COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
Classe III
XXVIII Année 1935 Fascicule 4—6

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVIII 1935 Zeszyt 4—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1936

Redaktor

Bolesław Hryniewiecki

Adres Redakcji: Warszawa, Nowy-Świat 72.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXVIII Année 1935 Classe III

Rok XXVIII 1935

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1936

TREŚĆ TOMU XXVIII, 1935.

TABLE DES MATIÈRES Vol. XXVIII, 1935.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
Classe III

XXVIII Année 1935 Fascicule 4—6

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVIII 1935 Zeszyt 4—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1936

J. DZIEWULSKI
Warszawa

TREŚĆ ZESZYTU 4—6.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 9 maja 1935 r.

W. Sierpiński.

O równoważności kilku własności zbiorów linjowych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 9 maja 1935 r.

W. Sierpiński.

Sur l'équivalence de quelques propriétés des ensembles linéaires.

Note présentée dans la séance du 9 mai 1935.

I. Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété S, s'il ne contient aucun sous-ensemble non dénombrable de mesure nulle, et nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété P, resp. P_1, si toute fonction mesurable d'une variable réelle est sur E une fonction de Baire, resp. une fonction de classe $\leqslant 1$.

En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ j'ai démontré [1]) qu'il existe des ensembles linéaires indénombrables jouissant de la propriété S.

Théorème I. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *les propriétés* S, P *et* P_1 *sont équivalentes.*

Nous démontrerons d'abord, sans faire appel à l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition (1) suivante:

(1) *La propriété* S *entraîne la propriété* P_1.

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 184.

En effet, soit E un ensemble linéaire jouissant de la propriété S et soit $f(x)$ une fonction mesurable d'une variable réelle. D'après le théorème bien connu de Vitali [1]), il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle de classe $\leqslant 2$ et un ensemble linéaire N de mesure nulle, tels que $f(x) = \varphi(x)$ pour $x \in E - N$. L'ensemble E jouissant de la propriété S, l'ensemble EN est au plus dénombrable: la fonction $f(x)$ est donc égale à une fonction de classe $\leqslant 2$ en tous les points de l'ensemble E, sauf en les points de E formant un ensemble au plus dénombrable, et il en résulte tout de suite que $f(x)$ est sur E une fonction de Baire (de classe $\leqslant 2$). Or, comme l'a démontré M. E. Szpilrajn [2]), si l'ensemble E jouit de la propriété S, toute fonction de Baire définie sur E est une fonction de classe $\leqslant 1$ sur E.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction mesurable $f(x)$ d'une variable réelle est sur E une fonction de classe $\leqslant 1$. La proposition (1) est ainsi démontrée.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et soit E un ensemble linéaire jouissant de la propriété P. Je dis que E jouit également de la propriété S.

Admettons, en effet, que ce n'est pas le cas. Il existe donc un sous-ensemble N de E qui est non dénombrable et de mesure nulle. D'après $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'ensemble N est donc de puissance $2^{\aleph_0}$ et il existe $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$ fonctions (réelles) distinctes définies sur N. La famille de toutes les fonctions de Baire définies sur N étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il en résulte qu'il existe une fonction $\psi(x)$ définie sur N qui n'est pas une fonction de Baire sur N.

Posons $f(x) = \psi(x)$ pour $x \in N$ et $f(x) = 0$ pour tous les autres x réels. L'ensemble N étant de mesure nulle, la fonction $f(x)$ est presque partout nulle, donc mesurable. Or, elle n'est pas une fonction de Baire sur E, puisqu'elle ne l'est pas sur le sous-ensemble N de E. L'ensemble E ne jouit pas donc de la propriété P, contrairement à l'hypothèse.

Nous avons ainsi démontré que

(2) *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *la propriété* P *entraîne la propriété* S.

Or, évidemment:

(3) *La propriété* P_1 *entraîne la propriété* P.

---

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. III, p. 319.

[2]) Fund. Math. t. XV, p. 212—213. Cf. mon livre *L'hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV), Warszawa 1934, p. 91.

Notre théorème I est une conséquence immédiate des propositions (1), (2) et (3).

II. On dit qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété L s'il ne contient aucun ensemble non dénombrable non dense [1]). M. N. Lusin a déduit de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ l'existence des ensembles linéaires non dénombrables jouissant de la propriété L [2]).

Nous dirons que l'ensemble E jouit de la propriété Q, resp. Q_2, si toute fonction d'une variable réelle qui jouit de la propriété de Baire relativement à la droite (c'est-à-dire qui est continue quand on néglige un ensemble de 1[re] catégorie) est sur E une fonction de Baire, resp. une fonction de classe $\leqslant 2$.

Théorème II. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *les propriétés* L, Q *et* Q_2 *sont équivalentes.*

Nous démontrerons d'abord, sans faire appel à l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition suivante:

(4) *La propriété* L *entraîne la propriété* Q_2.

Soit, en effet, E un ensemble jouissant de la propriété L et soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle qui jouit de la propriété de Baire relativement à la droite. Il existe donc un ensemble K de 1[re] catégorie, tel que la fonction $f(x)$ est continue sur le complémentaire do K (par rapport à la droite), donc $f(x)$ est continue sur l'ensemble $E - K$. Or, l'ensemble E jouissant de la propriété L, l'ensemble EK est, comme on voit sans peine, au plus dénombrable. La fonction $f(x)$ est donc continue sur E quand on néglige un ensemble au plus dénombrable. C'est donc une fonction de classe $\leqslant 2$ sur E [3]). L'ensemble E jouit donc de la propriété Q_2 et la proposition (4) est démontrée.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et soit E un ensemble linéaire jouissant de la propriété Q. Je dis qu'il jouit également de la propriété L.

Admettons, en effet, que ce n'est pas le cas. Il existe donc un sous-ensemble K de E qui est non dénombrable et non dense. D'après $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ il existe donc une fonction $\psi(x)$ définie sur K qui n'est pas une fonction de Baire sur K. Posons

---

[1]) Cf. mon livre cité, p. 37.

[2]) *C. R. Paris* t. 158, p. 1259; cf. *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.

[3]) Cf. *Fund. Math.* t. XV, p. 212 et p. 285, ainsi que mon livre cité, p. 42.

$f(x) = \psi(x)$ pour $x \in K$ et $f(x) = 0$ pour tous les autres x réels. L'ensemble K étant non dense, il est manifeste que la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire relativement à la droite. Or, elle n'est pas une fonction de Baire sur E, puisqu'elle ne l'est pas sur $K \subset E$. L'ensemble E ne jouit pas donc de la propriété Q, contrairement à l'hypothèse.

Nous avons ainsi démontré que

(5) *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *la propriété* Q *entraîne la propriété* L.

Or, évidemment

(6) *La propriété* Q_2 *entraîne la propriété* Q.

Le théorème II est une conséquence immédiate des propositions (4), (5) et (6).

E. Stamm.

Tomasza Bradwardiny „Tractatus de Continuo", niewydany rękopis XIV w.

Przedstawił S. Dickstein dn. 9 maja 1935 r.

Przed paru laty natknąłem się w Miejskiej Bibljotece im. Kopernika w Toruniu na niewydany rękopis T. Bradwardiny, traktujący o ciągłości [1]). Rękopis ten opisał przed kilkudziesięciu laty znany historyk matematyki M. Curtze [2]), podając zarazem parę dość bezładnych, miejscami mylnie odczytanych wyjątków z niego. Na wyjątkach tych opierali się, w swych bardzo krótkich zresztą opracowaniach stanowiska Bradwardiny w kwestji ciągłości, K. Lasswitz jeśli chodzi o atomistykę [3]), oraz M. Cantor jeśli chodzi o matematykę [4]).

---

[1]) Niechaj mi będzie wolno złożyć na tem miejscu serdeczne podziękowanie p. dyr. Z. Mocarskiemu za oddanie mi do dyspozycji tego cennego rękopisu na dłuższy czas i za cenne wskazówki podczas mej pracy w Bibl. Toruńskiej, a zarazem i dyrekcji Miejskiej Bibl. w Erfurcie, za przysłanie mi do Polski, do mego użytku, tamt. rękopisu Nr. CA 4⁰ 385.

[2]) Analyse d. Handschnift R 4⁰ 2, Zs. f. Math. u. Phys,, XIII, lub w osobnej odbitce, 1868.

[3]) Geschichte d. Atomistik, I, 1890, p. 197 n.

[4]) Vorl. ü. Gesch. d. Mathem., II.

Po zbadaniu treści rękopisu przyszedłem do przekonania, że posiada on niepospolite znaczenie nie tylko dlatego, że Bradwardina był najznakomitszym matematykiem angielskim XIV w., ale również z tego względu, iż jego traktat o ciągłości wiąże się ściśle z filozoficznemi, matematycznemi i przyrodniczemi ideami wieków średnich, ideami, które wywarły decydujący wpływ na późniejszy rozkwit matematyki, a co ciekawsze dla nas, wiąże się z dzisiejszemi badaniami nad istotą nieskończoności i continuum, co spostrzegł już S. Dickstein[5]). Postanowiłem wobec tego wydać całkowity tekst traktatu. Poszukiwania w bibljotekach zagranicznych nie miały wielkiego efektu; odnalazł się jednak jeszcze jeden egzemplarz traktatu, bez nazwiska autora i bez końca, a mianowicie w Bibljotece Miejskiej w Erfurcie[6]). Na podstawie tych dwu rękopisów sporządziłem tekst krytyczny, który zamierzam niebawem ogłosić drukiem.

Rękopis toruński powstał prawdopodobnie ok. r. 1359, ma format 20 × 14·5 cm, pisany jest na grubym papierze bardzo skróconą, miejscami wprost nieczytelną brachygrafją. Strony mają prawie stale po 42 wiersze. „Tractatus de Continuo" zajmuje str. 153—192, w tem 187, 187^1, 187^2, a więc razem str. 41. — Rękopis erfurcki pochodzi prawdopodobnie z drugiej połowy XIV w., jest mniej staranny w stylizacji, ale pisany wyraźniej. Brak jednak w nim str. 154 wiersz 4 do 155 w. 31 i 187^1 w. 28 do 192 w. 15, czyli do końca, rękopisu toruńskiego. Umieszczony on jest od str. 17 r. do 48 r.

Za podstawę tekstu krytycznego obrałem tekst toruński jako stanowczo poprawniejszy i pełniejszy. Tekst erfurcki przepisywany był później i nie przez dobrego fachowca. Trzeba jednak zaznaczyć, że i tekst toruński wykazuje poważne braki.

Początkowo wahałem się nieco co do autorstwa traktatu. Curtze przyjmuje bez zastrzeżeń, że autorem jest Bradwardina, opierając się na końcowych słowach tekstu toruńskiego: „Explicit tractatus Bratwardini de continuo". Nie kwestjonują autorstwa również Lasswitz i Cantor. Pewne wątpliwości miał Dr A. Birkenmajer, który był tak łaskawy i udzielił mi wielu cennych, fachowych wskazówek. Także ks. prof. Mi-

---

5) Wielka Il. Eucykl. Pow., artykuł „Bradwardina".

6) Stadtbücherei Erfurt, Handschr. Nr. CA 4° 385, p. 17 r — 48 r.

chalski zwrócił moją uwagę na kwestję autorstwa. Sprawa ta była zupełnie na miejscu, gdyż dziwnem musi się wydawać, iż dzieło tak znakomitego uczonego jak Bradwardina nie tylko nie zostało wydane drukiem, ale nawet zostało zapomniane. Już Savile, w wdaniu „De causa Dei contra Pelagium", pisma teologicznego Bradwardiny, wydanego w r. 1618, o naszym traktacie nic nie mówi. Niema też wzmianki o nim później, o ile mi wiadomo, aż do czasów Curtzego. Tekst erfurcki nie potwierdza końcowych słów tekstu toruńskiego co do autorstwa, gdyż brak tam końca, a na początku niema wzmianki o autorze. Jednak według mego zdania nie można wątpić o autorstwie Bradwardiny, gdyż w tekście autor powołuje się na dzieło „De proportione velocitatum in motibus" [7]), które jak wiadomo, jest dziełem Bradwardiny [8]).

Tomasz Bradwardina (Bredwardin, Bradwardinus) zwany też „doctor profundus" z powodu swych głębokich myśli w wykładach uniwersyteckich, urodził się ok. r. 1290. Był on zdaje się Franciszkaninem. W r. 1325 zajmuje stanowisko prokuratora uniwersytetu oksfordzkiego. Tam wykłada w Collegium Mertonense matematykę, filozofję i teologję. Zostaje później kanclerzem przy kościele św. Pawła w Londynie, oraz spowiednikiem króla Edwarda III. Bierze udział w życiu politycznem. W r. 1348 mianowany zostaje arcybiskupem Canterbury. Król nie chce go jednak zwolnić od siebie, tak, że dopiero w r. 1349 w lipcu odbyła się konsekracja w Avignon. Jednak w parę tygodni później Bradwardina pada ofiarą grasującej zarazy, 26 sierpnia.

Poza pismami teologicznemi, jest Bradwardina autorem kilku dzieł matematycznych pierwszorzędnej wartości. Oto ich tytuły: Arithmetica speculativa [9]), Geometria speculativa [10]), De proportione velocitatum in motibus [11]).

Celem traktatu *o ciągłości* jest zbadanie jej *struktury*. Możliwe, że Bradwardina zamierzał napisać jeszcze, a może napisał, dalszą część, której nie znamy. Wynikałoby to z koń-

[7]) Str. 164 w. 15, 172 w. 33, 181 w. 26 n., 186 w. 7 i 17, 187^2 w. 1 n. rkp. toruńskiego; rękopis ten będziemy oznaczali krótko przez T.

[8]) Wyszło ono drukiem w Wenecji w r. 1505.

[9]) Paryż 1496 i później.

[10]) Paryż 1495 i później.

[11]) Wenecja 1505.

cowych słów traktatu: „Sic igitur primus liber, qui est de compositione continui, quantum ad sua essentialia, finem capit. Amen. Explicit tractatus Bratwardini de continuo"[12]). W każdym razie nasz rękopis stanowi dla siebie całość, zakrojoną na większą skalę; rękopis toruński obejmuje wprawdzie tylko 41 stron, ale daje to ze względu na skróty ok. 5 ark. druku dużej 8⁰.

Cały traktat trzymany jest w tonie krytycznym. Bradwardina polemizuje stale z poglądami współczesnych i dawnych uczonych. Poglądy na strukturę ciągłości przedstawione są w pewnym ustępie, zaznaczonym na marginesie uwagą: „Nota quinque opiniones de compositione continui"[13]). Oto schemat tych poglądów w terminologji Bradwardiny:

- Compositio continui
  - ex partibus divisibilibus sine fine, non ex athomis. — Aristoteles, Averroes, Algazel i większość współczesnych, między nimi Bradwardina.
  - ex indivisibilibus
    - ex corporibus indivisibilibus. — Democritus.
    - ex punctis
      - ex finitis indivisibilibus. — Pythagoras, Plato, Waltherus Modernus.
      - ex infinitis indivisibilibus
        - immediate coniunctis. — Henricus Modernus.
        - ad invicem mediatis. — Lyncof.

Jak widzimy, wymienia Bradwardina ze współczesnych Walthera, Henryka i Lyncofa i z niemi też najczęściej polemizuje. Waltherus Modernus to prawdopodobnie Walter Burleigh autor dzieła o „latitudo formarum", który umarł w r. 1337[14]); Curtze sądzi jednak, co wydaje mi się nieprawdopodobnem, że chodzi tutaj o Waltera Evesham, który w r. 1316 zajmował się obserwacjami astronomicznemi[15]). Henricus Modernus, to zapewne Henricus Goethaels (Henricus Gandavensis, 1217—1295), zwany „doctor so-

12) T p. 192, w. 14 n.

13) T p. 165, w. 29—39.

14) Por. Prantl, Gesd. d. Logik, III, 297. — Cantor, Gesch. d. Math., II.

15) L. c. p. 44 osobn. syd.

lemnis"[16]), prof. filozofji w Paryżu, autor komentarza do fizyki i metafizyki Arystotelesa. Co do Lyncofa, to możliwe, iż chodzi tutaj o Roberta Grostheada, biskupa Lincolnu, który studjował w Oxfordzie i Paryżu, zajmował się filozofją, astronomją i lingwistyką. Umarł w r. 1253. Jest on autorem „Compendium sphaerae mundi" i „Commentarius in libros posteriores Aristotelis".

Swoje stanowisko wobec problematu ciągłości precyzuje Bradwardina pod koniec dzieła, w twierdzeniu 140[17]). Wyraża się on tam pięknie w następujący sposób: „Ut igitur alchymista post multos ignes aurea gaudet massa, victor quoque, terminatis laboribus pluribus, gaudet de triumpho, sic et tu, post tot scrutinia studiorum, carissimis amplecte affectibus sinceram, que sequitur veritatem: *Nullum continuum ex athomis integrari,* unde sequitur et elicitur: *Omne continuum ex infinitis continuis similis speciei cum illo componi*... id est omnis linea componitur ex infinitis lineis et omnis superficies ex superficiebus et ita de aliis".

Współczesna wiedza matematyczna i przyrodnicza inaczej zapatruje się na ciągłość wielkości liczbowych i przestrzeni, a więc matematyczną, inaczej na ciągłośc materji i energji, a więc fizyczną. Przestrzeń wraz z czasem, według teorji Einsteina i Minkowskiego, tworzy continuum, które zresztą jest w różny sposób ujmowane. Klasyczne teorja G. Cantora uważa continua matematyczne niejako za dane idee Platońskie, nie wymagające konstrukcji, lecz tylko opisu. Pokrewną jest aksjomatyczna metoda Hilberta. Istnieją jednak także teorje continuum matematycznego, domagające się konstrukcji, i te obracają się w sferach podobnych, jak starożytność i wieki średnie, oczywiście na daleko wyższym poziomie. H. Weyl[18]) rezygnuje z wniknięcia w istotę centinuum, zadowalając się konstrukcją pewnego rodzaju jego obrazu atomistycznego, wszędzie gęstej mnogości punktów. Odpowiada to stanowisku, które Bradwardina zwalcza, polemizując z Henrykiem Goethaelsem i Robertem Grostheadem. Neointuicjonistyczna szkoła

---

16) Por. Cantor l. c.
17) T p. 187², w. 27 i nast., 37 i nast.
18) D. Kontinuum, 1918.

Brouwera natomiast[19]) uważa continuum za składające się z części, które ze swej strony są również continuami, a więc podzielnemi in infinitum. Pojedynczy określony punkt jest na tem stanowisku ciągiem zawartych w sobie interwałów. Widzimy, że teorja Brouwera w zasadzie zgadza się zupełnie z teorją Bradwardiny, streszczoną w wyżej podanem zadaniu.

Podobne poglądy na istotę ciągłości spotykamy również u M. W. Drobischa, zwolennika Herbartowskiego realizmu ok. połowy XIX w.[20]). Według Drobischa jest w mnogości nieciągłej całość uwarunkowana przez części, które są rzeczywistemi jej składnikami, natomiast w continuum są części uwarunkowane całością. W tym ostatnim wypadku nie składa się całość z części, lecz jest tylko podzielna, t. zn. ujmowana jako coś, co *może* mieć części. „Denn da jeder Teil einer stetigen Grösse wieder eine solche sein muss, weil sonst das Ganze aus einer Vielheit discreter Grössen bestehen und daher selbst eine discrete Grösse sein würde, so folgt, da nun auch wieder diese Teile des Ganzen, als stetige, teilbar sein müssen, dass die Teilung hier nie ein Ende erreichen kann, dass die stetige Grösse als *unendlichteilbar* gedacht werden muss, und dass man bei dieser ohne Ende fortgesetzten Teilung *niemals auf kleinste*, sondern nur auf *beliebig keine* d. h. solche kommt, die kleiner sind, als jede noch so kleine gegebene Grösse, und deren Auzahl daher grösser sein muss, als jede auch noch so grosse gegebene Zahl...”, „Nicht als ein Seiendes, sondern als ein Werdendes soll nun das Unendlichkleine gedacht werden”.

I u nas w Polsce interesowano się dawniej problematem ciągłości. Pominąwszy komentatorów Arystotelesa, spotykam w XVII w. trzy nazwiska, które pozwolę sobie wymienić. Marcin Słonkowic, collega minor, który umarł w r. 1658, wydał w r. 1645 rozprawkę p. t.: „Quaestio utrum continuum, ut sit divisible in infiuitum, debeat habere partes infinitas, et indivisibila tam terminativa, quam continuativa, quae quidem indivisibilia sint entia positiva, a partibus realiter distinca, nec ne?” Według Słon-

---

[19]) Z. Begr. d. intuitionistischen Mathem., Math. Ann., t. 93 n. i późniejsze prace w Jahresber. d. deutschen Math. Ver., t. 33 i Journal Crellego, t. 154.

[20]) Synechologische Unters., Zs. f. Philos. u. philos. Kritik, 1854, N. Folge, t. 25, p. 179 — 208, szczeg. 189 — 193.

kowica, który jest podobnie jak Bradwardina zwolennikiem Arystotelesa, jest continuum „divisible in infinitum non actu sed potentia, seu non categorematice sed syncategorematice". „In continuo sunt partes infinitae... in potentia..." „Cum in continui divisione in infinitum procedatur: ut non potest deveniri ad partem non compositam seu non continuam: ita non possunt designari omnia puncta et omnes partes, que adaequate inter se distinguantur". Józef Wiśniowski, prof. teologji i geometrji w Krakowie, był uczniem Mikołaja Brożka. Umarł z końcem XVII w. Pisał rozprawy teologiczne, astronomiczne, kalendarze, oraz jest autorem pracy „Quaastio geometrica de quantitate continua, wydanej w r. 1683. Wreszcie Paweł Jan Wojewódzki (1640 — 1693) zajmował się filozofją, był doktorem teologji uniwersytetu również krakowskiego, i ogłosił m. i. rozprawę „Quaestio physica de continuo" w r. 1675.

Jeśli chodzi o ciągłość fizyczną, to już od kilku wieków zapatrywania Arystotelesa, a więc w zasadzie i Bradwardiny zostały porzucone, a teorja atomistyczna materji rozszerzona jest w ostatnich czasach i na energję (teorja kwantów).

Arystoteles nie uznawał rozdziału ciągłości matematycznej od fizycznej, gdyż negował istnienie pustej przestrzeni. Wobec tego przeniósł ciągłość przestrzeni na materję. Na wprost przeciwnym stanowisku pozostawali w wiekach średnich od IX do XIII w. zwolennicy arabskiej szkoły Motakhalleminów[21]) przyjmujący nietylko atomy przestrzeni, ale również i czasu i ruchu. Bradwardina jako zwolennik Arystotelesa atomistyki wogóle nie uznaje.

Dyspozycja traktatu Bradwardiny jest następująca. Na początku mamy 24 definicje pewnych ogólnych pojęć[22]), następnie 10 „suppositiones"[23]), a wreszcie 150 „conclusiones"[24]), w których Bradwardina zbija poglądy swych przeciwników i uzasadnia swoje.

Continuum określa Bradwardina[25]) jako „quantum, cuins partes ad invicem copulantur". Jest to pierwsze zdanie

---

21) Por. Lasswitz, l. c. szczeg. str. 146 n., oraz L. Mabilleau, Hist. de la philos. atom., 1895, p. 319 n.

22) T p. 153 — 156.

23) T p. 156.

24) T p. 156 do końca.

25) T p. 153 w. 12.

całego traktatu. Definicja ta jest ogólniejsza, aniżeli Arystotelesowska. Continuum dzieli Bradwardina[26]) na „permanens" (bryła, powierzchnia, linja)[27]) i „successivum" (czas, ruch)[28]).

Dłużej zatrzymuje się nad dwoma rodzajami *nieskończoności*, które odróżnia, nad „infinitum cathetice" i „infinitum syncathetice"[29]). — „Infinitum cathetice... est quantum sine fine", albo też „magnum vel multum sine fine, seu non finitum"[30]). Jest to więc nieskończoność, którą nazywamy *aktualną*, a której teorję matematyczną stworzył w swej teorji mnogości G. Cantor. — „Infinitum syncathetice... est quantum finitum et finitum maius isto, et finitum maius isto maiori, et sic sine fine ultimo terminante et hoc est quantum et non tantum quin maius"[31]), albo też „magnun vel multum sine fine et hoc quantolibet finito maius vel plura"[32]). Jest to więc nieskończoność *potencjalna*, polegająca na możności tworzenia nieograniczonego szeregu wielkości coraz to większych wzgl. mniejszych. — Tak nieskończoność katetyczna jak i synkatetyczna odnoszą się do wielkości ciągłych jak i nieciągłych[33]).

