COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III.
XXIII Année 1930 Fascicule 4—6

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIII 1930 Zeszyt 4—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1930

DRUK
ZAKŁADÓW
GRAFICZNO-
INTROLIGATORSKICH
J. DZIEWULSKI s. z o. o.
WARSZAWA, ZŁOTA 29

TREŚĆ ZESZYTU 4—6.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 8 maja 1930 r.

Stefanja Braun.

O rzutowości operacyj Hausdorffa.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 8 maja 1930 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym udowadniam następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Niech* $\mathbf{F}_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ *oznacza rodzinę zbiorów zamkniętych w przestrzeni euklidesowej k — wymiarowej* R_k. *Dla każdej operacji Hausdorffa* $\mathbf{H}_N$ *istnieje operacja Hausdorffa* $\mathbf{H}_M$ *— taka, że, jeżeli rodzina zbiorów* $\mathbf{Q}$ *może być przedstawiona jako wynik operacji Hausdorffa* $\mathbf{H}_N$ *dokonanej na rodzinie zbiorów* $\mathbf{F}_m$, *to rodzina rzutów zbiorów rodziny* $\mathbf{Q}$ *na przestrzeń* $R_n (m > n)$ *może być przedstawiona jako wynik operacji* $\mathbf{H}_M$ *dokonanej na rodzinie zbiorów* $\mathbf{F}_n$.

Z twierdzenia powyższego i z twierdzenia p. Sierpińskiego orzekającego, że analogiczna własność przysługuje operacjom Hausdorffa, gdy $\mathbf{F}_k$ oznacza rodzinę zbiorów otwartych w R_k, wynika:

Dla każdej klasy zbiorów rzutowych $\mathbf{P}_\xi$, *względnie* $\mathbf{C}_\xi$ *w przestrzeni* $R_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, *gdzie* ξ *oznacza dowolną liczbę porządkową pierwszej lub drugiej klasy, istnieją dwie operacje Hausdorffa* $\mathbf{H}_{N_1(\xi)}$ *i* $\mathbf{H}_{N_2(\xi)}$, *— takie, że klasa ta może być* *przedstawiona jako wynik operacji* $\mathbf{H}_{N_1(\xi)}$, *dokonanej na rodzinie zbiorów zamkniętych, i jako wynik operacji* $\mathbf{H}_{N_2(\xi)}$, *dokonanej na rodzinie zbiorów otwartych* (*w przestrzeni* R_k).

Stefanja Braun.

Sur la projectivité des opérations de M. Hausdorff.

Présenté par W. Sierpiński dans la séance du 8 Mai 1930.

Dans la note „Sur les δs — fonctions de M. Hausdorff" [1]) MM. L. Kantorovitch et E. Livenson ont démontré une propriété des opérations de M. Hausdorff qu'on peut énoncer de la manière suivante [2]):

$\mathbf{F}_m$ désignant la famille de tous les ensembles fermés et bornés dans R_m $(m > 1)$, si une famille d'ensembles $\mathbf{Q}$ peut être représentée comme résultat d'une opération de M. Hausdorff effectuée sur la famille $\mathbf{F}_m$, et si cette opération est telle que $\mathbf{Q}$ ne s'altère pas, lorsqu'on remplace ses ensembles par leurs produits par un ensemble G_δ fixe, la famille des projections sur R_n $(n < m)$ des ensembles de cette famille $\mathbf{Q}$ peut de même être représentée comme résultat d'une opération de M. Hausdorff effectuée sur $\mathbf{F}_n$.

Je vais démontrer que, si $\mathbf{F}_m$ désigne la famille de tous les ensembles fermés dans R_m (pas nécessairement bornés), alors cette propriété est vérifiée pour toute opération de M. Hausdorff, la restriction enoncée précédemment devenant inutile.

Pour fixer les idées posons $m = 2$, $n = 1$ et démontrons le théorème suivant:

---

[1]) *Comptes Rendus*, t. 190 (1930), p. 353.

[2]) Cf. W. Sierpiński: Sur les opérations de M. Hausdorff. *Fund. Math.* XV, p. 199.

Voir aussi: W. Sierpiński: Sur la projectivité des opérations de M. Hausdorff, ce volume, p. 15.

Théorème. *Soit* $\mathbf{F}_2$ *la famille de tous les ensembles fermés plans,* $\mathbf{F}_1$ *la famille de tous les ensembles fermés linéaires. Étant donnée une opération de M. Hausdorff* $\mathbf{H}_N$, *il existe une opération de M. Hausdorff* $\mathbf{H}_M$, *telle que la famille* $\mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1)$ *coïncide avec la famille* $\mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2)$ *de tous les projections des ensembles de la famille* $\mathbf{H}_N(\mathbf{F}_2)$ *sur l'axe* Ox [1]) [2]).

Démonstration. Posons pour chaque nombre naturel k

(1) $$\delta_i^k = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{i-1}{k} \leqslant x \leqslant \frac{i}{k}\right], \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(2) $$d_j^k = \underset{y}{\mathrm{E}}\left[\frac{j-1}{k} \leqslant y \leqslant \frac{j}{k}\right], \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Soit

(3) $$(p_1, q_1, r_1),\ (p_2, q_2, r_2),\ (p_3, q_3, r_3), \dots$$

une suite infinie formée de tous les systèmes de trois nombres (p, q, r), où p et r sont des nombres naturels et q est un nombre entier, et telle que pour chaque système de trois nombres (p, q, r), où p et r sont des nombres naturels et q est un nombre entier, il existe un et un seul nombre naturel $\pi = f(p, q, r)$, pour lequel

$$p_\pi = p,\ q_\pi = q,\ r_\pi = r.$$

Pour chaque nombre naturel π désignons par $\varphi(\pi)$ et $\psi(\pi)$ deux nombres naturels, tels que

$$\pi = 2^{\varphi(\pi)-1}(2\psi(\pi) - 1).$$

Les nombres $\varphi(\pi)$ et $\psi(\pi)$ sont alors univoquement définis pour chaque nombre naturel π.

Soit $\mathbf{H}_N$ une opération quelconque de M. Hausdorff caracterisée par un ensemble N de suites infinies de nombres naturels.

Appelons M l'ensemble des suites infinies $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ de nombres naturels satisfaisant aux trois conditions suivantes:

---

1) En ce qui concerne les notations, voir: W. Sierpiński: Sur les opérations de M. Hausdorff. *Fund. Math.* XV, p. 199.

2) Pour m et n quelconques la démonstration est tout à fait analogue.

$$(4)\left\{\begin{array}{l}1^0 \text{ Il existe une suite de nombres naturels } (n_1, n_2, n_3, \ldots) \\ \text{appartenant à } N \text{ telle que pour chaque nombre naturel } \pi \\ \qquad p_{m_\pi} = n_{\varphi(\pi)} \\ 2^0 \qquad r_{m_\pi} = \psi(\pi), \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots \\ 3^0 \qquad d_{q_{m_1}}^{r_{m_1}} \cdot d_{q_{m_2}}^{r_{m_2}} \cdot d_{q_{m_3}}^{r_{m_3}} \ldots \neq 0 .\end{array}\right.$$

(Les conditions 1^0, 2^0 sont équivalentes aux conditions suivantes:

$1'^0$
$$(p_{m_{2^0}}, p_{m_{2^1}}, p_{m_{2^2}}, \ldots) \varepsilon N$$

$2'^0$ pour chaque couple de nombres naturels s et t

$$p_{m_{2^{s-1}(2t-1)}} = p_{m_{2^{s-1}}}; \quad r_{m_{2^{s-1}(2t-1)}} = t).$$

Nous allons démontrer que

$$\mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2) = \mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1).$$

I. Prouvons que

$$\mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1).$$

Supposons que

$$E \varepsilon \mathbf{H}_N(\mathbf{F}_2).$$

Il existe donc une suite infinie d'ensembles plans fermés $U_1, U_2, U_3, \ldots$ telle que

$$E = \sum_{(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N} U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \ldots$$

Posons

$$(5) \qquad Z^{k, i, j} = \mathop{\mathrm{E}}_{x, y}[x \varepsilon \delta_i^k, y \varepsilon d_j^k], \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \ldots \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}$$

Étant donné un nombre naturel m, définissons pour chaque nombre entier l les ensembles V_m^l comme il suit:

$$(6) \qquad \begin{array}{l} V_m^l = \delta_l^{r_m}, \quad \text{si} \quad Z^{r_m, l, q_m} \cdot U_{p_m} \neq 0 \\ V_m^l = 0, \quad \text{si} \quad Z^{r_m, l, q_m} \cdot U_{p_m} = 0 . \end{array}$$

Posons

(7)
$$V_m = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} V_m^l .$$

Les ensembles V_m sont définis par les formules (6) et (7) pour chaque nombre naturel m. Ils sont fermés, puisqu'ils se composent d'intervalles fermés sans points intérieurs communs deux à deux et de longueur constante $\left(\text{égale à } \frac{1}{r_m}\right)$.

Je désigne par G le résultat de l'opération de M. Hausdorff $\mathbf{H}_M$ effectuée sur le système des ensembles $V_1, V_2, V_3, \ldots$, c'est-à-dire:

(8)
$$G = \sum_{(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M} V_{m_1} \cdot V_{m_2} \cdot V_{m_3} \ldots$$

Comme les ensembles V_m sont linéaires fermés,

(9)
$$G \varepsilon \mathbf{H}_m (\mathbf{F}_1) .$$

Nous allons prouver que

$$PE = G$$ [1].

Supposons que $x_0 \varepsilon PE$; il existe donc un nombre y_0 tel que

$$w_0 = (x_0, y_0) \varepsilon E ,$$

donc il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ telle que

(10)
$$(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N$$

et

$$w_0 \varepsilon U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \ldots ,$$

c'est-à-dire:

(11)
$$w_0 \varepsilon U_{n_s} \quad \text{pour } s = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (5), (1), (2) pour chaque nombre naturel t il existe deux nombres entiers i_t et j_t tels que

(12)
$$w_0 \varepsilon Z^{t, i_t, j_t} .$$

Des formules (11), (12) il résulte:

(13)
$$Z^{t, i_t, j_t} \cdot U_{n_s} \neq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} t = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

[1]) PE désigne la projection de l'ensemble E sur l'axe Ox.

Posons $m_\pi = f(n_{\varphi(\pi)}, j_{\psi(\pi)}, \psi(\pi))$ pour $\pi = 1, 2, 3, \ldots$

On a donc pour tout nombre naturel π:

(14) $$p_{m_\pi} = n_{\varphi(\pi)}$$

(15) $$q_{m_\pi} = j_{\psi(\pi)}$$

(16) $$r_{m_\pi} = \psi(\pi).$$

D'après (12), (5),

$$y_0 \varepsilon d_{j_{\psi(\pi)}}^{\psi(\pi)} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc des formules (15), (16) il résulte que

(17) $$y_0 \varepsilon d_{q_{m_\pi}}^{r_{m_\pi}} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire:

(18) $$d_{q_{m_1}}^{r_{m_1}} \cdot d_{q_{m_2}}^{r_{m_2}} \cdot d_{q_{m_3}}^{r_{m_3}} \ldots \neq 0.$$

Les formules (14), (10), (16), (18) entraînent d'après la définition de l'ensemble M la relation:

(19) $$(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M.$$

D'après (12), (5), $x_0 \varepsilon \delta_{i_t}^t$ pour $t = 1, 2, 3, \ldots$, donc par conséquent

$$x_0 \varepsilon \delta_{i_{\psi(\pi)}}^{\psi(\pi)} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

et d'après (16)

(20) $$x_0 \varepsilon \delta_{i_{r_{m_\pi}}}^{r_{m_\pi}} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots$$

De la formule (13), en tenant compte des formules (16), (15), (14), nous avons

$$Z^{\psi(\pi),\, i_{\psi(\pi)},\, j_{\psi(\pi)}} \cdot U_{n_{\varphi(\pi)}} = Z^{r_{m_\pi},\, i_{r_{m_\pi}},\, q_{m_\pi}} \cdot U_{p_{m_\pi}} \neq 0 \text{ pour } \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc d'après (6), (7)

$$V_{m_\pi}^{i_{r_{m_\pi}}} = \delta_{i_{r_{m_\pi}}}^{r_{m_\pi}}$$

et

$$\delta_{i_{r_{m_\pi}}}^{r_{m_\pi}} \subset V_{m_\pi} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où, d'après (20),

$$x_0 \varepsilon V_{m_\pi} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots$$

et d'après (19), (8)

$$x_0 \varepsilon G$$

et

$$PE \subset G.$$

Supposons maintenant que $x_0 \varepsilon G$.

Il existe donc une suite $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ appartenant à M telle que

$$x_0 \varepsilon V_{m_1} . V_{m_2} . V_{m_3} \ldots$$

Comme la suite $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ appartient à M, les conditions (4) sont satisfaites, c'est-à-dire:

il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ appartenant à N telle que

(21) $$p_{m_\pi} = n_{\varphi(\pi)}$$

(22) $$r_{m_\pi} = \psi(\pi)$$

pour $\pi = 1, 2, 3 \ldots$, et il existe un nombre y_0 tel que

(23) $$y_0 \varepsilon d^{r_{m_1}}_{q_{m_1}} . d^{r_{m_2}}_{q_{m_2}} . d^{r_{m_3}}_{q_{m_3}} \ldots$$

Nous allons prouver que le point $w_0 = (x_0, y_0)$ appartient à E.

Comme $x_0 \varepsilon V_{m_\pi}$ $(\pi = 1, 2, 3, \ldots)$, d'après (7), pour chaque nombre naturel π il existe un nombre entier l_π tel que

(24) $$x_0 \varepsilon V^{l_\pi}_{m_\pi}$$

et d'après (6)

(25) $$V^{l_\pi}_{m_\pi} = \delta^{r_{m_\pi}}_{l_\pi} \quad \text{et} \quad Z^{r_{m_\pi}, l_\pi, q_{m_\pi}} . U_{p_{m_\pi}} \neq 0 \text{ pour } \pi = 1, 2, 3, \ldots$$

Les formules (24), (25), (23), (5), (21), (22) montrent que pour tout π naturel

(26) $$w_0 = (x_0, y_0) \varepsilon Z^{r_{m_\pi}, l_\pi, q_{m_\pi}} = Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}}$$

et

(27) $$Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}} . U_{n_{\varphi(\pi)}} \neq 0.$$

D'après (27) pour chaque nombre naturel π il existe un point w_π tel que

(28) $$w_\pi \varepsilon Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}} . U_{n_{\varphi(\pi)}}.$$

Des formules (26), (5), (1), (2) il résulte que

$$\rho(w_\pi, w_0) \leqslant \delta(Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}}) = \frac{1}{\psi(\pi)}\sqrt{2}\ ^{1)}. \tag{29}$$

Soit s un nombre naturel arbitraire.

Posons $\pi_t = 2^{s-1}(2t-1)$; alors $\varphi(\pi_t) = s$ et $\psi(\pi_t) = t$.

D'après (28), (29)

$$w_{\pi_t} \varepsilon Z^{t, l_{\pi_t}, q_{m_{\pi_t}}} \cdot U_{n_s}$$

et

$$\rho(w_0, w_{\pi_t}) \leqslant \frac{1}{t}\sqrt{2},$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} \rho(w_0, w_{\pi_t}) = 0,$$

et, comme U_{n_s} est un ensemble fermé,

$$w_0 \varepsilon U_{n_s}.$$

Comme dans cette formule s désigne un nombre naturel arbitraire,

$$w_0 \varepsilon U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \cdots$$

et, comme la suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ appartient à N, on a

$$w_0 \varepsilon E \quad \text{et} \quad x_0 \varepsilon PE.$$

La formule $x_0 \varepsilon G$ entraîne la formule $x_0 \varepsilon PE$, donc $G \subset PE$.

D'après ce qui précède

$$PE \subset G,$$

donc

$$PE = G,$$

et d'après (8)

$$PE \varepsilon \mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1)$$

et

$$\mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1).$$

II. Prouvons maintenant que

$$\mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1) \subset \mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2).$$

Supposons que $G \varepsilon \mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1)$.

---

[1]) $\delta(Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}})$ désigne dans cette formule le diamètre de l'ensemble $Z^{\psi(\pi), l_\pi, q_{m_\pi}}$.

Il existe donc une suite d'ensembles linéaires fermés $V_1, V_2, V_3, \ldots$ telle que

(30) $$G = \sum_{(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M} V_{m_1} \cdot V_{m_2} \cdot V_{m_3} \ldots$$

Pour chaque couple de nombres naturels (n, k) désignons par Z_n^k l'ensemble des points (x, y) du plan, pour lesquels il existe un nombre naturel m tel que

(31) $$p_m = n; \ r_m = k; \ x \varepsilon V_m; \ y \varepsilon d_{q_m}^k.$$

Les ensembles Z_n^k sont fermés pour chaque couple de nombres naturels (n, k).

En effet posons $m_l = f(n, l, k)$ pour $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

De la définition de l'ensemble Z_n^k il résulte:

$$Z_n^k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underset{x,y}{\mathrm{E}} \, [x \varepsilon V_{m_l}, y \varepsilon d_l^k].$$

Comme l'ensemble V_{m_l} est linéaire fermé, l'ensemble $\underset{x,y}{\mathrm{E}} \, [x \varepsilon V_{m_l}, y \varepsilon d_l^k]$ est fermé pour $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

D'après la définition des ensembles d_l^k (formule (2)), on a

$$Z_n^k \cdot \underset{x,y}{\mathrm{E}} \left[\frac{l-1}{k} \leqslant y \leqslant \frac{l}{k}\right] = \underset{x,y}{\mathrm{E}} \, [x \varepsilon V_{m_l}, y \varepsilon d_l^k] +$$
$$+ \underset{x,y}{\mathrm{E}} \left[x \varepsilon V_{m_{l-1}}, y = \frac{l-1}{k}\right] + \underset{x,y}{\mathrm{E}} \left[x \varepsilon V_{m_{l+1}}, y = \frac{l}{k}\right],$$

et cet ensemble est fermé comme somme de trois ensembles fermés.

Par conséquent l'ensemble $Z_n^k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Z_n^k \cdot \underset{x,y}{\mathrm{E}} \left[\frac{l-1}{k} \leqslant y \leqslant \frac{l}{k}\right]$ est aussi fermé.

Posons:

(32) $$U_n = \prod_{k=1}^{\infty} Z_n^k \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les ensembles U_n sont fermés comme produits d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, donc

(33) $$E = \sum_{(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N} U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \ldots \varepsilon \, \mathbf{H}_N(\mathbf{F}_2).$$

Nous allons prouver que

$$PE = G.$$

Supposons que $x_0 \varepsilon PE$. Il existe donc y_0 tel que le point

$$w_0 = (x_0, y_0) \varepsilon E.$$

D'après (33) il existe une suite infinie $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ telle que

(34) $$(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N$$

et

(35) $$w_0 \varepsilon U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \cdots$$

De la définition des ensembles U_n (formule (32)), il résulte

$$w_0 \varepsilon Z^k_{n_s} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

Pour chaque couple de nombres naturels (s, k) il existe alors un nombre naturel $l_{s,k}$ tel que

(36) $$p_{l_{s,k}} = n_s; \; r_{l_{s,k}} = k; \; x_0 \varepsilon V_{l_{s,k}}; \; y_0 \varepsilon d^k_{q_{l_{s,k}}}.$$

Posons:

(37) $$m_\pi = l_{\varphi(\pi), \psi(\pi)}.$$

D'après (36) pour chaque nombre naturel π nous avons les formules:

(38) $$p_{m_\pi} = n_{\varphi(\pi)}$$

(39) $$r_{m_\pi} = \psi(\pi)$$

(40) $$q_{m_\pi} = q_{l_{\varphi(\pi), \psi(\pi)}}.$$

La formule (36) nous donne pour $s = \varphi(\pi)$, $k = \psi(\pi)$, d'après les formules (39), (40), la relation

$$y_0 \varepsilon d^{\psi(\pi)}_{q_{l_{\varphi(\pi), \psi(\pi)}}} = d^{r_{m_\pi}}_{q_{m_\pi}} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où il résulte que

(41) $$d^{r_{m_1}}_{q_{m_1}} \cdot d^{r_{m_2}}_{q_{m_2}} \cdot d^{r_{m_3}}_{q_{m_3}} \cdots \neq 0.$$

Les formules (38), (34), (39), (41) montrent que la suite $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ satisfait aux conditions (4), c'est-à-dire:

(42) $$(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M.$$

En raison de (36) pour $s = \varphi(\pi)$, $k = \psi(\pi)$ et (37)

$$x_0 \varepsilon V_{l_{\varphi(\pi),\,\psi(\pi)}} = V_{m_\pi} \quad \text{pour} \quad \pi = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc

$$x_0 \varepsilon V_{m_1} \cdot V_{m_2} \cdot V_{m_3} \cdots$$

et d'après (42), (30)

$$x_0 \varepsilon G\,.$$

La formule: $PE \subset G$ est ainsi démontrée.

