COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXIV Année 1931 Fascicule 2—6

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIV 1931 Zeszyt 2—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1932

DZIEWULSKI
Zakłady Graf.-Introl.
Warszawa
ZŁOTA 29.

TREŚĆ ZESZYTU 2—6.

TABLE DES MATIÈRES.

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie
z dnia 19 lutego 1931 r.

E. Żyliński.

Przyczynek do podstaw teorji ideałów.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 19 lutego 1931 r.

Streszczenie.

Autor wprowadza ideały jako pewne klasy skończonych zbiorów liczb całkowitych ciała algebraicznego.

Teorja ta stoi w takim stosunku do klasycznej teorji Dedekinda, jak współcześnie ujęta teorja Cantora liczb rzeczywistych do teorji przekrojów. Ten sposób postępowania daje znaczne ułatwienie w „rachowaniu" ideałami.

E. Żyliński.

Zur Begründung der Idealtheorie.

Vorgelegt von W. Sierpiński in der Sitzung vom 19 Februar 1931.

Das Ziel dieser Note ist eine eigenartige Begründung der Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper, die in einer ähnlichen Beziehung zu der klassischen Dedekind'schen Theorie steht, wie eine moderne Auffassung der Cantor'schen Theorie der reellen Zahlen zu der Dedekind'schen.

Wenn man die rationalen Zahlen als Datum betrachtet und zu reellen Zahlen übergehen will, kann man zuerst die Menge aller Folgen $(a) = a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ rationaler Zahlen a_n betrachten, für die die Cauchy'sche Konvergenzbedingung gilt (für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_ε von der Art, dass $|a_p - a_q| < \varepsilon$, wenn nur $p, q > n_\varepsilon$); solche Folgen wollen wir Cauchy'sche Folgen nennen.

Mit den Folgen (a) und (b) sind auch $(a \pm b)$ und $(a\,b)$ Cauchy'sche Folgen (Geschlossenheitssätze). Wir führen jetzt eine Äquivalenz von Cauchy'schen Folgen ein: wir setzen $(a) \sim (a')$ dann und nur dann, wenn es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε gibt, so dass $|a_n - a'_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > n_\varepsilon$; diese Relation ist eine Äquivalenz, denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Diese Äquivalenz bewirkt [1]) eine Zerspaltung der Menge aller Cauchy'schen Folgen in Klassen von der Art, dass zwei Folgen aus einer Klasse äquivalent sind, dagegen zwei Folgen aus zwei verschiedenen Klassen nicht äquivalent sind.

Dann kommen die folgenden grundlegenden Stabilitätssätze: wenn $(a) \sim (a')$ und $(b) \sim (b')$, so ist $(a + b) \sim (a' + b')$ und $(a\,b) \sim (a'\,b')$; ferner, wenn es ein $\varepsilon > 0$ von der Art gibt dass für alle n, die grösser als eine gewisse natürliche Zahl sind $a_n > b_n$ ist, so gilt dasselbe für die Folgen (a') und (b'). Auf Grund dieser 3 Sätze wird die Addition, Multiplikation und Grössenordnung der Folgenklassen in üblicher Weise definiert; z. B. ist die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ der Folgenklassen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ diejenige eindeutig bestimmnte Klasse, zu welcher alle Folgen $(a + b)$ gehören, wo (a) eine Folge aus $\mathfrak{a}$ und (b) eine Folge aus $\mathfrak{b}$ ist. Die Folgenklassen mit der in obigen Weise erklärten Addition, Multiplikation und Grössenordung werden jetzt „reelle" Zahlen genannt; jede beliebige Cauchy'sche Folge aus der eine reelle Zahl definierenden Klasse ist ein Repräsentant dieser Zahl und kann für besondere Rechnungen ganz beliebig aus der Klasse ausgewählt werden. Endlich können diejenigen reellen Zahlen, die einen Repräsentant von der Gestallt: $a, a, \ldots a, \ldots$ haben, den rationalen Zahlen isomorph (in Bezug auf die Addition, Multiplikation und Grössenordnung) zugeordnet werden, wodurch die Einbettung der rationalen Arithmetik in die reelle Arithmetik vollbracht wird.

Die charakteristischen Züge dieser konstruktiven Methode sind die folgenden: 1. Betrachtung der Menge von Ausdrücken (oder Mengen) bestimmter Art und von gewissen Operationen

[1]) Vgl. z. B. B. Z. van der Waerden, Moderne Algebra, Berlin (1930), B. I, S. 14.

mit diesen Ausdrücken, die wieder zu Ausdrücken derselben Art führen (Geschlossenheitssätze). 2. Einführung einer Äquivalenz von Ausdrücken und die dadurch erhaltene Klassenzerspaltung ihrer Menge. 3. Die sog. Stabilitätssätze für die Operationen mit Ausdrücken und die darauf fundierten Klassenoperationen. 4. Übergang zur Klassenarithmetik und Nachweis des Isomorphismus zwischen einer Klassenmenge von Ausdrücken und dem Ausgangsbereiche.

