubszą i jednostajnie szarą powłoką chmur deszczowych.

Oto parę wyciągów w formie skróconej z serji pomiarów dyfuzyjnych, dokonywanych w Warszawie solarymetrem stale bez względu na pogodę, przez drugiego ze współautorów komunikatu niniejszego.

a) Dla dni całkowicie zachmurzonych, z silną pokrywą chmur głównie deszczowych lub warstwowych (Nimbus lub stratus, mglisto lub opad, deszcz lub śnieg) w czasie pomiarów solarymetrycznych, dokonanych w Warszawie T. N. W. zazwyczaj między godziną 11 a 13-ą. Wysokości słońca w tym czasie wahały się przeważnie od  $20^0$  do  $15^0$  ponad poziomem.

R o k 1932		Rok 1933
cal	cal	cal
19.XI . . 0.07	4.XII. . . 0.06	2.I . . . 0.06
23.XI . . . 05	5.XII. . . 03	3.I . . . . 05
24.XI . . . 03	6.XII. . . 03	4.I . . . . 05
28.XI . . . 05	7.XII. . . 03	17.I . . . . 05
29.XI . . . 03	8.XII. . . 06	24.I . . . . 05
30.XI . . . 05	16.XII. . . 03	4.II. . . . 06
2.XII. . . 06	23.XII. . . 05	7.II. . . . 06
3.XII. . . 06	24.XII. . . 05	
	30.XII. . . 05	

Wynika stąd, że wartości dyfuzji obserwowane w tym czasie niewiele odbiegały od 0.05 cal. gr. (wartość średnia z 24 dni w czasie od listopada 1932 r. do lutego 1933 r.). Jest to to samo co dla dyfuzji otrzymywanej w dni pogodne dla tych samych wysokości słońca nad poziomem, jak to wynika z Tabl. II.

W cieplejszej porze roku wartości dyfuzji były podobne do powyżej przytoczonych dla zimy w Warszawie, o ile powłoka chmur była jednolicie rozmieszczona w warstwie grubszej obłoków deszczowych lub warstwowych. Wartości nieco znaczniejsze dyfuzji znajdowano tylko dla większych wyniesień słońca ( $h$ ) nad poziomem.

Tak np. 30.VIII 1932 obserwowano dla zachmurzenia 10 (Nimbus) wartości dyfuzji: 0.13 cal. dla  $h = 48^\circ$ , a tylko 0.02 cal dla  $h = 4^\circ$ .

W dniu 23.IX 1932 było:  $Q_{diff} = 0.12$  cal dla  $h = 34^\circ$  i tylko 0.03 cal. dla  $h = 8^\circ$ .

W dniu 14.X 1932 pomiary solarymetryczne wykazały:  $Q_{diff} = 0.13$  cal. dla  $h = 32^\circ$ .

b) Biorąc dni z słońcem prześwitującym przez chmury, otrzymuje się natomiast nieco wyższe natężenia promieniowania rozproszonego, gdyż do dyfuzji nieba dochodzi tu jeszcze promieniowanie filtrowane wprost przez warstwy obłoków lub przez nie odbijane.

Podajemy kilka przykładów, ilustrujących te stosunki.

Remiszewice. 27.VI 1932 zachmurzenie 6 Cu. Smugi koło słońca,  $h = 56^\circ$ .  $Q_{norm} = 1.12$  cal.,  $Q_{glob} = 1.28$ ,  $Q_{diff} = 0.35$  cal.

Remiszewice. 12.VII 1932. Zachmurzenie 3, lecz słońce zamgłone nieco między godziną 10 a 11 rano,  $h = 57^\circ$ ,  $Q_{norm} = 1.11$  cal.,  $Q_{glob} = 1.23$  cal.,  $Q_{diff} = 0.30$  cal.

Januszewice. 6.VIII 1932. Zachmurzenie 8 Cu. Słońce zamgłone chwilami po godz. 15,  $h = 40^\circ$ ,  $Q_{norm} = 1.05$  cal.,  $Q_{glob} = 0.98$  cal.,  $Q_{diff} = 0.31$  cal.

Nie będziemy mnożyli tych przykładów, a natomiast przejdziemy do kilku wniosków bardziej ogólnej natury, wyłaniających się zarówno z serii pomiarów polskich, jako też z poszukiwań analogicznych na południu Europy (w Nicei oraz w Thorenc przez autorów niniejszego), oraz przez Obserwatorium Geofizyczne w Helsingforsie (Helsinki), Conegliano i Paryżu (por. kolumny 3 — 10, Tab. II).

1) Dla dni dostatecznie pogodnych (bez chmur w pobliżu tarczy słonecznej) wartości natężenia promieniowania rozproszonego wykazują wszędzie przebieg prawidłowy w funkcji wysokości słońca. Można tu przyjąć dla całego szeregu miejscowości następujący przebieg przeciętny dla dni niezachmurzonych:

$Q_{diff}$ ..	0.20	.18	.15	.12	.09	.06 cal
$h$ .....	$60^\circ$	$50^\circ$	$40^\circ$	$30^\circ$	$20^\circ$	$10^\circ$

Wartości te mało odbiegają od obserwowanych w Warszawie, Nicei, Conegliano i stacji górskiej Thorenc w Alpach Nadmorskich.



2) Dla dni zupełnie pochmurnych z grubszą warstwą chmur deszczowych lub warstwowych wartości dyfuzji mało różnią się od tych, które obserwujemy dla dni pogodnych.

3) Dla dni częściowo pochmurnych a zwłaszcza w razie chmur kłębiastych lub smug oraz opon, otaczających lub przechodzących przez tarczę słoneczną, wartości dyfuzji są nieco większe od tych, które obserwujemy w wypadkach poprzednich; zachodzą tu jednak często zmiany nieprawidłowe, gdyż do dyfuzji właściwej dochodzą jeszcze rozliczne promieniowania odbite lub filtrowane przez warstwy obłoków. Jednak, zgodnie z pomiarami zarówno w Polsce, jak i zagranicą, przyjąć można, że dyfuzja w sumie dziennej jest wtedy o kilkanaście do kilkudziesięciu procentów większa, nie przekraczając jednak naogół dwukrotnej wartości w porównaniu z tą, którą otrzymujemy w wypadkach nieba zachmurzonego.

W rzeczywistych stosunkach insolacyjnych np. dla Warszawy, gdzie mamy wiele dni całkowicie pochmurnych, rzadko zaś dni całkowicie pogodne, a dość często częściowo pochmurne, dyfuzja wypadnie w sumie miesięcznej naogół od 10 do 50 procentów więcej, zależnie od charakteru każdorazowego miesiąca pod względem usłonecznienia.

Nie jest łatwo ująć ilościowo te stosunki, które najprawdłowiej oddać mogą tylko codzienne rejestracje solarygrafów dla promieniowania globalnego oraz dyfuzyjnego przy użyciu ekwatorialnie obsadzonych krążków, rzucających cień od słońca. Jednak cały szereg prób doprowadził nas do wniosku, że dla pierwszej orientacji wystarczyć może obliczanie sum dyfuzyjnych codziennych lub miesięcznych według wzoru empirycznego postaci

$$\sum Q_{diff} = \sum \left[ Q_c : \left( 1 - K \frac{d}{D} \right) \right]$$

gdzie  $Q_c$  oznacza wartości dyfuzji otrzymane dla nieba niezachmurzonego, —  $D$  odpowiada czasowi trwania astronomicznego dnia od wschodu do zachodu, a  $d$  jest faktycznym czasem trwania insolacji (w godzinach) w rozważanym okresie dziennym lub miesięcznym. Wreszcie  $K$  oznacza pewien współczynnik ułamekowy, wahający się koło  $1/2$ , lecz zmienny zależnie od miejscowości, a głównie warunków zachmurzenia w rozważanym okresie.

Ze wzoru powyższego wynika, że dla dni zupełnie pochmurnych, kiedy więc  $d=0$ , otrzymujemy sumy dzienne dyfuzji te same co i dla dni pogodnych, biorąc oczywiście odpowiednie wysokości słońca. Dodamy także, że sumowanie dotyczy godzin od wschodu do zachodu słońca, a więc te sumy dyfuzyjne zależą oczywiście nie tylko od przebiegu wysokości słońca, ale także od długości danego dnia. W przypadku sum miesięcznych sumowanie jest podwójne, raz dla obliczenia sumy każdodzienniej, a następnie dla sumowania wszystkich dni w miesiącu.

O ile dla dni zupełnie pochmurnych wartość liczbowa współczynnika  $K$  nie odgrywa roli, o tyle dla dni całkowicie niezachmurzonych, kiedy stosunek  $d:D$  jest blizki jedności, za wartość współczynnika  $K$  trzeba by brać ułamki blizkie 0.

Dla sum miesięcznych w Warszawie, gdzie zachmurzenie średnie wynosi koło 0,6 — 0,7 całkowitego widnokregu, przyjęliśmy jednolicie  $K = \frac{1}{2}$  dla wszystkich miesięcy.

Dni całkowicie pogodne należą do rzadkich w Polsce, a w zimie, gdy ich szczególnie brakuje, czas przeciętny faktycznego trwania usłonecznienia jest tak krótki (przeciętnie tylko koło 1 godziny dziennie), że przyjęcie większego lub mniejszego ułamka dla współczynnika  $K$  mało bardzo wpływa na rezultat ostateczny w obliczeniach sum dyfuzji dziennych i miesięcznych.

W tym wypadku nasz wzór empiryczny daje dla sum miesięcznych dyfuzji w Warszawie wartości koło 30% większe od tych, któreby przypadały dla nieba całkowicie wolnego od chmur w ciągu danego miesiąca.

Zastrzeżenie, że przyjęcie dla Warszawy jednolitego współczynnika  $K = \frac{1}{2}$  ogranicza bezwarunkowo zakres stosowalności naszego wzoru empirycznego tylko do okresów całomiesięcznych jest zrozumiałe choćby z następującego względu. Jednolity w ciągu roku współczynnik  $K$  nie jest wogóle usprawiedliwiony, gdyż warunki słoneczne są różne w porze zimniejszej i cieplejszej; jeszcze ważniejszy jest wzgląd, że dla  $K = \frac{1}{2}$  sumy dzienne dla  $d=0$  wypadałyby zawsze dwukrotnie wyższe od tych, które stosują się dla dni całkowicie pogodnych, co nie odpowiada stosunkom faktycznym. Jednak, jak łatwo przekonają nas obliczenia poniżej

podane (por. Tab. IV), użycie w Warszawie zmiennych współczynników  $K$  bardzo mało wpływa na rezultat w miesiącach zimowych, z drugiej zaś strony wartości w porze letniej obliczone dla  $K = \frac{1}{2}$  dobrze odpowiadają stosunkom, ustalonym z bezpośrednich pomiarów solarymetrycznych w Polsce.

## II. Sumy miesięczne i roczne promieniowania dyfuzyjnego i globalnego dla Warszawy.

Przechodząc do obliczenia sum dziennych, miesięcznych i rocznych promieniowania rozproszonego dla Warszawy, winniśmy objaśnić przedewszystkiem jak otrzymane zostały rozmaite wartości figurujące w Tab. III, Tab. III bis, oraz w Tab. IV, obliczonych dla Warszawy położonej w szerokości geograficznej północnej  $52^{\circ},2$ .

Tab. III.

Wartości dyfuzji  $Q_{diff}$  w częściach setnych kal. gr. na minutę i  $cm^2$  powierzchni poziomej w Warszawie.

Values of  $Q_{diff}$  (in tenths of gr. cal. per min. and  $cm^2$  of horizontal surface) at Warsaw.

Data Date	G o d z i n y — H o u r s (true time)						
	5 <sup>1/2</sup> 18 <sup>1/2</sup>	6 <sup>1/2</sup> 17 <sup>1/2</sup>	7 <sup>1/2</sup> 16 <sup>1/2</sup>	8 <sup>1/2</sup> 15 <sup>1/2</sup>	9 <sup>1/2</sup> 14 <sup>1/2</sup>	10 <sup>1/2</sup> 13 <sup>1/2</sup>	11 <sup>1/2</sup> 12 <sup>1/2</sup>
15.I	o.	o.	o.	o.	o.	o.	o.
15.II				05	07	08	09
15.III			07	10	12	13	13
15.IV		07	11	12	14	16	17
15.V	07	10	12	14	16	19	20
15.VI	08	11	12	14	18	20	22
15.VII	08	10	12	14	17	19	21
15.VIII	06	09	11	13	15	17	18
15.IX		06	09	11	13	14	15
15.X			06	08	10	11	12
15.XI					07	09	10
15.XII					06	07	08

Tab. III bis.

Sumy dzienne i miesięczne  $Q_{diff}$  dla dni pogodnych, bez chmur w Warszawie.

Daily and monthly totals of  $Q_{diff}$  for clear days without clouds at Warsaw, Poland.