Nieskończoność synkatetyczna powstać może według Bradwardiny w dwojaki sposób „uno modo per privationem finis intrinseci, alio modo per privationem intrinseci et extrinseci"[34]). Granicą wewnętrzną zaś, mówiąc dzisiejszym językiem matematycznym, byłaby dla Bradwardiny taka granica mnogości, która jest jej elementem, podczas gdy granica zewnętrzna jest granicą, ale nie należy do danej mnogości. Mówi Bradwardina np., że 2 jest granicą wewnętrzną szeregu liczb naturalnych, zaś 1 zewnętrzną[35]); w tych czasach bowiem nie uważano zazwyczaj jeszcze 1 za liczbę w ścisłem znaczeniu. — Bardzo ciekawą jest uwaga Bradwardiny, że punkt jest granicą zewnętrzną wiel-

---

26) T p. 153 w. 12 n.
27) T p. 153 w. 14—16.
28) T p. 153 w. 12 n., w. 18, w. 19.
29) T p. 153, w. 30—33.
30) T p. 154, w. 3 n.
31) T p. 153, w. 31 n.
32) T p. 154 w. 4 n.
33) T p. 154, w. 6 n.
34) T p. 155, w. 24 n.
35) T p. 154, w. 13 n.

kości ciągłej[36]); należy to rozumieć w ten sposób, że punkt nie jest elementem mnogości interwałów (np. odcinków), z których każdy następny jest zawarty w poprzednim. Pozostaje tutaj Bradwardina w zgodzie ze swem zapatrywaniem na istotę ciągłości; gdyby bowiem punkt był w tym wypadku granicą wewnętrzną, to continuum składałoby się z punktów, a więc atomów. — Bradwardina występuje przeciwko tym, którzy uznają tylko nieskończoność katetyczną, odrzucając synkatetyczną[37]). Ze stanowiska ciągłośsi i to ze stanowiska Bradwardiny, zajmuje nieskończoność synkatetyczna pierwsze miejsce. Metody wyższej analizy, które zaczęły się rozwijać w praktyce dopiero od połowy XVII w. wiążą się ściśle z tem pojęciem. Wprawdzie już Archimedes umiał zmianą kierunku operować jako wielkością, obliczając długości linji krzywych i powierzchni, jednak analiza wyższa wymaga operowania jako wielkością zmianą *wogóle*, które stało się faktem dopiero od XVII w. Zmiany tego rodzaju tkwią w nieskończoności synkatetycznej, a nie katetycznej. Bradwardina definjuje tę nieskończoność za ciasno, uznając wyraźnie tylko wzrost wielkości. Poza zasadniczą definicją nieskończoności synkatetycznej, uznającą tylko wzrost wielkości, istnieją jednak w traktacie miejsca, które wskazują na to, iż Bradwardinie nie obcem było analogiczne pojęcie, oparte na nieograniczonem zmniejszaniu się, pojęcie, które wykształciło się później w pojęcie różniczki. Już sama zasadnicza teza, iż continuum składa się „ex infinitis continuis similis speciei" wymaga takiego pojęcia. Następnie tłumaczy Bradwardina słowa „sine fine" w definicji nieskończoności synkatetycznej w ten sposób: „... sine fine maximo vel plurimo et ultimo in augmendo, non minimo nec paucissimo in minuendo"[38]). Nie zdołał jednak Bradwardina dojść do właściwego pojęcia różniczki, gdyż jakkolwiek uznaje nieskończoność synkatetyczną i w sensie zmniejszania się, nie rachuje nią. Rachunek taki powstał dopiero przeszło 300 lat później W tamtych czasach był on jeszcze niemożliwy, gdyż wymagał nietylko myślowej dedukcji, lecz również intenzywnej zewnętrznej obserwacji natury, której wieki średnie chętnie unikały.

———

36) T p. 154, w. 14.
37) T p. 154, w. 28 n.
38) T p. 154, w. 11 n.

Następujące po definicjach „suppositiones“, w liczbie 10, są założeniami, „que per se patent omnibus”, a na które Bradwardina powołuje się w dalszych swych wywodach [39]). Uderza jako „suppositio“ Twierdzenie „Omnes scientias veras esse, ubi non supponitur, continuum ex indivisibilibus componi“ [40]). Oczywiście, że nie jest to „jasne samo przez się“, lecz może być uważane tylko za konkluzję całego traktatu.

Dalsza część dzieła obejmuje 150 „conclusiones“, w których mamy wypowiedziane poglądy Bradwardiny na istotę ciągłości, oraz w których Bradwardina stara się obalić poglądy przeciwne. We wszystkich „conclusiones“ rozpatrywane są przykłady z najróżniejszych dziedzin wiedzy, z matematyki, fizyki, muzyki, a nawet nauk humanistycznych. — Zwrócimy się najpierw do twierdzeń negatywnych, w których Bradwadina występuje przeciwko poglądom przeciwnym swoim.

Jeśliby istniały części niepodzielne (atomy), to musiałyby one być równe [41]). Z jednej bowiem strony „indivisibile“ nie może być podzielone (def. 7), a z drugiej „omne maius posse dividi in equale et in differentiam, qua excedit (supp. 1). — Dwa continua tegosamego rodzaju, które składałyby się z równej ilości atomów, musiałyby być równe [42]). — W temsamem położeniu niepodzielnem nie może się znajdować więcej atomów (nieprzenikliwość) [43]). — Następnie, tak jak kilka punktów odcinka nie może być równooddalonych od któregokolwiek z jego końców, tak i kilka atomów continuum nie może być równooddalonych od któregokolwiek z jego kresów z tejsamej strony [44]). Wynika z tego, że w continuum nie może kilka atomów z tejsamej strony znajdować się bezpośrednio przy jakimś atomie tego continuum [45]).

W „conclusio“ 17 poruszona jest kwestja kąta styczności (angulus contigentiae), kąta zawartego między dwoma łukami kół stycznych (angulus peripheriae), oraz trójkąta styczności (triangulus contingentiae), t. zn. trójkąta, utworzonego przez styczną, łuk

39) T p. 156, w. 17 — 35.
40) T p. 156, w. 23 n.
41) T p. 156, w. 37, concl. 1.
42) T p. 156, w. 38 n., concl. 2.
43) T p. 157, w. 1, concl. 3.
44) T p. 157, w. 7 — 24, concl. 4.
45) T p. 157, w. 25, conl. 5.

koła i prostą przeciwległą kątowi styczności. Chodzi w tem twierdzeniu o podział tych figur geometrycznych zapomocą łuku koła [46]). W czasach tych kąt styczności zajmował żywo umysły matematyków, z powodu różności między nim a kątem prostolinijnym. Badania kąta styczności wiążą się ściśle z pojęciem nieskończoności (Euklides, Jordanus Nemorarius, Johannes Campanus, po Bradwardinie Cardano, Peletier, Vieta).

Pewna ilość „conclusiones", rozrzuconych po całym traktacie [47]), operuje pojęciem „latitudo formarum". Duns Scotus na przełomie XIII w. poruszył problemat formy. Forma w jego znaczeniu to przedmiot zmienny. Ponieważ zmiana może być najlepiej zaobserwowana na wielkościach, więc w naturalny sposób powstały przytem pojęcia „intensio" i „remissio", t. zn. zwiększania się i zmniejszania. W tym sensie ujęli problemat Walter Burleigh i i. W tym sensie mówi też o formach Bradwardina. Ponieważ formy są wielkościami, więc umysł domaga się ich matematycznego ujęcia. W jaki sposób rozwinął się ten problemat możemy śledzić u Ryszarda Suisseta (XIV w.) i Mikołaja Oresme'a (1323 — 1382). Suisset zajmuje się zagadnieniem „latitudo formarum" w 1 i 2 rozdziale swej książki „Calculator", która wyszła drukiem dopiero w r. 1520. Występują u Suisseta wyżej wspomniane pojęcia „intensio" i „remissio", a oprócz tego pojęcie „difformis". Suisset ilustruje swoje badania także figurami geometrycznemi. Dalsze rozwinięcie całego zagadnienia jest zasługą Oresme'a, tego bezsprzecznie najznakomitszego matematyka XIV w. „Tractatus de latitudinibus formarum" Oresme'a powstał ok. r. 1360. W metodzie tej uderza nas przedewszystkiem idea geometrji analitycznej i funkcji; brak jednak jeszcze strony algebraicznej, równań. Występuje natomiast strona geometryczna, linje. „Latitudo" to rzędna geometrji analitycznej, „longitudo" odcięta. Różnica Δy następujących po sobie szerokości nazywa się „gradus latitudinis". Jeżeli „gradus latitudinis" równa się zeru, mamy „latitudo uniformis", w przeciwnym wypadku „difformis". Ta ostatnia „szerokość" dzieli się na różne kategorje, którym ze stanowiska

---

[46]) T p. 161, w. 13 n, concl. 17.
[47]) T p. 166, w. 3 n.; 170, w. 26 n.; 173, w. 1 n.; 185, w. 7 n.

geometrycznego odpowiadają różne linje proste i krzywe. Miarą zmienności jest „excessus graduum“, który może być stały lub zmienny. — Metoda „latitudo formarum” była używana aż do czasów Descartesa i nie ulega wątpliwości, iż wywarła ona na niego niemały wpływ, jak i na pojęcie funkcji w matematyce. — Pisma Suisseta i Oresme'a nie były znane Bradwardinie, gdyż powstały później. „Tractatus de Continuo“ musiał być napisanym przed r. 1349, prawdopodobnie nie wiele lat przed tą datą. Dzieło Suisseta odnieść należy zapewne do czasu po r. 1350, Oresme'a do roku mniejwięcej 1360.

Bradwardina nie zajmuje się pojęciem „latitudo” specjalnie, lecz służy mu ono przy krytycznem ocenianiu stanowisk przeciwnych jego stanowisku. Odnosi Bradwardina pojęcie form do zjawisk temperatury i szybkości jako zmiennych w czasie, a następnie do zjawisk akustycznych, tonów. Pojęcia „intensio” i „remissio” występują w dowodach. Różnych kategoryj form ze względu na zmienność, jakie spotykamy u Oresme'a, u Bradwardiny nie znajdujemy.

Dopiero po tem przygotowaniu przystępuje Bradwardina do krytyki różnych poglądów na istotę ciągłości. Aby jego wywody miały znaczenie powszechne udowadnia następujące twierdzenie:[48]) „Si unum continuum ex indivisibilibus componitur secundum aliquem modum et quodlibet sic componi, et si unum non componitur ex athomis nec ullum omnino”. W pierwszym rzędzie stara się Bradwardina rozprawić z poglądami, według których „continuum componitur ex *indivisibilibus immediate coniunctis*” [49]). Jest to stanowisko tak Pytagorasa jak i Henryka Goethaelsa. Metoda, której w tym celu używa, polega na tem, iż przyjmuje daną tezę za prawdziwą, i wyciąga z niej konsekwencje w zakresach różnych nauk. Dochodzi w ten sposób do wypowiedzi fałszywych. Dlatego też jego „conclusiones” zaczynają się przeważnie od słów „si sic”. „Rationes geometrice” w naszym wypadku są analogiczne do tych, któremi posługiwali się już Arystoteles, Arabowie, a później scholastycy, np. Duns Scotus. „Si athoma in continuo immediata ponantur, immediata puncta centro circuli et quadrati sive cuiuslibet corporis, punctis circumferentie circuli et quadrati lateris atque superficiei

48) T p. 165, w. 26 n., concl. 31.
49) T p. 166, w. 42 n., concl. 35.

corporis exteris equaliter correspondent [50]). „Equaliter respondere” to dzisiejsze odwzorowanie doskonałe czyli jednojednoznaczne”. Z powyższego twierdzenia wynikają dalsze podobne, między niemi: „Si sic, inter quelibet duo indivisibilia continui cuiuscumque *infinita* eius indivisibilia mediare”, a więc: „Omne continuum habere athoma infinita” [51]), wbrew poglądom Pytagorasa, Platona i Waltera Burleigha. Bradwardina nie poprzestaje na konsekwencjach geometrycznych, ale wyciąga również i przyrodnicze [52]), aby wykazać nieprawdziwość poglądów Pytagorasa i Henryka Goethaelsa. Konsekwencje te dotyczą przedewszystkiem ruchu [53]) i kulminują w ogólnej: „Si sic, omnis motus et omnia agentia atque passa equari ad invicem, excedere et excedi [54]). Na tej podstawie przychodzi Branwardina do wniosku: „Si sic, indivisibile dividetur” [55]), oraz „Si sic, continuum ex athomis integrari” [56]). Jeżeli teraz zestawimy poprzednie „conclusiones” i nasze założenie, to będziemy uprawnieni do wniosku: „Si sic, omne continuum componitur ex indivisibilibus infinitis, et tamen ex finitis, et nec ex infinitis nec finitis, et componitur ex athomis et non componitur ex illis” [57]). Zatem „in nullo continuo athoma immediate coniungi” [58]).

Zwraca się teraz Bradwardina przeciwko poglągowi, że continuum składa się ze *skończonej* ilości atomów, a więc przeciwko poglądom Pytagorasa, Platona i Waltera Burleigha. Krytykę przeprowadza w tym wypadku systematyczniej, porusza najróżniejsze dziedziny wiedzy ludzkiej. Aby ułatwić orjentację, podaje nawet klasyfikację nauk [59]).

Jeżeli continuum składa się ze skończonej ilości atomów, to „sicud numerus athomorum unius continui ad numerum athomorum alterius, ita illud compositum ad aliud se habere”. Wynika z tego: „Si aliquod continuum sit incommensurabile alteri et numerum

[50]) T p. 166, w. 42 n., concl. 35.
[51]) T p. 167, w. 19 n., concl. 37.
[52]) T p. 168, w. 31 n.
[53]) T p. 168, w. 31 n., do p. 169, w. 32, concl. 43 do 47.
[54]) T p. 169, w. 33 n., concl. 48.
[55]) T p. 169, w. 39, concl. 49.
[56]) T p. 170, w. 42, concl. 53.
[57]) T p. 171, w. 10 n., concl. 55.
[58]) T p. 171, w. 28, concl. 56.
[59]) T p. 172, w. 4 do 17.

incommensurabilem numero reperiri"[60]), a następnie ogólnie „si sic, athoma in continuo immediate iunguntur", oraz „omnia continua habere athoma infinita et ex athomis non componi"[61]). Już więc artymetyka doprowadza nas do sprzeczności z założeniem. Także i muzyka wykazuje sprzeczności: „Si sic, debilissimus gradus soni se habet sicud unitas et ceteri, se sine medio consequentes, ut sequens series numerorum[62]). Bradwardina przytacza jeszcze kilka innnych podobnych konsekwencyj[63]). W toku wywodów cytuje Boetiusa i Aristoxenosa. — Z geometrji podaje twierdzenia, które sprzeczne są ze stanowiskiem Pytagorasa i Waltera Burleigha, a które odpowiadają jego własnym przekonaniom[64]). Wykazują one konieczność przyjęcia *nieskończonej* ilości części continuum. Pozatem wyciąga pewne konsekwencje, analogiczne do tych, w których lubowali się scholastycy, zwalczający atomistykę, Roger Baco, Duns Scotus, a także Algazel i Arystoteles, jak np.: „Si sic, periferiam circuli esse duplam dyametri"[65]), „si sic, angulus contingentie dividetur per rectam"[66]), „si sic, aliquis triangulus 3 angulos rectos habet, et linee equedistantes concurrunt"[67]), „si sic, omnis quadrati dyameter sui lateri est equalis"[68]), „si sic, aliquod quadratum est circulus"[69]) i t. d. Przytacza potem Bradwardina sporą ilość nieprawdziwych konsekwencyj z perspektywy[70]), astronomji[71]), nauk przyrodniczych[72]), medycyny[73]), metafizyki[74]), gramatyki[75]), logiki[76]), retoryki[77]), i etyki[78]).

---

[60]) T p. 172, w. 1 n., concl. 57.
[61]) T p. 172, w. 36 n., concl. 58.
[62]) T p. 173, w. 1 n., concl. 59.
[63]) T p. 173, w. 14 do p. 174, 34, concl. 60 do 65.
[64]) T p. 174, w. 35 n. do p. 175, w. 6, concl. 66 — 70.
[65]) T p. 175, w. 27 n., concl. 73.
[66]) T p. 176, w. 20, concl. 77.
[67]) T p. 177, w. 31 n., concl. 81.
[68]) T p. 178, w. 30, concl. 86
[69]) T p. 179, w. 5 concl. 87.
[70]) T p. 179, w. 31 n., concl. 92.
[71]) T p. 179, w. 34, concl. 93.
[72]) T p. 181, w. 10 n. do p. 182, w. 27, concl. 98 — 105.
[73]) T p. 182, w. 20, concl. 106.
[74]) T p. 182, w. 32 n., concl. 108.
[75]) T p. 183, w. 3 n., concl. 109.
[76]) T p. 183, w. 5, concl. 110.

Aby wykazać, że continuum nie może się składać z atomów, musi Bradwardina udowodnić jeszcze, że nie może się ono składać z *nieskończonej* ich ilości; jest to stanowisko Henryka Goethaelsa i Roberta Grostheada. Uskutecznia to w podobny jak poprzednio sposób, tak co do metody i treści argumentów, w conclusiones 114—136 [79]). Konsekwencje dotyczą zgęszczania i rozrzedzania materji, form i ich najmniejszego stopnia, ruchu ciał i t. p.

Teraz, po krytycznem omówieniu trzech najważniejszych stanowisk w sprawie struktury continuum, zbiera Bradwardina swe wyniki w następujących trzech ogólnych tezach [80]). „*Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis componi.* Hec conclusio sequitur ex predictis et est contra illud, in quo summare Lyncof et Henricus conveniunt". „*Si continuum componitur ex infinitis indivisibilibus immediatis ad invicem, componitur ex finitis.* Unde manifestum est: *Nullum continuum ex infinitis indivisibilibus immediatis componi.* Hec conclusio est specialiter contra conclusionem Henrici..." „*Si continuum componitur ex infinitis indivisibilibus mediatis, componitur ex immediatis.* Unde: *Nullum continuum ex indivisibilibus mediatis componitur.* Hec conclusio specialiter est contra conclusionem Lyncof".

Po tych tezach następuje, jako wynik, zebranie poglądów autora w zdaniu, które przytoczyliśmy na początku.

Rzućmy jeszcze okiem na pewne pozytywne twierdzenia traktatu. — Bradwardina wykazuje, że każdy odcinek można podzielić na wiele odcinków, a nawet na nieskończoną ich ilość [81]). Tosamo odnosi się do kątów, trójkątów i powierzchni [82]). Kilka „conclusiones" odnosi się do ruchu [83]). Udowadnia Bradwardina ogólne twierdzenie: "Quodcumque spatium finitum quocumque tempore finito, posse uniformiter et continue pertransiri [84]),

77) T p. 183, w. 10, concl. 111.
78) T p. 183, w. 11, concl. 112, p. 184, w. 18, concl. 113.
79) T p. 184, w. 24 do p. 187² w. 18.
80) T p. 187², w. 15 do 26, concl. 137—139.
81) T p. 163, w. 5, corrol. concl. 20; p. 174, w. 35 n., concl. 66.
82) T p. 174, w. 38 n., concl. 67; w. 42. concl. 68; p. 175, w. 1 n., concl. 69.
83) T p. 163, w. 26 n. concl. 21; p. 164, w. 7 n. concl. 22 n.
84) T p. 164, w. 27 n. corrol concl. 24.

które jest dla niego dla zagadnienia ciągłości niezbędne. Conclusio 26[85]) wyraża bezwzględność czasu.

Z zasadniczej tezy, że żadne continuum nie składa się z atomów i z wniosku, że każde continuum składa się z nieskończonej ilości continuów podobnego rodzaju wynika nieprawdziwość poglądu Demokryta[86]). Bradwardina komentuje jednak pogląd Demokryta w następujący sposób: „Non tamen est veri simile, quod tantus philosophus posuit aliquod corpus indivisibile sicud in principio est definitum, sed forte per corpora indivisibilia intellexit partes substantie indivisibiles et voluit dicere, substantiam componi ex substantiis indivisibilibus..." [87]).

Ciekawym jest następujący ustęp, który wskazuje na to, iż w wiekach średnich zajmowano się poważnie pewnemi podstawowemi zagadnieniami geometrji. Nawiązuje Bradwardina do zarzutu Averroesa w jego komentarzu[88]). Averroes, jako stronnik Arystotelesa uznaje continuum za podzielne do nieskończoności, ale ma za złe geometrji, iż ona „hoc non probat sed supponit, tamquam demonstratum in scientia naturali; potest igitur sic inpugnare demonstrationes geometricas, prius factas, dicendo, geometriam ubique supponere, continuum ex indivisibilibus non componi, et illud demonstrari non posse". Bradwardina uważa jednak ten zarzut za niesłuszny, gdyż twierdzenia i dowody geometrji Euklidesa nie opierają się na tem założeniu. Robi przytem trafną i wnikliwą uwagę, „quia dato eius opposito quelibet demonstratio non minus procedit, ut patet inductive scienti conclusiones geometricas demonstrare" [89]). „Verumtamen Euclides in geometria sua supponit, quod continuum ex infinitis et immediatis athomis non componitur, sed hoc inter suas suppositiones expresse non ponit" [90]). — Znamienne są również dalsze słowa Bradwardiny, z których wynika, iż pojęcie niezależności wzgl. zależności twierdzeń od pewnych postulatów, które dzisiaj w szkole Hilberta tak jest respektowane, nie było mu obce [91]). „Si falsigraphus dicat contrarium" —

85) T p. 164, w. 41 n.
86) T p. 187², w. 39 n.
87) T p. 187², w. 41 n
88) T p. 188, w. 1 n.
89) T p. 188, w. 9 n.
90) T p. 188, w. 11 n.
91) T p. 188, w. 12 n.

t. zn. twierdził, iż system geometrji Euklidesa jest zależny od owego postulatu o strukturze continuum — „et ponat aliqua linea ex duabus punctis componi, Euclides non potest suam conclusionem primam demonstrare, quia super huius lineam non posset triangulus equelaterus collocari, quia nullum angulum haberet... Similiter, si dicat falsigraphus, continuum ex athomis immediatis componi, 4 am suam conclusionem et 8 am non probat, ambe enim per suppositionem probantur. Similiter in probatione 3e. — Iste autem conclusiones non demonstrantur per aliquas conclusiones priores sed ex immediatis principüs ostenduntur; per has autem conclusiones relique demonstrantur, et ex hiis tribus quasi tota geometria Euclidis deponet et in ipsa omnis alia geometria fundatur". — Ale Bradwardina jest przekonany, że wszystkie te zarzuty nie są na miejscu; „est enim geometria sufficiens ostensive et per impossibile ex propriis principiis demonstrare, nullum suum continuum ex indivisibilibus finitis mediatis componi"[92]) i podaje nawet drogę, jak należałoby to uskutecznić[93]).

Na końcu traktatu zajmuje się Bradwardina jeszcze kwestją „an indivisibilia continuorum sint realiter distincta, ut ponuntur"[94]), kwestją, która zajmowała żywo umysły od czasów Arystotelesa. Arystoteles nie przeczył, iż w continuum zawarte są punkty; nie istnieją one tam jednak według niego w rzeczywistości, „actu", lecz tylko „potentia"[95]). Continuum jest podzielne in infinitum, ale również tylko potencjalnie. Zdania scholastyków były pod tym względem podzielone. Nawet większość była za realnem istnieniem niepodzielnych punktów w continuum, jak Tomasz z Aquinu, Duns Scotus, którzy opierali się na komentatorach Arystotelesa, Themistiusie, Simpliciusie i i. — Nominaliści natomiast stali wiernie po stronie Arystotelesa. Spotykamy i poglądy godzące oba obozy; Fonseca[96]) jest przekonany, że tylko powierzchnie ograniczające bryły istnieją realnie, a nie punkty i linje.

92) T p. 188, w. 22 n.
93) T p. 188, w. 24 — 38.
94) T p. 188, w. 38 n.
95) Phys. VI, 1, 231 b; III, 6, 207 b.
96) Comment. in Metaph. Arist., II, c. 13, qu. 5.