Supposons maintenant que $x_0 \varepsilon G$.

D'après (30) il existe une suite $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$, appartenant à M telle que

(43) $$x_0 \varepsilon V_{m_1} \cdot V_{m_2} \cdot V_{m_3} \cdots$$

Comme la suite $(m_1, m_2, m_3, \ldots) \varepsilon M$, les conditions (4) sont satisfaites, c'est-à-dire:

il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ telle que

(44) $$(n_1, n_2, n_3, \ldots) \varepsilon N,$$

pour tout nombre naturel π

(45) $$p_{m_\pi} = n_{\varphi(\pi)}$$

(46) $$r_{m_\pi} = \psi(\pi)$$

et il existe

(47) $$y_0 \varepsilon d_{q_{m_1}}^{r_{m_1}} \cdot d_{q_{m_2}}^{r_{m_2}} \cdot d_{q_{m_3}}^{r_{m_3}} \cdots$$

Soit maintenant s un nombre naturel arbitraire.

D'après (45), (46), (43), (47) nous aurons pour tout nombre naturel t les formules suivantes:

$$p_{m_{2^{s-1}(2t-1)}} = n_{\varphi(2^{s-1}(2t-1))} = n_s$$

$$r_{m_{2^{s-1}(2t-1)}} = \psi(2^{s-1}(2t-1)) = t$$

$$x_0 \varepsilon V_{m_{2^{s-1}(2t-1)}}$$

$$y_0 \varepsilon d_{q_{m_{2^{s-1}(2t-1)}}}^{t},$$

donc en vertu de (31)

$$(x_0, y_0) \varepsilon Z_{n_s}^t \quad \text{pour} \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

et d'après (32)

$$(x_0, y_0) \varepsilon U_{n_s}.$$

Comme s est un nombre naturel arbitraire, nous avons démontré en même temps que

$$(x_0, y_0) \varepsilon U_{n_1} \cdot U_{n_2} \cdot U_{n_3} \ldots,$$

donc d'après (44), (33):

$$(x_0, y_0) \varepsilon E \quad \text{et} \quad x_0 \varepsilon PE.$$

On a donc

$$G \subset PE,$$

et puisqu'on a dejà prouvé que $PE \subset G$,

$$PE = G,$$

d'où en vertu de (33) il résulte que

$$G \varepsilon \mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2).$$

Comme G désigne un ensemble arbitraire de la famille $\mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1)$, alors:

$$\mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1) \subset \mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2).$$

Comme l'inclusion inverse a été démontrée précédemment on a

$$\mathbf{H}_M(\mathbf{F}_1) = \mathbf{PH}_N(\mathbf{F}_2).$$

La demonstration du théorème est ainsi achevée.

Comme l'a démontré M. Sierpiński [1]), nous pouvons remplacer dans notre théorème $\mathbf{F}_1$ par la famille des ensembles ouverts linéaires et $\mathbf{F}_2$ par la famille des ensembles ouverts plans.

MM. Kantorovitch et Livenson ont étendu les classes des ensembles projectifs de M. Lusin aux nombres ordinaux transfinis de seconde classe, en désignant pour chaque nombre ordinal transfini de seconde classe et de seconde espèce par $\mathbf{P}_\alpha$ la classe des sommes, par $\mathbf{C}_\alpha$ la classe des produits d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant aux classes d'indice inférieur à α [2]).

Or, du théorème de M. Sierpiński et de notre théorème démontré plus haut, qui peuvent être étendus sans peine aux espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions, il résulte:

[1]) W. Sierpiński: Sur la projectivité des opérations de M. Hausdorff, ce volume, p. 16.

[2]) Cf. MM. Kantorovitch et Livenson: Sur les ensembles projectifs de M. Lusin. *Comptes rendus*, t. 190, p. 1114.

Pour chaque classe des ensembles projectifs $\mathbf{P}_\xi$, *respectivement* $\mathbf{C}_\xi$, *(ξ désignant un nombre ordinal de première ou seconde classe), il existe deux opérations de M. Hausdorff,* $\mathbf{H}_{N_1(\xi)}$ *et* $\mathbf{H}_{N_2(\xi)}$, *telles que cette classe peut être réprésentée comme résultat de l'opération* $\mathbf{H}_{N_1}(\xi)$ *effectuée sur la famille de tous les ensembles fermés, et comme résultat de l'opération* $\mathbf{H}_{N_2}(\xi)$ *effectuée sur la famille de tous les ensembles ouverts* (dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions) [1].

Pour déduir ce théorème de notre théorème démontré plus haut et de celui de M. Sierpiński, il suffit de s'appuyer sur les propriétés suivantes des opérations de M. Hausdorff.

I. La famille de tous les ensembles analitiques peut être réprésentée comme résultat d'une opération de M. Hausdorff effectuée ou bien sur la famille de tous les ensembles fermés, ou bien sur la famille de tous les ensembles ouverts [2].

II. Si une famille $\mathbf{R}$ peut être représentée comme résultat d'une opération de M. Hausdorff effectuée sur une famille $\mathbf{Q}$ d'ensembles, la famille des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\mathbf{R}$ peut être représentée comme résultat d'une opération de M. Hausdorff effectuée sur la famille des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\mathbf{Q}$ [3].

III. Si les familles $\mathbf{R}_\xi$ pour $\xi < \alpha$, α désignant un nombre ordinal transfini de seconde classe et de seconde espèce, sont résultats des opérations de M. Hausdorff effectuées sur une famille $\mathbf{Q}$ d'ensembles, les classes des sommes respectivement des produits d'une infinité dénombrable des ensembles appartenant à la famille $\sum_{\xi<\alpha} \mathbf{R}_\xi$ peuvent être représentées comme résultats d'une opération de M. Hausdorff effectuée sur la même famille $\mathbf{Q}$ [4].

---

[1]) En ce qui concerne la possibilité de réprésentation des classes des ensembles projectifs comme résultats des opérations de M. Hausdorff effectuées sur la famille de tous les ensembles fermés, ce théorème a été dejà signalé par MM. Kantorovitch et Livenson dans leur note citée: Sur les ensembles projectifs de M. Lusin.

[2]) Cf. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927, p. 93.

[3]) Voir p. ex.: W. Sierpiński: Sur les opérations de M. Hausdorff. *Fund. Math.* XV, p. 209—210.

[4]) Voir: F. Hausdorff, l. c. p. 87—90 et W. Sierpiński, l. c. p. 209—210.

Tadeusz W. Jezierski.

O działaniu siarki na ketony.

Przedstawił L. Szperl na posiedzeniu w dniu 8 maja 1930.

Action du soufre sur les cétones.

Mémoire présenté par M. L. Szperl à la séance du 8 Mai 1930.

1. Działanie siarki na acetofenon.

Działanie siarki na acetofenon, wziętych w stosunku gramoatomu na gramocząsteczkę, odbywało się w obecności azotu przepływającego nad mieszaniną reagującą. Temperaturę utrzymywano 155—200°, czas trwania reakcji—80 godzin. W temp. około 120° zaczął się powoli, powyżej zaś 160° obficie, wydzielać siarkowodór. Wydobyto, jako produkt reakcji, ciało stałe, krystaliczne, bezbarwne, które na zasadzie przeprowadzonych badań i analizy okazało się dwufenacylem (t. t. 144—145°). Stąd należy wnosić, że przebieg reakcji był następujący:

$$2\,C_6H_5\cdot CO\cdot CH_3 + S = C_6H_5\cdot CO\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot CO\cdot C_6H_5 + H_2S$$

Wydajność dwufenacylu — ok. 20% w stosunku do ilości przereagowanego acetofenonu.

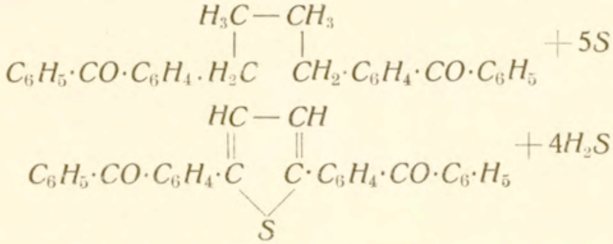
2. Działanie siarki na benzofenon.

Działano siarką na benzofenon, wziętych też w ilościach równoważnych (jak w p. 1), również w obecności azotu. Temperaturę stopniowo podwyższano — od 175° do 310°. Siarkowodór, pomimo przeszło 70-godzinnego ogrzewania, prawie się nie wydzielał. Całkowitą ilość benzofenonu, wziętego do reakcji, wydobyto z powrotem, nie licząc drobnych ilości, które uległy zesmoleniu i zwęgleniu.

Z powyższego wynika, że siarka nie działa na wodory grup fenylowych, jak również i grupę karbonilową.

3. Działanie siarki na etylobenzofenon.

Etylobenzofenon i siarkę, wzięte, jak wyżej, w ilościach równoważnych, ogrzewano w obecności azotu około 75 godzin w temperaturze 145—220°. Powyżej 200° następowało obfite wydzielanie siarkowodoru. Otrzymano pewną ilość produktu (ok. 30% w stosunku do przereagowanego etylobenzofenonu), który jest ciałem stałem, krystalicznem, żółtem, topiącem się w 233° — 234°, trudno rozpuszczalnem we wrzącym benzenie i toluenie, nierozpuszczalnem w alkoholu etylowym, acetonie. Na podstawie dokonanej analizy ilościowej oraz oznaczenia ciężaru cząsteczkowego wynika wzór sumaryczny $C_{30}H_{20}O_2S$. Należy sądzić, że reakcja przebiegała w sposób następujący:



t. zn. siarka łączyła się z wodorami grupy etylowej, tworząc siarkowodór i pochodną tiofenową.

4. Próba orjentacyjna działania siarki na:

a) e t y l o a c e t o f e n o n, b) α-n a f t y l o f e n y l o k e t o n.

a) Działanie siarki na etyloacetofenon (w warunkach j. wyżej) ogrzewanych do tem. 200° — 230° w ciągu 25 godzin, doprowadziło do otrzymania niewielkiej ilości substancji stałej, drobnokrystalicznej, żółtej. Produkt ten, rozpuszczalny tylko we wrzącym dekalinie i niezupełnie jeszcze oczyszczony, topi się, z wyraźnym rozkładem od 195°, w tem. 200° — 204°. Związek powyższy zawiera w sobie siarkę.

b) α-naftylofenyloketon poddawano działaniu siarki w warunkach takich jak i poprzednie ketony, w ciągu ok. 40 godzin, w temp. 200° — 225°. Wydzielania siarkowodoru prawie że nie było. Temperaturę podwyższono: zaczęło się b. energiczne wytwarzanie siarkowodoru powyżej 270°. Po kilkunastugodzinnej reakcji w 270° — 295°, wydobyto, prócz pewnej ilości nieprzereagowanego ketonu, jedynie czarną, zwęgloną smolistą masę. Widocznie siarka w tym przypadku działa b. szybko na wodory pierścienia naftylowego, co znane jest z działania siarki na naftalen.

Powyższe i dalsze próby z innemi ketonami będą kontynuowane.

Posiedzenie

z dnia 22 maja 1930 r.

J. Poprużenko.

O pewnych własnościach funkcji addytywnych zbioru.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 22 maja 1930 r.

Streszczenie.

Autor podaje w niniejszym komunikacie pewne wyniki z teorji funkcji zbioru. Tw. IV i V są uogólnieniem twierdzeń ogłoszonych we wcześniejszych, niżej cytowanych, pracach autora.

G. Poprougénko.

Sur certaines propriétés des fonctions additives d'ensemble.

Présenté dans la séance du 22 Mai 1930 par M. W. Sierpiński.

Soit M un espace métrique, $\mathcal{K}$ un corps [1]) d'ensembles $E \subset M$ satisfaisant à la condition

(*C*) *si* $p \varepsilon E$, $E \varepsilon \mathcal{K}$, *on a* $(p) \varepsilon \mathcal{K}$, (p) *désignant l'ensemble qui se compose d'un seul point* p.

Désignons par S l'ensemble

$$S = \sum E \quad (E \varepsilon \mathcal{K}),$$

par $f(E)$ une fonction réelle (finie ou non), définie sur $\mathcal{K}$. Nous supposons dans ce qui suit que la fonction $f(E)$ est additive et localement bornée en tout point de S („localement bornée sur $\mathcal{K}$").

---

[1]) C'est-à-dire une famille d'ensembles jouissant de la propriété suivante: *si* $E_1 \varepsilon \mathcal{K}$, $E_2 \varepsilon \mathcal{K}$, *on a* $(E_1 + E_2) \varepsilon \mathcal{K}$, $(E_1 - E_2) \varepsilon \mathcal{K}$.

Définitions. I. *Nous dirons que la fonction $f(E)$ est continue au point $p \varepsilon S$, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, un nombre $\delta = \delta(p)$, tel que les relations*

$$E \varepsilon \mathcal{K}, \quad E \subset U(p, \delta(p)), \tag{1}$$

entraînent l'inégalité

$$|f(E)| < \varepsilon. \tag{2}$$

II. *La fonction $f(E)$ est continue sur $\mathcal{K}$, si elle est continue en tout point de S.*

On sait que si $\mathcal{K}$ est une famille additive au sens complet (un *σ-corps*), notre définition de la continuité est équivalente, pour les fonctions absolument additives, à celle de M. Hahn: $f((p)) = 0$, pour tout $p \varepsilon S$. Or, *cette équivalence est en défaut*, si $f(E)$ est additive au sens restreint.

III. *La continuité est uniforme sur un ensemble $A \subset S$ (appartenant à $\mathcal{K}$ ou non), s'il existe, un $\varepsilon > 0$ étant donné, un nombre fixe δ, tel que les relations* (1) *et* (2) *subsistent pour tout $p \varepsilon A$.*

Si $A = S$, je dirai aussi que $f(E)$ est *continue uniformément sur $\mathcal{K}$.*

IV. *Nous dirons que la fonction $f(E)$ remplit sur $\mathcal{K}$ la condition de Darboux, si les relations*

$$\left\{ \begin{array}{c} E_1 \varepsilon \mathcal{K}, \; E_2 \varepsilon \mathcal{K}, \; E_1 \subset E_2, \\ f(E_1) \neq f(E_2), \\ \min \{f(E_1), f(E_2)\} < y < \operatorname{Max} \{f(E_1), f(E_2)\}, \end{array} \right.$$

entraînent l'existence d'un ensemble E_3 tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} E_1 \subset E_3 \subset E_2, \; E_3 \varepsilon \mathcal{K}, \\ f(E_3) = y \end{array} \right. [1].$$

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction (finie ou non) $f(E)$, additive au sens restreint et localement bornée sur $\mathcal{K}$, possède un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité est que l'ensemble S soit séparable* [2]).

---

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XII, p. 254.

[2]) Cf. H. Hahn. *Theorie d. r. Funktionen,* p. 410, théorème VIII.

Corollaire. *Pour que l'espace M soit séparable, il faut et il suffit que toute fonction $f(E)$, définie sur un corps $\mathcal{K}$ satisfaisant à la condition*

$$S = M, \tag{3}$$

possède un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.

Supposons maintenant que la famille $\mathcal{K}$ est un *σ-corps* et qu'elle satisfait à la condition

(C') *il existe pour tout nombre $\alpha > 0$ et pour tout ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$ une suite infinie d'ensembles $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ tels que*

$$E = \sum_{1}^{\infty} E_n, \quad E_n \varepsilon \mathcal{K},$$

$$d(E_n) < \alpha \text{ [1]}.$$

On a dans ces conditions le

Théorème II. *Pour que toute fonction $f(E)$, localement bornée et additive au sens restreint, définie sur $\mathcal{K}$, soit bornée, il faut et il suffit que l'ensemble S soit fermé et compact.*

De ce théorème résultent immédiatement les corollaires suivants:

Corollaire I. *Pour que l'espace M soit compact (en soi) il faut et il suffit que toute fonction $f(E)$, définie sur un σ-corps $\mathcal{K}$ remplissant la relation* (3), *soit bornée.*

Corollaire II. *Si S est fermé et compact, toute fonction continue $f(E)$ est bornée sur $\mathcal{K}$.*

Corollaire III. *Si l'ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$ est fermé et compact, on a $|f(E)| < +\infty$* [2].

Si l'ensemble E n'est pas compact en soi, on a en tout cas le

Théorème III. *Si $|f(E)| = +\infty$ pour un ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$, il existe une suite infinie d'ensembles $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ remplissant les relations suivantes:*

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad E_n \varepsilon \mathcal{K}, \quad E = \lim_{n \to \infty} E_n,$$

$$|f(E_n)| < +\infty.$$

---

[1]) Ceci implique (C) ($\mathcal{K}$ étant un σ-corps) et donne la condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble $E \varepsilon \mathcal{K}$ soit séparable.

[2]) Les corollaires II et III subsistent pour les fonctions additives au sens restreint dans les conditions plus générales.

En s'appuyant sur les théorèmes I—III, on établit les propriétés suivantes des fonctions absolument additives.

Théorème IV. *Si l'ensemble S est compact (dans M), la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction absolument additive et continue $f(E)$ soit uniformément continue sur $\mathcal{K}$ est qu'elle soit bornée sur $\mathcal{K}$* [1]).

On déduit sans peine de la Déf. III (et du théorème de Borel) que *toute fonction continue $f(E)$ est continue uniformément sur un ensemble $A \subset S$ compact en soi;* or, si $f(E)$ est absolument additive et bornée, il suffit, d'après le théorème IV, *que l'ensemble $\bar{A}$ soit compact en soi.*

Théorème V. *Pour que la fonction absolument additive $f(E)$ soit continue sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit qu'elle remplisse sur $\mathcal{K}$ la condition de Darboux* [2]).

Théorème VI. *Pour que la fonction absolument additive $f(E)$ soit continue sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit qu'il existe pour tous deux ensembles E_1 et E_2 satisfaisant aux conditions*

$$E_1 \varepsilon \mathcal{K}, \quad E_2 \varepsilon \mathcal{K}, \quad E_1 \subset E_2,$$

$$\overline{\overline{E_1}} > \aleph_0, \quad \overline{\overline{E_2}} > \aleph_0, \quad \overline{\overline{E_2 - E_1}} > \aleph_0,$$

$$|f(E_1)| < +\infty, \quad |f(E_2)| < +\infty,$$

un ensemble E_3 tel que

$$E_1 \subset E_3 \subset E_2, \quad E_3 \varepsilon \mathcal{K},$$

$$f(E_3) = \frac{f(E_1) + f(E_2)}{2}.$$

Considérons l'ensemble $\bar{S} - S$; en remarquant qu'au voisinage d'un point $p \varepsilon \bar{S} - S$ la fonction $|f(E)|$ tend soit vers 0, soit vers $+\infty$, on démontre le

Théorème VII. *Si S est compact (dans M), la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction absolument additive et continue $f(E)$ soit non-bornée sur $\mathcal{K}$ est qu'il existe un point p tel que dans tout son voisinage $f(E)$ prenne toutes ses valeurs d'un signe déterminé* [3]).

---

[1]) Cf. ce journal, Année XXII 1929 (Classe III), p. 110, théorème III.

[2]) Cf. *Fund. Math.* t. XII, p. 255.