Data Date	M i e s i ą c — M o n t h s											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	28	43	58	80	107	123	125	113	96	64	41	28
11	33	48	65	89	114	125	122	108	86	56	36	26
21	38	53	73	98	119	126	118	103	75	48	31	25
	Sumy miesięczne w kal. kg. — Monthly totals in cal. kg.											
1—31	1.1	1.4	2.1	2.8	3.6	3.8	3.7	3.3	2.4	1.6	1.0	0.8

Dla ułożenia Tab. III wypadło obliczyć wysokość słońca w różnych dniach i godzinach dla stolicy Polski, a potem podstawić odpowiednie wartości natężenia promieniowania dyfuzyjnego według Tab. II (kolumna 1).

Mając już te ostatnie wartości, a także znając długość dnia w Warszawie od wschodu do zachodu, obliczamy w Tab. III bis sumy dzienne dla dni zupełnie pogodnych, a stąd sumy miesięczne podane w kalorjach kilogramowych. Dla oszczędzenia miejsca podajemy w powyższych tabelkach tylko krótkie wyciągi dla niektórych dni.

W Tab. IV znajdujemy obliczenie sum miesięcznych dyfuzji dla ogółu dni o różnych stopniach zachmurzenia, stosując przytem wzór empiryczny powyżej omówiony. Według tego wzoru należy sumy  $Q_{diff}$  podane dla dni zupełnie niezachmurzonych (por. ostatni wiersz Tab. III bis) zastąpić sumą zwiększoną w stosunku

$$1 : \left(1 - K \frac{d}{D}\right)$$

gdzie  $d$  jest faktycznym, a  $D$  astronomicznym czasem trwania usłonecznienia w godzinach (średnie dzienne dla każdego miesiąca) według danych heliografu oraz według obliczeń długości dnia od wschodu do zachodu.

Tab. IV.

Obliczenie sum miesięcznych  $Q_{diff}$  w Warszawie, dla ogółu dni o różnych stopniach zachmurzenia.

Monthly totals of  $Q_{diff}$  at Warsaw for all days (in kg. cal. per  $cm^2$  of horizontal surface).

Miesiące Months	godz. $D$ hours	godz. $d$ hours	$\frac{d}{D}$	$1 - \frac{d}{D}$	$1 - K \frac{d}{D}$	$\sum Q_c$ clear kg. cal.	$\sum Q_{diff}$ all days kg. cal.
			o.	o.	o.		
I	8.2	1.5	.183	.817	.908	1.1	1.2
II	9.8	1.9	.194	.806	.903	1.4	1.6
III	11.8	3.6	.305	.695	.848	2.1	2.5
IV	13.8	5.1	.370	.630	.815	2.8	3.4
V	15.6	7.7	.494	.506	.753	3.6	4.8
VI	16.6	8.0	.482	.518	.759	3.8	5.0
VII	16.2	7.7	.475	.525	.762	3.7	4.9
VIII	14.6	6.9	.473	.527	.763	3.3	4.4
IX	12.6	5.4	.428	.572	.786	2.4	3.1
X	10.6	3.8	.358	.642	.821	1.6	1.9
XI	8.8	1.4	.159	.841	.920	1.0	1.1
XII	7.7	0.8	.104	.896	.948	0.8	0.8
I/XII	12.2	4.5				27.6	34.7

Jako wartość współczynnika  $K$  przyjęliśmy prowizorycznie dla Warszawy  $K = \frac{1}{2}$ . Zresztą, jak to widać z obliczeń podanych w Tab. IV ta lub inna wartość  $K$  jest nieomal bez wpływu, w stosunkach warszawskich usłonecznienia, w miesiącach zimowych, kiedy wartości  $d$  wahają się zależnie koło 1—2 godzin słonecznych na dobę.

Z ostatniej kolumny Tab. IV wynika, że suma roczna promieniowania  $Q_{diff}$  w warunkach faktycznych przebiegu usłonecznienia w Warszawie wynosi blisko 35 kalorii kilogramowych na  $cm^2$  powierzchni poziomej.

Tab. V.

Sumy insolacyjne miesięczne i roczne w Warszawie.  
 Monthly and annual totals of insolation (in kg. cal. per cm<sup>2</sup>)  
 at Warsaw (lat. 52<sup>o</sup>, 2 N).

Miesiące Months	2. $Q_{bor}^{(Max)}$ kg. cal.	3. $Q_{norm}$ kg. cal.	4. $Q_{bor}$ kg. cal.	5. $Q_{diff}$ kg. cal.	6. $Q_{glob}$ kg. cal.	7. $diff/glob$ %
I	5.5	1.5	0.4	1.2	1.6	75
II	8.2	3.4	1.2	1.5	2.7	56
III	15.1	6.2	3.0	2.3	5.3	43
IV	21.9	9.9	5.9	3.4	9.3	37
V	28.5	18.3	11.3	4.8	16.1	30
VI	29.8	15.3	10.1	5.0	15.1	33
VII	29.9	13.9	9.1	4.9	14.0	35
VIII	25.3	12.0	7.2	4.4	11.6	38
IX	17.9	10.7	5.5	3.1	8.6	36
X	11.9	5.2	2.1	1.8	3.9	46
XI	6.5	2.0	0.5	1.1	1.6	69
XII	4.5	1.0	0.2	0.8	1.0	80
I/XII	205.0	99.4	56.5	34.3	90.8	38

Explanation of the columns:

Column 2 gives the totals that would be received at the latitude 52<sup>o</sup> 2 N (horizontal surface) without losses by the earth atmosphere.

Column 3 represents the totals received at the surface of the earth by normal incidence (average values calculated for all days after pyrheliometric measurements made at Warsaw during several years).

Columns 4, 5 and 6 give: corresponding components for horizontal surface, the totals for sky radiation (see Tab. IV) and for the total (sun and sky) radiation at Warsaw.

In the last column 7 the percentage  $Q_{diff}:Q_{glob}$  are given for all months and for the whole year.

Jest rzeczą bardzo w tym wypadku interesującą móc ocenić udział procentowy promieniowania rozproszonego w bilansie ogólnym insolacji dla stolicy Polski. W Tab. V znajdziemy następujące wartości:

1. W pierwszej kolumnie pionowej podane są kolejne miesiące, oraz okres roczny I/XII.
2. Kolumna druga zawiera sumy insolacyjne dla granicy górnej atmosfery ziemskiej, przyjmując 1.94 cal, jako wartość przeciętną stałej słonecznej. Sumy te zostały przeliczone z opracowań Milankovitcha „Téorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire” (Paris, 1920) dla różnych równoleżników.
3. W kolumnie trzeciej znajdujemy wartości  $Q_{norm}$ , podane według ogłoszonych już opracowań sum insolacyjnych dla Warszawy. Te sumy  $Q_{norm}$  przedstawiają wartości otrzymane faktycznie w Warszawie, według średnich kilkunastoletnich z pomiarów pyrhelometrycznych. Chodzi tu przytem o insolację powierzchni wystawionej prostopadle względem promieni słonecznych.
4. W kolumnie czwartej znajdujemy (dla Warszawy, w ciągu okresu wieloletniego) faktyczne sumy insolacyjne  $Q_{bor}$ , t. j. wynikające z przeliczenia  $Q_{norm}$  dla powierzchni poziomej. Sumy  $Q_{bor}$  otrzymuje się więc z przemnożenia wartości  $Q_{norm}$  przez każdorazowe  $\sin h$ .
5. Kolumna piąta daje wartości  $Q_{diff}$  według świeżo dokonanych pomiarów i obliczeń figurujących w ostatniej kolumnie pionowej Tab. IV.
6. Dodając do sum  $Q_{bor}$  wartości  $Q_{diff}$ , otrzymujemy w kolumnie szóstej sumy  $Q_{glob}$ , przedstawiające faktyczne sumy insolacyjne dla poziomej powierzchni ziemi w Warszawie. Te ostatnie obejmują więc nie tylko to, co przychodzi drogą promieniowania bezpośrednio od słońca, lecz i po rozproszeniu przez całe sklepienie niebieskie.
7. Wreszcie w kolumnie ostatniej obliczone są procentowo stosunki dyfuzji do sum insolacyjnych  $Q_{glob}$ . Widzimy stąd, że dla sum rocznych  $38\frac{0}{10}$ , w stosunku do insolacji ogólnej, przypada na udział promieniowania rozproszonego. W zimie

mamy w Polsce koło  $\frac{3}{4}$  promieni dyfuzyjnych w sumie ogólnej; w lecie przeważają bezpośrednie promienie słoneczne, a udział dyfuzji spada do  $\frac{1}{4}$ .

Tab. VI.

Udział procentowy promieniowania rozproszonego dla kilkunastu miejscowości, w stosunku do całkowitego promieniowania słonecznego.

Percentage of diffuse sky radiation ( $Q_{diff}$ ) for different stations in relation to the total (sky and sun) solar radiation.

$\varphi$ North		XII. I. II	III. IV. V	VI. VII. VIII	IX. X. XI	I—XII
60 <sup>0</sup> .2	Helsinki . .	63 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	38 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	41 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	52 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	42 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
59 <sup>0</sup> .7	Slutzk (Leningrad)	61 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	40 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	35 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	55 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	40 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
52 <sup>0</sup> .2	Warszawa . .	66 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	34 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	35 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	42 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	38 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
48 <sup>0</sup> .8	Paris . . .	51 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	41 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	31 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	48 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	38 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
43 <sup>0</sup> .7	Nice . . . .	42 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	32 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	26 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	34 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	32 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
19 <sup>0</sup> .4	Tacubaya, Me- xico . . . .	26 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	43 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	45 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	39 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	39 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>

Sumy insolacyjne ( $Q_{glob}$ ) w kal. kg. na cm<sup>2</sup> powierzchni poziomej dla pór roku i okresu rocznego.

Corresponding totals of sun and sky radiation (in kg. cal. per cm<sup>2</sup> of horizontal surface) for 4 seasons and the year.

		Zima Winter	Wiosna Spring	Lato Summer	Jesień Autumn	Rok Year
60 <sup>0</sup> .2	Helsinki . .	3.2	26.5	36.7	8.9	75.3
59 <sup>0</sup> .7	Slutzk (Leningrad)	3.2	24.3	34.0	7.9	69.4
52 <sup>0</sup> .2	Warszawa . .	5.3	30.7	40.7	14.1	90.8
48 <sup>0</sup> .8	Paris . . . .	8.7	32.5	40.6	16.6	98.4
43 <sup>0</sup> .7	Nice . . . .	18.2	43.2	57.4	28.5	147.3
19 <sup>0</sup> .4	Tacubaya . . alt. H=2311 m, Mexico	36.3	49.7	36.4	32.1	154.5



W tablicy końcowej (Tab. VI) znajdujemy porównanie udziału procentowego  $Q_{diff}$  w stosunku do sum insolacyjnych  $Q_{glob}$ . Widzimy, że dla Europy północnej i zachodniej od Helsingforsu do Paryża udział promieniowania rozproszonego waha się koło 40% w stosunku do sum rocznych insolacji całkowitej, otrzymywanej przez powierzchnię poziomą zarówno od słońca, jak i od sklepienia niebieskiego. Na ogromnym terytorjum od Uralu i Skandynawji do Atlantyku — sumy dzienne dyfuzji wahają się, w ciągu 6 miesięcy cieplejszej połowy roku w niezbyt szerokich granicach, bo przeważnie od 100 do 125 cal. gr. na dobę.

Udział procentowy dyfuzji wypada nieco odmiennie dopiero w strefie śródziemnomorskiej oraz w górach z większym usłonecznieniem, zwłaszcza w porze zimowej. Według badań, przeprowadzonych dla Nicei, otrzymujemy tam tylko 32% udziału rocznego dyfuzji w ogólnym bilansie insolacyjnym, zamiast koło 40% znalezionych ogólnie.

Pomiary promieniowania całkowitego i rozproszonego, prowadzone w dalszym ciągu pod egidą Gabinetu Aktynometrycznego T. N. W., będą jeszcze przedmiotem następnych komunikatów.

---

Lad. Gorczyński & Fr. Ostrowski.

**Values of diffused sky radiation at Warsaw  
and in Central Poland.**

Mémoire présenté par M. L. Gorczyński dans la séance du 29 avril 1933

Summary

In the paper entitled „Contribution to knowledge of diffuse radiation values in the general thermic balance of the earth” (published in these Transactions, meeting of May 1932), the values of sky radiation at Warsaw were estimated by comparison with some other stations. In order to complete this provisory calculation, special measurements were organized in 1932 in two small places in Poland (Remiszewice and Januszewice) and at Warsaw (upper—terrace of the Actinometric Laboratory in the building of the Science Society).

In Table I (see this and subsequent numerical tables in Polish text with English subtitles and explanation in both languages) we give a small abstract of these series. The values of the sky radiation intensity ( $Q_{diff}$ ) were obtained, for different sun's altitudes, by solarimetric method. The corresponding instruments (thermoelectric pyrhelimeters and solarimeters) were constructed by Jules Richard Society in Paris.

Besides the measurements during the summer and autumn 1932, sky radiation determinations are regularly made at Warsaw from November 1932. They permitted us to establish the corresponding values of  $Q_{diff}$  for completely covered and even rainy (or snow) days, so frequent during the winter season. It occurs (see Table II) that, by totally covered sky and heavy clouds, the  $Q_{diff}$ -values are practically the same that for clear days without clouds. In the case of partial cloudiness, with some reflecting clouds or by veiled sky, the diffused radiation values are greater, with differences of several tenths of percent.

