Sprawozd. Wydz. III T.N.W.

23-24

1930
1931
T.N.W.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III.
XXIII Année 1930 Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIII 1930 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1930

DZIEWULSKI
ZAKŁ. GRAF.-INTR.
Warszawa, Złota 29

TREŚĆ ZESZYTU 1—3.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie
z dnia 30 stycznia 1930 r.

J. Ridder.

O liczbach pochodnych.

Komunikat przedstawiony przez W. Sierpińskiego na posiedzeniu w dniu 30 stycznia 1930 r.

J. Ridder.

Über Derivierten und Ableitungen.

(Baarn, Niederlande).

Vorgelegt von W. Sierpiński in der Sitzung vom 30 Januar 1930.

Im folgenden wird unter I ein Beweis geliefert des bekannten Satzes: *Bei einer in* (a, b) *endlichen Funktion* $f(x)$ *sind, wenn man von einer Nullmenge absieht, an den verschiedenen Stellen* x *nur noch die folgenden vier Fälle möglich:* 1. $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ *endlich;* 3. $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$, $D_+ = D^- =$ *endlich;* 4. $D^- = +\infty$, $D_+ = -\infty$, $D_- = D^+ =$ *endlich.*

Für stetige Funktionen wurde der Satz von A. Denjoy [1]) bewiesen, für messbare Funktionen von G. C. Young [2]), während S. Saks [3]) zeigte, dass er auch bei ganz willkürlichen Funktionen seine Gültigkeit behält. Der hier folgende Beweis für den Fall willkürlicher Funktionen schliesst sich mehr an die Methoden der beiden ersten Autoren an. So ist es nicht notwendig die Eigenschaft zu benutzen, dass jede monotone Funktion fast überall

[1]) Siehe Journal de math. (7) I (1915), p. 105—240, insbes. p. 174—195.

[2]) Siehe z. B. Hobson, Theory of functions I, §§ 291—299.

[3]) Siehe Fund. mat. V (1924), p. 98—104.

eine Ableitung besitzt, wie in der Arbeit von H. Saks; diese Eigenschaft folgt nun vielmehr als Korollar aus dem Hauptsatz. Weiter wird man sehen, dass das Lemma (aus § 2) und der Vitalische Überdeckungssatz hier fast dieselbe Rolle spielen wie das „premier, resp. deuxième théorème sur les nombres dérivés" in der zitierten Denjoyschen Arbeit.

Der Satz wurde von H. Saks [4]) auf integrierbare (Burkill), lineare Intervallfunktionen ausgedehnt, unter Annahme seiner Gültigkeit bei Punktfunktionen. In II folgt ein unmittelbarer Beweis dieser Übertragung.

Schliesslich enthält III ein kurzer Beweis des Lebesgueschen Satzes, wonach jedes unbestimmte Integral einer summierbaren Funktion $f(x)$ fast überall eine Ableitung hat $= f(x)$.

I.

§ 1. Wir brauchen die beiden folgenden Sätze:

Satz A: *Eine willkürliche Menge E besitzt in ihren Punkten fast überall eine äussere Dichte $= 1$* [5]).

Satz B: *Bei einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ ist in jedem Punkte, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge, die untere Derivierte der einen Seite nicht grösser als die obere Derivierte der anderen Seite* [6]).

§ 2. Lemma: *Wenn die untere rechte Derivierte einer willkürlichen, endlichen Funktion $f(x)$ auf einer Teilmenge E des Intervalls (a, b) von positivem äusserem Masse nur von $-\infty$ abweichende Werte annimmt, so lassen sich bestimmen ein Unterintervall (a_1, b_1) und in diesem Intervall eine Teilmenge E_1 von E von positivem äusserem Masse, und weiter eine Konstante K, derartig dass für jeden Punkt ξ von E_1 und jeden dabei gehörenden $\xi + h$ (h positiv), der in (a_1, b_1) liegt:*

$$f(\xi + h) - f(\xi) \geq K . h \tag{1}$$

ist.

---

[4]) Siehe Fund. mat. X (1927), p. 220.

[5]) Siehe W. Sierpiński, Fund. mat. IV (1923), p. 167—171; auch p. 125.

[6]) Beweismethoden, welche sich auch anwenden lassen beim Satze B_1 von § 8 gaben G. C. Young [s. Hobson, T. o. F. I, §§ 291, 292] und W. Sierpiński [s. Rajchman e. Saks, Fund. mat. IV (1923), p. 209—210].

Beweis: $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ sei eine nach $+\infty$ konvergierende Folge von positiven Zahlen. M_k sei die Menge derjenigen Punkte von E, in denen $D_+ f(x) > -n_k$ ist. Dann wird $E = \lim_{k=\infty} M_k$ sein. Somit lässt sich eine natürliche Zahl ν bestimmen, für die die Menge M_ν positives äusseres Mass besitzt.

Bei ganzem, positivem l sei $M_{\nu, l}$ diejenige Teilmenge von M_ν, in deren Punkten (ξ) aus $0 < h < \frac{b-a}{l}$ und $\xi + h \leqq b$ folgt:

$$f(\xi + h) - f(\xi) \geqq -n_\nu \cdot h.$$

Da $M_\nu = \lim_{l=\infty} M_{\nu, l}$ ist, existiert ein Wert λ, für den die Menge $M_{\nu, \lambda}$ positives äusseres Mass hat.

Wir teilen (a, b) in eine endliche Anzahl von nicht übereinander greifenden Intervallen $i_1, \ldots, i_p$, deren Längen alle kleiner sind als $\frac{b-a}{\lambda}$. Dann muss mindestens eines unter ihnen eine Teilmenge von $M_{\nu, \lambda}$ enthalten mit positivem äusserem Masse. Wählt man diese Teilmenge als E_1, das E_1 enthaltende Intervall i_j als (a_1, b_1) und $-n_\nu$ als K, so ist damit der Beweis fertig.

§ 3. Satz 1: *Eine in (a, b) endliche Funktion $f(x)$ kann nicht auf einer Menge E von positivem äusserem Masse gleichzeitig den beiden Bedingungen genügen: $D^- f(x) = +\infty$ und $D_+ f(x) > -\infty$.*

Beweis: Sonst existierten nach dem Lemma (§ 1) ein Unterintervall (a_1, b_1), eine Teilmenge E_1 von E in (a_1, b_1) von positivem äusserem Masse und weiter eine Konstante K, derartig dass die Ungleichung (1) gültig wäre für ξ auf E_1 und $\xi + h$ in (a_1, b_1) [wobei h positiv]. Es wäre dabei immer möglich, dass a_1 zu E_1 gehörte.

Für jeden Punkt ξ von E_1 lässt sich bei jedem positiven N eine abzählbare Folge von Intervallen $(\xi - h_k, \xi)$ angeben, welche sich mit zunehmendem k in ξ zusammenziehen und für die

(2) $$f(\xi) - f(\xi - h_k) > N \cdot h_k$$

ist. Nach dem Überdeckungssatze von Vitali existiert nun eine endliche Anzahl von derartigen Intervallen (i_j), welche keine Punkte gemeinsam haben, in (a_1, b_1) liegen und ein Gesamtmass haben $> m_a(E_1) - \varepsilon$, wobei das positive ε willkürlich klein ist.

Für die zu den (i_j) komplementären Intervalle (u_l) in (a_1, b_1) wird die Ungleichung (1) erfüllt. Somit wäre

$$f(b_1) - f(a_1) > K \cdot \sum m(u_l) + N \cdot [m_a(E_1) - \varepsilon] .$$

Dies folgt durch Teilung von (a_1, b_1) in den Intervallen (i_j) und (u_l) und Anwendung der Ungleichungen (1) und (2), in den (u_l) bzw. in den (i_j). Da N und ε willkürlich zu wählen sind bei fest bleibendem K, würde hieraus folgen müssen $f(b_1) - f(a_1) = +\infty$, was jedoch unmöglich ist [7].

Der Satz lässt sich auch in dieser Form schreiben:

Satz 1^{bis}: *Wenn eine in (a, b) endliche Funktion $f(x)$ in den Punkten einer Menge E_1 $D^- f(x) = +\infty$ hat, so ist $D_+ f(x) = -\infty$ auf E_1, ausgenommen vielleicht in den Punkten einer Teilmenge vom Masse Null. In den Punkten der Menge E_2, wo $D_- f(x) = -\infty$ ist, wird $D^+ f(x) = +\infty$ sein, vielleicht mit Ausnahme einer Teilmenge vom Masse Null.*

§ 4. Satz 2: *Wenn eine in (a, b) endliche Funktion $f(x)$ in den Punkten einer Menge $E: D^+ f(x)$ und $D_+ f(x)$ beide $= +\infty$ oder $= -\infty$ hat, so ist das Mass von E gleich Null.*

Beweis: In allen Punkten der Menge $E_1 [D^+ f(x) = D_+ f(x) = +\infty]$ muss nach Satz B (§ 1) $D^- f(x) = +\infty$ sein, mit Ausnahme einer Nullmenge. Daraus folgt jedoch, nach Satz 1^{bis} (§ 3), dass E_1 eine Nullmenge ist. Dasselbe gilt für $E_2 [D^+ f(x) = D_+ f(x) = -\infty]$; also auch für $E = E_1 + E_2$.

---

[7]) Nennen wir eine in (a, b) liegende, messbare Menge *überall masshaltig in* (a, b), wenn sie in einer jeden Umgebung der Punkte von (a, b) positives Mass hat [sie braucht dann noch kein massgleicher Kern von (a, b) zu sein; vgl. Denjoy, l. c. [1]), p. 130 e. 131, note], so lässt sich nach dem Beweisverfahren des Textes zeigen: *Wenn eine in (a, b) stetige Funktion $f(x)$ in den Punkten einer Menge, welche in (a, b) überall masshaltig ist, $D^+ f(x) = +\infty$ hat, so ist $D_+ f(x) = -\infty$ auf einer in (a, b) überall dichten Menge.* [Diese Menge enthält somit perfekte Teilmengen, welche in (a, b) nirgends dicht liegen]. Beim Beweise soll anstatt des Lemmas von § 1 das folgende Lemma benutzt werden: Wenn für eine in (a_1, b_1) stetige Funktion $f(x)$ in allen Punkten $D_+ f(x) > -\infty$ ist, so existiert ein Teilintervall (a_2, b_2) und eine Konstante K, derartig dass für alle in (a_2, b_2) liegenden Punktepaare x und y $(x < y)$:

$$f(y) - f(x) \geq K \cdot (y - x)$$

ist.

§ 5. Satz 3: *Für eine in (a, b) endliche Funktion bilden diejenigen Punkte, in denen zwei untere und obere Derivierten* [*z. B.* $D_+ f(x)$ *und* $D^- f(x)$] *endlich und voneinander verschieden sind, eine Menge vom Masse Null.*

Beweis: Nehmen wir an, es seien $D_+ f(x)$ und $D^- f(x)$ auf einer Menge E von positivem äusserem Masse endlich, aber verschieden. Nach dem Lemma (§ 2) lassen sich dann ein Unterintervall (a_1, b_1) und eine Teilmenge E_1 von E von positivem äusserem Masse bestimmen, und weiter eine positive Konstante N, derartig dass für jeden Punkt ξ von E_1 und alle dabei gehörenden Punkte $(\xi + h)$ und $(\xi - k)$ [wobei h und k positiv], die in (a_1, b_1) liegen:

$$(3) \qquad f(\xi + h) - f(\xi) \geqq -N \cdot h, \quad \text{bzw.}$$

$$(4) \qquad f(\xi) - f(\xi - k) \leqq +N \cdot k$$

ist.

Nach Satz B (§ 1) enthält E_1 eine Teilmenge E_2 mit demselben äusseren Masse, in deren Punkten $D^- f(x) > D_+ f(x)$ ist. Wenn p und $q\,(p < q)$ rationale Zahlen sind, sei $E_{p,q}$ diejenige Teilmenge von E_2, in deren Punkten:

$$D_+ f(x) < p < q < D^- f(x)$$

ist. Da E_2 die Summe einer abzählbaren Folge von Mengen $\{E_{p,q}\}$ ist, muss mindestens eine dieser, z. B. $E_{\alpha,\beta}$, positives äusseres Mass haben $(\alpha < \beta)$.

Nach Satz A (§ 1) existiert ein innerer Punkt ξ_1 von (a_1, b_1), wo die äussere Dichte von $E_{\alpha,\beta} = 1$ sein wird. Es sei (c, d) ein in (a_1, b_1) liegendes und ξ_1 enthaltendes Intervall, dessen Endpunkte zu $E_{\alpha,\beta}$ gehören.

Für jeden Punkt ξ von $E_{\alpha,\beta}$ lässt sich eine abzählbare Folge von Intervallen $(\xi - h_i, \xi)$ angeben, welche sich mit zunehmendem i in ξ zusammenziehen und für die

$$(5) \qquad f(\xi) - f(\xi - h_i) > \beta \cdot h_i$$

ist. Nach dem Überdeckungssatze von Vitali existiert nun bei willkürlich positivem ε eine endliche Anzahl von derartigen Intervallen (i_l), welche keine Punkte gemeinsam haben, in (c, d) liegen und ein Gesamtmass haben $> m_a\{(c, d) \cdot E_{\alpha,\beta}\} - \varepsilon$. Für die zu den (i_l) komplementären Intervalle (u_l) von (c, d) wird die Ungleichung (3) erfüllt. Durch Teilung von (c, d) in den Intervallen (u_l) und (i_j) und Anwendung von (3) bzw. (5) folgt:

$$f(d) - f(c) > -N \cdot \sum m(u_l) + \beta \cdot \sum m(i_j).$$

Konvergenz von ε nach Null liefert:

$$(6) \qquad f(d) - f(c) \geqq -N \cdot [d - c - m_a\{(c, d) \cdot E_{\alpha, \beta}\}] + \\ + \beta \cdot m_a\{(c, d) \cdot E_{\alpha, \beta}\}.$$

Da in den Punkten von $E_{\alpha, \beta}$ auch (4) und $D_+ f(x) < \alpha$ gilt, liefert eine übereinstimmende Betrachtung:

$$(7) \qquad f(d) - f(c) \leqq +N \cdot [d - c - m_a\{(c, d) \cdot E_{\alpha, \beta}\} + \\ + \alpha \cdot m_a\{(c, d) \cdot E_{\alpha, \beta}\}.$$

In ξ_1 ist die äussere Dichte von $E_{\alpha, \beta} = 1$. Teilt man in (6) und (7) die beiden Seiten durch $d - c$ und lässt man darauf (c, d) sich in ξ_1 zusammenziehen, so lässt sich aus beiden Ungleichungen leicht fo'gern:

$$\beta \leqq \alpha.$$

Es ist jedoch gegeben: $\alpha < \beta$ [8]).

§ 6. Die Vereinigung der Sätze 1^{bis}, 2 und 3 liefert den Denjoyschen Satz bei willkürlichen, endlichen Funktionen.

Auch für den Fall $f(x)$ nur definiert ist in den Punkten einer in (a, b) liegenden, willkürlichen Menge M lässt sich das obige Beweisverfahren anwenden; die oberen und unteren Derivierten sind dann zu definieren mittels den zu M gehörigen Funktionswerten.

II.

§ 7. J. C. Burkill hat bei (im allgemeinen nicht-additiven) endlichwertigen Intervallfunktionen $\Phi(I)$ ein oberes und unteres Integral eingeführt [9]). Dazu wird das betrachtete Intervall

---

[8]) Wenn $D^+ f(x)$ und $D_+ f(x)$ endlich, aber verschieden sind auf einer Menge P, so existiert nach Satz 1^{bis} (§ 3) eine Teilmenge Q von P von gleichem äusserem Masse, in deren Punkten die vier oberen und unteren Derivierten alle endlich sind. Das Beweisverfahren des Textes zeigt weiter, dass Q (und somit auch P) kein positives äusseres Mass haben kann.

[9]) Siehe Fund. mat. V (1924), p. 321—327.

$R=(a,b)$ in endlich viele Unterintervalle $I_1,\ldots,I_n$ geteilt. Dann definiert er:

$$\overline{\int_R}\Phi(I)=\lim\ \sup\sum_{i=1}^{n}\Phi(I_i),\ \underline{\int_R}\Phi(I)=\lim\ \inf\sum_{i=1}^{n}\Phi(I_i),$$

wobei das Mass des grössten Teilintervalls nach Null konvergiert. Wenn das obere und untere Integral über R einander gleich sind, gilt dasselbe für jedes Teilintervall [10]) und die Intervallfunktion wird integrierbar genannt.

Wie bei Punktfunktionen lassen sich im Punkte x obere und untere rechte Derivierten, $D^+\Phi_x$ bzw. $D_+\Phi_x$ und obere und untere linke Derivierten, $D^-\Phi_x$ bzw. $D_-\Phi_x$ einführen.

§ 8. Die im I^en Teile bewiesenen Sätze lassen sich nun auf die hier folgende Weise auf endlichwertige Intervallfunktionen übertragen; die meisten Beweise, welche nach kleinen Abänderungen gültig bleiben, lassen wir fort.

Satz B_1: *Bei einer in (a,b) definierten Intervallfunktion $\Phi(I)$ ist in jedem Punkte, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge, die untere Derivierte der einen Seite nicht grösser als die obere Derivierte der anderen Seite.*

Lemma: *Wenn die untere rechte Derivierte einer in (a,b) definierten Intervallfunktion $\Phi(I)$ auf einer Teilmenge E des Intervalls (a,b) von positivem äusserem Masse nur von $-\infty$ abweichende Werte annimmt, so lassen sich bestimmen ein Unterintervall (a_1,b_1) und in diesem Intervall eine Teilmenge E_1 von E von positivem äusserem Masse, und weiter eine Konstante K, derartig dass für jeden Punkt ξ von E_1 und jedes dabei gehörende Intervall $(\xi,\xi+h)$, das in (a_1,b_1) liegt:*

$$\Phi(\xi,\xi+h)\geq K.h$$

ist (h positiv).

Satz I: *Eine in (a,b) definierte Intervallfunktion $\Phi(I)$, welche über jedes Teilintervall von (a,b) ein endliches oberes Integral hat, kann nicht auf einer Menge E von positivem äus-*

---

[10]) Siehe S. Saks, Fund. mat. X (1927), p. 211—224, Th. 5.

serem Masse gleichzeitig den beiden Bedingungen genügen. $D^- \Phi = +\infty$ *und* $D_+ \Phi > -\infty$ [11]).

Satz II: *Wenn eine in* (a, b) *definierte Intervallfunktion* $\Phi(I)$ *über* (a, b) *ein endliches oberes und ein endliches unteres Integral* [12]) *hat, so bilden die Punkte, in denen* $D^+ \Phi$ *und* $D_+ \Phi$ *beide* $= +\infty$ *oder* $= -\infty$ *sind, eine Menge vom Masse Null.*

Satz III: *Wenn eine in* (a, b) *definierte Intervallfunktion* $\Phi(I)$ *über* (a, b) *integrierbar* [13]) *ist, so bilden diejenigen Punkte, in denen dieselben zwei oberen und unteren Derivierten endlich und voneinander verschieden sind, eine Nullmenge.*

Beweis: Wenn z. B. auf einer Menge E von positivem äusserem Masse $D_+ \Phi$ und $D^- \Phi$ endlich, aber verschieden sind, lassen sich nach dem Lemma dieses § bestimmen ein Unterintervall (a_1, b_1), eine Teilmenge E_1 von E in (a_1, b_1) von positivem äusserem Masse und eine Konstante N, derartig dass für jeden Punkt ξ von E_1 und alle dabei gehörenden $\xi - k$ (k positiv), die in (a_1, b_1) liegen:

$$\Phi(\xi - k, \xi) \leqq +N \cdot k \tag{8}$$

ist.

Es existieren weiter zwei rationale Zahlen α und β $(\alpha < \beta)$ und dabei eine Teilmenge $E_{\alpha, \beta}$ von E_1 von positivem äusserem Masse, in deren Punkten:

$$D_+ \Phi < \alpha < \beta < D^- \Phi$$

ist.

---

[11]) Beim Beweise wird bei willkürlich positivem ε das Intervall (a_1, b_1) [siehe das Lemma dieses §] in Intervalle (i_k) zerlegt von der Eigenschaft, dass bei jeder weiteren Zerlegung in Intervalle (i'_k): $\sum \Phi(i'_k) < \overline{\int}_{(a_1, b_1)} \Phi + \varepsilon$, wenn die (i'_k) aus den (i_k) entstanden sind durch Hinzufügung willkürlicher neuer Teilungspunkte. Der linke Endpunkt eines jeden i_k, welches Punkte von E_1 enthält, soll zu E_1 gehören. Ein Intervall i_k wird darauf, wenn sie eine Teilmenge von E_1 von positivem äusserem Masse enthält, übereinstimmend mit der in § 3 angegebenen Weise geteilt. Es wird sich zeigen, dass $\overline{\int}_{(a_1, b_1)} \Phi = +\infty$ sein müsste.

[12]) Sie sind dann auch endlich über jedes Teilintervall von (a, b); siehe l. c. [10]), Th. 4.

[13]) Sie wird es dann auch sein über jedes Teilintervall von (a, b); siehe l. c. [10]), Th. 5.

Bei willkürlich positivem ε lässt sich angeben eine positive Zahl δ, so dass für jede Teilung von (a_1, b_1) in endlich viele Teilintervalle (a_j, b_j), deren Längen kleiner als δ sind:

$$(9) \qquad \left| \sum \Phi(a_j, b_j) - \int\limits_{(a_1,\, b_1)} \Phi \right| < \varepsilon$$

ist.

$E_{\alpha,\beta}$ lässt sich einschliessen in eine offene, in (a_1, b_1) liegende Menge O vom Masse $< m_a(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon$. Für jeden Punkt ξ von $E_{\alpha,\beta}$ lässt sich eine abzählbare Folge von Intervallen $(\xi - h_i, \xi)$ angeben, welche in O liegen, sich mit zunehmendem i in ξ zusammenziehen und für die

$$(10) \qquad \Phi(\xi - h_i, \xi) > \beta \,.\, h_i \text{ und } h_i < \delta$$

ist. Nach dem Überdeckungssatze von Vitali existiert nun bei ε eine endliche Anzahl von derartigen Intervallen (i_j), welche keine Punkte gemeinsam haben und ein Gesamtmass haben $= m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta$, wobei $|\eta| < \varepsilon$ ist.

Die Endpunkte der (i_j) liefern eine Teilung von (a_1, b_1). Jedes Teilintervall, dessen Länge $> \delta$ ist, wird in endlich viele Stücke zerlegt, welche alle $< \delta$ sind. Die Intervalle (i_j) und die weiteren Intervalle (u_k) liefern nach (9) und (10):

$$(11) \qquad \int\limits_{(a_1,\, b_1)} \Phi + \varepsilon > \sum \Phi(i_j) +$$

$$+ \sum \Phi(u_k) > \beta \,.\, [m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta] + \sum \Phi(u_k)\,.$$

Aus $D_+ \Phi < \alpha$ auf $E_{\alpha,\beta}$ folgt durch Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes auf die Teilmengen von $E_{\alpha,\beta}$ in den Intervallen (i_j), dass diese wieder nicht übereinander greifende Intervalle $(i_{j,l})$ enthalten mit den Eigenschaften:

$$(12) \qquad \Phi(i_{j,l}) < \alpha \,.\, m(i_{j,l})$$

und

$$(13) \qquad \sum_{j,\, l} m(i_{j,l}) = m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta_1\,, \text{ wobei } |\eta_1| < 3\varepsilon \text{ ist.}$$

Nennen wir die in i_j liegenden, zu den $(i_{j,l})$ komplementären Intervalle $(u_{j,k})$, so folgt aus (9), (12), (13) und (8):

$$(14) \qquad \int\limits_{(a_1, b_1)} \Phi - \varepsilon < \sum \Phi(i_{j,l}) + \sum \Phi(u_{j,k}) +$$

$$+ \sum \Phi(u_k) < \alpha . [m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta_1] + N(\eta_1 - \eta) + \sum \Phi(u_k).$$

Aus (11) und (14) folgt:

$$\alpha . [m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta_1] + N(\eta_1 - \eta) + \varepsilon > \beta . [m_a(E_{\alpha,\beta}) - \eta) - \varepsilon,$$

oder wenn ε nach Null konvergiert:

$$\alpha \geqq \beta.$$

Nach Annahme muss jedoch $\alpha < \beta$ sein.

Aus den Sätzen I, II und III folgt der Denjoysche Satz für integrierbare Intervallfunktionen [14]).

III.

Im folgenden wird ein kurzer Beweis geliefert des Lebesgueschen Satzes: *Das unbestimmte Integral einer über (a, b) summierbaren Funktion $f(x)$ besitzt fast überall in (a, b) eine Ableitung $= f(x)$.*

1^er^ Hilfssatz (von Denjoy): Jede in (a, b) messbare, fast überall endliche Funktion ist fast überall approximativ stetig [15]).

2^er^ Hilfssatz (von Fubini): Eine in (a, b) konvergente Reihe von nicht-abnehmenden Funktionen darf fast überall gliedweise differenziert werden [15]).

Beweis des Satzes: Nehmen wir an, es sei $f(x)$ beschränkt in (a, b) und in ξ approximativ stetig. Aus der Definition der approximativen Stetigkeit lässt sich dann leicht forgern, dass das unbestimmte Integral in ξ eine Ableitung $= f(\xi)$ hat [16]).

---

[14]) Es zeigt sich, dass der Hilfssatz A (§ 1) entbehrt werden kann. Auch in § 5 wäre dies möglich gewesen.

[15]) Beide Hilfssätze sind auf elementare Weise, nur unter Benutzung des Vitalischen Überdeckungssatzes, zu beweisen; vgl. auch J. Wolff, Bull. Soc. Math. LII (1924), p. 580 bzw. Rajchman e. Saks, Fund. mat. IV (1923), p. 204—213.

[16]) Siehe A. Denjoy, Bull. Soc. Math. XLIII (1915), p. 172, 173.

Nach dem 1er Hilfssatze wird dies fast überall in den Punkten von (a, b) gelten.

Da jede nicht-negative, nicht-beschränkte, aber summierbare Funktion $f(x)$ zu betrachten ist als Summe einer konvergenten Reihe von nicht-negativen, aber beschränkten Funktionen $\{f_k(x)\}$ und da weiter $\int\limits_a^x f_k(x)\, dx$ eine nicht-abnehmende Funktion ist in (a, b) liefert Anwendung des zweiten Hilfssatzes auf die Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(x)\, dx = \int\limits_a^x f(x)\, dx$ den Beweis auch bei einer derartigen Funktion $f(x)$.

Eine willkürliche, nicht-beschränkte, summierbare Funktion ist aufzufassen als Differenz von zwei nicht-negativen, summierbaren Funktionen, woraus der Satz ganz allgemein folgt.