[3]) Cf. Lebesgue. *Leçons sur l'intégration* 1928, p. 144—5.

Antoni Morawiecki.

Badania mikroskopowe fosforytów polskich [1]).

Przedstawił p. St. J. Thugutt dn. 22 maja 1930 r.

Streszczenie.

Badaniom mikroskopowym poddane zostały fosforyty, pochodzące ze wszystkich prawie znanych stanowisk na terenie Polski. A więc fosforyty cenomańskie z Małopolski Wschodniej (Bukówna, Niżniów, Niezwiska, Horodenka, Rakowiec, Buczacz, Przewłoka i inne), z Lubelskiego (okolice Rachowa i Lublin), z Kieleckiego (Iłża, okolice Wolbromia) i z Wołyńskiego (Pełcza, Ostróg); fosforyty senońskie z okolic Kazimierza nad Wisłą i fosforyty trzeciorzędowe z okolic Gdyni, Grodna (Pyszki, Miały, Sopoćkinie i inne), Wołkowyska, Tuczyna, Warszawy i innych [2]).

W znacznym materjale, jaki zgromadzono, znalazły się nie tylko najrozmaitszego rodzaju konkrecje fosforytowe, lecz również kawałki sfosforytyzowanego drzewa, kręgi i kości ssaków, zęby, odlewy muszli, skorupki, pseudomorfozy po gąbkach, jeżowcach, belemnitach i t. d. koprolity, fosforyty zbite i naciekowe. Po raz pierwszy w materjale opracowywanym znalazły się piaskowce z Chudykowiec utworzone w przeważnej części z ziarn substancyj fosforytowych. Nie ograniczono się przytem do samych fosforytów, lecz poddano również badaniom wydzielone z nich szkielety i igły gąbek, zrosty kwarcowe, glaukonitowe, kalcytowe, barytowe i t. d.

W wyniku badań ustalono, iż prawie wszystkie fosforyty składają się z szeregu różnorodnych substancyj krystalicznych i bezpostaciowych, tworzących w większości przypadków bezładną mieszaninę. W budowie poszczególnych konkrecyj biorą udział: dalit, frankolit, staffelit, grodnolit i kollofan, w fosforytach zaś

---

1) Komunikat niniejszy jest streszczeniem drugiej części opracowywanej obecnie monografji fosforytów.

2) Fosforyty z Lublina otrzymano od prof. dr. J. Lewińskiego, z Iłży od dr. A. Łuniewskiego, z Warszawy od p. Różyckiego, z Pełczy i Wołkowyska od pp. prof. M. Kowalskiego i doc. dr. J. Samsonowicza, z Gdyni i Grodna od p. Kustosza K. Koziorowskiego.

z Lublina i Rachowa także dodatni i ujemny kwersyt [1]). Ułamki drzewa sfosforytyzowanego mają strukturę całkowicie zachowaną, przyczem zwykle środek komórki drzewnej wypełnia masa fosforytu bezpostaciowego, częściowo grodnolitu, częściowo kolofanu, gdy tymczasem ścianki utworzone są z substancji krystalicznej włóknistej, której cechy optyczne przemawiają za staffelitem. Szczególnie wyraźnie uwidocznia się to w przekrojach równoległych do kierunku słojów drzewnych. W poszczególnych konkrecjach, pochodzących z Rachowa, Lublina, Ostroga, Grodna i Wołkowyska, dostrzegamy niekiedy włóknisto-promieniste skupienia substancji fosforytowej, utworzone również ze staffelitu. Wreszcie na uwagę zasługują utwory naciekowe, utworzone ze współśrodkowych naprzemianległych warstw substancji krystalicznej i bezpostaciowej. Ponieważ wszakże wymiary poszczególnych warstewek są niewielkie, trudno jest orzec, jakie substancje fosforytowe biorą udział w ich budowie.

Konkrecje fosforytowe zawierają cały szereg ciał wchłoniętych, względnie substancja fosforytowa spaja ziarna minerałów obcych. Najmniej ziarn minerałów obcych spotykamy w ułamkach drzewa sfosforytyzowanego i utworzonych z włóknistej substancji fosforytowej cienkich skorupkach, jak również powłokach na ośrodkach małży i ślimaków (okolice Czartoryji). Najwięcej stosunkowo ciał obcych zawierają konkrecje piaszczyste i ilaste. Pośrednie miejsce zajmują pseudomorfozy po gąbkach, ośrodki mięczaków i t. d.

Z minerałów obcych zauważono bezpostaciowe i krystaliczne odmiany krzemionki, które obok węglanu wapnia, w postaci kalcytu i okruchów wapienia, występują w największych ilościach.

---

[1]) Dalit jest krystaliczny włóknisty, ujemny; frankolit, oraz jego odmiana włóknista staffelit, są również krystaliczne, posiadają współczynnik załamania światła $n_{śr.} = 1{,}620\ (\pm 5)$.

Kwersyt złożony jest z kolofanu i dalitu lub staffelitu i wykazuje bardzo charakterystyczną budowę sferyczną, w której wyniku poszczególne odmiany substancyj fosforytowych układają się warstewkami naprzemianległemi.

Kolofan i grodnolit są to odmiany substancyj fosforytowych bezpostaciowych. Współczynnik załamania światła dla kolofanu $n_{śr.} = 1{,}590\,(\pm 10)$, dla grodnolitu zaś $n_{śr.} = 1{,}610\ (\pm 5)$.

Najpowszedniejszy jest wszędzie kwarc allogeniczny, często skorodowany i zawierający wrostki hematytu, cyrkonu, rutylu, turmalinu, apatytu, pęcherzyki gazowe i płynne libelki z ciałami obcemi, bliżej nieokreślonemi ze względu na nieznaczny ich wymiar. Pozatem częsty jest kwarc autogeniczny, w poszczególnych przypadkach dobrze krystalograficznie wykształcony. Do rzadkości należą lutecyt i lussait a także włókna kwarcynu. Rzadki jest opal. Zauważono również ziarenka krzemionki bezpostaciowej, pochodzącej z rozkładu (połączonego z wyługowaniem) glaukonitu. Kwarc autogeniczny bywa zazwyczaj zanieczyszczony mniejszą lub większą ilością substancji iłowych. W niektórych fosforytach (Niżniów, Dolina, Odaje i inne) częstym stosunkowo składnikiem jest krzemień. Do mniej pospolitych należą chalcedon i pseudochalcedonit.

W szczelinach ziarn kwarcowych znajduje się niekiedy chloryt, będący również produktem rozkładu spotykanego w niektórych fosforytach (Pełcza, Wołkowysk, Gdynia) biotytu. Biotyt zauważono także obok bardziej pospolitego muskowitu w postaci blaszek i zrostów, dochodzących nieraz do znacznych stosunkowo wymiarów.

Niekiedy muskowit przeobraża się w drobne blaszki serycytu, stanowiącego skądinąd produkt rozkładu skaleni, należących przeważnie do oligoklazu i andezynu. Osobne miejsce pod tym względem zajmuje powszechny, choć w małych ilościach występujący mikroklin. Końcowym produktem rozpadu skaleni jest kaolin, wypełniający niekiedy całkowicie ich ziarna lub też tworzący mniejsze i większe poletka?

Z rozkładem szczególnie częstego w fosforytach Rachowskich i Lubelskich pirytu, markasytu, magnetytu i glaukonitu pozostają w związku skrzepy wodorotlenków żelaza. Również z rozkładem dwóch pierwszych składników związana jest obecność w fosforytach z pod Kazimierza i z Niżniowa cienkich blaszek gipsu, w fosforytach zaś z Horodenki, Niezwisk i innych miejscowości krystalicznego barytu w postaci szkieletów gąbek igiełek i t. d.

W fosforytach z Pełczy dostrzeżono znaczną ilość cyrkonów, rutyli i turmalinów, występujących w postaci kryształów i ziarn otoczonych. Znajdują się one zresztą we wszystkich fosforytach, jednak w ilościach znacznie mniejszych, jak również amfibole i pirokseny (hornblenda, augit) niekiedy znacznie już rozłożone i otoczone powłokami brunatnych produktów rozkładu o przeważających wodorotlenkach żelaza.

W poszczególnych przypadkach zauważono również granaty. Do najrzadziej spotykanych minerałów należą: arfwedsonit (4 ziarna w fosforytach z Rachowa, andaluzyt (Gdynia) i spinele (Pełcza, Rachów).

W związku z warunkami, w jakich tworzyły się fosforyty, pozostaje najprawdopodobniej obecność węglanu wapniowego, występującego przeważnie w postaci kalcytu, w poszczególnych tylko przypadkach w postaci gruzełek wapienia. Nie jest rzeczą wykluczoną, iż niektóre ziarenka kalcytu a również i glaukonitu powstały już po utworzeniu się fosforytów. Ułamki wapienia wykazują znaczne podobieństwo do wapieni jurajskich. To samo dotyczy okruchów piaskowca, spotykanych w fosforytach Bukówny, Niżniowa, Odaj, Doliny, Niezwisk i innych, które wykazują znaczne podobieństwo do szarych piaskowców dewońskich, znajdujących się w spągu warstw fosforytonośnych cenomańskich.

Substancje ilaste i bituminiczne fosforytów nie dały się przy pomocy badań mikroskopowych określić. Stwierdzono jedynie, iż fosforyty cenomańskie, w miarę posuwania się ku wschodowi, zawierają ich coraz więcej. Najwięcej mianowicie zawierają fosforyty z Horodenki i Strzylcza, najmniej fosforyty pochodzące z okolic Wolbromia. Obecność ich w fosforytach pozostaje zapewne w związku z genezą tychże.

Że w genezie fosforytów niepoślednią rolę odgrywały organizmy, wskazuje znaczna ilość resztek tychże. Różnorodność typów jest duża. Spotykamy tu skorupki otwornic, wypełnione niekiedy substancją fosforytową, przy nienaruszonej skorupce kalcytowej, lub też ziarenkami glaukonitu. Dalej spotykamy drobne muszelki zamienione w fosforan wapniowy przy kalcytowem wnętrzu, lub odwrotnie szkielety gąbek i igły sfosforytyzowane, zbarytyzowane, lub kalcytowe należą w fosforytach Buczacza, Niezwisk, Harasymowa, Horodenki i innych do bardzo częstych. Zęby sfosforytyzowane całkowicie lub częściowo nie należą szczególniej w Horodence, Niezwiskach i Rachowie do rzadkości. Drzewo sfosforytyzowane trafia się szczególnie często w Horodence i Rachowie, rzadziej w Niezwiskach. Ośrodki muszli w Buczaczu i Przewłoce oraz powłoki fosforytowe w miejsce skorupek stanowią w Czartoryji lwią część złóż fosforytowych.

Rzadkie pseudomorfozy po belemnitach w Horodence i Rachowie, sfosforytyzowane jeżowce z wymienionej miejscowości świadczą dowodnie o dużym udziale organizmów w procesie tworzenia się fosforytów i złóż fosforytowych W fosforytach, pochodzących z Grodna, Tuczyna i Gdyni, przy usilnych nawet poszukiwaniach szczątek istot obumarłych odnaleźć niepodobna.

Warszawa, 9 maja 1930 r.
Praca wykonana
w Muzeum Historji Naturalnej w Paryżu
Oddział Mineralogiczny.

Antoine Morawiecki.

Etudes microscopiques des phosphorites de Pologne.

Note présentée par M. St. J. Thugutt le 22 Mai 1930.

(Résumé).

Les observations faites sur les phosphorites de Gdynia, de Grodno, de Wołkowysk, de Pełcza, de Tuczyn, de Ostrog, de Chudykowce, de Ujście Biskupie, de Przewłoka, de Buczacz, de Horodenka, de Niezwiska, de Runisowce, de Rakowiec, de Semenówka, de Niżniów, de Odaje, de Bukówna, de Lublin, de Rachów, de Iłża, de Wolbrom, de Nasiłów, de Kazimierz etc., ont démontré la présence de la colophane, de la grodnolite, de la staffelite, de la francolite, de la dhallite et de la quercite positive et négative. On voit ces espèces associées dans des concrétions sablonneuses ou bien dans des pseudomorphoses d'après les débris organiques, p. ex. les dents, le bois phosphatisé etc.

Aux différentes substances phosphatées sont associés toujours des grains des minéraux accessoires, qui sont les moins nombreux dans les pseudomorphoses et les plus nombreux dans les concrétions. Ce sont: le quartz allogénique et autogénique, la glauconie, la silice amorphe, l'opale, le silex corné, la calcédoine, la calcite, les tourmalines, les rutiles, les zircons, les amphiboles, les pyroxènes, les feldspaths, la pyrite, les grenats, l'andalusite, la magné-

tite, la marcasite, la limonite, la muscovite, la biotite, la chlorite, la barytine, le gypse etc.

On rencontre aussi dans les phosphorites des différents débris organiques.

Varsovie le 10 mai 1930.

Stanisław Leśniewski.

O podstawach ontologji.

Przedstawił J. Łukasiewicz dnia 22 maja 1930 r.

Stanisław Leśniewski.

Über die Grundlagen der Ontologie.

Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz à la séance du 22 Mai 1930.

Im J. 1927 begann ich im *Przegląd Filozoficzny* den Druck einer grösseren Arbeit (in polnischer Sprache) u. d. T. *„Über die Grundlagen der Mathematik"*. Bis heute sind folgende Teile dieser Arbeit erschienen (zusammen — 142 Druckseiten):

1) Einleitung. Abschnitt I: *Über einige Fragen, die den Sinn „logistischer" Thesen betreffen.* Abschnitt II: *Über die „Antinomie" des Herrn Russell, die die „Klasse der Klassen, welche nicht eigene Elemente sind" betrifft.* Abschnitt III: *Über verschiedene Verstehungsweisen der Worte „Klasse" und „Menge".* [*Przegląd Filozoficzny.* Jahrbuch 30. Heft II—III. 1927.]

2) Abschnitt IV: *Über „Die Grundlagen der allgemeinen Mengenlehre. I".*[1] [*Przegląd Filozoficzny.* Jahrbuch 31. Heft III. 1928.]

3) Abschnitt V: *Weitere Theoreme und Definitionen der „allgemeinen Mengenlehre", die aus der Zeitperiode bis zum J. 1920 einschliesslich stammen.* [*Przegląd Filozoficzny.* Jahrbuch 32. Heft I—II. 1929.]

---

[1] Es ist hier von meiner im Jahre 1917 in Moskau erschienenen polnischen Arbeit unter diesem Titel die Rede.

4) Abschnitt VI: *Aus dem J. 1918 stammende Axiomatik der „allgemeinen Mengenlehre"*. Abschnitt VII: *Aus dem J. 1920 stammende Axiomatik der „allgemeinen Mengenlehre"*. Abschnitt VIII: *Über einige von den Herren Kuratowski und Tarski festgestellten Bedingungen, die ausreichend und notwendig sind, damit P die Klasse der a sei.* Abschnitt IX: *Weitere Theoreme der „allgemeinen Mengenlehre", die aus den Jahren 1921—1923 stammen.* [*Przegląd Filozoficzny.* Jahrbuch 33. Heft I und II. 1930.]

Trotz beständig gastfreundlicher und geduldiger Zuvorkommenheit, mit der die Redaktion des *Przegląd Filozoficzny* mir die Spalten dieser Zeitschrift zur Verfügung stellt, wird der Druck meiner erwähnten Abhandlung über die Grundlagen der Mathematik — wegen bedeutender Dimension dieser Abhandlung — gewiss noch längere Zeit dauern. Indem ich diese Sachlage, die übrigens von mir von Anfang an vorausgesehen wurde und die technisch unvermeidlich ist, in Betracht zog, habe ich mich im J. 1928 entschlossen, eine kürzere Mitteilung im Druck zu veröffentlichen, die in einer etwas anderen Anordnung verschiedene Resultate meiner mehr als zehnjährigen Untersuchungen aus dem Gebiete der Grundlagen der Mathematik zusammenfassen würde, welche Resultate ich eingehender in der im *Przegląd Filozoficzny* gedruckten Arbeit bespreche. Den Druck der kürzeren Mitteilung, von der die Rede ist, begann ich im J. 1929 (in deutscher Sprache) in den *Fundamenta Mathematicae*. [Vgl.: Stanisław Leśniewski. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*. Einleitung und §§ 1—11. Sonderabdruck (mit unveränderter Pagination) aus dem XIV Bande der *Fundamenta Mathematicae*. Warszawa, 1929. 81 Druckseiten.] Den schon in demselben J. 1929 von mir derselben Zeitschrift eingereichten und von der Redaktion zum Druck akzeptierten Teil der Fortsetzung der erwähnten deutschen Mitteilung habe ich im J. 1930 aus Gründen persönlicher Natur aus den *Fundamenta Mathematicae* zurückgezogen. In dieser Sachlage ist es mir schwer vorauszusehen, ob, wo und wann ich für die genannte Publikation Platz finden könnte.

Die Umstände haben sich so gestaltet, dass die bisher im Druck veröffentlichten Abschnitte meiner polnischen Arbeit über die Grundlagen der Mathematik in Hinsicht auf ihren Inhalt von den in den *Fundamenta Mathematicae* publizierten Paragraphen meiner deutschen Mitteilung völlig verschieden sind: In meiner polnischen Abhandlung bewegte ich mich beinahe ausschliesslich im Gebiete der Probleme der „Mereologie" (anders von mir „allgemeine Mengenlehre" genannt). In der deutschen Mitteilung bearbeitete ich verschiedene Fragen aus dem Gebiete der „Protothetik", die die erste der zu meinem System der Grundlagen der Mathematik gehörenden Theorien bildet. In der erwähnten Mitteilung habe ich im besonderen das kürzeste der mir bisher bekannten Axiome dieser „Protothetik" veröffentlicht, welche mit Hilfe des Äquivalenzzeichens, als des einzigen primitiven Termins, formuliert sind [1], und auch habe ich dort eine Direktivenkombination eines sorgfältig „formalisierten" Systems der „Protothetik" festgesetzt, das man auf dem genannten Axiom aufbauen könnte [2].

Das Ziel meiner jetzigen Mitteilung besteht darin, ein einziges Axiom und eine Direktivenkombination eines sich auf die Protothetik stützenden „formalisierten" Systems meiner „Ontologie" [3] darzulegen. Ich wollte nicht länger mit der Publikation dieses Systems — wenigstens in einer gerade solchen „potenziellen", das heisst keine Theoreme des Systems enthaltenden, Gestalt — zögern [4]. Aus dem einzigen Axiom der Protothetik und dem einzigen Axiom der Ontologie lässt sich mit Hilfe der Direktiven dieser Theorien das ganze „formalisierte" System der Grundlagen

---

[1] *Op. cit.*, S. 59.

[2] *Op. cit.*, S. 76.

[3] Vgl. *op. cit.*, S. 5.

[4] Eine allgemeine Charakteristik meiner „Ontologie", die seit lange einem weiteren Kreise meiner Fachkollegen und Schüler in Manuskripten respektive aus meinen Universitätsvorlesungen bekannt wurde, das weiter unten folgende Axiom dieser Theorie und eine Auswahl ihrer grundlegenden Definitionen und Theoreme (dies alles mit systematischen Berufungen auf meine diesbezüglichen Resultate) kann man in dem polnischen Werke meines Freundes Tadeusz Kotarbiński u. d. T. *„Elemente der Erkenntnistheorie, der formalen Logik und der Methodologie der Wissenschaften"* (Lwów, 1929, VIII + 483 Druckseiten) finden (vgl. SS. 227—254 und 459 dieses lehrreichen Werkes). Vgl. auch: *Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et de lettres de Varsovie.* XIX. 1926. Classe III. A. Lindenbaum et A. Tarski. *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*. SS. 299, 312, 322, 323 und 326.

der Mathematik ableiten, welches in Hinsicht auf seinen Inhalt mit den *Principia mathematica* der Herren Whitehead und Russell [1] im groben analog ist.

Aus sachlichen und terminologischen Rücksichten muss hier vorausgesetzt werden, dass der Leser wenigstens mit dem § 11 meiner oben erwähnten Mitteilung in *Fundamenta Mathematicae* schon vertraut ist.