The comparison between Warsaw and some other places shows a good agreement (see Table II).

We found that the monthly (but not daily) totals of  $Q_{diff}$  by partial cloudiness can be calculated from a simple relation of purely empirical character

$$\sum Q_{diff} = \sum \left[ Q_c : \left( 1 - k \frac{d}{D} \right) \right]$$

where  $Q_c$  represents monthly sky radiation totals for clear days without clouds near to sun's disc. Further  $d$  is the effective (obtained for instance from sunshine—recorders) and  $D$  — the astronomical duration of day from sunrise to sunset;  $k$  is an empirical coefficient which, at Warsaw, can be estimated as equal 0,5 in first approximation.

In Tables III and III bis are calculated hourly, daily and monthly values of diffused sky radiation at Warsaw by nearly clear sky. The corresponding monthly values of  $Q_{diff}$  by average sky conditions are given in Table IV.

The Table V gives monthly and annual totals of insolation at Warsaw in kilogramm—calories per square centimetre. We note that the annual total is, for this place, 91 kg. cal. for the total

(sun and sky) radiation received per  $\text{cm}^2$  of horizontal surface. The diffused radiation represents 38% of the total amount.

In the final Table VI are given the corresponding values for different stations. It results from these comparisons that an annual percentage of sky radiation approaching 40%, characteristic for european stations in general, should not be accepted for more sunny places at the Riviera and for mountains with sufficient sunshine in the winter time. In these cases the annual percentage of the sky radiation is only of about 30% of the total amount of solar radiation received at horizontal surface.

## **Posiedzenie**

z dnia 31 maja 1933 r.

W. Smosarski.

### **Polaryzacja światła nieba o zmroku.**

Komunikat zgłoszony dn. 31 maja 1933 r.

W. Smosarski.

### **Polarisation des Himmelslichtes in der Dämmerung.**

Mémoire présenté dans la séance du 31 mai 1933.

Die Untersuchung der atmosphärischen Polarisation während der Dämmerung ist besonders interessant wegen der farbigen Erscheinungen, die sich dabei auf dem Himmel abspielen. Im einzelnen dürfte man eine grössere Änderung des Polarisationsgrades bei der Aufhellung des Purpurlichtes erwarten, wenn man im Bereiche der längeren Lichtwellen mit farbigen Filtern beobachtet.

Es ist ferner wohl bekannt, dass das Maximum der Polarisation im Sonnenvertikal am Tage nicht in  $90^{\circ}$  Abstand von der Sonne, wie es die Theorie der molekularen Zerstreuung des Lichtes fordert, erscheint, sondern  $1^{\circ}$  bis  $2^{\circ}$  weiter. Sollte nun während der Dämmerung ausser der ungeordneten Zerstreuung noch die Beugung des Lichtes in der Atmosphäre mitwirken, wie es von J. M. Pernter zur Erklärung der Erscheinung des Purpurlichtes vorausgesetzt worden war, so dürfte man auch erwarten, dass dadurch eine weitere Verschiebung des Maximums hervorgerufen werden müsste.

Um diesen Fragen näher zu treten, habe ich eine Reihe von Messungen mit Photopolarimeter Cornu durch orangefarbenes Glas OG 1 (Meteor. Obs. Potsdam) vorgenommen. Es wurde zum Teil auch mit rotem Filter RO 2 beobachtet, aber diese Messungen konnten nicht weit genug geführt werden, weil der entsprechende Lichtanteil sich bald nach dem Sonnenuntergang, besonders bei durchsichtiger Luft, als zu schwach erwies.

Es wurde in  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $120^\circ$  Abstand von dem Sonnenpunkte des Horizontes im Vertikal nacheinander gemessen und daraus je drei simultane Werte der Polarisation in den angegebenen Visierrichtungen für bestimmte Sonnenhöhenstufen interpoliert; ferner habe ich für je drei monatliche Mittelwerte den Wert und den Abstand von der Sonne der maximalen Polarisation im Sonnenvertikal berechnet, und zwar mit Hilfe der Interpolationsmethode, die in Gerl. Beitr. Geoph. 1933. Bd. 38. S. 110. entwickelt worden ist.

Die Messungsergebnisse und die berechneten Werte sind in der beigefügten Tabelle zusammengestellt.

Betrachtet man zunächst die Mittelwerte für  $60^\circ$  Abstand von dem Horizonte, so findet man, dass dieselben vor und nach dem Sonnenuntergang bis  $-6^\circ$  wahre Sonnenhöhe immerwährend steigen; später wird das Licht für weitere Messungen schon zu schwach.

In  $120^\circ$  Abstand ist die Polarisation anfänglich stärker als in der entsprechenden Höhe an der Sonnenseite; sie nimmt beständig ab und wird bei  $-3^\circ$  Sonnenhöhe niedriger als an der Sonnenseite.

Der Gang der Polarisation im Zenit wies keinen einheitlichen Charakter auf: an einigen Tagen nahm dieselbe vor dem Sonnenuntergang zu, um bald darauf abzuklingen; an anderen Tagen war die Polarisation bis  $-6^\circ$  wahre Sonnenhöhe im Steigen begriffen. Dasselbe bezieht sich auch auf die berechneten Werte der maximalen Polarisation. Der berechnete Abstand des Maximums von der Sonne weist dabei an einigen Tagen eine leichte fortwährende Vergrößerung von etwa  $92^\circ$  bis  $93^\circ$  auf; an anderen Tagen steigt der Abstand bis  $-2^\circ$  Sonnenhöhe an, um bei weiter sinkender Sonne einen Abfall zu erfahren.

Es folgt nach den Ergebnissen, dass das Erscheinen des Purpurlichtes keine sehr auffallenden Veränderungen des Pola-

risationszustandes im orange-gelben Anteile des Himmelslichtes hervorbrachte. Der beobachtete Gang der maximalen Polarisation dürfte zum Teil durch das allmähliche Ausschalten der niedrigeren beunreinigten Luftschichten in dem Masse, als sie in den Erdschatten sinken, erklärt werden; und zum Teil auch durch die nach dem Sonnenuntergange in der Atmosphäre eintretende Zustandsänderung der Luftmassen.

Es ist dabei zu berücksichtigen, dass das Purpurlicht in der betrachteten Beobachtungsperiode keinen grossen Grad der Intensität erreichte und meistens als unternormal geschätzt wurde; im September und Oktober 1932 wurde es auch öfters durch Strahlenbildung gestört.

Die erwähnte Interpolationsmethode gestattet ferner noch die Lage der neutralen Punkte zu berechnen. Es wurde dabei das unerwartete Ergebnis gefunden, dass der berechnete Abstand des neutralen Punktes von der Gegen Sonne vor und nach dem Sonnenuntergang eine beständige Abnahme zeigt, während der Arago-Punkt bekanntlich zuerst auch sinkt aber von  $-3^{\circ}$  wahrer Sonnenhöhe rasch ansteigt.

Ich hoffe, dass das Ergebnis nicht durch die Berechnungsmethode vorgetäuscht ist, sondern, dass es einen gewissen wahren Sinn enthält. Bei direkter Beobachtung des Arago-Punktes ist der Lichtstrahl stark durch Absorption geschwächt und durch die sekundäre Diffusion in dem beschatteten Raume der Atmosphäre beeinflusst. Dagegen hat man bei den Messungen in der Nähe des Zenits hauptsächlich mit dem primär durch die Luft der höheren Schichten der Atmosphäre diffundierten Lichte zu tun, und die berechnete Lage des neutralen Punktes fällt so aus, als ob man denselben oberhalb des Erdschattenkegels beobachtete.

Es werden zur Erläuterung die Werte für den Monat September 1932 beispielsweise angeführt.

Sonnenhöhe :

39°	6°	4°	3°	1°	-1°	-2°	-3°	-4°	-5°
Berechneter Abstand d. neutr. Punktes v. d. Gegen Sonne									
19,5 <sup>0</sup>	21,1	23,1	22,6	22,1	21,2	21,0	19,8	18,5	16,7
Aragopunkt Abstand beobachtet									
—	22,1 <sup>0</sup>	21,0	20,5	20,0	19,4	19,3	20,0	21,8	24,5

Die Messungen wurden zu Golencin bei Posen und teilweise auch in Warschau ausgeführt.

TABELLE.

Polarisationsgrad in  $\text{‰}$  im Sonnenvertikal.

Gelbfilter: a — September 1932, 7 Tage; b — Oktober 1932, 4 Tage;

c — Mai 1933, 3 Tage.

Rotfilter: d — März 1933, 6 Tage.

Wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes.

	6 <sup>0</sup>	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6 <sup>0</sup>
60 <sup>0</sup> Abstand von dem Sonnenpunkte des Horizontes.													
a	297	303	318	339	358	379	398	407	410	420	445	456	438
b	—	285	304	324	346	370	390	395	395	424	459	467	—
c	291	302	316	333	340	349	370	380	401	437	479	503	516
d	269	278	304	312	321	332	347	372	389	387	418	462	472
90 <sup>0</sup> Abstand (Zenit)													
a	658	668	681	693	707	723	734	739	733	725	723	722	706
b	—	669	685	698	713	718	726	725	723	724	743	739	—
c	688	697	710	726	737	745	750	755	755	767	781	786	—
d	658	668	684	697	702	712	733	731	724	714	699	—	—
120 <sup>0</sup> Abstand													
a	505	493	482	476	465	458	452	445	434	423	415	405	390
b	—	491	486	481	478	473	462	451	443	424	419	405	—
c	525	507	500	485	473	466	452	442	444	434	424	406	374
d	538	526	512	505	489	480	473	462	446	428	419	405	395
Maximum der Polarisation (berechnet)													
a	681	687	695	702	713	726	735	740	733	725	723	723	707
b	—	690	701	710	720	724	728	727	725	724	744	741	—
c	716	718	726	737	746	752	753	757	756	767	781	791	—
d	695	699	706	715	716	723	740	735	726	714	699	—	—
Abstand des Maximums von dem wahren Sonnenmittelpunkte: 90 <sup>0</sup> +													
a	1,5 <sup>0</sup>	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,8	2,2	2,8	3,1	3,0	3,3	4,4 <sup>0</sup>
b	—	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,3	2,9	3,9	3,0	2,7	3,0	—
c	1,8 <sup>0</sup>	1,7	1,9	1,8	2,1	2,5	2,5	2,9	3,3	2,9	2,3	2,1	—
d	3,5 <sup>0</sup>	3,5	3,1	3,4	3,5	3,6	3,9	3,9	3,9	3,8	4,0	—	—

W. Sierpiński.

## O pewnej własności rodzin zbiorów przeliczalnych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 31 maja 1933 r.

Streszczenie.

Autor dowodzi, że jeżeli  $F$  jest rodziną zbiorów conajwyżej przeliczalnych (o jakichkolwiek elementach) i jeżeli każdy element sumy  $S$  wszystkich zbiorów, tworzących rodzinę  $F$ , należy conajwyżej do przeliczalnej mnogości zbiorów tej rodziny, to zbiór  $S$  jest sumą przeliczalnej mnogości zbiorów, z których każdy ma conajwyżej jeden element wspólny z każdym zbiorem rodziny  $F$ .

W. Sierpiński.

## Sur une propriété des familles d'ensembles dénombrables.

Note présentée dans la séance du 31 Mai 1933.

Le but de cette Note est de démontrer ce

**Théorème:** *Si  $F$  est une famille d'ensembles au plus dénombrables (formés d'éléments quelconques) et si tout élément de la somme  $S$  de tous les ensembles de la famille  $F$  appartient à un ensemble au plus dénombrable d'ensembles de la famille  $F$ , l'ensemble  $S$  est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun a au plus un élément commun avec tout ensemble de la famille  $F$ .*

Démonstration.

$E$  étant un sous-ensemble au plus dénombrable de  $S$ , désignons par  $T(E)$  la somme de tous les ensembles de la famille  $F$  qui ont au moins un point commun avec  $E$ . Tout élément de  $E$  appartenant (d'après  $E \subset S$ ) à un ensemble au plus dénombrable d'ensembles de la famille  $F$ , et tout ensemble de  $F$  étant au plus dénombrable, on voit sans peine que l'ensemble  $T(E)$  est au plus dénombrable (quel que soit le sous-ensemble  $E$  de  $S$ ).

Posons

$$(1) \quad U(E) = T(E) + T^2(E) + T^3(E) + \dots$$



— ce seront évidemment des ensembles au plus dénombrables (pour tout sous-ensemble  $E$  de  $S$ ), en tant que sommes de séries infinies d'ensembles au plus dénombrables.