2.XI.29.

L. Szperl.

O działaniu siarki na fenylo-α-naftylokarbinol.

Zgłoszono dnia 30 stycznia 1930 r.

Sur l'action du soufre sur phenyl-α-naphtylcarbinol.

Mémoire présentée dans la séance du 30 Janvier 1930.

Streszczenie.

Fenylo-α-naftylokarbinol, podobnie jak i inne dawniej przez autora zbadane alkohole aromatyczne pierwszo i drugorzędne, pod wpływem katalitycznym siarki traci składniki wody i przechodzi w eter, dotychczas w literaturze nie notowany. Ogrzewany z większą ilością siarki daje masę smolistą, z której został wyodrębniony keton fenylowo-α-naftylowy oraz produkt jego redukcji siarkowodorem — α-benzylonaftalen. Zostały również sprostowane dane literatury, dotyczące temperatury topnienia i nietrwałości oksymu ketonu fenylowo-α-naftylowego.

Praca wyjdzie in extenso w „Rocznikach Chemji".

Posiedzenie

z dnia 27 lutego 1930 r.

Jan Gadomski.

„Płaskie dno" krzywej blasku RZ Cassiopeiae

Przedstawił M. Kamieński dn. 27 lutego 1930 r.

Über den flachen Boden der Lichtkurve von RZ Cassiopeiae.

Note présentée par M. M. Kamieński dans la séance du 27 Février 1930.

Wyniki badań będą ogłoszone w Okólniku Obserwatorjum Astronomicznego Warszawskiego Nr. 9.

Die Resultate werden in „Circular of the Astronomical Observatory at Warsaw" Nr. 9 veröffentlicht.

Edward Szpilrajn.

Pewne twierdzenie o operacjach Hausdorffa.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 27 lutego 1930 r.

Streszczenie.

Oznaczając przez $\mathfrak{F}$ klasę przedziałów wymiernych na prostej (z dołączeniem zbioru pustego), autor dowodzi, że

Do każdej klasy $\mathfrak{K}$ zbiorów linjowych takiej, że $\overline{\overline{\mathfrak{K}}} \leqslant \mathbf{c}$, istnieje operacja Hausdorffa $\mathcal{H}_M$ taka, że $\mathcal{H}_M(\mathfrak{F}) \supset \mathfrak{K}$.

Edward Szpilrajn.

Un théorème sur les opérations de M. Hausdorff.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 27 Février 1930.

Soit $\{E_n\}$ une suite infinie quelconque d'ensembles et N un ensemble fixe de suites infinies de nombres naturels. Nous posons, d'après M. Hausdorff,

$$\Phi_N(E_1, E_2, \ldots) = \sum_N E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites de N[1]). $\mathfrak{R}$ étant une famille quelconque d'ensembles, désignons par $\mathcal{H}_N(\mathfrak{R})$ la famille des ensembles $\Phi_N(E_1, E_2 \ldots)$, où tous les ensembles $E_1, E_2, \ldots$ appartiennent à la famille $\mathfrak{R}$. La fonction $\mathcal{H}_N(\mathfrak{R})$ s'appelle l'opération de M. Hausdorff.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la classe des intervalles (linéaires) rationnels, l'ensemble vide y compris. M. Sierpiński a démontré que pour tout ensemble linéaire E il existe une opération $\mathcal{H}_N$ telle que $E \varepsilon \mathcal{H}_N(\mathfrak{F})$ [2]). Je me propose de démontrer dans cette communication le théorème suivant:

Théorème. *Pour toute classe $\mathfrak{K}$ d'ensembles linéaires, telle que*

(1) $$\overline{\overline{\mathfrak{K}}} \leqslant \mathbf{c},$$

---

[1]) Voir F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin — Leipzig 1927, p. 89, et W. Sierpiński: Sur les opérations de M. Hausdorff, *Fundamenta Mathematicae* t. XV, p. 199.

[2]) W. Sierpiński l. c., p. 200.

il existe une opération de M. Hausdorff $\mathcal{H}_M$, telle que

(2) $$\mathcal{H}_M(\mathfrak{F}) \supset \mathcal{K}\ [1]).$$

D é m o n s t r a t i o n. Faisons correspondre à tout ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$ un nombre réel $l(E)$ de façon que la condition $E_1 \neq E_2$ entraîne $l(E_1) \neq l(E_2)$. En vertu de (1) une telle correspondance existe.

Posons, pour tout ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$:

(3) $$Z(E) = \underset{(x,\,y)}{\mathrm{E}}\,[x \varepsilon E,\ y = l(E)]$$

et

(4) $$U = \sum_{E \varepsilon \mathcal{K}} Z(E).$$

Soit maintenant $\{W_n\}$ la suite de tous les rectangles rationnels (c'est-à-dire dont les côtés sont parellèles aux axes des coordonnées et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles).

Appellons M l'ensemble des suites $n_1, n_2, \ldots$, telles que le produit $W_{n_1} \cdot W_{n_2} \cdot \ldots$ est composé d'un seul point appartenant à U.

On a par conséquent

(5) $$\Phi_M(W_1, W_2, \ldots) = U.$$

Je dis que l'opération $\mathcal{H}_M$ est l'opération demandée. Soit, en effet, E un ensemble quelconque appartenant à $\mathcal{K}$. L désignant la droite $y = l(E)$, il résulte de (5) que

$$\Phi_M(LW_1, LW_2, \ldots) = LU.$$

Soient $I_1, I_2, \ldots$ les projections des ensembles $LW_1, LW_2, \ldots$ sur la droite $y = 0$. On a d'après (3) et (4): $LU = Z(E)$, c'est-à-dire que l'ensemble E est la projection de LU, d'où

$$\Phi_M(I_1, I_2, \ldots) = E,$$

ce qui donne

$$E \varepsilon \mathcal{H}_M(\mathfrak{F}).$$

---

[1]) La condition (1) est essentielle parce-qu'on a pour la famille $\mathfrak{F}$ (et plus généralement pour toute famille de puissance $\leqslant$ c): $\overline{\overline{\mathcal{H}_N(\mathfrak{F})}} \leqslant$ c pour toute opération de M. Hausdorff.

E étant un élement arbitraire de $\mathcal{K}$, la relation (2) se trouve ainsi démontrée.

Remarque. Dans le théorème précédent l'hypothèse que les ensembles considérés soient linéaires n'est pas essentielle. Il suffit en effet de supposer que l'espace est de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ et que la classe $\mathfrak{F}$ soit une classe dénombrable d'ensembles quelconques de cet espace satisfaisant aux conditions suivantes: 1^0 pour tout point p de l'espace il existe une suite $\{V_n\}$ d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$ et telle que $(p) = V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots$, 2^0 l'ensemble vide appartient à $\mathfrak{F}$.

W. Sierpiński.

O rzutowości operacji Hausdorff'a.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu w dniu 27 lutego 1930 r.

W. Sierpiński.

Sur la projectivité des opérations de M. Hausdorff.

Présenté dans la séance du 27 Février 1930.

Le but de cette Note est la démonstration de la proposition suivante:

Théorème [1]. *Soit F la famille de tous les ensembles ouverts plans. Quelle que soit la fonction H_N de M. Hausdorff* [2], *il existe une fonction H_M de M. Hausdorff, telle que*

$$(1) \qquad PH_N(F) = H_M(PF),$$

où $P\Phi$ désigne la famille des projections (sur l'axe d'abscisses) des ensembles de la famille Φ.

---

[1]) Un théorème analogue a été récemment énoncé (sans démonstration) par MM. L. Kantorovitch et E. Livenson (C. R., t. 190, séance du 10 Février 1930, p. 353, th. 4^0) pour les familles F des ensembles fermés et bornés et pour les fonctions H_N satisfaisant à certaine condition.

[2]) Quant à la définition des opérations de M. Hausdorff, voir *Fund. Math.* t. XV, p. 200; aussi ces *Comptes Rendus*, Année XIX (1917), Classe III, p. 463.

La démonstration de notre théorème sera basée sur une idée, utilisée par M. L. Kantorovitch dans sa démonstration d'une formule pour les ensembles projectifs de la deuxième classe [1]).

Démonstration.

Soit

(2) $$d_1, d_2, d_3, \ldots .$$

une suite infinie formée de tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnelles.

Soit

(3) $$(p_1, q_1, r_1), \ (p_2, q_2, r_2), \ (p_3, q_3, r_3), \ldots$$

une suite infinie formée de tous les systèmes différents de trois nombres naturels. p, q, r étant trois nombres naturels donnés, il existe donc toujours un indice $i = \varphi(p, q, r)$ bien déterminé, tel que $p_i = p$, $q_i = q$, $r_i = r$.

Soit H_N une opération donnée de M. Hausdorff. Désignons par M l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telles que

(4) $$d_{q_{m_1}} d_{q_{m_2}} d_{q_{m_3}} \ldots . \neq 0$$

et

(5) $$(r_{m_1}, r_{m_2}, r_{m_3}, \ldots) \varepsilon N.$$

Je dis que nous aurons la formule (1).

Soit, en effet, E un ensemble, tel que

(6) $$E \varepsilon PH_N(F).$$

Il existe donc une suite infinie $U_1, U_2, U_3, \ldots$ d'ensembles de F, telle que

(7) $$E = P \sum_N U_{n_1} U_{n_2} U_{n_3} \ldots . .$$

Posons, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$:

(8) $$\begin{cases} V_m = d_{p_m}, \text{ si } \underset{x,y}{\mathrm{E}} [x \varepsilon d_{p_m}, y \varepsilon d_{q_m}] \subset U_{r_m}, \\ \text{et } V_m = 0 \text{ sinon; } ^{2)} \end{cases}$$

---

[1]) Voir: L. Kantorovitch: *„Sur les ensembles projectifs de la deuxième classe"*, C. R., t. 189, p. 1233.

[2]) C'est le point essentiel de notre démonstration; cf. la dèfinition des ensembles $\mathrm{E}_{n_1, n_2, \ldots, n_i}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$ de M. Kantorovitch, l. c. p. 1234.

ce seront évidemment des ensembles de la famille PF. Je dis que

(9) $$E = \sum_M V_{m_1} V_{m_2} V_{m_3} \ldots .$$

En effet, soit x_0 un point, tel que

(10) $$x_0 \varepsilon E .$$

D'après (10) et (7), il existe un nombre réel y_0 et une suite

(11) $$(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N ,$$

tels que

(12) $$(x_0, y_0) \varepsilon U_{n_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Les ensembles U_{n_i} étant ouverts, il existe, d'après (12) et d'après la définition de la suite (2), pour tout i naturel un système de deux nombres naturels k_i et l_i, tels que

(13) $$x_0 \varepsilon d_{k_i}, y_0 \varepsilon d_{l_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\,[x \varepsilon d_{k_i}, y \varepsilon d_{l_i}] \subset U_{n_i} .$$

Posons

(14) $$m_i = \varphi(k_i, l_i, n_i) , \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après la définition de la fonction φ, nous aurons:

(15) $$p_{m_i} = k_i, q_{m_i} = l_i, r_{m_i} = n_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \ldots ,$$

donc, d'après (13):

(16) $$\underset{x, y}{\mathrm{E}}\,[x \varepsilon d_{p_{m_i}}, y \varepsilon d_{q_{m_i}}] \subset U_{r_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

ce qui prouve, d'après (8), que

(17) $$V_{m_i} = d_{p_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, d'après (13) et (15), on a

(18) $$y_0 \varepsilon d_{q_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

ce qui donne la formule (4). Or, d'après (11) et (15), on a la formule (5). On a donc, vu la définition de l'ensemble M:

(19) $$(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M .$$

D'autre part, d'après (13) et (15), on trouve

(20) $$x_0 \varepsilon d_{p_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots. ,$$

donc, d'après (17):

(21) $$x_0 \varepsilon V_{m_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

et les formules (21) et (19) prouvent que

(22) $$x_0 \varepsilon \sum_M V_{m_1} V_{m_2} V_{m_3} \ldots .$$

Nous avons ainsi démontré que la formule (10) entraîne la formule (22).

Or, soit x_0 un nombre réel satisfaisant à la formule (22). Il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ telle qu'on a les formules (19) et (21).

D'après (19) et la définition de l'ensemble M, nous avons les formules (4) et (5). Il existe donc un nombre y_0, tel qu'on a les formules (18). Or, d'après (21), nous avons $V_{m_i} \neq 0$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, et parsuite, d'après (8), on a les formules (16) et (17).

Les formules (22) et (17) donnent la formule (20), et les formules (20) et (18) donnent, d'après (16):

(23) $$(x_0, y_0) \varepsilon U_{r_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Les formules (23) et (5) prouvent que

$$(x_0, y_0) \varepsilon \sum_N U_{n_1} U_{n_2} U_{n_3} \ldots ,$$

ce qui donne, d'après (7), la formule (10).

Nous avons ainsi démontré que la formule (22) entraîne la formule (10). Or, plus haut nous avons démontré le réciproque. La formule (9) est ainsi établie. Il est donc démontré que la formule (6) entraîne la formule

(24) $$E \varepsilon H_M(PF).$$

Or, soit E un ensemble tel qu'on a la formule (24).

Il existe donc une suite infinie $V_1, V_2, V_3, \ldots$ d'ensembles de la famille PF, telle qu'on a la formule (9). Les projections des ensembles ouverts (plans) étant des ensembles ouverts (linéaires) les ensembles V_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ sont ouverts.

Désignons, pour n naturels, par U_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe au moins un nombre naturel m, tel que

$$(25) \qquad r_m = n\,, \quad x \varepsilon V_m \quad \text{et} \quad y \varepsilon d_{q_m};$$

on voit sans peine que les ensembles U_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont ouverts, donc appartiennent à la famille F.

Posons

$$(26) \qquad G = \sum_N U_{n_1} U_{n_2} U_{n_3} \ldots .$$

— ce sera évidemment un ensemble de la famille $H_N(F)$. Je dis que

$$(27) \qquad PG = E\,.$$

Soit x_0 un point, tel que

$$(28) \qquad x_0 \varepsilon PG:$$

il existe donc un nombre y_0, tel que

$$(29) \qquad (x_0, y_0) \varepsilon G\,,$$

donc, d'après (26), il existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle qu'on a les formules (11) et (12).

Soit i un indice donné quelconque. D'après (12) et la définition des ensembles U_n, il existe (au moins) un nombre naturel m_i, tel qu'on a, pour $m = m_i$, les formules (25), c'est-à-dire la formule

$$(30) \qquad r_{m_i} = n_i\,, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

et les formules (21) et (18).

D'après (30) et (11) on trouve la formule (5). Or, d'après (18) on trouve la formule (4). Vu la définition de l'ensemble M, on a donc la formule (19). D'après (19) et (21) on a donc la formule (22) qui, vu la formule (9), donne la formule (10).

La formule (28) entraîne donc la formule (10).

Or, soit x_0 un nombre, satisfaisant à la formule (10).

D'après (9) nous concluons qu'il existe une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle qu'on a les formules (19) et (21).

D'après (19) et la définition de l'ensemble M, on a la formule (4). Il existe donc un nombre réel y_0, tel qu'on a les formules (18). Posons

$$(31) \qquad n_i = r_{m_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (31), (21) et (18), nous avons

$$r_{m_i} = n_i, \ x_0 \varepsilon V_{m_i}, \ y_0 \varepsilon d_{q_{m_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où résulte, en vertu de la définition des ensembles U_n, la formule (12).

D'après (19) et la définition de l'ensemble M, on a la formule (5) qui entraîne, d'après (31), la formule (11). La formule (12) prouve donc, d'après (26), qu'on a la formule (29) et par-suite aussi la formule (28). La formule (10) entraîne donc la formule (28).

Les formules (10) et (28) sont ainsi équivalentes, et la formule (27) est établie. Or, l'ensemble (26) appartenant à la famille $H_N(F)$, la formule (27) prouve qu'on a la formule (6).

Nous avons ainsi démontré que la formule (24) entraîne la formule (6). Or, plus haut nous avons démontré le réciproque. La formule (1) est ainsi établie et notre théorème est démontré.

Voici une application de notre théorème. Soit Φ la famille de tous les ensembles plans, complémentaires aux ensembles analytiques. Comme j'ai démontré ailleurs [1]), il existe une fonction H_N de M. Hausdorff, telle que

$$\Phi = H_N(F), \tag{32}$$

où F est la famille de tous les ensembles plans ouverts. Posons

$$P\Phi = P_2 \tag{33}$$

— ce sera donc la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des projections des complémentaires analytiques. D'après notre théorème, il existe une fonction de M. Hausdorff, H_M, telle qu'on a la formule (1). Les formules (1), (32) et (33) donnent

$$P_2 = H_M(PF),$$

c'est-à-dire:

Il existe une opération de M. Hausdorff, H_M, qui effectuée sur la famille de tous les ensembles linéaires ouverts, donne la famille P_2 [2]).

---

[1]) Fundamenta Mathematicae, t. XV, p. 211. (On doit y remplacer seulement les ens. fermés par les ens. ouverts).

[2]) Cf. L. Kantorovitch et E. Livenson: *Sur les ensembles projectifs de* M. Lusin, C. R., t. 190.

S. Braunówna.

Uwaga do poprzedniego komunikatu.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 27 lutego 1930 r.

S. Braun.

Remarque sur la Note précédente.

Présenté par W. Sierpiński dans la séance du 27 Février 1930.

Dans la démonstration de son théorème [1]), M. Sierpiński utilise la suite infinie (3), formée de tous les systèmes de trois nombres naturels.

Le but de cette Note est la remarque qu'on peut remplacer la suite (3) par la suite formée de tous les systèmes de deux nombres naturels

$$(q_1 r_1),\ (q_2, r_2),\ (q_3, r_3), \ldots,$$

en définissant les ensembles V_m (qui interviennent dans la formule (8) de M. Sierpiński) de la manière suivante:

V_m est l'ensemble de tous les nombres réels x, pour lesquels il existe un ensemble linéaire ouvert W, tel que

$$x \varepsilon W, \quad \text{et} \quad \underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,[x \varepsilon W,\ y \varepsilon d_{q_m}] \subset U_{r_m},$$

et $V_m = 0$, s'il n'existe aucun nombre réel x satisfaisant à ces conditions.

Les autres modifications légères qu'il faudrait alors faire dans la démonstration de M. Sierpiński sont évidentes.

---

[1]) ce volume, p. 16.

Posiedzenie

z dnia 27 marca 1930 r.

Alfred Tarski.

O niektórych podstawowych pojęciach metamatematyki.

Przedstawił J. Łukasiewicz dnia 27 marca 1930 r.

Streszczenie.

Celem tego komunikatu jest sprecyzowanie znaczenia i ustalenie elementarnych własności kilku podstawowych pojęć z zakresu metodologji nauk dedukcyjnych.

Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik.

Vorläufige Mitteilung [1]), vorgelegt von J. Łukasiewicz am 27.III 1930.

In dieser Mitteilung bezwecken wir, den Sinn einiger wichtigen Begriffe aus dem Gebiet der *Methodologie der deduktiven Wissenschaften,* die man heutzutage nach Hrn. Hilbert *Metamathematik* zu nennen pflegt, zu präzisieren und ihre elementaren Eigenschaften festzustellen.

Den Forschungsbereich der Metamathematik bilden die formalisierten deduktiven Disziplinen (ungefähr in demselben Sinne, in welchem z. B. den Forschungsbereich der Geometrie die Raumgebilde bilden). Vom Standpunkte der Metamathematik betrachtet man diese Disziplinen als Mengen von Aussagen; diese Aus-

[1]) Eine ausführliche Darstellung der in dieser Mitteilung enthaltenen Überlegungen erscheint demnächst in den *Monatsheften für Mathematik und Physik.*

sage, die (nach einem Vorschlag von Hrn. S. Leśniewski) auch sinnvolle Aussagen genannt werden, sind ihrerseits als gewisse Aufschriften von einer wohlbestimmten Struktur zu betrachten. Die Menge aller Aussagen wird hier mit dem Symbol „S" bezeichnet. Aus den Aussagen einer beliebigen Menge X lassen sich mit Hilfe gewisser Operationen, der s. g. Schlussregeln, andere Aussagen bilden, die Folgerungen der Menge X genannt werden; die Menge aller dieser Folgerungen — die Folgerungsmenge von X — bezeichnet man mit dem Symbol „$F(X)$".

Eine exakte Definition der beiden Begriffe, der Aussage und der Folgerung, kann ausschliesslich in denjenigen Teilen der Metamathematik gegeben werden, deren Forschungsgebiet eine konkrete formalisierte Disziplin bildet. Wegen der Allgemeinheit der jetzigen Überlegungen werden hier dagegen diese Begriffe als primitive Begriffe betrachtet und mit Hilfe einer Reihe von Axiomen charekterisiert. In der üblichen Bezeichnungsweise der allgemeinen Mengenlehre lassen sich diese Axiome folgendermassen ausdrücken:

Axiom 1. $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$.

Axiom 2. *Ist* $X \subset S$, *so* $X \subset F(X) \subset S$.

Axiom 3. *Ist* $X \subset S$, *so* $F(F(X)) = F(X)$.

Axiom 4. *Ist* $X \subset S$, *so* $F(X) = \sum\limits_{Y \subset X \text{ und } \overline{\overline{Y}} < \aleph_0} F(Y)$.

Axiom 5. *Es existiert eine Aussage* $x \in S$, *so dass* $F(\{x\}) = S$.

Zwecks Erlangung tiefer liegender Ergebnisse fügt man zu diesen Axiomen noch andere Axiome von speziellerer Natur hinzu. Im Gegensatz zu der ersten Axiomengruppe beziehen sich die Axiome der zweiten Gruppe nicht auf ganz beliebige deductive Disziplinen, sondern nur auf diejenigen, die den s. g. Aussagenkalkül „voraussetzen" — in dem Sinne nämlich, dass man in den Überlegungen aus dem Gebiete dieser Disziplinen alle „wahren Sätze" des Aussagenkalküls [1]) als Prämissen anwenden darf. In den Axiomen der zweiten Gruppe kommen als neue primitive Begriffe zwei Operationen vor, mit deren Hilfe man aus den

[1]) D. h. alle Aussagen, die zu dem gewöhnlichen (zweiwertigen) System des Aussagenkalküls gehören; vgl. die nächst folgende Mitteilung von J. Łukasiewicz und A. Tarski: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* (unten als *Untersuchungen* zitiert), § 2, dieses Heft S. 30 und ff.

einfacheren Aussagen kompliziertere Aussagen bildet, und zwar die Operation der Implikations- und Negationsbildung; die Implikation mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y wird hier mit dem Symbol „$c(x,y)$", das Negat von x mit dem Symbol „$n(x)$" bezeichnet. Die Axiome lauten [1]):

Axiom 6*. *Ist* $x \varepsilon S$ *und* $y \varepsilon S$, *so* $c(x,y) \varepsilon S$ *und* $n(x) \varepsilon S$ [2]).

Axiom 7*. *Ist* $X \subset S$, $y \varepsilon S$, $z \varepsilon S$ *und* $c(y,z) \varepsilon F(X)$, *so* $z \varepsilon F(X + \{y\})$.

Axiom 8*. *Ist* $X \subset S$, $y \varepsilon S$, $z \varepsilon S$ *und* $z \varepsilon F(X + \{y\})$, *so* $c(y,z) \varepsilon F(X)$.

Axiom 9*. *Ist* $x \varepsilon S$, *so* $F(\{x, n(x)\}) = S$.

Axiom 10*. *Ist* $x \varepsilon S$, *so* $F(\{x\}) \cdot F(\{n(x)\}) = F(0)$.

Die Ax. 8* und 10* sind nur in Bezug auf diejenigen formalisierten Disziplinen erfüllt, in deren Aussagen keine „freien Variablen" vorkommen [3]). Anstatt des Ax. 8* in seiner ganzen Ausdehnung genügt es den folgenden speziellen Fall dieses Satzes als Axiom anzunehmen:

Ist $y \varepsilon S$, $z \varepsilon S$ *und* $z \varepsilon F(\{y\})$, *so* $c(y,z) \varepsilon F(0)$.

Auf Grund dieser Axiome kann man eine Reihe von Sätzen beweisen, die sich auf die betrachteten Begriffe beziehen, wie z. B.:

Satz 1. *Ist* $X \subset Y \subset S$, *so* $F(X) \subset F(Y)$.

Satz 2. *Ist* $X + Y \subset S$, *so* $F(X + Y) = F(X + F(Y)) = F(F(X) + F(Y))$.

---

1) Die Nummern der Axiome der zweiten Gruppe und der aus ihnen folgenden Sätzen sind hier mit einem Stern „*" versehen.

2) Die Aussagen werden hier, wie erwähnt, als materielle Gegenstände (Aufschriften) betrachtet. Von diesem Standpunkte aus entspricht der Inhalt des Ax. 6* nicht genau den anschaulichen Eigenschaften der in ihm vorkommenden Begriffe: nicht immer kann man aus zwei Aussagen (die doch in ganz verschiedenen Stellen auftreten können) eine Implikation bilden. Um die Überlegungen zu vereinfachen, haben wir nämlich bei der Formulierung dieses Axiomes einen Fehler begangen, der in der *Identifizierung der „gleichgestalteten"* (wie sie Hr. S. Leśniewski nennt) *Aussagen* besteht. Dieser Fehler kann dadurch beseitigt werden, dass man S als die *Menge aller Aussagentypen* (und nicht Aussagen) interpretiert und in einer analogen Weise den anschaulichen Sinn von anderen primitiven Begriffen modifiziert, wobei unter dem *Aussagentypus einer Aussage* x die Menge aller mit x gleichgestalteten Aussagen zu verstehen ist.

3) Das bedeutet, dass die Ausdrücke (Aussagenfunktionen) mit freien Variablen nicht als Aussagen betrachtet werden.

Dieser Satz kann auf eine beliebige (sogar unendliche) Anzahl von Summanden verallgemeinert werden.

Satz 3*. *Ist* $x \varepsilon S$, $y \varepsilon S$ *und* $z \varepsilon S$, *so gilt:*
$c\Big(c(x, y), c\big(c(y, z), c(x, z)\big)\Big) \varepsilon F(0)$, $c\Big(x, c\big(n(x), y\big)\Big) \varepsilon F(0)$ *und* $c\Big(c\big(n(x), x\big), x\Big) \varepsilon F(0)$.

Dieser Satz besagt, dass jede Aussage, die eine „Einsetzung" eines der dreien von Hrn. J. Łukasiewicz angegebenen Axiomen des gewöhnlichen Systems des Aussagenkalküls [1]) darstellt, eine Folgerung der Nullmenge 0 (und infolgedessen auch eine Folgerung jeder Aussagenmenge X) bildet. Mit Benutzung des Ax. 7* kann man diesen Satz auf alle „Einsetzungen" beliebiger „wahren Sätze" des Aussagenkalküls ausdehnen.