Nasz Słonkowic[97]) odróżnia również „indvisibilia et continuativa et terminativa". „Indivisibilia continuativa quam terminativa sunt entia positiva, ad praedicamentum quantitatis vel per se, vel reductive pertinentia". — Realne istnienie punktów w continuum, przyjmowane przez wielu scholastyków, nie pociąga za sobą jednak przekonania, iż continuum *składa* się z punktów. Pod tym względem wielu zwolenników rzeczywistości punktów stało na stanowisku Arystotelesa. Punkty nadają continuum to, co nazywamy ciągłością, ale nie nadają mu wielkości. Dlatego nie można continuum złożyć z punktów.

Bradwardina stał na stanowisku Arystotelesa. Dla niego rzeczywiste istnienie punków (atomów) w continuum jest niemożliwe[98]). Continuum może istnieć „sine aliquo indivisibili continuante et finitante"[99]), gdyż *„continuum non continuari nec finitari per talia sed se ipso"*[100]). To twierdzenie kończy cały traktat. Bradwardina daje do niego następujące objaśnienie: „... quia prius ostendit qualiter continuum iam componitur, hic vult ostendere, qualiter non continuatur nec finitur, et qualiter continuatur et finitur". „Si continuum non continuatur nec finitur per indivisibilia talia, et non contingit assiguare aliquod aliud, per quod continuum terminetur vel finiatur et continuatur, igitur continuatur et finitur se ipso". —

„Tractatus de Continuo" Bradwardiny posiada wartość przedewszystkiem z trojakiego względu. Dla historji nauki jest on szczegółowym przyczynkiem do zagadnienia ciągłości i teorji atomistycznej w wiekach średnich i z tego stanowiska zasługuje na dokładne zbadanie. Ze stanowiska historji nauki również, jest pożądanym przyczynkiem, oświetlającym twórczość Bradwardiny. Wreszcie ze stanowiska współczesnej wiedzy ścisłej jest pewnego rodzaju „memento", które poucza nas, iż także odległe czasy kryją pośród swych zdobyczy umysłowych takie, które stają się aktualne i dzisiaj.

---

[97]) L. c.

[98]) T p. 190, w. 31 n. concl. 145 — 148.

[99]) T p. 190., w. 25 n. concl. 144.

[100]) T p. 192, w. 7, corrol concl. 150.

E. Stamm.

„Tractatus de Continuo" von Thomas Bradwardina, eine Handschrift aus dem XIV Jahrhundert.

Mémoire présenté par M. S. Dickstein à la séance du 9 mai 1935.

Vor einigen Jahrzehnten hat M. Curtze auf eine Handschrift (R 4⁰ 2) der Thorner Bibl. aufmerksam gemacht, in welcher neben anderen Werken auch der „Tractatus de Continuo" von Bradwardina (ca. 1290—1349) sich fand. Die Handschrift stammt wahrscheinlich v. J. 1359. Ein anderes anonymes Exemplar des Traktats (zweite Hälfte d. XIV Jh.) befindet sich in Erfurt (CA 4^0 385). Auf Grund beider Handschriften stellte ich den Text zusammen, welcher in kurzer Zeit wird veröffentlicht werden. Der Traktat bildet einen wichtigen Beitrag zum Continuumproblem im Mittelalter und weist sogar manche Berührungspunkte mit modernen Untersuchungen über Continuum auf (Drobisch, Brouwer). Er ist zum grössten Teil eine Kritik der mathematischen und physikalischen Atomistik in Anlehnung an Aristoteles, Averroes und Algazel, gegen Pythagoras, Plato, Democritus, Walther Burleigh († 1337), Heinrich Goethaels (Gandavensis, 1217—1295) und Robert Grosthead († 1253). Nach B. besteht kein Continuum aus Atomen (Indivisibilien), sondern setzt sich zusammen aus unendlicher Anzahl von Continuen ähnlicher Art. Die Punkte (Atome) existieren im Continuum nicht real, denn das Continuum kann ohne continuierende und finitierende Indivisibilien bestehen; es besteht durch sich selbst. In der Kritik und Entwickelung des Problems befasst sich B. unter and. mit dem Problem des Unendlichen, welches er in kathetisches (aktuales) und synkathetisches (potentielles) teilt. Dieser letzte Begriff steht sehr nahe dem des Differentials der modernen Analysis. Das ganze Werk ist ziemlich umfangreich, ca. 5 Druckbogen, gross 8^0.

M. Kołaczkowska i T. Urbański.

Badania rentgenograficzne skrobi nitrowanej.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 9 maja 1935 r.

Badania nad skrobią nitrowaną, zainicjowane przez jednego z autorów pracy niniejszej [1]), doprowadziły do ogólnego rozwiązania szeregu zagadnień, mających charakter technologiczny, a dotyczących warunków otrzymywania i własności tej substancji wybuchowej.

W dalszym ciągu badań nad skrobią nitrowaną rozpoczęto prace bardziej teoretyczne, zmierzające ku wyjaśnieniu budowy azotonu skrobi. Badania te rozpoczęto od doświadczeń rentgenograficznych. Pierwsze próby w tym kierunku podaje komunikat niniejszy.

Rentgenogramy wykonane były w Zakładzie Mineralogji i Petrografji Uniwersytetu Warszawskiego metodą Debye'a i Scherrera promieniami miedzi ($\lambda = 1{,}54$ A^0) z zastosowaniem filtru niklowego. Fig. 1 podaje rentgenogram skrobi kartoflanej wysuszonej na powietrzu. Widoczne są tu liczne pierścienie interferencyjne, zauważone już przez autorów dawniej badających tę substancję [2]).

Po znitrowaniu do zawartości 12,63% mieszanką nitrującą, utworzoną z kwasu azotowego i siarkowego i po dokładnem wygotowaniu azotonu skrobi i wysuszeniu na powietrzu otrzymano obraz widoczny na fig. 2.

Zmiana obrazu przy przejściu od skrobi pierwszej do jej azotanu (od fig. 1 do fig. 2) jest bardzo widoczna: polega ona

[1]) J. Hackel i T. Urbański. Roczniki Chem. **12**, 1932, 276. **13**, 1933, 221. Przemysł Chem. **18**, 1934, 398. Wiadomości Techn. Artyler. Nr. **18**, 1932, 38. Z. ges. Schiess-Sprengstoffw. **28**, 1933, 306, 350, 378. **29**, 1934, 14, 16. **30**, 1935, 98.

[2]) np. Samec i Katz. Z. Physik. Chem. (A), **163**, 1933, 291.
J. R. Katz i Derksen. Z. Physik. Chem. (A), **165**, 1933, 288. **167**, 1933, 129.
J. R. Katz i van Itallie. Z. Physik. Chem. (A), **166**, 1933, 27.
J. R. Katz. Rec. trav. Chim. **53**, 1934, 555.
J. R. Katz i Weidinger. Rec. trav. Chim. **53**, 1934, 949.

na zmniejszeniu się liczby pierścieni oraz mniej wyraźnym ich zarysie. Charakterystyczne jest zniknięcie zupełne drobnych pierścieni o dużej średnicy (słabo widocznych na fig. 1) i ukazanie się szerokiego zamglonego pola (halo), tak charakterystycznego dla ciał bezpostaciowych.

Zestawiając oba obrazy, można sądzić, że zastąpienie (częściowe) grup — *OH* skrobi grupami — ONO_2 związane jest z pewnem uwstecznieniem regularności budowy.

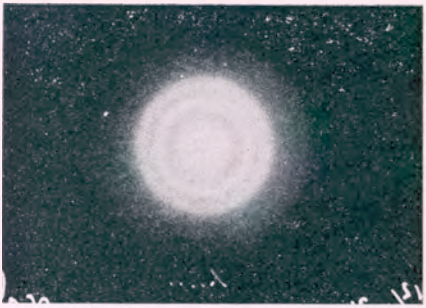

Fig. 1.

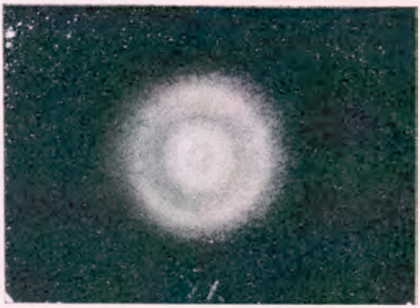

Fig. 2.

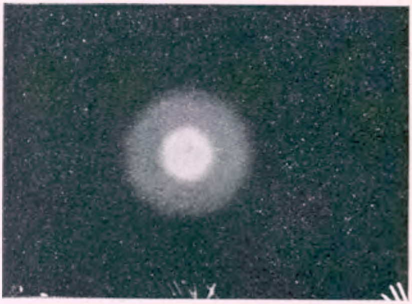

Fig. 3.

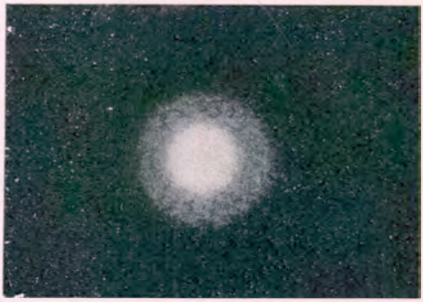

Fig. 4.

Wywołane to jest prawdopodobnie w pierwszym rzędzie pęcznieniem, któremu ulegają gałeczki skrobi w czasie nitrowania.

Pęcznienie jest trwałe i nie znika w czasie gotowania w wodzie.

Zgadza się to z zauważoną w skrobi nitrowanej utratą własności optycznych, przedewszystkiem dwójłomności, tak charakterystycznej dla skrobi. (Skrobia nitrowana daje w świetle spolaryzowanem pod mikroskopem obraz jednolity, niezmieniający się przy obrocie stolika).

Fig. 3 wyobraża skrobię rozpuszczalną, która wskutek zabiegu chemicznego zatraciła swą postać morfologiczną i, jak widać z rentgenogramu, również i postać krystaliczną, dając typowy rentgenogram ciała bezpostaciowego. Po znitrowaniu do zawartości 12,40% *N*, otrzymujemy natomiast obraz uwidoczniony na fig. 4, w którym wyraźnie występuje pierścień interferencyjny, świadczący o tem, że w tym przypadku wprowadzenie grup — ONO_2 przekształca substancję bezpostaciową w układ bardziej skoordynowany.

Jest rzeczą niezmiernie ciekawą, że średnica pierścienia widocznego na fig. 4 zgadza się zupełnie ze średnicą pierścienia fig. 2. Różnica polega jedynie na rozmaitem natężeniu obu pierścieni.

Świadczyłoby to o tem, że ustrój wewnętrzny domniemanych krastalitów skrobi znitrowanej otrzymanych zarówno ze skrobi naturalnej jak i z przygotowanej specjalnie, rozpuszczalnej i bezpostaciowej, jest w obu przypadkach bardzo do siebie zbliżony.

Na zakończenie autorzy korzystają ze sposobności, aby złożyć wyrazy podziękowania p. Prof. St. J. Thuguttowi za umożliwienie wykonania tej pracy.

Zakład Technologji Materjałów Wybuchowych
Politechniki Warszawskiej
i
Zakład Mineralogji i Petrografji
Uniwersytetu Warszawskiego.

M. Kołaczkowska i T. Urbański.

Etude röntgenographique des nitrates d'amidon.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 9 mai 1935.

Résumé.

Les auteurs ont essayé d'obtenir les spectrogrammes par les rayons *X* des nitrates d'amidon en les comparant avec des spectrogrammes obtenus pour la fécule de pommes de terre (fig. 1) et l'amidon soluble (fig. 3).

Ces deux espèces d'amidon ont montré après leur nitration une ressemblance considérable: la nitrofécule de pommes de terre (fig. 2) et le nitroamidon de l'amidon soluble (fig. 4)

donnent le même anneau principal d'interférence qui semble d'ailleurs indiquer le fait suivant.

L'amidon naturel a une structure microcristalline plus nette que le même amidon après l'introduction des groupe — *ONO_2*, mais par contre, l'amidon amorphe (soluble) reçoit après cette introduction une structure plus régulière.

A. Łaszkiewicz.

Cylindryczne zdjęcia Lauego.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 9 maja 1935 r.

Über die Zylinder-Laueaufnahmen.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 9 mai 1935.

S. Przyłęcki i H. Rafałowska.

Badania nad wiązaniem białek z wielocukrami Cz. V.

Przedstawił S. Przyłęcki dn. 9 maja 1935 r.

Recherches sur les complexes des protéines avec les polysaccharides.

Mémoire présenté par M. S. Przyłęcki à la séance du 9 mai 1935.

Posiedzenie
z dnia 29 maja 1935 r.

J. Gillis.

O mierzalnych linjowo płaskich zbiorach punktów.

Przedstawił S. Saks dn. 29 maja 1935 r.

Streszczenie.

W pracy tej autor zajmuje się, z punktu widzenia teorji miary linjowej zbiorów, rzutami zbioru mierzalnego linjowo na prostą o kierunku zmiennym. Rozważania te, poprzedzone są systematycznym wykładem podstawowych wyników teorji miary linjowej, i wiążą się z dwiema poprzedniemi pracami autora (*Fundam. Math.*, t. 22 (1934), pp. 57—69; *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, t. 30 (1934), pp. 47—54).

J. Gillis.

On linearly measurable plane sets of points.

Mémoire présenté par M. S. Saks à la séance du 29 mai 1935.

INTRODUCTION.

The general problem out of which arose this paper and two papers [1]) already published was the investigation of the orthogonal projections of irregular linearly measurable plane sets of points. The fundamental geometrical properties of linearly

1) „On linearly measurable plane sets of points of upper density $1/2$". Fund. Math. XXII (1934) pp. 57—69, and „On the projection of irregular linearly measurable plane sets of points", Proc. Cambr. Phil. Soc. XXX (1934), pp. 47—54. I shall refer to these papers as (*F. M.*) and (*C. P.*) respectively.

measurable plane sets have been investigated by Besicovitch[2]), and those of his theorems which are relevant to my purpose have been quoted[3]) without proof. A study of the problem of the projections of such sets leads to what appears to be a fundamental difference of structure between general irregular linearly measurable plane sets and those of upper density $\frac{1}{2}$, the latter having a remarkable and simple structure[4]). Accordingly it is with the latter that I have been mainly concerned, starting from an unproved expression of opinion[5]) that such sets have projection of zero measure[6]) on almost all directions. Further investigation, although still far from providing a full justification of this opinion, has not in any way tended to weaken it.

I have proved[7]) the following theorem:

Theorem. *Given a linearly measurable plane set A of upper density $\frac{1}{2}$, we can write $A = G + R$, where*

(i) $LR = 0$, *and*

(ii) *Corresponding to each point x of G there is a set of directions $P(x)$, of measure greater than or equal to $\frac{1}{2}\pi$ (the measure of the set of all directions being taken as 2π) such that, if Θ is any direction belonging to $P(x)$ then*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\text{measure of projection of } [A \times c(x, r)] \text{ on } \Theta}{L[A \times c(x, r)]} = 0 .$$

It is my intention in this paper to show that, if A is further restricted to have positive lower density at almost all of its points, then the theorem can be sharpened in that we may replace „lim inf" by „lim sup". This will be proved by combining the original theorem with the following theorem.

---

[2]) On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, Math. Annalen 98 (1927), 422—464.

[3]) See (F. M.) pp. 58—59 for this statement and for the definition of the technical terms used there and in this paper.

[4]) See (F. M.) p. 62. [5]) See (F. M.) p. 59.

[6]) I shall say simply „zero" and „positive projection" for projection of zero and positive measure respectively.

[7]) (F. M.) pp. 59—69.

Theorem. *If A is a linearly measurable plane set with positive lower density at almost all of its points, then $A = A' + A''$, where*

(i) $LA' = 0$

and (ii) *If $a \in A''$, then*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\text{measure of projection of } [A \times c(a, r)] \text{ on the direction } \Theta}{L[A \times c(a, r)]}$$

exists for almost all Θ.

The proof of this theorem involves the use of two fundamental theorems both of which are similar to theorems of Schauder[8]) for the case of the two-dimensional Gross measure of sets in three dimensions. In Section VI I sketch a further deduction from this theorem.

Theorem (A). *If A is a linearly measurable set of points in the plane xOy and $LA < \infty$, then we can write $A = B + \sum_{n=1}^{\infty} H_n$, where*

(1) *the projection of B on Ox has measure zero,*

(2) *no ordinate ($x =$ constant) meets any H_n in more than one point, and*

(3) *$B, H_1, H_2, \ldots$ are all linearly measurable, and $H_i \times H_j = 0 = B \times H_i$ for $i \neq j$.*

Theorem (B). *If A is as in Theorem (A) and has lower density at almost all of its points greater than, or equal to, a fixed positive number, then, at almost all points a of A,*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\text{measure of projection on } Ox \text{ of } A \times c(a, r)}{L[A \times c(a, r)]}$$

exists.

In the case of Theorem (B) the proof, except for the almost trivial „Covering Theorem" of Section III, closely follows that of Schauder. In the case of Theorem (A) the proof is on similar lines to Schauder's but I believe that I have managed to introduce some simplifications. Theorem 3 of Section I is an imitation of a similar theorem of Lusin for analytic sets; an exact reference is given in a footnote to the theorem. The deduction of my main theorem from theorems (A) and (B) is, so far as I know, original.

---

[8]) Schauder, The theory of surface measure, Fund. Math., VIII (1926), pp. 1 — 48.

I.

1. I need the following lemma which is due to Sierpiński [9]).

Lemma 1. *If A is a linearly measurable plane set, then there exists a G_δ, H (say), containing A and of the same linear measure.*

There are two cases:

(a) $LA = +\infty$. In this case take for H the whole plane and the lemma is satisfied.

(b) $LA < +\infty$. Take a sequence $\{\varepsilon_n\}$ of positive numbers which tend decreasingly to zero. By the definition of linear measure [10]) we have, for any positive ρ,

$$L_\rho A \leqslant LA = \lambda \text{ (say)}. \tag{1}$$

By the definition of $L_\rho A$ we can find a sequence $\{U_k^{(n)}\}$ of open convex areas such that each point of A is interior to at least one of the $U_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ and

$$d(U_k^{(n)}) < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

and

$$\sum_k d(U_k^{(n)}) < L_\rho A + \varepsilon_n \leqslant \lambda + \varepsilon_n. \tag{3}$$

Let

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)}. \tag{4}$$

H_n is an open set defined for each n. Let

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n. \tag{5}$$

H is a G_δ which contains A, since each H_n contains A.

Given m, we can find n so that

$$\varepsilon_n < \frac{1}{m}. \tag{6}$$

By (2), (3), (4), (5) and (6)

$$L_{1/m} H < \lambda + \varepsilon_n < \lambda + \frac{1}{m}.$$

---

[9]) Sur la densité linéaire des ensembles plans, Fund. Math. IX (1927), pp. 172—185.

[10]) I use the notation of Besicovitch, loc. cit.

Since m is arbitary and H is clearly measurable, we deduce that

$$LH \leqslant \lambda. \tag{7}$$

But, since H contains A,

$$LH \geqslant \lambda. \tag{8}$$

From (7) and (8) we get $LH = \lambda$, and the lemma is proved.

Lemma 2. *If A is any plane set of points and E its projection on the axis of x, then $m^* E \leqslant L^* A$.*

This lemma follows immediately from the definitions of outer linear measure of plane sets and outer Lebesgue measure of linear sets and from the obvious fact that the projection of a convex area cannot be greater than its diameter.

Lemma 3. *If E_n be the set of points of Ox each of which has the property that the ordinate through it contains at least n points of A, then $m^* E_n \leqslant \frac{1}{n} L^* A$. (Gross' Lemma)* [11]).

Suppose that A is contained in the square $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

If $x_0 \varepsilon E_n$, let $\lambda(x_0) =$ greatest number such that the ordinate $x = x_0$ contains at least n points at mutual distances greater than or equal to $\lambda(x_0)$.

Let $E_{nk} =$ set of x_0 for which $\lambda(x_0) > \frac{1}{k}$.

Clearly, $E_{n,k} \subset E_{n,k+1}$ and $E_n = \sum_{k=1}^{\infty} E_{n,k}$.

Hence, given any positive number ε, we can find k_0 such that, if only $k \geqslant k_0$, $m^* E_{n,k} > m^* E_n - \varepsilon$.

Now divide the unit square into k_0 equal strips W_h, $\frac{h-1}{k_0} < y \leqslant \frac{h}{k_0}$ $\quad (h = 1, \ldots k_0)$.

If $x_0 \varepsilon E_{n,k_0}$ then the line $x = x_0$ contains points of A in at least n different strips. Let $E_{n,k,h} =$ subset of $E_{n,k}$ corresponding to points in $A \times W_h$. Then

$$\sum_h m^* E_{n,k,h} \geqslant n \cdot m^* E_{n,k}. \tag{9}$$

---

11) This lemma was proved by Gross for surface measure. See Gross, Über das Flächenmass von Punktmengen, Monatshefte für Mathematik und Physik (1918), p. 174. The proof given here is a reproduction of Gross' proof.

[To see this we note that, for any linear sets, $m^* B_1 + m^* B_2 \geqslant m^*(B_1 + B_2) + m^*(B_1 B_2)$ and hence, by finite induction, $\sum_{i=1}^{n} m^* B_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^* K_i$ where $K_i = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots} (B_{\alpha_1} B_{\alpha_2} \ldots B_{\alpha_i})$, summed over $1 \leqslant \alpha_r \leqslant n$ and $\alpha_r \neq \alpha_s$ if $r < s \leqslant i$].

Hence, by (9) and Lemma 2, $n \, . \, m^* E_{n,k} \leqslant \sum_{b} L^*(A \times W_b)$, $= L^* A$, since, for $b \neq k$, the sets $A \times W_b$ and $A \times W_k$ are contained in distinct strips; i. e. $L^* A \geqslant n \, . \, (m^* E_n - \varepsilon)$ and hence $m^* E_n \leqslant \frac{1}{n} \cdot L^* A$ (since ε is arbitrary).

Cor. *If $L^* A < \infty$, then E_∞ has measure zero.*

I now prove two theorems[12]).

Theorem 1. *If A is a linearly measurable plane set with finite linear measure and E is its projection on Ox, then E is measurable (L).*

Construct H as in Lemma 1. Since $H \supset A$ and $LH = LA$ we see that

$$L(H - A) = 0$$

and, a fortiori, the projection of $H - A$ has measure zero. Now

$$\text{projection of } H = \text{projection of } A + \text{that of } (H - A). \qquad (10)$$

Since H is the intersection of open sets its projection is measurable (L). Hence, by (10), the projection of A is measurable (L).

2. **Theorem 2.** *If A is a linearly measurable set of finite linear measure, then we can write $A = Q + R$ where*

(i) *Q, R are both measurable and $Q \times R = 0$,*

(ii) *the projection of Q on Ox has measure zero,*

(iii) *if $(x_0, 0)$ is a point of the projection of R on Ox, then there are at most a finite number of values of y such that $(x_0, y) \varepsilon A$.*

By Corollary of Lemma 3 $m E_\infty = 0$.

---

[12]) These (and their proof) are similar to theorems of Schauder, loc. cit.

Hence we can find a linear Borel set Q^* such that

$$Q^* \supset E_\infty \quad \text{and} \quad m\,Q^* = 0.$$

Now consider the set of points (x, y) where x runs through Q^* and y through all real values. This set, B (say), is a plane Borel set. Put $B \times A = Q$ and $A - Q = R$.

Then (i) is clearly satisfied. Since the projection of Q is contained in Q^*, (ii) is satisfied.

To see (iii) suppose that $(x_0, y) \varepsilon A$ has an infinite number of solutions in y. Then $x_0 \varepsilon E_\infty \subset Q^*$ and is not, therefore, in the projection of R. Q. E. D.

3. **Definition.** *A point (x_0, y_0) is called an inferior point of A if (x_0, y_0) belongs to A and if there is no point (x_0, y) of A such that $y < y_0$.*

Theorem 3. *If A is measurable*[13]*), then the set of inferior points of A, G (say), is also measurable*[14]*).*

To begin with we construct, as in Lemma 1, a Borel set, B (say) such that $B \supset A$ and $L(B - A) = 0$.

Let G^* be the set of inferior points of B.

Take any denumerable set of real numbers $\{r_n\}$ which is everywhere dense in the set of all real numbers. Let δ_n denote the line $y = r_n$, and let B_n denote the set of points of B below or on δ_n.

Then B_n is again a Borel set. Now let C_n denote the set of points contained in all the ordinates through the points of B_n, and let Θ_n denote the set of points of $B \times C_n$ which lie above δ_n. Then $\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n$ is clearly measurable and is contained in B. Also it is evident that $G^* = B - \Theta$ and is therefore measurable.