Abgesehen von Funktionen, welche schon in der Protothetik vorkommen, operiert noch das von mir konstruierte System der Ontologie mit einer speziellen primitiven Funktion „$\varepsilon\{A\ a\}$", in der der Termin „ε" ein konstantes Funktionszeichen ist [2], während die Ausdrücke „A" und „a" als zwei Namenargumente auftreten. Ausdrücke vom Typus „$\varepsilon\{A\ a\}$" sollen, was ihre Bedeutung anbetrifft, als den entsprechenden Individualsätzen vom Typus „A est a" der lateinischen Sprache äquivalent betrachtet werden (ich appelliere hier an die lateinische Sprache, indem ich mich unter anderem von vorn herein von zahlreichen und verschiedenartigen bekannten Problemen unabhängig machen will, mit welchen man in mehreren Sprachen, wie z. B. in der deutschen, englischen oder französischen, im Zusammenhang mit bestimmten und unbestimmten Artikeln zu tun hat, und indem ich keine mit den erwähnten Problemen verbundenen logischen Scheinprobleme besprechen möchte, welche die „substantivische" oder „adjektivische" Form der Satzprädikate betreffen).

Das einzige (aus dem J. 1920 stammende) Axiom meiner Ontologie könnte man mittels bekannter „Peano-Russellscher" Symbolik auf folgende Weise aufschreiben:

$$(A, a) :: \varepsilon\{A\ a\} . \equiv .\therefore \sim \Big((B) . \sim \big(\varepsilon\{B\ A\}\big)\Big) .\therefore (B, C) : \varepsilon\{B\ A\} . \varepsilon\{C\ A\} . \supset . \varepsilon\{B\ C\} .\therefore (B) : \varepsilon\{B\ A\} . \supset . \varepsilon\{B\ a\}$$ [3].

---

[1] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Second Edition. Cambridge. Volume I. 1925. Volume II. 1927. Volume III. 1927.

[2] Vgl.: *Formulaire de Mathématiques*. Tome II — § 1. G. Peano. *Logique mathématique*. 11-VIII-1897. S. 20.

[3] Wenn man über den „partikulären" Quantifikator verfügen würde, was in meinem System nicht der Fall ist (vgl.: Leśniewski, *op. cit.*, S. 77, *D*), könnte man im Axiom statt „$\sim \Big((B) . \sim \big(\varepsilon\{B\ A\}\big)\Big)$" einfach „$(\exists B) . \varepsilon\{B\ A\}$" schreiben. Im Zusammenhang mit dem Inhalt meines Axioms vgl. die Analyse des Satzes „the author of *Waverley* was Scotch" in dem

In meiner eigenen Symbolik hat dieses Axiom folgende Gestalt [Ausdrücke vom Typus „$\vdash(p)$“, „$\underset{|}{\circ}(pq)$“, „$\underset{|}{\circ}(pqr)$“ und „$\overset{|}{\underset{|}{\circ}}\!-(pq)$“, die hier als schon in der Protothetik definiert vorausgesetzt werden müssen, sollen entsprechende Ausdrücke vom Typus „$\sim p$“, „$p.q$“, „$p.q.r$“ und „$p \supset q$“ der „Peano-Russellschen“ Symbolik vertreten]:

$$\textit{Axiom 0.}\quad \lfloor A\,a \rfloor \ulcorner \overset{|}{\underset{|}{\circ}}\left(\varepsilon\{A\,a\}\underset{|}{\circ}\left(\vdash\left(\lfloor B\rfloor\ulcorner\vdash\left(\varepsilon\{B\,A\}\right)\urcorner\right)\lfloor B\;C\rfloor\ulcorner\overset{|}{\underset{|}{\circ}}\!-\left(\underset{|}{\circ}\left(\varepsilon\{B\,A\}\,\varepsilon\{C\,A\}\right)\varepsilon\{B\,C\}\right)\urcorner\lfloor B\rfloor\ulcorner\overset{|}{\underset{|}{\circ}}\!-\left(\varepsilon\{B\,A\}\,\varepsilon\{B\,a\}\right)\urcorner\right)\right)\urcorner$$

Ich trete jetzt an das Problem der Konstruktionsmethode meines auf dem *Axiom 0* aufgebauten Systems der Ontologie heran. Der Sinn eines Teils der in der Vorschrift, betreffend diese Konstruktionsmethode, vorkommenden Ausdrücke ist von mir schon in den „terminologischen Erklärungen“ zur Protothetik im § 11 meiner in den *Fundamenta Mathematicae* veröffentlichten Mitteilung festgesetzt worden. Den Sinn der übrigen in Rede stehenden Ausdrücke setze ich weiter unten in einer Reihe neuer „terminologischer Erklärungen“ fest.

Es soll hier bemerkt werden, dass in der authentischen Redaktion meines Systems der Grundlagen der Mathematik das System der Ontologie auf das System der Protothetik folgt. Das System der Protothetik besteht in dieser authentischen Redaktion aus dem Axiom der Protothetik und einer endlichen Anzahl konkreter, „effektiv“ zum System hinzugefügter, Thesen des Systems. Nur solche Thesen, die eben schon „effektiv“ zu dem System der Protothetik gehören (nicht aber auch verschiedene andere Thesen, welche man in Übereinstimmung mit den Direktiven der Protothetik zum System noch hinzufügen könnte), werden von mir beim Aufbauen des Systems der Ontologie in Betracht gezogen. Zur Bezeichnung der Thesen, die in dem Moment, in dem ich das Aufbauen meines Systems der Ontologie anfange, „effektiv“ zu meinem erwähnten System der Protothetik gehören, will ich in dieser Mitteilung den Ausdruck „efthp“ gebrauchen.

Werke des Herrn Bertrand Russell u. d. T. *„Introduction to mathematical Philosophy“* (London, New York, second edition April 1920), S. 177. Vgl. auch: Kotarbiński. *Op. cit.*. SS. 227—229.

[Es wird vorausgesetzt, dass in dem *Axiom 0* vorkommende Ausdrücke vom Typus „⊢ (p)“, „♀ (pq)“, „♀ (pqr)“ und „⦶– (pq)“ in dem genannten Moment auch schon in den Thesen des Systems der Protothetik „effektiv“ vorkommen. Es wird auch vorausgesetzt, dass die Parenthesen „{“ und „}“ mit keinen in der Protothetik „effektiv“ vorkommenden Parenthesen gleichgestaltet sind.] Der Ausdruck „AO“ soll als eine Abkürzung des Ausdrucks „*Axiom 0*“, der Ausdruck „tho“ [1] — als eine Abkürzung des Ausdrucks „These dieses Systems der Ontologie“ gelten. In solchen Fällen, wo $A \varepsilon$ efthp, während $B \varepsilon$ tho, darf ich immer in Übereinstimmung mit den obigen Erläuterungen behaupten, dass $A \varepsilon$ prcd (B).

Terminologische Erklärung XXXII°. [2] $[A, B] \therefore A \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . \equiv : A \varepsilon \mathrm{efthp} . \vee . A \varepsilon \mathrm{tho} :$
$B \varepsilon \mathrm{tho} :$
$A \varepsilon \mathrm{prcd}\,(B) . \vee . A \varepsilon \mathrm{Id}\,(B)$ [3]

Term. Erkl. XXXIII°. $[A, B] \therefore A \varepsilon \mathrm{fro}\,(B) . \equiv : A \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . \vee . [\exists C, D] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(C) . A \varepsilon \mathrm{Arg1}\,(D) . \vee . [\exists C, D] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(C) . A \varepsilon \mathrm{Arg2}\,(D) . \vee . [\exists C, D] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . D \varepsilon \mathrm{sbqntf} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(C) . A \varepsilon \mathrm{Cmpl}\,\big(\mathrm{int}\,(D)\big)$

T. E. XXXIV°. $[A, B, C] \therefore A \varepsilon \mathrm{1homosemo}\,(B, C) . \equiv : A \varepsilon \mathrm{fro}\,(C) . B \varepsilon \mathrm{fro}\,(C) . \vee . [\exists D, E] . D \varepsilon \mathrm{tho}\,(C) . E \varepsilon \mathrm{ingr}\,(D) . A \varepsilon \mathrm{cnvar}\,(B, E) . \vee . [\exists D, E, F, G] . D \varepsilon \mathrm{tho}\,(C) . E \varepsilon \mathrm{ingr}\,(D) . F \varepsilon \mathrm{tho}\,(C) . G \varepsilon \mathrm{ingr}\,(F) . A \varepsilon \mathrm{An}\,(B, E, G)$

T. E. XXXV°. $[A, B, C] :: A \varepsilon \mathrm{homosemo}\,(B, C) . \equiv :\cdot: A \varepsilon \mathrm{1homosemo}\,(A, C) . B \varepsilon \mathrm{1homosemo}\,(B, C) :\cdot: [a] :: [D] : D \varepsilon a . \supset . D \varepsilon \mathrm{1homosemo}\,(D, C) \therefore [D, E] : D \varepsilon a . E \varepsilon \mathrm{1homosemo}\,(D, C) . \supset . E \varepsilon a \therefore B \varepsilon a \therefore \supset . A \varepsilon a$ [4]

---

[1] Vgl.: Leśniewski. *Op. cit.*. SS. 68 und 69.

[2] „Terminologische Erklärungen“ dieser Mitteilung werden von mir numeriert mit stetiger Berücksichtigung ihrer weitgehenden Analogie mit den entsprechenden „terminologischen Erklärungen“ des § 11 meines *op. cit.*.

[3] Auf „terminologische Erklärungen“ dieser Mitteilung bezieht sich die Fussnote 1 der Seite 63 des *op. cit.*.

[4] Auf die *T. E. XXXV°* bezieht sich *mutatis mutandis* die Fussnote 1 der Seite 68 des *op. cit.*. Die Ausdrücke vom Typus „$A \varepsilon$ homosemo (B, C)“ könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist mit Rücksicht auf die These C, die schon zu dem System der Ontologie gehört, ein Ausdruck von derselben semantischen Kategorie, wie B“ ablesen.

T. E. XXXVI°. $[A, B, C, D, E] :: A \mathrel{\varepsilon} \text{consto}\,(B, C, D, E) .$
$= \therefore D \mathrel{\varepsilon} \text{homosemo}\,(E, B) \therefore$
$[F, G] : G \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(B) . F \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(G) . \supset . D \mathrel{\varepsilon} \sim \big(\text{cnvar}\,(D, F)\big) \therefore$
$A \mathrel{\varepsilon} \text{cnf}\,(D) :$
$[\exists F, G, H] . F \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(C) . G \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(B) . H \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(G) . A \mathrel{\varepsilon}$
$\text{An}\,(E, F, H)$

T. E. XXXVII°. $[A, B, C] : A \mathrel{\varepsilon} \text{consto}\,(B, C) . = . [\exists D,$
$E] . A \mathrel{\varepsilon} \text{consto}\,(B, C, D, E)$

T. E. XXXVIII°. $[A, B, C, D, E, F] \therefore A \mathrel{\varepsilon} \text{quasihomosemo}$
$(B, C, D, E, F) . = : E \mathrel{\varepsilon} \text{homosemo}\,(F, C) :$
$[\exists G, H, I] . G \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(D) . H \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(C) . I$
$\mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(H) . A \mathrel{\varepsilon} \text{An}\,(E, G, I) :$
$[\exists G, H, I] . G \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(D) . H \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(C) . I$
$\mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(H) . B \mathrel{\varepsilon} \text{An}\,(F, G, I)$

T. E. XXXIX°. $[A, B, C, D, E] \therefore A \mathrel{\varepsilon} \text{fncto}\,(B, C, D,$
$E) . = : D \mathrel{\varepsilon} \text{homosemo}\,(E, B) .$
$A \mathrel{\varepsilon} \text{genfnct}\,(D) :$
$[\exists F, G, H] . F \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(C) . G \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(B) . H \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(G) . A \mathrel{\varepsilon}$
$\text{An}\,(E, F, H)$

T. E. XL°. $[A, B, C, D, E, F] \therefore A \mathrel{\varepsilon} \text{varo}\,(B, C, D, E,$
$F) . = : E \mathrel{\varepsilon} \text{homosemo}\,(B, C) :$
$[\exists G, H, I] . G \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(D) . H \mathrel{\varepsilon} \text{tho}\,(C) . I \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(H) . F \mathrel{\varepsilon}$
$\text{An}\,(E, G, I) :$
$F \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,\Big(\text{Eqvl1}\,\big(\text{Essnt}\,(D)\big)\Big) .$
$A \mathrel{\varepsilon} \text{cnvar}\,(F, D)$

T. E. XLI°. $[A, B, C, D, E] :: A \mathrel{\varepsilon} \text{propprntmo}\,(B, C,$
$D, E) . = \therefore D \mathrel{\varepsilon} \text{homosemo}\,(B, B) .$
$E \mathrel{\varepsilon} \text{prntm}\,(D) .$
$A \mathrel{\varepsilon} \text{prntm}\,\Big(\text{Eqvl2}\,\big(\text{Essnt}\,(C)\big)\Big) .$
$\text{arg}\,(A) \infty\ \text{arg}\,(E) \therefore$
$[F, G] : F \mathrel{\varepsilon} \text{arg}\,(A) . G \mathrel{\varepsilon} \text{arg}\,(E) . \big(\text{arg}\,(A) \cap \text{prcd}$
$(F)\big) \infty \big(\text{arg}\,(E) \cap \text{prcd}\,(G)\big) . \supset . [\exists H, I] . F \mathrel{\varepsilon} \text{varo}\,(G, B, C,$
$H, I)$

T. E. XLII°. $[A, B, C, D, E] : A \mathrel{\varepsilon} \text{1propprntmo}\,(B, C,$
$D, E) . = . A \mathrel{\varepsilon} \text{propprntmo}\,(B, C, D, E) .$
$\text{Uingr}\,(D) \mathrel{\varepsilon} \text{ingr}\,(E)$

T. E. XLIII°. $[A, B, C, D, E, F, G] : A \varepsilon \text{ 2propprntmo } (B, C, D, E, F, G) . = . A \varepsilon \text{ propprntmo } (B, C, D, E) .$
$F \varepsilon \text{ prntm } (D) .$
$\text{Uprcd } (F) \varepsilon \text{ ingr } (E) .$
$G \varepsilon \text{ simprntm } (F)$

T. E. XLIV°. $[A, B] :\cdot: A \varepsilon \text{ 1defo } (B)$ [1] $. = :: \text{1ingr } \big(\text{Essnt } (A)\big) \varepsilon \sim \Big(\text{cnvar } \Big(\text{1ingr } \big(\text{Essnt } (A)\big), A\Big)\Big) .$

$\text{1ingr } \Big(\text{Eqvl2 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big) \varepsilon \sim \bigg(\text{cnvar } \bigg(\text{1ingr } \Big(\text{Eqvl2 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big), A\bigg)\bigg) .$

$\text{1ingr } \Big(\text{Eqvl2 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big) \varepsilon \sim \big(\text{consto } (B, A)\big) ::$

$[C] \therefore C \varepsilon \text{ trm } . C \varepsilon \text{ ingr } \Big(\text{Eqvl1 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big) . \supset : [\exists D] . D \varepsilon \text{ qntf } . D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ int } (D) . \vee . [\exists D, E] . D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ var } (E, D) . \vee . C \varepsilon \text{ consto } (B, A) ::$

$[C, D] : D \varepsilon \text{ qntf } . D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ int } (D) . \supset . [\exists E, F] . E \varepsilon \text{ ingr } (A) . F \varepsilon \text{ var } (C, E) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon \text{ int } \big(\text{Qntf } (A)\big) . E \varepsilon \text{ prntm } \big(\text{Essnt } (A)\big) . D \varepsilon \text{ arg } (E) . \supset . [\exists F] . F \varepsilon \text{ ingr } (D) . F \varepsilon \text{ var } (C, A) ::$

$[C, D, E] \therefore C \varepsilon \text{ ingr } \Big(\text{Eqvl1 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big) . E \varepsilon \text{ ingr } (A) . D \varepsilon \text{ cnvar } (C, E) . D \varepsilon \text{ ingr } \Big(\text{Eqvl1 } \big(\text{Essnt } (A)\big)\Big) . \supset : D \varepsilon \text{ Id } (C) . \vee . [\exists F, G] . D \varepsilon \text{ quasihomosemo } (C, B, A, F, G) ::$

$[C] : C \varepsilon \text{ gnrl } . C \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \sim \big(\text{Id } (A)\big) . \supset . [\exists D, E, F, G] . D \varepsilon \text{ homosemo}$

---

[1] Die Ausdrücke vom Typus „$A \varepsilon$ 1defo (B)“ könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist ein Ausdruck, der in dem System der Ontologie unmittelbar nach der These B als eine Definition erster Art gelten könnte“ ablesen.

$(B, B) . E \varepsilon$ tho $(B) . F \varepsilon$ ingr $(E) . G \varepsilon$ ingr $(A) . D \varepsilon$ Anarg (C, F, G)::

$[C, D] \therefore C \varepsilon$ gnrl $. C \varepsilon$ ingr $(A) . D \varepsilon$ Essnt $(C) . \supset : D \varepsilon$ vrb $. \vee . [\exists E] . E \varepsilon$ fro $(B) . D \varepsilon$ genfnct (E)::

$[C] \therefore C \varepsilon$ fnct $. C \varepsilon$ ingr $\big($Eqvl1 $($Essnt $(A))\big) . \supset : [\exists D] . D \varepsilon$ gnrl $. D \varepsilon$ ingr $(A) . C \varepsilon$ Essnt $(D) . \vee . [\exists D, E] . C \varepsilon$ fncto (B, A, D, E)::

$[C] : C \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . \supset . [\exists D] . D \varepsilon$ arg $(C) \therefore$

$[C, D] : C \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . D \varepsilon$ arg $(C) . \supset . [\exists E] . D \varepsilon$ var $(E, A) \therefore$

$[C, D] : C \varepsilon$ trm $. C \varepsilon$ ingr $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . D \varepsilon$ trm $. D \varepsilon$ ingr $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . C \varepsilon$ cnf $(D) . \supset . C \varepsilon$ Id $(D) \therefore$

$[C, D] : C \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . D \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . C \varepsilon$ simprntm $(D) . \supset . C \varepsilon$ Id $(D) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon$ 1propprntmo (B, A, D, E). Uingr $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) \varepsilon$ ingr $(C) . \supset . C \varepsilon$ simprntm $(E) \therefore$

$[C, D, E, F, G] : C \varepsilon$ 2propprntmo $(B, A, D, E, F, G) . G \varepsilon$ ingr (A). Uprcd $(G) \varepsilon$ ingr $(C) . \supset . C \varepsilon$ simprntm $(E) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big)$. Uingr $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) \varepsilon$ ingr $(C) . D \varepsilon$ tho $(B) . E \varepsilon$ ingr $(D) . C \varepsilon$ simprntm $(E) . \supset . [\exists F, G] . C \varepsilon$ 1propprntmo $(B, A, F, G) \therefore$

$[C, D, E, F] : C \varepsilon$ prntm $\big($Eqvl2 $($Essnt $(A))\big) . D \varepsilon$ prntm $. D \varepsilon$ ingr (A). Uprcd $(D) \varepsilon$ ingr $(C) . E \varepsilon$ tho $(B) . F \varepsilon$ ingr $(E) . C \varepsilon$ simprntm $(F) . \supset . [\exists G, H, I] . C \varepsilon$ 2propprntmo (B, A, G, H, I, D)

*T. E. XLVII*⁰. $[A, a, B, C] \therefore\!: A \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnsqsbsto}\,(B, C, a)$ [1] $.=:: \mathrm{Essnt}\,(A) \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Cmpl}\,(a).$

$a \infty \mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr)::$

$[D, E] \therefore D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) . E \mathrel{\varepsilon} a . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(E)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(D)\Bigr) . \supset : [\exists F] . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(F, C) . \vee . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnf}\,(E)::$

$[D, E] \therefore D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) . E \mathrel{\varepsilon} a . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(E)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(D)\Bigr) . \supset : E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{trm} . \vee . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{gnrl} . \vee . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{fnct} . \vee . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnf}\,(D)::$

$[D, E, F, G] : D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnvar}\,(E, C) . F \mathrel{\varepsilon} a . G \mathrel{\varepsilon} a . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(F)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(D)\Bigr) . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(G)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(E)\Bigr) . \supset . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnf}\,(G) \therefore$

$[D, E, F, G, H, I, K, L] : D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,\bigl(\mathrm{Essnt}\,(C)\bigr) . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Qntf}\,(D)\bigr) . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(K, C) . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(D) . G \mathrel{\varepsilon} a . H \mathrel{\varepsilon} a . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(G)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(E)\Bigr) . \bigl(a \cap \mathrm{prcd}\,(H)\bigr) \infty \Bigl(\mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Sbqntf}\,(C)\bigr) \cap \mathrm{prcd}\,(F)\Bigr) . L \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . I \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(G, L) . \supset . I \mathrel{\varepsilon} \sim \bigl(\mathrm{ingr}\,(H)\bigr)::$

$[D, E] \therefore D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,\bigl(\mathrm{Qntf}\,(A)\bigr) . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnf}\,(D) . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(C) . \supset : [\exists F] . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{qntf} . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(C) . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,(F) . \vee . [\exists F, G] . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(C) . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(G, F)::$

$B \mathrel{\varepsilon} \mathrm{expr}::$

$[D] \therefore D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{trm} . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . \supset : [\exists E] . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{qntf} . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,(E) . \vee . [\exists E, F] . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(F, E) . \vee . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{consto}\,(B, A)::$

$[D, E] : E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{qntf} . E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . D \mathrel{\varepsilon} \mathrm{int}\,(E) . \supset . [\exists F, G] . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . G \mathrel{\varepsilon} \mathrm{var}\,(D, F)::$

$[D, E, F] \therefore E \mathrel{\varepsilon} \mathrm{ingr}\,(A) . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnvar}\,(D, E) . \supset : F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Id}\,(D) . \vee . [\exists G, H] . F \mathrel{\varepsilon} \mathrm{quasihomosemo}\,(D, B, A, G, H)::$

---

[1] Die Ausdrücke vom Typus „$A \mathrel{\varepsilon} \mathrm{cnsqsbsto}\,(B, C, a)$" könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist aus C mit Hilfe der Ausdrücke a mittels einer in der Ontologie mit Rücksicht auf B korrekten Einsetzung ableitbar" ablesen.