Mit Hilfe der Begriffe S und $F(X)$ können andere wichtigen Begriffe der Metamathematik definiert werden. So z. B.:

Definition 1. *Eine Aussagenmenge X heisst (deduktives oder abgeschlossenes) System,* in Zeichen $X \varepsilon \mathfrak{S}$, *wenn* $F(X) = X \subset S$.

Folgende Eigenschaften der Systeme lassen sich leicht feststellen:

Satz 4. *Für jede Menge $X \subset S$ existiert das kleinste System Y, das X umfasst, und zwar $Y = F(X)$.*

Diesem Satz zufolge bildet die Menge $F(0)$ das kleinste System überhaupt; diese Menge kann System aller logisch-wahren Aussagen genannt werden.

Satz 5. *Ist* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{K} \neq 0$, *so* $\prod_{X \varepsilon \mathfrak{K}} X \varepsilon \mathfrak{S}$ *(der Durchschnitt beliebig vieler Systeme ist wiederum ein System).*

Satz 6. *Wenn* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ *und wenn jeder endlichen Klasse* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ *ein System* $Y \varepsilon \mathfrak{K}$ *entspricht, das die Formel:* $\sum_{X \varepsilon \mathfrak{L}} X \subset Y$ *erfüllt, so* $\sum_{X \varepsilon \mathfrak{K}} X \varepsilon \mathfrak{S}$.

Satz 7*. (von Hrn. A. Lindenbaum). *Ist* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$, $\overline{\overline{\mathfrak{K}}} < \aleph_0$ *und* $\sum_{X \varepsilon \mathfrak{K}} X \varepsilon \mathfrak{S}$, *so* $\sum_{X \varepsilon \mathfrak{K}} X \varepsilon \mathfrak{K}$ *(kein System kann als eine Summe endlich vieler von ihm verschiedenen Systeme dargestellt werden).*

---

[1]) Vgl. *Untersuchungen*, § 2.

Satz 8*. *Ist* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$, $\overline{\overline{\mathfrak{K}}} < \aleph_0$, $Y \in \mathfrak{S}$, $Y \subset \sum_{X \in \mathfrak{K}} X$ *und* $Y \neq 0$, *so gibtes ein System* $X \in \mathfrak{K}$, *das* Y *umfasst.*

Weiter führen wir den Begriff der (logischen) Äquivalenz, sowie die wichtigen Begriffe der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit ein.

Definition 2. *Die Aussagenmengen* X *und* Y *heissen (logisch-) äquivalent,* in Zeichen $X \sim Y$, *wenn* $X + Y \subset S$ *und* $F(X) = F(Y)$.

Definition 3. *Die Aussagenmenge* X *heisst widerspruchsfrei,* in Zeichen $X \in \mathfrak{W}$, *wenn* $X \subset S$ *und wenn die Formel* $X \sim S$ *nicht besteht* (d. h. *wenn* $F(X) \neq S$).

Definition 4. *Die Aussagenmenge* X *heisst vollständig,* in Zeichen $X \in \mathfrak{V}$, *wenn* $X \subset S$ *und wenn jede Menge* $Y \in \mathfrak{W}$, *die* X *umfasst, der Formel:* $X \sim Y$ *genügt.*

Mit Hilfe der Axiome der zweiten Gruppe zeigt man, dass die Def. 3 und 4 mit den üblichen Definitionen der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit übereinstimmen:

Satz 9*. $X \in \mathfrak{W}$ *dann und nur dann, wenn* $X \subset S$ *und wenn für keine Aussage* $y \in S$ *die beiden Formeln:* $y \in F(X)$ *und* $n(y) \in F(X)$ *gleichfalls bestehen.*

Satz 10*. $X \in \mathfrak{V}$ *dann und nur dann, wenn* $X \subset S$ *und wenn für jede Aussage* $y \in S$ *mindestenst eine der Formeln:* $y \in F(X)$ *und* $n(y) \in F(X)$ *besteht.*

Man beweist ferner folgende Sätze:

Satz 11. *Wenn* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{W}$ *und wenn zu jeder endlichen Klasse* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ *eine Menge* $Y \in \mathfrak{K}$ *existiert, welche die Formel:* $\sum_{X \in \mathfrak{L}} X \subset Y$ *erfüllt, so* $\sum_{X \in \mathfrak{K}} X \in \mathfrak{W}$.

Satz 12. (von Hrn. A. Lindenbaum). *Ist* $X \in \mathfrak{W}$, *so gibt es eine Menge* $Y \in \mathfrak{S}.\mathfrak{W}.\mathfrak{V}$, *das* X *umfasst (jede widerspruchsfreie Aussagenmenge lässt sich zu einem widerspruchsfreien und vollständigen System ergänzen).*

Satz 13*. *Damit* $y \in F(X)$, *ist es notwendig und hinreichend, dass* $X \subset S$, $y \in S$ *und dass die Formel* $X + \{y\} \in \mathfrak{W}$ *nicht bestehe.*

Der Begriff der Vollständigkeit wird oft mit zwei anderen, ihm inhaltlich verwandten Begriffen: der Kategorizität und der „Nicht-Gabelbarkeit" verwechselt. Ohne auf die mit diesen Begriffen zusammenhängenden Probleme näher einzugehen [1]), sei hier nur bemerkt, dass die beiden Begriffe weit über die Rahmen unserer Begriffsbildung hinausgreifen und dass die Präzisierung ihres Sinnes den speziellen Teilen der Metamathematik überlassen werden soll.

Dagegen lohnt es sich hier, den Begriff des Vollständigkeitsgrades kurz zu besprechen:

Definition 5. *Der Vollständigkeitsgrad einer Aussagenmenge X,* in Zeichen $\gamma(X)$, *ist die kleinste Ordnungszahl α, welche die folgende Bedingung erfüllt: es existiert keine aufsteigende Folge von widerspruchsfreien nicht-äquivalenten Aussagenmengen X_ξ vom Typus α, die mit X beginnt* (d. h. *keine Folge von Mengen X_ξ mit den Formeln: $X_0 = X$, $X_\xi \subset X_\eta \subset S$ und $F(X_\xi) \neq F(X_\eta)$ für $\xi < \eta < \alpha$*), *wobei $X \subset S$.*

Es folgt aus dieser Definition, dass:

Satz 14. $\gamma(X) = 1$ *dann und nur dann, wenn $X \sim S$* (d. h. *wenn $X \subset S$ und wenn die Formel: $X \varepsilon \mathfrak{W}$ nicht besteht*); $\gamma(X) = 2$ *dann und nur dann, wenn $X \varepsilon \mathfrak{W} . \mathfrak{V}$;* $\gamma(X) > 2$ *dann und nur dann, wenn $X \varepsilon \mathfrak{W} - \mathfrak{V}$.*

Endlich führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 6. *Die Aussagenmenge X heisst unabhängig,* in Zeichen $X \varepsilon \mathfrak{U}$, *wenn $X \subset S$ und wenn aus den Formeln: $Y \subset X$ und $Y \sim X$ immer $Y = X$ folgt.*

Definition 7. *Die Aussagenmenge Y heisst Basis der Aussagenmenge X,* in Zeichen $Y \varepsilon \mathfrak{B}(X)$, *wenn $X \sim Y$ und $Y \varepsilon \mathfrak{U}$.*

Definition 8. *Die Aussagenmenge Y heisst Axiomensystem der Aussagenmenge X,* in Zeichen $Y \varepsilon \mathfrak{Ax}(X)$, *wenn $X \sim Y$ und $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$.*

Definition 9. *Die Aussagenmenge X heisst axiomatisierbar,* in Zeichen $X \varepsilon \mathfrak{A}$, *wenn $\mathfrak{Ax}(X) \neq 0$.*

Satz 15*. $X \varepsilon \mathfrak{U}$ *dann und nur dann, wenn $X \subset S$ und wenn für jedes $y \varepsilon X$ die Formel: $X - \{y\} + \{n(y)\} \varepsilon \mathfrak{W}$ besteht.*

Satz 16. *Ist $X \subset S$ und $\overline{\overline{X}} < \aleph_0$, so existiert eine Menge $Y \subset X$, derart dass $Y \varepsilon \mathfrak{B}(X)$ (jede endliche Aussagenmenge enthält eine Basis als Teilmenge).*

---

[1]) Vgl. hierzu A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre 3-te Aufl., Berlin 1928, S. 347—354.

Satz 17*. *Ist* $X \subset S$, *so* $\mathfrak{B}(X) \neq 0$ *(jede Aussagenmenge besitzt eine Basis).*

Satz 18. *Folgende Bedingungen sind äquivalent:* (1) $X \in \mathfrak{A}$; (2) *es gibt eine Menge* $Y \subset X$, *so dass* $Y \in \mathfrak{Ax}(X)$; (3) $\mathfrak{Ax}(X) . \mathfrak{B}(X) \neq 0$; (4) *es existiert eine solche Menge* $Y \subset X$, *dass* $\overline{Y} < \aleph_0$ *und* $Y \in \mathfrak{B}(X)$.

Satz 19*. *Damit* $X \in \mathfrak{A}$, *ist es notwendig und hinreichend, dass* $X \subset S$ *und dass* X *keine unendliche Basis besitze.*

Satz 20*. *Sei* $X \in \mathfrak{S}$; *damit* $X \in \mathfrak{A}$, *ist es notwendig und hinreichend, dass keine Klasse* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ *existiere die folgende Bedingungen erfülle:* $X \overline{\in} \mathfrak{K}$ *und* $X = \sum_{Y \in \mathfrak{K}} Y$ (d. h. *dass* X *sich nicht als eine Summe von ihm verschiedener Systeme darstellen lasse*).

Satz 21. *Es gilt:* $\overline{\overline{\mathfrak{S} . \mathfrak{A}}} \leqslant \aleph_0$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S} - \mathfrak{A}}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant 2^{\aleph_0}$; *wenn eine unendliche Menge* $X \in \mathfrak{U}$ *existiert, so ist* $\overline{\overline{\mathfrak{S} . \mathfrak{A}}} = \aleph_0$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S} - \mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$.

Es ist zu bemerken, dass sich in fast allen bekannten deduktiven Disziplinen eine unendliche und zugleich unabhängige Aussagenmenge konstruieren lässt, wodurch die Voraussetzung des zweiten Teiles des obigen Satzes verwirklicht wird. In diesen Disziplinen gibt es also mehr nicht — axiomatisierbarer als axiomatisierbarer Systeme: Systeme sind, um so zu sagen, nur ausnahmsweise axiomatisierbar [1]).

Von mehreren Verfassern wurde der Begriff der Unabhängigkeit einer Aussagenmenge in verschiedenen Richtungen verschärft (vollständige Unabhängigkeit von Hrn. E. H. Moore [2]), maximale Unabhängigkeit von Hrn. H. M. Sheffer [3])). Auf diese Fragen wird hier nicht näher eingegangen.

Auf Grund der obigen Begriffsbildung kann man metamathematische Untersuchungen treiben, die sich auf konkrete deduktive Diszplinen beziehen. Zu diesem Zwecke muss man vor allem in

---

[1]) Auf diese Tatsache hat zum ersten Mal (in bezug auf den Aussagenkalkül) Hr. Lindenbaum hingewiesen, von dem auch die Anregung zur Bildung des Axiomatisierbarkeitsbegriffes herrührt; vgl. *Untersuchungen*, § 3.

[2]) *Introduction to a form of general analysis*, New-Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press, S. 82.

[3]) *The general theory of Notationel Relativity*, Cambridge Mass. 1921 (als Manuskript herausgegeben), S. 32.

jedem einzelnen Falle die Begriffe der Aussage und der Folgerung präzisieren. Man nimmt danach als Ausgangpunkt eine beliebige Aussagenmenge X, die uns von diesem oder jenem Standpunkte interessiert; man untersucht sie in bezug auf die Widerspruchsfreiheit und Axiomatisierbarkeit, man bemüht sich, ihren Vollständigkeitsgrad zu bestimmen, evtl. auch alle diejenigen Systeme und insbesondere alle widerspruchsfreien und vollständigen Systeme anzugeben, die X als Teilmenge enthalten. Als Beispiel der in diesen Richtungen geführten Untersuchungen, welche die einfachste deduktive Disziplin, nämlich den Aussagenkalkül, betreffen, kann die oben mehrmals zitierte gemeinsame Mitteilung von Hrn. Łukasiewicz und dem Verfasser [1]) dienen. Einige Ergebnisse, die sich auf andere deduktiven Disziplinen beziehen, beabsichtige ich in nächster Zeit in einer besonderen Mitteilung zu veröffentlichen.

---

[1]) *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, dieses Heft, S. 30 und ff.

J. Łukasiewicz i A. Tarski.

Badania nad rachunkiem zdań.

Komunikat, przedstawiony przez J. Łukasiewicza dnia 27.III 1930 r.

Streszczenie.

W ciągu ostatnich kilku lat przeprowadzono w Warszawie badania z zakresu „metamatematyki", albo raczej „metalogiki", dotyczące najprostszej z pośród znanych obecnie nauk dedukcyjnych, mianowicie t. zw. rachunku zdań (teorji dedukcji). Celem niniejszego komunikatu jest zestawienie najważniejszych, przeważnie dotąd nieogłoszonych wyników, uzyskanych w toku tych badań.

J. Łukasiewicz und A. Tarski.

Untersuchungen über den Aussagenkalkül.

Vorläufige Mitteilung, vorgelegt von J. Łukasiewicz am 27.III 1930.

Im Verlaufe der letzten Jahre wurden in Warschau Untersuchungen durchgeführt, die sich auf denjenigen Teil der „Metamathematik", oder — besser gesagt — „Metalogik", beziehen, dessen Forschungsbereich die einfachste deduktive Disziplin, nämlich der s. g. Aussagenkalkül bildet. Die Initiative zu diesen Untersuchungen geht auf Łukasiewicz zurück; die ersten Ergebnisse rühren von ihm sowie von Tarski her. Im Seminar für mathematische Logik, das seit 1926 an der Universität Warszawa von Łukasiewicz geleitet wird, wurden auch die meisten der unten erwähnten Ergebnisse der Herren Lindenbaum, Sobociński und Wajsberg gefunden und besprochen. Die Systematisierung aller dieser Ergebnisse und die Präzisierung der einschlägigen Begriffe stammt von Tarski.

In der vorliegenden Mitteilung sollen die wichtigsten, meistenteils noch nicht publizierten Ergebnisse jener Untersuchungen zusammengestellt werden.

§ 1. Allgemeine Begriffe.

Wir beabsichtigen unsere Betrachtungen an die Begriffsbildung anzuknüpfen, die in der vorangehenden Mitteilung von

Tarski [1]) entwickelt wurde. Zu diesem Zwecke wollen wir vor allem den Begriff der (sinnvollen) Aussage und denjenigen der Folgerung einer Aussagenmenge in bezug auf den Aussagenkalkül präzisieren.

Definition 1. *Die Menge S aller Aussagen ist der Durchschnitt aller derjenigen Mengen, die alle Aussagenvariablen (elementaren Aussagen) enthalten und in bezug auf die Operationen der Implikations- und der Negationsbildung abgeschlossen sind* [2]).

Die Begriffe der Aussagenvariablen, der Implikation und der Negation können nicht näher erklärt werden; man muss sie vielmehr als primitive Begriffe des „Metaaussagenkalküls" betrachten. Die fundamentalen Eigenschaften dieser Begriffe, die zum Aufbau des uns hier interessierenden Teiles der Metamathematik ausreichen, können in einer Reihe von einfachen Sätzen (Axiomen) ausgedrückt werden, deren Anführung hier unterbleiben mag. Als Aussagenvariablen werden gewöhnlich die Buchstaben „p", „q", „r" usw. verwendet. Um die Aussagen „p impliziert q" (oder auch: „wenn p, so q") resp. „es ist nicht wahr, dass p" in Zeichen auszudrücken, bedient sich Łukasiewicz der Formeln „*Cpq*" resp. „*Np*" [3]). Bei dieser Bezeichnungs-

[1]) *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik,* dieses Heft, S. 22. Wir benutzen hier die in jener Mitteilung erläuterte Terminologie und Symbolik.

[2]) Eine Menge heisst — gemäss der in der abstrakten Mengenlehre üblichen Terminologie — in bezug auf gegebene Operationen abgeschlossen, wenn die an den Elementen der betreffenden Menge ausgeführten Operationen immer wieder Elemente dieser Menge als Resultate ergeben.

[3]) Vgl. J. Łukasiewicz: *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej* (*Über die Bedeutung und die Erfordernisse der mathematitchen Logik;* polnisch), „Nauka Polska", Bd. X, Warszawa 1929, S. 610 Anm. Vgl. auch J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej* (*Elemente der mathematischen Logik;* polnisch). Litographierte Ausgabe der im Herbsttrimester 1928/29 an der Universität Warszawa gehaltenen Vorlesungen, Warszawa 1929, S. 40.

Das Zeichen „*Cpq*", das im Aussagenkalkül die Implikation zwischen „p" und „q" ausdrückt, ist vom metamathematischen Zeichen „$c(x, y)$", welches eine Implikation mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y bezeichnet, wohl zu unterscheiden: der Ausdruck „*Cpq*" ist ein Satz (im Aussagenkalkül), während der Ausdruck „$c(x,y)$" der Name eines Satzes (im „Metaaussagenkalkül") ist.

weise wird der Gebrauch von irgendwelchen Interpunktionszeichen, wie Klammern, Punkte und dgl., entbehrlich. Mehrere Beispiele der in dieser Symbolik dargestellten Aussagen werden wir in weiteren §§ kennen lernen. Neben der Implikations- und Negationsbildung werden bekanntlich in dem Aussagenkalkül auch andere derartige Operationen betrachtet, die sich jedoch auf die beiden vorhergenannten zurückführen lassen und deshalb hier nicht berücksichtigt werden.

Die Folgerungen einer Aussagenmenge werden mit Hilfe zweier Operationen, der Einsetzung (Substitution) und der Abtrennung (Schlusschema „modus ponens") gebildet. Der anschauliche Sinn der ersten Operation ist einleuchtend; wir wollen daher auf ihre Definition nicht näher eingehen. Die zweite Operation beruht darauf, dass aus den Aussagen x und $z = c(x, y)$ die Aussage y als Resultat der Abtrennung gewonnen wird.

Jetzt sind wir imstande den Begriff der Folgerung zu erklären:

Definition 2. *Die Folgerungsmenge $F(X)$ der Aussagenmenge X heisst der Durchschnitt aller derjenigen Mengen, die die Menge $X \subseteq S$ umfassen und in bezug auf die Operationen der Einsetzung und der Abtrennung abgeschlossen sind.*

Es ergibt sich daraus:

Satz 1. *Die Begriffe S und $F(X)$ erfüllen die in der vorigen Mitteilung von Tarski*[4]*) angegebenen Axiome* 1—5.

Es interessieren uns vor allem diejenigen Teile X der Menge S, die (abgeschlossene) Systeme bilden, d. h. die Formel: $F(X) = X$ verifizieren. Zwei Konstruktionsmethoden solcher Systeme stehen uns zur Verfügung. Die erste, s. g. axiomatische Methode, besteht darin, dass man eine beliebige, meistenteils endliche Aussagenmenge X — ein Axiomensystem — angibt und die Menge $F(X)$, d. i. das kleinste abgeschlossene System über X bildet. Die zweite Methode, die man wohl am besten mit dem Namen „Matrizen-Methode" bezeichnen könnte, beruht auf der folgenden Begriffsbildung von Tarski[5]):

[4]) S. dieses Heft, S. 23.

[5]) Der Ursprung dieser Methode ist in dem wohlbekannten, schon von Peirce (*On the algebra of logic*, Am. Journ. of Math., Bd. 7, 1885, S. 191) und Schröder angewandten Verifikationsverfahren des gewöhnlichen „zweiwertigen" Aussagenkalkülsystems zu suchen (s. u. Def. 5). Aus-

Definition 3. *Die (logische) Matrix heisst ein geordnetes Quadrupel* $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$, *das aus zwei disjunkten Mengen (mit Elementen von ganz beliebigem Charakter) A und B, aus einer Funktion f zweier Veränderlichen und aus einer Funktion g einer Veränderlichen besteht, wobei die beiden Funktionen für alle Elemente der Menge* $A + B$ *definiert sind und als Werte ausschliesslich Elemente von* $A + B$ *annehmen.*

Die Matrix $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$ *wird normal genannt, wenn aus den Formeln* $x \varepsilon B$ *und* $y \varepsilon A$ *immer* $f(x, y) \varepsilon A$ *folgt.*

Definition 4. *Die Funktion h heisst Wertfunktion der Matrix* $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$, *wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:* (1) *die Funktion h ist für jedes* $x \varepsilon S$ *definiert;* (2) *wenn x eine Aussagenvariable ist, dann* $h(x) \varepsilon A + B$; (3) *wenn* $x \varepsilon S$ *und* $y \varepsilon S$, *dann* $h\big(c(x, y)\big) = f\big(h(x), h(y)\big)$; (4) *wenn* $x \varepsilon S$, *dann* $h\big(n(x)\big) = g\big(h(x)\big)$.

Die Aussage x erfüllt die Matrix $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$, in Zeichen $x \varepsilon E(\mathfrak{M})$, *wenn für jede Wertfunktion h dieser Matrix die Formel* $h(x) \varepsilon B$ *besteht.*

Die Elemente der Menge B werden nach Hrn. Bernays[6]) ausgezeichnete Elemente genannt.

Um nun mit Hilfe der Matrizen-Methode ein abgeschlossenes System des Aussagenkalküls zu konstruieren, gibt man eine (meistenteils normale) Matrix $\mathfrak{M}$ an und betrachtet die Menge $E(\mathfrak{M})$ aller derjenigen Aussagen, die diese Matrix erfüllen. Dieses Verfahren beruht auf nachstehendem leicht beweisbaren Satze:

---

führlich behandelt wurde dieses Verifikationsverfahren von Łukasiewicz in *Logika dwuwartościowa* (*Zweiwertige Logik*, polnisch), Przegląd Filozoficzny 1921. Łukasiewicz war auch der erste, der im Jahre 1920 mittels einer Matrix ein vom gewöhnlichen verschiedenes System des Aussagenkalküls, nämlich sein „dreiwertiges" System definierte (s. u. Anm. [17])). Mehrwertige Systeme, die durch Matrizen definiert sind, kennt auch Hr. E. Post (*Introduction to a general theory of elementary propositions*, Am. Journ. of Math., Bd. 43, 1921, S. 180 ff.). Die Methode, deren sich Hr. P. Bernays (*Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica"*, Math. Ztschr., Bd. 25, 1926; vgl. auch u. Anm. [13])) zum Beweis seiner Sätze über Unabhängigkeit bedient, beruht auch auf Matrizenbildung. Die hier oben dargestellte Auffassung der Matrizenbildung als einer allgemeinen Konstruktionsmethode der Systeme rührt von Tarski her.

[6]) S. die oben Anm. [5]) zitierte Abhandlung, S. 316.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{M}$ eine normale Matrix, so $E(\mathfrak{M}) \varepsilon \mathfrak{S}$.*

Falls die Menge $E(\mathfrak{M})$ ein System bildet (was gemäss dem S. 2 immer gilt, wenn die Matrix $\mathfrak{M}$ normal ist), wird sie ein durch die Matrix $\mathfrak{M}$ erzeugtes System genannt.

Folgende Umkehrung des Satzes 2, die von Hrn. Lindenbaum bewiesen wurde, bringt die Allgemeinheit der hier betrachteten Matrizen-Methode zur Evidenz:

Satz 3. *Für jedes System $X \varepsilon \mathfrak{S}$ existiert eine normale Matrix $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$, mit höchstens abzählbarer Menge $A + B$, die der Formel $X = E(\mathfrak{M})$ genügt.*

Jede der beiden Methoden hat ihre Vor- und Nachteile. Die nach der axiomatischen Methode gebildeten Systeme können leichter in bezug auf ihre Axiomatisierbarkeit untersucht werden, die durch Matrizen erzeugten Systeme sind wiederum leichter auf ihre Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit zu prüfen. Insbesondere gilt folgender einleuchtender Satz:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$ eine normale Matrix, wobei $A \neq 0$, so $E(\mathfrak{M}) \varepsilon \mathfrak{W}$.*

§ 2. Das gewöhnliche (zweiwertige) System des Aussagenkalküls.

An erster Stelle betrachten wir das wichtigste unter den Aussagenkalkülsystemen, nämlich das wohlbekannte gewöhnliche (auch „zweiwertig" von Łukasiewicz genannte[7]) System, das hier mit dem Symbol „L" bezeichnet wird.

Auf Grund der Matrizen-Methode kann das System L folgendermassen definiert werden:

Definition 5. *Das gewöhnliche System L des Aussagenkalküls ist die Menge aller Aussagen, welche die Matrix $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$ erfüllen, wobei $A = \{0\}$, $B = \{1\}$[8]) und die Funktionen f und g durch die Formeln: $f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$, $f(1,0) = 0$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ bestimmt sind.*

Aus dieser Definition ergibt sich leicht die Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit des Systems L:

Satz 5. $L \varepsilon \mathfrak{S} . \mathfrak{W} . \mathfrak{V}$.

Das System L kann auch vermittels der axiomatischen Methode definiert werden. Das erste Axiomensystem des Aussa-

---

[7]) S. o. Anm. [5]).

[8]) Mit „$\{a\}$" bezeichnet man in der Mengenlehre die aus a als dem einzigen Element bestehende Menge.

genkalküls hat G. Frege geschaffen[9]). Andere Axiomensysteme stammen von den Hrn. Hrn. Whitehead und Russell[10]) sowie von Hrn. Hilbert[11]). Łukasiewicz hat von den zur Zeit bekannten Axiomensystemen das einfachste angegeben und auf elementare Weise die Äquivalenz der beiden Definitionen von L nachgewiesen[12]); dieses Ergebnis lautet:

Satz 6. *Sei X die Menge, die aus den drei Aussagen:*

„CCpqCCqrCpr", „CCNppp", „CpCNpq"

besteht; dann ist $X \varepsilon \mathfrak{Ax}(L)$. *Infolgedessen ist L axiomatisierbar,* $L \varepsilon \mathfrak{A}$.

Nach einer von Hrn. Bernays und Łukasiewicz entwickelten Methode[13]), die Unabhängigkeit einer Aussagenmenge X zu untersuchen, konstruiert man für jede Aussage $y \varepsilon X$ eine normale Matrix $\mathfrak{M}_y$, die alle Aussagen der Menge X mit Ausnahme von y erfüllt. Mittels dieser Methode bewies Łukasiewicz, dass im Gegensatz zu den vorhererwähnten Axiomensytemen folgender Satz gilt:

[9]) *Begriffsschrift*, Halle a/S. 1879, S. 25—50. Frege ist der Begründer des modernen Aussagenkalküls. Sein System, das nicht einmal in Deutschland bekannt zu sein scheint, ist auf folgenden 6 Axiomen aufgebaut: „*CpCqp*", „*CCpCqrCCpqCpr*", „*CCpCqrCqCpr*", „*CCpqCNqNp*", „*CNNpp*", „*CpNNp*". Das dritte Axiom ist überflüssig, denn es ist aus den beiden ersten ableitbar. Die drei letzten Axiome können durch den Satz „*CCNpNqCqp*" ersetzt werden (Łukasiewicz).