But $G^* - G \subset B - A$ and hence $L^*(G^* - G) = 0$, whence G is also measurable.

4. We can now prove theorem (A).

Starting with A, make the dissection $A = Q + R$, as in Theorem 2 of I, 2.

---

[13]) I shall sometimes (as here) write „measurable" for „linearly measurable in the plane".

[14]) Cf. Lusin, Les Ensembles Analytiques (Paris, 1930), pp. 281—282.

Now consider the measurable set R. No ordinate $x =$ constant contains more than a finite number of points of R. Let H_1 be the set of inferior points of R. Since H_1 is measurable, so is $R - H_1$.

Let H_2 be the set of inferior points of $R - H_1$. We can carry on indefinitely, letting H_n be the set of inferior points of the measurable sets $R - \sum_{r=1}^{n=1} H_r$.

It is clear from the properties of R that this process exhausts it, i. e.

$$R = \sum_{r=1}^{\infty} H_r, \quad H_i \times H_j = 0 \text{ if } i \neq j,$$

and each H_r is uniform with respect to Ox.

Now put $B = Q$ and the theorem (A) is proved.

II.

1. I now introduce two functions defined as follows[15]: If a is any point and $c(a, r)$ the circle with centre a and radius r, then

$$\Phi(a, r) = L[A \times c(a, r)]$$

and

$$\Psi(a, r, \Theta) = m \text{ [Projection on } \Theta \text{ of } A \times c(a, r)],$$

where Θ denotes the angle between the given direction and Ox.

I shall also write

$$\Psi(a, r) \quad \text{for} \quad \Psi(a, r, 0).$$

The following theorem will be of use.

Theorem. *If $LA < \infty$, then $\Phi(a, r)$, $\Psi(a, r)$ are both*

(i) *continuous on the right in r, for fixed a,*

and (ii) *upper semi-continuous in a for fixed r.*

If we are given a sequence $\{r_n\}$ such that r_n tends from the right to r, then

15) For the methods of this section, cf. Schauder, loc. cit.

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(a, r_n) = \lim_{n\to\infty} L[A \times c(a, r_n)]$$
$$= L\{\lim_{n\to\infty} [A \times c(a, r_n)]\}$$
$$= L[A \times c(a, r)]$$
$$= \Phi(a, r). \qquad (11)$$

Again by Lemma 2 of I,

$$0 \leqslant \Psi(a, r_n) - \Psi(a, r) \leqslant$$
$$\leqslant m\,[\text{Projection on } Ox \text{ of } \{A \times c(a, r_n) - A \times c(a, r)\}] \qquad (12)$$
$$\leqslant L[A \times c(a, r_n) - A \times c(a, r)] = \Phi(a, r_n) - \Phi(a, r).$$

From (12) and (11) we see that

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(a, r_n) = \Psi(a, r). \qquad (13)$$

This completes (i).

To see (ii) suppose that A_α is the set of points where $\Phi(a, r_0) \geqslant \alpha$.

We have to show that A_α is closed. Suppose that a is a limiting point of A_α and that the sequence of points $\{a_n\}$ of A_α tends to a.

Let Δ_n denote the distance $\overline{aa_n}$. Then Δ_n tends to zero with $1/n$. Clearly

$$c(a_n, r_0) \subset c(a, r_0 + \Delta_n). \qquad (14)$$

Therefore, since $a_n \varepsilon \Delta_\alpha$,

$$\alpha \leqslant \Phi(a_n, r_0),$$

and so, by (14),

$$\alpha \leqslant \Phi(a, r_0 + \Delta_n).$$

Let n tend to infinity and apply (11). We see that

$$\alpha \leqslant \Phi(a, r_0). \qquad (15)$$

By (15) $a \varepsilon A_\alpha$, i. e. A_α is a closed set. Hence $\Phi(a, r_0)$ is upper semi-continuous in a for fixed r. The proof for Ψ is similar.

2. **Definition.** A function $f(a)$ of the point a is *measurable* on the linearly measurable plane set A if, for every β, the set of points of A where $f(a) \geqslant \beta$ is linearly measurable. In this way we can define the idea of the „Lebesgue-Carathéodory Integral” on such a set and it is clear that its fundamental

properties will be completely analogous to those of the Lebesgue Integral on measurable linear sets. The integral of the function $f(a)$ over the set A will (if it exists) be written $\int\limits_A f(a)\, ds$.

As in the case of integrals on Lebesgue sets a bounded measurable function is summable.

Now it follows immediately from the theorem of the last paragraph that, if $\chi(a, r) = \dfrac{\Psi(a, r)}{\Phi(a, r)}$, then $\chi(a, r)$ is

(i) continuous on the right in r, for fixed a, and

(ii) a measurable function of a for fixed r.

Now put
$$F^*(a) = \limsup_{r\to\infty} \chi(a, r)$$
and
$$F_*(a) = \limsup_{r\to\infty} \chi(a, r).$$

$F^*(a)$ and $F_*(a)$ may be called respectively, *„upper and lower coefficients of foreshortening“*.

Since, by Lemma 2, (I, 1), $\Psi(a, r) \leqslant \Phi(a, r)$, we see that $0 \leqslant F_*(a) \leqslant F^*(a) \leqslant 1$. Hence, if we can show that F^* and F_* are measurable it will follow that they are summable. I proceed to prove the following theorem.

Theorem. *$F^*(a)$ and $F_*(a)$ are measurable (and hence summable) if only LA is finite*[16]*)*.

Let $\rho_1, \rho_2, \ldots$ be a denumerable set of real numbers, everywhere dense in $(0, r)$.

Let $U(a, r) =$ upper bound of $\chi(a, \rho_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$
And $V(a, r) =$ upper bound of $\chi(a, \rho)$ for $0 < \rho < r$.
Clearly
$$U(a, r) \leqslant V(a, r). \tag{16}$$

Now let α be any positive number less than $V(a, r)$ and choose α' so that $\alpha < \alpha' < V(a, r)$. By the definition of V, we can find r_0 in $(0, r)$ such that $\chi(a, r_0) > \alpha'$ and, since $\chi(a, \rho)$ is continuous on the right in ρ, we can find an interval $(r_0, r_0 + h)$ throughout which $\chi(a, \rho) > \alpha$.

---

[16]) Actually this theorem could have been taken as proved by the general theory of measure. The proof given is that now standard for similar theorems, cf. the well known books of Hobson, Hahn, Carathéodory, etc.

But the sequence $\{\rho_n\}$ must have members in this interval, whence $U(a, r) \geqslant \alpha$ and, since α is arbitrary,

$$U(a, r) \geqslant V(a, r). \tag{17}$$

By (16) and (17)

$$V(a, r) = U(a, r). \tag{18}$$

Now take any sequence $\{r_k\}$ of positive numbers tending to zero. Then $F^*(a) = \lim_{k\to\infty} V(a, r_k)$, since χ (and hence V) is continuous on the right in r and so $F^*(a) = \lim_{k\to\infty} U(a, r_k)$, by (18).

But $U(a, r_k)$ is, for each k, a measurable function of a (since χ is so) and hence $F^*(a)$ is measurable.

The proof for $F_*(a)$ is similar.

III.

Sets of positive lower density.

Definition. A family F of circles is said to *cover* a plane set of points, A, if each point of A is the centre of a set of circles of F with artbitrarily small radius.

I shall prove the following theorem.

Covering theorem[17]. *If A is a bounded measurable plane set whose lower density is, at almost every point of itself, greater than a positive number δ_0, then out of every covering family of circles, we can extract a sequence $\{K_i\}$ such that*

$$K_i \times K_i = 0 \quad if \quad i \neq j$$

and $\sum_i K_i$ contains almost all points of A.

This theorem will follow at once from the following lemma of Sierpiński[18].

Lemma. *If A is a bounded plane set and F a covering family of circles, then there exists a sequence of circles $\{K_i\}$ of F such that $K_i \times K_j = 0$ (if $i \neq j$) and such that, if R_i denotes*

---

[17]) A set which satisfies all the conditions of the Covering Theorem will be referred to, in future, as a *dense set*.

[18]) Sierpiński, op. cit., pp. 176—177.

the circle concentric with K_i and with three times the radius of K_i, then

$$A \subset R_1 + R_2 + \cdots + R_n + \cdots.$$

We can restrict F to those of its members whose centres are at points of A and whose radii are $\leqslant 1$. Let M_1 be the upper bound of the diameters of the circles of F. Then there exists a circle K_1 of F such that $d(K_1) \geqslant \frac{1}{2} M_1$.

Consequently, for any K of F,

$$d(K_1) \geqslant \frac{1}{2} d(K). \tag{19}$$

Define now, by induction, $K_2, K_3, \ldots$ such that

(a) $K_n \times K_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots n-1$, and

(b) for every circle K of F such that $K \times K_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$), we have $d(K_n) \geqslant \frac{1}{2} d(K)$.

If (a) can be satisfied, then we can satisfy (b) by taking M_n as the upper bound of the diameters of those K for which $K \times K_i = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$) and proceeding as for $n = 1$.

If (a) were impossible for a particular n but possible for $(n-1)$, then the closed set $K_1 + \cdots + K_{n-1}$ would have points in common with every circle K of F and would therefore contain A. The lemma would then be satisfied.

Let us suppose then that the sequence $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}, \ldots$ is infinite, and that the point p of A is not contained in the closed set $K_1 + \cdots + K_{n+1}$. Then we can find a circle $K^{(n)}$ with centre p such that

$$K^{(n)} \times K_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{20}$$

If (20) were true for all j, then, by (b),

$$d(K_j) \geqslant \frac{1}{2} d(K^{(n)}) \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

But since the sequence $\{K_i\}$ is non-overlapping and A and $\sum_i K_i$ are bounded, we have

$$\lim_{j \to \infty} d(K_j) = 0. \tag{22}$$

From the contradiction between (22) and (21) we see that there must exist s ($\geqslant n$) such that,

$$K^{(n)} \times K_j = 0 \qquad \text{for} \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ s-1, \tag{23}$$

but

$$K^{(n)} \times K_s \neq 0\,. \tag{24}$$

From (23) and (b) we have

$$d(K_s) \geqslant \frac{1}{2}\, d(K^{(n)})\,. \tag{25}$$

By (25) and (24) we see that R_s contains the centre of $K^{(n)}$, i. e. p, whence $A \subset R_1 + R_2 + \cdots$.

To revert to the theorem.

If a is a point of A then we restrict those circles of F which are concentric with a to be so small that

(i) if $c(a,\, r)$ is any one of the „permitted" circles of F, then the mean density of A in $c(a,\, r)$ is greater than $\frac{1}{2}\delta_0$, and

(ii) the mean density of A in $c(a,\, 3r)$ is less than 2.

(i) and (ii) are both possible at almost all points of A. From this restricted family F, extract $\{K_i\}$ as in Sierpiński's Lemma.

Then $\dfrac{LA}{L[A \times K_i]} \geqslant \dfrac{\frac{1}{2}\delta_0 \,.\, 2r_i}{2 \,.\, 6r_i} = \dfrac{1}{12}\delta_0$ and this is true for each i; i. e. the set $\{K_i\}$ contains a portion of A of total measure $\geqslant \dfrac{1}{12}\delta_0 \,.\, LA$.

Hence we can find a finite set $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$ of non-overlapping circles containing a portion of A of measure $> \dfrac{1}{13}\delta_0 \,.\, LA$ (say). We can now use the familiar argument of Vitali's Theorem [19]) and the result follows.

[19]) Vitali, Sui gruppi di punti e sulle funzione di variabli reali Atti della R. Academia delle Scienze di Torino, XLIII, p. 229.

IV.

1. **Theorem**[20]). *If A is a dense linearly measurable plane set and A_1 a measurable subset of A, then, at almost all points of A_1, $F^*(a)$ is the same whether calculated with respect to A or to A_1.* [The same is, of course true of $F_*(a)$].

For, with an obvious notation,

$$0 < \Psi_A(a, r) - \Psi_{A_1}(a, r) < \Phi_A(a, r) - \Phi_{A_1}(a, r) = o(r)$$

at almost all points of A_1.

While, if the lower density of A (and hence also that of A_1 (p. p.) by the Theorem of Permanence of Densities) has the positive lower bound δ_0,

$$\Phi_A(a, r) \geqslant \Phi_{A_1}(a, r) > \frac{1}{2}\delta_0 r,$$

for all sufficiently small r; i. e.

$$\left|\frac{\Psi_A(a, r)}{\Phi_A(a, r)} - \frac{\Psi_{A_1}(a, r)}{\Phi_{A_1}(a, r)}\right| \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}\delta_0 r}\,|\Psi_A(a, r) - \Psi_{A_1}(a, r)| = o(1) \quad (26)$$

whence the theorem.

Cor. If A is a dense linearly measurable plane set and A_1 a measurable subset of A with zero projection on Ox, then, almost everywhere in A_1, $F^*(a)$ (calculated with respect to A) is zero.

2. **Theorem.** *If A is measurable and dense and has finite linear measure, and A_1 is a measurable subset of A uniform with respect to x, then $\int\limits_{A_1} F^*(a)\,ds = \int\limits_{A_1} F_*(a)\,ds = m(E_1)$ where E_1 is the projection of A_1 on Ox, and $F^*(a)$, $F_*(a)$ are calculated with respect to A.*

---

[20]) It is evident from the proof of this theorem that $\limsup\limits_{r\to 0} \chi_n(a, r, \Theta) = \limsup\limits_{r\to 0} \chi_{A_1}(a, r, \Theta)$ except at a set of A_1 included in the set of those points a of A_1 where $D^*(a, A - A_1) > 0$. This latter set has linear measure zero, and is *independent of* Θ. The same is true of $\liminf\limits_{r\to 0} \chi(a, r, \Theta)$ $\left[\chi(a, r, \Theta) = \frac{\Psi(a, r, \Theta)}{\Phi(a, r)}\right]$.

Lemma. *If at every point of a measurable subset A_2 of A_1, $F^*(a) \geqslant \alpha$ (or $\leqslant \beta$) then the measure of the projection of A_2 is $\geqslant \alpha \cdot LA_2$ [or $\leqslant \beta \cdot LA_2$, respectively].*

Suppose that, for every point a of A_2, $F^*(a) \geqslant \alpha$. Then, given $\varepsilon > 0$, we can, with each point of A_2 as centre draw a sequence of circles $\{c(a, r_n)\}$ such that

$$\chi(a, r_n) > \alpha - \varepsilon \tag{27}$$

and

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0. \tag{28}$$

Since A_2 is a measurable subset of A we can find a denumerable sequence $K_1, K_2, \ldots$ of these circles such that

(i) $K_i \times K_j = 0$ if $i \neq j$, and

(ii) $L\left[A_2 - A_2 \times \sum_i K_i\right] = 0$.

By (i) and the uniformity of A_2 we see that measure of

$$\begin{aligned} \text{projection of } A_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} m\,[\text{projection of } A_2 \times K_i] \\ &> (\alpha - \varepsilon) \sum_i L(A_2 \times K_i) \\ &= (\alpha - \varepsilon) \cdot LA_2, \quad \text{by (ii); and } \varepsilon \text{ is arbitrary.} \end{aligned}$$

Therefore the measure of the projection of $A_2 \geqslant \alpha \cdot LA_2$.

Similarly for the case of $F^*(a) \leqslant \beta$.

We proceed with the theorem. If B is any plane set, I denote by $\omega(B)$ the exterior measure of the projection of B on Ox.

Now $0 \leqslant F^*(a) \leqslant 1$ and $F^*(a)$ is measurable.

Choose a positive integer n and let $A_1^{(k)}$ be the set of points of A_1 where $\dfrac{k-1}{n} \leqslant F^* < \dfrac{k}{n}$.

Then $A_1 = A_1^{(1)} + \cdots + A_1^{(n)} + A_1^{(n+1)}$ and, if $i \neq j$, $A_1^{(i)} \times A_1^{(j)} = 0$.

Hence $\omega(A_1) = \omega(A_1^{(1)}) + \cdots + \omega(A_1^{(n+1)})$.

But, by the lemma and the definition of $A_1^{(i)}$, we have

$$\frac{k-1}{n} \cdot LA_1^{(k)} \leqslant \omega(A_1^{(k)}) \leqslant \frac{k}{n} \cdot LA_1^{(k)}$$

and hence

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \cdot LA_1^{(k)} \leqslant \omega(A_1) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n} \cdot LA_1^{(k)}. \tag{29}$$

Now $F^*(a)$ is summable on each $A_1^{(k)}$ and hence, by the mean value theorem,

$$\frac{k-1}{n} \cdot LA_1^{(k)} \leqslant \int\limits_{A_1^{(k)}} F^*(a)\, ds \leqslant \frac{k}{n} \cdot LA_1^{(k)}$$

and hence

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \cdot LA_1^{(k)} \leqslant \int\limits_{A_1} F^*(a)\, ds \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n} \cdot LA_1^{(k)}. \tag{30}$$

From (29) and (30) we get

$$\left| \int\limits_{A_1} F^*(a)\, ds - \omega(A_1) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \cdot LA_1^{(k)} = \frac{1}{n} LA_1 .$$

Hence $\int\limits_{A_1} F^*\, ds = \omega(A_1) = m$ [projection of A_1 on Ox].

Similarly $\int\limits_{A_1} F_*\, ds = \omega(A_1)$, q. e. d.

3. **Theorem (B).** *If A has the same properties as in the preceding theorem, then, at almost all points a of A, $F^*(a) = F_*(a) = F(a)$ (say).*

For, by Theorem (A), $A = B + \sum\limits_{r-1}^{\infty} H_r$, where $B, H_1, H_2, \ldots$ are measurable and each H_r is uniform with respect to x.

Also $\omega(B) = 0$.

Hence, by the theorem of IV, 1, $F^*(a) = F_*(a) = 0$, p.p. in B.

For each r, we have by the preceding theorem, $\omega(H_r) = \int\limits_{H_r} F^*\, ds = \int\limits_{H_r} F_*\, ds$, and we know that $F^*(a) \geqslant F_*(a)$.

Hence $F^*(a) = F_*(a)$ almost everywhere in each H_r.

V.

1. **Lemma 1.** *E is a measurable linear set contained in the interval $0 \leqslant x \leqslant 1$. P is a (Lebesgue) measurable plane set, contained in the square $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$, such that*

(i) *the projection of P on Ox coincides with E, and*

(ii) *for each y_0 of the interval $(0, 1)$ the intersection E_{y_0} of P with the line $y = y_0$ is a translation through a distance y_0 in the direction Oy of a subset of E such that $m E_{y_0} = m E$.*

Then, for almost all x_0 of E, the line $x = x_0$ meets P in a set of measure 1.

Let Q be the plane set obtained by drawing through each point of E an ordinate of length 1. Let $R = P \times Q$.

Then by Fubini's Theorem and (ii)

$$m_2 R = \int_0^1 m E_y \, . \, dy = m E \, .$$

Let $f(x_0) = m$ [Intersection of R with the ordinate $x = x_0$].

Then $m E = m_2 R = \int_E f(x) \, dx$, again by Fubini's Theorem.

But $f(x) \leqslant 1$, and hence $f(x) = 1$, except possibly on a null subset of E, q. e. d.

Lemme 2. *E is a measurable linear set contained in the interval $0 \leqslant x \leqslant 1$, P is a plane set (not necessarily measurable) contained in the square $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$, such that*

(i) *the projection of P on Ox coincides with E, and*

(ii) *for each y_0 of the interval $(0, 1)$ the intersection E_{y_0} of P with the line $y = y_0$ is a translation through a distance y_0 in the direction Oy of a subset of E such that $m^* E_{y_0} = m(E)$.*

Then, for almost all x_0 of E, the line $x = x_0$ meets P in a set of exterior measure 1.

This lemma follows easily from Lemma 1; we merely replace each non-measurable set by its „massgleiche Hülle". The argument is quite trivial.

Theorem. *S is a set in the three-dimensional space $Oxyz$. The projection of S on Oxy is the linearly measurable plane set A. We suppose the following conditions satisfied:*

(1) *No straight line* $z=0$, $x=$ *constant has more than one point in common with* A.

(2) *At almost all points* a *of* A, $\liminf_{r\to 0} \chi(a, r, 0) \geqslant \delta_1 > 0$.

(3) S *is contained in the cube* $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

(4) *If* $0 \leqslant z_0 \leqslant 1$ *and* A_{z_0} *denotes the intersection of* S *with the plane* $z=z_0$, *then* $LA_{z_0}=LA$, *(and, in particular,* LA_{z_0} *exists).*

Then we can write $A=B+C$, *where*

(1) $LB=0$ *and*

(2) *If* a *is a point of* C *then the parallel to* Oz *through* a *meets* S *in a set of exterior measure* 1.

Proof. Let P be the projection of S on the plane Oxz and let E be that of A on Ox. Then it is clear that P and E satisfy the conditions of Lemma 2.

Hence, by the lemma, $E=H+K$, where

(1) $mH=0$ and

(2) if x is a point of K, the intersection of P and the line through x parallel to Ox has exterior Lebesgue measure 1.

Let B be the subset of A which projects into H and $C=A-B$. By hypothesis (1), the sets B and C are uniquely defined. By (2), $LB=0$. If a is a point of C and x its projection on Ox, then it follows that the parallel to Ox through a meets S in a set of exterior Lebegue measure 1, q. e. d.

2. Now I have already shown that, if A is a dense linearly measurable plane set, then $A=B+\sum_{n=1}^{\infty} H_n$ where

(a) B has zero projection on Ox,

(b) no ordinate $x=$ constant meets any H_n in more than one point,

(c) at almost all points of A, $\limsup_{r\to 0} \chi(a, r, 0) = \liminf_{r\to 0} \chi(a, r, 0) = F(a)$ (say).

Let $H_{nk}=$ subset of H_n at which $\frac{1}{k} \geqslant F(a) > \frac{1}{k+1}$ and $H_{n\infty}=$ subset of H_n at which $F(a)=0$.

For each n, $H_{n\infty}$ has zero projection[21]) on $0x$, and so therefore has $\sum_n H_{n\infty}$.

We may thus regard $\sum_n H_{n\infty}$ as included in B. Arrange $\{H_{nk}\}$ in a simple sequence $\{B_n^{(1)}\}$.

Then $A = B + \sum_n B_n^{(1)}$, where

(a) B has zero projection on Ox, and

(b) for each n, $B_n^{(1)}$ satisfies conditions (1) and (2) of the theorem.

Consider any fixed $B_n^{(1)}$ and call it H. Let S consist of the points (x, y, z) obtained thus:

(1) (x, y) runs through H.

(2) corresponding to each (x, y) of H we take the points (x, y, z) such that $\lim\limits_{r \to 0} \chi(xy, r, 2\pi z)$ exists.

Then H and S satisfy conditions (1) — (4) imposed, in the theorem, on A and S respectively; and hence we can write $H_n^{(1)} = F_n + G_n$ where

(1) $LF_n = 0$, and

(2) if $a \varepsilon G_n$, then $\lim\limits_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ exists, except for a set of Θ of interior measure zero. (But, for each a the set of Θ, for which this limit exists, is clearly measurable, and hence „interior measure" may be replaced by „measure").

Let $\sum_n F_n = F$, and $\sum_n G_n = G$. Then $A = B + F + G$ where

(1) B has zero projection on Ox,

(2) $LF = 0$

(3) If $a \varepsilon G$, $\lim\limits_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ exists for almost all Θ.

I write $B + F = A^{(1)}$ and $G = B^{(1)}$. Thus $A = A^{(1)} + B^{(1)}$ where

(1) if $a \varepsilon B^{(1)}$ then $\lim\limits_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ exists for almost all Θ, and

(2) $A^{(1)}$ has zero projection on Ox.

If the set $A^{(1)}$ has zero projection on all directions then $\limsup\limits_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ is zero for all Θ at almost all points of $A^{(1)}$.

---

21) See IV, a, Lemma, and footnote 20).

If not, suppose that the directions from 0 to 2π are well ordered:[22] i. e. $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_\xi \ldots$.

Suppose that Θ_1 coincides with Ox and let Θ_{n_1} be the first of the series on which $A^{(1)}$ has positive projection. Then we get $A^{(1)} = A^{(2)} + B^{(2)}$ as before, and $LA^{(1)} < LA^{(2)}$.

We can continue this process. It follows from the last result that it must come to an end after a denumerable number of applications; i. e. $A = \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} + A^{(\omega)} = B + A^{(\omega)}$ (say) where

(1) if $a \varepsilon B$, $\lim_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ exists for almost all Θ, and

(2) $A^{(\omega)}$ has zero projection on all directions.