$[D]:D \varepsilon \mathrm{gnrl} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . D \varepsilon \sim\big(\mathrm{Id}\,(A)\big) . \supset . [\exists E, F, G, H] . E \varepsilon \mathrm{homosemo}\,(B, B) . F \varepsilon \mathrm{tho}\,(B) . G \varepsilon \mathrm{ingr}\,(F) . H \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . E \varepsilon \mathrm{Anarg}\,(D, G, H) ::$

$[D, E] \therefore D \varepsilon \mathrm{gnrl} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . E \varepsilon \mathrm{Essnt}\,(D) . \supset : E \varepsilon \mathrm{vrb} . \vee . [\exists F] . F \varepsilon \mathrm{fro}\,(B) . E \varepsilon \mathrm{genfnct}\,(F) ::$

$[D] \therefore D \varepsilon \mathrm{fnct} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . \supset : D \varepsilon \mathrm{Id}\,(A) . \vee . [\exists E] . E \varepsilon \mathrm{gnrl} . E \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . D \varepsilon \mathrm{Essnt}\,(E) . \vee . [\exists E, F] . D \varepsilon \mathrm{fncto}\,(B, A, E, F)$

T. E. XLVIII⁰. $[A, B, C]: A \varepsilon \mathrm{cnsqsbsto}\,(B, C) . = . [\exists a] . A \varepsilon \mathrm{cnsqsbsto}\,(B, C, a)$

T. E. IL⁰. $[A, B] :\cdot: A \varepsilon \mathrm{1extnsnlo}\,(B) . = :: [\exists C, D] . C \varepsilon \mathrm{int}\big(\mathrm{Qntf}\,(A)\big) . D \varepsilon \mathrm{int}\big(\mathrm{Qntf}\,(A)\big) . C \varepsilon \mathrm{prcd}\,(D) \therefore$

$[C, D] : D \varepsilon \mathrm{qntf} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . C \varepsilon \mathrm{int}\,(D) . \supset . [\exists E, F] . E \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . F \varepsilon \mathrm{var}\,(C, E) . F \varepsilon \sim\Big(\mathrm{cnf}\Big(\mathrm{1ingr}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\Big)\Big) \therefore$

$[\exists C] . C \varepsilon \mathrm{prntm}\Bigg(\mathrm{Eqvl1}\bigg(\mathrm{Essnt}\bigg(\mathrm{Eqvl2}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg) . \mathrm{1ingr}\Bigg(\mathrm{Eqvl1}\Bigg(\mathrm{Cmpl}\Bigg(\mathrm{int}\Bigg(\mathrm{Sbqntf}\bigg(\mathrm{Eqvl1}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \varepsilon \mathrm{cnvar}\Big(\mathrm{Cmpl}\big(\mathrm{int}\,(C)\big), A\Big) :$

$[\exists C] . C \varepsilon \mathrm{prntm}\Bigg(\mathrm{Eqvl2}\bigg(\mathrm{Essnt}\bigg(\mathrm{Eqvl2}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg) . \mathrm{1ingr}\Bigg(\mathrm{Eqvl2}\bigg(\mathrm{Essnt}\bigg(\mathrm{Eqvl1}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg) \varepsilon \mathrm{cnvar}\Big(\mathrm{Cmpl}\big(\mathrm{int}\,(C)\big), A\Big) ::$

$[C] \therefore C \varepsilon \mathrm{fnct} . C \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . \supset : [\exists D] . D \varepsilon \mathrm{gnrl} . D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . C \varepsilon \mathrm{Essnt}\,(D) . \vee . [\exists D, E] . C \varepsilon \mathrm{fncto}\,(B, A, D, E) ::$

$[C, D, E, F] : D \varepsilon \mathrm{prntm}\Bigg(\mathrm{Eqvl1}\bigg(\mathrm{Essnt}\bigg(\mathrm{Eqvl1}\Big(\mathrm{Essnt}\,(A)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg) . E \varepsilon \mathrm{prntm}\bigg(\mathrm{Eqvl2}\bigg(\mathrm{Essnt}$

$\Big($Eqvl1 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)\Big)\Big)$. F ε Anarg (C, D, E) . ⊃ . F ε cnvar $\Big(C$, Eqvl1 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)$ ∴

[C, D, E] : D ε ingr (A) . E ε cnvar (C, D) . ⊃ . [∃ F, G] . E ε quasihomosemo (C, B, A, F, G) ∴

[C, D] : D ε cnvar $\Big(C$, Eqvl1 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)$. ⊃ . [∃ E, F] . E ε ingr (A) . F ε ingr (A) . D ε Anarg (C, E, F) ∴

[C, D, E] : C ε prntm $\Big($Essnt $\big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\big)\Big)$. D ε arg (C) . E ε Sgnfnct (D) . ⊃ . E ε var $\Bigg($Cmpl $\bigg($int $\Big($Qntf $\big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\big)\Big)\bigg)$, Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Bigg)$

T. E. L°. [A, B] :: A ε cnjnct (B) . = ∴ Sgnfnct (B) ε cnf $\big($13ingr (A0)$\big)$ ∴

[∃ C] : C ε prntm (B) : A ε Arg1 (C) . ∨ . A ε Arg2 (C)

T. E. LI°. [A, B] ∴ A ε Sbjct (B) . = : Sgnfnct (B) ε cnf $\big($8ingr (A0)$\big)$:

[∃ C, D] . C ε prntm (B) . D ε ingr (A0) . A ε Anarg $\big($10ingr (A0), C, $D\big)$

T. E. LII°. [A, B] ∴ A ε Prdct (B) . = : Sgnfnct (B) ε cnf $\big($8ingr (A0)$\big)$:

[∃ C, D] . C ε prntm (B) . D ε ingr (A0) . A ε Anarg $\big($11ingr (A0), C, $D\big)$

T. E. LIII°. [A, B, C, D, E] :: A ε nomprntmo (B, C, D, E) . = ∴ D ε homosemo $\big($10ingr (A0), $B\big)$.

E ε prntm (D) .

A ε prntm $\Big($Prdct $\big($Eqvl2 $\big($Essnt $(C)\big)\big)\Big)$.

arg $(A) \infty$ arg $(E) \therefore$

$[F, G] : F \varepsilon$ arg $(A) . G \varepsilon$ arg $(E) . \big($arg $(A) \cap$ prcd $(F)\big)$ $\infty \big($arg $(E) \cap$ prcd $(G)\big) . \supset . [\exists H, I] . F \varepsilon$ varo (G, B, C, H, I)

T. E. LIV°. $[A, B, C, D, E] : A \varepsilon$ 1nomprntmo $(B, C, D, E) . = . A \varepsilon$ nomprntmo (B, C, D, E).

Uingr $(D) \varepsilon$ ingr (E)

T. E. LV°. $[A, B, C, D, E, F, G] : A \varepsilon$ 2nomprntmo $(B, C, D, E, F, G) . = . A \varepsilon$ nomprntmo (B, C, D, E).

$F \varepsilon$ prntm (D).

Uprcd $(F) \varepsilon$ ingr (E).

$G \varepsilon$ simprntm (F)

T. E. LVI°. $[A, B] :\cdot: A \varepsilon$ 2defo (B) [1] $. = ::$ 1ingr $\big($Essnt $(A)\big) \varepsilon \sim \Big($cnvar $\big($1ingr $\big($Essnt $(A)\big), A\big)\Big)$.

1ingr $\Big($Eqvl1 $\big($Essnt $(A)\big)\Big) \varepsilon \sim \Big($cnvar $\Big($1ingr $\Big($Eqvl1 $\big($Essnt $(A)\big)\Big), A\Big)\Big)$.

1ingr $\Big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Big) \varepsilon \sim \Big($cnvar $\Big($1ingr $\Big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Big), A\Big)\Big)$.

1ingr $\Big($Prdct $\Big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)\Big) \varepsilon \sim \Big($cnvar $\Big($1ingr $\Big($Prdct $\Big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)\Big), A\Big)\Big)$.

1ingr $\Big($Prdct $\Big($Eqvl2 $\big($Essnt $(A)\big)\Big)\Big) \varepsilon \sim \big($consto $(B, A)\big) ::$

[1] Die Ausdrücke vom Typus „$A \varepsilon$ 2defo (B)" könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist ein Ausdruck, der in dem System der Ontologie unmittelbar nach der These B als eine Definition zweiter Art gelten könnte" ablesen.

$$[C] \therefore C \varepsilon \mathrm{trm} . C \varepsilon \mathrm{ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right) . \supset : [\exists D] . D \varepsilon \mathrm{qntf} . D \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \mathrm{int}(D) . \lor . [\exists D, E] . D \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \mathrm{var}(E, D) . \lor . C \varepsilon \mathrm{consto}(B, A) ::$$

$$[C, D] : D \varepsilon \mathrm{qntf} . D \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \mathrm{int}(D) . \supset . [\exists E, F] . E \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . F \varepsilon \mathrm{var}(C, E) \therefore$$

$$[C, D, E] : C \varepsilon \mathrm{int}\left(\mathrm{Qntf}(A)\right) . E \varepsilon \mathrm{prntm}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right) . D \varepsilon \mathrm{arg}(E) . \supset . [\exists F] . F \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . F \varepsilon \mathrm{var}(C, A) ::$$

$$[C, D, E] \therefore C \varepsilon \mathrm{ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right) . E \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . D \varepsilon \mathrm{cnvar}(C, E) . D \varepsilon \mathrm{ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right) . \supset : D \varepsilon \mathrm{Id}(C) . \lor . [\exists F, G] . D \varepsilon \mathrm{quasihomosemo}(C, B, A, F, G) ::$$

$$[C] : C \varepsilon \mathrm{gnrl} . C \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \sim\left(\mathrm{Id}(A)\right) . \supset . [\exists D, E, F, G] . D \varepsilon \mathrm{homosemo}(B, B) . E \varepsilon \mathrm{tho}(B) . F \varepsilon \mathrm{ingr}(E) . G \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . D \varepsilon \mathrm{Anarg}(C, F, G) ::$$

$$[C, D] \therefore C \varepsilon \mathrm{gnrl} . C \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . D \varepsilon \mathrm{Essnt}(C) . \supset : D \varepsilon \mathrm{vrb} . \lor . [\exists E] . E \varepsilon \mathrm{fro}(B) . D \varepsilon \mathrm{genfnct}(E) ::$$

$$[C] \therefore C \varepsilon \mathrm{fnct} . C \varepsilon \mathrm{ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right) . \supset : [\exists D] . D \varepsilon \mathrm{gnrl} . D \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \mathrm{Essnt}(D) . \lor . [\exists D, E] . C \varepsilon \mathrm{fncto}(B, A, D, E) ::$$

$$[\exists C] : C \varepsilon \mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right) . \lor . C \varepsilon \mathrm{cnjnct}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right) : \mathrm{Sbjct}(C) \varepsilon \mathrm{cnvar}\left(\mathrm{Sbjct}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right), A\right) \therefore$$

$$[C] : C \varepsilon \mathrm{prntm}\left(\mathrm{Prdct}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right)\right) . \supset . [\exists D] . D \varepsilon \mathrm{arg}(C) \therefore$$

$$[C, D] : C \varepsilon \mathrm{prntm}\left(\mathrm{Prdct}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}(A)\right)\right)\right) . D \varepsilon \mathrm{arg}(C) . \supset . [\exists E] . D \varepsilon \mathrm{var}(E, A) \therefore$$

$[C, D] : C \varepsilon$ trm $. C \varepsilon$ ingr $\Big($Eqvl2$\big($Essnt$(A)\big)\Big) . C \varepsilon \sim \Big($1ingr$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) . D \varepsilon$ trm $. D \varepsilon$ ingr $\Big($Eqvl2$\big($Essnt$(A)\big)\Big) . D \varepsilon \sim \Big($1ingr$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) . C \varepsilon$ cnf $(D) . \supset . C \varepsilon$ Id $(D) \therefore$

$[C, D] : C \varepsilon$ prntm $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt $(A))\big)\Big) . D \varepsilon$ prntm $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) . C \varepsilon$ simprntm $(D) . \supset . C \varepsilon$ Id $(D) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon$ 1nomprntmo (B, A, D, E). Uingr $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) \varepsilon$ ingr $(C) . \supset . C \varepsilon$ simprntm $(E) \therefore$

$[C, D, E, F, G] : C \varepsilon$ 2nomprntmo $(B, A, D, E, F, G) . G \varepsilon$ ingr (A). Uprcd $(G) \varepsilon$ ingr $(C) . \supset . C \varepsilon$ simprntm $(E) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon$ prntm $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big)$. Uingr $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) \varepsilon$ ingr $(C) . D \varepsilon$ tho $(B) . E \varepsilon$ ingr $(D) . C \varepsilon$ simprntm $(E) . \supset . [\exists F, G] . C \varepsilon$ 1nomprntmo $(B, A, F, G) \therefore$

$[C, D, E, F] : C \varepsilon$ prntm $\Big($Prdct$\big($Eqvl2$($Essnt$(A))\big)\Big) . D \varepsilon$ prntm $. D \varepsilon$ ingr (A). Uprcd $(D) \varepsilon$ ingr $(C) . E \varepsilon$ tho $(B) . F \varepsilon$ ingr $(E) . C \varepsilon$ simprntm $(F) . \supset . [\exists G, H, I] . C \varepsilon$ 2nomprntmo (B, A, G, H, I, D)

T. E. LVII°. $[A, B] :: A \varepsilon$ 2extnsnlo $(B) . = :: [\exists C, D] . C \varepsilon$ int $\big($Qntf$(A)\big) . D \varepsilon$ int $\big($Qntf$(A)\big) . C \varepsilon$ prcd $(D) \therefore$

$[C, D] : D \varepsilon$ qntf $. D \varepsilon$ ingr $(A) . C \varepsilon$ int $(D) . \supset . [\exists E, F] . E \varepsilon$ ingr $(A) . F \varepsilon$ var $(C, E) . F \varepsilon \sim \Big(cnf\big($1ingr$($Essnt$(A))\big)\Big) \therefore$

1ingr $\big($Eqvl1

$\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right) \varepsilon \sim \left(\mathrm{cnvar}\left(\mathrm{1ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\right.\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.\left.\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right), A\right)\right):$

$[\exists C] . C\, \varepsilon$

$\mathrm{prntm}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right) . \mathrm{1ingr}\left(\mathrm{Prdct}\left(\mathrm{Eqvl1}\right.\right.$

$\left.\left.\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right)\right) \varepsilon\, \mathrm{cnvar}\left(\mathrm{Cmpl}\left(\mathrm{int}\,(C)\right), A\right):$

$[\exists C] . C\, \varepsilon$

$\mathrm{prntm}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right) . \mathrm{1ingr}\left(\mathrm{Prdct}\left(\mathrm{Eqvl2}\right.\right.$

$\left.\left.\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right)\right) \varepsilon\, \mathrm{cnvar}\left(\mathrm{Cmpl}\left(\mathrm{int}\,(C)\right), A\right)::$

$[C] \therefore C\, \varepsilon\, \mathrm{fnct}$
$. C\, \varepsilon\, \mathrm{ingr}\,(A) . \supset : [\exists D] . D\, \varepsilon\, \mathrm{gnrl} . D\, \varepsilon\, \mathrm{ingr}\,(A) . C\, \varepsilon\, \mathrm{Essnt}\,(D) .$
$\vee . [\exists D, E] . C\, \varepsilon\, \mathrm{fncto}\,(B, A, D, E)::$

$\mathrm{Sbjct}\left(\mathrm{Eqvl1}\right.$

$\left.\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right) \varepsilon\, \mathrm{cnvar}\left(\mathrm{Sbjct}\left(\mathrm{Eqvl2}\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\right.\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.\left.\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right), \mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right) \therefore$

$[C, D, E, F]$

$: D\, \varepsilon\, \mathrm{prntm}\left(\mathrm{Prdct}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}\,(A)\right)\right)\right)\right)\right) . E\, \varepsilon\, \mathrm{prntm}$

$\Big(\mathrm{Prdct}\Big(\mathrm{Eqvl2}\Big(\mathrm{Essnt}\Big(\mathrm{Eqvl1}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\Big)\Big)\Big)\Big) . F \varepsilon \mathrm{Anarg}\,(C, D, E)$

$. \supset . F \varepsilon \mathrm{cnvar}\,\big(C, \mathrm{Eqvl1}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\big) \therefore$

$[C, D, E] : D \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . E \varepsilon \mathrm{cnvar}\,(C, D) . \supset . [\exists F, G] . E \varepsilon \mathrm{quasihomosemo}\,(C, B, A, F, G) \therefore$

$[C, D] : D \varepsilon \mathrm{cnvar}\,\big(C, \mathrm{Eqvl1}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\big) . \supset . [\exists E, F] . E \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . F \varepsilon \mathrm{ingr}\,(A) . D \varepsilon \mathrm{Anarg}\,(C, E, F) \therefore$

$[C, D, E] : C \varepsilon \mathrm{prntm}\,\Big(\mathrm{Essnt}\,\big(\mathrm{Eqvl2}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\big)\Big) . D \varepsilon \mathrm{arg}\,(C) . E \varepsilon \mathrm{Sgnfnct}\,(D) . \supset . E \varepsilon \mathrm{var}\,\Big(\mathrm{Cmpl}\,\Big(\mathrm{int}\,\Big(\mathrm{Qntf}\,\big(\mathrm{Eqvl2}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\big)\Big)\Big), \mathrm{Eqvl2}\,(\mathrm{Essnt}\,(A))\Big)$

Die Formulierung der Direktiven meines auf das *Axiom O* gestützten Systems der Ontologie lässt sich mit Hilfe der Termine, deren Bedeutung ich in den hier angegebenen terminologischen Erklärungen auseinandergesetzt habe, auf die Festsetzung folgender Vorschrift reduzieren:

Unter der Voraussetzung, dass eine These A die letzte der Thesen ist, die schon zu dem System gehören, darf man zu ihm als neue These einen Ausdruck B nur in dem Fall hinzufügen, wenn wenigstens eine der sieben folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $B \varepsilon \mathrm{1defo}\,(A)$
2) $B \varepsilon \mathrm{2defo}\,(A)$
3) $[\exists C] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(A) . B \varepsilon \mathrm{cnsqrprtqntf}\,(C)$
4) $[\exists C, D] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(A) . D \varepsilon \mathrm{tho}\,(A) . B \varepsilon \mathrm{cnsqeqvl}\,(C, D)$
5) $[\exists C] . C \varepsilon \mathrm{tho}\,(A) . B \varepsilon \mathrm{cnsqsbsto}\,(A, C)$
6) $B \varepsilon \mathrm{1extnsnlo}\,(A)$
7) $B \varepsilon \mathrm{2extnsnlo}\,(A)$

Die Bedingungen 1 und 3—6 sind hier den Bedingungen 1—5 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems der Protothetik [1], entsprechend analog, während die Bedingungen 2 und 7 meinem System der Ontologie eigentümlich sind. Die Bedingung 2 betrifft Definitionen, in denen das *Definiendum* ein Ausdruck vom Typus „$\varepsilon\{A\ a\}$" sein soll. Die Bedingung 7 garantiert in Verbindung mit der Bedingung 6 die „Extensionalität" jeder Art von den in der Ontologie auftretenden Funktionen.