On voit sans peine que si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sous-ensembles de  $S$ , on a ou bien

$$U(E_1) \cdot U(E_2) = 0,$$

ou bien

$$U(E_1) = U(E_2).$$

En effet, supposons que  $U(E_1)U(E_2) \neq 0$  et soit  $p$  un élément commun à  $U(E_1)$  et à  $U(E_2)$ . D'après (1) il existe donc deux nombres naturels  $m$  et  $n$ , tels que

$$p \in T^m(E_1) \quad \text{et} \quad p \in T^n(E_2)$$

et il en résulte tout de suite (d'après la définition de l'opération  $T$ ) que

$$E_2 \subset T^{m+n}(E_1) \quad \text{et} \quad E_1 \subset T^{m+n}(E_2),$$

d'où il s'en suit, d'après (1), que

$$U(E_2) \subset U(E_1) \quad \text{et} \quad U(E_1) \subset U(E_2),$$

donc  $U(E_1) = U(E_2)$ , c. q. f. d.

Divisons maintenant tous les ensembles de la famille  $F$  en classes, en rangeant dans une même classe deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  de  $F$  dans ce et seulement dans ce cas, où  $U(E_1) = U(E_2)$ . Pour les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  appartenant aux classes différentes, nous aurons donc toujours  $U(E_1)U(E_2) = 0$ . La somme  $S(E)$  de tous les ensembles de la famille  $F$  qui appartiennent à la même classe que  $E$  est évidemment  $U(E)$ , donc elle est au plus dénombrable, et les sommes des ensembles de  $F$  qui appartiennent aux classes différentes sont toujours disjointes.

Prenons un ensemble  $E$  de chacune des classes définies plus haut et soit  $\Phi$  la famille de tous les ensembles  $U(E)$  correspondants.

On voit sans peine que l'ensemble  $S$  est la somme de tous les ensembles de la famille  $\Phi$  et que les ensembles de la famille  $\Phi$  sont disjoints et au plus dénombrables. Donc, comme on voit facilement,  $S$  est une somme d'une suite infinie d'ensembles, dont chacun a au plus un élément commun avec tout

ensemble de la famille  $\Phi$ , donc aussi (à plus forte raison) avec tout ensemble de la famille  $F$ . Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer que notre théorème reste vrai lorsqu'on remplace dans son énoncé partout le mot *dénombrable* par les mots *de puissance*  $m$ , où  $m$  est un nombre cardinal donné quelconque  $\geq \aleph_0$ .

B. Olewski.

**Przyczynek do badania przekształceń definicji  
zbioru mierzalnego  $B$ .**

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 31 maja 1933 r.

B. Olewski.

**Contribution à l'étude des transformations  
de la définition d'ensemble mesurable  $B$ .**

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 31 Mai 1933.

1. On sait qu'elle grande efficacité, dans les mathématiques contemporaines, appartient à la notion de mesure d'ensemble en général. Etant introduite dans la science par M. E. Borel et définie d'une manière différente par M. H. Lebesgue, cette notion est devenue le procédé classique des recherches dans le domaine de l'Analyse actuelle. Il semble que la différence qui existe entre ces deux définitions de mesure ne consiste pas dans la totalité des ensembles dits *mesurables* — la classe des ensembles mesurables au sens de M. E. Borel paraît être identique avec celle des ensembles mesurables au sens de M. H. Lebesgue — mais c'est la voie *constructive* des idées de M. E. Borel qui présente essentielle différence avec la voie *logique* de M. H. Lebesgue. L'étude de ces mesures n'a fait que rendre plus nette l'opinion ancienne que pour avoir réellement la mesure de M. H. Lebesgue il faut effectuer une infinité

des opérations préliminaires ayant la puissance du continu, tandis qu'il suffit d'effectuer préalablement une infinité énumérable d'opérations élémentaires pour évaluer la mesure de M. E. Borel d'un ensemble à partir de sa construction.

Il est cependant impossible de ne pas reconnaître que la définition même de mesure au sens de M. E. Borel paraît présenter de grandes difficultés précisément d'ordre logique, des difficultés qui n'existent plus dans le cas de mesure de M. H. Lebesgue. C'est précisément le „problème de la mesure de M. E. Borel" qu'on trouve posé par M. N. Lusin dans ses *Leçons sur les ensembles analytiques*, Chapitre I p. 49.

On rencontre des difficultés d'ordre constructif pour la première fois dans la définition de mesure de M. H. Lebesgue, lorsqu'on cherche à ranger dans un certain ordre les opérations *élémentaires* préliminaires qui servent à déterminer la valeur de cette mesure de manière que les opérations suivantes dépendent des opérations précédentes ces opérations étant toujours en une infinité non dénombrable. C'est la raison pour laquelle on peut préférer considérer la mesure de M. E. Borel. D'autre part, on rencontre des difficultés d'ordre *logique* lorsqu'on cherche à démontrer que la mesure de M. E. Borel effectivement existe pour les ensembles mesurables  $B$ , c'est-à-dire que nous ne rencontrerons jamais, en cherchant déterminer réellement la mesure de M. E. Borel, ni des séries divergentes, ni des nombres négatifs, et que nous serons amenés toujours au même résultat numérique: on sait que dans l'état actuel de la science, pour, que *l'unicité* de la mesure de M. E. Borel soit logiquement démontrée, il faut entrer dans le domaine des idées de M. H. Lebesgue. C'est la raison pour laquelle la question de „*l'autonomie*" de la mesure de M. E. Borel est de haut intérêt, cette autonomie ne paraissant pas clair puisque le problème cité de la mesure de M. E. Borel reste non résolue encore.

C'est pour s'approcher de la solution de ce problème que M. N. Lusin<sup>1)</sup> a donné les démonstrations à deux théorèmes connus relatifs à la *transformation de la définition d'ensemble mesurable B*:

---

1) *Ibid.*, p. 42—43.

I. *Etant donné un ensemble mesurable B quelconque on sait obtenir cet ensemble, à partir des intervalles, au moyen des deux opérations: somme au sens stricte (S') et partie commune (P) indéfiniment répétées;*

II. *Tout ensemble qu'on obtient, à partir des intervalles, au moyen des deux opérations: somme au sens large (S) et partie commune (P) indéfiniment répétées est mesurable B.*

La démonstration de M. N. Lusin du théorème I, est bien directe puisqu'on déduit immédiatement d'une suite bien ordonnée

$$E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E$$

qui sert à définir l'ensemble donné  $E$  mesurable  $B$  une autre suite dénombrable bien ordonnée

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\rho, \dots \dots / E$$

ayant l'ensemble  $E$  pour dernier terme dont chaque terme qui n'est pas un intervalle se déduit de termes précédents ou bien au moyen de l'opération (S), ou bien au moyen de l'opération (P): pour avoir une telle suite  $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\rho, \dots \dots / E$ , il nous suffit de faire précéder immédiatement, dans la suite bien ordonnée donnée  $E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E$  chaque terme  $E_\alpha$  par son complémentaire  $CE_\alpha$ .

Or la démonstration <sup>1)</sup> que M. N. Lusin a donné au théorème II n'est pas directe puisque l'auteur se sert, dans ses raisonnements, de l'induction transfinie et n'indique réellement par lesquels moyens on peut effectivement parvenir à la détermination parfaite d'une suite dénombrable bien ordonnée  $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\rho, \dots \dots / E$  définissant l'ensemble considéré  $E$  au moyen des deux opérations fondamentales de M. E. Borel qui consistent à faire la somme stricte (S') et à prendre le complémentaire (C), et ceci à partir de la suite initiale  $E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E$  qui sert à définir l'ensemble donné  $E$  au moyen de (S) large et de (P). Donc, on ne sait pas comment on peut réellement définir la suite désirée  $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\rho, \dots \dots / E$ .

1) *Ibid.*, p. 43—46.

Et cependant la nature même du procédé proposé par M. E. Borel et destiné à évaluer numériquement la mesure de l'ensemble donné  $E$  est profondément *constructive*, puisqu'on arrive à obtenir la valeur numérique de cette mesure de l'ensemble  $E$  en poursuivant pas à pas la *construction* même de l'ensemble  $E$  au moyen des opérations ( $S'$ ) stricte et ( $C$ ).

Comme les intérêts du problème de la mesure et la nature même de la notion de mesure au sens de M. E. Borel demandent des choses exclusivement constructives, nous nous proposons pour le but de cet article de donner une démonstration *directe* du théorème II et sans faire intervenir l'induction transfinie.

2. Il s'agit du théorème suivant:

**Théorème.** *On sait déduire directement de la suite dénombrable bien ordonnée*

$$E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E$$

*qui sert à construire, à partir des intervalles, l'ensemble donné  $E$  au moyen des opérations ( $S$ ) et ( $P$ ), une autre suite dénombrable bien ordonnée*

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\beta, \dots \dots / E$$

*qui sert à construire l'ensemble  $E$ , à partir des intervalles, au moyen des opérations: somme stricte ( $S'$ ) et complémentaire ( $C$ ).*

Démonstration.

Soit

$$(1) \quad E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E_\chi = E$$

une suite dénombrable bien ordonnée d'ensembles dont chaque terme qui n'est pas un intervalle se déduit des termes précédents on bien au moyen de l'opération ( $S$ ) au sens large, on bien au moyen de l'opération ( $P$ ).

1<sup>o</sup>. Je suppose les ensembles  $E_\alpha$ ,  $\alpha < \chi$ , de la suite (1) ainsi que leur complémentaires  $CE_\alpha$  rangés dans un certain ordre que je ne précise pas, mais que je suppose précisé; soit

$$(1^1) \quad E'_1, E'_2, E'_3, \dots, E'_i \dots$$

la suite considérée simplement infinie.

Faisons tous les produits *finis* possibles  $\prod_i E'_{n_i}$  des termes de la suite (1<sup>1</sup>), les produits ne contenant qu'un seul facteur

étant inclus, et faisons les ranger en suite simplement infinie

$$(2^1) \quad P_1', P_2', P_3', \dots, P_n', \dots$$

Partageons tous les termes de la suite (2<sup>1</sup>) en  $\chi$  classes de la manière suivante: la classe simplement infinie

$$P^{(\alpha)} = [P_1^{(\alpha)}, P_2^{(\alpha)}, P_3^{(\alpha)}, \dots, P_n^{(\alpha)}, \dots]$$

est composée de tous les  $P_n'$  qui contiennent un des deux facteurs  $E_\alpha$  ou bien  $CE_\alpha$  et qui ne contiennent aucun facteur  $E_{\alpha'}$  ou  $CE_{\alpha'}$  pour  $\alpha' > \alpha$ .

De cette manière nous avons une suite dénombrable bien ordonnée des classes  $P^{(\alpha)}$  ainsi définies

$$(3^1) \quad P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(\alpha)}, \dots \dots / \chi.$$

D'après la définition même de  $P^{(\alpha)}$ , il est clair que tout terme de  $P^{(\alpha)}$  peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad P_\nu^{(\alpha)} = P_{n'}^{(\alpha^*)} E_\alpha, \quad \alpha^* < \alpha.$$

ou bien sous la forme

$$(2) \quad P_\mu^{(\alpha)} = P_{m'}^{(\alpha^*)} CE_\alpha, \quad \alpha^* < \alpha.$$

D'ailleurs, il est manifeste que nous avons l'identité

$$(3) \quad P_n^{(\alpha_1)} P_m^{(\alpha_2)} = P_k^{(\alpha^*)}$$

où  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\alpha^* \leq \alpha_2$ .

2<sup>0</sup>. Désignons par  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  l'ensemble des ensembles de  $P^{(\alpha)}$  et de tous leurs complémentaires, et partageons  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  en deux suites simplement infinies  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  et  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$  de la manière suivante: mettons dans la suite  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  tous les  $P_\nu^{(\alpha)}$  et  $CP_\mu^{(\alpha)}$  si  $E_\alpha$  est un intervalle ou bien s'il est obtenu au moyen de l'opération (S) effectuée sur des certains ensembles  $E_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ , de la suite bien ordonnée donnée (1); d'une manière analogue, nous mettons dans la même suite  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  tous les  $P_\mu^{(\alpha)}$  et  $CP_\nu^{(\alpha)}$  si  $E_\alpha$  est obtenu au moyen de l'opération (P) effectuée sur des certains ensembles  $E_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ , de la suite bien ordonnée (1).

Les ensembles restants de  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ , qui coïncident avec les complémentaires des termes de  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$ , sont rangés en une suite simplement infinie que nous désignons par  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ . D'après la définition même de la suite  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  il est clair que la suite  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$

est composée de tous les  $P_{\mu}^{(\alpha)}$  et  $CP_{\nu}^{(\alpha)}$  si  $E_{\alpha}$  est un intervalle ou bien s'il est obtenu au moyen de l'opération (S) effectuée sur des certains termes  $E_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ , de la suite (1), et de tous les  $P_{\nu}^{(\alpha)}$  et  $CP_{\mu}^{(\alpha)}$  si  $E_{\alpha}$  est obtenu au moyen de l'opération (P) effectuée sur des certains  $E_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ , de la suite donnée (1).