By (2), $A^{(\omega)}$ has the property proved for B, except, possibly, for a subset of linear measure zero, and hence, finally, $A = A' + A''$ (say), where

(1) $LA' = 0$ and

(2) if $a \varepsilon A''$, then $\lim_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta)$ exists for almost all Θ.

This proves the theorem for dense sets. To extend it to the case of a general linearly measurable set with positive lower density I remark that such a set is the sum of a denumerable infinity of dense measurable sets, and the theorem, being true for each of these, will also be true for their sum. That concludes the theorem.

3. I combine this theorem with that proved in (*F. M.*) to give the following theorem:

Theorem. *If A is a linearly measurable plane set of points of upper density $\frac{1}{2}$ and with positive lower density then we can write $A = G + R$ where*

(i) $LR = 0$, *and*

(ii) *if $a \varepsilon G$, then we can find a set of directions $P(a)$ filling at least a quarter of the plane such that if $\Theta \varepsilon P(a)$,* $\limsup_{r \to 0} \chi(a, r, \Theta) = 0$.

An easy deduction from this theorem may be stated thus:

---

22) This appeal to the axiom of choice is not actually necessary; but it would be futile deliberately to avoid using it here, since it is in any case essential to any adequate development of point-set theory.

Theorem. *If we are given a set A as in the previous theorem and a positive number ε, then we can write $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ and find a sequence $\{P_n\}$ of sets of directions such that*

(i) *each A_n is linearly measurable*

(ii) *each P_n fills at least a quarter of the plane, and*

(iii) *if $\Theta \varepsilon P_n$ then m* [projection of A on Θ] $< \varepsilon \, . \, LA_n$.

VI.

1. Now let A be any linearly measurable plane set with finite linear measure. At each point a of A we erect an ordinate perpendicular to the plane of A and mark on it the (Lebesgue) measurable set E_a. Let A_x denote the intersection of $\sum_{a \in A} E_a$ with the plane parallel to that of A and distant x from it. I assert that

$$\int_0^\infty LA_x \, . \, dx = \int_A m \, E_a \, . \, ds \text{ [23]}$$

is equal to the two-dimensional measure of $\sum_A E_a$, if $\sum E_a$ is measurable.

I shall not write out the proof of this assertion. It follows obvious lines similar to those used in the proof of the lemmas and theorems of Section V. We begin with the special case where each E_a is a linear interval, in which case we can use the arguments indicated. The general case can then be deduced as in the usual proof of Fubini's Theorem [24].

2. If a is a point of A and Θ is a direction such that

$$\limsup_{r \to 0} \frac{m\,[\text{Projection on } \Theta \text{ of } A \times c\,(a,\, r)]}{L\,[A \times c\,(a,\, r)]} = 0,$$

then Θ will be called a *zero direction of A at a*. If Θ is a zero direction of A at every point of a subset B of A, then Θ will be called a *zero direction of A at the set B*. It is clear that [25]), under such circumstances, B will have zero projection on Θ.

---

[23]) This last integral is in the sense defined in II, 2.

[24]) Cf. Saks, Théorie de l'Intégrale (Warsaw, 1933) pp. 70—74.

[25]) This follows by the theorem of IV, 2.

3. Now let A be a dense linearly measurable plane set of upper density $\frac{1}{2}$. At each point a of A draw an ordinate perpendicular to the plane of A and of length 2π. Let E_a denote the set of directions in $(0, 2\pi)$ which are zero directions of A at a. Then E_a is clearly measurable and we can apply VI, 1. We get

$$\int_0^{2\pi} (LA_x)\,.\,dx = \int_A E_a\,.\,ds$$

$$\geqslant \frac{\pi}{2} \cdot LA \quad \text{by what has gone before.}$$

Let $M(\alpha)$ denote the measure of the set of x for which $LA_x \leqslant \alpha\,.\,LA$.

Then

$$\frac{\pi}{2} \cdot LA \leqslant \int_0^{2\pi} (LA_x)\,.\,dx$$

$$\leqslant \alpha\,.\,M(\alpha)\,.\,LA + [2\pi - M(\alpha)]\,.\,LA,$$

i. e.
$$M(\alpha) \leqslant \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha}.$$

Hence the measure of the set of x for which $LA_x > \alpha\,.\,LA$ is greater than or equal to

$$2\pi - M(\alpha) \geqslant 2\pi - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1-4\alpha}{1-\alpha} \quad \left(\text{we suppose } \alpha < \frac{1}{4}\right).$$

We deduce the following theorem.

Theorem. *If A is a dense linearly measurable plane set of upper density $\frac{1}{2}$ and α is any real number less than $\frac{1}{4}$, then there exists a set of directions Θ of measure $\geqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1-4\alpha}{1-\alpha}$ on each Θ of which a subset A_Θ of A of linear measure $> \alpha\,LA$ has projection of zero Lebesgue measure.*

Henri Malchair.

O funkcjach podharmonicznych.

Przedstawił S. Saks dn. 29 maja 1935 r.

Streszczenie.

Autor rozważa ciąg $\{f_n(x, y)\}$ funkcyj podharmonicznych, zbieżny jednostajnie w otoczeniu każdego punktu obszaru π do pewnej funkcji $f(x, y)$. Zakładając, iż każda z funkcyj $f_n(x, y)$ posiada najmniejszą funkcję harmoniczną zwyżnającą, autor rozważa ciąg tych funkcyj zwyżnających, pokazując m. in. iż ciąg ten jest zbieżny w obszarze π do najmniejszej funkcji harmonicznej zwyżnającej dla funkcji $f(x, y)$.

Henri Malchair.

Sur les fonctions sousharmoniques.

Mémoire présenté par M. S. Saks à la séance du 29 mai 1935.

1. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction sousharmonique[1]) sur un domaine D. Considérons un domaine D' de Dirichlet[2]), borné et complètement intérieur à D; soit

$$\varphi_1(x, y) \geqq \varphi_2(x, y) \geqq \cdots \geqq \varphi_n(x, y) \geqq \cdots \tag{1}$$

une suite de fonctions continues dans D et telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x, y) = \varphi(x, y)$. Soit $\beta_n(x, y)$ $[n = 1, 2, \ldots]$ la fonction harmonique sur D' et égale à $\varphi_n(x, y)$ sur la frontière de ce domaine.

M. Frédéric Riesz démontre[3]) que la fonction $\beta(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(x, y)$ existe, qu'elle est sousharmonique sur D', qu'elle

[1]) Nous considérons dans ce travail les fonctions sousharmoniques généralisées. Ces fonctions ne sont plus nécessairement continues dans le domaine considéré; elles peuvent être seulement semi-continues supérieurement, mais avec la condition de ne pas devenir „très infinies".

[2]) C'est-à-dire que le problème de Dirichlet admette une solution pour toute distribution continue sur la frontière du domaine D'.

[3]) Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (Acta Mathematica, t. 48, 1926).

est in dépendante de la suite (1) et qu'en tout point de D', on a $\beta(x, y) \geqq \varphi(x, y)$; cette fonction $\beta(x, y)$ est *la meilleure majorante harmonique* de la fonction $\varphi(x, y)$ pour le domaine D'.

2. Si une fonction sousharmonique sur un domaine D admet une *majorante harmonique* sur ce domaine, c'est-à-dire une fonction harmonique partout au moins égale, il en existe une inférieure ou égale à toutes; c'est la *plus petite majorante harmonique* [1]).

3. Soit

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_n(x, y),\ \ldots \tag{2}$$

une suite de fonctions sousharmoniques sur un domaine D convergent uniformément en tout point intérieur à D vers la fonction $f(x, y)$; cette fonction $f(x, y)$ est par conséquent sousharmonique sur D.

Nous supposons que les plus petites majorantes harmoniques pour le domaine D des fonctions de la suite (2) existent; soit

$$\psi_1(x, y),\ \psi_2(x, y),\ \ldots,\ \varphi_n(x, y),\ \ldots \tag{3}$$

la suite de ces fonctions.

Théorème I. *La plus petite majorante harmonique $\psi(x, y)$ de la fonction limite $f(x, y)$ pour le domaine D existe.*

En effet, puisque la suite (2) est uniformément convergente, nous avons $f(x, y) < f_n(x, y) + \varepsilon$ en tout point de D et pour $n \geqq N$. Il résulte que nous pouvons également écrire $f(x, y) < \psi_n(x, y) + \varepsilon$ pour $n \geqq N$; en particulier

$$f(x, y) < \psi_N(x, y) + \varepsilon \tag{4}$$

pour tout point de D, puisque nous avons $f_N(x, y) \leqq \psi_N(x, y)$ [n^0 2]. Or la fonction $\psi_N(x, y) + \varepsilon$ est évidemment harmonique sur D; l'inégalité (4) montre que cette fonction est une majorante harmonique pour la fonction $f(x, y)$ en tout point du domaine D. Par conséquent [n^0 2], le théorème est démontré.

Théorème II. *La fonction $\psi(x, y)$ est la limite de la suite* (3) *en tout point du domaine D; la convergence est uniforme.*

---

[1]) M. Marcel Brelot: Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point.

En effet, en tout point de D, nous avons

$$f_n(x, y) < f(x, y) + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_1,$$

et par suite

$$f_n(x, y) < \psi(x, y) + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_1.$$

La fonction $\psi(x, y) + \varepsilon$ est une majorante harmonique pour les fonctions $f_n(x, y)$ $[n > N_1]$. Donc, nous avons

$$\psi_n(x, y) < \psi(x, y) + 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_1.$$

La démonstration du théorème I montre que

$$\psi(x, y) < \psi_n(x, y) + 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n \geqq N.$$

Si nous prenons N_2 à la fois supérieur à N et N_1, nous pouvons donc écrive

$$|\psi(x, y) - \psi_n(x, y)| < 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_2,$$

en tout point du domaine D. La suite (3) converge uniformément dans D vers la fonction $\psi(x, y)$.

4. Considérons une suite de domaines de Dirichlet D_1, $D_2, \ldots, D_n, \ldots$ emboités, complètement intérieurs au domaine D et tendant vers ce domaine. Soit

$$\psi_{1,m}(x, y), \ \psi_{2,m}(x, y), \ \ldots, \ \psi_{n,m}(x, y), \ \ldots \tag{5}$$

la suite des meilleures majorantes harmoniques pour le domaine $D_m [m = 1, 2, \ldots]$ des fonctions de la suite (2).

Nous avons démontré [1]) que la suite (5) converge uniformément vers la meilleure majorante harmonique $\varphi_m(x, y)$ pour le domaine $D_m [m = 1, 2, \ldots]$ de la fonction $f(x, y)$.

De plus, il est évident que l'on a

$$\psi_{n,1}(x, y) \leqq \psi_{n,2}(x, y) \leqq \cdots \leqq \psi_{n,m}(x, y) \leqq \cdots \ [n = 1, 2 \ldots] \tag{6}$$

et que

$$\varphi_1(x, y) \leqq \varphi_2(x, y) \leqq \cdots \leqq \varphi_m(x, y) \leqq \cdots. \tag{7}$$

M. Marcel Brelot montre [2]) que la suite (6) tend vers $\psi_n(x, y)$ et que la suite (7) a pour limite la fonction $\psi(x, y)$.

---

[1]) Sur les fonctions sousharmoniques (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, année 1935).

[2]) Loc. cit., page 18.

Le tableau suivant résume toutes ces propriétés:

$$
\begin{array}{llllllll}
D_1 & \psi_{1,1}(x, y) & \psi_{2,1}(x, y) & \cdots\cdots & \psi_{n,1}(x, y) & \cdots \to & \varphi_1(x, y) & \text{(converg. unif.)} \\
 & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \\
D_2 & \psi_{1,2}(x, y) & \psi_{2,2}(x, y) & \cdots\cdots & \psi_{n,2}(x, y) & \cdots \to & \varphi_2(x, y) & \text{(idem)} \\
\vdots & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \\
D_m & \psi_{1,m}(x, y) & \psi_{2,m}(x, y) & \cdots\cdots & \psi_{n,m}(x, y) & \cdots \to & \varphi_m(x, y) & \text{(idem)} \\
\vdots & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\geqq$} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
D & \psi_1(x, y) & \psi_2(x, y) & \cdots\cdots & \psi_n(x, y) & \cdots \to & \psi(x, y) & \text{(idem).}
\end{array}
$$

Considérons alors la suite

$$\psi_{1,1}(x, y),\ \psi_{2,2}(x, y),\ \ldots,\ \psi_{n,n}(x, y),\ \ldots. \tag{8}$$

A partir d'un certain indice, en tout point intérieur au domaine D, les termes de la suite (8) sont supérieurs à $\varphi_m(x, y) - \varepsilon$.

En effet, la convergence étant uniforme, nous avons en un point quelconque de D

$$\psi_{n,m}(x, y) > \varphi_m(x, y) - \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n \geqq N. \tag{9}$$

En consultant le tableau ci-dessus, on voit facilement que tous les termes qui se trauvent en dessous de la m^e ligne et à droite de la N^e colonne sont également supérieurs à $\varphi_m(x, y) - \varepsilon$. Les termes de la suite (8) se rangent dans cette catégorie à partir d'un certain indice; la propriété est démontrée.

En un point quelconque A de D, on a

$$\varphi_m(x, y) > \psi(x, y) - \varepsilon \qquad \text{pour} \quad m > N_1.$$

Et par l'inégalité (9), nous pouvons écrire qu'au point A

$$\psi_{n,m}(x, y) > \psi(x, y) - 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n \geqq N \quad \text{et} \quad m > N_1. \tag{10}$$

D'autre part, une infinité de termes de la suite (8)

$$\psi_{\alpha_1, \alpha_1}(x, y),\ \psi_{\alpha_2, \alpha_2}(x, y),\ \ldots,\ \psi_{\alpha_n, \alpha_n}(x, y),\ \ldots$$

ne peuvent, au point A, être supérieurs à $\psi(x, y) + \varepsilon$. En effet dans le cas contraire, les fonctions

$$\psi_{\alpha_1}(x, y), \ \psi_{\alpha_2}(x, y), \ \ldots, \ \psi_{\alpha_n}(x, y), \ \ldots$$

seraient, au point A, supérieures à $\psi(x, y) + \varepsilon$; ce qui est impossible puisque la suite (3) converge vers $\psi(x, y)$ [théorème II].

De cette dernière propriété et de la relation (10), il résulte que la suite (8) converge en chaque point du domaine D vers la fonction $\psi(x, y)$.

On démontrerait de la même feçon que toutes les fonctions du tableau ci-dessus situées sur une même parallèle à la diagonale portant les fonctions de la suite (8), forment également une suite convergeant en tout point du domaine D vers la fonction $\psi(x, y)$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit* $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots$ *une suite uniformément convergente de fonctions sousharmoniques sur un domaine D et tendant vers la fonction $f(x, y)$; soit de plus $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ une suite de domaines de Dirichlet, emboités, complètement intérieurs au domaine D et tendant vers ce domaine. Si $\beta_m(x, y)$ est la meilleure majorante harmonique de la fonction $f_m(x, y)$ pour le domaine D_m* $[m = 1, 2, \ldots]$, la suite $\beta_m(x, y)$ $[m = 1, 2, \ldots]$ *converge en tout point du domaine D vers la plus petite majorante harmonique de la fonction $f(x, y)$ pour ce domaine* [1]).

Remarque. Toutes les fonctions du tableau ne sont d'abord définies qu'en tout point intérieur d'un des domaines D_n auquel elles correspondent. Pour définir ces fonctions en un point intérieur à D mais extérieur à ce domaine correspondant, il suffit, par exemple, de les égaler toutes à une même constante. Cela ne change absolument rien aux démonstrations précédentes.

5. Supposons maintenant que la suite (2) ne soit plus uniformément convergente, mais non croissante en tout point intérieur au domaine D; la limite $f(x, y)$ est encore sousharmonique sur D [2]).

Conservons les mêmes hypothèses, c'est-à-dire que nous admettons que les fonctions de la suite (3) existent effectivement.

---

[1]) L'existence des meilleures majorantes harmoniques et des plus petites majorantes harmoniques étant admise par hypothèse.

[2]) En admettant évidemment que la fonction $f(x, y)$ ne devient pas „très infinie".

1[0]) *La suite* (3) *est non croissante en tout point de* D.

En effet, par hypothèse, $f_n(x, y) \geqq f_{n+1}(x, y)$ $[n = 1, 2, \ldots]$. Comme $\psi_n(x, y) \geqq f_n(x, y)$, il vient $\psi_n(x, y) \geqq f_{n+1}(x, y)$. La définition des plus petites majorantes harmoniques entraine

$$\psi_n(x, y) \geqq \psi_{n+1}(x, y).$$

2[0]) *La plus petite majorante harmonique de la fonction* $f(x, y)$ *pour le domaine* D *existe.*

En effet, il existe une majorante harmonique de $f(x, y)$ puisque, en tout point de D, on a $f(x, y) \leqq f_n(x, y)$ quel que soit n. Donc $f(x, y) \leqq \psi_n(x, y)$ dans les mêmes conditions

---

St. J. Thugutt.

O pewnych reakcjach kaolinu i haloizytu.

Komunikat zgłoszony dn. 29 maja 1935 r.

Sur certaines réactions du kaolin et de l'halloysite.

Mémoire présenté à la séance du 29 mai 1935.

Patrz Archiwum Mineralogiczne Tow. Nauk. Warsz. (Archives de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie). T. XI, 1935. Str. 122—133.

St. J. Thugutt.

O produktach hydrolizy natrolitu.

Komunikat zgłoszony dn. 29 maja 1935 r.

Sur les produits hydrolitiques de la natrolite.

Mémoire présenté à la séance du 29 mai 1935.

Patrz Archiwum Mineralogiczne Tow. Nauk. Warsz. (Archives de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie). T. XI, 1935. Str. 134—140.

B. Niklewski.

Badania nad agregacją żelatyny.

Przedstawił St. Przyłęcki dn. 29 maja 1935 r.

Recherches sur l'agregation de la gélatine.

Mémoire présenté par M. St. Przyłęcki à la séance du 29 mai 1935.

E. Hoferówna.

Badania nad własnościami białek.

Przedstawił St. Przyłęcki dn. 29 maja 1935 r.

Recherches sur les propriétés des protéines.

Mémoire présenté par M. St. Przyłęcki à la séance du 29 mai 1935.

Posiedzenie

z dnia 19 czerwca 1935 r.

S. Mazurkiewicz.

O twierdzeniu Rouché.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 19 czerwca 1935 r.

Sur le théorème de Rouché.

Présenté dans la séance du 19 Juin 1935.

Voici une démonstration extrémment simple du théorème classique de Rouché: *$f(z)$, $\varphi(z)$ étant deux fonctions holomorphes dans un domaine borné B, continues sur la frontière C de B et satisfaisant à l'inégalité: $|f(z)|>|\varphi(z)|$ pour $z \in C$, les deux fonctions $f(z)$ et $f(z)+\varphi(z)$ ont le même nombre de zéros dans B.*

Désignons par $n(f)$, $n(f+\varphi)$ respectivement les nombres de zéros de $f(z)$ et $f(z)+\varphi(z)$ dans B. En se servant d'un raisonnement géometrique bien connu, on peut determiner un domaine B_1 de frontiére C_1, tel que:

(1) $B_1+C_1 \subset B$.

(2) B_1 contient tous les zéros de $f(z)$ et $f(z)+\varphi(z)$ situés dans B.

(3) $|f(z)|>|\varphi(z)|$ pour $z \in C_1$.

(4) C_1 est la somme d'un nombre fini de polygones simples, fermés sans points communs deux à deux.

Soit λ réel et $0 \leq \lambda \leq 1$. Considérons la fonction $\beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(C_1)} \frac{f'(z) + \lambda \varphi'(z)}{f(z) + \lambda \varphi(z)} dz$, le sens d'intégration sur C_1 étant fixé de manière habituelle. On a: $f(z) + \lambda \varphi(z) \neq 0$ pour $z \in C_1$, donc $\beta(\lambda)$ est continue et égale aux nombre de zéros de $f(z) + \lambda \varphi(z)$ situés dans B_1. Donc $\beta(\lambda)$ est constante et $\beta(0) = \beta(1)$.

Mais d'après (2): $\beta(0) = n(f)$; $\beta(1) = n(f + \varphi)$, donc $n(f) = n(f + \varphi)$ c. q. f. d.

H. Milicer-Grużewska.

O pewnej funkcji empirycznej i jej uogólnieniu.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu w dniu 19 czerwca 1935 r.

Streszczenie.

Praca dotyczy zagadnień związanych z wielkością błędu prawdopodobnego jaki powstaje przy aproksymowaniu funkcji skończonej liczby momentów apriorycznych zapomocą takiej samej funkcji i takich samych momentów empirycznych.

H. Milicer-Grużewska.

An empirical curve and its generalisation.

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz à la séance du 19 juin 1935.

Introduction. The sample is selected from the universe Ω. $m_1, m_2, \ldots m_k$ mean some moments of the sample (i. e. the empirical moments), and $M_1, M_2, \ldots M_k$ the analogical moments of the universe (i. e. the apriorical moments). The last ones are generally unknown; the formers approximate the laters with certain precisions [1]).

---

[1]) Tshuprow. „On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions". Biometrika v. XII p. I, II, a. III, IV, 1918 y.

The Tshuprow's results with the application of the Tshebyshew's inequality permit to calculate the mathematical expectation of every function of a finite number of empirical moments, providely regular enough in the neighbourhood of their apriorical moments. This mathematical expectation may be calculated with the precision of $0\left(\frac{1}{N}\right)$ [1]), if N means the space of the sample. The question of this approximation seems to be of great practical importance, and touches the very often met statistical tests, in which the result of the partial investigation of the universe is given as a precised function of a finite number of some empirical moments [2]). The function f in the empirical point $(m_1, m_2, \dots m_k)$ is the empirical value of its unknown value in the apriorical point $(M_1, M_2, \dots M_k)$. Of course it is possible to treat $f(m_1, \dots m_k)$, as an approximation of $f(M_1, \dots M_k)$, only if: [3])

$$(1) \qquad \lim_{N-1\infty} \mathrm{E}\left[f(m_1, \dots m_k) - f(M_1, \dots M_k)\right] = 0.$$

Therefore, in all statistical tests of the just described form, the condition (1) should be investigated. I met with the same problem when looking for a measure of the size of the self-sufficing country farm. I define it as the root of an empirical function (the curve of the self-sufficing of country farms). The form of this curve was adapted according to the results of the meritorical analysis of the question and the transformation of the empirical material with the third mean. The coefficient of the curve were fixed by the method of last squares. The investigated root (the size of the self-sufficing country farms) was found as an enough regular function of some moments of the selected quantities, and as such striked in the just explained case.

Really I met the analogical situation in many statistical tests. I prove the general theorem about the accomplishment of the formula (1) in order to avoid to repeat it in any particular case. I use analogical method to those as in my article

---

1) $a_N = 0\left(\frac{1}{N}\right)$, if $|a_N \cdot N| \leqslant$ const, for every N.

2) The range of these moments may even be negative.

3) $\mathrm{E}[X]$ — means the mathematical expectations of X.

intit. „The probable value of the weighted average"[1]); § 1 of this article is devoted to the proof of the general theorem; § 2 — gives the precision of the question of the self-sufficing of the country farm; the § 3 — the resolution of this problem.

§ 1. Denotiations.

1. The universe consists of variables: $x_1, x_2, \ldots$ or the pairs: $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots$.

2. The sample w consists of variables: $x_1, x_2, \ldots x_N$, or the pairs: $x_1, y; x_2, y_2; \ldots x_N, y_N$, selected independently and at random from the universe of variables, or of its pairs respectively.

3. The moments of the universe are: $M_k = \sum_i x_i^k p_{i/}$ respect.: $M_{k/l} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^l p_{i/j}$, where $p_{i/}$ respectively $p_{i/j}$ are probabilities of selecting the quantity x_i respect. the pair: x_i, y_j [2]); k and l are negative or positive integers.

4. $m_k = \sum_i x_i^k p_i'$, respect. $m_{k/l} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^l p_{i/j}'$, where $p_{i/}'$ respectively $p_{i/j}'$ denotes empirical frequencies of the variable $x_{i/}$, or the pair $x_{i/j}$ in the sample.

5. $f(m)$ or $f(m_{-k_1}, \ldots m_k)$ respect. $(m_{-k_1/-l_1}, \ldots m_{k/l})$ is a precised function f of precised moments in an empirical point: $(m_{-k_1}, \ldots m_k)$ resp. $(m_{-k_1/-l_1}, \ldots m_{k/l})$; $f(M)$ or $f(M_{-k_1}, \ldots M_k)$ resp. $f(M_{-k_1/-l_1}, \ldots M_{k/l})$ — the value of the same function in the apriorical point: $(M_{-k_1}, \ldots M_k)$ resp. $(M_{-k_1/-l_1}, \ldots M_{k/l})$.