[10]) *Principia mathematica*, Bd. I, 1910, S. 100.

[11]) *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Ann. Bd. 88, S. 153.

[12]) Vgl. die oben Anm. [3]) zitierten „*Elemente*" von Łukasiewicz, S. 45 u. 121 ff. Der Beweis der Äquivalenz der beiden Definitionen von L läuft darauf hinaus, die Vollständigkeit des auf Grund der axiomatischen Methode definierten Systems L zu erweisen. Den ersten Vollständigkeitsbeweis dieser Art findet man bei Post (s. die Anm. [5]) zitierte Abhandlung).

[13]) Hr. Bernays hat in der oben Anm. [5]) zitierten Abhandlung, die aus dem Jahre 1926 stammt, aber nach Angabe des Verfassers Ergebnisse aus der 1918 eingereichten unveröffentlichten Habilitationsschrift enthält, eine auf Matrizenbildung beruhende Methode publiziert, die uns ermöglicht, die Unabhängigkeit gegebener Aussagenmengen zu untersuchen. Die von Hrn. Bernays angegebene Methode war noch vor ihrer Veröffentlichung Łukasiewicz bekannt, der unabhängig von Bernays einer Anregung Tarski's folgend (vgl. Tarski: *O wyrazie pierwotnym logistyki* [*Über den primitiven Termin der Logistik*; polnisch], Przegląd Filozoficzny 1923, S. 76, sowie *Sur les truth-functions au sens de MM. Russell et Whi-*

Satz 7. *Die im Satz 6 angegebene Aussagenmenge X ist unabhängig; infolgedessen ist X eine Basis von L, $X \varepsilon \mathfrak{B}(L)$.*

Eine andere s. g. strukturelle Methode zur Untersuchung der Unabhängigkeit erfand Tarski. Diese Methode, obwohl sie weniger allgemein ist, als die Methode der Matrizenbildung, kann in manchen Fällen erfolgreich angewendet werden.

Von Tarski stammt folgender Satz allgemeiner Natur:

Satz 8. *Das System L sowie jedes axiomatisierbare System des Aussagenkalküls, das die Aussagen „CpCqp" und „CpCqCCpCqrr" (resp. „CpCqCCpCqrCsr") enthält, besitzt eine Basis, die aus einer einzigen Aussage besteht*[14]).

Der Beweis dieses Satzes ermöglicht insbesondere eine Basis des Systems *L* effektiv anzugeben, die ein einziges Element enthält[15]). Łukasiewicz hat den Beweis Tarski's vereinfacht und auf Grund der Vorarbeiten des Hrn. B. Sobociński folgendes festgestellt:

---

tehead, Fund. Math. Bd. V, 1924, S. 60), zuerst seine mehrwertigen, durch Matrizen definierten Systeme, zu Unabhängigkeitsbeweisen verwendete und nachher die allgemeine Methode fand. Auf Grund dieser Methode hat Łukasiewicz schon 1924 die von den Hrn. Hrn. Whitehead und Russell sowie von Hrn. Hilbert angegebenen Axiomensysteme auf ihre Unabhängigkeit untersucht und festgestellt, dass keines von ihnen unabhängig ist. Diese Ergebnisse (ohne Beweise) sind in der folgenden Note von Łukasiewicz enthalten: *Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction,* Annales de la Société Pol. de Math. T. III, Kraków 1925, S. 149.

[14]) Ein analoger, aber ganz trivialer Satz bezieht sich auf alle axiomatisierbaren Systeme derjenigen deduktiven Disziplinen, die den Aussagenkalkül schon voraussetzen und nicht nur die Ax. 1—5, sondern auch die Ax. 6*—10* der oben Anm. [1]) zitierten Mitteilung von Tarski erfüllen.

[15]) Dieses Resultat Tarski's stammt aus dem Jahre 1925; vgl. S. Leśniewski: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. Einleitung und* §§ 1—11, Fund. Math. Bd. XIV, Warszawa 1929, S. 58. Ein aus einem einzigen Axiom bestehendes Axiomensystem des gewöhnlichen Aussagenkalküls hat bereits Nicod im Jahre 1917 aufgestellt (*A reduction in the number of the primitive propositions of logic,* Proc. of the Cambr. Philos. Soc. Bd. XIX, Jan. 1917). Das Nicod'sche Axiom ist jedoch auf der Sheffer'schen Disjunktion „*p*/*q*" als dem einzigen primitiven Termin aufgebaut, und die in bezug auf diesen Termin von Nicod formulierte Abtrennungsregel ist von der Abtrennungsregel für die Implikation stärker, was die Lösung des Problems erleichtert.

Satz 9. *Die Menge, die aus der einzigen Aussage z:*

„CCCpCqpCCCNrCsNtCCrCsuCCtsCtuvCwv“

besteht, ist eine Basis des Systems L, d. h. $\{z\} \varepsilon \mathfrak{B}(L)$.

Die eben genannte Aussage *z*, die 33 Buchstaben zählt, ist die zur Zeit bekannte kürzeste Aussage, die als einziges Axiom zur Begründung des Systems *L* ausreicht. Die Aussage *z* ist in bezug auf das System *L* nicht organisch. Organisch nämlich in bezug auf ein System *X* heisst eine Aussage $y \varepsilon X$, deren kein (sinnvoller) Teil Element von *X* ist (die Bezeichnung „organisch“ rührt von Hrn. S. Leśniewski her, die Definition der „organischen Aussage“ von Hrn. M. Wajsberg). Die Aussage *z* ist in bezug auf *L* nicht organisch, denn sie enthält Teile, z. B. „*CpCqp*“, die Elemente von *L* sind. Hr. Sobociński hat ein organisches Axiom des Systems *L* angegeben, das 47 Buchstaben zählt.

Eine Verallgemeinerung des Satzes 8 stellt folgender Satz dar:

Satz 10. *Das System L sowie jedes axiomatisierbare System des Aussagenkalküls, das die Aussagen „CpCqp“ und „CpCqCCpCqrr“ enthält, besitzt für jede natürliche Zahl m eine Basis, die genau m Elemente zählt.*

Für das System *L* hat diesen Satz Hr. Sobociński effektiv bewiesen; die Verallgemeinerung auf andere Systeme stammt von Tarski.

Im Gegensatz zu dieser Eigenschaft des Systems *L*, hat Tarski effektiv gezeigt, dass:

Satz 11. *Für jede natürliche Zahl m existieren Systeme des Aussagenkalküls, deren jede Basis genau m Elemente zählt.*

An den speziellen Fall dieses Satzes $m = 1$ knüpfen sich folgende Überlegungen von Tarski an:

Definition 6. *Die Aussage x heisst unzerlegbar, wenn* $x \varepsilon S$ *und wenn jede Basis des Systems* $F(\{x\})$ *nur aus einer Aussage besteht* (d. h. *wenn keine unabhängige Aussagenmenge, die mehr als ein Element enthält, der Menge* $\{x\}$ *äquivalent ist*).

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann heisst die Aussage x zerlegbar.

Es zeigt sich nun, dass fast alle bekannten Aussagen des Systems *L* unzerlegbar sind; insbesondere:

Satz 12. *Die Aussagen:*

„Cpp", „CpCCpqq", „CCCpqpp", „CCCpqqCCqpp", „CCpqCCqrCpr", „CCqrCCpqCpr"

sind unzerlegbar.

Satz 13. *Wenn* $x \varepsilon S$, $y \varepsilon S$ *und* $z \varepsilon S$, *dann sind die Aussagen* $n(x)$, $c\big(n(x), y\big)$, $c\Big(c\big(n(x), y\big), z\Big)$, $c\Big(x, c\big(n(y), z\big)\Big)$ *unzerlegbar; insbesondere gilt das für die Aussagen:*

„CNNpp", „CpNNp", „CNpCpq", „CpCNpq", „CCNppp", „CCpNpNp".

Aus den Sätzen 12 und 13 ergibt sich, dass die im Satz 6 angegebene Aussagenmenge aus lauter unzerlegbaren Aussagen besteht.

Dagegen gilt folgender, effektiv bewiesener Satz:

Satz 14. *Die Aussagen:*

„CpCqp", „CCCpqrCqr", „CCpCqrCqCpr"

sind zerlegbar.

Einen bemerkenswerten Satz über Axiomensysteme von *L* hat Hr. Wajsberg bewiesen:

Satz 15. *In jeder Basis (und im allgemeinen in jedem Axiomensystem) des Systems L, sowie eines jeden Teilsystems von L, das die Aussage „CpCqCrp" enthält, kommen mindestens drei verschiedene Aussagenvariablen vor.* Mit anderen Worten, *wenn X die Menge aller derjenigen Aussagen des Systems L ist, in denen höchstens zwei verschiedene Variablen vorkommen, so gilt* $L - F(X) \neq 0$ *(insbesondere gehört die Aussage „CpCqCrp" zwar zu L, aber nicht zu* $F(X)$*)*[16]).

§ 3. Mehrwertige Systeme des Aussagenkalküls.

Ausser dem gewöhnlichen System des Aussagenkalküls gibt es zahlreiche andere Systeme dieses Kalküls, deren Unter-

[16]) Der anschaulich gut verständliche Sinn des Ausdrucks „in der Aussage *x* kommen zwei ev. drei verschiedene Variablen vor", bedarf wohl keiner näheren Erklärung. „Verschieden" bedeutet hier ebensoviel, wie „nichtgleichgestaltet" (vgl. die Anm. [1]) zitierte Mitteilung Tarski's, dieses Heft, S. 24, Anm.[2])).

suchung lohnenswert ist. Darauf hat zum ersten Mal Łukasiewicz hingewiesen, der auch eine speziell bemerkenswerte Klasse von Aussagenkalkülsystemen hervorgehoben hat [17]). Die von Łukasiewicz begründeten Systeme werden hier n-wertige Systeme des Aussagenkalküls genannt und mit den Symbolen „L_n" bezeichnet (n ist eine natürliche Zahl oder $=\aleph_0$). Mit Hilfe der Matrizen-Methode lassen sich die betrachteten Systeme folgendermassen definieren:

Definition 7. *Das n-wertige System L_n des Aussagenkalküls (wo n eine natürliche Zahl oder $=\aleph_0$ ist) ist die Menge aller Aussagen, welche die Matrix $\mathfrak{M}=[A,B,f,g]$ erfüllen, wobei im Falle $n=1$ die Menge A leer ist, im Falle $1<n<\aleph_0$ A aus allen Brüchen der Form $\frac{k}{n-1}$ für $0\leqslant k<n-1$ und im Falle $n=\aleph_0$ auss allen Brüchen $\frac{k}{l}$ für $0\leqslant k<l$ besteht, ferner die Menge B gleich $\{1\}$ ist und die Funktionen f und g durch die Formeln: $f(x,y)=$ $=min(1,1-x+y)$, $g(x)=1-x$ bestimmt werden.*

Wie Hr. Lindenbaum gezeigt hat, ändert sich das System $L_{\aleph_0}$ nicht, wenn man in der Definition dieses Systems die Menge A aller echten Brüche durch eine andere unendliche Teilmenge des Intervalls $<0,1>$ ersetzt:

Satz 16. *Sei $\mathfrak{M}=[A,B,f,g]$ eine Matrix, wobei $B=\{1\}$, die Funktionen f und g den Formeln: $f(x,y)=min(1,1-x+y)$, $g(x)=1-x$ genügen und A eine beliebige unendliche Zahlenmenge ist, die die Bedingung: $0\leqslant x<1$ für jedes $x\in A$ erfüllt und in bezug auf die beiden Operationen f und g abgeschlossen ist; dann gilt: $E(\mathfrak{M})=L_{\aleph_0}$* [18]).

---

[17]) Das s. g. „dreiwertige" System des Aussagenkalküls hat Łukasiewicz im Jahre 1920 konstruiert und in einem in der Polnischen Philosophischen Gesellschaft zu Lwów (Lemberg) gehaltenen Vortrag dargestellt. Ein Autoreferat, das ziemlich ausführlich den Inhalt jenes Vortrags wiedergibt, ist in der Zeitschrift: Ruch Filozoficzny, Jahrg. V, Lwów 1920, S. 170 (polnisch) erschienen. Eine kurze Charakterisierung der n-wertigen Systeme, deren Entstehungszeit in das Jahr 1922 fällt, ist in den Anm. [3]) zitierten *„Elementen"* S. 115 ff. enthalten.

[18]) Auf dem ersten Kongress der polnischen Mathematiker (Lwów 1927) hat Hr. Lindenbaum einen Vortrag über mathematische Methoden der Untersuchung des Aussagenkalküls gehalten, in dem er u. a. auch den oben erwähnten Satz formulierte. Vgl. *Księga pamiątkowa pierwszego polskiego Zjazdu matematycznego,* Kraków 1929, S. 36.

Aus Def. 7 ergeben sich leicht folgende von Łukasiewicz festgestellten Tatsachen:

Satz 17. a) $L_1 = S$, $L_2 = L$;

b) *wenn* $2 \leqslant m < \aleph_0$, $2 \leqslant n < \aleph_0$ *und* $n - 1$ *ein Teiler von* $m - 1$ *ist, so gilt die Formel:* $L_m \subset L_n$;

c) $L_{\aleph_0} = \prod\limits_{1 \leqslant n < \aleph_0} L_n$.

Satz 18. *Alle Systeme* L_n *sind für* $3 \leqslant n \leqslant \aleph_0$ *zwar widerspruchsfrei, aber nicht vollständig:* $L_n \varepsilon \mathfrak{S}.\mathfrak{W} - \mathfrak{V}$.

Eine Umkehrung des Satzes 17b wurde von Hrn. Lindenbaum bewiesen:

Satz 19. *Für* $2 \leqslant m < \aleph_0$ *und* $2 \leqslant n < \aleph_0$ *gilt die Formel* $L_m \subset L_n$ *dann und nur dann, wenn* $n - 1$ *ein Teiler von* $m - 1$ *ist.*

Der Satz 17c wurde von Tarski auf Grund des Satzes 16 verschärft:

Satz 20. $L_{\aleph_0} = \prod\limits_{1 \leqslant i < \aleph_0} L_{n_i}$ *für jede wachsende Folge der natürlichen Zahlen* n_i.

Das Problem des Vollständigkeitsgrades der Systeme L_n ist noch nicht allgemein gelöst*). Ein Spezialfall dieses Problems ist durch den folgenden Satz erledigt:

Satz 21. *Ist* $n - 1$ *eine Primzahl (und insbesondere ist* $n = 3$), *dann gibt es nur zwei Systeme, nämlich* S *und* L, *die* L_n *als einen echten Teil enthalten;* mit anderen Worten, *jede Aussage* $x \varepsilon S - L_n$ *genügt einer der Formeln:* $F(L_n + \{x\}) = S$ oder $F(L_n + \{x\}) = L$; $\gamma(L_n) = 3$.

Für $n = 3$ wurde dieser Satz von Hrn. Lindenbaum bewiesen; die im Satz angegebene Verallgemeinerung auf alle Primzahlen stammt von Tarski.

Was die Axiomatisierbarkeit der Systeme L_n anbetrifft, so gilt der folgende Satz, der zuerst von Hrn. Wajsberg für $n = 3$ und für alle n, für welche $n - 1$ eine Primzahl ist, bewiesen, und später von Hrn. Lindenbaum auf alle natürlichen Zahlen ausgedehnt wurde:

Satz 22. *Für jedes* n, $1 \leqslant n < \aleph_0$, *gilt* $L_n \varepsilon \mathfrak{A}$.

---

*) *Nachtrag bei Korrektur.* Das erwähnte Problem wurde von den Mitgliedern des von Verfassern geführten Proseminars im Mai 1930 endgültig gelöst.

Der effektive Beweis des Satzes 22 ermöglicht, für jedes System L_n, wo $1 \leqslant n < \aleph_0$, eine Basis anzugeben. Insbesondere hat Hr. Wajsberg festgestellt:

Satz 23. *Die Aussagenmenge X, die aus folgenden Aussagen:*

„*CpCqp*", „*CCpqCCqrCpr*", „*CCNpNqCqp*", „*CCCpNppp*"

besteht, bildet eine Basis von L_3, d. h. $X \varepsilon \mathfrak{B}(L_3)$.

Als eine der im jetzigen Moment bekannten Verallgemeinerungen des Satzes 22 soll noch folgender Satz von Hrn. Wajsberg angeführt werden:

Satz 24. *Sei $\mathfrak{M} = [A, B, f, g]$ eine normale Matrix, in der die Menge $A + B$ endlich ist. Wenn die Aussagen:*

„*CCpqCCqrCpr*", „*CCqrCCpqCpr*", „*CCqrCpp*",
„*CCpqCNqNp*", „*CNqCCpqNp*"

diese Matrix erfüllen, dann ist $E(\mathfrak{M}) \varepsilon \mathfrak{A}$.

Die im § 2 angeführten Sätze 8, 10 und 15 gelten auch für die Systeme L_n. Wir haben demnach:

Satz 25. *Jedes System L_n, wo $2 \leqslant n < \aleph_0$, besitzt für jede natürliche Zahl m (und insbesondere für $m = 1$) eine Basis, die genau m Elemente zählt.*

Satz 26. *In jeder Basis (und im allgemeinen in jedem Axiomensystem) der Systeme L_n kommen mindestens drei verschiedene Aussagenvariablen vor.*

Das Problem der Axiomatisierbarkeit des Systems $L_{\aleph_0}$ ist bisher noch nicht gelöst. Łukasiewicz vermutet, dass *das System $L_{\aleph_0}$ axiomatisierbar ist* und dass *die unabhängige Aussagenmenge, die aus den Aussagen:*

„*CpCqp*", „*CCpqCCqrCpr*", „*CCCpqqCCqpp*",
„*CCCpqCqpCqp*", „*CCNpNqCqp*"

besteht, eine Basis dieses Systems bildet.

Es muss hervorgehoben werden, dass die Systeme L_n für $n > 2$ in unserer Auffassung einen fragmentarischen Charakter haben, da sie unvollständig und nur Teilsysteme des gewöhnlichen Systems L sind. Das Problem, diese Systeme zu vollständigen und widerspruchsfreien und doch von L verschiedenen Systemen zu ergänzen, kann positiv entschieden werden, jedoch nur auf diesem Wege, dass man den Begriff der sinnvollen

Aussage des Aussagenkalküls erweitert und zwar neben den Operationen der Implikations- und Negationsbildung auch andere derartige Operationen einführt, die sich auf die vorhergehenden nicht zurückführen lassen (vgl. hierzu auch § 5).

Zuletzt bemerken wir, dass die Anzahl aller möglichen Systeme des Aussagenkalküls von Hrn. Lindenbaum bestimmt wurde:

Satz 27. $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, *dagegen* $\overline{\overline{\mathfrak{S} . \mathfrak{A}}} = \aleph_0$.

Dieses Resultat wurde von Tarski in folgender Weise verschärft:

Satz 28. $\overline{\overline{\mathfrak{S} . \mathfrak{W} . \mathfrak{V}}} = 2^{\aleph_0}$, *dagegen* $\overline{\overline{\mathfrak{S} . \mathfrak{W} . \mathfrak{V} . \mathfrak{A}}} = \aleph_0$.

§ 4. Beschränkter Aussagenkalkül.

In den Forschungen, die den Aussagenkalkül betreffen, beschränkt man sich zuweilen auf diejenigen Aussagen, in denen kein Negationszeichen vorkommt. Dieser Teil des Aussagenkalküls kann als eine selbstständige deduktive Disziplin aufgefasst werden, die von uns beschränkter Aussagenkalkül genannt wird und noch einfacher, als der übliche Aussagenkalkül ist.

Zu diesem Zwecke modifiziert man vor allem den Begriff der sinnvollen Aussage, indem man in der Def. 1 die Operation der Negationsbildung weglässt. In einer entsprechenden Weise vereinfacht sich der Begriff der Einsetzung, was weiterhin eine Veränderung des Begriffs der Folgerung nach sich zieht. *Satz* 1 *bleibt nach diesen Modifikationen gültig.*

Zur Konstruktion abgeschlossener Systeme des beschränkten Aussagenkalküls werden die beiden im § 1 beschriebenen Methoden: die axiomatische und die Matrizen-Methode verwendet. Die logische Matrix wird jedoch als geordnetes Tripel $[A, B, f]$ und nicht als geordnetes Quadrupel (Def. 3) definiert; infolgedessen fällt in der Def. 4 der Wertfunktion die Bedingung (4) weg. *Die Sätze* 2—4 *gelten wie vorher.*

Die Definition des gewöhnlichen Systems L^+ des beschränkten Aussagenkalküls ist der Def. 5 vollkommen analog, mit dem einzigen evidenten Unterschied, der durch die Modifikation im Begriffe der Matrix hevorgerufen wird. Dieses System ist von Tarski untersucht worden. Aus der Definition des Systems ergibt sich leicht dessen Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit;

Satz 5 *besteht* daher *auch im beschränkten Aussagenkalkül.* Die Axiomatisierbarkeit des Systems wird im folgenden Satz festgestellt:

Satz 29. *Die Aussagenmenge X, die aus den drei folgenden Aussagen besteht:*

„$CpCqp$", „$CCpqCCqrCpr$", „$CCCpqpp$",

bildet eine Basis des Systems L^+; demzufolge $L^+ \in \mathfrak{A}$.

Der Satz stammt von Tarski; es kommt jedoch in seiner oben angeführten Formulierung eine Vereinfachung vor, die uns Hr. P. Bernays in einem Briefe vom 20 Okt. 1928 mitgeteilt hat; das von Tarski ursprünglich aufgestellte Axiomensystem enthielt nämlich anstatt der Aussage „$CCCpqpp$" die kompliziertere Aussage „$CCCpqrCCprr$" [19]). Die Unabhängigkeit der beiden Axiomensysteme wurde von Łukasiewicz bewiesen.

Die Sätze 8, 10, 11, 12, 14 und 15 aus dem § 2 wurden von ihren Urhebern auf den beschränkten Aussagenkalkül übertragen. Insbesondere gelang es Tarski, eine Basis des Systems L^+ aufzustellen, die nur aus einer Aussage besteht. Die zur Zeit bekannten einfachsten Beispiele solcher Aussagen, die je 25 Buchstaben zählen, sind im nächsten Satz angeführt; die erste organische Aussage rührt von Hrn. Wajsberg her, die zweite nichtorganische von Łukasiewicz:

Satz 30. *Die Aussagenmenge, die entweder die Aussage:*

„$CCCpqCCrstCCuCCrstCCpuCst$"

oder die Aussage:

„$CCCpCqpCCCCCrstuCCsuCruvv$"

als das einzige Element enthält, bildet eine Basis des Systems L^+.

Auch die Def. 7 der n-wertigen Systeme L_n^+ lässt sich ohne weiteres auf den beschränkten Aussagenkalkül übertragen, wenn man nur in entsprechender Weise den Begriff der Matrix modifiziert. *Die Sätze* 16—22 *sowie* 24—26, welche die gegenseitigen Verhältnisse unter den verschiedenen Systemem L_n^+ beschreiben, den Vollständigkeitsgrad der Systeme bestimmen und ihre Axiomatisierbarkeit feststellen, *wurden* von ihren Urhebern *auf den*

[19]) Vgl. die Anm. [15]) zitierte Abhandlung Leśniewski's, S. 47 Anm.
[20]) Vgl. Leśniewski l. c., S. 58.

beschränkten Aussagenkalkül ausgedehnt (die Ausdehnung des Satzes 21 stammt von Tarski, des Satzes 22 von Hrn. Wajsberg; im Satz 24 sind die Aussagen mit Negationszeichen wegzulassen). Das Problem der Axiomatisierberkeit des Systems $L^{+}_{\aleph_0}$ ist auch hier offen.

Endlich *bleibt die Anzahl aller möglichen Aussagenkalkülsysteme, die* von Hrn. Lindenbaum und Tarski *in den Sätzen* 27 *und* 28 *bestimmt wurde, auch im beschränkten Aussagenkalkül unverändert.*

§ 5. Erweiterter Aussagenkalkül.

Unter dem erweiterten Aussagenkalkül verstehen wir eine deduktive Disziplin, in deren Aussagen neben den Aussagenvariablen und Implikationszeichen auch s. g. allgemeine Quantifikatoren (Allzeichen) vorkommen[21]). Als allgemeiner Quantifikator wird von Łukasiewicz das von Peirce

[21]) Hr. Leśniewski hat in seinen, Anm. [15]) zitierten *„Grundzügen"* den Grundriss eines deduktiven Systems dargestellt, das von ihm „Protothetik" genannt wird und im Vergleich zum erweiterten Aussagenkalkül noch in dieser Richtung über den gewöhnlichen Aussagenkalkül hinausgeht, dass ausser den Quantifikatoren auch variable „Funktoren" eingeführt werden. (In der Funktion „*Cpq*" heisst der Ausdruck „*C*" „Funktor", „*p*" und „*q*" sind die „Argumente"; das Wort „Funktor" stammt von Hrn. T. Kotarbiński. Sowohl im gewöhnlichen wie auch im erweiterten Aussagenkalkül werden nur konstante Funktoren verwendet). Ausser diesem prinzipiellen Unterschied bestehen noch andere Verschiedenheiten zwischen dem erweiterten Aussagenkalkül und der Protothetik, wie sie von Hrn. Leśniewski aufgefasst wird. Im Gegensatz zu dem erweiterten Aussagenkalkül werden in der Protothetik des Hrn. Leśniewski nur diejenigen Ausdrücke als sinnvolle Aussagen betrachtet, in denen keine „freien" („reellen") Variablen, sondern nur „gebundene" („scheinbare") vorkommen. Es werden auch teilweise andere Operationen (Schlussregeln oder „Direktiven") eingeführt, auf deren Grund man aus gegebenen Aussagen Folgerungen zieht, wie z. B. die Operation der Verteilung des Quantifikators, die in dem erweiterten Aussagenkalkül überflüssig ist. Endlich muss hervorgehoben werden, dass Hr. Leśniewski mit peinlichster Genauigkeit die Bedingungen feststellt, denen ein Ausdruck genügen muss, um im System der Protothetik als Definition gelten zu können, wogegen in der vorliegenden Mitteilung das Problem der Definition unberührt bleibt. Die Anm. [13]) zitierten Abhandlungen Tarski's gehören zur Protothetik. Eine Skizze des erweiterten Aussagenkalküls gibt Łukasiewicz in seinen *Elementen* S. 154-169; diese Skizze beruht zum grossen Teile auf Angaben Tarski's (vgl. *„Elemente"*, Vorrede S. VII). Die *Zweiwertige Logik* von Łukasiewicz

eingeführte Zeichen „Π" gebraucht[22]); die Formel „Π*pq*" stellt in dieser Bezeichnungsmethode den symbolischen Ausdruck der Aussage „für alle *p* (besteht) *q*" dar. Die Operation, die darauf beruht, dass man vor eine gegebene Aussage *y* den allgemeinen Quantifikator Π mit einer Aussagenvariablen *x* voranstellt, wird Generalisation der Aussage *y* mit Rücksicht auf die Aussagenvariable *x* genannt und in metamathematischen Überlegungen mit dem Symbol „π_x (*y*)" bezeichnet; dieser Begriff ist im Metaaussagenkalkül als primitiv zu betrachten [23]).