Il est manifeste que

$$\mathfrak{S}^{(\alpha)} = \mathfrak{S}'^{(\alpha)} + \mathfrak{S}''^{(\alpha)}.$$

Pour rappeler au lecteur le contenu des suites *simplement infinies*  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  et  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ , nous pouvons écrire l'égalité précédente, d'après la manière même dont on l'a obtenu, sous la forme symbolique suivante:

$$(4^1) \quad \mathfrak{S}^{(\alpha)} = \left\{ \mathfrak{S}'^{(\alpha)} \left( P_{I \nu}^{(\alpha)}, P_{S \nu}^{(\alpha)}, P_{P \mu}^{(\alpha)}, CP_{I \mu}^{(\alpha)}, CP_{P \nu}^{(\alpha)}, CP_{S \mu}^{(\alpha)} \right), \right. \\ \left. \mathfrak{S}''^{(\alpha)} \left( P_{I \mu}^{(\alpha)}, P_{P \nu}^{(\alpha)}, P_{S \mu}^{(\alpha)}, CP_{I \nu}^{(\alpha)}, CP_{S \nu}^{(\alpha)}, CP_{P \mu}^{(\alpha)} \right) \right\}$$

en écrivant au dessous de la lettre  $P$  les indices  $I$ ,  $S$  et  $P$  suivant que  $E_{\alpha}$  est un intervalle, ou bien une somme (S), ou bien un produit (P) des certains termes  $E_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ , de la suite bien ordonnée (1). Ici  $\nu$  et  $\mu$  parcourent tous les entiers positifs:  $\nu, \mu = 1, 2, 3, \dots$

Cela posé, nous pouvons construire maintenant une suite dénombrable bien ordonnée qui sert à déterminer l'ensemble considéré  $E$ , à partir des intervalles, au moyen des opérations: somme stricte (S') et complémentaire (C).

Pour cela, nous écrivons d'abord la suite dénombrable bien ordonnée

$$(5^1) \quad \mathfrak{S}^{(0)}, \mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{S}^{(2)}, \dots \dots, \mathfrak{S}^{(\alpha)}, \dots \dots / \chi$$

et remplaçons chaque terme  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  de cette suite (5<sup>1</sup>) simultanément par l'ensemble des termes des deux suites simplement infinies

$$\mathfrak{S}'^{(\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}''^{(\alpha)}$$

les termes de  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  précèdent tous les termes de  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ ; ici  $\alpha < \chi$ .

Il est manifeste qu'on obtient de cette manière, une suite d'ensembles bien déterminée

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}, \dots \dots$$

et que cette suite est dénombrable et bien ordonnée, puisqu'elle

est obtenu en substituant à chaque terme  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  de (5<sup>1</sup>) une suite bien ordonnée  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$ ,  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$  qui correspond au nombre transfini  $w_2$ , au plus.

Si nous écrivons l'ensemble considéré  $E$  comme le dernier terme de cette suite nous obtenons finalement la suite bien ordonnée

$$(2) \quad \mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\rho, \dots \dots / \mathfrak{E}_\tau = E$$

Remarquons, enfin, que cette suite contient tous les termes de la suite donnée (1), puisqu'elle contient évidemment tous les produits  $P'_n$  de la suite (2<sup>1</sup>) et puisque, parmi les termes de (2<sup>1</sup>) nous rencontrons tous les termes  $E_\alpha$  de la suite (1), car un produit fini peut être formé d'un seul facteur.

Nous allons maintenant démontrer que *la suite bien ordonnée (2) ainsi construite nous permet de définir l'ensemble proposé  $E$  au moyen des deux opérations: somme stricte (S') et complémentaire (C).*

3. Pour cela, il suffit de démontrer que *chaque terme  $\mathfrak{E}_\rho$  de la suite (2) qui n'est pas un intervalle, peut être obtenu des termes précédents au moyen d'une des deux opérations: somme stricte (S') et complémentaire (C).*

La démonstration se réduit à une série de vérifications directes.

D'après la formule symbolique (4<sup>1</sup>), nous avons à considérer les douze cas suivants:

I.  $\mathfrak{E}_\rho$  appartient à  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$ .

Il y a lieu de distinguer six cas:

**Premier cas:**  $\mathfrak{E}_\rho = P_{\nu}^{(\alpha)}$ . D'après l'égalité (1<sub>1</sub>) nous avons

$$P_{\nu}^{(\alpha)} = P_{n'}^{(\alpha^*)} E_\alpha$$

où  $E_\alpha$  est un intervalle;  $\alpha^* < \alpha$ . Tout d'abord, nous pouvons évidemment supposer que tous les termes de la suite (1) qui sont des intervalles forment un *segment* de la suite bien ordonnée proposée (1). Il résulte de là que les facteurs de  $P_{n'}^{(\alpha^*)}$  (qui sont des ensembles  $E_{\alpha_i}$  et  $CE_{\alpha_j}$ ,  $\alpha_i < \alpha$ ,  $\alpha_j < \alpha$ ) sont tous ou bien des intervalles, ou bien des points individuels, ou bien des sommes finies d'intervalles et de points individuels en nombre au plus *quatre*. Pour éviter des difficultés secondaires nous



faisons une convention considérer chaque point pris seul comme un intervalle dégénéré. Avec cette convention, tout produit fini des facteurs dont chacun est évidemment une somme finie d'intervalles, est lui-même une somme finie d'intervalles. Nous concluons de là finalement *qu'on sait mettre effectivement*  $P_{n'}^{(\alpha^*)} E_\alpha$  *sous la forme d'une somme stricte fini d'intervalles.*

**Deuxième cas :**  $\mathfrak{S}_\beta = CP_{I \mu}^{(\alpha)}$ . D'après l'égalité (2<sub>1</sub>) nous avons

$$CP_{I \mu}^{(\alpha)} = C(P_{m'}^{(\alpha^*)} CE_\alpha) = CP_{m'}^{(\alpha^*)} + E_\alpha.$$

Nous avons vu que  $P_{m'}^{(\alpha^*)}$  est une somme finie d'intervalles; il en est de même pour  $CP_{m'}^{(\alpha^*)}$ . Nous concluons de là *qu'on sait mettre effectivement l'ensemble*  $CP_{m'}^{(\alpha^*)} + E_\alpha$  *sous la forme d'une somme stricte finie d'intervalles.*

**Troisième cas :**  $\mathfrak{S}_\beta = P_S^{(\alpha)}$ . D'après l'égalité (1<sub>1</sub>) et d'après l'hypothèse  $E_\alpha = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots$  nous pouvons écrire :

$$P_S^{(\alpha)} = P_{n'}^{(\alpha)} E_\alpha = P_{n'}^{(\alpha^*)} (E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots)$$

où  $\alpha^* < \alpha$  et  $\alpha_i < \alpha$ . Si nous remplaçons la somme large  $E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots$  par la somme stricte:  $E_{\alpha_1} + CE_{\alpha_1} E_{\alpha_2} + \dots + CE_{\alpha_1} CE_{\alpha_2} \dots CE_{\alpha_{n-1}} E_{\alpha_n} + \dots$ , et si nous nous rappelons l'égalité (3<sub>1</sub>), nous avons

$$P_S^{(\alpha)} = P_{n'}^{(\alpha^*)} \sum_{n=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (CE_{\alpha_i} E_{\alpha_n}) = P_{n'}^{(\alpha^*)} \sum_{i, j_1} P_{m_{i_1}'}^{(\alpha_{j_1}^*)} = \sum_{i, j} P_{m_i'}^{(\alpha_j^*)} = \sum_n \mathfrak{S}_{\beta_n}$$

où nous avons sûrement  $\beta_n < \beta$ , puisque  $\alpha_j < \alpha$ .

**Quatrième cas :**  $\mathfrak{S}_\beta = P_P^{(\alpha)}$ . D'après les égalités (2<sub>1</sub>) et (3<sub>1</sub>), et d'après l'hypothèse que  $E_\alpha = E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \dots$ , en remplaçant la somme large par la somme stricte, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P_P^{(\alpha)} &= P_{m'}^{(\alpha^*)} CE_\alpha = P_{m'}^{(\alpha^*)} C(E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \dots) = P_{m'}^{(\alpha^*)} (CE_{\alpha_1} + CE_{\alpha_2} + \dots) = \\ &= P_{m'}^{(\alpha^*)} \sum_{n=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (E_{\alpha_i} CE_{\alpha_n}) = P_{m'}^{(\alpha^*)} \sum_{i, j_1} P_{m_{i_1}'}^{(\alpha_{j_1}^*)} = \sum_{i, j} P_{m_i'}^{(\alpha_j^*)} = \sum_n \mathfrak{S}_{\beta_n} \end{aligned}$$

où nous avons sûrement  $\beta_n < \beta$ .

**Cinquième cas:**  $\mathfrak{E}_\beta = CP_p^{(\alpha)}$ . D'après les égalités (1<sub>1</sub>) et (3<sub>1</sub>) et d'après l'hypothèse que  $E_\alpha = E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \dots$ , en remplaçant la somme large par la somme stricte, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} CP_p^{(\alpha)} &= C(P_{n'}^{(\alpha^*)} E_\alpha) = C(P_{n'}^{(\alpha^*)} E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \dots) = \\ &= CP_{n'}^{(\alpha^*)} + \sum_{n=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (E_{\alpha_i} C E_{\alpha_n}) = CP_{n'}^{(\alpha^*)} + P_{n'}^{(\alpha^*)} \sum_{i_1, j_1} P_{m_{i_1}^{(j_1)^*}} = \\ &= CP_{n'}^{(\alpha^*)} + \sum_{i_1, j_1} P_{m_{i_1}^{(j_1)^*}} = \sum_{i, j} P_{m_i^{(j)^*}} = \sum_n \mathfrak{E}_{\beta_n} \end{aligned}$$

où nous avons sûrement  $\beta_n < \beta$ .

**Sixième cas:**  $\mathfrak{E}_\beta = CP_S^{(\alpha)}$ . D'après les égalités (2<sub>1</sub>) et (3<sub>1</sub>), l'hypothèse que  $E_\alpha = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots$ , en remplaçant la somme large par la somme stricte, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} CP_S^{(\alpha)} &= C(P_{m'}^{(\alpha^*)} C E_\alpha) = C[P_{m'}^{(\alpha^*)} C(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots)] = \\ &= CP_{m'}^{(\alpha^*)} + E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \dots = CP_{m'}^{(\alpha^*)} + \sum_{n=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (C E_{\alpha_i} E_{\alpha_n}) = \\ &= CP_{m'}^{(\alpha^*)} + P_{m'}^{(\alpha^*)} \sum_{i_1, j_1} P_{m_{i_1}^{(j_1)^*}} = CP_{m'}^{(\alpha^*)} + \sum_{i_1, j_1} P_{m_{i_1}^{(j_1)^*}} = \sum_{i, j} P_{m_i^{(j)^*}} = \sum_n \mathfrak{E}_{\beta_n} \end{aligned}$$

où nous avons sûrement  $\beta_n < \beta$ .

## II. $\mathfrak{E}_\beta$ appartient à $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ .

Nous avons ici encore les six cas à considérer. Néanmoins, nous pouvons éviter les considérer en détails, si nous remarquons que tous les termes de  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$  sont les complémentaires des termes de  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$ :

$$\mathfrak{S}_n''^{(\alpha)} = C\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$$

donc

$$\mathfrak{E}_\beta = C\mathfrak{E}_{\beta'}.$$

Puisque la suite  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$  précède la suite  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ , nous avons sûrement  $\beta' < \beta$ .

Voici la conclusion à laquelle nous arrivons: le terme  $\mathfrak{E}_\beta$  de la suite (2),  $\beta \leq \tau$ , étant un ensemble de la classe  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ , appartient nécessairement ou bien à  $\mathfrak{S}'^{(\alpha)}$ , ou bien à  $\mathfrak{S}''^{(\alpha)}$ . Dans le premier cas, le terme  $\mathfrak{E}_\beta$  est une *somme stricte* ( $S'$ ) d'ensembles de certaines classe  $\alpha^* < \alpha$ . Dans le second cas, le terme  $\mathfrak{E}_\beta$  est un *complémentaire* ( $C$ ) d'un ensemble correspondant précédent.

Remarquons, enfin que nous avons déduit de la suite bien ordonnée donnée (1):

$$(1) \quad E_0, E_1, E_2, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots / E$$

définissant l'ensemble considéré  $E$  au moyen de  $(S)$  et  $(P)$ , la suite bien ordonnée (2):

$$(2) \quad \mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \dots, \mathfrak{E}_\beta, \dots \dots / E$$

définissant l'ensemble  $E$  au moyen de  $(S')$  et  $(C)$ , *directement*, et *sans faire intervenir l'induction transfinie*. Mais nous avons utilisé l'énumération de (1) au moyen des entiers positifs. Or, la démonstration du théorème I n'exige nullement une telle énumération. Le problème donc de savoir si l'on peut déterminer effectivement la suite bien ordonnée (2) n'utilisant ni l'induction transfinie ni l'énumération de (1) au moyen des entiers positifs — reste entier.

---

Stefan Mazurkiewicz.

### O pewnem zagadnieniu p. Borsuka.

Komunikat przedstawiony dnia 31 maja 1933 r.