6. According to Tshuprow's denotiation we put:

$$
\begin{aligned}
& m_{s/t} - M_{s/t} = dm_{s/t} \\
(1) \qquad & f(m) - f(M) = df(m) \\
& p_{i/j}' - p_{i/j} = dp_{i/j}.
\end{aligned}
$$

[1]) Isent this article last year to the editor's office of the Annals Mathematical Statistics Association in Michigan U. S. A.

[2]) In other words $p_{i/}$ or $p_{i/j}$ denote the frequency of the variable x_i respect., the pair x_i, y_j in the universe Ω.

Theorem I. The relative constant error of the approximation of the unknown value $f(M)$ through the $f(m)$ is of order $0\left(\frac{1}{N}\right)$, N, denoting the space of the sample i. e.:

(2) $$E\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = 0\left(\frac{1}{N}\right), \text{ if}$$

I. the empirical moments: $m_{-k_1}, \ldots m_k$, respectively $(m_{-k_1/-l}, \ldots m_{k/l})$ are: 1) of finite number, 2) are borned, for all possible samples w.

II. the function f is borned for all possible samples.

III. the respective apriorical moments M, and the value $f(M)$ are finite and different from zero.

IV. the function $f(m)$ is representable by Taylor's serie in the neighbourhood of the apriorical moments.

Theorem II. If the suppositions of the theorem I are satisfied then: $E\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]^2 = 0\left(\frac{1}{N}\right)$ e. i. the relative mean square error of the approximation of the unknown value $f(M)$ through $f(m)$ is of order $0\left(\frac{1}{N}\right)$.

Remark I. The suppositions that the moments M, and the value $f(M)$ are different from zero are essential only when looking for the relative errors. Their may be omitted in the investigations upon simple errors.

The proof of the theorem II is omitted, since it does not differ from the proof of the theorem I. We prove the theorem I for the case of elements characterised by two variables: (x_i, y_j), since this is the case of the investigated root.

We make still following denotiations:

6. dw — means the set of samples, for each of them the empirical moments belong to such neighbourhood of the respective apriorical moments, that the condition IV is satisfied, e. i. that:

(2) $$\left|\frac{dm_{s/j}}{M_{s/j}}\right| \leqslant \alpha_{s/t} < 1, \quad \begin{matrix} -k_1 < s < k \\ -l_1 < t < l \end{matrix}$$

where $\alpha_{s/t}$ are positive and small enough that the function $f(m_{-k_1/-l_1}, \ldots m_{k/l})$ is developable by Taylor's serie if only (2) takes place. We may suppose that the quantities $\alpha_{s/t}$ are so small that this serie converges uniformely and absolutely.

6′. $(\Omega - dw)$ — means the set of samples for which all conditions (2) are not satisfied.

7. $\underset{w}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]$, and $\underset{\Omega-w}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]$ mean the mathematical expectations of the $\frac{df(m)}{f(M)}$ calculated respect. on the sets dw and $(\Omega - dw)$.

It is of course:

$$\mathrm{E}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = \underset{w}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] + \underset{\Omega-w}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]. \tag{3}$$

8. The probability that φ is y is written as follows: $P_r\{\varphi = y\}$.

Lemme I. If the suppositions of the theorem I are fulfilled we have:

$$\underset{\Omega-dw}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = 0\left(\frac{1}{N}\right). \tag{4}$$

Proof of the lemme I. Let us be:

$$\pi_y = P_r\left\{\frac{df(m)}{f(M)} = y\right\};\ \pi_{s/t} = P_r\left\{\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}} = z_{s/t}\right\};\ \begin{matrix} -k_1 < s > k \\ -l_1 < t < l \end{matrix}. \tag{5}$$

$$\underset{\Omega-dw}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = \sum_y{}' y\,\pi_y, \tag{6}$$ where $\sum'$ denotes the sum of quantities y, for which all conditions (2) are not fulfilled; then:

$$\left|\underset{\Omega-dw}{\mathrm{E}}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]\right| \leqslant \sum_{\substack{-k_1<s<k \\ -l_1<t<l}} \sum_y{}^{(s/t)} |y|\,\pi_y, \tag{7}$$ where $\sum^{(s/t)}$ is the sum of quantities $|y|$ for which the moment $m_{s/t}$ do not satisfied the condition (2), then satisfied the condition:

$$\left|\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right| > \alpha_{s/t}. \tag{8}$$

Let us put:

$$I_{s/t} = \sum_y{}^{(s/t)} |y|\,\pi_y. \tag{7'}$$

We may write:

(9) $$\pi_y = \pi_{s/t}\, \pi_y^{(s/t)},$$

as f is a function of moments $m_{s/t}$, and if $\pi_y^{(s/t)} = P_r\left\{\frac{df(m)}{f(M)} = y\right\}$; if it is known that $\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}} = z_{s/t}$.

We have then from the condition II, and the expressions (8), (7′), (9):

(10) $$I_{s/t} = \sum_{|z_{s/t}| > \alpha_{s/t}} \pi_{s/t} \sum_y^{(s/t)} |y|\, \pi_y^{(s/t)} \leqslant \text{const} \sum_{|z_{s/t}| > \text{const}} \pi_{s/t}\,,$$

since

$$\sum_y^{(s/t)} |y|\, \pi_y^{(s/t)} \leqslant \text{const} \sum_y^{(s/t)} \pi_y^{(s/t)}, \text{ and } \sum_y^{(s/t)} \pi_y^{(s/t)} \leqslant 1\,.$$

But:

(10′) $$\sum_{|z_{s/t}| > \alpha_{s/t}} \pi_{s/t} = P_r\left\{\left|\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right| > \alpha_{s/t}\right\}.$$

From (7′), (10) and (10′) follows:

(11) $$\left|\underset{\Omega-w}{\mathrm{E}} \frac{df(m)}{f(M)}\right| \leqslant \text{const} \sum_{\substack{-k_1 < s < k \\ -l_1 < l < l}} P_r\left\{\left|\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right| > \alpha_{s/t}\right\},$$

where k_1, k, l_1, l are finite.

In order to prove the lemme we prove that:

(12) $$P_r\left\{\left|\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right| > \alpha_{s/t}\right\} = 0\left(\frac{1}{N}\right).$$

We have:

(13) $$m_{s/t} = \sum_{i/j} x_i^s\, y_j^t\, p'_{i/j} \text{ and (13′) } \frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}} = \frac{1}{M_{s/t}} \sum_{i/j} x_i^s\, y_j^t\, dp_{i/j}\,.$$

According to Tshebyshew's inequality it may be written

(14) $$P_r\left\{\left|\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right| > \alpha_{s/t}\right\} < \frac{1}{t^2},$$

where

(15) $$t = \frac{\alpha_{s/t}}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^2}},$$

but

$$\mathrm{E}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^2 = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{M_{2s/2t}}{M_{s/t}^2}\right)^{1)}. \tag{16}$$

The quantities $\alpha_{s/t}$ are positive, and in finite number.

Hence and from the expressions (14), (15) and (16) follows the expression (12).

According to (3) and the lemme I we shall have

$$\mathrm{E}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = \mathrm{E}_w\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] + 0\left(\frac{1}{N}\right). \tag{17}$$

Now we shall prove that:

$$\mathrm{E}_w\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right] = 0\left(\frac{1}{N}\right). \tag{18}$$

According to the supposition IV it is:

$$\frac{df(m)}{f(M)} = \frac{1}{f(M)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n[f(m)]_{\left(\frac{dm}{M}\right)}, \tag{19}$$

where $D^n[f(m)]_{\left(\frac{dm}{M}\right)}$ means the $n-th$ differential polynom in the point: $\left(\frac{dm_{-k_1/-l_1}}{M_{-k_1/-l_1}}, \cdots \frac{dm_{k/l}}{M_{k/l}}\right)$. The serie (19) (acc. to 6) converges uniformely and absolutely, since the inequality (2) are fulfilled. Let be K the number of moments of the development (19). It is:

$$\left|\mathrm{E}_w\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]\right| \leqslant \frac{1}{f(M)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left|\mathrm{E}_w\left\{D^n[f(m)]_{\left(\frac{dm}{M}\right)}\right\}\right|. \tag{20}$$

The $n-th$ term of the sum (20), for $n \leqslant K$ contains C_K^n elements in which the quantities: $\frac{dm}{M}$ are only in the first grade. These elements may be written as follows:

$$U = \mathrm{const}\left|\mathrm{E}_w\left[\prod_{s/t}\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right]\right| = \mathrm{const}\left|\mathrm{E}\left[\prod_{s/t}\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right]\right| + 0\left(\frac{1}{N}\right) \tag{21}$$

as it follows from the lemme I.

---

[1]) See. Tshuprow „Grundbegriffe u. Grudprobleme d. Korrelationslehre”.

It results from the Tshuprow's article (cited in the introductions) that the latest sum is $0\left(\frac{1}{N^{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]}}\right) \leqslant 0\left(\frac{1}{N}\right)$.

Now observe that all elements from the sum (20), that are not of the form just discuted, are less than the elements of the form:

$$V_n = \text{const}\left|\underset{w}{E}\left[\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 \cdot \prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}}\right]\right|, \quad \text{where:} \tag{22}$$

$$\begin{cases} n_{s/t} \geqslant 0 \\ \sum n_{s/t} = n-2 \end{cases}$$

but:

$$\underset{w}{E}\left[\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 \prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}}\right] = \tag{23}$$

$$= \sum_y y\, P_r\left[\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 = y\right] \sum_y z\, P_r^y\left[\prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}} = z\right]$$

where $P_r^y\left[\prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}} = z\right]$, is the probability of the equality: $\prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}} = z$, under the supposition that $\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 = y$ but:

$$\sum_y y\, P_r\left[\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 = y\right] = \underset{w}{E}\left(\frac{dm_{s'/t'}}{M_{s'/t'}}\right)^2 = 0\left(\frac{1}{N}\right) \tag{24}$$

$$\left|\sum_z z\, P_r'\left\{\left[\prod_{s/t}\left(\frac{dm_{s/t}}{M_{s/t}}\right)^{n_{s/t}}\right] = z\right\}\right| \leqslant \tag{25}$$

$$\leqslant \text{Max}\, z \sum P_r' \leqslant \text{Max}\, z = \frac{1}{\alpha^2_{s'/t'}} \prod_{s/t} \alpha_{s/t}^{n_{s/t}},$$

where $\sum_{s/t} n_{s/t} = n$.

Denote with $\bar{f}$ the serie of the absolute values of terms of the serie f in the point: $(\alpha_{-k_1/-l_1}, \ldots \alpha_{k/l})$. It results from this, the eq. (20) to (25) and the fact that it is $\alpha_{s/t} \neq 0$:

$$\left|\underset{w}{E}\left[\frac{df(m)}{f(M)}\right]\right| \leqslant \frac{\bar{f}}{f(M)}\, 0\left(\frac{1}{N}\right) + 0\left(\frac{1}{N}\right) = 0\left(\frac{1}{N}\right). \tag{26}$$

The theorem is then proved.

§ 2. The universe constitutes a country farms which areas are included between 2 ha and 50 ha. I treat these areas as measured with precision to 100 m^2. Each farm may be characterized by two quantities: its area and the surplus of the expeditures for hirelings upon the extra incomes of the farmer. I look for the line of regression of these surpluses (y) in regarding to the areas (x). I name this line (F) the curve of selfsufficiency of the country farms, and its root the selfsufficient area of the farms in the country. I know only a part of farms of the country, and treat them as a sample e. i. I take those farms as selected independently and at random from the universe of the farms. The smoothing of the empirical data with the third moving average, as well as the meritorical analysis of the question lead to look for the function F that accomplishes the following conditions:

I. $F(x)$ is finite for: $0 < x < \infty$.

II. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = a > 0$.

III. $\underset{x \geqslant 0}{F(x)} \neq 0$, if only $x \neq g > 0$, and $F(g) = 0$, $F(0) < 0$.

IV. $\underset{x \geqslant 0}{F'(x)} > 0$; V. $\left[\frac{F(x)}{x}\right]'_{x \geqslant 0}$ changes from positive values in to negative ones, or: $F(x)'' = 0$.

I take as the explored function the simplest of she functions that accomplish es those five conditions, and fix its coefficients with the method of last squares.

Put:

(1) $\frac{F(x)}{x} = \varphi(x)$, it ought be (supp. II): $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = a$.

The simplest functions $\varphi(x)$ are of the form:

(2) $\varphi(x) = a$, $\varphi(x) = \frac{Ax + B}{A_1 x + B_1}$, $\varphi(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{A_1 x^2 + B_1 x + C_1}$,

where $\frac{A}{A_1} = a > 0$ then:

(3) $F(x) = ax$; $F(x) = \frac{Ax + B}{A_1 x + B_1} x$; $F(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{A_1 x^2 + B_1 x + C_1} x, \ldots$

It results from the cond. III, that the first of the form (3) is inadmissible. It may then only be:

(3′) $F(x) = \dfrac{Ax+B}{A_1} = \alpha + \beta x$, $F(x) = \dfrac{Ax^2+Bx+C}{A_1x+B_1}$,

from where:

(4) $F'(x) = \beta$, $F'(x) = \dfrac{AA_1x^2 + 2AB_1x + BB_1 - A_1C}{(A_1x+B_1)^2}$.

It results from the sup. V that the first of the form (3′) is also inadmissible. It may be put then:

(5) $$F(x) = \frac{Ax^2+Bx+C}{A_1x+B_1} = a\,\frac{(x-g)(x-g^{\mathrm{I}})}{x+b},$$

where according to sup. I, II, III it ought be:

(6) $$a>0,\ b>0,\ g>0,\ g_1<0.$$

Now put:

$$x+b=X;\ \ g+b=G,\ \ g_1+b=G_1;$$

(7) $$F(x) = F_1(X) = a\,[X - (G+G_1) + GG_1 : X],$$

and:

$$F'(x) = F_1'(X) = a\,(1 - GG_1 : X^2) > 0 \text{ if } -GG_1 > 0 \text{ t. is.:}$$

$$G_1 = g_1 + b < 0.$$

Then from the sup. IV results:

(6′) $$g_1 < -b.$$

We shall prove that, according to sup. V, it ought be:

(6″) $$b+g < -g_1.$$

Really:

(8) $$\left[\frac{F(x)}{x}\right]' = a\,\frac{x^2(g+g_1+b) - 2xgg_1 - bgg_1}{x^2(x+b)^2}.$$

In the neighbourhood of zero $\left[\dfrac{F(x)}{x}\right]' > 0$, since $-abgg_1 > 0$ (ac. t. (6)).

Then the cond. V is accomplished, if the numerator of the expression (8) has a simple positive root. This numerator has simple roots, since it is:

$$(gg_1)^2 + bgg_1\ (g+g_1+b) > 0$$

because:

$$b^2 + b(g+g_1) + gg_1 < 0 \text{ if } -g < b < -g_1,$$

and acc. to (6′): $0 < b < -g_1$.

But: $\frac{-b(gg_1)^2}{(g+g_1+b)^2} < 0$, then it ought be:

$\frac{bgg_1}{g+g_1+b} > 0$, " " " "

$g+g_1+b < 0$, this proves (6″)

Recapitulating (6), (6′) and (6″) we shall have: I′ $a > 0$, $b > 0$, $g > 0$, $g_1 < -(b+g)$.

If the coefficents a, b, g, g_1 fixed with the method of last squares do not fulfill the cond. I′, then we cannot with this sample define the function $F(x)$ [1]).

The conditions I' in the plane of X are of the form: I″ $a > 0$, $g > b > 0$, $g_1 < b - g$ and the function $F(X) = F_1(X)$ is of the form. (7).

§ 3. Let be: $(x_i y_i) = (X_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots N$ the sample w. Suppose that the line of regression of y_i in x_i is the function: $F(x) = F_1(X)$, defined with the equal. (5), (7) and conditions I′ and II″ of the § 2.

We define the coefficients of the function $F_1(X)$ [2]) with the methods of last squares. The sum

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i [y_i - F(x_i)]^2 \qquad \text{is minimum if:} \\
&\sum_i [y_i - F_1(X_i)]\; F_1(X_i) = 0 \\
(1)\qquad &\sum_i [y_i - F_1(X_i)]\; (1 - G' : X_i) = 0 \\
&\sum_i [y_i - F_1(X_i)]\; (1 - G_1' : X_i) = 0 \\
&\sum_i [y_i - F_1(X_i)]\; (1 - p' : X_i + q' : X_i^2) = 0
\end{aligned}\right| \qquad \text{where:}$$

$$p' = G' + G_1'$$

$$q' = G' \cdot G_1'$$

$$(\alpha) \qquad G' = \frac{p' + \sqrt{p'^2 - 4q'}}{2}$$

$$F_1(X_i) = a(X_i - p' + q' : X_i)$$

---

1) We also could put: $a = a'^2$, $b = b'^2$, $g = g'^2$, $g_1 = -(b'^2 + g'^2 + g_1'^2)$ and look for the real coefficient a', b', g' and g_1'.

2) Or $F(x)$ — it leads to the analogical values.

The conditions (1) may be written as follows:

$$(1') \qquad \begin{aligned} &\sum [y_i - F_1(X_i)]\, X_i = 0 \\ &\sum [y_i - F_1(X_i)] \quad = 0 \\ &\sum [y_i - F_1(X_i)] : X_i = 0 \\ &\sum [y_i - F_1(X_i)] : X_i^2 = 0 \end{aligned}$$

or with the denotation:

$$(2) \qquad \begin{aligned} M'_{i/j} &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} X_l^i\, y_l^j \\ m'_{i/j} &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} x_l^i\, y_l^j \end{aligned}$$

$$(1'') \qquad \begin{aligned} M'_{1/1} &= a\,(M'_{2/0} - p'\, M'_{1/0} + q') \\ M'_{0/1} &= a\,(M'_{1/0} - p' + q'\, M'_{-1/0}) \\ M'_{-1/1} &= a\,(1 - p'\, M'_{-1/0} + q'\, M'_{-2/0}) \\ M'_{-2/1} &= a\,(M'_{-1/0} - p'\, M'_{-2/0} + q'\, M'_{-3/0}) \end{aligned}$$

$$(2') \qquad \begin{aligned} \mu_2' &= M'_{2/0} - M'^{\,2}_{1/0} > 0 \\ \mu'_{-2} &= M'_{-2/0} - M'^{\,2}_{-1/0} > 0 \\ \delta_0' &= 1 - M'_{1/0} : M'_{-1/0} < 0 \end{aligned}$$

$$(2') \qquad \begin{aligned} \beta_0' &= 1 - M'_{2/0}\, M'_{-2/0} < 0 \\ \alpha_1' &= M'_{1/0} - M'_{2/0}\, M'_{-1/0} < 0 \\ \alpha'_{-1} &= M'_{-1/0} - M'_{-2/0}\, M'_{1/0} < 0\,. \end{aligned}$$

I results from (1″) and from the denotiations (2′):

$$(3) \qquad \begin{aligned} p' &= \frac{-\alpha'_{-1}\, M'_{1/1} + \beta_0'\, M'_{0/1} - \alpha_1'\, M'_{-1/1}}{\mu'_{-2}\, M'_{1/1} + \alpha'_{-1}\, M'_{0/1} - \delta_0'\, M'_{-1/1}} = \frac{P'}{R'} \\ q' &= \frac{-\delta_0'\, M'_{1/1} + \alpha_1'\, M'_{0/1} + \mu_2'\, M'_{-1/1}}{\mu'_{-2}\, M'_{1/1} + \alpha'_{-1}\, M'_{0/1} - \delta_0'\, M'_{-1/1}} = \frac{Q'}{R'} \end{aligned}$$

and:

$$(3') \qquad \Phi(b) = M'_{1/1}(M'_{-3/0}\delta_0' - M'_{-2/0}\alpha'_{-1} - M'_{-1/0}\mu'_{-2}) + \\ + M'_{0/1}(-M'_{-3/0}\alpha_1' + M'_{-2/0}\beta_0' - M'_{-1/0}\alpha'_{-1}) - \\ - M'_{-1/1}(M'_{-3/0}\mu_2' + M'_{-2/0}\alpha_1' - M'_{-1/0}\delta_0') + \\ + M'_{-2/1}(-\delta_0' + M'_{-1/0}\alpha_1' + M'_{-2/0}\mu_2') = 0.$$

We look for a approximate root of the equality (3′) [1].

We take this root b as a fixed one, and the last three coefficients of the function $F_1(X)$ as the solutions of the three first of the equations (1), (1′) or 1″), and find the most intersting of them (G') from the equalities (α) and (3).

It is easy to prove that the function g', treated as a function of empirical moments: $M'_{1/1}, M'_{0/1}, M'_{-1/1}, M'_{2/0}, M'_{1/0}, M'_{-1/0}, M'_{-2/0}$ accomplishes the conditions I, II, III and IV of the § 1.

Really:

I. The empirical moments: $M'_{1/1}, M'_{0/1}, M'_{-1/1}, M'_{2/0}, M'_{1/0}$, $M'_{-1/0}, M'_{-2/0}$ 1) are seven (then in finite number) 2) it results from the empirical data that they are borned.

II. $2 < f(M') = g' < 50$.

III. $2 < f(M) = g < 5$.

$M_{1/1}, M_{1/0}, M_{-1/1}, M_{2/0}, M_{1/0}, M_{-1/0}, M_{-2/0}$ are different from zero (this result from the matter of facts, or for the three first moments ought be supposed).

IV. The function $f(M') = g'$ is representable by Taylor's serie in the neighbourhood of the apriorial moments. Really:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \delta p' &= dp' : p = (dP'/P - dR'/R)\left[1 - \frac{dR'}{R} + \left(\frac{dR'}{R}\right)^2 - \cdots\right] \\ \delta q' &= dq' : p = (dQ'/Q - dR'/Q)\left[1 - \frac{dR'}{R} + \left(\frac{dR'}{R}\right)^2 - \cdots\right] \end{aligned}$$

$$(5) \qquad \frac{dG'}{G} = \frac{2}{G}\left[p\,\delta p' + \sqrt{p^2 - 4q}\,\varphi(t)\right], \text{ where } \varphi(t) = \sqrt{1+t} - 1,$$

$$t = \frac{p^2\,\delta p\,(2 + \delta p) - 4q\,\delta q}{p^2 - 4q},$$

[1] See appendix 1.

$$(5') \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^k(t)_{t=0}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \sum_{s=0}^{l} C_k^l C_l^s \frac{(-4q\,\delta q)^{k-l}(p^2\,\delta p)^l\,2^{l-s}\,\delta p^s}{(p^2-4q)^k},$$

p, q, P, Q, R are the aprioricaI values of p', q', P', Q', R' respect. But P', Q', R' are polynoms of the empirical moments, then dP'/P, dQ'/Q, dR'/R are polynoms of $\frac{dM'_{1/1}}{M_{1/1}}, \cdots \frac{dM'_{-2/0}}{M_{-2/0}}$.

Hence and from equ, (4) (5) and (5') results that the serie of $\left[\frac{dG'}{G}\right]$ converges uniformely and absolutely, provided the quantities: $\frac{dM'_{1/1}}{M_{1/1}}, \cdots \frac{dM'_{-2/0}}{M_{-2/0}}$, are small enough.

Since the conditions of the theorems I and II of the § 1 are satiesfied it may be put:

$$(6) \qquad \mathrm{E}\left[\frac{dg'}{g}\right] = 0\left(\frac{1}{N}\right),\ \mathrm{E}\left[\frac{dg'}{g}\right]^2 = 0\left(\frac{1}{N}\right).$$

For the approximation of the uknown root g (for a constant b — however) trough its empirical value g' the condition (1) of the introduction is fulfilled. This approximation is then legitimate.

Appendix 1.

The approximate value b' of the unknown root of the equation:

$$(1) \qquad \Phi(b) = 0 \qquad \text{(see ... § 2)}$$

may be found as follows.