Das System der Bedingungen 1—7 stammt sachlich im wesentlichen aus dem J. 1922 [2]. Es kommt in diesem System keine Bedingung vor, welche der — zu der Direktive ζ des in dem *op. cit.* besprochenen Systems $\mathfrak{S}_1$ analogen — Direktive entsprechen würde, die von mir in früheren Entwickelungsstadien der Ontologie angenommen wurde, und von der Herr Tarski im J. 1922 nachgewiesen hat, dass sie überflüssig ist [3]. Bis auf das J. 1922 benutzte ich keine den Bedingungen 6 und 7 entsprechenden „Extensionalitätsdirektiven". Meine Ontologie stellte somit zu jener Zeit ein bedeutend schwächeres System dar. Was die systematisierend-redaktionelle Seite der „terminologischen Erklärungen" und der Bedingungen 1—7 meiner jetzigen Mitteilung anbetrifft, so stammt sie im wesentlichen — von einigen ganz geringen Veränderungen abgesehen — aus dem J. 1926.

Die obige Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode der Ontologie, ist von mir auf eine solche Weise stylisiert worden, dass man in einem System, welches in Übereinstimmung mit dieser Vorschrift aufgebaut wird, für jeden Satz, der schon in der Protothetik auf Grund der Direktiven dieser Theorie erreicht werden könnte, einen entsprechenden Satz zum zweitenmal als eine These der Ontologie erhalten kann. Die Ontologie „enthält" hier in eben diesem Sinne die ganze Protothetik. Man könnte jedoch sehr leicht, wenn man nur auf eine gewisse Weise einzelne Bedingungen der genannten Vorschrift verstärken wollte, diese Vorschrift in einer solchen Richtung umgestalten, dass es schon unmöglich würde, im System der Ontologie irgendeinen

[1] Vgl. *op. cit.*, S. 76.
[2] Vgl. *op. cit.*, S. 14.
[3] Vgl. *op. cit.*, S. 41.

Satz zu erreichen, der auch unmittelbar in dem System der Protothetik erreichbar wäre. Das System der Protothetik und das System der Ontologie würden in diesem Fall in gewissem Sinne immer „ausserhalb“ einander liegende Systeme bleiben. Die Konstruktionsvorschrift für die Ontologie könnte also wenigstens auf zweifache Weise formuliert werden, indem man diese Vorschrift von der Relation abhängig macht, die man zwischen irgendeiner „früheren“ und irgendeiner „späteren“ Theorie in der Gesamtheit der mathematischen Wissenschaften festsetzen möchte.

Aus dem *Axiom 0* leitete ich seine vier „natürlichen“ logischen Faktoren ab, deren Zusammenfassung als ein mit dem genannten Axiom äquivalentes Axiomensystem meiner Ontologie angenommen werden könnte. Diese vier „natürlichen“ Faktoren gebe ich hier *explicite* an:

$$I.\quad \llcorner A\ a \lrcorner \ulcorner \phi\!-\Big(\varepsilon\{A\ a\} \vdash \big(\llcorner B \lrcorner \ulcorner \vdash (\varepsilon\{B\ A\}) \urcorner\big)\Big) \urcorner$$

$$II.\quad \llcorner A\ a\ B\ C \lrcorner \ulcorner \phi\!-\Big(\varphi\big(\varepsilon\{A\ a\}\ \varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{C\ A\}\big)\ \varepsilon\{B\ C\}\Big) \urcorner$$

$$III.\quad \llcorner A\ a\ B \lrcorner \ulcorner \phi\!-\Big(\varphi\big(\varepsilon\{A\ a\}\ \varepsilon\{B\ A\}\big)\ \varepsilon\{B\ a\}\Big) \urcorner$$

$$IV.\quad \llcorner A\ a\ B \lrcorner \ulcorner \phi\!-\Bigg(\varphi\bigg(\varepsilon\{B\ A\}\ \llcorner B\ C \lrcorner \ulcorner \phi\!-\Big(\varphi\big(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{C\ A\}\big)\ \varepsilon\{B\ C\}\Big) \urcorner\ \llcorner B \lrcorner \ulcorner \phi\!-\big(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{B\ a\}\big) \urcorner\bigg)\ \varepsilon\{A\ a\}\Bigg) \urcorner$$

Anmerkung *ad I*: Die These *I* kann in meinem System der Ontologie verstärkt werden, indem man in diesem System leicht den Satz beweisen kann, der besagt, dass

$$\llcorner A\ a \lrcorner \ulcorner \phi\!-\big(\varepsilon\{A\ a\}\ \varepsilon\{A\ A\}\big) \urcorner$$

[der Satz wird von mir der „ontologische Identitätssatz“ genannt [1];

[1] Der von mir angenommene Sinn der Ausdrücke „Ontologie“ und „ontologisch“ kann, genetisch betrachtet, als das Resultat einer Verallgemeinerung der betreffenden Terminologie des Herrn Jan Łukasiewicz angesehen werden. Vgl.: *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie.* Novembre — Décembre 1909. Jan Łukasiewicz. *Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles.* SS. 16 und 17. Vgl. noch: Kotarbiński. *Op. cit.*. S. 254.

es sei bemerkt, dass die noch stärkere These „$\llcorner A \lrcorner \ulcorner \varepsilon\{A\ A\} \urcorner$" im System der Ontologie nicht beweisbar ist, und dass man sogar in diesem System die Negation der genannten These beweisen kann]. Im Zusammenhang mit diesem Satz will ich hier ausdrücklich betonen, dass es in der Ontologie ganz gut möglich ist Thesen abzuleiten, deren einzelne Bestandteile Ausdrücke vom Typus „$\varepsilon\{A\ A\}$" oder (was in meinem System völlig gleichgültig ist) vom Typus „$\varepsilon\{a\ a\}$" sind. Dies führt aber in meiner Theorie — wegen entsprechender Formulierung ihrer Definitionsdirektiven — zu keinem Widerspruch nach dem bekannten Schema der „*Principia mathematica*" [1], da bei mir keine These vom Typus

$$„\llcorner A \lrcorner \ulcorner \phi\Big(\varepsilon\{A\ \varkappa\} \vdash \big(\varepsilon\{A\ A\}\big)\Big) \urcorner“$$

erreicht werden kann.

Anmerkung *ad II*: Im Moment, in dem ich schon in meinem System der Ontologie über das mittels der Definition

$$\llcorner A\ B \lrcorner \ulcorner \phi\Big(\varrho\big(\varepsilon\{A\ B\}\ \varepsilon\{B\ A\}\big) = \{A\ B\}\Big) \urcorner$$

eingeführte Identitätszeichen „$=$" verfüge, für welches auch der Satz, der besagt, dass

$$\llcorner A\ B\ \varphi \lrcorner \ulcorner \phi\!-\!\Big(=\{A\ B\}\ \phi\big(\varphi\{A\}\ \varphi\{B\}\big)\Big) \urcorner,$$

leicht (ohne Appellierung an die „Extensionalitätsdirektiven") beweisbar ist, kann ich aus der These *II* die symmetrischere These

$$\llcorner A\ a\ B\ C \lrcorner \ulcorner \phi\!-\!\Big(\varrho\big(\varepsilon\{A\ a\}\ \varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{C\ A\}\big) = \{B\ C\}\Big) \urcorner \ [2]$$

ableiten.

Anmerkung *ad III*: Aus der These *III* sieht man, dass, wie man heute sagen würde, meine ε-Beziehung — in vollem Einklang mit traditioneller und im Gegensatz zur Peano-Russellschen Logik — eine *transitive* Beziehung ist.

Im Zusammenhang mit den Thesen *I*—*IV* sei hier noch ausdrücklich bemerkt, dass es in meinem System der Ontologie kein Mittel gibt, in diesem System den „Existenzialsatz"

---

[1] Vgl.: Whitehead and Russell. *Principia mathematica*. Volume I. Second Edition. S. 77.

[2] Vgl.: Russell. *L. c.*.

$$„\vdash\left(\llcorner A\ a\lrcorner\ulcorner\vdash\left(\varepsilon\{A\ a\}\right)\urcorner\right)“$$

und *a fortiori* irgendeinen Satz vom Typus „$\varepsilon\{A\ a\}$“ zu beweisen.

Ich gebe jetzt einige historischen Daten, betreffend axiomatische Probleme der Ontologie, an:

Im J. 1921 hat Herr A l f r e d T a r s k i in Übereinstimmung mit den Direktiven des Systems (die „Extensionalitätsdirektiven“ waren im J. 1921 noch nicht da, wie ich das schon erwähnt habe) die These *II* aus der These *III* abgeleitet.

Indem ich über das genannte Resultat des Herrn T a r s k i nachdachte, habe ich in demselben J. 1921 nachgewiesen, dass man, ohne die Direktiven des Systems zu verändern, das *Axiom 0* der Ontologie durch das mit ihm äquivalente kürzere Axiom, welches besagt, dass

$$\llcorner A\ a\lrcorner\ulcorner\ \phi\left(\varepsilon\{A\ a\}\ \varphi\left(\vdash\left(\llcorner B\lrcorner\ulcorner\vdash\left(\varphi\left(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{B\ a\}\right)\right)\urcorner\right)\llcorner B\right.\right.$$

$$\left.\left.C\lrcorner\ulcorner\ \phi\!-\!\left(\varphi\left(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{C\ A\}\right)\varepsilon\{B\ C\}\right)\urcorner\right)\right)\urcorner,$$

ersetzen kann.

Im J. 1929 hat Herr B o l e s ł a w S o b o c i ń s k i, Student der Warschauer Universität, indem er sich auf das erwähnte Resultat des Herrn T a r s k i stützte und die der Bedingung 7 meiner Konstruktionsvorschrift für die Ontologie entsprechende „Extensionalitätsdirektive“ zu Hilfe nahm, mein eben zitiertes kürzeres Axiom durch das noch einfachere Axiom

$$\llcorner A\ a\lrcorner\ulcorner\ \phi\left(\varepsilon\{A\ a\}\ \varphi\left(\vdash\left(\llcorner B\lrcorner\ulcorner\vdash\left(\varphi\left(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{B\ a\}\right)\right)\urcorner\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\llcorner B\lrcorner\ulcorner\ \phi\!-\!\left(\varepsilon\{B\ A\}\ \varepsilon\{A\ B\}\right)\urcorner\right)\right)\urcorner$$

ersetzt. Herr S o b o c i ń s k i hat auch gleichzeitig gezeigt, dass mein Axiom der Ontologie durch die Thesen *I* und *III*, wenn sie als zwei Axiome des Systems angenommen werden, ersetzbar ist.

Indem ich das letzterwähnte Resultat des Herrn Sobociński sowie das schon besprochene Ergebnis des Herrn Tarski benutzte, habe ich in demselben J. 1929 nachgewiesen, dass auch die ziemlich einfache These, die besagt, dass

$$\llcorner A\ a \lrcorner \ulcorner \phi \left(\varepsilon \{A\ a\} \vdash \left(\llcorner B \lrcorner \ulcorner \vdash \left(\text{♀} \left(\varepsilon \{A\ B\}\ \varepsilon \{B\ a\} \right) \right) \urcorner \right) \right) \urcorner ,$$

als ein einziges Axiom meiner Ontologie (ohne Direktivenänderung) gelten kann. [1]

Posiedzenie.

z dn. 20 czerwca 1930 r.

W. Sierpiński.

O związku między zbiorami zamkniętymi a zbiorami $F_{\sigma\delta}$.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 20 czerwca 1930 r.

Streszczenie.

Oznaczmy, dla zbioru płaskiego E, przez $f(E)$ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych a, dla których prosta $x=a$ przecina zbiór E w zbiorze punktów, który nie jest ograniczony zgóry. Autor dowodzi, że *na to, iżby dla zbioru linjowego H istniał zbiór płaski zamknięty E, taki, iż $f(H)=E$, potrzeba i wystarcza, iżby zbiór H był zbiorem $F_{\sigma\delta}$*.

W. Sierpiński.

Sur le rapport entre les ensembles fermés et les ensembles $F_{\sigma\delta}$.

Présenté dans la séance du 20 Juin 1930.

E étant un ensemble plan donné, désignons par $f(E)$ l'ensemble de tous les nombres a réels, tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble de points qui n'est pas borné supérieurement. Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan fermé E, tel que $H=f(E)$, il faut et il suffit que H soit un ensemble $F_{\sigma\delta}$*.

---

[1] Im Zusammenhang mit der Form der in dieser Mitteilung betrachteten Axiome vgl.: *Fundamenta Mathematicae*. Band XIII. 1929. Stanisław Leśniewski. *Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind.* S. 332.

Démonstration. Soit E un ensemble plan fermé donné. n étant un nombre naturel, désignons par E_n l'ensemble de tous les points (x, y) de E, pour lesquels $y \geqslant n$: ce seront évidemment des ensembles fermés.

Désignons généralement par $P(Z)$ la projection de l'ensemble (plan) Z sur l'axe d'abscisses. On voit sans peine que

(1) $$f(E) = \prod_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Les projections des ensembles (plans) fermés étant, comme on sait, des ensembles F_σ, la formule (1) prouve que $f(E)$ est un ensemble $F_{\sigma\delta}$. La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Soit maintenant H un ensemble linéaire $F_{\sigma\delta}$. Comme j'ai démontré ailleurs [1]), il existe dans ce cas une suite infinie H_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles fermés, telle que

(2) $$H = \overline{\lim_{n=\infty}} H_n$$

$$[\text{c'est-à-dire } H = (H_1 + H_2 + H_3 + \ldots)\,(H_2 + H_3 + \ldots)\,.\,(H_3 + H_4 + \ldots)\ldots].$$

Désignons (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) par F_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \varepsilon H_n$ et $y = n$: ce seront évidemment des ensembles fermés, et on voit sans peine que l'ensemble

(3) $$E = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots.$$

sera aussi fermé.

Or, je dis que

(4) $$f(E) = H.$$

En effet, si $x \varepsilon H$, il existe, d'après (2), pour tout nombre naturel donné p un indice $n_p \geqslant p$, tel que $x \varepsilon H_{n_p}$, et, d'après la définition des ensembles F_n, nous aurons $(x, n_p) \varepsilon F_{n_p}$, donc, d'après (3):

(5) $$(x, n_p) \varepsilon E, \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Les nombres $n_p \geqslant p$ croissant indéfiniment avec p, la formule (5) prouve que $x \varepsilon f(E)$.

---

[1]) *Fundamenta Mathematicae* t. VI, p. 21.

D'autre part, soit $x \varepsilon f(E)$. Soit p un nombre naturel donné quelconque. De la formule $x \varepsilon f(E)$ et de la définition de l'ensemble $f(E)$ il résulte qu'il existe un nombre réel y_p, tel que

(6) $$(x, y_p) \varepsilon E$$

et

(7) $$y_p \geqslant p.$$

Or, de (6) et (3) résulte qu'il existe un indice n_p, tel que

(8) $$(x, y_p) \varepsilon F_{n_p}$$

et de (8) et de la définition des ensembles F_n s'en suit que

(9) $$x \varepsilon H_{n_p}$$

et

(10) $$y_p = n_p,$$

et les formules (7) et (10) donnent:

(11) $$n_p \geqslant p.$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe pour tout nombre naturel p un indice n_p, tel qu'on a les formules (11) et (9). Cela prouve que x appartient à l'ensemble (2).

La formule (4) est ainsi établie et il est démontré que la condition de notre théorème est suffisante.

Notre théorème est ainsi démontré.

On voit sans peine que notre théorème subsiste quand on y remplace les ensembles fermés par les ensembles F_σ. Or,

Pour qu'il existe, pour un ensemble linéaire H, un ensemble plan G_δ, E, tel que $H = f(E)$, il faut et il suffit que H soit un ensemble (A) (analytique).

Pour démontrer que la condition de cette proposition est nécessaire, définissons les ensembles E_n comme plus haut: ce seront des ensembles G_δ (en tant que E) et nous aurons la formule (1).

Or, soit H un ensemble (A) linéaire. Il existe, comme on sait, un ensemble G_δ plan, soit Q, situé entre les droites $y = 0$ et $y = 1$, tel que $P(Q) = H$. Désignons (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) par Q_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(x, y - n) \varepsilon Q$, et posons

$$E = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots.$$

— ce sera, comme on voit sans peine, un ensemble G_δ et nous aurons la formule (4). Notre assertion est ainsi démontrée.

On voit sans peine que la proposition démontrée tout à l'heure subsiste quand on y remplace les ensembles G_δ par les ensembles (A).

Généralement, on peut démontrer pour les ensembles projectifs P_n et C_n de classe n quelconque [1]) les propositions suivantes:

Pour qu'il existe, pour un ensembles linéaire H, un ensemble plan P_n, E, tel que $H=f(E)$, il faut et il suffit que H soit un ensemble P_n.

Pour qu'il existe, pour un ensemble linéaire H, un ensemble plan C_n, E, tel que $H=f(E)$, il faut et il suffir que H soit un ensemble P_{n+1}.

Stefan Mazurkiewicz.

O aproksymowaniu funkcji ciągłych zmiennej zespolonej przez wielomiany.

Komunikat zgłoszony dnia 20 czerwca 1930.

Streszczenie.

W pracy niniejszej dowodzę następującego twierdzenia:

Na każdym dendrycie płaskim można każdą funkcję ciągłą zmiennej zespolonej z aproksymować jednostajnie i z dowolną dokładnością przez wielomiany zmiennej z.

Stefan Mazurkiewicz.

Über die Approximation stetiger Funktionen einer komplexen Veränderlichen durch Polynome.

Note présentée à la seance du 20 Juin 1930.

In dieser Note beweise Ich folgenden Satz:

Auf jeder Baumkurve [2]) lässt sich jede stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z

---

[1]) Quant à la définition des ensembles P_n et C_n, voir p. e. ces *Comptes rendus*, XXI, p. 226.

[2]) Baumkurve = beschränktes, im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, welches keine einfache geschlossene Kurve enhalt.

durch Polynome von z gleichmässig approximieren[1]).

Nach einer Bemerkung von *Hartogs und Rosenthal*[2]) genügt es den Satz für die besondere stetige Function: Realteil von z (die Ich im folgenden stets mit $R(z)$ bezeichnen werde) zu beweisen.

Es sei A eine ebene Baumkurve, η eine positive Zahl. Nach einem Satz von *Wilder*[3]) existiert eine Zerlegung: $A = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + B$, welche folgende Eigenschaften besitzt: 1) C_k ist ein einfacher Bogen, 2) $\delta(C_k) \leq \frac{\eta}{8}$[4]), 3) für $k \neq l$ ist $C_k \times C_l$ entweder leer, oder reduziert sich auf einen Punkt, der zugleich Endpunkt von C_k und C_l ist, 4) $\sum_{k=1}^{l} C_k$ ist für $l \leq n$ ein Kontinuum, 5) der Durchmesser jeder Komponente von $B = A - \sum_{k=1}^{n} C_k$ ist $\leq \frac{\eta}{16}$.