#### Streszczenie.

W pracy niniejszej dowodzę następującego twierdzenia:

Jeżeli kontynuuum  $C$  rozcina  $n$ -wymiarową przestrzeń euklidesową i jeżeli istnieją dowolnie małe przekształcenia, przekształcające  $C$  na zbiór nie mający z  $C$  punktów wspólnych, wówczas  $C$  rozcina przestrzeń na 2 składowe i jest wspólnym brzegiem każdej z nich. Stąd wynika, że  $C$  jest  $n-1$ -wymiarową rozmaistością Cantora.

Twierdzenie powyższe zawiera rozwiązanie zagadnienia postawionego przez p. Borsuka. (Fund. Math. XX str. 285 Probl. 55).

Stefan Mazurkiewicz.

### Sur un problème de M. Borsuk.

Note présentée à la séance du 31 Mai 1933.

1. Cette Note contient la solution (affirmative) du problème suivant posé par M. Borsuk <sup>1)</sup>:

*Un continu C situé dans  $R_n$  (espace euclidien à  $n$ -dimensions), coupant  $R_n$  et admettant des transformations arbitrairement petites <sup>2)</sup> en des ensembles disjoints avec lui, est — il nécessairement une multiplicité cantorienne à  $n-1$  dimensions?*

2. **Lemme.** *Le transformé d'un ensemble fermé, borné E, coupant  $R_n$  entre les points  $a_1, a_2$  par toute transformation suffisamment petite coupe  $R_n$  entre  $a_1$  et  $a_2$  <sup>3)</sup>.*

**Démonstration.** Soit  $p_0 \in R_n$  un point fixe;  $S_{n-1}$  la surface sphérique de centre  $p_0$  et de rayon 1;  $t(x, p)$  — la translation qui amène  $p$  en  $p_0$  ( $x \in R_n, p \in R_n$ );  $\varphi(x, p)$  — la fonction <sup>4)</sup>:

$$(1) \quad \varphi(x, p) = S_{n-1} \times \overrightarrow{p_0 t(x, p)} \quad x \in R_n - (p)$$

$b \neq a_1$  un point situé dans la région-composante de  $R_n - E$  contenant  $a_1$ ;  $\psi(x)$  l'inversion de centre  $b$ ;  $G$  — la région-composante non-bornée de  $R_n - \psi(E)$ . On a:

$$(2) \quad \psi(a_1) \in G$$

$$(3) \quad \psi(a_2) \text{ non } \in G.$$

D'après (3) la transformation de  $\psi(E)$  en  $S_{n-1}$  effectuée par  $\varphi(x, \psi(a_2))$  est essentielle. Soit  $f(x)$  une transformation de  $E$  tellement petite que: 1) la transformation de  $\psi(f(E))$  effectuée par  $\varphi(x, \psi(a_2))$  soit essentielle <sup>5)</sup>, 2)  $G_1$  désignant la région-

<sup>1)</sup> Fund. Math. XX p. 285. Problème 54.

<sup>2)</sup> La notion de petite transformation — d'après M. Alexandroff (kleine Transformation) comp. Annals of Math. Sec. Series 30 p. 102—103.

<sup>3)</sup> comp. Borsuk-Ulam: Math. Ann. 108 (1933). p. 311—318.

<sup>4)</sup> pour  $a \in R_n, b \in R_n, \overrightarrow{ab}$  désigne la demi-droite d'origine  $a$  passant par  $b$ .

<sup>5)</sup> Il suffit de remarquer que  $\psi(f(E))$  s'obtient de  $\psi(E)$  par une transformation, qui est arbitrairement petite, si  $f(x)$  est assez petite.

composante non bornée de  $R_n - \psi(f(E))$ , on ait :

$$(4) \quad \psi(a_1) \in G_1.$$

Posons  $H = R_n - G_1$ ;  $H$  est borné, fermé et ne coupe pas  $R_n$ , donc pour chaque  $y \in G_1$  la transformation de  $H$  en  $S_{n-1}$  effectuée par  $\varphi(x, y)$  n'est pas essentielle<sup>1)</sup>. Comme  $\psi(f(E)) \subset H$  la transformation de  $\psi(f(E))$  en  $S_{n-1}$  effectuée par  $\varphi(x, y)$  n'est pas non plus essentielle si  $y \in G_1$ . Donc :

$$(5) \quad \psi(a_2) \text{ non } \in G_1.$$

D'après (4) et (5)  $\psi(f(E))$  est une coupure entre  $\psi(a_1)$  et  $\psi(a_2)$ , donc  $f(E)$  — une coupure entre  $a_1$  et  $a_2$  c. q. f. d.

**3. Théorème.** *Un continu  $C$ , coupant  $R_n$  et admettant des transformations arbitrairement petites en des ensembles disjoints avec lui coupe  $R_n$  en deux régions-composantes, dont il constitue la frontière commune.*

Il en résulte immédiatement que  $C$  est une multiplicité cantorienne à  $n-1$  dimensions.

**Démonstration.** Soient  $b_1, b_2$  deux points situés dans des régions-composantes différentes de  $R_n - C$ . Soit  $C_1$  une coupure irréductible<sup>2)</sup> entre  $b_1$  et  $b_2$ , contenue dans  $C$ . Je dis que  $C = C_1$ . En effet supposons que  $C - C_1 \neq 0$  et soit  $z \in C - C_1$ . Evidemment on peut supposer que la région-composante  $G_1$  de  $R_n - C_1$  qui contient  $b_1$  ne contient pas  $z$ , c.-à-d. que  $C_1$  est une coupure entre  $b_1$  et  $z$ . Soit  $f(x)$  une transformation de  $C$  tellement petite et telle que : 1)  $C \times f(C) = 0$ ; 2)  $f(C_1)$  soit une coupure entre  $b_1$  et  $z$  (comp. le lemme); 3)  $f(z)$  et  $z$  soient contenus dans la même région-composante de  $R_n - f(C_1)$  et de  $R_n - C_1$ . Il résulte de 3) que  $C_1$  est une coupure entre  $b_1$  et  $f(z)$ , donc  $f(z) \text{ non } \in G_1$ , donc,  $f(C)$  étant connexe on aura d'après 1):  $f(C) \times G_1 = 0$  et  $f(C) \times [G_1 + C] = 0$ . Mais  $G_1 + C$  est un continu contenant  $z$  et  $b_1$ , donc  $f(C)$  et à fortiori  $f(C_1)$  n'est pas une coupure entre  $z$  et  $b_1$ , en contradiction avec 2). Donc  $C = C_1$ .

<sup>1)</sup> Borsuk-Ulam l. c.

<sup>2)</sup> Mazurkiewicz: Fund. Math. I p. 62 ss.

On voit que  $C$  est une coupure irréductible entre tout couple de points entre lesquels il coupe  $R_n$ ; il en résulte que  $C$  est la frontière de toute région-composante de  $R_n - C$ .

Supposons maintenant que  $R_n - C$  contient trois régions-composantes:  $G_1, G_2, G_3$ . Soit  $c_i \in G_i, i=1, 2, 3$ . Considérons une transformation  $f(x)$  de  $C$  telle que: 1)  $f(C) \times C = 0$ ; 2)  $f(C)$  soit une coupure entre  $c_i$  et  $c_j, i, j=1, 2, 3, i \neq j$ .  $f(C)$  étant connexe et disjoint avec  $C$  est contenu dans une seule région-composante de  $R_n - C$ . Donc on a au moins deux des trois relations  $G_i \times f(C) = 0, i=1, 2, 3$ ; on peut supposer que  $G_1 \times f(C) = G_2 \times f(C) = 0$ . Alors:  $(C + G_1 + G_2) \times f(C) = 0$  et  $C + G_1 + G_2$  est un continu contenant  $c_1$  et  $c_2$ . Donc  $f(C)$  ne coupe pas  $R_n$  entre  $c_1$  et  $c_2$ , contrairement à 2). Le théorème est ainsi démontré.

---

J. Marcinkiewicz.

### O pewnej klasie funkcji rzeczywistych i ich szeregach Fouriera.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 31 maja 1933 r.

Streszczenie.

Autor rozważa funkcje rzeczywiste o wahanii skończonym rzędu  $p$  ( $p > 0$ ) w przedziale  $[0, 2\pi]$ , wyróżnione po raz pierwszy przez Wienera. Szeregi Fouriera tych funkcji są wszędzie zbieżne, a w szczególności — gdy funkcja jest nadto perjodyczna i ciągła — zbieżne jednostajnie. Spółczynniki Fouriera są rzędu  $O(n^{-1/p})$ . Wyniki te stanowią uogólnienie pewnych twierdzeń Wienera oraz pewnego dawniejszego twierdzenia dotyczącego rzędu wzrastania spółczynników Fouriera funkcji spełniających warunek Lipschitza rzędu  $\alpha > 0$ . Wreszcie, podane jest kryterjum zbieżności szeregów sprzężonych z szeregami funkcji o wahanii skończonym rzędu  $p > 0$ .

J. Marcinkiewicz.

### On a Class of Functions and their Fourier Series.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 31 mai 1933.

1. Let  $f(x)$  be a function defined in an interval  $I = (a, b)$  and let  $\Gamma$  denote an arbitrary system of points  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Let, for a given  $p > 0$ ,

$$\sigma_p(f; \Gamma) = \sigma_p(f; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p$$

$$V_p(f) = V_p(f; I) = \text{Upper bound } \sigma_p(f; \Gamma).$$

If  $V_p(f)$  is finite, we shall say that  $f$  is, in the interval  $I$ , of bounded variation of order  $p$  and shall write:  $f \in V_p(a, b)$ , or simply  $f \in V_p$ .

Some remarks are immediate:

$\alpha$ ) If  $f_1$  and  $f_2$  belong to  $V_p(a, b)$ , so does  $f_1 + f_2$ .

$\beta$ ) If  $f$  satisfies Lipschitz condition of order  $\alpha$ , then  $f \in V_{1/\alpha}(a, b)$ <sup>1)</sup>.

$\gamma$ ) If  $f \in V_{p_1}(a, b)$ , then  $f$  is bounded and so  $f \in V_p(a, b)$  for every  $p_1 > p$ .

Functions of the class  $V_p$  seem to have been considered for the first time by N. Wiener<sup>2)</sup>. In this paper I generalize some of his results.

2. **Lemma 1.** Let

$$E = E \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x+b) - f(x)|^p}{b} > \lambda > 0, x \in I \right\}. \text{ Then}$$

$$(1) \quad V_p(f; I) \geq \lambda |E| \text{ } ^3).$$

The idea of the proof is very familiar. To every  $x \in E$  there corresponds a sequence of numbers  $b_x$  tending to 0 and such that  $|f(x+b_x) - f(x)| > \lambda |b_x|$ . Applying Vitali's well known the-

<sup>1)</sup> See also Theorem 4 below.

<sup>2)</sup> N. Wiener, The Quadratic Variation of a Function and its Fourier Coefficients, Publications of the Massachusetts Institute of Technology.

<sup>3)</sup> Given a property  $P$ , we denote by  $E \{P\}$  the set of  $x$  that satisfy this property.  $|E|$  denotes the Lebesgue measure of  $E$ .

orem, we can, for a given  $\varepsilon > 0$ , find a finite system of non overlapping intervals  $(x_1, x_1 + b_{x_1}), (x_2, x_2 + b_{x_2}), \dots, (x_n, x_n + b_{x_n})$  such that  $|b_{x_1}| + |b_{x_2}| + \dots + |b_{x_n}| \geq |E| - \varepsilon$ . But, obviously,

$$V_p(f; I) \geq \sum_{k=1}^n |f(x_k + b_{x_k}) - f(x_k)|^p \geq \lambda (|E| - \varepsilon),$$

and  $\varepsilon$  being arbitrary, we get the desired inequality (1). Considering large values of  $\lambda$  we deduce easily

**Theorem 1.** Let  $f \in V_p(a, b)$ . Then, for almost every  $x$  in  $(a, b)$ , we have <sup>1)</sup>

$$(2) \quad \overline{\lim}_{b \rightarrow 0} \frac{|f(x+b) - f(x)|}{|b|^{1/p}} < \infty.$$

Theorem 1 is a corollary of the following more general theorem.

**Theorem 2.** Let  $\varphi(x)$  denote the left hand side of the inequality (2). Then  $\varphi^p(x)$  is summable and

$$(3) \quad \int_a^b \varphi^p(x) dx \leq V_p(f; a, b).$$

It is obvious that, once Lemma 1 has been proved, it remains valid if in the definition of the set  $E$  we replace the inequality  $\overline{\lim} \dots > \lambda$  by  $\overline{\lim} \dots \geq \lambda$ . Now let  $\varphi_N(x) = \text{Min}(\varphi(x), N)$  where  $N$  is an arbitrary but fixed positive number. Let  $\varepsilon$  be an arbitrary (small) number for which there exists an integer  $n$  such that  $n\varepsilon = N$ , and let  $E_k = E[k\varepsilon \leq \varphi_N < (k+1)\varepsilon]$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ).