It can be written:

$$(2) \qquad \Phi(b) = -Q'(M'_{-3/0} - M'_{-2/0}M'_{-1/0}) - R'\alpha'_{-1} + \\ + (\mu_2\mu'_{-2} - \delta_0'^2)(M'_{-2/1} - M'_{-2/0}M'_{0/1})$$

and put

$$(3) \quad m_{1/1} - m_{0/1}m_{1/0} = \mu_{1/1}; \quad M'_{-1/1} - M'_{-1/0}M'_{0/1} = \mu'_{-1/1}, \quad \text{also:}$$

$$(4) \qquad \left.\begin{aligned} R' &= \mu'_{-2}\,\mu_{1/1} - \delta_0'\,\mu'_{-1/1} \\ Q' &= -\delta_0'\,\mu_{1/1} + \mu_2\,\mu'_{-1/1} \end{aligned}\right\} q' = \frac{Q'}{R'}$$

$$(5) \qquad a = R' : (\mu_2\,\mu'_{-2} - \delta_0'^2)$$

(6) $$p' - b = m_{1/0} - m_{0/1}\frac{1}{a} + M'_{-1/0}q'.$$

It was for the samples in question:

(7) $$M'_{-3/0} - M'_{-2/0}M'_{-1/0} > 0; \quad -\alpha'_{-1} > 0;$$
$$\mu_2\mu'_{-2} - \delta_0'^2 > 0; \quad M'_{-2/1} - M'_{-2/0}M'_{0/1} < 0.$$

It results from the conditions I′ of § 2 that it should be:

(8) $$p' - b < 0; \quad q' < 0; \quad a > 0; \quad \text{then:}$$

(9) $$R' > 0; \quad Q' < 0.$$

If we find a quantity b' for which the conditions (9) are satisfied, and for which R' is small enough, the conditions (8) will be also satisfied, and it is very likely that $\Phi(b')$ will be small (acc. to to equ. (3) and inequ. (7) and (9)).

Since the expressions $\mu_{1/1}$ and μ_2 are independent of b, we calculate for different values of b the quantities $\mu'_{-1/1}$, μ'_{-2} and δ_0' only, and we find the respective values of R' and Q' from equ. (4).

Only when the just mentioned value b' is find, it is worth while to calculate the expression $\Phi(b')$, in order to verify if it is really small enough. Thus we avoid the calculation of $\Phi(b)$ for certain values of b.

It results from the appendix 2 that for large values of b the conditions (8) are not satisfied. They can be true only for a finite number of integer values of b. Generally the quantity q' becomes very quickly positive, and if $q'(0)$ is negative it is easy to find the volue of b'.

In my investigations concerning fifteen samples [1]) it happened only twice that the straight line of regression could not be applied, and $q'(0)$ was positive. These samples were very scarsely populated, indeed.

Appendix 2.

It is easy to prove that

(1) $$\lim_{b\to\infty}\frac{q'(b)}{b^2} = 1, \quad \lim_{b\to\infty}\frac{1}{a} = 0, \text{ and } \lim_{b\to\infty}\frac{p'-b}{b} = 1,$$

[1]) Ekonomista, Warszawa r. 1936, t. I.

if the line $F(x)$ is not a straight one. If it is so the expressions a, p' and q' are independent of b (this is obvious).

We put:

$$\mu_{1/1} = r_{x/y}\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} \mu'_{-1/1} &= r_{X^{-1}/y}\,\sigma_{X^{-1}}\,\sigma_y \\ \delta_0' &= r_{X^{-1}/X}\,\sigma_{X^{-1}}\,\sigma_x \\ \alpha_1' &= r_{X^2/X^{-1}}\,\sigma_{X^2}\,\sigma_{X^{-1}} \\ \alpha'_{-1} &= r_{X^{-2}/X}\,\sigma_{X^{-2}}\,\sigma_x \end{aligned}\right| \text{ where } \begin{aligned} \sigma_{X^{-1}} &= \sqrt{M'_{-2/0} - M'^{\,2}_{-1/0}} \\ \sigma_{X^{-2}} &= \sqrt{M'_{-4/0} - M'^{\,2}_{-2/0}} \\ \sigma_{X^2} &= \sqrt{M'_{4/0} - M'^{\,2}_{2/0}} \end{aligned}$$

We have then

$$(3)\qquad q' = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot\frac{-r_{x/y}\,r_{X^{-1}/X} + r_{X^{-1}/y}}{r_{x/y} - r_{X^{-1}/y}\,r_{X^{-1}/X}}\,;\quad a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,\frac{r_{x/y} - r_{X^{-1}/y}\,r_{X^{-1}/X}}{1 - r^2_{X^{-1}/X}}\,.$$

According to these and to formula (6) of the appendix 1 it is sufficient to prove that

$$(4)\qquad \begin{gathered} \lim_{b\to\infty} b^2\,\delta_0' = -\mu_2 \\ \lim_{b\to\infty} b^4\,\mu'_{-2} = \mu_2\,;\quad \lim_{b\to\infty} b^2\,\sigma_{X^{-1}} = \sigma_x \\ r_{X^{-1}/X} = -1 + O(^1/b^2) \end{gathered}$$

$r_{X^{-1}/y} = -r_{x/y} + O_1(^1/b)$ (where $\lim\limits_{b\to\infty} b\,O_1(^1/b) \neq 0$ if the regression is not linear), since it results from

the expression (4) that

$$(5)\qquad \begin{gathered} r_{x/y} - r_{X^{-1}/y}\,r_{X^{-1}/X} = O_1(^1/b) + O(^1/b^2) \\ r_{x/y}\,r_{X^{-1}/X} - r_{X^{-1}/y} = O_1(^1/b) \\ 1 - r^2_{X^{-1}/X} = O(^1/b^2)\,(2 - O(^1/b^2))\,. \end{gathered}$$

The expressions (4) are proved by developing δ_0', μ'_{-2}, $r_{X^{-1}/X}$ and $r_{X^{-1}/y}$ in Maclaurain's series in b.

Appendix 3.

We put:

(1) $$\varepsilon^2 = \frac{1}{\sigma_y^2}\frac{1}{N}\sum_1^N [y_i - F(x_i)]^2.$$

It is for the regression line $(F(x))$ in question:

(2) $$\varepsilon^2 = 1 - \frac{2a(\mu_{1/1} + q'\mu'_{-1/1}) - a^2(\mu_2 + q'^2\mu_{-2'} + 2\delta_0' q')}{\sigma_y^2}.$$

Marja Kołaczkowska.

Structura sodalitu.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 19 czerwca 1935.

La structure de la sodalite.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 19 juin 1935.

Patrz Archiwum Mineralogiczne Tow. Nauk. Warsz. (Archives de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie). T. XI, 1935. Str. 151—174.

St. J. Thugutt.

O rozpuszczalności leucytu w wodzie przekroplonej.

Komunikat zgłoszony dn. 19 czerwca 1935 r.

Sur la solubilité de la leucite dans l'eau distillée.

Mémoire présenté à la séance du 19 juin 1935.

Władysław Gorczyński.

O wartościach średnich zachmurzenia nieba na wybrzeżach śródziemnomorskich.

(z 2 figurami w tekście)

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 19 czerwca 1935 r.

Streszczenie.

W części pierwszej podane są cechy ogólne klimatu typu śródziemnomorskiego i wskazane jest istnienie, poza południem Europy, jeszcze 4 innych podobnych dziedzin, a mianowicie na wybrzeżach zachodnich Ameryki Północnej (Kalifornja) i Ameryki Południowej (wybrzeża środkowe Chile), a także w Afryce Południowej (okolice Cape Town) i wreszcie w Australji Południowo - Zachodniej. Odnośne wartości zachmurzeń w postaci średnich miesięcznych i rocznych dla tych pięciu rodzajów Riwjery znajdujemy w Tab. I. W Tab. II znajdujemy takież wartości dla obszarów międzyzwrotnikowych, pustynnych i monsunów wschodnio - azjatyckich; z porównania tych danych ze stacjami Europy Północnej wynika, że stopień pokrycia nieba jest niemniej silny koło równika jak na nizinach Polski. Nie przeszkadza to jednak istnieniu zasadniczych różnic obu tych dziedzin klimatycznych, z których pierwszą charakteryzuje monotonia wysokich temperatur i parnej atmosfery, a drugą wybitny rytm sezonowy od półpogodnego lata do chmurnej i dżdżystej zimy, przerywanej sporadycznie występowaniem dni mroźnych.

Klimat Riwjery charakteryzuje upalne lato bez deszczów, oraz niezbyt ciepła, ale słoneczna zima, przerywana krótkotrwałemi zazwyczaj deszczami.

Na wybrzeżach Europy Południowej (por. Fig. 1 z mapą okolic śródziemnomorskich oraz Fig. 2 z dodaniem Afryki Północnej i znajdujących się tam punktów obserwacyjnych) rozróżniać należy trzy rodzaje Riwjery, a mianowicie zachodnią (iberyjską), środkową (francusko-włoską) oraz wschodnią (dalmatyńską i grecką). W tabelach liczbowych (Tab. III, Tab. IV i Tab. V) podane są wartości zachmurzeń średnich dla różnych okolic śródziemnomorskich od zachodu na wschód. Wynika stąd, że klimat słoneczny plaż i wysp jugosłowiańskich (Dubrovnik, Hvar, Split i t. d.) nie ustępuje prawie Riwjerze francuskiej; najbardziej zaś usłonecznione w zimie i w lecie są wybrzeża hiszpańskie w okolicy Malagi, Almeria i Alicante.

Władysław Gorczyński.

Mean degrees of cloudiness along the Mediterranean coasts.

Mémoire présenté dans la séance du 19 juin 1935.

The amount of clouds or mean cloudiness estimated in tenths of visible sky or as percentage from 0 (perfectly cloudless) till 100 (totally covered sky), represents a very important meteorological element. It is essential for all studies concerning the solar climatic conditions of various regions of the earth, but especially for the sunny mediterranean coasts.

Some small isles in the channel or some parts of adjacent western coasts of France enjoy, during winter months, nearly the same mild temperatures like those we find between Marseille, Sète or Perpignan. But, if the air temperature does not differ too much between both maritime places, the cloudiness and the number of rainy days are very different. Instead of a mean cloudiness of 4 — 5 (40 till 50%) in December and only 60 — 75 rainy days at the Riviera, we find 150 — 180 days with rain as annual total and often nearly 8 (80%) as mean cloudiness in the Channel Isles.

The Mediterranean climate has a special seasonal rhythm and is distinguished by its hot rainless summer, its relatively cool winter with rain (sometimes heavy but not very frequent) and — above all — by its bright skies and abundant sunshine not only in summer but also in winter. This sunny and mild climate, dry enough in winter season, is restricted to the immediate littoral, generally not exceeding a width of about 25 kilometers; the local peculiarities of the Riviera climate depend largely on the protection of the surrounding mountains from the cold and violent north winds.

The Mediterranean type of climate is to be found not only in old Mediterranean lands themselves, but its main features are repeated in four other continents, namely North — and South America, Africa and Australia.

As shown in Tab. I, there are five regions in different parts of the world that enjoy the Mediterranean type of climate. In spite of usual limitation of the name „Riviera" to the sunny spot around Nice, we distinguish, in the South of Europe, at least three principal portions of the Mediterranean coasts with especially good solar climate.

TABLE I. The Mediterranean (Riviera) type of climate in different continents.
Mean monthly and annual cloudiness (percentage values).

Months:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
A) Mediterranean Riviera.													
Eastern Riviera (means for 3 Yugoslavian stations: Hvar, Split and Dubrovnik on Dalmatian shores and isles)													
	49	46	47	46	38	31	19	18*	29	46	49	**51**	40
Central Riviera (means for San Remo, Monaco and Nice)													
	40	43	48	48	44	39	28	26*	36	42	**50**	44	41
Western Riviera (means for Malaga, Cartagena and Alicante)													
	38	36	43	37	30	19	12*	15	30	36	**38**	35	31
B) Californian Riviera.													
Northern part (San Francisco and 2 other stations)													
	51	49	49	45	43	37	37	39	35*	39	45	46	43
Southern part (Los Angeles and San Diego)													
	37	40	44	43	**49**	38	35	32	25*	31	31	34	37
C) South American Riviera (Santiago, Central Chile)													
Months:	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	Year
	56	52	53	47	37	23	18	17*	24	36	54	**58**	40
D) South African Riviera (district round Cape Town)													
	49*	55	**59**	47	36	44	21*	33	39	45	**59**	56	45
E) West-Australian Riviera (Perth in South-West corner)													
	55	**59**	53	41	47	36*	37	40	40	47	53	55	47

Note. Some additional Riviera — portions may be established, especially in mediterranean lands; we note namely: certain Greek isles and coasts, some coasts and parts of Minor Asia, the sunny district round Naples and adjacent isles, East coast of Sicily, Catalonian coast (with Barcelona and Sitges as representative place), some North-African places, Portuguese coasts and islands and so on. We cannot enter here in further details concerning this question

TABLE II. Monthly and annual means of cloudiness (in percentage) for some regions of the carth.

Month:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
The equatorial belt of great cloudiness (period: 1931/34)													
Lagos (Nigeria)	40*	57	74	79	82	92	**93**	**93**	89	86	73	54	76
Singapore	75	63*	68	69	67	70	71	69	74	80	**81**	75	72
Suva (Fidji)	64*	70	69	69	**74**	68	68	71	**74**	71	70	66	70
Semidesertic lands (after „Meteorol. Atlas of Egypt", Cairo, 1931). Anglo-Egyptian Sudan (South and Central) and Egypt (period: 1931/30)													
South	15*	21	30	41	46	50	**55**	54	49	45	29	17	38
Central	4*	7	8	12	24	34	45	**46**	38	24	9	5	21
Upper	**13**	10	9	8	8	2	2*	2	2	4	6	11	6
Middle	**36**	33	29	27	19	7*	9	11	11	18	27	**36**	22
Lower	**46**	41	37	31	24	15*	15*	17	18	26	36	34	29
Regions in Far East, with sunny but cold winter													
Werchojansk (East Siberia)	35	27*	33	46	56	60	**72**	70	64	62	33	30	49
Harbin (Mandchuria) . . .	27	43	49	57	60	**66**	54	57	42	41	35	25*	46
Peiping (China)	35	29	37	45	43	44	**55**	52	39	38	30	21*	39
Some european lowlands (for comparison). Period: 1931/34													
London	76	77	66	74	71	64	63*	70	63*	71	**84**	77	71
Warsaw	**81**	81	67	62	57	62	66	60	56*	69	75	77	68
Moscow	88	78	74	78	65	67	64	68	71	87	**93**	86	77

It is not the geographical latitude that controls the distribution of clouds over the earth. This may be seen from the fact that the equatorial (see Table II) or, better, all regions between the tropics do not count among the most favoured in comparison with other regions. The most cloudless skies and therefore the greatest sunshine duration are characteristic for desertic regions; the next place belongs to the Mediterranean coasts and also to the similar ones situated in California, Central Chile, Cape territory and SW-Australia. In these regions the influence of the general atmospheric circulation, jointly with the efficient protection by surrounding mountains, assure a sufficiently clear sky. If the winter season is not only clear enough but in the same time has a mild temperature, the necessary conditions are given for a proper Riviera climate.

The peninsulas of Southern Europe, from Portugal to Greece with Italy in the centre, have a mean annual cloudiness near 50%, except some mountainous parts and also the atlantic coasts of Spain.

The districts situated in certain distance from the Mediterranean Sea, like Avignon, Toulouse etc., are sensibly more cloudy than the coasts. Sometimes this increase of cloudiness is very pronounced and rapid, as may be seen from following examples of Dalmatian shores and some localities situated in the interior of Yugoslavia.

Isle of Hvar and the harbour of Split:

Mean cloudiness of January 50%, July 25%, Year 45%. Some adjacent places in the interior (Cetinje, Mostar, Knin etc.):

January about 60%, July about 30%, Year about 55%.

In Zagreb we find for the period 1931/1934: Jan. 86%, July 44%, Year 65%.

Cetinje (Montenegro) is distant of about 20 and Mostar or Knin of about 50 km from the Adriatic Sea. The increase of cloudiness is sensible throughout the whole year; it becomes still greater with advance to the interior of the cloudy land masses of Central Europe. Not only the amount of clouds but also the air temperature is considerably influenced by the distance from the sea. This may be seen, easily from the following data (reduced after Vallot to the period 1876/1916), to which we have added the Yugoslavian stations with somewhat different numbers ot years:

Mean monthly and annual air temperature

	Jan.	July	Year
Nice (sea shore)	$9^0.8$	$23^0.0$	$15^0.9$
Nice - Cimiez	$8^0.3$	$22^0.4$	$15^0.6$
Nice - Mount Gros	$6^0.7$	$22^0.1$	$13^0.9$
Hvar (Lesina)	$8^0.4$	$24^0.7$	$16^0.1$
Mostar	$5^0.5$	$25^0.4$	$15^0.1$
Marseille (Cap)	$7^0.9$	$23^0.3$	$15^0.1$
Marseille - Observatory	$6^0.7$	$22^0.1$	$14^0.1$
Montpellier	$5^0.1$	$22^0.7$	$13^0.4$
Avignon	$4^0.1$	$24^0.1$	$13^0.7$
Lyon	$1^0.7$	$20^0.1$	$10^0.8$

It results clearly from these data that already a feeble difference in the distance of the shores or a change of altitude and situation (as we see for Nice - Cimiez situated on the hills surrounding the Bay des Anges) causes an important decrease of the air temperature. This decrease is still more considerable (especially in winter) for the Observatory of Nice - Mount Gros elevated at 340 meters above the sea-level.

On the other hand the air temperature of the Mediterranean coasts is greatly influenced by the efficient protection of surrounding mountains. In winter the northern Atlantic or Baltic coasts are liable to suffer from strong cold winds drawn from the interior of Europe. For the mediterranean shores a good mountain shelter on the north has a capital importance; the mild winter temperatures between Saint Raphaël, Cannes, Nice, Monaco, San Remo and Alassio are due chiefly to the protection by the Maritime Alps. Where this shelter fails (as shows the comparison between Marseille, Avignon and Lyon), the decrease of winter temperatures is very rapid. The flat lands round the mouth of the Rhône are not only considerably cooler in winter (not in summer), but are also often afflicted by violent blasts of the mistral.

Though the sunniness is the chief and most important characteristic of the mediterranean climate, the name of a Riviera climate can be properly given only to such sea-shores where the brightness of the sky and the brilliance of the sunlight is correlated with certain favourable temperature conditions. As a provisory limit may be adopted 7^0 C (45^0 F) as mean air temperature for winter months (December, January and February), calculated for a sufficiently long period not less than 10 years.

Under such climatic conditions the sunny spots of Western (Iberian), Central (Franco - Italian) and Eastern (Dalmatian and Greek) Riviera represents a remarkable health and pleasure resort for winter. The bright sunshine with mild temperature, fresh and well ventilated air without violent wind, and the relatively high dryness of the low atmospheric layers in the mediterranean shores during winter season, delight and dazzle — as Kendrew says — all newcomers from the gloomy north.

Fig. 1. Meteorological stations in the Mediterranean regions.
NB. The numbers indicate the stations given separately (see the Index); the hypsometric curves are drawn in four intervals: 0 — 500, 500 — 1000, 1000 — 2000 and more than 2000 meters above the sea level.

Principal Riviera portions in the South-European coasts.

The mean cloudiness is considerable in the European Continent; it surpasses easily 70 % in many places of North-West and North-Europe. Great even in summer months, the sky is particularly covered in the winter season (frequently more than

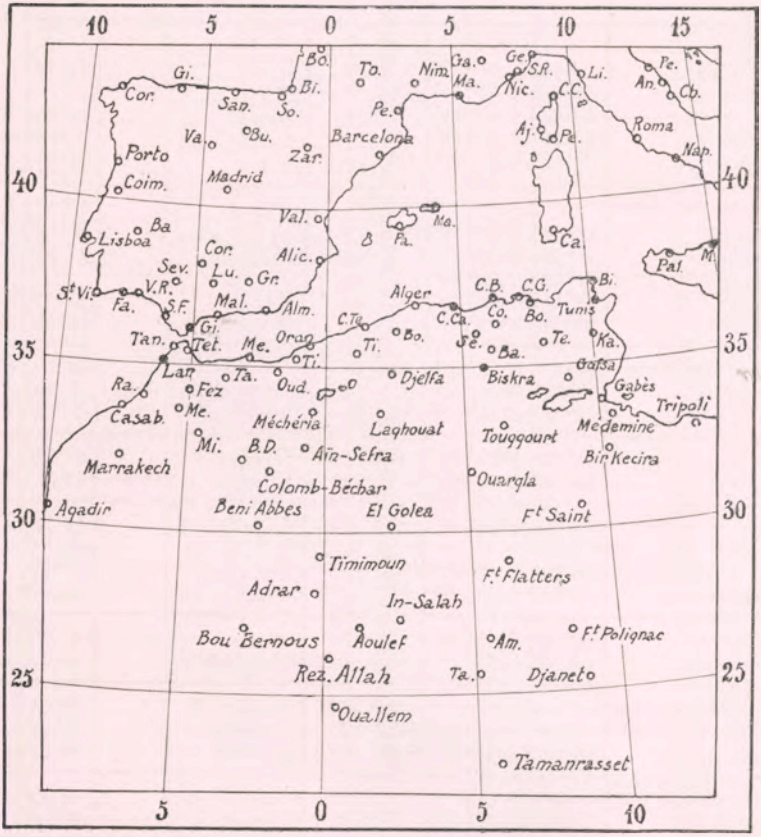

Fig. 2. Meteorological stations in the French Sahara and the Iberian peninsula.

80 % from November to March). The only sunny spots in this gray and rainy, damp and cool season in Europe represent the South-European coasts. The mean amount of clouds in winter is here only of 40—50 %, a little more in Greece and less in

Explanation to Fig. 1.

Index of meteorological stations

which numbers are given in the map (see Fig. 1) of the Mediterranean regions.