Wir bezeichnen mit a_k, b_k die Endpunkte von C_k, und zwar soll für $k > 1$, a_k den Punkt $C_k \times \sum_{l=1}^{k-1} C_l$ bezeichnen. Es sei p ein Punkt von B, (pa_1), der einfache Bogen der p mit a_1,

---

[1]) Für den Fall eines einfachen Bogens wurde dieser Satz von *Walsh* und *Hartogs* bewiesen, für gewisse Klassen von Baumkurven folgt er unmittelbar aus einem Theorem von *Walsh*. vgl. *Walsh*: Math. Ann. 96 p. 434 — 450, Amer. Trans. 30 p. 472 — 482, Amer. Trans. 31 p. 477 — 502, insbesondere Theorem XVII p. 492 ss.; *Hartogs* Math. Ann. 98 p. 164 — 179; *Hartogs* und *Rosenthal* Math. Ann. 100 p. 212 — 263 insbesondere: p. 231 — 235.

[2]) *Hartogs* und *Rosenthal* l. c. p. 232.

[3]) *Wilder*: Fund. Math. VII, p. 365 ss. Theorem 15: *A* continuous curve M that contains no simple closed curve consists of (1) a sequence of arcs $c_1, c_2, c_3 \ldots$ no two of which have in common an interior point of both, and such that (*i*) if n is any positive integer, $c_1 + c_2 + \ldots c_n$ is an continuous curve M_n and a proper subset of M, (*ii*) for $\varepsilon > 0$ there exists a number ρ such that if $n > \rho$, $\delta(c_n) < \varepsilon$, and the diameter of any one of the countable set of maximal domains with respect to M lying in M-M_n is less than ε; and (2) a totally disconnected point set... Um unsere Zerlegung zu erhalten muss die Wilder'sche an einer passenden Stelle n abgebrochen, und in leicht ersichtlicher Weise modifiziert werden.

[4]) $\delta(C)$ bedeutet den Durchmesser der Menge C.

auf A verbindet, $t(p)$ der erste Punkt dieses Bogens, welcher in $\sum_{k=1}^{n} C_k$ liegt, $l(p)$ die kleinste natürliche Zahl l für die $t(p) \subset \subset C_l$. Nun bestimmen wir für $k=1, 2 \ldots n$ die Mengen S_k in folgender Weise: $S_k = C_k +$ die Vereinigungsmenge aller Punkte p von B für die $l(p) = k$. Es ist: $\sum_{k=1}^{n} S_k$ und die Mengen S_k besitzen die folgenden leicht beweisbaren Eigenschaften: 1) S_k ist eine Baumkurve, 2) $\delta(S_k) \leq \frac{\eta}{4}$, 3) $\sum_{l=1}^{k} S_l$ ist eine Baumkurve, $k = 1, 2 \ldots n$, 4) $S_k - a_k$ ist für $k > 1$ zusammenhängend, 5) $S_{k+1} \times \sum_{l=1}^{k} S_l = a_{k+1}$, 6) a_{k+1} ist in der Vereinigungsmenge der Punkte a_l, b_l, $l \leq k$ enthalten. Wegen 1), 2) zerschneidet weder $\sum_{l=1}^{k} S_l$ noch S_{k+1} die Ebene, daher existiert nach einem Satz von *R. L. Moore*[1]), eine einfache geschlossene Kurve J_k, welche folgende Eigenschaften besitzt: 1) $J_k \times \sum_{l=1}^{k+1} S_l = a_{k+1}$, 2) $S_{k+1} - a_{k+1}$ liegt im Innengebiet von J_k, 3) $\sum_{l=1}^{k} S_l - a_{k+1}$ liegt im Aussengebiet von J_k.

Es sei H ein Kreis, welcher $\sum_{l=1}^{k} S_l$ im Innengebiet enthält; $\sum_{l=1}^{k} S_l$ zerschneidet die Ebene nicht, es existiert daher ein einfa-

---

[1]) *R. L. Moore*: Proc. Acad. of. Sc. 11, Nr. 8, August 1925 p. 470 ss. Theorem 1: Suppose that in a plane S, K und H are two closed, connected and bounded point sets such that (a) neither K nor H seperates the plane, (b) the set T of all points common to K und H ist totally disconnected (c) $K - T$ is connected. Then there exist a simple closed curve which encloses $K - T$ but encloses no point of $H - T$ and contains T but no point of $(K + + H) - T$.

cher Bogen U, welcher J_k mit H verbindet und dabei mit J_k und H je einen, mit $\sum_{l=1}^{k} S_l$ keinen gemeinsamen Punkt besitzt. Die drei Kontinua: H, J_k, U trennen in der Ebene kein Punktepaar aus $\sum_{l=1}^{k} S_l - a_{k+1}$; durch zweimalige Anwendung des Satzes von *Janiszewski*[1]) folgt das auch $H + J_k + U$ kein Punktepaar aus $\sum_{l=1}^{k} S_l - a_{k+1}$ trennt. Andrerseits ist $(H + J_k + U) \times \sum_{l=1}^{k} S_l = a_{k+1}$, und $H + J_k + U - a_{k+1}$ ist zusammenhängend. Auf $\sum_{l=1}^{k} S_l$ und $H + J_k + U$ wenden wir nun an nicht den Satz von *Moore*, sondern einen verwandten Satz von *Kuratowski*[2]). Dies ergiebt die Existenz einer einfachen geschlossenen Kurve G_k welche a_{k+1} enthält und die Mengen: $H + J_k + U - a_{k+1}$ und $\sum_{l=1}^{k} S_l - a_{k+1}$ trennt. Offenbar liegt G_k im Innengebiet von H, daher $H + J_k + U - a_{k+1}$ im Aussengiebiet von G_k, dagegen $\sum_{l=1}^{k} S_l - a_{k+1}$ im Innengebiet von G_k, also schliesslich $G_k - a_{k+1}$ im Aussengebiet von J_k.

Es existieren also für $k = 1, 2 \ldots n - 1$ zwei einfache geschlossene Kurven G_k, J_k welche folgende Eigenschaften bezitzen: 1) $G_k \times J_k = a_{k+1}$, 2) $G_k - a_{k+1}$ liegt im Aussengebiet von J_k, $J_k - a_{k+1}$ im Aussengebiet von G_k, 3) $\sum_{l=k}^{k} S_l - a_{k+1}$ liegt im Innengebiet V_k von G_k, $S_{k+1} - a_{k+1}$ im Innengebiet W_k von J_k.

---

[1]) *Janiszewski*: Prace mat. fiz. XXVI, 1913, vgl. *Straszewicz*: Fund. Math. IV p. 129.

[2]) *Kuratowski*: Fund. Math. XII p. 232 Corollaire (du Théorème V): C_1 et C_2 étant deux continus bornés tels que 1^0 $C_1 - C_2$ est connexe, 2^0 $C_1 \times C_2$ est punctiforme et 3^0 C_1 ne coupe le plan entre aucun couple de points de $C_1 - C_2$, il existe une courbe simple fermée qui coupe le plan entre $C_1 - C_2$ et $C_2 - C_1$.

Es sei:

(1) $$Q_k(z) = R(a_k)\frac{z-b_k}{a_k-b_k} + R(b_k)\frac{z-a_k}{b_k-a_k} \qquad k=1,2\ldots n$$

Man hat:

(2) $$Q_k(a_k) = R(a_k);\ Q_k(b_k) = R(b_k)$$

(3) $$|Q_k'(z)| = \left|\frac{R(a_k)-R(b_k)}{a_k-b_k}\right| \leq 1$$

Daher für jedes $z \subset S_k$:

(4) $$|Q_k(z)-R(z)| \leq |Q_k(z)-Q_k(a_k)| + |R(z)- \\ -R(a)| \leq 2|z-a_k| \leq \frac{\eta}{2}$$

Wir definieren jetzt auf der Baumkurve A die Funktion $\Phi(z)$ durch die Bedingungen:

(5) $$\Phi(z) = Q_k(z) \qquad \text{für } z \subset S_k,\ k=1,2\ldots n.$$

$\Phi(z)$ ist eindeutig definiert; in der Tat, ist $z' \subset S_l \times S_m$, $l \neq m$, so ist z' gleichzeitig identisch mit einem der Punkte a_l, b_l und mit einem der Punkte a_m, b_m, Daher ist wegen (2):

(6) $$Q_l(z') = R(z') = Q_m(z').$$

Offenbar ist $\Phi(z)$ stetig und es gilt wegen (4) die Ungleichung.

(7) $$|R(z)-\Phi(z)| \leq \frac{\eta}{2} \qquad z \subset A$$

Nun bestimmen wir eine Folge von Polynomen: $P_1(z)$, $P_2(z)\ldots P_n(z)$ in folgender Weise:

(I) $P_1(z) = Q_1(z)$

(II) Nehmen wir an das für ein $k < n, P_k(z)$ definiert ist, und den Bedingungen genügt:

(8) $$P_k(a_l) = R(a_l),\ P_k(b_l) = R(b_l) \qquad l=1,2\ldots k.$$

$P_{k+1}(z)$ ist ein Polynom, welches folgende Eigenschaften besitzt;

(9) $$|P_{k+1}(z)-P_k(z)| \leq \frac{\eta}{2n} \qquad \text{für } z \subset \overline{V}_k$$

(10) $$|P_{k+1}(z)-Q_{k+1}(z)| \leq \frac{\eta}{2n} \qquad \text{für } z \subset \overline{W}_k$$

(11) $$P_{k+1}(a_l) = P_k(a_l),\ P_{k+1}(b_l) = P_k(b_l) \qquad l=1,2\ldots k$$

(12) $$P_{k+1}(a_{k+1}) = Q_{k+1}(a_{k+1}),\ P_{k+1}(b_{k+1}) = Q_{k+1}(b_{k+1})$$

Ein solches Polynom existiert infolge von zwei Sätzen von Walsh [1]). Im Punkte: $a_{k+1} = \overline{V}_k \times \overline{W}_k = G_k \times J_k$ stimmen $Q_{k+1}(z)$ und $P_k(z)$ überein wegen (2), (8) und weil dieser Punkt im der Vereinigungsmenge der Punkte a_l, b_l, $l = 1, 2 \ldots k$ enthalten ist. Aus (8), (11), (12) folgt:

(13) $P_{k+1}(a_l) = R(a_l),\ P_{k+1}(b_l) = R(b_l) \qquad l = 1, 2 \ldots k+1.$

Es sei jetzt z' ein Punkt von A, m die kleinste naturliche Zahl für die $z' \subset S_m$. Ist $m = 1$, so ist $z' \subset \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \ldots \times \overline{V}_{n-1}$ und man hat, wegen (5), (7), (I), (9):

$$(14) \quad |P_n(z') - R(z')| \leqq |\Phi(z') - R(z')| + \sum_{l=1}^{n-1} |P_l(z') - P_{l+1}(z')| < \frac{\eta}{2} + $$
$$+ (n-1)\frac{\eta}{2n} < \eta$$

Ist $m > 1$, so ist $z' \subset \overline{W}_{m-1} \times \overline{V}_m \ldots \overline{V}_{n-1}$, also, wegen (5), (7), (9), (10):

$$(15) \quad |P_n(z') - R(z')| \leqq |\Phi(z') - R(z')| + \sum_{l=m}^{n-1} |P_l(z') -$$
$$- P_{l+1}(z')| \leqq \frac{\eta}{2} + (n-m)\frac{\eta}{2n} < \eta$$

also in allen Fällen:

$$(16) \qquad |P_n(z') - R(z')| < \eta \qquad z' \subset A.$$

Somit ist unser Satz bewiesen.

Hartogs und Rosenthal bezeichnen als α-Menge jede abgeschlossene ebene Menge auf der jede stetige Funktion durch Polynome gleichmässig approximiert werden kann. Damit ein beschränktes Kontinuum eine α-Menge ist, — ist es bekanntlich

---

[1]) *Walsh*: Amer. Trans. 30 p. 473 ss. Theorem III: If the two Jordan curves C_1 and C_2 are exterior to each other except for a single common point $z = \alpha$, and if the functions $f_1(z)$ and $f_2(z)$ are respectively analytic interior to C_1 and C_2 and continuous in the corresponding closed regions, and if $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ then there exists a series of polynomials in z which converges uniformly to the sum $f_1(z)$ in the closed interior of C_1 and uniformly to the sum $f_2(z)$ in the closed interior of C_2. Amer. Trans. 30 p. 319 ss. Theorem X: If the function $f(z)$ defined on the bounded point set S can be approximated on that point set as closely as desired by a polynomial in z and if there be given any p points: $z_1, z_2 \ldots z_p$ of S, together with an arbitrary $\varepsilon > 0$, then there exists a polynomial $p(z)$ such that: $|p(z) - f(z)| \leqq \varepsilon$, z on S, and $p(z_i) = f(z_i)$, $i = 1, 2 \ldots p$.

notwendig dass es 1) nirgends dicht ist, 2) die Ebene nicht zerlegt. Unser Satz zeigt das für im kleinen zusammenhängende Kontinua diese Bedingungen auch hinreichend sind. Vermutlich gilt dasselbe für beliebige Kontinua. Jedenfalls bilden die α-Kontinua (*d. h.* diejenigen Kontinua die α-Mengen sind) eine sehr umfassende Klasse. Es gilt nämlich folgendes: *bezeichnet man mit $\mathfrak{C}$ die Menge aller abgeschlossenen, zusammenhängenden Mengen, welche in einem beliebig vorgegebenen abgeschlossenen Kreisbereich E enthalten sind, und metrisiert man $\mathfrak{C}$ mittelst der Hausdorff'schen „Entfernung"* [1]) *so bilden diejenigen Elemente von $\mathfrak{C}$, welche α-Kontinua sind in $\mathfrak{C}$ eine G_δ Menge zweiter Kategorie.*

Sei B ein Element von $\mathfrak{C}$; also eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge von E; es sei $P(z)$ ein Polynom. Wir bezeichnen mit $\mu(B, P(z))$ das Maximum von $|R(z) - P(z)|$ auf B. Wenn $P(z)$ die Menge aller Polynome durchlaüft, so haben die Zahlen $\mu(B, P(z))$ eine untere Schranke die wir mit $\lambda(B)$ bezeichnen. $\lambda(B)$ ist eine nichtnegative in $\mathfrak{C}$ wohldefinierte Mengenfunktion, von der man leicht zeigt das sie oberhalb-stetig ist.

Die Menge aller Elemente von $\mathfrak{C}$ für die $\lambda(B) = 0$ ist demnach ein G_δ in $\mathfrak{C}$. Entfernt man aus dieser Menge alle einpunktigen Elemente von $\mathfrak{C}$, die ja in $\mathfrak{C}$ eine abgeschlossene Menge bilden, so bleibt übrig wiederum ein G_δ welches wir mit $\mathfrak{C}_\alpha$ bezeichnen und welches offenbar mit der Menge der zu $\mathfrak{C}$ gehörigen α-Kontinua identisch ist. Nun enthält aber $\mathfrak{C}_\alpha$ nach dem Walsch-Hartogs'schen Satze alle einfachen Bögen, ist also in $\mathfrak{C}$ dicht, also von der zweiten Kategorie *w. z. b. w.* Beachtet man *z. B.* das die erblich unzerlegbaren Kontinua in $\mathfrak{C}$ ebenfalls eine Menge zweiter Kategorie bilden [2]), so folgt unmittelbar die Existenz von erblich unzerlegbaren Kontinuen, welche gleichzeitig α--Mengen sind.

---

[1]) *Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre 1914, p. 293.

[2]) *Mazurkiewicz*: Sur les continus absolument indécomposables. Fund. Math. XVI. p. 151 — 159.

W. Ślebodziński.

O grupach posiadających strukturę półsymetryczną.

Przedstawił J. Mazurkiewicz dn. 20 czerwca 1930 r.

Streszczenie.

Przedmiotem komunikatu jest twierdzenie, iż każda skończona grupa ciągła o strukturze półsymetrycznej jest izomorficzna z pewną grupą ruchów sztywnych w przestrzeni hiperbolicznej. Dla udowodnienia powyższego twierdzenia autor uzupełnia najpierw jedno z twierdzeń Bianchi'ego,) wykazując, że każda skończona grupa ciągła G_n jest izomorficzna z pewną grupą przekształceń izometrycznych przestrzeni V_n zawierającej układ n kongruencyj ortogonalnych o stałych spółczynnikach Ricci'ego. Dowód twierdzenia pomocniczego oparty jest na własnościach t. zw. przestrzeni (+), którą pp. Cartan i Schouten przyporządkowali każdej grupie G_n oraz na wynikach jednej z prac p. Vranceanu.

W. Ślebodziński.

Sur les Groupes à connexion semisymétrique.

Présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 20 Juin 1930.

Dans son Rapport fait au Congrès de Lyon (1926) de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences M. Schouten a étudié les groupes à connexion semisymétrique. Dans les lignes qui suivent nous allons ajouter quelques remarques sur le même sujet, en montrant que les groupes considérés sont isomorphes à certains groupes de mouvements dans les espaces hyperboliques. Nous adoptons les notations de la Communication de M. Schouten et de son livre sur le Calcul de Ricci.

On sait que, d'après un théorème de Bianchi[1]), tout groupe fini et continu peut être regardé comme un groupe simplement transitif de mouvements dans une variété riemannienne V_n. Or, on peut compléter ce théorème, en montrant que l'es-

---

[1]) L. Bianchi. Lezioni sulla Teoria dei gruppi continui, 1928, p. 517.

pace V_n, dont il est question, est caractérisé par la propriété de posséder un système $n^{\underline{\text{uple}}}$ de congruences orthogonales à coefficients de rotation constants. Nous allons le montrer en s'appuyant sur la notion de l'espace $(+)$ attaché par M. M. Cartan et Schouten à tout groupe de Lie.

Soit G_n un groupe fini et continu à n paramètres x_λ $(\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_n)$; désignons par c_{bij} ses constantes de structure. La variété $(+)$ correspondant à ce groupe étant sans courbure, il existe un tenseur $g_{\lambda\mu}$ tel que l'on ait

$$\overset{+}{\nabla}_\omega \, g_{\lambda\mu} = 0.$$

Ce tenseur est determiné jusqu'à un facteur constant près que nous supposons fixé d'une manière quelconque. La variété $(+)$ peut donc être regardée comme un espace métrique à tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$.