For every  $k=0, 1, 2, \dots, n$  we can find a closed set  $F_k \subset E_k$  such that

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n |E_k - F_k| < \varepsilon.$$

Moreover the distance of any of these closed sets being positive we can cover  $F_k$  by a finite system  $S_k$  of intervals, such that no two intervals either of the same or of different systems overlap. In virtue of (4) we have

<sup>1)</sup> Wiener proves (2) only for  $p_1 > p$ .



$$(5) \quad \int_a^b \varphi_N^p dx \leq N\varepsilon + \sum_{k=0}^n \int_{F_k} \varphi_N dx \leq N\varepsilon + \sum_{k=0}^n (k+1)\varepsilon |F_k| \leq \\ \leq (N+b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^n k\varepsilon \cdot |F_k|.$$

But, by Lemma 1, the expression  $k\varepsilon |F_k|$  does not exceed the sum of variations (of order  $p$ ) of  $f$ , extended over all the intervals forming  $S_k$ , and so the last sum does not exceed  $V_p(f; a, b)$ . As  $\varepsilon$  may be chosen arbitrarily small, we deduce from (5) the inequality (3) with  $\varphi_N$  instead of  $\varphi$ . Making  $N$  tend to  $\infty$ , we obtain Theorem 2.

3. For the sake of applications it will be convenient to take as  $(a, b)$  the interval  $(0, 2\pi)$  and to consider functions  $f$  with the period  $2\pi$ . In particular, we shall have  $f(0) = f(2\pi)$ .

**Theorem 3.** If  $f \in V_p(0, 2\pi)$ , ( $p \geq 1$ ), the Fourier coefficients of  $f$  are  $O(n^{-1/p})^1$ .

Proof

$$c_n = a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{int} dt \\ 2\pi |c_n| \leq \int_0^{2\pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| dt$$

and it suffices to prove the following

**Theorem 4.** If  $f \in V_p(0, 2\pi)$ , then, for  $\delta \rightarrow +0$ ,

$$\int_0^{2\pi} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt = O(\delta)$$

and, *a fortiori*, for  $p > 1$ ,

$$\int_0^{2\pi} |f(t+\delta) - f(t)| dt = O(\delta^{1/p}).$$

<sup>1)</sup> This theorem generalizes the well known result that, if  $f$  satisfies Lipschitz condition of order  $\alpha$ , the Fourier coefficients of  $f$  are  $O(n^{-\alpha})$ .

In fact, let  $2\pi/(k+1) < \delta \leq 2\pi/k$ , where  $k$  is a positive integer. Then

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt &\leq \sum_{\nu=0}^k \int_{\nu\delta}^{(\nu+1)\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt = \\ &= \int_0^{\delta} \sum_{\nu=0}^k \left| f\left(t+\delta + \frac{2\pi}{k}\nu\right) - f\left(t + \frac{2\pi}{k}\nu\right) \right|^p dt \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} V_p(f; 0, 4\pi) dt = O(\delta). \end{aligned}$$

4. **Lemma 2.** If  $f \in V_p$ , then, for any  $x_0$  and any  $\varepsilon > 0$ , there exists a number  $\sigma$  such that for every  $0 < \delta < \sigma$  we have  $V_p(f; x_0 + \delta, x_0 + \sigma) \leq \varepsilon$ .

In fact, otherwise we should have, for a  $x_0$  and an  $\varepsilon > 0$ , a sequence of non overlapping intervals  $I_n$  tending to  $x_0$  such that  $V_p(f; I_n) > \varepsilon$ . But, for every  $N$ ,  $V_p(f; 0, 2\pi) \geq \sum_{n=1}^N V_p(f; I_n) \geq N\varepsilon$ , hence  $V_p(f; 0, 2\pi) = \infty$ , which contradicts to our hypothesis.

**Theorem 5.** If  $f \in V_p$  the Fourier series of  $f$  converges everywhere <sup>1)</sup>.

As the discontinuities of  $f$  are, if any, of the first kind, we may assume that, everywhere,  $2f(x) = f(x+0) + f(x-0)$ . The expression

$$\varphi_x(\alpha) = f(x+\alpha) + f(x-\alpha) - 2f(x),$$

considered as a fonction of  $\alpha$ , belongs to  $V_p$  and is continuous for  $\alpha=0$ . Using the well known criterion of Lebesgue, it is enough to show that the integral

$$J_n = \int_{\pi/n}^{\pi} [\varphi_x(\alpha) - \varphi_x(\alpha + \pi/n)] \frac{\sin n\alpha}{\alpha}$$

tends to 0 wit  $1/n$ . Let  $0 < \rho < \pi$  and  $1/p + 1/p' = 1$ . Then

<sup>1)</sup> In his paper referred to Wiener proves the convergence everywhere only when  $p \leq 2$  and almost everywhere in the general case.

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \int_{\pi/n}^{\rho} \left| \varphi_x(\alpha) - \varphi_x\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{d\alpha}{\alpha} + o(1) \leq \\ &\leq \left( \int_{\pi/n}^{\rho} |\varphi_x(\alpha) - \varphi_x(\alpha + \pi/n)|^p d\alpha \right)^{1/p} \left( \int_{\pi/n}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{p'}} \right)^{1/p'} + o(1). \end{aligned}$$

Arguing as in the proof of Theorem 4, we see that the last term but one does not exceed

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^{\pi/n} V_p(\varphi_x; \pi/n, \rho + \pi/n) d\alpha \right]^{1/p} \left( \int_{\pi/n}^{\infty} \alpha^{-p'} d\alpha \right)^{1/p'} + o(1) \leq \\ \leq (p' - 1)^{-1/p'} V_p(\varphi; \pi/n, \rho + \pi/n) + o(1) \end{aligned}$$

and so, by Lemma 2, is very small if  $\rho$  is small enough.

5. **Lemma 3.** If  $f \in V_p(0, 2\pi)$  and  $f(x)$  is continuous everywhere, then, for an arbitrary  $\varepsilon > 0$ , there exists an  $\eta$ , such that

$$V_p(f; I) \leq \varepsilon \quad \text{if} \quad |I| < \eta.$$

Supposing the contrary, we could, for an  $\varepsilon > 0$ , find a sequence of intervals  $I_n$ ,  $|I_n| < 1/n$ , such that  $V_p(f; I_n) > \varepsilon$ . Let  $x_n$  be the middle point of  $I_n$  and  $\xi$  a point of accumulation of  $\{x_n\}$ . It follows that, for every  $\sigma > 0$ , we have

$$(6) \quad V_p(f; \xi - \sigma, \xi + \sigma) > \varepsilon.$$

On the other hand, if  $\sigma$  is sufficiently small and  $0 < \delta < \sigma$  then, by Lemma 3,  $V_p(f; \xi + \delta, \xi + \sigma) \leq \varepsilon/4$ ,  $V_p(f; \xi - \sigma, \xi - \delta) \leq \varepsilon/4$ . We may also impose upon  $\sigma$  the condition that  $|f(\xi + b) - f(\xi)|^p \leq \varepsilon/4$  for  $0 \leq |b| \leq \sigma$ . Let  $x_0 = \xi - \sigma < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \xi + \sigma$  be an arbitrary subdivision of the interval  $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$  and let  $x_k < \xi < x_{k+1}$ . Then

$$\begin{aligned} \sigma_p(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &\leq \sigma_p(f; x_0, x_1, \dots, x_k) + |f(\xi) - f(x_k)|^p + \\ &\quad + |f(x_{k+1}) - f(\xi)|^p + \sigma_p(f; x_{k+1}, \dots, x_n) \leq \\ &\leq V_p(f; \xi - \sigma, \xi - \delta_1) + 2 \cdot \varepsilon/4 + V_p(f; \xi + \delta_2, \xi + \sigma) \leq \varepsilon^1 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> If it happened *e. g.* that  $\xi = x_k$  we should consider separately, instead of  $(x_k, \xi)$ ,  $(\xi, x_{k+1})$ , the intervals  $(x_{k-1}, x_k)$  and  $(x_k, x_{k+1})$ .

where  $\xi - \delta_1 = x_k$ ,  $\xi + \delta_2 = x_{k+1}$ . Last inequality contradicts to (6) and the lemma follows.

**Theorem 6.** If  $f(x)$  is continuous and belongs to  $V_p(0, 2\pi)$ , the Fourier series of  $f(x)$  converges uniformly.

The proof is analogous to that of Theorem 5, but now, by Lemma 3, the Lebesgue criterion is satisfied uniformly.

**7. Theorem 7.** If  $f \in V_p(0, 2\pi)$ , a necessary and sufficient condition for the convergence, at  $x = x_0$ , of the series conjugate to the Fourier series of  $f$  is the existence of the limit

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 + t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} dt.$$

For  $p=1$  this is the well known Young's theorem<sup>1)</sup>. The idea of the proof in the general case consists in combining Young's argument with that used in the proof of Theorem 5. Let  $\psi(t) = \psi_{x_0}(t) = f(x_0 - t) - f(x_0 + t)$ . We may assume from the beginning that  $\psi(+0) = 0$ , for otherwise, both the series and the integral are known to diverge<sup>2)</sup>. Consequently, denoting by  $\bar{s}_n$  the partial sums of the conjugate series we have

$$\begin{aligned} \bar{s}_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/n} \psi(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin t/2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \psi(t) \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + o(1). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> See e. g. Rogosinski, *Fouriersche Reihen*, (Sammlung Göschel), 1930, 1022 p. 70.

<sup>2)</sup> See Rogosinski, loc. cit. p. 69.

Denote the last integral by  $P_n = P_n' + P_n''$  where  $P_n'$  and  $P_n''$  are the integrals extended respectively over  $(\pi/n, \rho)$  and  $(\rho, \pi)$ . If  $\rho$  is small enough,  $P_n'$  is small (the argument is that of Theorem 5) and, once  $\rho$  has been fixed,  $P_n'' \rightarrow 0$ . Hence  $P_n \rightarrow 0$ . To make the proof complete, it is sufficient to notice that, if  $\pi/(n+1) < \varepsilon < \pi/n$ , the integral of  $\psi(t) \frac{1}{2} \operatorname{ctg} t/2$  extended over the interval  $(\pi/n, \pi)$  differs from the integral (5) by a quantity tending to zero.

Godofredo García. (Lima—Perú).

**Równania Lagrange'a i zasada Hamiltona  
w mechanice klasycznej oraz w mechanice  
względnościowej.**

Komunikat przedstawiony dn. 28 czerwca 1933 r.

**Las ecuaciones de Lagrange y el principio  
de Hamilton en la mecánica clásica y en la mecánica  
relativista.**

Mémoire présenté dans la séance du 28 juin 1933.

Cuando se considera en la mecánica clásica que un punto material se mueve en un campo conservativo de potencial unitario  $V_n$

$$(1) \quad V_n = \pm \sum_1^n \frac{u_i}{r^i}$$

en la que  $u_i$  par los valores que tome  $i=1, 2, 3, \dots, n$  representan parámetros por determinar y que para  $n=1$

$$(2) \quad V_1 = \pm \frac{u_1}{r}$$

es el potencial newtoniano siendo

$$u_1 = f u_0$$

$f$  es la constante de la gravitación universal y  $u_0$  la masa central.

La ecuación fundamental de la mecánica como sabemos es

$$(3) \quad m_0 \cdot J = F$$

en la cual  $m_0$  es la masa intrínseca del punto material,  $J$  es la aceleración total y  $F$  la fuerza total, como la fuerza puede ser natural ó conservativa podremos en general escribir

$$F = F_n + F_c$$

por lo tanto

$$(4) \quad m_0 J = F_n + F_c.$$

Sea  $M$  la posición del punto material en el tiempo  $t$  respecto de un observador colocado en el origen ó punto de referencia 0,  $M=0$  determina la posición,  $v = \frac{dM}{dt}$  la velocidad

vectorial y  $J = \frac{d^2 M}{dt^2}$  la aceleración vectorial en dicho instante. Como la fuerza  $F_c$  se deriva de un potencial  $V_n$  siendo

$$(5) \quad \bar{V}_n = m_0 V_n \quad \text{será} \quad F_c = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial M}$$

entonces la ecuación (4) toma la forma

$$(6) \quad m_0 \frac{d^2 M}{dt^2} = F_n - \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M}.$$

Ahora como  $\bar{V}_n$  depende de la posición del punto por intermedio de la distancia  $r$  de la posición  $M$  al punto  $C$  elegido se tendra

$$(7) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial M} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial M}.$$

Consideremos el vector unitario ó el versor que mide el cambio de dirección del movimiento, expresado por  $\frac{\partial M}{\partial s}$  en la

cual  $\partial M$  mide el cambio de posición elemental y rectilínea del punto  $M$  y  $\partial s$  el arco elemental de curva recorrido en el mismo instante multiplicando escalarmente la ecuación (6) por  $\frac{\partial M}{\partial s}$  se tiene

$$(8) \quad m_0 J \times \frac{\partial M}{\partial s} = \left( F_n - \frac{\partial \bar{V}}{\partial M} \right) \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

denominando

$$(9) \quad z = m_0 J \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

$$(10) \quad Q_0 = F_n \times \frac{\partial M}{\partial s} = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial M} \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

$$(11) \quad Q = F_c \times \frac{\partial M}{\partial s} + Q_0$$

se tendrá simplemente

$$(12) \quad z = Q$$

que es la primera forma de la ecuación de Lagrange.