Definition 8. *Die Menge $S^{\times}$ aller sinnvollen Aussagen (des erweiterten Aussagenkalküls) ist der Durchschnitt aller derjenigen Mengen, die alle Aussagenvariablen enthalten und in bezug auf die beiden Operationen der Implikationsbildung und der Generalisation (mit Rücksicht auf eine beliebige Aussagenvariable) abgeschlossen sind*[24]).

Die Operationen der Negationsbildung und der Partikularisation, (die darauf beruht, dass man vor eine gegebene Aussage *y* den partikularen Quantifikator „Σ" [Seinszeichen] mit einer Aussagenvariablen *x* voranstellt), werden hier nicht berücksichtigt, da sie sich in den uns hier interessierenden Systemen des erweiterten Aussagenkalküls mit Hilfe der beiden vorhergenannten Operationen „definieren" lassen; als „Definiens" für „*Np*" kann z B. die Formel „*Cp*Π*qq*" verwendet werden.

Bei der Bildung der Folgerungen einer beliebigen Aussagen-

(s. Anm. [5])) hat auch manche Berührungspunkte mit dem erweiterten Aussagenkalkül. Es bestehen schliesslich zahlreiche Analogien zwischen dem erweiterten Aussagenkalkül und dem „Funktionenkalkül" der Hrn. Hrn. Hilbert und Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik,* Berlin 1928; vgl. insbesondere S. 84—85.

[22]) Den Ausdruck „quantifier" findet man in einer etwas anderen Bedeutung, als hier, bei Peirce (vgl. d. o. Anm. [5]) zitierte Abhandlung, S. 197). Die in der polnischen logischen und mathematischen Terminologie übliche Bezeichnung „Quantifikator" für Symbole, die von den Hrn. Hrn. Hilbert und Ackermann (*Grundzüge,* S. 46) nicht besonders glücklich „Klammerzeichen" genannt wurden, stammt von Łukasiewicz.

[23]) Vgl. o. S. 31.

[24]) Im Gegensatz zu Hrn. Hrn. Hilbert und Ackermann (s. *Grundzüge,* S. 52), sowie im Gegensatz zum Standpunkt, den auch Łukasiewicz in seinen *Elementen,* S. 155 einnimmt, wird der Ausdruck π_x (*y*) auch dann als sinnvoll aufgefasst, wenn *x* in *y* entweder als gebundene Variable oder überhaupt nicht vorkommt.

menge bedienen sich Łukasiewicz und Tarski neben den Operationen der Einsetzung[25]) und Abtrennung noch zweier anderen Operationen, und zwar der Hinzufügung und der Weglassung des Quantifikators. Die erste von diesen Operationen besteht darin, dass man von einer Aussage der Form $x = c(z, u)$, wo $z \varepsilon S^{\times}$ und $u \varepsilon S^{\times}$, zur Aussage $y = c\left(z, \pi_t(u)\right)$ übergeht, unter der Bedingung, dass t eine Aussagenvariable ist, die in z als „freie Variable" nicht vorkommt[26]); die zweite Operation ist zur ersten invers und beruht darauf, dass man von der Aussage $y = c\left(z, \pi_t(u)\right)$ zur Aussage $x = c(z, u)$ übergeht (was auch dann geschehen darf, wenn die in der ersten Operation angegebene Bedingung nicht erfüllt ist)[27]).

Definition 9. *Die Folgerungsmenge $F^{\times}(X)$ der Aussagenmenge X (im Sinne des erweiterten Aussagenkalküls) ist der Durchschnitt aller derjenigen Mengen, die die gegebene Menge $X \subset S^{\times}$ enthalten und in bezug auf die Operationen der Einsetzung und Abtrennung, sowie der Hinzufügung und der Weglassung des Quantifikators abgeschlossen sind.*

Bei dieser Bedeutung der Begriffe $S^{\times}$ und $F^{\times}(X)$ *bleibt der Satz 1 aus dem* § 1 *gültig.*

Zur Konstruktion abgeschlossener Systeme stehen uns wiederum die beiden Methoden: die axiomatische und die Matrizen-Methode zur Verfügung. Die zweite Methode ist in ihrer allgemeinen Fassung noch nicht zur genügenden Klarheit gebracht, und zwar bietet das Problem einer einfachen und zweckmässigen

---

[25]) Die Operation der Einsetzung erfährt im erweiterten Aussagenkalkül gewisse Einschränkungen (vgl. Łukasiewicz, *Elemente*, S. 160, sowie Hilbert und Ackermann, *Grundzüge*, S. 54).

[26]) Auf den evidenten Sinn des Ausdrucks: „x kommt in der Aussage y als freie resp. gebundene Variable vor" gehen wir nicht näher ein (vgl. Łukasiewicz, *Elemente*, S. 156, sowie Hilbert und Ackermann, *Grundzüge*, S. 54).

[27]) Im „engeren Funktionenkalkül" wird nur die erste Operation angewendet, anstatt der zweiten wird ein Axiom aufgestellt (vgl. Hilbert und Ackermann, *Grundzüge*, S. 53—54). Ein analoges Vorgehen wäre in unserem Kalkül nicht möglich: würde man nämlich die zweite Operation weglassen, so hätte nicht einmal das System $L^{\times}$, von dem unten die Rede sein wird, eine endliche Basis.

Definition des Begriffs der Matrix noch manche Schwierigkeiten dar. Nichtsdestoweniger wurde diese Methode in einzelnen Fällen, nämlich zur Konstruktion der n-wertigen Systeme $L_n^\times$ (für $n < \aleph_0$) und insbesondere des gewöhnlichen Systems $L^\times$ des erweiterten Aussagenkalküls von Łukasiewicz mit Erfolg angewendet. Die Konstruktion der Systeme $L_n^\times$ wird im folgenden genau beschrieben werden.

Definition 10. *Es werden folgende Hilfsbezeichnungen eingeführt:* $b =$ „p“, $g = \pi_b(b)$ *(das „Falsche“),* $n(x) = c(x, g)$ *für jedes* $x \in S^\times$ *(das Negat der Aussage* x*),* $a(x,y) = c\big(c(x,y), y\big)$ *und* $k(x,y) = n\Big(a\big(n(x), n(y)\big)\Big)$ *für jedes* $x \in S^\times$ *und jedes* $y \in S^\times$ *(die Disjunktion oder vielmehr Alternative und die Konjunktion der Aussagen* x *und* y[28]*); ferner* $k_{i=1}^m(x_i) = x_1$ *für* $m = 1$ *und* $k_{i=1}^m(x_i) = k\big(k_{i=1}^{m-1}(x_i), x_m\big)$ *für jedes beliebige natürliche* $m > 1$*, wobei* $x_i \in S^\times$ *für* $1 \leqslant i \leqslant m$ *(die Konjunktion der Aussagen* $x_1, x_2 \ldots x_m$*). Wir setzen weiter* $b_m = b$ *für* $m = 1$*,* $b_m = c\big(n(b), b_{m-1}\big)$ *für jede natürliche Zahl* $m > 1$ *und endlich* $a_m = \pi_b\big(c(b_m, b)\big)$ *für jedes beliebige natürliche* m[29]*).*

Sei jetzt n *eine bestimmte natürliche Zahl* > 1*. Es werden* n *Aussagen gewählt, die Grundaussagen genannt und mit den Symbolen: „*g_1*“, „*g_2*“, ... „*g_n*“ entsprechend bezeichnet werden, und zwar setzen wir:* $g_1 = g$*,* $g_2 = a_{n-1}$ *und* $g_m = c\big(n(g_2), g_{m-1}\big)$ *für jedes* m*,* $2 < m \leqslant n$[30]*).* G *sei die kleinste Aussagenmenge, die alle Aussagenvariablen und alle Grund-*

---

[28]) Den metalogischen Ausdrücken „$a(x,y)$“ und „$k(x,y)$“ entsprechen in der von Łukasiewicz eingeführten Symbolik die logischen Ausdrücke „Apq“ („p oder q“) resp. „Kpq“ („p und q“). Von den zwei möglichen Definitionen der Alternative, die zwar im zweiwertigen, nicht aber in n-wertigen Systemen äquivalent sind: $a(x,y) = c\big(c(x,y), y\big)$ und $a(x,y) = c\big(n(x), y\big)$, wurde von Łukasiewicz aus verschiedenen, teilweise intuitiven Gründen die erste gewählt (vgl. *Zweiwertige Logik*, S. 201).

[29]) Z. B.: $b_1 =$ „p“, $b_2 =$ „$CCp\Pi ppp$“, $b_3 =$ „$CCp\Pi ppCCp\Pi ppp$“ und $a_1 =$ „$\Pi pCpp$“, $a_2 =$ „$\Pi pCCCp\Pi pppp$“, $a_3 =$ „$\Pi pCCCp\Pi ppCCp\Pi pppp$“.

[30]) Z. B. für $n = 3$: $g_1 =$ „Πpp“, $g_2 =$ „$\Pi pCCCp\Pi pppp$“, $g_3 =$ „$CC\Pi pCCCp\Pi pppp\Pi pp\Pi pCCCp\Pi pppp$“.

aussagen enthält und in bezug auf die Operation der Implikationsbildung abgeschlossen ist.

Eine Funktion $\mathfrak{h}$ heisst W e r t f u n k t i o n (d e s n-t e n G r a d e s), *wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:* (1) *die Funktion $\mathfrak{h}$ ist für jede Aussage $x \in G$ definiert;* (2) *wenn x eine Aussagenvariable ist, dann ist $\mathfrak{h}(x)$ ein Bruch der Form $\frac{m-1}{n-1}$, wo m eine natürliche Zahl ist und $1 \leqslant m \leqslant n$;* (3) *für jedes natürliche m, $1 \leqslant m \leqslant n$, gilt $\mathfrak{h}(g_m) = \frac{m-1}{n-1}$;* (4) *wenn $x \in G$ und $y \in G$, dann $\mathfrak{h}\big(c\,(x, y)\big) = \min\big(1, 1 - \mathfrak{h}(x) + \mathfrak{h}(y)\big)$* [31].

Jeder Aussage $x \in S^{\times}$ wird durch Rekursion eine Aussage $f(x) \in G$ zugeordnet, und zwar in folgender Weise: (1) *wenn x eine Aussagenvariable oder eine Grundaussage ist, dann $f(x) = x$;* (2) *wenn $x \in S^{\times}$, $y \in S^{\times}$ und $c(x, y)$ keine Grundaussage ist, setzen wir: $f\big(c(x, y)\big) = c\big(f(x), f(y)\big)$;* (3) *wenn x eine Aussagenvariable ist, die in der Aussage $y \in S^{\times}$ als freie Variable nicht vorkommt, dann $f\big(\pi_x(y)\big) = f(y)$;* (4) *wenn dagegen die Aussagenvariable x in der Aussage $y \in S^{\times}$ als freie Variable vorkommt und dabei $\pi_x(y)$ keine Grundaussage ist, so setzen wir: $f\big(\pi_x(y)\big) = k_{i=1}^{n}\big(f(y_i)\big)$, wo die Aussage y_i für jedes i, $1 \leqslant i \leqslant n$, aus y durch Einsetzung der Grundaussage g_i anstatt der freien Variablen x entsteht.*

Nun wird das n-w e r t i g e S y s t e m $L_n^{\times}$ d e s e r w e i t e r t e n A u s s a g e n k a l k ü l s, *wo $2 \leqslant n < \aleph_0$, als die Menge aller derjenigen Aussagen $x \in S^{\times}$ definiert, die für jede Wertfunktion $\mathfrak{h}$ (des n-ten Grades) der Formel $\mathfrak{h}(f(x)) = 1$ genügen; dabei wird $L_1^{\times} = S^{\times}$ gesetzt. Das System $L_2^{\times} = L^{\times}$ wird auch das* g e w ö h n l i c h e S y s t e m d e s e r w e i t e r t e n A u s s a g e n k a l k ü l s *genannt* [32].

---

[31]) Vgl. o. die Definitionen 4 und 7.

[32]) In der von Łukasiewicz angenommenen Definition kamen anstatt der Grundaussagen $g_1, g_2, \ldots g_n$ s. g. Aussagenkonstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, d. h. spezielle, von Aussagenvariablen verschiedene Zeichen vor. Der Begriff der sinnvollen Aussage wurde dadurch provisorisch erweitert. Die weitere Definition verlief ganz analog zur Definition im Texte. Bei der endgültigen Definition der Systeme $L_n^{\times}$ wurden alle Ausdrücke, die Aussagenkonstanten

Aus dieser Definition der Systeme $L_n^{\times}$ ergeben sich leicht folgende Tatsachen (die teilweise im Gegensatz zu den Sätzen 18 und 19 aus § 3 stehen):

Satz 31. *$L_n^{\times} \varepsilon \mathfrak{S}.\mathfrak{W}.\mathfrak{V}$ für jedes natürliche n, $2 \leqslant n < \aleph_0$* [33]).

Satz 32. *Für $2 \leqslant m < \aleph_0$ und $2 \leqslant n < \aleph_0$ gilt $L_m^{\times} \subset L_n^{\times}$ dann und nur dann, wenn $m = n$ (kein System der Folge $L_n^{\times}$, wo $2 \leqslant n < \aleph_0$, ist in einem anderen System dieser Folge enthalten).*

Satz 33. *Die Menge aller Aussagen des Systems $L_n^{\times}$ (wo $1 \leqslant n < \aleph_0$), in denen keine gebundenen Variablen vorkommen, ist mit dem entsprechenden System L_n^{+} des beschränkten Aussagenkalküls identisch.*

Was die Axiomatisierbarkeit dieser Systeme betrifft, so *wurden* von T a r s k i *die Sätze* 8, 10, 22, 29 *und* 30 *auch im erweiterten Aussagenkalkül als gültig erwiesen.* In diesem Zusammenhange hat T a r s k i noch folgendes bewiesen:

Satz 34. *Jedes Axiomensystem des Systems $L_2^{+} = L^{+}$ im beschränkten Aussagenkalkül ist zugleich ein Axiomensystem des Systems $L_2^{\times} = L^{\times}$ im erweiterten Aussagenkakül* [33]).

Dagegen: nicht jede Basis des Systems L^{+} im beschränkten Aussagenkalkül ist zugleich eine Basis im erweiterten Aussagenkalkül (nicht jede Aussagenmenge, die im beschränkten Aussagenkalkül unabhängig ist, bleibt auch im erweiterten Aussagenkalkül unabhängig).

Satz 35. *Für $3 \leqslant n < \aleph_0$ kommen mindestens in e i n e r Aussage einer jeden Basis (und im allgemeinen eines jeden*

---

enthielten, eliminiert und der Begriff der sinnvollen Aussage auf die ursprünglichen Ausdrücke reduziert. Durch die im Text eingeführte Modifikation, die von T a r s k i stammt, gestaltet sich zwar die Definition der Systeme $L_n^{\times}$ vom metalogischen Standpunkt einfacher, wird aber dadurch weniger durchsichtig. Um die Äquivalenz der beiden Definitionen festzustellen, genügt es darauf hinzuweisen, dass die als Grundaussagen erwählten Ausdrücke folgende Bedingung erfüllen: *für jede Wertfunktion h (im Sinne der ursprünglichen Definition von Ł u k a s i e w i c z),* $h\big(f(g_m)\big) = h(c_m) = \frac{m-1}{n-1}$, wo $1 \leqslant m \leqslant n$.

[33]) Die Vollständigkeit und Axiomatisierbarkeit des Systems $L_2^{\times}$ wurde von T a r s k i schon im Jahre 1927 bewiesen. Der diesbezügliche Beweis, den T a r s k i in den von ihm an der Universität Warszawa gehaltenen Übungen vortrug, wurde von einem Teilnehmer an diesen Übungen, Hrn. S. J a ś k o w s k i vereinfacht.

Axiomensystems) des Systems $L_n^{\times}$ allgemeine Quantifikatoren und gebundene Variablen vor.

Es lohnt sich zu bemerken, dass der von Tarski gegebene Beweis des Satzes 22 im erweiterten Aussagenkalkül für jedes System $L_n^{\times}$ $(3 \leqslant n < \aleph_0)$ ein Axiomensystem effektiv zu konstruieren ermöglicht. Relativ einfache Axiomensysteme dieser Art wurden von Hrn. Wajsberg aufgestellt; im Fall $n=3$ lautet sein Resultat folgendermassen:

Satz 36. *Sei X die Aussagenmenge, die aus folgenden Aussagen besteht:*

$$„CCCpqCrqCCqpCrp“,\ „CpCqp“,\ „CCCpCpqpp“,$$
$$„C\Pi pCCCp\Pi ppppC\Pi pCCCp\Pi pppp\Pi pp“,$$
$$„CC\Pi pCCCp\Pi pppp\Pi pp\Pi pCCCp\Pi pppp“;$$

dann ist $X \in \mathfrak{Ax}(L_3^{\times})$.

Eine exakte Definition des abzählbar-wertigen Systems $L_{\aleph_0}^{\times}$ des erweiterten Aussagenkalküls bietet viel grössere Schwierigkeiten dar, als diejenige der endlich-wertigen Systeme. Das erwähnte System ist bis jetzt noch nicht untersucht worden.

Die Sätze 27 und 28, welche die Anzahl aller möglichen Systeme bestimmen, bleiben auch im erweiterten Aussagenkalkül richtig.

Schlussbemerkung.

Der Aussagenkalkül eignet sich als die einfachste deduktive. Disziplin ganz besonders dazu, metamathematische Betrachtungen anzustellen. Dieser Kalkül ist als ein Laboratorium zu betrachten, in dem metamathematische Methoden erfunden und metamathematische Begriffe gebildet werden können, die man nachher auf die komplizierteren mathematischen Systeme übertragen kann.— Über die philosophische Bedeutung der n-wertigen Systeme des Aussagenkalküls berichtet in der nächstfolgenden Mitteilung Łukasiewicz[34]).

---

[34]) Dieses Heft, S. 51.

Jan Łukasiewicz.

Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań.

Komunikat, przedstawiony dnia 27 marca 1930 r.

Streszczenie.

W komunikacie tym autor omawia zagadnienie zdań modalnych, które doprowadziło go do utworzenia trójwartościowego systemu rachunku zdań.

Jan Łukasiewicz.

Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.

Vorgelegt am 27 März 1930.

INHALT.

In der Mitteilung: „Untersuchungen über den Aussagenkalkül", die in diesem Heft unter meinem und Hrn. Tarski's Namen erschienen sind, ist § 3 den von mir aufgestellten „mehrwertigen" Systemen des Aussagenkalküls gewidmet. Indem ich, was die logischen Fragen anbetrifft, den Leser auf jene Mitteilung zurückweise, möchte ich hier die Entstehung und Bedeutung der genannten Systeme vom philosophischen Standpunkt beleuchten.

§ 1. Modale Aussagen. Das dreiwertige System des Aussagenkalküls verdankt seine Entstehung gewissen Untersuchungen, die ich über die s. g. „modalen Aussagen" und die mit ihnen eng verknüpften Begriffe der Möglichkeit und Notwendigkeit anstellte [1]).

Unter modalen Aussagen verstehe ich Aussagen, die einem der folgenden vier Ausdrücke nachgebildet sind:

(1) Es ist möglich, dass *p*	— in Zeichen:	*Mp*
(2) Es ist nicht möglich, dass *p*	— „	*NMp*
(3) Es ist möglich, dass nicht-*p*	— „	*MNp*
(4) Es ist nicht möglich, dass nicht-*p*	— „	*NMNp*

Der Buchstabe „*p*" bezeichnet hier eine beliebige Aussage, „*N*" ist das Symbol der Negation („*Np*" = „nicht-*p*"), „*M*" entspricht den Worten: „es ist möglich, dass". Statt zu sagen: „es ist nicht möglich, dass nicht-*p*", kann man auch die Redensart gebrauchen: „es ist notwendig, dass *p*".

Die hier aufgezählten Ausdrücke sind mit den „problematischen" und „apodiktischen" Urteilen im Sinne Kant's nicht identisch. Sie entsprechen vielmehr den von Aristoteles herstammenden modalen Aussagen der mittelalterlichen Logik, die mit Hilfe der folgenden vier „Modi" gebildet wurden: *„possibile"* (z. B.: *„Socratem currere est possibile"*), *„impossibile"*, *„contingens"* und *„necessarium"*. Ausser den vier genannten Modis wurden gewöhnlich von den Logikern des Mittelalters noch zwei weitere Modi angeführt, nämlich *„verum"* und *„falsum"*; doch wurden diese Modi nicht weiter berücksichtigt, da man die ihnen entsprechenden modalen Aussagen: „es ist wahr, dass *p*" und „es ist falsch, dass *p*", als äquivalent mit den Aussagen „*p*" und „*Np*" betrachtete [2]).

Der Ausdruck: „es ist möglich, dass", wird hier nicht definiert; sein Sinn erhellt aus Sätzen, die für modale Aussagen gelten.

§ 2. **Sätze über modale Aussagen.** In der Geschichte der Logik begegnen uns drei Gruppen von Sätzen, die modale Aussagen betreffen.

---

[1]) Über diese Untersuchungen habe ich am 5 Juni 1920 in der „Polnischen Philosophischen Gesellschaft" zu Lwów einen Bericht erstattet, dessen wesentlicher Inhalt in der polnischen Zeitschrift *„Ruch Filozoficzny"*, Jahrg. V., Nr. 9, S. 169 u. 170, Lwów 1920, erschienen ist.

[2]) Vgl. Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, Bd. III, S. 14 Anm. 42, S. 117 Anm. 542.

Zur ersten Gruppe rechne ich die wohlbekannten Sätze, die von der klassischen Logik überliefert sind und von ihr als evidente Wahrheiten ohne Beweis dahingestellt werden:

(a) *Ab oportere ad esse valet consequentia.*

(b) *Ab esse ad posse valet consequentia.*

Durch Kontraposition bekommt man aus (b) einen dritten Satz:

(c) *A non posse ad non esse valet consequentia.*

Der letztere Satz bedeutet: „Vom Nichtmöglichsein auf Nichtsein ist die Folgerung gültig". Beispiel: Es ist nicht möglich, dass eine Primzahl durch 4 teilbar ist; also ist keine Primzahl durch 4 teilbar. Das Beispiel ist einleuchtend, und ebenso einleuchtend ist der nachstehende allgemeine Satz, den wir uns als Repräsentanten der ersten Gruppe merken wollen:

I. *Wenn es nicht möglich ist, dass p, so nicht-p.*

Weniger bekannt, aber nicht minder intuitiv, scheint der folgende Satz zweiter Gruppe zu sein, der von Leibniz in der *Théodicée* zitiert wird: [3])

(d) *Unumquodque, quando est, oportet esse.*

„Was auch immer, wann es ist, ist notwendig". Der Satz geht auf Aristoteles zurück, dem zufolge zwar nicht alles Seiende notwendig, sowie nicht alles Nichtseiende unmöglich ist; aber wann ein Seiendes ist, dann ist es auch notwendig, und wann ein Nichtseiendes nicht ist, dann ist es auch unmöglich [4]).

Die eben angeführten Sätze sind nicht leicht zu interpretieren. Ich lasse zunächst Beispiele folgen.

Es ist zwar nicht notwendig, dass ich heute abends zu Hause bin; aber wenn ich schon heute abends zu Hause bin, so ist es unter dieser Voraussetzung notwendig, dass ich heute abends zu Hause bin. Ein zweites Beispiel: Es geschieht zwar selten, dass ich kein Geld in der Tasche habe; aber wenn ich nun (in einem gewissen Zeitmoment *t*) kein Geld in der Tasche habe, so ist es unter dieser Voraussetzung nicht möglich, dass ich (in ebendemselben Moment *t*) Geld in der Tasche habe.

---

[3]) *Phil. Schriften*, hrsg. v. Gerhardt, Bd. VI, S. 131.

[4]) *De interpr.* 9. 19a 23: Τὸ μὲν οὖν εἶναι τὸ ὂν ὅταν ᾖ, καὶ τὸ μὴ ὂν μὴ εἶναι, ὅταν μὴ ᾖ, ἀνάγκη· οὐ μὴν οὔτε τὸ ὂν ἅπαν ἀνάγκη εἶναι οὔτε τὸ μὴ ὂν μὴ εἶναι.

Zweierlei ist an diesen Beispielen zu beachten: Erstens, die Aussagen: „ich bin heute abends zu Hause”, sowie „ich habe (im Zeitmoment *t*) kein Geld in der Tasche”, werden als w a h r vorausgesetzt, und unter dieser Voraussetzung wird auf die Notwendigkeit resp. Unmöglichkeit geschlossen. Zweitens, das Wörtchen *„quando“* in (d), sowie das ihm entsprechende „ὅταν” bei A r i s t o t e l e s, ist keine konditionale, sondern eine temporale Partikel; doch geht das Temporale in das Konditionale über, wenn in den temporal verbundenen Aussagen die Zeitbestimmung in den Inhalt der Aussagen einbezogen wird.

Die gegebenen Beispiele sind übrigens genug einleuchtend, um folgenden allgemeinen Satz zu begründen, den wir uns als Repräsentanten der zweiten Gruppe merken wollen:

II. *Wird vorausgesetzt, dass nicht-p, so ist es (unter dieser Voraussetzung) nicht möglich, dass p.*

Die d r i t t e Gruppe besteht nur aus e i n e m Satz, der auf dem Aristotelischen Begriff der „beiderseitigen” Möglichkeit beruht. Es gibt nach A r i s t o t e l e s manches, was nach beiden Seiten hin möglich ist, was also sein k a n n, aber nicht sein m u s s. So ist es z. B. möglich, dass dieses Kleid zerschnitten wird, aber es ist auch möglich, dass es nicht zerschnitten wird [5]). Wir sagen ja auch: es ist möglich, dass der Kranke stirbt, aber es ist auch möglich, dass er gesund wird, also nicht stirbt. Dieser Begriff der beiderseitigen Möglichkeit ist im alltäglichen Denken und Sprechen tief eingewurzelt. Folgender Satz, den wir uns wieder merken wollen, scheint daher ebenso einleuchtend zu sein, wie die beiden vorhergehenden:

III. *Für ein gewisses p: es ist möglich, dass p, und es ist möglich, dass nicht-p.*

§ 3. Konsequenzen der zwei ersten Sätze über modale Aussagen. Wir wollen nunmehr einige Folgerungen aus den soeben angeführten Sätzen I und II ziehen. Zu diesem Zwecke werden wir zuerst die genannten Sätze in Zeichen des Aussagenkalküls darstellen.