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
0	San Remo	43° 44′	E 07° 17′	10
0′	Monaco	43° 44′	E 07° 16′	52
0″	Nice—Mass.	43° 42′	E 07° 16′	5
0‴	Antibes	43° 44′	E 07° 15′	10
00	Reims	49° 15′	W 04° 05′	83
00′	Larnaca (Cyprus)	34° 30′	E 33°	.
01	Mirafiori	45° 01′	E 07° 39′	240
01′	Rochefort	45° 55′	W 00° 59′	4
01″	Beograd	44° 48′	E 20° 28′	138
01‴	Vienne	48° 15′	E 16° 22′	202
01⁗	Tanger	35° 47′	W 05° 51′	69
02	Veliko Gradište	44° 45′	E 21° 31′	83
02′	Biarritz	43° 29′	W 01° 34′	29
02″	Milano	45° 28′	E 09° 15′	110
03	Bordeaux	44° 50′	W 00° 42′	48
03′	Trento	46° 04′	E 11° 08′	312
03″	Petrovaradin	45° 15′	E 19° 52′	131
03‴	Rabat	34° 00′	W 06° 50′	64
04	Brod na Savi	45° 09′	E 18° 01′	93
04′	Casablanca	33° 35′	W 07° 39′	50
05	Trieste	45° 39′	E 13° 46′	25
05′	Cherbourg	49° 38′	W 01° 39′	18
05″	Zagreb	45° 49′	E 15° 59′	163
06	Genova	44° 24′	E 09° 02′	408
06′	Ljubljana	46° 03′	E 14° 30′	306
06″	Clermont-Ferrand	45° 47′	E 03° 09′	328
07	Firenze	43° 48′	E 11° 12′	38
07′	Dijon	47° 16′	E 05° 06′	221
07″	Banjaluka	44° 48′	E 17° 12′	155
07‴	Agadir	30° 27′	W 09° 33′	32
08	Livorno	43° 32′	E 10° 18′	19
08′	Koviljača	44° 31′	E 19° 10′	125
09	Sarajevo	43° 52′	E 18° 26′	637
09′	Paris	48° 52′	E 02° 18′	32
09″	Ancona	43° 37′	E 13° 30′	3

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
10	Lyon	45° 44′	E 04° 55′	199
11	Roma	41° 52′	E 12° 34′	50
11′	Brest	48° 20′	W 04° 46′	10
11″	Niš	43° 21′	E 21° 52′	198
12	Nîmes	43° 51′	E 04° 24′	61
12′	Frankfurt a/M	50° 08′	E 08° 36′	106
12″	Skoplje	41° 59′	E 21° 28′	240
13	Napoli	40° 59′	E 14° 17′	95
13′	Marrakech	31° 39′	W 08° 01′	460
14	Brindisi	40° 39′	E 17° 51′	39
14′	Kosovska Mitrovica	42° 53′	E 20° 53′	525
14″	München	48° 15′	E 11° 33′	520
15	Cagliari	39° 15′	E 09° 04′	2
15′	Pljevlja	43° 21′	E 19° 22′	769
16	Kumbor	42° 26′	E 18° 36′	5
16′	Perpignan	42° 44′	E 02° 52′	45
16″	Messina	38° 12′	E 15° 33′	54
16‴	Tadla	32° 37′	W 06° 18′	505
17	Mostar	43° 18′	E 17° 53′	53
17′	Palermo	38° 07′	E 13° 19′	4
18	Split	43° 31′	E 16° 26′	128
18′	Catania	37° 28′	E 15° 04′	4
18″	Rennes	48° 07′	W 01° 43′	46
19	Rab	44° 46′	E 14° 47′	342
19′	Taranto	40° 29′	E 17° 13′	22
20	Conegliano	45° 55′	E 12° 20′	75
20′	Venezia	45° 26′	E 12° 23′	4
20″	Praha	50° 04′	E 14° 26′	254
20‴	Sofia	42° 46′	E 23° 12′	555
21	Parma	44° 49′	E 10° 17′	52
21′	Toulouse	43° 33′	E 01° 23′	163
21″	Varna	43° 11′	E 27° 53′	5
21‴	Melilla	35° 17′	W 02° 59′	40

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
22	Zara	44° 07′	E 15° 14′	8
22′	Tours	47° 27′	E 00° 42′	97
22′′	Tetuan	35° 35′	W 05° 24′	85
23	Larache	35° 13′	W 06° 06′	6
24	Sète	43° 24′	E 03° 41′	18[illegible]
24′	Košice	48° 42′	E 21° 16′	205
24′′	Foggia	41° 26′	E 15° 33′	87
25	Pau	43° 22′	W 00° 24′	19[illegible]
26	Ajaccio	41° 55′	E 08° 45′	8
30	Le Havre	49° 29′	E 00° 05′	17
30′	Athènes	37° 59′	E 23° 42′	3[illegible]
30′′	Tripoli	32° 54′	E 13° 13′	18
31	Marseille	43° 26′	E 05° 12′	12
31′	Salonique	40° 40′	E 22° 58′	71
31″	Oran-la-Senia	35° 38′	W 00° 37′	87
31‴	Bengasi	32° 06′	E 20° 04′	25
32	Metz	49° 05′	E 06° 08′	193
32′	Rhodi	36° 26′	E 27° 52′	91
32′′	Alger-Agha	36° 32′	W 03° 03′	4
33	Montélimar	44° 35′	E 04° 43′	75
33′	Corfou	39° 37′	E 19° 55′	25
34	Biskra	35° 00′	E 05° 59′	138
35	Touggourt	33° 14′	E 06° 18′	76
36	Zante	37° 47′	E 20° 53′	6
36′	Köln	50° 59′	E 06° 53′	48
36′′	Ouargla	31° 54′	E 05° 10′	146
37	La Cannée (Crète)	35° 30′	E 24° 02′	14
38	Calamate	37° 02′	E 22° 05′	9
38′	Colomb-Béchar	31° 40′	W 02° 10′	768
40	Gibraltar	36° 06′	W 05° 21′	17
40′	Ankara	39° 58′	E 32° 48′	861
41	Edirne	41° 40′	E 26° 38′	85
41′	Calafrana	35° 41′	E 14° 31′	71
41′′	Budapest	47° 31′	E 19° 01′	130
41‴	Laghouat	33° 38′	E 02° 51′	750

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
42	Angoulême	45° 40′	E 00° 13′	134
42′	Izmir	38° 27′	E 27° 15′	35
43	Istambul	41° 02′	E 28° 47′	129
50	San Sebastián	43° 19′	W 02° 00′	23
50′	Bergerac	44° 51′	E 00° 30′	33
51	La Courtine	45° 42′	E 02° 15′	765
51′	Gijón	43° 33′	W 05° 39′	13
52	Vigo	42° 14′	W 08° 43′	—
53	Madrid	40° 24′	W 03° 41′	667
54	Sevilla	37° 22′	W 06° 00′	7
55	Almeria	36° 51′	W 02° 28′	65
56	Alicante	38° 21′	W 00° 29′	35
56′	Istres	43° 25′	E 04° 57′	25
56″	Kraków	50° 05′	E 19° 59′	220
57	Cazaux	44° 32′	W 01° 08′	24
57′	Mahón	39° 53′	E 04° 16′	43
58	Barcelona	41° 23′	E 02° 10′	42
58′	Lwów—Skniłów	49° 48′	E 23° 56′	331
59	Valencia	39° 28′	W 00° 23′	18
60	Zaragoza	41° 39′	W 00° 53′	237
60′	Cap Corse	43° 01′	E 09° 21′	127
60″	Haifa	32° 48′	E 34° 59′	10
61	Santander	43° 28′	W 03° 47′	66
61′	Zakopane	49° 17′	E 19° 57′	846
61″	Pertusato	41° 22′	E 09° 10′	106
61‴	Tunis	36° 51′	E 10° 15′	2
61⁗	Gaza	31° 30′	E 34° 27′	35
62	Coruna	43° 23′	W 08° 22′	25
62′	Bizerte	37° 14′	E 09° 49′	2
63	Bourgos	42° 20′	W 03° 42′	860
64	Valladolid	41° 38′	W 04° 44′	690
64′	Médenine	33° 20′	E 10°	—
65	Badajoz	38° 54′	W 06° 58′	195
65′	Gafsa	34° 29′	E 08° 45′	315

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
66	Córdoba	37° 53′	W 04° 47′	123
67	Málaga	36° 44′	W 04° 25′	60
68	Los Alcázares	37° 44′	W 00° 51′	3
69	San Fernando	36° 28′	W 06° 12′	31
69′	La Coubre	45° 41′	W 01° 14′	6
69″	Gabès	33° 53′	E 10° 06′	5
71	Kébili	33° 40′	E 09° 10′	55
72	Guadalajara	40° 38′	W 03° 10′	695
73	Granada	37° 09′	W 03° 35′	683
75	Odessa	46° 26′	E 30° 46′	64
75′	Bucuresti	44° 25′	E 26° 06′	82
75″	Cap Bon	37° 00′	E 11° 10′	393
79	Cernauti	48° 17′	E 55° 57′	245
81	Pôrto	41° 08′	W 08° 40′	25
81′	Zurich	47° 23′	E 08° 33′	493
81″	Helwân	29° 52′	E 31° 20′	116

Number	Station	φ North	λ Greenw.	H meters
82	Coimbra	40° 12′	W 08° 25′	140
82′	Alexandria	31° 12′	E 29° 53′	32
82″	Constanța	44° 11′	E 29° 39′	4
84	Lisboa	38° 44′	W 09° 11′	227
85	San Vincent	37° 01′	W 09° 00′	48
85′	Port Said	31° 16′	E 32° 19′	4
86	Faro	37° 01′	W 07° 55′	57
87	Suez	29° 56′	E 32° 33′	3
88	Tancos	39° 28′	W 08° 24′	85
89	Vila Real	37° 11′	W 08° 25′	4
89′	Jalta	44° 30′	E 34° 11′	7
90	Vendas Novas	38° 41′	W 08° 27′	159
90′	Asyût	27° 11′	E 31° 13′	55
90″	Feodosia	45° 02′	E 35° 23′	8
92	Beyrouth	33° 54′	E 35° 32′	8
93	Novorossiisk	44° 44′	E 37° 49′	37
94	Alexandrette	36° 30′	E 36° 11′	2

the south coasts of Spain. The Mediterranean coasts in North-Africa are not more privileged in this regard, as may be seen in Table III and Table IV. In order to get more abundant sunshine in winter, it is by no means sufficient to cross the Mediterranean Sea between Marseille and Oran, Alger or Tunis. It would be necessary to cross also the Atlas Mountains and to go to the sunny oasis of the Sahara desert; or, still better, to descend the Nile River till Upper Egypt (see Table II). As concerns the cloudiness of French Sahara, we give here a small abstract of data, kindly supplied for 1933 by Mr. L. Petitjean, inspector of meteorological stations in French North-Africa.

Mean cloudiness in percentages

	Jan.	July	Year
Alger	73	35	52
Biskra	60	6	39
Touggourt	28	3	27
Ouargla	28	2	28
In Salah	23	3	28
Adrar	20	16	23
Timimoun	13	4	16
Tamanrasset	57	32	52

The geographical situation of these stations may be seen in Fig. 2; we note that the station of Tamanrasset is situated in the Hoggar — Mountains in the middle of Sahara desert (latitude $22^{0}\,45'$ N).

We see that even at Biskra, the first Saharan oasis, the winter sky is not always clear, but the more remoted stations like Ouargla or, better, the places in Upper Egypt have very few clouds even during winter months.

Notwithstanding this clear sky and abundant sunshine, these remoted African places can, by no means, be counted to the mediterranean type of climate. Even during winter season, the relatively hot, perfectly clear and very dry days in Sahara are frequently interrupted by violent sandstorms; they obstruct the visible horizon and make very uncomfortable the life conditions during these days. Also the enormous differences between the air temperature during day and night with sudden transition after sunrise and sunset are not favourable for European inhabitants and even for the natives.

The Tables III, IV and V give mean monthly and annual percentages of cloudiness, from 0 for sky without any cloud till 100 for totally covered sky. The mean values were calculated for various periods, mostly for 20 or even more years. An additional table (Table IV) gives supplementary values of mean cloudiness for exactly the same period (from 1931 till 1934) at 18 mediterranean stations. The comparison between the Table III and Table IV indicates that aperiodic variations from year to year are frequently great enough, especially for winter months. In order to save space we cannot enter here in details concerning the problem of these aperiodic changes. This interesting question will be discussed in an another paper; we note only that the mean cloudiness during four years (1931/1934) was somewhat greater, especially in winter, in comparison with mean values for periods of 20 or more years.

TABLE III. Mean monthly and annual percentages of cloudiness along the mediterranean coasts.

Months:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
Stations (number of years with observations).													
A) Eastern Riviera.													
Athens (26) . . .	55*	**57**	53	48	40	26	11*	12	22	41	57	**59**	40
Corfu (10)	56	57	53	52	48	26	9*	13	24	46	52	**59**	41
Dubrovnik (15) . .	50	44*	**51**	50	38	29	16*	16*	27	50	53	**55**	40
Hvar (45)	49	45	45	42	34	28	14*	17	27	47	50	**54**	38
Vis (Lissa) (15) . .	48	40	44	45	37	31	18*	20	29	44	45	**48**	37
Split (22)	49	50	46	46	42	37	28	24*	32	45	48	**51**	42
B) Central Riviera.													
Alassio (12) . . .	42	44	44	46	46	40	29	27*	30	44	**51**	42	41
Porto-Maur. (18) . .	43	45	45	**48**	46	40	27*	27*	35	45	**50**	44	41
San Remo (18) . . .	39	44	44	**47**	46	38	28	26*	34	49	**50**	41	41
Monaco (7)	40	42	**49**	48	41	38	29*	29*	41	38	**46**	45	41
Nice, sea shore (9) .	41*	45	**52**	49	45	41	27	23*	33	40	**54**	46	41
Nice, Mount Gros (29)	45*	46	50	**52**	51	44	31*	31	40	**52**	50	47	45
C) Western Riviera.													
Barcelona (35) with Gracia	43*	45	47	**50**	45	36	33*	35	45	45	**47**	45	43
Valencia (35) . . .	37	37	36*	**38**	36	26	23*	27	34	36	**39**	36	34
Alicante (35) . . .	37	35*	**39**	36	34	25	17*	20	32	38	**38**	37	32
Cartagena (9) . . .	37	34*	**42**	32	23	15	12*	13	30	36	**37**	32	29
Malaga (23)	39	38*	**47**	42	32	16	8*	13	28	35	**39**	39	31
Mediterranean coasts of North Africa and of Minor Asia.													
Oran (13)	**45**	40	43	41	39	35	33	32*	39	41	44	44	40
Alger (16)	55	55	**56**	47	46	39	26*	27	43	46	**56**	56	46
Tunis (7)	59	61	**61**	49	46	36	19	15*	44	47	54	60	46
Bengasi (15)	**43**	34	30	25	29	13	8*	9*	13	21	31	41	25
Alexandria (Egypt) (40)	**44**	39	34	24	22	12*	13	15	17	21	35	42	27
Haifa (9) (Palestine)	**52**	47	46	37	32	26	27	27	22*	26	45	50	36
Beirouth (32) (Syria)	**57**	55	49	43	32	16*	16*	18	19	27	44	54	36
South Coast of Crimean peninsula (Black Sea).													
Simferopol (7) . . .	58	**65**	56	48	38	37	25	19*	34	48	58	58	45
Jalta (14)	61	**66**	56	50	46	35	26	22*	32	44	56	60	46

TABLE IV. Mean cloudiness (percentages from O for sky without any cloud till 100 for totally covered sky) for 18 stations on mediterranean coasts.

NB. Mean values established for exactly the same period from 1931 till 1934.

Months:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
Kumbor.	54	50*	**66**	64	49	33	22	19*	34	50	**62**	60	47
Divulie	50	49*	**63**	55	45	39	26	22*	38	50	**59**	58	46
Hvar.	51	50*	**62**	54	44	39	25	23*	39	49	59	**60**	46
Split	50	48*	**63**	53	45	37	23	19*	38	47	58	**58**	45
Senj	56	53*	55	**57**	47	41	32	29*	41	51	61	**64**	49
Rab	57	50*	**66**	61	54	47	31	29*	43	51	60	**63**	51
Cirkvenica . . .	53	49*	64	**65**	60	49	36	34*	48	57	**64**	62	53
Venezia.	50	48*	60	**61**	55	50	33	33*	43	45	60	**61**	50
Tripoli	58	51*	**54**	47	47	35	19	8*	29	50	**62**	55	43
Tunis	59	58	**62**	43	39	35	15*	18	39	52	56	57	44
Alger	66	58*	**65**	55	47	44	32*	35	45	51	62	**66**	52
Oran.	53*	55	**64**	50	45	38	30*	33	46	47	**62**	56	48
Monaco	38*	42	**52**	48	43	38	32	28*	41	39	**50**	48	42
Nice (sea shores) .	47	44*	**58**	51	43	41	25	23*	34	43	**54**	50	42
Valencia (Spain) .	36*	39	**46**	41	35	35	21*	27	42	36	48	**49**	38
Gibraltar	49*	52	**56**	46	45	33	45	31*	43	51	**55**	51	46
Malta	67	65	65	50	46	36	19	17*	33	52	**70**	67	49
Athens	66	62	65	52	52	36	17	13*	24	44	64	62	47

TABLE V. Mean montly and annual values of cloudiness in percentages, along the Italian coasts (with some Atlantic isles and coasts).

Adriatic coasts.

Abbazia . .	(30)	45	45	51	49	42	39	28	25*	35	**53**	49	52	43
Pola	(30)	51	49	48	47	44	40	30	27*	37	51	52	**56**	44
Trieste . . .	(30)	55	54	57	58	54	52	39	35*	43	57	57	**60**	52
Venezia . .	(20)	62	59	62	59	59	54	47	41*	50	63	65	**67**	57
Ancona. . .	(20)	**76**	69	63	60	59	51	49	37*	50	65	74	75	60
Bari	(20)	60	58	53	49	42	38	17*	20	32	48	58	**61**	45
Gallipoli . .	(20)	51	52	47	47	39	28	14*	14*	30	45	49	**58**	39

Months:		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
Mediterranean coasts with Malta.														
Malta . . .	(42)	54	51	49	45	39	26	13*	16	31	48	52	**57**	40
Siracusa . .	(20)	60	60	56	56	49	34	18*	22	42	57	60	**64**	48
Catania. . .	(20)	52	**53**	50	49	39	28	14*	16	34	50	54	**56**	41
Messina. . .	(20)	61	60	54	52	43	30	28	21*	34	49	56	**64**	46
Palermo . .	(20)	62	63	55	53	46	32	15*	16	34	52	56	**65**	46
Trapani . .	(20)	**71**	69	61	59	50	33	16*	18	38	58	65	**71**	41
Reggio di Calabria	(20)	60	59	53	50	41	27	15*	17	28	49	58	**64**	43
Porto d'Ischia	(20)	52	53	51	47	42	32	18*	18*	30	47	43	**54**	41
Napoli . . .	(20)	48	50	50	49	42	32	19	16*	28	43	49	**52**	40
Livorno. . .	(20)	55	53	56	53	52	45	31	29*	41	62	55	**59**	48
Spezia . . .	(20)	44	46	**48**	47	46	34	20*	29	34	46	45	55	40
Chiavari . .	(20)	48	46	49	49	48	40	30	29*	36	50	49	**52**	44
Genova. . .	(20)	54	50*	55	57	**58**	53	40	38*	44	**57**	55	53	51
Atlantic coasts (south of Spain and Portugal).														
Gibraltar . .	(41)	50	49	50	43	38	26	22*	26	40	47	**51**	49	41
Lagos . . .	(19)	**49**	48	47	48	41	26	13	15*	31	36	46	**49**	37
Lisboa . . .	(50)	52	51	50	51	44	34	22	20*	36	48	52	**53**	43
Porto . . .	(40)	55	56	55	55	52	47	35	34*	46	52	**56**	**56**	50
Isles (Madeira, Açores and Canaries).														
Funchal.		55	55	56	55	55	53	48	40*	48	57	**59**	56	53
Angra d. H.. . .		68	67	67	62	62	58	54	52*	57	62	65	**69**	62
Las Palmas . . .		51	52	53	53	50	53	**57**	50	39*	47	54	49	51
Coasts of Morocco.														
Mogador . .	(17)	28	32	31	28	27	22	17	16*	23	31	**34**	28	26
Casablanca .	(7)	38	40	44	44	39	35	35	33*	33*	35	40	**45**	38
Tanger . . .	(7)	39*	**52**	44	39	35	29	12*	16	28	40	42	**43**	35

Note. The number given in parenthesis after the stations name, indicate the whole number of years used for the calculation of mean percentages of cloudiness. The most part of stations has a period of 20 years (from 1891 till 1910); the respective mean values are given in the work of F. Eredia „Nebulosità in Italia", published in 1915 at Rome.

We give finally some general characteristic features of the distribution of cloudiness along the Mediterranean coasts.

1) In the Western Riviera especially favourable conditions, from solar climatic point of view, are to be found between Malaga, Almeria and Alicante. Here belong further the south-western Atlantic coasts of the Iberian peninsula and also the Catalonian part, with Barcelona and Sitges as representative place. The Portuguese coasts in the south part and in the

lovely district round Lisbon and even up to Porto have also a remarkable solar climate but very little known till now as concerns the actinometric data.

The coast of North Africa (from Spanisch Morocco to Tunis and Tripoli) is more clouded during winter than the favorized South-east coast of Spain. Only on some coasts and places of Minor Asia and especially in Egypt, where the climatic conditions are however already more or less desertic, it is possible to find similar or even more clear skies in winter than in the sunny corner between Malaga, Almeria and Alicante.

2) To the Central Riviera we count above all the coast between St. Raphaël - Cannes - Nice - Menton and Bordighera - San Remo - Porto Maurizio - Alassio. Some other coasts of the sunny land of Italy and of the large Mediterranean isles (Corsica, Sardinia and Sicily) show also, at least in certain portions of their littoral, characteristic features of the privileged climate of the Riviera. Unfortunately scarcely anything is known about actinometric conditions of Corsica and Sardinia. In Sicily, there are two parts, different enough from actinometric point of view. Though the air temperature is very mild in winter on Sicilian coasts, the sky is cloudy between Trapani - Palermo and Messina. But the east coast of Sicily, near to Catania, has already less cloudy sky especially in early spring. Some other parts of Western coasts of Italy (f. i. round of Bay of Naples) enjoy also a good solar climate in winter, similar to the sunny spot between Bordighera - San Remo - Alassio.

3) To the Eastern Riviera belongs the central part of Yugoslavian coast and also small Dalmatian isles on the east part of Adriatic Sea. As may be seen from Table III and IV, the lovely places like Dubrovnik (Ragusa), Hvar (Lesina) or Split (Spalato) have a remarkable solar climate and can be counted among the most favoured of the whole Mediterranean littoral.

The natural prolongation of the Eastern Riviera is formed by the Greek coasts and isles with some parts of Minor Asia and especially Syria and Palestine.

In order to save space, we must postpone to subsequent papers the further details concerning the solar climate of the Mediterranean lands.

Ostatnie Wydawnictwa Towarzystwa Naukowego Warszawskiego Wydz. III, IV.

Skład: Warszawa, Nowy Świat 72. T. N. W.

Rocznik Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Rok XXVII. 1934.

Katalog wydawnictw Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. 1907—1932. Warszawa. 1933. Str. VI + 262.

Archiwum Mineralogiczne. Tom XI. Warszawa. 1935.

St. J. Thugutt. Ultramikroskopowe badania kryształów kwarcowych w związku z ich barwą i genezą. — St. J. Thugutt. Produkty hydrolizy labradoru wołyńskiego z Horoszek wraz z badaniami rentgenologicznemi Dr. Marji Kołaczkowskiej. — S. Jaskólski. Les gisements argento-stannifères de Chocaya en Bolivie avec un aperçu géologique par Roman Kozłowski. — A. Łaszkiewicz. Über die Zylinder-Laueaufnahmen. — M. Kamiński. Kilka uwag o bentonitach w Polsce. — St. J. Thugutt. O pewnych reakcjach kaolinu i haloizytu. — St. J. Thugutt. O produktach przeobrażeń leucytu skałotwórczego. — M. Kołaczkowska. Struktura sodalitu. — W. Wawryk. O augicie zwyczajnym i tytanowym z polskich cieszynitów.

Archiwum Nauk Antropologicznych. Dział A. Antropologja. № 5. Warszawa. 1933.

Leon Manteuffel-Szoege. Antropomorfologja wątroby. (Studja nad antropomorfologją wątroby polaków).

Archiwum Hydrobiologji i Rybactwa. Organ Stacji Hydrobiologicznej na Wigrach i Stacji Morskiej w Helu. Tom VIII. 1934.

J. Omer-Cooper. Uwagi o krętakowatych *(Gyrinidae)*. — K. Demel. Z pomiarów termicznych Bałtyku. Część V. — M. Stangenberg. O letniem uwarstwowieniu termicznem i tlenowem jezior Augustowskich. — K. Demel i S. Dłuski. Sprawozdanie z podróży odbytej na statku szkolnym „Dar Pomorza" na południową część Ławicy Środkowej Bałtyku. — M. Gieysztor. Badania limnologiczne nad kilkoma drobnemi zbiornikami.— J. Wiszniewski. Badania ekologiczne nad psammonem. — M. Stangenberg. Psammolitoral jako skrajnie eutroficzne środowisko wodne. Nekrologi: Einar Neuman. Kazimierz Gajl.

Monografje z pracowni Neurobiologicznej. II. 1928.

N. Zandowa. Splot naczyniasty (*Plexus chorioideus*) (Anatomja, fizjologja, patologja).

Planta Polonica. Materjały do Flory Polskiej.

T. I. 1930. K. Karpowicz. Przyczynek do znajomości flory powiatu Nowogródzkiego.

T. II. 1930. R. Kobendza. Stosunki fitosocjologiczne puszczy Kampinoskiej.

T. III. 1935. J. Tyszkiewiczowa. Badania nad występowaniem porostów nadrzewnych w lasach półn.-wsch. części wyżyny Kielecko-Sandomierskiej.

Archiwum Nauk Biologicznych.

T. IV, 1933. B. Hryniewiecki. Tentamen Florae Lithuaniae. (Zarys flory Litwy).

T. V, zesz. 1, 1935. Z. Mockus. Badania osteometryczne nad końmi litewsko-żmudzkimi.

Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych.

Nr. 33. 1930. J. Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration.

Nr. 34. 1933. A. Tarski. Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

R. XXVIII. 1935. Zesz. 1—3.

Prace następujących autorów: M. Kołaczkowskiej, A. Łaszkiewicza, J. Riddera i W. Sierpińskiego (2).

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział IV nauk biologicznych.

R. XXVIII. 1935. Zesz. 1—6.

Prace następujących autorów: S. Bilewicza, W. Bobrówny, A. Cederbauma, B. Filipowicza, W. Giedroycia, F. Krasnodębskiego, M. Laskowskiego, R. Majminówny (2), I. Michalskiego, J. Mydlarskiego, K. Obitza, S. Przyłęckiego (3), H. Rafałowskiej (2), W. Roszkowskiego, W. Stefańskiego, L. M. Sztabholca, W. Wernera.

Zakłady Graficzno-Introl. J. DZIEWULSKI, Warszawa.