La expresión general de la energía cinética es

$$(13) \quad T = \frac{1}{2} m_0 M' \times M'$$

en la que

$$(14) \quad M' = \frac{dM}{dt} = \frac{\partial M}{\partial s} s' + \frac{\partial M}{\partial t}$$

diferenciando respecto de  $s$

$$(15) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = m_0 M' \times \frac{\partial M'}{\partial s}$$

diferenciando respecto de  $s'$

$$(16) \quad \frac{\partial T}{\partial s'} = m_0 M' \times \frac{\partial M'}{\partial s'}$$

de la ecuación (14) se deduce facilmente que

$$\frac{\partial M'}{\partial s'} = \frac{\partial M}{\partial s}$$

luego

$$(17) \quad \frac{\partial T}{\partial s'} = m_0 M' \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

diferenciando ésta última con respecto al tiempo  $t$  se tiene

$$(18) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial s'} \right] = m_0 M' \times \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial s} + m_0 \frac{dM'}{dt} \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

pero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{dM}{dt} = \frac{\partial M'}{\partial s}$$

de manera que

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial s'} \right] = m_0 M' \times \frac{\partial M'}{\partial s} + m_0 \frac{dM'}{dt} \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

restando las ecuaciones (19) y (15) se obtiene

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial s'} \right] - \frac{\partial T}{\partial s} = z$$

desde luego la ecuación (12) podrá tomar la forma explícita

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial s'} \right] - \frac{\partial T}{\partial s} = Q$$

es la segunda forma de la ecuación de Lagrange.

Denominando  $L_n$  la función

$$(22) \quad L_n = T + \bar{V}_n$$

define la función lagrangiana generalizada por lo tanto la ecuación de Lagrange se puede escribir

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_n}{\partial s'} \right] - \frac{\partial L_n}{\partial s} = F_n \times \frac{\partial M}{\partial s}$$

que es la otra forma de la ecuación de Lagrange en la mecánica de Newton y de Galileo.

Pasaremos ahora á tratar la cuestión en la mecánica relativista de Einstein.

Si denominamos  $c$  la velocidad máxima conocida (velocidad de la luz en el vacío) la función de Lagrange se puede escribir así

$$(24) \quad \frac{1}{2} m_0 c^2 - L_n = \frac{1}{2} m_0 c^2 \left[ 1 - \frac{M' \times M'}{c^2} - \frac{2 V_n}{c^2} \right]$$

de la cual se deduce

$$(25) \quad \sqrt{1 - \frac{2 L_n}{m_0 c^2}} = \sqrt{1 - \frac{M' \times M'}{c^2} - \frac{2 V_n}{c^2}}$$

aproximadamente se tiene

$$(26) \quad m_0 c^2 - L_n = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{M' \times M'}{c^2} - \frac{2 V_n}{c^2}}$$

denominando

$$(27) \quad K_n = \sqrt{1 - \frac{M' \times M'}{c^2} - \frac{2 V_n}{c^2}}$$



y

$$(28) \quad \bar{K}_n = m_0 K_n \quad \text{asi como} \quad \pm L_n^* = m_0 c^2 - L_n$$

forma que toma la función de Lagrange en la teoría relativista, tendremos

$$(29) \quad \pm L_n^* = c^2 \bar{K}_n$$

según sea el carácter espacial ó temporal de la métrica.

Por consiguiente la expresión variacional de Hamilton afectará la forma

$$(30) \quad \delta \int L_n^* . dt = 0 \quad \text{ó bien} \quad \delta \int K_n . dt = 0 .$$

Ahora como la forma cuadrática diferencial es susceptible de dar determinaciones positivas ó negativas cuando se presenta en un universo cuatrodimensional, es decir en forma cuaternia la métrica será

$$(31) \quad ds^2 = (c^2 - 2V_n) dt^2 - dl_0^2$$

entonces

$$(32) \quad \delta \int ds = 0$$

es la ecuación de la geodésica.

La ecuación (29) se puede expresar atendiendo al carácter espacial de la métrica así

$$(33) \quad L_n^* = L_n - m_0 c^2 = -m_0 c^2 K_n$$

ó simplemente

$$(34) \quad L_n^* = -c^2 \bar{K}_n$$

es la estructura de la función de Lagrange en la teoría de la relatividad y que ha sido deducida por el profesor T. Levi Civita.

Diferenciando la anterior respecto de  $s$  y de  $s'$

$$(35) \quad \frac{\partial L_n^*}{\partial s} = -c^2 \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial s}$$

$$(36) \quad \frac{\partial L_n^*}{\partial s'} = -c^2 \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial s'}$$

y como sabemos que  $\frac{\partial M'}{\partial s'} = \frac{\partial M}{\partial s}$  la ecuación (23) tomará la forma

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M'} \right] = - \frac{F_n}{c^2}.$$

Ahora como

$$(38) \quad \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M'} = - \frac{m_0}{c^2 K_n} M'$$

se tendrá

$$(39) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0}{K_n} \cdot M' \right] = F_n$$

en la cual la masa del punto material ya no es constante sino variable expresada por

$$(40) \quad m = \frac{m_0}{K_n} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{M' \times M'}{c^2} - \frac{2 V_n}{c^2}}}$$

se ve que  $m$  depende de la velocidad  $M'$  y del campo de fuerzas de potencial  $V_n$

$$(41) \quad \frac{d}{dt} [m \cdot M'] = F_n.$$

Si representámos por  $S = m_0 M'$  la cantidad de movimiento en la teoría clásica, la ecuación (39) se transforma en la

$$(42) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{S}{K_n} \right] = F_n$$

como se observa, la cantidad de movimiento einsteniana está expresada por

$$(43) \quad S_e = m \cdot M'$$

luego

$$(44) \quad \frac{d S_e}{dt} = F_n.$$

Cuando la distancia  $r = \infty$   $V_n = 0$  la masa  $m = m_M$  será la *masa maupertuisiana* ó *masa transversal*

$$(45) \quad m_M = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{M' \times M'}{c^2}}}$$

y la ecuación (41) se reduce á la

$$(46) \quad \frac{d}{dt}[m_M \cdot M'] = F_n$$

que es la forma *intrínseca de las ecuaciones de Planck* en la teoría restringida de la relatividad.

Si en la ecuación (46) consideramos  $c = \infty$  será  $m_M = m_0 = cte$  entonces

$$(47) \quad m_0 \frac{dM'}{dt} = F_n \quad \text{ó bien} \quad m_0 \frac{d^2 M}{dt^2} = F_n$$

forma intrínseca de las ecuaciones diferenciales del movimiento en la teoría clásica.

En el caso especial que  $F_n$  se derive de la función  $L_n^*$  será

$$(48) \quad F_n = \frac{\partial L_n^*}{\partial M} = -c^2 \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M}$$

como

$$(49) \quad \frac{\partial \bar{K}_n}{\partial M} = -\frac{1}{c^2 K_n} \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M}$$

$$(50) \quad F_n = \frac{1}{K_n} \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial M}$$

entonces se tendrá

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0}{K_n} \cdot M' \right] = \frac{m_0}{K_n} \frac{\partial V_n}{\partial M}$$

ó simplemente

$$(52) \quad \frac{d}{dt} [m \cdot M'] = m \cdot \frac{\partial V_n}{\partial M}$$

ecuación presentada por el profesor T. Levi Civita en su obra (Fondamenti di meccanica relativistica redatti dal profesor E. Persico).

Stanisław Jaskólski.

**Złoża srebrowo-cynowe Potosí w Boliwji.**

Przedstawił p. St. J. Thugutt dn. 28 czerwca 1933 r.

**Les gisements argento-stannifères de Potosí  
en Bolivie.**

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 28 juin 1933.

Praca ukazała się w t. IX Archiwum Mineralogicznego.

---

Jan Kuhl.

**Glinki boksytowe z Najdziszowa i złoża haloizytu  
z Mierzęcic (północne okolice Zagłębia  
Dąbrowskiego).**

Przedstawił p. St. J. Thugutt dn. 28 czerwca 1933 r.

**Sur les argiles bauxitiques de Najdziszów  
et le gisement de halloysite de Mierzęcice au nord  
du Bassin de Dąbrowa.**

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 28 juin 1933.

Praca ukazała się w t. IX Archiwum Mineralogicznego.

---

# Ostatnie Wydawnictwa Towarzystwa Naukowego Warszawskiego Wydz. III, IV.

Skład: Warszawa, Nowy Świat 72. T. N. W.

**Katalog wydawnictw** Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. 1907—1932. Warszawa. 1933. Str. VI + 262.

## **Archiwum Mineralogiczne.** Tom XI. Warszawa. 1933.

A. Łaszkiewicz. O miedzi rodzimej. — A. Łaszkiewicz. O postaci krystalicznej aspiryny handlowej. — T. J. Wojno. Przyczynki do metody justowania mikroskopu mineralogicznego i mikroskopu Fedorowa. — S. Jaskólski. Złoże srebro-cynowe Potosi w Boliwii. — S. J. Thugutt. O jancie nowym mineralu z Janowej Doliny na Wołyniu. — J. Kuhl. Glinki boksytowe z Najdziszewa i złoże haloizytu z Mierzęcic (północne okolice Zagłębia Dąbrowskiego). — M. Dominikiewicz. O pewnych reakcjach natrolitu naturalnego. — L. Jabłoński. Właściwości krystalograficzne jangoniny.

**Archiwum Nauk Antropologicznych.** Dział A. Antropologia. № 5. Warszawa. 1933.

Leon Manteuffel-Szoega. Antropomorfologia wątroby. (Studia nad antropomorfologią wątroby Polaków).

**Archiwum Hydrobiologii i Rybactwa.** Wyd. Instytutu im. M. Nenckiego. Tom VI. 1932.

A. Lityński. Sieja wigierska. Przyczynek morfologiczno-biologiczny. — J. Wiszniewski. O kilku gatunkach wrotków, zebranych w Hiszpanii. — Z. Koźmiński. O stosunkach tlenowych w jeziorze Hańcza na Suwalszczyźnie. — J. Wiszniewski. Wrotki piaszczystych brzegów jeziora Wigry. — K. Demel. Bliższa kategoryzacja wiatrów ze względu na ich efekty hydrograficzne przy Helu. — A. Moszyński. Skąposzczety (*Oligochaeta*) zatoki Puckiej. — K. Demel. Poziom morza — wskaźnikiem poziomów. — Z. Koźmiński. O stanowisku systematycznym „*Cyclops strenuus*“ z jezior górskich.

## **Monografie z pracowni Neurobiologicznej.** II. 1928.

N. Zandowa. Splot naczyński (*Plexus chorioideus*) (Anatomia, fizjologia, patologia).

## **Planta Polonica.** Materiały do Flory Polskiej.

T. I. 1930. K. Karpowicz. Przyczynek do znajomości flory powiatu Nowogródzkiego.

T. II. 1930. R. Kobendza. Stosunki fitosocjologiczne puszczy Kampinoskiej.

## **Archiwum Nauk Biologicznych.**

T. III, zes. 1. 1929. J. Grzybowski. O układzie żylnym mózgu człowieka.

T. III, zes. 2. 1929. R. Poplewski. Mięśnie grzebieniaste serca (*Musculi pectinati*).

T. III, zes. 3. 1930. J. Łukasiak. Badania anatomiczne i rozwojowe nad *Dioctophyme renale* (Goeze 1782).

T. IV, 1933. B. Hryniewiecki. Tentamen Florae Lithuaniae. (Zarys flory Litwy).

## **Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych.**

Nr. 33. 1930. J. Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration.

Nr. 34. 1933. A. Tarski. Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.

## **Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.**

R. XXV. 1932. Zesz. 1—6, 7—9. R. XXVI. 1933. Zesz. 1—3.

Prace następujących autorów: S. Eilenberga, S. Gołąba, W. Gorczyńskiego, H. Herszfelda, S. Jaskólskiego, T. W. Jezierskiego (2), H. Jędrzejewskiego, L. Kantorowitza, R. Kozłowski, A. Koźniewski, J. H. Kusnera, F. Leji, E. Livensona, A. Łaszkiwicz (2), S. Mazurkiewicz, I. Niewiedzkiej, W. Opalskiego, M. Polaczka, Ch. Rajfelda, W. Sierpińskiego (3), O. Stelmana, L. Szperla (2), A. Tarskiego, St. J. Thugutta (4), J. Tołwińskiej, L. Trzeciakiewicz, W. Wolibnera, M. Zywa.

## **Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział IV nauk biologicznych.**

R. XXV. 1932. Zesz. 1—6, 7—9.

Prace następujących autorów: K. Bassalika, K. Białaszewicz, M. Bogucki, M. Burbianki, M. Chejfec, S. Feliksiak, P. Flanzówny, A. Fonberga, W. Giedroycia, M. Gomolińskiej, W. Iwanowicza, G. Juchnowieckiego, Z. Konopackiej, E. Kornbluma, Z. Koźmińskiego (3), E. Kryszczyńskiego, M. Laskowski, E. Lotha, W. Niemierki, B. Niewieczrzałówny, K. Obizy, J. Orłowskiej, J. Wiszniewskiego i K. Wnorowski.