---

[5]) *De interpr.* 9. 19a 9: ὅλως ἔστιν ἐν τοῖς μὴ ἀεὶ ἐνεργοῦσι τὸ δυνατὸν εἶναι καὶ μὴ ὁμοίως· ἐν οἷς ἄμφω ἐνδέχεται, καὶ τὸ εἶναι καὶ τὸ μὴ εἶναι... οἷον ὅτι τουτὶ τὸ ἱμάτιον δυνατόν ἐστι διατμηθῆναι... ὁμοίως δὲ καὶ τὸ μὴ διατμηθῆναι δυνατόν.

Sei „*Cpq*“ das Symbol der Implikation: „wenn *p*, so *q*“, wobei „*p*“ und „*q*“ beliebige Aussagen bezeichnen. Es ist ohne weiteres klar, dass Satz I in Form einer Implikation ausgedrückt werden kann, die ich als „These“ *1* notiere: [6])

1 CNMpNp

Das bedeutet: „Wenn es nicht möglich ist, dass *p*, so nicht-*p*“.

Es ist zwar nicht ebenso klar, aber es kann bewiesen werden, dass Satz II als eine Implikation dargestellt werden kann, die die Umkehrung von *1* ist. Gilt nämlich unter der Voraussetzung „α“ eine Aussage „β“, so heisst das nichts anderes, als dass „β“ wahr ist, wenn „α“ wahr ist. Die Implikation „wenn α, so β“ gilt daher, wenn „α“ wahr ist. Da nun diese Implikation auch dann gelten muss, wenn „α“ falsch ist, so gilt sie in jedem Falle. Wir bekommen somit die These:

2 CNpNMp

Das heisst: „Wenn nicht-*p*, so ist es nicht möglich, dass *p*“. Auf eine andere Weise kann der Satz II im zweiwertigen Aussagenkalkül nicht ausgedrückt werden.

Auf diese Thesen gestützt, werden wir unter Zugrundelegung des gewöhnlichen Aussagenkalküls einige Folgesätze beweisen. Alle nachfolgenden Beweise sind streng formalisiert und mit Hilfe zweier Schlussregeln, der Einsetzung und Abtrennung durchgeführt. Auf diese wohlbekannten Schlussregeln wird hier nicht eingegangen; ich möchte nur erklären, wie formalisierte Beweise in der von mir eingeführten Symbolik aufgezeichnet werden.

Vor einer jeden zu beweisenden These, die alle mit laufenden Nummern versehen und dadurch als Thesen kenntlich sind, befindet sich eine nicht-numerierte Zeile, die von mir die „Beweiszeile” genannt wird. Eine jede Beweiszeile besteht aus zwei Teilen, die durch das Zeichen „$\times$” getrennt sind. Die Zeichen vor und nach dem Trennungszeichen bezeichnen denselben Ausdruck, nur auf eine andere Weise. Vor dem Trennungszeichen ist die Einsetzung angegeben, die allenfalls an einer bereits gegebenen These ausgeführt werden soll. Z. B.: in der ersten Beweiszeile bedeutet der Ausdruck: „*3q/Mp*“, dass in *3*

[6]) Unter „Thesen” verstehe ich, dem Beispiel Hrn. Leśniewski's folgend, sowohl Axiome als auch Theoreme eines deduktiven Systems.

statt „q“ „Mp“ eingesetzt werden soll. Die These, die durch diese Einsetzung entsteht, ist im Beweisgang der Kürze halbe. weggelassen; sie sieht folgendermassen aus:

3' *CCNMpNpCpMp*

Der Ausdruck nach dem Trennungszeichen „$C1-7$“ deutet die Konstruktion ebenderselben These *3'* an, und zwar in einer solchen Weise, die einleuchtend klar macht, dass auf *3'* die Abtrennungsregel angewendet werden kann. Die These *3'* ist als Einsetzung der These *3* in unseren Ausführungen anerkannt; da sie aber eine Implikation ist, deren Vordersatz als These *1* auch anerkannt ist, so darf der Nachsatz von ihr abgetrennt und als These *7* anerkannt werden. In der zweiten Beweiszeile bezeichnet die Ziffer „*8*“ die durch Einsetzung „p/Np“ aus *7* entstandene These. In der Beweiszeile, die zur These *10* gehört, wird die Abtrennungsregel zweimal angewendet. Ich glaube, dass nach diesen Erklärungen das Verständnis der nachstehenden Beweise dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten wird.

Ausser den beiden Thesen *1* und *2*, die als Axiome auftreten, kommen noch im Beweisgang vier wohlbekannte Hilfsthesen aus dem gewöhnlichen Aussagenkalkül vor, und zwar drei Transpositionsgesetze, die mit den Nummern *3 — 5* bezeichnet sind, sowie das Prinzip des hypothetischen Syllogismus, These *6*. Alle diese Thesen stelle ich als Prämissen an die Spitze des Beweisgangs.

1 *CNMpNp*
2 *CNpNMp*
3 *CCNqNpCpq*
4 *CCNpqCNqp*
5 *CCpNqCqNp*
6 *CCpqCCqrCpr*

*

$3\,q/Mp \times C1-7$
7 *CpMp*
$7\,p/Np \times 8$
8 *CNpMNp*
$4\,q/MNp \times C8-9$
9 *CNMNpp*
$6\,p/NMNp,\ q/p,\ r/Mp \times C9-C7-10$

10 *CNMNpMp*

4p/MNp, q/Mp $\times$ *C10 — 11*

11 *CNMpMNp*

*

3q/p, p/Mp $\times$ *C2 — 12*

12 *CMpp*

12p/Np $\times$ *13*

13 *CMNpNp*

5p/MNp, q/p $\times$ *C13 — 14*

14 *CpNMNp*

6p/Mp, q/p, r/NMNp $\times$ *C12 — C14 — 15*

15 *CMpNMNp*

5p/Mp, q/MNp $\times$ *C15 — 16*

16 *CMNpNMp*

Thesen *7 — 11* sind Konsequenzen von *1*, *12 — 16* ergeben sich aus *2*. In Worten ausgedrückt besagt *7*: „wenn *p*, so ist es möglich, dass *p*". These *9* besagt: „wenn es nicht möglich ist, dass nicht-*p*, so *p*". Die letztere These entspricht dem oben angeführten Satz (a) der klassischen Logik, die erstere dem Satz (b). Beide sind evident. Überhaupt sind alle Thesen der ersten Gruppe, *7 — 11*, evident.

Nicht ebenso evident sind Thesen der zweiten Gruppe, *12 — 16*. These *12* lautet: „wenn es möglich ist, dass *p*, so *p*". Auf Grund dieser These kann geschlossen werden: Es ist möglich, dass der Kranke stirbt; also stirbt er. Diesen Schluss wird nur derjenige anerkennen, für den zwischen Möglichsein und Sein kein Unterschied besteht. Überhaupt sind Thesen der zweiten Gruppe, *12 — 16*, entsprechend Umkehrungen der Thesen der ersten Gruppe, *7 — 11*. Wer beide Gruppen von Thesen anerkennt, der muss annehmen, dass folgende Aussagen: „*p*", „es ist möglich, dass *p*" und „es ist nicht möglich, dass nicht-*p*" oder „es ist notwendig, dass *p*", untereinander äquivalent sind; ebenso müssen auch die Aussagen: „nicht-*p*", „es ist möglich, dass nicht-*p*" und „es ist nicht möglich, dass *p*", als äquivalent betrachtet werden. Dadurch aber werden die Begriffe der Möglichkeit und Notwendigkeit entbehrlich. Zu dieser Unnannehmlichkeit führt die von uns angenommene symbolische Formulierung des Satzes II, der in der Wortsprache einleuchtend ist und ohne Bedenken als wahr anerkannt werden kann. Es scheint mir jedoch nicht möglich zu sein, den Satz II in der Zeichensprache des zweiwertigen Aussagenkalküls anders auszudrücken, als in Gestalt einer einfachen Implikation, die die Umkehrung der These *1* darstellt.

§ 4. Konsequenzen des dritten Satzes über modale Aussagen. Zu einer anderen Unannehmlichkeit führt die symbolische Formulierung des dritten Satzes.

Satz III kann nur mit Hilfe der Symbolik des erweiterten Aussagenkalküls ausgedrückt werden. Sei „Σ" der partikulare Quantifikator und bezeichne „Σp" die Redewendung: „für ein gewisses p". Sei ferner „Kpq" das Symbol der Konjunktion: „p und q", wobei „p" und „q" beliebige Aussagen bezeichnen. Satz III lässt sich dann symbolisch folgendermassen darstellen:

17 $\Sigma pKMpMNp$

Das bedeutet wörtlich: „Für ein gewisses p: es ist möglich, dass p, und es ist möglich, dass nicht-p".

Der partikulare Quantifikator „Σ" kann durch den universalen Quantifikator „Π" ausgedrückt werden. Bezeichnet „Πp" die Redewendung: „für ein jedes p" und stellt „$\alpha(p)$" irgend eine Aussage dar, in der „p" vorkommt, so ist die nachstehende Definition einleuchtend:

D1 $$\Sigma p\alpha(p) = N\Pi pN\alpha(p)$$

D1 besagt nämlich, dass die Ausdrücke: „für ein gewisses p (gilt) $\alpha(p)$" und „es ist nicht wahr, dass für ein jedes p nicht-$\alpha(p)$ (gilt)", gleichbedeutend sind. These *17* geht alsdann in die folgende These über:

18 $N\Pi pNKMpMNp$

Nun gibt es ausser dem erweiterten Aussagenkalkül ein noch allgemeineres logisches System, das von Hrn. Leśniewski geschaffen und von ihm „Protothetik" genannt wurde [7]. Und zwar unterscheidet sich die Protothetik vom erweiterten Aussagenkalkül vornehmlich dadurch, dass in ihr neben konstanten auch variable „Funktoren" [8]) auftreten.

---

[7]) S. Leśniewski. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik.* Einleitung und §§ 1—11. *Fund. Math.*, Bd. XIV, Warszawa 1929.

[8]) In der Funktion „Cpq" heisst „C" der „Funktor", „p" und „q", sind die „Argumente". Das Wort „Funktor" stammt von Hrn. Kotarbiński.

Bezeichnen wir mit „φ“ einen variablen Funktor, zu dem nur e i n e Aussage als Argument gehört; folgender Satz kann in der Protothetik bewiesen werden:

$$CK\varphi p\varphi Np\varphi q.$$

Das heisst in Worten: „Wenn φ von p und φ von nicht-p, so φ von q“.

Da der Satz für alle Funktoren mit e i n e m Argument gilt, so gilt er auch für den Funktor „M“. Wir bekommen somit:

19 CKMpMNpMq

These *18* und *19*, sowie zwei Hilfsthesen aus dem gewöhnlichen Aussagenkalkül, nämlich das schon oben angeführte Transpositionsgesetz *4* und ein anderes Transpositionsgesetz, These *20*, sind Prämissen des nachfolgenden formalisierten Beweises, in dem ausser den Schlussregeln der Einsetzung und Abtrennung noch die Schlussregel der H i n z u f ü g u n g d e s Q u a n t i f i k a t o r s angewendet wird. Diese Schlussregel lautet: Befindet sich im Nachsatz einer anerkannten Implikation eine freie Aussagenvariable „p“, die als freie Variable im Vordersatz der Implikation nicht vorkommt, so darf vor dem Nachsatz der genannten Implikation das Zeichen „Πp“ gesetzt werden. Diese Schlussregel wird unten mit „$+\Pi$“ bezeichnet. Der Beweis, den wir jetzt führen wollen, lautet samt den Prämissen folgendermassen:

18 NΠpNKMpMNp
19 CKMpMNpMq
20 CCpqCNqNp

*

$20\,p/KMpMNp,\ q/Mq \times C19 - 21$
21 CNMqNKMpMNp
$21 + \Pi \times 22$
22 CNMqΠpNKMpMNp
$4\,p/Mp,\ q/\Pi pNKMpMNp \times C22\,q/p - C18 - 23$
23 Mp

Das erzielte Resultat, These *23*, muss als wahr anerkannt werden. Diese These, die in Worten ausgedrückt besagt: „es ist möglich, dass p“, gilt für ein beliebiges p. Wir müssen daher sowohl die Aussage: „es ist möglich, dass 2 eine Primzahl ist“, als auch die Aussage: „es ist möglich, dass 2 keine Primzahl ist“, als wahr anerkennen. Frei gesprochen, auf Grund des Satzes III sind wir dazu geführt worden, dass wir alles als möglich anerkennen müssen. Wenn aber alles möglich ist, so ist nichts unmöglich und nichts notwendig. Denn ist die Aussage „*Mp*“ anerkannt, so bekommt man aus ihr durch Einsetzung die Aussage „*MNp*“, und die Ausdrücke „*NMp*“ sowie „*NMNp*“ müssen als Negationen der vorhergehenden verworfen werden.

Das sind Konsequenzen, die allen unseren Intuitionen zuwidergehen. Doch sehe ich wiederum keine Möglichkeit, den Satz III in der Zeichensprache des erweiterten Aussagenkalküls anders auszudrücken, als in Gestalt der These *17* resp. *18*.

§ 5. Unverträglichkeit der Sätze über modale Aussagen im zweiwertigen Aussagenkalkül. Führten schon die Sätze II und III, einzeln genommen, zu Unannehmlichkeiten, so steigert sich diese Unannehmlichkeit zur Unannehmbarkeit, falls wir die beiden Sätze zusammen betrachten.

In der Tat, wenn wir die These *12*, die aus der symbolischen Fassung des Satzes II sich ergibt, mit der These *23* zusammenstellen:

12 *CMpp*
23 *Mp*

so erhalten wir sofort:

$12 \times C23 - 24$
24 *p*

Gelten daher die Thesen *12* und *23*, so gilt auch eine beliebige Aussage *p*. Wir bekommen somit das widerspruchsvolle System aller Aussagen. Die Sätze II und III sind in ihren symbolischen Darstellungen als Thesen *2* und *18* unvereinbar.

Dasselbe Resultat können wir erreichen, ohne uns der These *19* zu bedienen, die einen Satz der Protothetik voraussetzt. Im nachfolgenden Beweis stützen wir uns nur auf die Thesen *12*, *13* und *20*, sowie auf weitere Hilfsthesen des gewöhnlichen Aussagenkalküls:

25 *CpCqp*
26 *NKpNp*
27 *CCpqCCrsCKprKqs*

*

$27 p/Mp,\ q/p,\ r/MNp,\ s/Np \times C12 - C13 - 28$
28 *CKMpMNpKpNp*
$20 p/KMpMNp,\ q/KpNp \times C28 - C26 - 29$
29 *NKMpMNp*

$25p/NKMpMNp \times C29 - 30$

30 $CqNKMpMNp$

$30 + \Pi \times 31$

31 $Cq\Pi pNKMpMNp$

$31q/CpCqp \times C25 - 32$

32 $\Pi pNKMpMNp$

These *18* und *32* widersprechen einander. Die Sätze II und III sind daher unvereinbar.

Den oben dargestellten Beweis könnte man minder streng in folgender Weise plausibel machen: Wären nach Satz III für eine gewisse Aussage „α" die Ausdrücke „$M\alpha$" und „$MN\alpha$" zugleich wahr, so müssten nach These *12* und *13* auch die Aussagen „α" und „$N\alpha$" zugleich wahr sein. Nun ist das aber nicht möglich, denn „α" und „$N\alpha$" widersprechen einander.

In Anbetracht dieser Tatsache könnte man unter Zugrundelegung des zweiwertigen Aussagenkalküls das Problem der modalen Aussagen auf zweifache Weise lösen: Satz I und die mit ihm zusammenhängenden Thesen der ersten Gruppe (These *1* sowie *7* — *11*) sind unbedingt anzuerkennen; sie wurden auch niemals in Frage gestellt. Von den Sätzen II und III kann nur einer gewählt werden. Entscheidet man sich für den Satz II und die mit ihm zusammenhängenden Thesen der zweiten Gruppe (These *2* sowie *12* — *16*), so werden alle modale Aussagen den nicht-modalen äquivalent, was die Folge nach sich zieht, dass es sich überhaupt nicht lohnt, modale Aussagen in die Logik einzuführen; überdies muss dann auch der höchst intuitive Begriff der beiderseitigen Möglichkeit als widerspruchsvoll abgelehnt werden. Entscheidet man sich dagegen für den Satz III, so ist man genötigt, die paradoxe Konsequenz anzuerkennen, dass alles möglich ist, und unter dieser Bedingung hat es wiederum keinen Sinn, modale Aussagen in die Logik einzuführen; überdies muss man dann auch auf den einleuchtenden Satz II verzichten, um Widersprüche zu vermeiden. Keine von diesen Lösungen kann als befriedigend gelten.

Ein anderes Resultat war auch nicht zu erwarten. Das wird besonders klar, wenn man das System des zweiwertigen Aussagenkalküls mittels der s. g. Matrizen-Methode definiert. Auf Grund dieser Methode wird vorausgesetzt, dass alle Aussagenvariablen nur zwei konstante Werte annehmen können, nämlich „*0*“ oder „das Falsche“ und „*1*“ oder „das Wahre“ Es wird ferner festgestellt, dass: $C00 = C01 = C11 = 1$, $C10 = 0$,. $N0 = 1$ und $N1 = 0$. Die genannten Gleichungen sind in der nebenstehenden Tabelle verzeichnet, die die „Matrix“ des zweiwertigen, auf „*C*“ und „*N*“ aufgebauten Aussagenkalküls darstellt.

C	*0*	*1*	*N*
0	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*

Im zweiwertigen System können nur vier verschiedene Funktionen mit e i n e m Argument gebildet werden. Und zwar, bezeichnet „φ“ einen Funktor, zu dem nur e i n e Aussage als Argument gehört, so können folgende Fälle vorkommen: (1) $\varphi 0 = 0$ und $\varphi 1 = 0$; diese Funktion bezeichnen wir mit „*Fp*“ („*falsum* von *p*“). (2) $\varphi 0 = 0$ und $\varphi 1 = 1$; φp ist mit p äquivalent. (3) $\varphi 0 = 1$ und $\varphi 1 = 0$; das ist die Negation von p, „*Np*“. (4) $\varphi 0 = 1$ und $\varphi 1 = 1$; diese Funktion bezeichnen wir mit „*Vp*“ („*verum* von *p*“).

Das „*Mp*“ muss mit einem dieser vier Fälle identisch sein. Eine jede von den Thesen *1*, *2* und *18* schliesst nun gewisse Fälle aus. Man kann sich leicht überzeugen durch direkte Verifizierung mittels „*0*“ und „*1*“, dass folgende Verhältnisse vorliegen:

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{lll} 1 & CNMpNp & \text{gilt nur für } Mp = p \text{ oder } Mp = Vp. \\ 2 & CNpNMp & \text{„ „ „ } Mp = p \text{ „ } Mp = Fp. \\ 18 & N\Pi pNKMpMNp & \text{„ „ „ } Mp = Vp. \end{array}$$

These *18* verifiziert man auf Grund des Ansatzes: $\Pi p\alpha(p) = K\alpha(0)\alpha(1)$. Man bekommt alsdann:

$$N\Pi pNKMpMNp = NKNKM0MN0NKM1MN1 =$$
$$= NKNKM0M1NKM1M0 = NKNKM0M1NKM0M1 =$$
$$= NNKM0M1 = KM0M1.$$

Die zuletzt angegebene Konjunktion gilt nur unter der Bedingung, dass $M0 = M1 = 1$.

Aus der Zusammenstellung (A) ersieht man sofort, dass Thesen *1* und *2* nur für $Mp = p$ zugleich gelten können, ebenso wie Thesen *1* und *18* nur für $Mp = Vp$. Die Thesen *2* und *18* sind unverträglich, denn es gibt keine Funktion für „*Mp*“, die beide Thesen zugleich verifizieren würde.

§ 6. Modale Aussagen und das dreiwertige System des Aussagenkalküls. Als ich im Jahre 1920 die Unverträglichkeit der überlieferten Sätze über modale Aussagen erkannte[9]), war ich gerade damit beschäftigt, das System des gewöhnlichen „zweiwertigen" Aussagenkalküls mittels der Matrizen-Methode aufzubauen[10]). Ich überzeugte mich damals, dass alle Thesen des gewöhnlichen Aussagenkalküls bewiesen werden können, wenn man voraussetzt, dass die in ihnen enthaltenen Aussagenvariablen nur zwei Werte, „*0*" oder „das Falsche" und „*1*" oder „das Wahre" annehmen dürfen.

Dieser Voraussetzung entspricht nun der Grundsatz, *dass eine jede Aussage entweder wahr oder falsch ist*. Ich möchte diesen Grundsatz kurz den „Zweiwertigkeitssatz" nennen. Zwar wird er manchmal als der Satz vom ausgeschlossenen Dritten bezeichnet; doch finde ich es für besser, diesen letzteren Namen für das bekannte Prinzip der klassischen Logik beizubehalten, dem zufolge zwei kontradiktorische Aussagen nicht zugleich falsch sein können.

Der Zweiwertigkeitssatz ist die tiefste, jedoch schon im Altertum heftig umstrittene Grundlage unserer gesamten Logik. Von Aristoteles gekannt, aber für Aussagen, die auf zukünftige zufällige Ereignisse sich beziehen, bestritten, von den Epikuräern entschieden geleugnet, tritt der Zweiwertigkeitssatz in seiner vollen Schärfe erst bei Chrysippos und den Stoikern auf, und zwar als Prinzip ihrer Dialektik, die den antiken Aussagenkalkül repräsentiert[11]). Der Streit um den Zweiwertigkeits-

---

[9]) Im dem Anm. [1]) zitierten Bericht habe ich den Begriff der beiderseitigen Möglichkeit schärfer gefasst, indem ich annahm, dass die Aussagen: „es ist möglich, dass *p*" und „es ist möglich, dass nicht-*p*", immer zugleich gelten müssen, was in Verbindung mit Sätzen der zwei ersten Gruppen zu mannigfachen Widersprüchen führt. Ich habe dabei den Aristotelischen Begriff der „reinen" Möglichkeit im Auge gehabt. Aristoteles nämlich scheint zwei wesensverschiedene Arten der Möglichkeit unterschieden zu haben: die Möglichkeit im eigentlichen Sinne oder reine Möglichkeit, nach der nur dann etwas möglich ist, wenn es nicht notwendig ist, und die Möglichkeit im uneigentlichen Sinne, die mit der Notwendigkeit verbunden ist und sich aus ihr (laut unserer These *10*) ergibt. Vgl. H. Maier, *Die Syllogistik des Aristoteles*, T. 1, Tübingen 1896, S. 180, 181.

[10]) Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in meinem Artikel *„Logika dwuwartościowa"* *(Zweiwertige Logik)* niedergelegt, der in der poln. philos. Revue *„Przegląd Filozoficzny"*, Jahrg. 23 (Gedenkbuch zu Ehren des Hrn. Prof. Twardowski), Lwów 1921, S. 189—205 erschienen ist.

[11]) Vgl. dazu den Anhang: *Zur Geschichte des Zweiwertikeitssatzes.*

satz hat einen metaphysischen Hintergrund: die Anhänger dieses Satzes sind entschiedene Deterministen, während die Widersacher des Satzes zur indeterministischen Weltanschauung hinneigen [12]). Damit sind wir wieder in den Kreis der Begriffe der Möglichkeit und Notwendigkeit geraten.

Der tiefste Grundsatz der Logik scheint nach alledem nicht ganz evident zu sein. Auf altehrwürdige Beispiele gestützt, die bis Aristoteles hinaufreichen, versuchte ich den Zweiwertigkeitssatz zu überwinden, indem ich mich in nachfolgende Gedankengänge einfühlte:

Ich kann ohne Widerspruch annehmen, dass meine Anwesenheit in Warschau in einem bestimmten Zeitmoment des nächsten Jahres, z. B. mittags den 21 Dezember, heutzutage weder im positiven noch im negativen Sinne entschieden ist. Es ist somit möglich, aber nicht notwendig, dass ich zur angegebenen Zeit in Warschau anwesend sein werde. Unter dieser Voraussetzung kann die Aussage: „ich werde mittags den 21 Dezember nächsten Jahres in Warschau anwesend sein", heutzutage weder wahr noch falsch sein. Denn wäre sie heutzutage wahr, so müsste meine zukünftige Anwesenheit in Warschau notwendig sein, was der Voraussetzung widerspricht; und wäre sie heutzutage falsch, so müsste meine zukünftige Anwesenheit in Warschau unmöglich sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Der betrachtete Satz ist daher heutzutage weder wahr noch falsch und muss einen dritten, von „*0*" oder dem Falschen und von „*1*" oder dem Wahren verschiedenen Wert haben. Diesen Wert können wir mit „$^1/_2$" bezeichnen; es ist eben „das Mögliche", das als dritter Wert neben „das Falsche" und „das Wahre" an die Seite tritt.

Diesem Gedankengang verdankt das dreiwertige System des Aussagenkalküls seine Entstehung. Es hiess nun die Matrix anzugeben, auf deren Grund das neue System der Logik definiert werden könnte. Es war mir sofort klar, dass wenn die Aussage, die meine zukünftige Anwesenheit in Warschau betrifft,

[12]) In der Inaugurationsrede, die ich als Rektor der Warschauer Universität im J. 1922 gehalten habe, versuchte ich das Problem der indeterministischen Weltanschauung auf Grund der dreiwertigen Logik zu lösen. Eine Bearbeitung dieser Rede erscheint demnächst im Druck in polnischer Sprache.

den Wert $^1/_2$ besitzt, so muss auch deren Negation denselben Wert $^1/_2$ haben. Ich erhielt somit die Gleichung: $N^1/_2 = {}^1/_2$. Es mussten noch die fünf Gleichungen für die Implikation bestimmt werden, in denen der Wert $^1/_2$ vorkommt, nämlich: $C0^1/_2$, $C^1/_2 0$, $C^1/_2{}^1/_2$, $C^1/_2 1$ und $C1^1/_2$. Gleichungen, in denen der Wert $^1/_2$ nicht vorkommt, habe ich alle aus dem zweiwertigen System des Aussagenkalküls übernommen, ebenso wie die Werte für „*N0*" und „*N1*". Die gesuchten Gleichungen erhielt ich auf Grund eingehender Überlegungen, die für mich mehr oder minder einleuchtend waren. Auf diese Weise kam ich schliesslich zur Bildung eines dreiwertigen Systems des Aussagenkalküls, das durch die nebenstehende Matrix definiert ist. Das System stammt aus dem Jahre 1920 [13]).