Attachons à chaque point de la variété $(+)$ un repère rectangulaire $\overset{+}{R}$ formé de n vecteurs unitaires. Supposons, ce qu'il est toujours permis, que ces repères s'obtiennent par un déplacement $(+)$ — parallèle de l'un d'eux. Envisageons aussi la variété riemannienne V_n ayant le même tenseur métrique que la variété $(+)$; au repère $\overset{+}{R}$ correspond dans la V_n un repère rectangulaire R. En désignant respectivement par $\overset{+}{\gamma}_{bij}$ et γ_{bij} les coefficiens de Ricci des repères $\overset{+}{R}$ et R, on trouve

$$\overset{+}{\gamma}_{bij} = \gamma_{bij} - S_{ijb} + S_{bji} + S_{bij}, \tag{1}$$

les quantités S_{bij} étant des composantes relatives au repère $\overset{+}{R}$ de la torsion de l'espace $(+)$. On démontre les relations (1) en se reportant à l'identité [1])

et à la définition des coefficients de Ricci. Les repères $\overset{+}{R}$ étant

$$\overset{+}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - g^{\nu\beta} \left(g_{\lambda\alpha} S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\alpha} + g_{\mu\alpha} S_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \right)$$

---

[1]) J. A. Schouten: Der Ricci-Kalkül, 1924, p. 73, ég. (45a).

par hypothèse parallèles, on a $\overset{+}{\gamma}_{bij}=0$, ce qui entraîne les égalités :

$$\gamma_{bij}=S_{ijb}+S_{jbi}+S_{ibj} \tag{2}$$

et, par conséquent,

$$S_{bij}=\gamma_{[bi]j}. \tag{3}$$

Les composantes S_{bij} étant liées aux constantes de structure du groupe G_n par les relations

$$c_{bij}=2\,S_{bij},$$

on voit que les coefficients γ_{bij} sont des constantes et que l'on a

$$c_{bij}=2\,\gamma_{[bi]j}. \tag{4}$$

Or, d'après un théorème de M. Vranceanu[1]), l'espace V_n, ayant ses coefficients de rotation constants, il admet un groupe simplement transitif de transformations isométriques ; les constantes de structure de ce groupe sont égales aux différences $\gamma_{bij}-\gamma_{ibj}$, ou, en vertu des relations (4), aux constantes de structure du groupe G_n. Les deux groupes sont donc isomorphes, ce qu'il fallait démontrer. Remarquons que les relations de (Ricci)

$$2\,\gamma_{bij}=\sum_{rs=1}^{n}\left\{\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)}\left(\frac{\partial\lambda_{b|r}}{\partial x^s}-\frac{\partial\lambda_{b|s}}{\partial x^r}\right)+\lambda_i^{(r)}\lambda_b^{(s)}\left(\frac{\partial\lambda_{j|r}}{\partial x^s}-\frac{\partial\lambda_{j|s}}{\partial x^r}\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda_j^{(r)}\lambda_b^{(s)}\left(\frac{\partial\lambda_{i|r}}{\partial x^r}-\frac{\partial\lambda_{i|s}}{\partial x^r}\right)\right.$$

sont, dans le cas actuel, équivalentes au système de Maurer-Cartan.

Si le groupe G_n est à connexion semisymétrique on a

$$S_{bij}=S_{[b}A_{i]j},\quad A_{ij}=\begin{cases}1 \text{ pour } i\neq j,\\ 0 \text{ pour } i\neq j,\end{cases} \tag{5}$$

---

[1]) G. Vranceanu. Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficients de rotation constants, C. R. t. 189 (1929) p. 386.

) G. Ricci. Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intr. date a priori. Rend. Accad. Lincei, t. 19 (1910).

les S_b étant des constantes arbitraires. Le rapprochement des relations (3) et (5) donne

$$\gamma_{bib} = S_i \quad (b \neq i), \tag{6}$$

tous les autres coefficients de rotation du repère R étant nuls. Il en résulte que le repère R est formé de vecteurs normaux aux hypersurfaces d'un système $n^{\underline{\text{uple}}}$ orthogonal. L'élément linéaire des variétés V_n et (+) peut donc être réduit à la forme

$$\sum_{i=1}^{n} H_i^2 (dx_i)^2$$

et on aura

$$\gamma_{bib} = -\frac{1}{H_b H_i} \frac{\partial H_b}{\partial x^i}.$$

Les relations (6) montrent que l'on a

$$\gamma_{bib} = \gamma_{kik} \quad (b \neq i,\ k \neq i)$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\frac{\partial \log H_b}{\partial x^i} = \frac{\partial \log H_k}{\partial x^i} \quad (b \neq i,\ k \neq i).$$

On peut donc poser

$$H_i = U \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et, par conséquent,

$$\gamma_{bib} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{U}\right).$$

Le rapprochement de ces formules et des égalités (6) donne

$$U = \frac{1}{S_1 x^1 + S_2 x^2 + \ldots + S_n x^n}$$

Nous voyons donc que la variété V_n est à courbure constante négative.

W. Ślebodziński.

O pewnem uogólnieniu spółczynników Ricci'ego.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dn. 20 czerwca 1930 r.

Streszczenie.

Spółczynniki obrotu Ricci'ego w przestrzeni Riemanna V_n zostały określone dla układu odniesienia złożonego z wektorów jednostkowych, wzajemnie do siebie prostopadłych. Autor w komunikacie swym podaje określenie tych wielkości w przypadku układu złożonego z dowolnych (linjowo niezależnych) wektorów oraz uogólnia pojęcie pól wektorjalnych kanonicznych względem pola danego. Dalszy ciąg zawiera dowód twierdzenia, iż do każdego pola wektorjalnego w V_n można dobrać n-1 pól takich, ażeby były jego układem kanonicznym. W zakończeniu wskazano na związek pojęcia pól kanonicznych z zagadnieniem konstrukcii n-krotnego układu nadpowierzchni, będącego uogólnieniem systemów G. Darboux'a o linjach sprzężonych.

W. Ślebodziński.

Sur une généralisation des coefficients de Ricci.

Présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 20 Juin 1930.

Considérons dans une variété riemannienne V_n un point arbitraire M de coordonnées x^λ $(\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et attachons lui deux repères réciproques R_a et R_b formés respectivement de vecteurs a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En désignant par $\overset{i}{a}_\lambda$, $\underset{i}{a}^\lambda$ les composantes covariantes et contravariantes du vecteur a_i et par $\overset{i}{b}_\lambda$, $\underset{i}{b}^\lambda$ celles de b_i, on aura par hypothèse

$$\underset{i}{a}^\lambda \overset{i}{b}_\mu = A^\lambda_\mu, \quad A^\lambda_\mu = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{„ } \lambda \neq \mu, \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\underset{h}{a}^\lambda \overset{k}{b}_\lambda = A^k_h, \quad A^k_h = \begin{cases} 1 & \text{pour } h = k, \\ 0 & \text{„ } h \neq k. \end{cases} \tag{2}$$

On voit donc que le vecteur b_h est normal à l'élément plan déterminé par les vecteurs $a_1, \ldots, a_{h-1}, a_{h+1}, \ldots a_n$. Désignons par (S) le système formé de repères R_a et R_b et par $[k]$ le champ de vecteurs a_k. Si l'on construit au point M un vecteur arbitraire u de composantes u_λ et u^λ, on définit ses composantes relatives au système (S) au moyen des égalités

$$u_i = \underset{i}{a}^\lambda u_\lambda, \quad u^i = \overset{i}{b}_\lambda u^\lambda. \tag{3}$$

D'une manière analogue on calcule les composantes d'un affineur quelconque p. e. de l'affineur mixte $u_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ par les formules suivantes

$$u_{bi}^{\cdot\cdot j} = \underset{b}{a}^\lambda \underset{i}{a}^\mu \overset{j}{b}_\nu u_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Nous distinguerons dans la suite les composantes relatives au système (S) par les indices latins. Posons maintenant

$$\gamma_{ij}^b = \underset{i}{a}^\lambda \underset{j}{a}^\mu \Delta_\mu \overset{b}{b}_\lambda ; \tag{4}$$

dans le cas particulier d'un repère R_a orthogonal et formé de vecteurs unitaires les grandeurs γ_{ij}^b deviennent identiques aux coefficients de Ricci. — Ceci posé, les composantes intrinsèques de la dérivée covariante d'un vecteur $u\,(u_i, u^i)$ peuvent s'écrire comme il suit

$$\Delta_b u_i = \partial_b u_i + \gamma_{ib}^j u_j, \quad \Delta_b u^i = \partial_b u^i - \gamma_{jb}^i u^j, \tag{5}$$

l'opération $\partial_b f$ étant donnée par la formule

$$\partial_b f = \underset{b}{a}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

La méthode adoptée plus haut permet d'introduire la notion de coefficients de Ricci dans une variété générale à connexion affine; on obtient ainsi des grandeurs et des relations identiques à celles qui ont été données pour la première fois par M. Schouten.[1])

Maintenant, nous allons généraliser la notion de congruences canoniques de Ricci. Nous convenons de dire que les

[1]) J. A. Schouten. Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n. Math. Zeitschrift, Bd. 30, 1929, p. 149.

champs [1], [2], ..., $[n-1]$ sont canoniques par rapport au champ $[n]$, si les relations

$$\gamma^n_{(ij)} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1; i \neq j) \tag{6}$$

sont identiquement satisfaites. On peut démontrer qu'il est toujours possible, le champ $[n]$ étant arbitraiment donné, de choisir les autres de manière que les coefficients de Ricci satisfassent aux conditions (6). Imaginons pour ce but un second système $('S)$ de deux repères réciproques et distinguons par un accent placé à gauche les grandeurs qui se rapportent à celui-ci. On aura

$$'\underset{k}{a}^{\lambda} = \alpha^b_k \underset{b}{a}^{\lambda}, \quad '\overset{k}{b}_{\lambda} = \beta^k_b \overset{b}{b}_{\lambda}, \tag{7}$$

les coefficients des transformations (7) étant assujettis aux relations

$$\alpha^b_i \beta^j_b = A^j_i, \quad \alpha^j_b \beta^b_i = A^j_i. \tag{8}$$

Il est facile de vérifier à l'aide des égalités (4), (7) et (8) que les coefficients de Ricci se transforment par les formules suivantes

$$'\gamma^r_{st} = \alpha^r_j \beta^k_s \beta^l_t \gamma^j_{kl} - \alpha^r_b \beta^k_t a^{\mu} \Delta_{\mu} \beta^b_s. \tag{9}$$

Le champ $[n]$ devant être inaltéré par la transformation (7), on aura $\alpha^n_i = \beta^n_i = A^n_i$ et, par conséquent,

$$'\gamma^n_{st} = \sum_{kl=1}^{n-1} \beta^k_s \beta^l_t \gamma^n_{kl} \quad (s, t = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ceci montre que la forme quadratique

$$\Phi = \sum_{kl=1}^{n-1} \gamma^n_{(kl)} \overset{k}{b}_{\lambda} \overset{l}{b}_{\lambda}$$

reste invariante, si l'on passe du système (S) à un autre système $('S)$ ayant en commun avec (S) le champ $[n]$. Or, on peut disposer des coefficients $\alpha^j_i \; (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ et par suite des β^j_i de manière que la forme transformée

$$'\Phi = \sum_{rs=1}^{n-1} {'\gamma^n_{(st)}} \, '\overset{s}{b}_{\lambda} \, '\overset{t}{b}_{\lambda}$$

ne contienne que les termes carrés, autrement dit qu'il soit

$$'\gamma^{n}_{(st)}=0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si les vecteures des champs $[1],\ldots,[h-1],[h+],\ldots,[n]$ sont tangents aux hypersurfaces d'une famille

$$f(x^{a_1},x^{a_2},x^{a_n})=c,$$

on a les relations

$$\gamma^{h}_{[ij]}=0\ \ (i,j=1,2,\ldots,h-1,h+1,\ldots,n) \qquad (10)$$

et réciproquement. On démontre cette propriété de la même façon que dans le ces des coefficients ordinaires de Ricci.[1]) Envisageons maintenant un système $n^{\underline{\text{uple}}}$ (Σ) composé de n familles d'hypersurfaces de la variété V_n et supposons que les vecteurs du repère R_a soient tangents aux lignes d'intersection du système (Σ). Supposons de plus que les champs $[1],\ldots,$ $[h-1],[h+1],\ldots,[n]$ soient canoniques par rapport au champ $[h]$, quel que soit la valeur de h. Le rapprochement des relations (6) et (10) montre qu'on aura dans le cas considéré

$$\gamma^{h}_{ij}=0\ \ (h=1,2,\ldots,n;i,j=1,\ldots,h-1,h+1,\ldots,n;i\neq j) \quad (11)$$

Considérons un point M de la variété V_n et les n hypersurfaces du système (Σ) passant par ce point. Désignons par. H_h l'hypersurface tangente aux vecteurs $a_1,\ldots,a_{h-1},a_{h+1},\ldots,a_n$ Il résulte des relations (11) et des formules (5) que si l'on se déplace de M dans la direction du vecteur a_i, $(i\neq h)$, la différentielle absolue du vecteur unitaire normal à l'hypersurface H_h est perpendiculaire à la direction des vecteurs a_k $(k\neq i,\ k\neq h)$. On voit donc que le système (Σ) généralise la notion du système à lignes conjuguées de Darboux.[2])

---

[1]) V. p. e. T. Levi-Civita. Lezioni di calcolo differenziale assoluto, 1925, C. X. § 7.

[2]) G. Darboux. Leçons sur les systèmes orthogonaux, 1910, Livre III, Ch. II et III.

Stanisław Józef Thugutt.

O produktach hydrolizy leucytu wezuwjuszowego.

Komunikat zgłoszony 20 czerwca 1930 r.

Dotychczasowe badania produktów przeobrażeń leucytu [1]) zdawały się świadczyć o znacznej trwałości ogniwa glinocztero-krzemowego. Przy wszelkiego rodzaju reakcjach, wykonanych w temperaturze bądź 100°, bądź 200° C., w roztworach stężonych czy rozcieńczonych, obojętnych czy alkalicznych, stosunek glinki do krzemionki pozostawał w leucycie niezmieniony. Natomiast wysoka temperatura burzyła ustrój cząsteczki leucytowej, powodując jej rozpad na glinosześciokrzemian i na glinodwukrzemian potasowy [2]). Dlatego też reakcje w wysokiej wykonane temperaturze do studjów nad ustrojem wewnętrznym glinokrzemianów się nie nadawały.

Próby oddziaływania wodą destylowaną na proszek leucytowy [3]), umieszczony w naczyniu szklanem, przedsiębrane w zwykłej temperaturze, poza stwierdzeniem słabej alkalicznej reakcji nic interesującego nie wykazały. Dlatego badania te podjąłem nanowo, w odmiennych operując warunkach.

1.052 g. subtelnie roztartego (średnica ziarna 1—10 mikronów) leucytu z Wezuwjusza, o ciężarze właściwym 2.48 w temperaturze 25° C., umieściłem w autoklawie wymoszczonym platyną na sześciu platynowych półeczkach o łącznej powierzchni 200 cm^2, zalałem pół litrem wody destylowanej i ogrzewałem 100 godzin w temperaturze 213°—224° C.

Po upływie tego czasu przeszło do roztworu 43.05% leucytu, reszta pozostała nierozpuszczoną. Zlany i przesączony przez filtr barowy 0.1-procentowy słabo alkaliczny roztwór opalizował mocno, z wodnym roztworem chlorku barowego koagulował natychmiast,

---

[1]) J. Lemberg. Z. d. d. G. G. **28** (1876), 536; (1885), 983; **37** (1888), 962. St. J. Thugutt. Z. f. anorg. Ch. **2** (1892), 137; N. Jabrb. f. Min. B. - Bd. **9** (1895), 601. F. W. Clarke and G. Steiger. Amer. Journ. of. Sc. [4], **9** (1900), 117—124.

[2]) A. Lagorio. C. R. Soc. Nat. Varsovie (1890) Nr. 3, Nr. 5.

[3]) A. Kenngott. N. J. f. Min. (1867), 305; F. W. Clarke. Amer. Journ. Chem. Soe. **20** (1898), 739; George Steiger. Ib. **21** (1899), 437.

wolniej nieco z salmiakiem lub z siarczanem amonowym, natomiast z alkoholem, z amoniakiem osadu wcale nie wytwarzał. Był to więc koloid elektroujemny. Naturę koloidalną roztworu potwierdziły zresztą badania ultramikroskopowe.

Mocno przekonany o trwałości ogniwa glinoczterokrzemowego, poprosiłem kierownika Zakładu Fizycznego Uniwersytetu Warszawskiego, Pana Profesora Stefana Pieńkowskiego, o łaskawe wykonanie rentgenogramu odparowanego koloidalnego leucytu i jakież było moje zdziwienie, gdy rentgenogram ten wcale nie harmonizował z rentgenogramem pierwotnego leucytu, wykonanym w tymże Zakładzie metodą Debye'a i Scherera. Ani odległości poszczególnych prążków, ani ich wymiar i rysunek nie odpowiadały sobie wzajemnie.

Leucyt, przechodząc do roztworu koloidalnego, zachował wprawdzie ustrój krystaliczny, przeobraził się jednak na nowe jakieś ciało, którego naturę ujawnia częściowo wykonana w tym celu analiza chemiczna.

1. Pierwotny leucyt z lawy Wezuwjusza, ręcznie przebrany i uwolniony od augitu i innych domieszek pod mikroskopem dwuokularowym. Badania mikroskopowe tak oczyszczonej próbki wykazywały małą względnie zawartość wrostków apatytu i szkliwa [1]).
2. Leucyt rozpuszczony koloidalnie.
3. Pozostałość leucytu w wodzie nierozpuszczona.

	1.		2.		3.	
H_2O	0.13		14.34		1.46	
SiO_2	55.08	3.84	49.74	4.75	53.74	3.70
Al_2O_3	23.68	1.00	17.67	1.00	23.81	1.00
Cr_2O_3					niema	
Fe_2O_3	0.88				1.14	
K_2O	20.40	0.96	17.40	1.16	19.91	0.90
Na_2O	0.69		1.15		0.11	
	100.86		100.30		100.17	

[1]) Analiza tego materjału będzie zresztą jeszcze raz powtórzona ze względu na potrzebę dokładnego ustalenia stosunku ługowców, jakoteż na obecność poraz pierwszy odkrytego w leucycie tlenku chromowego. Mianowicie stopiony z pyrosiarczanem potasowym osad amoniakalny wykazywał po zwilżeniu wodą barwę szafirową, a przy dalszem rozcieńczeniu — brudnozieloną. Cecha charakterystyczna dla perchromatów.

Z zestawienia analiz tych wynika, że do roztworu przechodzi pewien nadmiar krzemionki, jakoteż nadmiar sodu, gdy nierozpuszczalna w wodzie pozostałość leucytu jest w krzemionkę i w sód uboższa i nie zawiera tlenku chromowego, który w całości przeszedł do roztworu koloidalnego.

Zawartość 14.34% H_2O w koloidzie dowodzi, że mamy tu z submikronami do czynienia. Tę samą zawartość (14.32% H_2O) wykazał mianowicie ortoklaz koloidalny po uskutecznionej ultrafiltracji [1]).

Zaszła hydroliza leucytu zbliża nas ponownie do poglądów J. Lemberga na budowę leucytu jako zespołu dwóch ogniw — glinodwukrzemowego i glinosześciokrzemowego. Lemberg opierał się na istnieniu w przyrodzie pseudoleucytu, złożonego z ortoklazu i z nefelinu i spotykanego w syenitach leucytowych i w borolanitach. Być więc może, że pierwotny t. zw. pseudoleucyt uległ pod wpływem wody rozpadowi na dwa ogniwa: jedno kwaśne z sześcioma cząsteczkami krzemionki, drugie zasadowe z dwiema. Możliwości tej nie przeczy rozpad leucytu w wysokiej temperaturze na ortoklaz i nefelin, stwierdzony przez A. Lagorio.

Łatwość, z jaką leucyt przechodzi do wodnego roztworu w postaci koloidalnej, ma też duże znaczenie fizjologiczne. Tu staje się zrozumiałą nadzwyczajna urodzajność gleb wytworzonych na tle tefrytu leucytowego [2]). Na nim wszak rośnie i z niego czerpie swe soki najcenniejszy krzew winny, z którego owoców wytwarza się znane wino Lacrima Christi.

St. J. Thugutt.

Sur les produits hydrolytiques d'amphigène.

Note présentée dans la séance du 20 Juin 1930.

Résumé.

1.052 g. d'amphigène du Vésuve (voir l'analyse Nr. 1 du texte polonais) traitée par 500 cm^3 d'eau distillée à 213°—224° C. pendant cent heures donnent une solution colloïdale de 0.1%

[1]) St. J. Thugutt. Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. **6** (1913), 633.

[2]) St. J. Thugutt. „O przyswajaniu związków nierozpuszczalnych w wodzie przez rośliny". Arch. Mineral. **1** (1925), 78—82.

composée de submicrons d'un produit (analyse Nr. 2) plus acide que l'amphigène primaire. Le reste insoluble, contenant 56.95% de la substance ferme (analyse Nr. 3) est moins acide et moins riche en soude.

Le résultat ainsi obtenu nous approche à l'ancienne idée de J. Lemberg, qui supposait dans l'amphigène l'existence de deux silicates: $K_2O . Al_2O_3 . 6\,SiO_2$ et $K_2O . Al_2O_2 . 2\,SiO_2$.

La fertilité connue des sols leucytotephritiques paraît à l'instant aussi plus compréhensible.