Der oben skizzierte Ideengang kann dem Wesen nach überall in der konstruktiven theoretischen Arithmetik durchgeführt werden [1]).

Die Grundlagen der Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper können in ähnlicher Weise folgendermassen aufgebaut werden.

1. Wir betrachten die Menge aller endlichen (nichtgeordneten) Mengen $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n]$ ganzer algebraischer Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers $K(\omega)$.

Der Geschlossenheitssatz, den wir hier brauchen ist ganz einfach und besteht darin, dass wenn

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m] \text{ und } [\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n]$$

zwei Mengen der betrachteten Art sind, dann die Menge

$$[\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \ldots \alpha_m\beta_n]$$

wieder eine endliche Menge ganzer algebraischer Zahlen ist.

2. Wir setzen jetzt:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m] \sim [\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha'_{m'}]$$

dann und nur dann, wenn es solche ganze algebraische Zahlen μ_{ij} und μ'_{kl} in $K(\omega)$ giebt, dass

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\,\alpha_j = \alpha_i' \quad \text{und} \quad \alpha_k = \sum_{l=1}^{m'} \mu'_{kl}\,\alpha_l'.$$

---

[1]) Bei dem Übergang von ganzen rationalen Zahlen zu den rationalen, entspricht der Stabilitätssatz der Grössenordnung mutatis mutandis dem folgenden wenig benutzten elementaren Satze: $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ dann und nur dann, wenn $q^2mn < n^2pq$.

Die obige Relation ist offenbar eine reflexive, symmetrische und transitive, also eine Äquivalenz und bewirkt die Zerspaltung der Menge von Ausdrücken $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n], \ldots$ in Klassen äquivalenter Mengen. Man sieht sofort, dass $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n] \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \sum_{i=1}^{n} \pi_i \alpha_i], [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \varepsilon] \sim [1]$, wenn ε eine Einheit von $K(\omega)$ ist u. s. w.

3. Man hat weiter den folgenden, einleuchtenden Stabilitätssatz:

Wenn

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m] \sim [\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{m'}'],$$

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n] \sim [\beta_1', \beta_2', \ldots \beta_{n'}'],$$

dann ist

$$[\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_1, \ldots \alpha_m \beta_n] \sim [\alpha_1' \beta_1', \alpha_1' \beta_2', \alpha_2' \beta_1', \ldots \alpha_{m'}' \beta_{n'}'].$$

Denn wegen der Äquivalenzbedingungen sind die $\alpha_i \beta_j$ bilineare Formen der α_k' und β_l' mit ganzen algebraischen Koeffizienten und umgekehrt.

Auf Grund dieses Stabilitätssatzes können wir die Multiplikation von Klassen von Ausdrücken $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$ eindeutig erklären, indem wir als das *Produkt* zweier solcher Klassen $\{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m], \ldots\}$ und $\{[\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n], \ldots\}$ diejenige Klasse betrachten wollen, zu welcher alle Ausdrücke von der Gestalt

$$[\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_1, \ldots \alpha_m \beta_n]$$

gehören.

Ein zweiter nützlicher Stabilitätssatz lautet so:

Wenn

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m] \sim [\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{m'}']$$

und

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} \alpha_j = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo μ_{ij} ganze algebraische Zahlen von $K(\omega)$ sind, dann gibt es auch in $K(\omega)$ ganze Zahlen μ_{kl}' von der Art, dass

$$\sum_{l=1}^{m'} \mu_{kl}' \alpha_l' = \beta_l \qquad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Der Satz folgt unmittelbar daraus, dass die Zahlen α_j lineare homogene Formen der α_l' mit ganzen algebraischen Koeffizienten sind.

Auf Grund dieses Satzes führen wir die Teilerrelation für Klassen ein, indem wir die Klasse, die $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$ enthält, einen *Teiler* der Klasse, die $[\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n]$ enthält, nennen [1]).

4. Die Klassen von Ausdrücken $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$ werden jetzt *„Ideale"* des Körpers $K(\omega)$ genannt; für diese ist nach 3. die Multiplikation und die Teilerrelation erklärt.

Jedes Ideal hat unendlich viele Repräsentanten $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$, die für die Ausführung besonderer Rechnungen beliebig aus der betreffenden Klasse gewählt werden können. Die Multiplikation ist, wie unmittelbar einleuchtet, kommutativ und assoziativ. Die Teilerrelation ist transitiv und jeder Faktor eines Produktes ist dessen Teiler (es zeigt sich weiter, wie bekannt, dass auch umgekehrt zu jedem Teiler ein komplementärer Faktor existiert). Das Ideal mit dem Repräsentanten [1] spielt die Rolle der absoluten Einheit bei der Idealenmultiplikation und besitzt offenbar keine Teiler (man beweist weiter, wie bekannt, dass die Ideale des Körpers $K(\omega)$ sogar eine *vollständige* [2]) Halbgruppe bilden).