C	*0*	$^1/_2$	*1*	*N*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
$^1/_2$	$^1/_2$	*1*	*1*	$^1/_2$
1	*0*	$^1/_2$	*1*	*0*

§ 7. **Definition des Begriffs der Möglichkeit.** Auf Grund dieses Systems versuchte ich nunmehr eine solche Definition des Begriffs der Möglichkeit zu konstruieren, die mir gestatten würde, alle für modale Aussagen überlieferten intuitiven Sätze widerspruchsfrei zu begründen. Ich berücksichtigte dabei den Begriff der „reinen" Möglichkeit, und fand auch bald eine Definition, die mich befriedigte [14]). Später jedoch kam ich zu der

---

[13]) Über dieses System habe ich am 19 Juni 1920 in der „Polnischen Philosophischen Gesellschaft" zu Lwów einen Bericht erstattet, dessen wesentlicher Inhalt im „*Ruch Filozoficzny*", Jahrg. V, Nr. 9, S. 170, Lwów 1920, erschienen ist.

[14]) Die gefundene Definition war ziemlich kompliziert und lautete folgendermassen:

$D^* 1 \qquad Mp = AEpNp\prod qNCpKqNq$

Das heisst: Der Ausdruck: „es ist möglich, dass *p*" bedeutet soviel als: „entweder sind *p* und nicht-*p* einander äquivalent oder es gibt kein Paar kontradiktorischer Aussagen, die aus *p* sich ergeben". „*A*" ist das Zeichen der Alternative, „*E*" das Zeichen der Äquivalenz. In der dreiwertigen Logik gelten folgende Definitionen:

$D^* 2 \qquad Apq = CCpqq$

$D^* 3 \qquad Kpq = NANpNq$

$D^* 4 \qquad Epq = KCpqCqp$

Einleuchtender ist die Definition der „Unmöglichkeit":

$D^* 5 \qquad NMp = KNEpNp\sum qCpKqNq$

Das heisst: Der Ausdruck: „es ist nicht möglich, dass *p*" bedeutet soviel als: „*p* und nicht-*p* sind nicht einander äquivalent und es gibt ein Paar kontradiktorischer Aussagen, die aus *p* sich ergeben".

Überzeugung, dass dem engeren Begriff der reinen Möglichkeit der allgemeinere Begriff der Möglichkeit überhaupt vorzuziehen sei, und ich bespreche daher im Folgenden eine Definition dieses letzteren Begriffs, die den vorher in den Sätzen I — III gestellten Anforderungen vollkommen entspricht.

Die hier besprochene Definition fand Hr. Tarski noch im Jahre 1921, als er als Student der Warschauer Universität an meinen Seminarübungen teilnahm. Die Definition des Hrn. Tarski ist die folgende:

$D2 \; Mp = CNpp$

In Worten ausgedrückt, heisst das: „es ist möglich, dass p" bedeutet soviel als: „wenn nicht-p, so p".

In den intuitiven Sinn dieser Definition muss man sich einfühlen. Der Ausdruck „$CNpp$" ist auf Grund der dreiwertigen Matrix dann und nur dann falsch, wenn „p" das Falsche ist. Sonst ist „$CNpp$" wahr. Wir bekommen somit die Gleichungen:

$$M0 = 0, \qquad M^1/_2 = 1, \qquad M1 = 1.$$

Wenn also irgend eine Aussage „α" falsch ist, dann ist auch die Aussage: „es ist möglich, dass α" falsch. Ist aber „α" wahr oder hat es den dritten Wert, „das Mögliche", dann ist die

---

Aus D^*1 bekommt man für „M" folgende Gleichungen: $M0 = 0$, $M^1/_2 = 1$, $M1 = {}^1/_2$. Auf Grund dieser Gleichungen sowie auf Grund der Matrix des dreiwertigen Systems des Aussagenkalküls können leicht folgende Thesen verifiziert werden:

(1) $CpCpNMNp$
(2) $CNpCNpNMp$
(3) $CMpCMpMNp$
(4) $CMNpCMNpMp$
(5) $CNMpCNMpNp$
(6) $CNMNpCNMNpp$

These (5) erlaubt uns gemäss Satz I auf Grund der anerkannten Aussage: „es ist nicht möglich, das α" („$NM\alpha$"), die Aussage „nicht-α" („$N\alpha$") durch zweimalige Abtrennung zu gewinnen. Umgekehrt bekommt man nach These (2) und gemäss Satz II auf Grund der anerkannten Aussage „nicht-α" („$N\alpha$") durch zweimalige Abtrennung die Aussage: „es ist nicht möglich, das α" („$NM\alpha$"). Ist ferner eine von den Aussagen: „es ist möglich, dass α" („$M\alpha$") und „es ist möglich, dass nicht-α" („$MN\alpha$") anerkannt, so muss auch laut These (3) und (4) die andere von diesen Aussagen anerkannt sein. Aus anerkannten Aussagen „α" und „es ist notwendig, dass α", kann auf die Aussage „es ist möglich, dass α" nicht geschlossen werden; denn wir haben hier eben mit der „reinen" Möglichkeit zu tun, die mit der Notwendigkeit nicht vereinbar ist. Vgl. Anm. [9]).

Aussage: „es ist möglich, dass α“ wahr. Das stimmt mit unseren Intuitionen ganz gut überein.

In der zweiwertigen Logik ist der Ausdruck „*CNpp*“ dem Ausdruck „*p*“ äquivalent; nicht aber im dreiwertigen Aussagenkalkül. Und zwar ist die im zweiwertigen Aussagenkalkül gültige These „*CCNppp*“, die in meinem System des gewöhnlichen Aussagenkalküls als Axiom auftritt[15]), im dreiwertigen System für $p = 1/2$ ungültig. Über die These „*CCNppp*“ hat Vailati eine interessante Monographie verfasst[16]), aus der hervorgeht, dass schon Euklides diese These zum Beweis eines seiner Theoreme verwendet hatte, ohne sie ausdrücklich formuliert zu haben[17]). Erst Clavius, ein Kommentator des Euklides aus der zweiten Hälfte des XVI Jahrhunderts, Mitglied des Jesuitenordens und Konstruktor des Gregorianischen Kalenders, lenkte seine Aufmerksamkeit auf die besagte These[18]). Seit dieser Zeit scheint sie in gelehrten Jesuitenkreisen unter dem Namen „*consequentia mirabilis*“ eine gewisse Popularität erlangt zu haben[19]). Insbesondere war für die These „*CCNppp*“ der be-

[15]) Vgl. „*Elementy logiki matematycznej*“ (*Elemente der mathematischen Logik*, eine litographierte Ausgabe meiner im Herbsttrimester 1928/29 an der Universität Warszawa gehaltenen Vorlesungen, bearbeitet von M. Presburger) Warszawa 1929, S. 45.

[16]) *Scritti di G. Vailati*, Leipzig-Firenze 1911. *CXV. A proposito d'un passo del Teeteto e di una dimostrazione di Euclide*, S. 516—527.

[17]) Vgl. Vailati, l. c. S. 518 ff. — Es scheint Vailati entgangen zu sein, dass die erwähnte These schon den Stoikern bekannt war, wenn auch nicht in ihrer reinen Form. Wir lesen nämlich bei Sextus Empiricus *adv. math.* VIII. 292: εἰ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον· εἰ οὐ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον· ἤτοι τὸ πρῶτον ἢ οὐ τὸ πρῶτον· τὸ πρῶτον ἄρα. Werden in diesem Schema die evidenten Prämissen: εἰ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον sowie ἤτοι τὸ πρῶτον ἢ οὐ τὸ πρῶτον gestrichen, so bekommen wir die Konsequenz: εἰ οὐ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον· τὸ πρῶτον ἄρα, die der These „*CCNppp*“ entspricht.

[18]) Vgl. Vailati, l. c. S. 521.

[19]) Den Namen „*consequentia mirabilis*“ für die erwähnte These finde ich in Werken polnischer Jesuiten. So schreibt z. B. Adam Krasnodębski, *Philosophia Aristotelis explicata*, Varsaviae 1676, *Dialecticae Prolegomenon* 21, folgendes: *Artificium argumentandi per consequentiam mirabilem in hoc positum est (uti de re speculativa optime in Polonia meritus R. P. Tho. Młodzianowski Tr. I de Poenit. disp. 1. quae. 1. difficul. 1 nr. 20 refert), ut ex propositione quam tuetur respondens, ab argumentante eliciatur contradictoria.*

kannte Jesuit Gerolamo S a c c h e r i so sehr eingenommen, dass er versuchte, auf Grund dieser These das Euklidische Postulat von den Parallellen zu beweisen. Der Beweis misslang, aber S a c c h e r i erwarb sich den Namen eines Vorläufers der nicht-euklidischen Geometrie [20]).

Die These „*CCNppp*" besagt, dass wenn für eine gewisse Aussage, sagen wir „α", die Implikation „$CN\alpha\alpha$" gilt, dann gilt auch „α". Die Implikation „wenn nicht-α, so α" bedeutet zwar nicht dasselbe, wie der Ausdruck: „aus nicht-α folgt α"; doch schliesst der allgemeinere Begriff der Implikation den spezielleren Fall des Folgens in sich ein. Kann also aus einer Aussage „nicht-α" die Aussage „α" gefolgert werden, so ist „α" wahr. Es wäre jedoch nicht richtig mit S a c c h e r i anzunehmen, dass die Tatsache: „aus nicht-α folgt α" die Aussage „α" zu einer „*prima veritas*" stempelt [21]). Im Gegenteil, die These „*CCNppp*" mutet uns geradezu paradox an, worauf auch ihr Name „*consequentia mirabilis*" hinzudeuten scheint. E i n e s ist nur sicher: k a n n irgend eine Aussage aus ihrem kontradiktorischen Gegenteil gefolgert werden, so ist sie gewiss nicht falsch, also auch nicht unmöglich. Sie ist eben m ö g l i c h, was gerade die Definition des Hrn. T a r s k i feststellt. Diese Definition wird vielleicht noch einleuchtender erscheinen, wenn sie auf den Begriff der Notwendigkeit angewendet wird. Wir bekommen nämlich im Einklang mit *D2*:

$$D3\ NMNp = NCpNp$$

Das heisst: „es ist notwendig, dass p" bedeutet soviel als: „es ist nicht wahr, dass wenn p, so nicht-p". Wir können also, frei gesprochen, von einer Aussage „α" dann und nur dann behaupten, dass sie notwendig ist, wenn ihre eigene Negation in ihr nicht enthalten ist.

Ohne übrigens auf den intuitiven Charakter der oben angegebenen Definition Nachdruck zu legen, werden wir jedenfalls

---

[20]) Vgl. V a i l a t i, l. c. *CIX. Di un'opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri („Logica demonstrativa"* 1697), S. 477—484.

[21]) Vgl. V a i l a t i, l. c. S. 526, wo folgende Worte S a c c h e r i's zitiert sind: *Nam hic maxime videtur esse cujusque primae veritatis veluti character ut non nisi exquisita aliqua redargutione ex suo ipso contradictorio assumpto ut vero illa ipsi sibi tandem restitui possit. (Euclides ab omni naevo vindicatus,* pag. 99).

anerkennen müssen, dass jene Definition allen in den Sätzen I—III gestellten Anforderungen entspricht, und zwar, wie Hr. T a r s k i nachgewiesen hat, dass es die e i n z i g e im dreiwertigen System mögliche Definition ist, die jene Bedingungen erfüllt. Wir gehen nunmehr zum Nachweis dieses letzteren Satzes über.

§ 8. Konsequenzen der Definition des Begriffs der Möglichkeit. Es ergibt sich zunächst, dass auf Grund der Definition *D2* alle Thesen der ersten Gruppe, d. h. These *1*, die dem Satz I entspricht, sowie Thesen *7 — 11*, verifiziert sind. Im dreiwertigen Aussagenkalkül gilt nämlich die These:

T1 *CpCqp*

Wir bekommen somit:

T1q/Np × *T2*

T2 *CpCNpp*

T2.D2 × *T3*

T3 *CpMp*

In der Beweiszeile, die zur These *T3* gehört, ist eine Schlussregel angewendet, die uns erlaubt, die rechte Seite einer Definition durch ihre linke Seite zu vertreten. Da im dreiwertigen Aussagenkalkül sowohl alle Transpositionsgesetze als auch das Prinzip des Syllogismus richtig sind, so erhalten wir aus *T3* alle übrigen Thesen der ersten Gruppe. Alle diese Thesen sind vollkommen evident.

Die Thesen der zweiten Gruppe sind nicht verifiziert. Nicht alle von diesen Thesen sind übrigens evident. Doch sind zwei von ihnen, von denen eine dem Satz II entspricht, im gewissen Sinne gültig, wenn auch nicht als einfache Implikationen. Es gelten nämlich auf Grund der Definition *D2* im dreiwertigen Aussagenkalkül die Sätze:

CpCpNMNp und *CNpCNpNMp*,

obwohl die Ausdrücke:

CpNMNp und *CNpNMp*

nicht gültig sind. Das kommt daher, dass im dreiwertigen Aussagenkalkül die These „*CCpCpqCpq*" nicht gültig ist und deshalb die Ausdrücke „$C\alpha C\alpha\beta$" sowie „$C\alpha\beta$" nicht einander äquivalent sind, wie im gewöhnlichen zweiwertigen Aussagenkalkül. Die oben erwähnten Sätze können auf Grund folgender Hilfsthesen, die auch im dreiwertigen Aussagenkalkül richtig sind, bewiesen werden:

$T4 \quad CpCCpqq$
$T5 \quad CpCCNNpqq$
$T6 \quad CCpCqrCpCNrNq$
$T7 \quad CCpCqNrCpCrNq$

*

$T6p/Np,\ q/CNpp,\ r/p \times CT4p/Np,\ q/p\ —\ T8$
$T8 \quad CNpCNpNCNpp$
$T8\,.\,D2 \times T9$
$T9 \quad CNpCNpNMp$
$T7q/CNNpNp,\ r/p \times CT5q/Np\ —\ T10$
$T10 \quad CpCpNCNNpNp$
$T10\,.\,D2p/Np \times T11$
$T11 \quad CpCpNMNp$

Ist nun die Aussage „nicht-α“ anerkannt, so ergibt sich aus ihr gemäss These *T9* durch zweimalige Abtrennung die Aussage: „es ist nicht möglich, dass α“; und ist die Aussage „α“ anerkannt, so ergibt sich aus ihr gemäss These *T11* ebenfalls durch zweimalige Abtrennung die Aussage: „es ist nicht möglich, dass nicht-α“, was soviel bedeutet als: „es ist notwendig, dass α“. Man kann demnach richtig schliessen: „Ich habe kein Geld in der Tasche; also ist es nicht möglich, dass ich Geld in der Tasche habe“. Oder: „Ich bin heute abends zu Hause; also ist es notwendig, dass ich heute abends zu Hause bin“. Der einleuchtende Satz II ist als gültig erwiesen und zwar in einer solchen Weise, dass auch der Ausspruch des Aristoteles, dem zufolge nicht alles Seiende notwendig und nicht alles Nichtseiende unmöglich ist, gewahrt bleibt. Die Ausdrücke nämlich „α“ und „$NMN\alpha$“, sowie „$N\alpha$“ und „$NM\alpha$“ sind nicht einander äquivalent. Es kann auch nicht aus dem Möglichsein auf das Sein geschlossen werden, denn weder „$CMpp$“ noch „$CMpCMpp$“ sind im dreiwertigen Aussagenkalkül gültig, sofern „Mp“ dasselbe bedeutet, wie „$CNpp$“.

Endlich ist auch der Satz III verifiziert in Gestalt von Thesen:

$T12 \quad \Sigma pKMpMNp$

oder

$T13 \quad N\Pi pNKMpMNp$

wobei folgende Definitionen angenommen werden:

D4 $Apq = CCpqq$
D5 $Kpq = NANpNq$.

Thesen *T12* und *T13* lassen sich am leichtesten verifizieren, wenn man die Matrix des dreiwertigen Aussagenkalküls und die für „*M*" im vorigen Paragraphen angegebenen Gleichungen zu Hilfe nimmt. Man bekommt nämlich für $p = 1/2$:

$$KM^1/_2MN^1/_2 = K1M^1/_2 = K11 = 1.$$

Es gibt demnach einen Wert für p, für welchen der Ausdruck „*KMpMNp*" richtig ist.

Als Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse können wir nunmehr den folgenden Satz aufstellen:

Unter Zugrundelegung der Definition „Mp = CNpp" sind im dreiwertigen Aussagenkalkül alle für modale Aussagen überlieferten Sätze widerspruchsfrei erwiesen.

Dieses Resultat scheint mir im hohen Grade bemerkenswert zu sein. Es hat nämlich den Anschein, als ob unsere, mit den Begriffen der Möglichkeit und Notwendigkeit verbundenen Intuitionen auf ein logisches System hinweisen würden, das von der gewöhnlichen, auf dem Zweiwertigkeitssatz gegründeten Logik grundsätzlich verschieden ist.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die von Hrn. Tarski angegebene Definition im dreiwertigen Aussagenkalkül die einzige ist, die den in den Sätzen I—III gestellten Anforderungen genügt. Dieser Beweis kann leicht in folgender Weise geführt werden: Da laut Satz I aus der Aussage „$NM\alpha$" die Aussage „$N\alpha$" folgt, so muss auch auf Grund des Transpositionsgesetzes aus „α" die Aussage „$M\alpha$" folgen. Ist daher $\alpha = 1$, so ist auch $M\alpha = M1 = 1$. Wir erhalten somit die Gleichung: $M1 = 1$. Andererseits folgt gemäss Satz II aus der Aussage „$N\alpha$" die Aussage „$NM\alpha$". Ist nun $\alpha = 0$, oder $N\alpha = 1$, so ist auch $NM\alpha = NM0 = 1$. Nun kann $NM0$ nur unter dieser Bedingung gleich 1 sein, wenn $M0 = 0$ ist. Wir bekommen somit die zweite Gleichung: $M0 = 0$. Schliesslich muss auch der Satz III: „$\Sigma pKMpMNp$" wahr sein; für $p = 0$ und $p = 1$ ist er aber nicht wahr, denn in beiden Fällen ist eines von den Gliedern der Konjunktion falsch, also muss auch die Konjunktion selbst falsch sein. Wir müssen daher annehmen, dass $M^1/_2 = 1$ ist, denn nur dann ist die Konjunktion „*KMpMNp*" für $p = 1/2$ gleich 1. Damit aber ist die

Funktion „*Mp*“ im dreiwertigen Aussagenkalkül vollständig bestimmt und kann nur durch „*CNpp*“ oder eventuell durch einen anderen, mit „*CNpp*“ äquivalenten Ausdruck definiert werden.

§ 9. Philosophische Bedeutung der mehrwertigen Systeme des Aussagenkalküls. Neben dem dreiwertigen System des Aussagenkalküls erfand ich im Jahre 1922 eine ganze Klasse eng mit einander verbundener Systeme, die ich mittels der Matrizen-Methode auf folgende Weise definierte:

Bezeichnen „*p*“ und „*q*“ gewisse Zahlen des Intervalls (0 - 1), so ist:

$$Cpq = 1 \qquad \text{für} \qquad p \leqslant q,$$
$$Cpq = 1 - p + q \qquad \text{„} \qquad p > q,$$
$$Np = 1 - p.$$

Werden aus dem Zahlenintervall (0 - 1) nur die Grenzwerte *0* und *1* ausgewählt, so stellt die obige Definition die Matrix des gewöhnlichen zweiwertigen Aussagenkalüls dar. Wird ausserdem noch die Zahl $^1/_2$ hinzugenommen, so erhalten wir die Matrix des dreiwertigen Systems. In ähnlicher Weise können 4, 5,... *n*-wertige Systeme gebildet werden.

Es war mir von vornherein klar, dass unter allen mehrwertigen Systemen nur zwei eine philosophische Bedeutung beanspruchen können: das dreiwertige und das unendlichwertige System. Denn werden die von „*0*“ und „*1*“ verschiedenen Werte als „das Mögliche“ gedeutet, so können aus guten Gründen nur zwei Fälle unterschieden werden: entweder nimmt man an, dass das Mögliche keine Gradunterschiede aufweist, und dann erhält man das dreiwertige System; oder man setzt das Gegenteil voraus, und dann ist es am natürlichsten ebenso wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzunehmen, dass unendlich viele Gradunterschiede des Möglichen bestehen, was zum unendlichwertigen Aussagenkalkül führt. Ich glaube, dass gerade dieses letztere System vor allen anderen den Vorzug verdient. Leider ist dieses System noch nicht genau untersucht; insbesondere ist auch das Verhältnis des unendlichwertigen Systems zur Wahrscheinlichkeitsrechnung noch nicht geklärt [22]).

---

[22]) Das von mir in deutscher Sprache verfasste Werkchen: *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Krakau 1913, Akad. d. Wiss., versucht den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf eine ganz andere Idee zu gründen.

Wird im unendlichwertigen System die von Hrn. Tarski aufgestellte Definition der Möglichkeit angenommen, so ergeben sich aus ihr, ebenso wie im dreiwertigen System, alle im vorigen Paragraphen angeführten Thesen. Die evidenten Sätze I—III sind demnach auch im unendlichwertigen Aussagenkalkül verifiziert.

Das dreiwertige System ist ein echter Teil des zweiwertigen, ebenso wie das unendlichwertige System ein echter Teil des dreiwertigen ist. Das heisst, alle Thesen des drei- und unendlichwertigen Systems (ohne Quantifikatoren) sind im zweiwertigen System gültig; es gibt jedoch Thesen, die im zweiwertigen Aussagenkalkül gültig sind ohne im dreiwertigen System zu gelten; und es gibt wiederum Thesen des dreiwertigen Systems, die im unendlichwertigen System nicht gültig sind. Handelt es sich aber um die bekanntesten Thesen des Aussagenkalküls, ich meine z. B. diejenigen, die in dem Werke *„Principia mathematica"* zusammengestellt sind[23]), dann ist der Unterschied zwischen dem dreiwertigen und dem unendlichwertigen Aussagenkalkül minimal. Ich finde nämlich in jenem Werke keine einzige These, die im dreiwertigen Aussagenkalkül gültig wäre, ohne auch im unendlichwertigen System gültig zu sein.

Die wichtigsten Thesen des zweiwertigen Aussagenkalküls, die im drei- und unendlichwertigen System nicht gelten, betreffen gewisse apagogische Schlussweisen, die seit jeher verdächtig waren. Beispielsweise mögen folgende, in mehrwertigen Systemen nicht gültige Thesen angeführt werden: „*CCNppp*", „*CCpNpNp*", „*CCpqCCpNqNp*", „*CCpKqNqNp*", „*CCpEqNqNp*". Die erste von diesen Thesen wurde schon früher besprochen; die zweite unterscheidet sich von der ersten nur durch die Umstellung der Negation. Die zwei weiteren Thesen berechtigen uns eine Aussage „$N\alpha$" für wahr zu halten, wenn aus ihrem kontradiktorischen Gegenteil „α" zwei einander widersprechende Aussagen ableitbar sind. Die letzte These besagt, dass eine Aussage, aus der die Äquivalenz zweier kontradiktorischer Aussagen folgt, unrichtig ist. Es gibt in der Mathematik Schlussweisen, unter anderen gehört zu ihnen das s. g. „Diagonalverfahren" in der Men-

---

[23]) Vgl. A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia mathematica, Cambridge 1910.* Vol. I, S. 94—131.

gentheorie, die auf solchen, im drei- und unendlichwertigen System des Aussagenkalküls nicht anerkannten Thesen beruhen. Es wäre interessant nachzuforschen, ob mathematische Theoreme, die auf dem Diagonalverfahren gegründet sind, auch ohne derartige Thesen des Aussagenkalküls bewiesen werden können.

Sind mehrwertige Systeme des Aussagenkalküls nur Fragmente des gewöhnlichen Aussagenkalküls, so ändert sich die Sachlage gänzlich, wenn die genannten Systeme durch Hinzufügung des universalen Quantifikators erweitert werden. In erweiterten mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls gibt es Thesen, die im zweiwertigen System nicht gültig sind. *T13* kann als Beispiel einer solchen These dienen. Wird in *T13* der Ausdruck „*Mp*" gemäss *D2* durch „*CNpp*" und „*MNp*" durch „*CNNpNp*" ersetzt, so erhalten wir die These:

T14 *N*Π*pNKCNppCNNpNp*,

die im zweiwertigen Aussagenkalkül falsch ist. Das dreiwertige System des Aussagenkalküls mit Quantifikatoren, das dank den Forschungen der Hrn. Hrn. Tarski und Wajsberg auch mittels der axiomatischen Methode dargestellt werden kann, ist das einfachste Beispiel eines widerspruchsfreien logischen Systems, das von dem gewöhnlichen zweiwertigen System des Aussagenkalküls ebenso verschieden ist, wie irgend ein System der nichteuklidischen Geometrie von der euklidischen.

Ich glaube die Behauptung aufstellen zu dürfen, dass das erwähnte System das erste vom gewöhnlichen Aussagenkalkül verschiedene System ist, das eine intuitive Basis aufzuweisen vermag. Das Hauptziel der vorliegenden Mitteilung war eben den Nachweis zu liefern, dass diese intuitive Basis in den für modale Aussagen evidenten Sätzen I—III besteht, die in der gewöhnlichen Logik ohne Widerspruch nicht vereinbar sind. Zwar hat schon Hr. Post mehrwertige Systeme des Aussagenkalküls von einem rein formalen Standpunkt untersucht, doch hat er sie logisch nicht zu deuten vermocht [24]). Die bekannten Versuche Hrn. Brouwer's, der die Allgemeingültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten bestreitet und auch sonst

[24]) Vgl. E. L. Post. *Introduction to a general theory of elementary propositions. Am. Journ. of Math.*, Vol. XLIII, 1921, S. 182: *...the highest dimensioned intuitional proposition space is two.*

verschiedene Thesen des gewöhnlichen Aussagenkalküls verwirft, haben bisher zu einem intuitiv begründeten System nicht geführt; das sind nur Bruchstrücke eines Systems, dessen Konstruktion und Bedeutung noch völlig im Unklaren liegt [25]).

Es wäre vielleicht nicht richtig, die von mir aufgestellten mehrwertigen Systeme des Aussagenkalküls „nicht-aristotelische" Logik zu nennen. Aristoteles hat gerade als erster den Gedanken gefasst, dass der Zweiwertigkeitssatz für gewisse Aussagen nicht gültig sein könnte. Die neu entstandene Logik könnte man eher als die „nicht-chrysippische" bezeichnen. Chrysippos nämlich scheint der erste Logiker gewesen zu sein, der den Satz, dass eine jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, mit vollem Bewusstsein aufgestellt und hartnäckig verteidigt hat, und dieser Chrysippische Satz bildet bis auf den heutigen Tag die tiefste Grundlage unserer gesamten Logik.

Es ist nicht leicht vorauszusehen, welchen Einfluss die Entstehung nicht-chrysippischer Systeme der Logik auf die philosophische Spekulation ausüben wird. Es dünkt mich jedoch, dass die philosophische Bedeutung der hier dargestellten Systeme der Logik mindestens ebenso gross sein dürfte, als die Bedeutung der nicht-euklidischen Systeme der Geometrie.

Anhang: **Zur Geschichte des Zweiwertigkeitssatzes.** Den Zweiwertigkeitssatz, d. h. den Satz, dem zufolge eine jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, hat schon Aristoteles gekannt, indem er die Aussage, „ἀπόφανσις", geradezu als eine Rede charakterisierte, die entweder wahr oder falsch ist. Wir lesen nämlich in *de interpr.* 4. 17a 2: ἀποφαντικὸς δὲ (scil. λόγος; λόγος ἀποφαντικός = ἀπόφανσις) οὐ πᾶς, ἀλλ' ἐν ᾧ τὸ ἀληθεύειν ἢ ψεύδεσθαι ὑπάρχει. Aristoteles lässt jedoch diesen Satz nicht für Aussagen gelten, die zukünftige zufällige Ereignisse betreffen. Dieser Untersuchung ist das berühmte Kap. 9 der *Hermeneutik* gewidmet. Aristoteles glaubt, dass der Zweiwertigkeitssatz den Determinismus als notwendige Folge nach sich zieht und diese Folge mag er nicht anerkennen. Deshalb muss er den Zweiwertigkeitssatz einschränken. Doch tut er es nicht genug entschieden und daher ist seine Ausdrucksweise nicht ganz klar. Die wichtigste Stelle lautet folgendermassen: *De interpr.* 9. 19a 36: τούτων γὰρ (scil. τῶν μὴ ἀεὶ ὄντων ἢ μὴ ἀεὶ μὴ ὄντων) ἀνάγκη μὲν θάτερον μόριον

[25]) Vgl. z. B.: L. F. J. Brouwer. *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinigung,* Bd. 33, 1925, S. 251 ff. *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik.* I. *Math. Ann.* Bd. 93, 1925, S. 244 ff.

τῆς ἀντιφάσεως ἀληθὲς εἶναι ἢ ψεῦδος, οὐ μέντοι τόδε ἢ τόδε ἀλλ' ὁπότερ' ἔτυχε, καὶ μᾶλλον μὲν ἀληθῆ τὴν ἑτέραν, οὐ μέντοι ἤδη ἀληθῆ ἢ ψευδῆ. Eine andere Stelle der *Hermeneutik*, nämlich 18b 8: τὸ γὰρ ὁπότερ' ἔτυχεν οὐδὲν μᾶλλον οὕτως ἢ μὴ οὕτως ἔχει ἢ ἕξει, gab den Stoikern Anlass zu behaupten, dass Aristoteles den Zweiwertigkeitssatz leugnet. Wir finden nämlich bei Boëthius, *ad Arist. de interpr.* ed. secunda, rec. Meiser p. 208 (ed. Bas. p. 364), die Stelle: *putaverunt autem quidam, quorum Stoici quoque sunt, Aristotelem dicere in futuro contingentes nec veras esse nec falsas.* Diesem Einwand gegenüber versuchten die Peripatetiker den Aristoteles zu verteidigen, indem sie eine beim Stagiriten gar nicht vorhandene „Distinktion” zwischen dem *„definite verum”* und *„indefinite verum”* ausklügelten. So schreibt z. B. Boëthius, *ad Arist. de interpr.* ed. prima, rec. Meiser p. 125: *manifestum esse non necesse esse omnes adfirmationes et negationes definite veras esse (sed deest „definite” atque ideo subaudiendum est).* Der Satz in Parenthesen ist beinahe wörtlich aus griechischen Kommentatoren entnommen. Vgl. Ammonius, *in librum Arist. de interpr.* ed. Busse p. 141, 20: προσυπακουομένου δηλονότι τοῦ „ἀφωρισμένως”.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Epikuräer, die einer indeterministischen Weltanschauung huldigten, den Aristotelischen Gedanken sich zu eigen machten. Eine der wichtigsten Stellen, die davon zeugt, ist uns von Cicero überliefert, *de fato* 37: *Necesse est enim in rebus contrariis duabus (contraria autem hoc loco ea dico, quorum alterum ait quid, alterum negat) ex his igitur necesse est, invito Epicuro, alterum verum esse, alterum falsum: ut „sauciabitur Philocteta”, omnibus ante seculis verum fuit, „non sauciabitur”, falsum. Nisi forte volumus Epicureorum opinionem sequi, qui tales enuntiationes nec veras nec falsas esse dicunt: aut, cum id pudet, illud tamen dicunt, quod est impudentius, veras esse ex contrariis disiunctiones; sed, quae in his enuntiata essent, eorum neutrum esse verum.* Cicero bekämpft diese Ansicht und fährt dann weiter fort: *Tenebitur ergo id quod a Chrysippo defenditur: omnem enuntiationem aut veram aut falsam esse.* Dass nicht allein die Epikuräer die Ansicht des Aristoteles teilten, ergibt sich aus einer Stelle des Simplicius, *in Arist. cat.* ed. Kalbfleisch, p. 406 (f. 103A ed. Bas.): Ὁ δὲ Νικόστρατος αἰτιᾶται κἀνταῦθα λέγων μὴ ἴδιον εἶναι τῶν κατὰ ἀντίφασιν ἀντικειμένων τὸ διαιρεῖν τὸ ἀληθὲς καὶ τὸ ψεῦδος. — — αἱ γὰρ εἰς τὸν μέλλοντα χρόνον ἐγκεκλιμέναι προτάσεις οὔτε ἀληθεῖς εἰσιν οὔτε ψευδεῖς διὰ τὴν τοῦ ἐνδεχομένου φύσιν· οὔτε γὰρ τὸ „ἔσται ναυμαχία” ἀληθὲς οὔτε τὸ „οὐκ ἔσται”, ἀλλ' ὁπότερον ἔτυχεν. Das letztere Beispiel ist aus Aristoteles *de interpr.* 9, 19a 30 entlehnt. Über Nikostratos vgl. Prantl, Bd. I, S. 618—620.

Im bewussten Gegensatz dazu haben die Stoiker, als ausgesprochene Deterministen, und vor allem Chrysippos, den Zweiwertigkeitssatz als den fundamentalen Grundsatz ihrer Dialektik aufgestellt. Als Belegstellen mögen folgende Zitate angeführt werden, die aus der Sammlung J. v. Arnim's: *Stoicorum veterum fragmenta*, vol. II, entnommen sind: 1) Pag. 62, fr. 193: *Diocles Magnes apud Diog. Laërt.* VII 65: ἀξίωμα δέ ἐστιν ὅ ἐστιν ἀληθὲς ἢ ψεῦδος.

2) Pag. 63, fr. 196: *Cicero Acad. Pr.* II 95: *Fundamentum dialecticae est, quidquid enuntietur* (*id autem appellant* ἀξίωμα —) *aut verum esse aut falsum.* 3) Pag. 275, fr. 952: *Cicero de fato* 20: *Concludit enim* C h r y s i p p u s *hoc modo*: *„Si est motus sine causa, non omnis enuntiatio, quod* ἀξίωμα *dialectici appellant, aut vera aut falsa erit; causas enim efficientis quod non habebit, id nec verum nec falsum erit. Omnis autem enuntiatio aut vera aut falsa est. Motus ergo sine causa nullus est.* 21. *Quod si ita est, omnia, quae fiunt, causis fiunt antegressis. Id si ita est, fato omnia fiunt. Efficitur igitur fato fieri, quaecunque fiant".* — — — *Itaque contendit omnis nervos* C h r y s i p p u s *ut persuadeat omne* ἀξίωμα *aut verum esse aut falsum.*

Ich habe absichtlich die vielen Zitate zusammengestellt, denn obwohl sie eine der wichtigsten Fragen der Logik beleuchten, so scheint es trotzdem, dass viele der oben angeführten Stellen den Historikern der Logik entweder gar nicht bekannt waren oder wenigstens von ihnen nicht gehörig gewürdigt wurden. Der Grund davon liegt meiner Ansicht darin, dass die Geschichte der Logik bisher von Philosophen behandelt wurde, die keine genügende logische Vorbildung hatten. Übrigens kann daraus den älteren Autoren kein Vorwurf gemacht werden, denn eine wissenschaftliche Logik besteht erst seit wenigen Jahrzehnten. *Die Geschichte der Logik muss neu geschrieben werden,* und zwar von einem Historiker, der die moderne mathematische Logik gründlich beherrscht. So verdienstvoll auch das Werk P r a n t l's als eine Sammlung von Quellen und Materialien ist, vom l o g i s c h e n Standpunkt hat es kaum einen Wert. Zur Beleuchtung dieser Behauptung mag nur e i n e s angeführt werden. Sowohl P r a n t l, als auch alle späteren Autoren, die über die Logik der Stoa geschrieben haben, wie Z e l l e r oder B r o c h a r d, haben diese Logik gänzlich missverstanden. Für einen jeden Kenner der mathematischen Logik ist ohne weiteres klar, *dass die stoische Dialektik die antike Form des modernen Aussagenkalküls ist* [26]). Nun unterscheidet sich aber der Aussagenkalkül, in dem nur Aussagenvariablen vorkommen, von der Aristotelischen Syllogistik, die nur mit Namenvariablen operiert, nicht weniger, als die Arithmetik von der Geometrie. Die stoische Dialektik ist keine Fortbildung oder Ergänzung der Aristotelischen Logik, sondern eine Leistung, die der Aristotelischen ebenbürtig an die Seite tritt. Es scheint nach alledem billig zu sein, von einem Historiker der Logik zu verlangen, dass er auch etwas von der Logik versteht; es reicht überhaupt heutzutage bei weitem nicht aus, nur Philosoph zu sein, um über die Logik mitreden zu dürfen.

---

[26]) Diesen Gedanken habe ich schon im J. 1923 in einem Vortrag ausgesprochen, den ich auf dem I Kongress der polnischen Philosophen zu Lwów gehalten habe. Eine kurze Zusammenfassung dieses Vortrags ist im *„Przegląd Filozoficzny"*, Jahrg. 30, Warszawa 1927, S. 278 erschienen.

Mieczysław Wolfke.

Teorja wielokrotnych asocjacyj w ciekłych dielektrykach.

Komunikat zgłoszony dn. 27 marca 1930 r.

Przebieg polaryzacji dielektrycznej w roztworach dipolowych w funkcji od ich koncentracji we wszystkich znanych wypadkach różni się zasadniczo od przewidzianego przez teorję Debye'a. Rozbieżność ta tłumaczy się asocjacjami pomiędzy molekułami dipolowemi.

W poprzedniej mojej pracy [1]) dotyczącej tego zagadnienia podałem teorję tych zjawisk dla najprostszego wypadku, gdy dwie zasocjowane molekuły dipolowe wzajemnie neutralizują swe momenty elektryczne, przyczem otrzzmałem bardzo wyraźną zgodność z wynikami empirycznymi. Obecny referat zawiera rozszerzenie tej teorji na wypadki bardziej skomplikowane, które w pierwszej mej pracy nazwałem „asocjacjami wielokrotnemi".

W wypadkach asocjacji wielokrotnej dwie zasocjowane dipolowe molekuły posiadają moment elektryczny większy, ich momenty sumują się, a dopiero przez asocjację z trzecią molekułą dipolową tworzy się pierścień o wypadkowym momencie zero. Dla wyrażenia polaryzacji P'' składnika dipolowego w roztworze jego w rozpuszczalniku niedipolowym w funkcji od jego koncentracji i temperatury roztworu stosuję metodę statystyczną opartą na tak zwanem „twierdzeniu Einstein'a".

Badamy najpierw stan układu tak zwany „normalny", t. j. w tym wypadku ten rozkład przestrzenny molekuł dipolowych w roztworze, jaki by istniał w równowadze termodynamicznej, gdyby pomiędzy molekułami dipolowemi nie działały żadne siły asocjujące. Na podstawie najprostszych założeń otrzymujemy dla stanu tego następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_2^0}{dn} = \dfrac{2\nu}{N}(n - n_2^0 - n_3^0) - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{dn_3^0}{dn}; \\[2ex] \dfrac{dn_3^0}{dn} = \dfrac{3\alpha\nu}{N}\cdot n_3^0; \end{cases}$$

[1]) M. Wolfke, Physikalische Zeitschrift t. 29. Str. 713. 1928.

gdzie N oznacza liczbę Avogadry, n całkowitą ilość molekuł dipolowych w roztworze, n_2^0 ilość molekuł dipolowych sprzężonych ze sobą przestrzennie parami, n_3^0 ilość tychże molekuł sprzężonych ze sobą przestrzennie po trzy i wreszcie α i ν stałe charakterystyczne dla danego roztworu. Termin „sprzężenie przestrzenne", wprowadzony przezemnie w pierwszej mej pracy, oznacza, że molekuły te znajdują się w takiej od siebie odległości, iż natychmiastowa asocjacja pomiędzy niemi jest możliwa. Pozatem mamy:

$$n = n_1^0 + n_2^0 + n_3^0,$$

gdzie n_1^0 oznacza liczbę molekuł dipolowych niesprzężonych. Równania powyższe dają się łatwo zcałkować i otrzymujemy w ten sposób wielkości: n_1^0, n_2^0 i n_3^0, jako funkcje n.

Wprowadzamy następnie siły asocjujące, zakładając następujące energje potencjalne: E_1 dla niezasocjowanej przestrzennie sprzężonej pary molekuł dipolowych, E_2 dla częściowo zasocjowanych trzech i E_3 dla niezasocjowanych trzech. Stosując w dalszym ciągu twierdzenie Einstein'a dochodzimy do szukanej polaryzacji P'' i otrzymujemy ją w następującej postaci:

$$P'' = \frac{4\pi N \mu^2}{9kTn}\left[n_1^0 + n_2^0\left(2 - e^{-\frac{E_1}{kT}}\right) + n_3^0\left(\frac{5}{3}e^{-\frac{E_2}{kT}} + e^{-\frac{E_3}{kT}}\right)\right];$$

gdzie μ oznacza moment elektryczny dipolu molekuły, k stałą Boltzmanna i T temperaturę absolutną roztworu.

Wzór otrzymany wykazuje zadawalniającą zgodność ze znanymi wynikami doświadczalnymi w tych wypadkach, gdy polaryzacja roztworu w funkcji od koncentracji przechodzi przez maxymum; w tych to właśnie wypadkach zachodzą zjawiska asocjacji wielokrotnej.

Mieczysław Wolfke.

Über die mehrfache Assoziation in flüssigen Dielektrika.

Die vom Verfasser früher aufgestellte Theorie der einfachen Assoziation der Dipolmoleküle in flüssigen Dielektrika wurde hier auf die Erscheinung der mehrfachen Assoziation erweitert.

Ausführliche Abhandlung erscheint in der „Physikalischen Zeitschrift" 1930.

Marja Kołaczkowska.

Przyczynek do wyznaczania praw bliźniaczych w skaleniach trójskośnych.

Komunikat zgłoszony 27 marca 1930, przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

Wyznaczenie praw bliźniaczych w ziarnie, złożonem z kilku osobników, jest na zwykłym mikroskopie polaryzacyjnym naogół niemożliwe, bo nawet niezawsze można być pewnym, czy liczba osobników jest ustalona bezsprzecznie. Stolik Fedorowa pozwala jednak w wielu razach na rozwiązanie tego zadania. Ziarno skalenia występującego w andezycie z Wżaru, składające się z 5 osobników, poddane badaniu na mikroskopie Fedorowa, okazało się skomplikowanym bliźniakiem według praw, należących do dwóch grup, z których każda zawiera po trzy prawa o osiach bliźniaczych wzajemnie prostopadłych. Osobniki (1), (2), (3) i (4) zbliźniaczone są według praw grupy V, na którą składają się prawa: albitowe $\perp$ (010), Karlsbadzkie [001] i Roc Tourné $\perp$ [001] $\|$ (010); osobniki zaś (5), (1) i (2) tworzą bliźniaki grupy I: Esterel [100], zbliżone do Manebachskiego $\perp$ [100] $\|$ (010) i albitowe $\perp$ (010). Osie bliźniaków: Roc Tourné, Esterel, Karlsbad i bliźniaka zbliżonego do Manebachskiego leżą wszystkie w płaszczyźnie prostopadłej do osi bliźniaka albitowego, a więc w płaszczyźnie (010). Prawo albitowe i prawo zbliżone do Manebachskiego dają zrosty prostopadłe t. j. płaszczyzna zrostu jest jednocześnie płaszczyzną bliźniaczą dla osobników (1) — (2) i dla (1) — (5). Co do pierwszego z tych praw, to fakt ten ustalony jest już dawniej, drugie prawo podawane jest zwykle jako prawo hemitropji równoległej.

Marie Kołaczkowska.

Sur la détermination des macles dans les plagioclases tricliniques.

Note présentée le 27 mars 1930 par M. St. J. Thugutt.

Résumé.

On a trouvé dans une coupe mince d'andesite un grain de plagioclase composé de 5 individus maclés selon les lois renfermées dans deux groupes, dont l'existence était théoriquement prévue. Un de ces groupes (gr. V) est fréquemment rencontré, il renferme les lois: de l'albite, de Karlsbad et de Roc Tourné, l'autre (gr. I) doit être beaucoup plus rare, il renferme les lois: de l'albite, Esterel et proche de Manébach. Ainsi les individus (1), (2), (3) et (4) sons maclés selon les lois du V groupe et les individus (1), (2) et (5) selon les lois du I. Les axes des macles selon les quatre lois: Roc Tourné, Esterel, Karlsbad et proche de Manébach restent tous dans le plan perpendiculaire à l'axe albite. La surface de jonction entre les individus (5) et (1) est en même temps plan de macle, donc la macle selon la loi proche de Manébach est une hémitropie normale et non parallèle.

Marja Stępkowska.

O obrazach ciągłych kontynuów nie-peanoskich.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dnia 27 marca 1930 r.

Streszczenie.

Oznaczając przez A i B dowolne kontynua, mówimy, że *A jest obrazem B* jeżeli istnieje odwzorowanie ciągłe B na A.

Dla każdej rodziny kontynuów F, nazywamy A *obrazem uniwersalnym* rodziny F jeżeli A jest obrazem każdego kontynuum należącego do F.

Twierdzenie. *Kontynuum nie-peanoskie C_0, określone w biegunowym układzie spółrzędnych r, φ przez nierówności:*

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

jest obrazem uniwersalnym rodziny wszystkich kontynuów nie-peanoskich.

Opierając się na pojęciu typu c, twierdzenie to możemy wysłowić jak następuje: zbiór wszystkich typów c odpowiadających kontynuom nie-peanoskim, zawiera jeden tylko typ c najniższy, który równa się $c(C_0)$.

Marja Stępkowska.

Sur les images continues des continus non-péaniens.

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 27 Mars 1930.

Etant donné deux continus A et B, nous dirons que *A est l'image de B*, s'il existe une représentation continue de A sur B c. à d. une correspondance Φ telle que: 1) si $p \varepsilon B$, $\Phi(p) \varepsilon A$; 2) si $q \varepsilon A$ il existe un $p \varepsilon B$ tel que $\Phi(p) = q$; 3) si $p \varepsilon B$, $p_n \varepsilon B$, $\lim_{n=\infty} p_n = p$, alors $\lim_{n=\infty} \Phi(p_n) = \Phi(p)$. Nous écrirons alors $A = \Phi(B)$.

Etant donné une famille F de continus, nous dirons que le continu A est une *image universelle de la famille F*, s'il est l'image de tout continu appartenant à F.

Le but de cette Note est la démonstration du résultat suivant [1]):

Théorème. *Le continu non-péanien C_0 determiné dans un système de coordonnées polaires r, φ par les inégalités:*

$$(1) \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

est une image universelle de la famille de tous les continus non-péaniens.

Avec l'aide de la notion de type c [2]) ce théorème peut s'exprimer de manière suivante: *l'ensemble de tous les types c correspondants aux continus non-péaniens, contient un seul type c minimum, qui est egal à $c(C_0)$.*

[1]) v. S. Mazurkiewicz: *Sur les images continues des continus.* Comptes rendus du I Congrès des mathématiciens des pays slaves. Varsovie, 1929.

[2]) v. W. Sierpiński: *Sur les images continues des ensembles de points.* Fund. Math. t. XIV, (p. 235).

Démonstration.

Soit K un continu non-péanien, u un point de K de second genre [1]). Il existe alors un nombre $\lambda > 0$ et une suite $\{u_n\}$, $u_n \varepsilon K$ telle que:

(2) $$\rho(u_n, u) < \frac{\lambda}{16}; \ \lim_{n=\infty} \rho(u_n, u) = 0; \ \rho_K(u_n, u) \geqslant \lambda.$$

Lemme. On peut extraire de la suite $\{u_n\}$ une suite $\{v_n\}$ telle que:

(3) $$\rho_K(v_m, v_n) > \frac{\lambda}{4} \quad m \neq n.$$

Soit n un entier fixe; je dis qu'il existe un entier $M(n)$ tel que:

$$m \geqslant M(n) \quad \text{entraîne} \quad \rho_K(u_n, u_m) > \frac{\lambda}{4}.$$

Supposons le contraire. Il existe alors une suite d'entiers $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots.$ telle que:

(4) $$\rho_K(u_n, u_{m_i}) \leqslant \frac{\lambda}{4}.$$

Donc il existe un continu $K_i \subset K$ contenant u_n et u_{m_i}, de diamètre $\delta(K_i) < \frac{5}{16}\lambda$.

On a, en tenant compte de la première relation (2) [2]):

(5) $$K_i \subset S\left(u_n, \frac{5\lambda}{16}\right) \subset S\left(u, \frac{3\lambda}{8}\right).$$

Donc

(6) $$K_0 = \overline{\lim_{i=\infty}} K_i \subset \overline{S\left(n, \frac{3}{8}\lambda\right)}$$

(7) $$\delta(K_0) \leqslant \frac{3}{4}\lambda.$$

---

[1]) v. S. Mazurkiewicz: *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. t. I, (p. 168).

[2]) Par $S(p, \rho)$ nous désignons l'ensemble de tous les points q de K, tels que $\rho(p, q) < \rho$.

Mais K_0 est évidemment un sous-continu de K, contenant u_n et u (d'aprés la seconde relation (2)). L'inégalité (7) est par suite en contradiction avec la troisième relation (2).

L'existence de $M(n)$ étant démontré, posons $l_1 = 1$, $l_{k+1} = M(l_k)$, $v_k = u_{l_k}$. La suite $\{v_k\}$ satisfait évidemment à l'inégalité (3).

Désignons par Q_0, Q_k resp., celui des constituants de l'ensemble $\overline{S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)}$ qui contient u resp. v_k. On a: $\delta(Q_k) \leqslant \frac{\lambda}{4}$ $(k=0, 1, 2\ldots)$, donc d'après (2) et (3), on a pour $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \ldots$:

(8) $$Q_i \cdot Q_j = 0\,.$$

Comme $\lim v_k = u$, on a de plus:

(9) $$\overline{\lim_{i=\infty}}\, Q_i \subset Q_0\,.$$

L'ensemble H de tous les constituants de $\overline{S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)}$, consideré comme un espace est comme on sait de dimension 0 [1]), il existe donc une homéomorphie entre H et un certain ensemble de nombre irrationnels X.

Soit ξ_i le nombre qui correspond à Q_i dans cette homéomorphie. D'après (8) et (9) on a $\xi_i \neq \xi_j\,(i \neq j)$ et $\lim_{i=\infty} \xi_i = \xi_0$. Faisons correspondre à tout $\xi_i, i > 0$ un intervalle T_i aux extremités rationnelles, contenant ξ_i, de telle manière que ces intervalles n'empiétent pas l'un sur l'autre. Soit T_0 l'ensemble $X - \sum_{i=1}^{\infty} T_i$. Alors $\xi_0 \varepsilon T_0$. Désignons par H_i l'ensemble de tous les constituants de H qui correspondent aux points $\xi \varepsilon (X \times T_i)$, par L_i l'ensemble de tous les points de $\overline{S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)}$, contenus dans les constituants de H_i.

On vérifie facilement les relations suivantes:

(10) $$\overline{L_i} = L_i$$

(11) $$\overline{\overline{S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)} - L_i} = \overline{S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)} - L_i \quad i = 1, 2 \ldots.$$

---

[1]) Hausdorff: Mengenlehre 1927 (p. 159), Th. XV et W. Hurewicz Math. Ann. t. 96, p. 752 Th. XIX.

(12) $$\overline{\lim} L_i \subset L_0$$

(13) $$u \in L_0\,;\ v_i \in L_i$$

(14) $$L_i \,.\, L_j = 0 \quad i \neq j$$

(15) $$K = \left[K - S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)\right] + L_0 + \sum_{i=1}^{\infty} L_i$$

(16) $$L_i \,.\left[K - S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)\right] \neq 0 \,.$$

Posons:

(17) $$\alpha_i = \frac{1}{1 - \frac{8}{\lambda}\, \rho\,(u, L_i)} \,.$$

D'après (13) et (2) on aura:

(18) $$\rho\,(u, L_i) < \rho\,(u, v_i) < \frac{\lambda}{16}$$

(19) $$\lim_{i=\infty} \rho\,(u, L_i) = 0$$

α_i est donc determiné pour tout i naturel et:

(20) $$\lim_{i=\infty} \alpha_i = 1 \,.$$

Désignons par $z\,(r, \varphi)$ le point au coordonnées polaires r, φ. Pour tout point $p \in K$ déterminons la correspondance $\Phi\,(p)$ de manière suivante:

1) $$\Phi\,(p) = z\,(0, —) \quad \text{pour} \quad p \in K - S\left(u, \frac{\lambda}{8}\right)$$

2) $$\Phi\,(p) = z\left(1 - \frac{8}{\lambda}\, \rho\,(p, u), 0\right) \quad \text{pour} \quad p \in L_0$$

3) $$\Phi\,(p) = z\left(\alpha_i\left(1 - \frac{8}{\lambda}\, \rho\,(p, u)\right), \frac{\pi}{2\,i}\right) \text{ pour } p \in L_i \;\; i = 1, 2 \ldots$$

On vérifie immédiatemment que Φ est continue et que l'on a: $\Phi\,(K) = C_0$. Donc C_0 est l'image de K c. q. f. d.