Die eingliedrigen oder Hauptideale, d. h. solche, die Repräsentanten $[\alpha]$, $[\beta]$, ... haben [3]), können nun isomorph (in Bezug auf die Multiplikation) den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(\omega)$ zugeordnet werden, indem man dem Ideal $[\alpha]$ die Zahl α zuordnet [4]).

---

[1]) Zur Begründung der Dedekindschen Addition von Idealen braucht man bei dieser Auffassung noch einen weiteren Stabilitätssatz: bei Behaltung der Voraussetzungen des ersten Satzes in 3. hat man auch

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n] \sim [\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha'_{m'}, \beta_1', \beta_2', \ldots \beta'_{n'}].$$

[2]) Vollständigkeit = Existenz des grössten gemeinschaftlichen Teilers beliebiger Elemente.

[3]) In $K(\omega)$ gibt es, wie bekannt, nur eingliedrige und zweigliedrige Ideale.

[4]) Dass der Quotient zweier Hauptideale nur ein Hauptideal sein kann, sieht man am einfachsten so: wenn $[\alpha] = [\beta]\,[\gamma, \delta, \ldots] = [\beta\gamma, \beta\delta, \ldots]$, so ist $\alpha = \mu\beta\gamma + \nu\beta\delta + \ldots = \beta(\mu\gamma + \nu\delta + \ldots)$, also $[\alpha] = [\beta]\,[\mu\gamma + \nu\delta + \ldots]$; wegen der Eindeutigkeit der Division, die eine Halbgruppeneigenschaft ist folgt:

$$[\gamma, \delta, \ldots] = [\mu\gamma + \nu\delta + \ldots], \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die oben skizzierte Grundlegung der Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper kann offenbar ev. bei Zulassung unendlicher Mengen auch in anderen Ringen durchgeführt werden.

Der Vorzug dieser Methode gegenüber der klassischen Dedekindschen liegt in erster Linie darin, dass man von Anfang an mit handlichen Ausdrücken rechnet und den wesentlichen Ursprung der Theorie vor Augen hat — die Eigenschaften des grössten gemeinschaftlichen Teilers natürlicher Zahlen (Gleichheitsbedingungen und Multiplikationsregel).

Włodzimierz Fedoroff.

O funkcjach analitycznych wszędzie ciągłych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 19 lutego 1931 r.

Streszczenie.

Uogólniając pewien dawny wynik Zoretti'ego, autor, w pierwszej części pracy, udowadnia twierdzenie następujące: *jeśli funkcja ciągła $f(z)$ zmiennej zespolonej w pewnym obszarze G znika na jakimś zbiorze doskonałym punktokształtnym $P \subset G$, a jest holomorficzna w obszarze $G - P$, wówczas $f(z) = 0$ tożsamościowo w całym obszarze G.*

W części drugiej autor zajmuje się temże zagadnieniem — oraz kwestjami z niem związanemi — w odniesieniu do specjalnej klasy funkcji, określonych przez całki powierzchniowe postaci $f(z) = \iint_P \frac{\mu(\zeta)}{z - \zeta} d\omega$, rozciągnięte na zbiory P punktokształtne, domknięte, wszędzie miary dodatniej.

W. Fédoroff.

Sur les fonctions analytiques partout continues.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 19 Février 1931.

INTRODUCTION.

Les exemples des fonctions analytiques partout continues, nulles à l'infini et ayant pour points singuliers les points d'un ensemble parfait partout discontinu sont nombreux [1]).

Mais on sait très peu de la nature de ces fonctions (par exemple, de d'allure de ses dérivées).

Cela tient à ce que non seulement ses expressions analytique sont bien compliquées, mais que la théorie même des fonctions monogènes définies dans un ensemble parfait et ayant une dérivée par rapport aux points de cet ensemble, est très peu avancée.

Et cependant de telles fonctions se présentent naturellement dans l'étude des fonctions analytiques partout continues comme nous le verrons dans cet travail.

Par exemple, pour étudier les valeurs singulières des fonctions analytiques partout continues, c.-à-d. les valeurs de ces fonctions pour les points de l'ensemble singulier (et c'est cette étude qui sera le but principal de notre travail) nous nous servirons (dans le chapitre I) des propriétés des fonctions définies seulement dans un ensemble parfait partout discontinu et monogènes par rapport aux points de cet ensemble.

Il est vrai que pour les fonctions analytiques partout continues définies à l'aide des intégrales doubles de M. Lebesgue cette étude des valeurs singulières sera abordée (dans le chapitre II) par une méthode analytique, sans se servir des fonctions monogènes dans un ensemble parfait discontinu par rapport aux

---

[1]) D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Annales de Toulouse*, (2), t. 7, (1905), p. 314.

A. Denjoy, *Comptes Rendus*, t. 148, (1909), p. 1154; t. 149, (1909), pp. 258—386.

W. Goloubeff, *Fonctions analytiques uniformes*, (en russe), Moscou, (1916), pp. 137—149.

P. Urysohn, *Sur une fonction analytique partout continue, Fundamenta Mathematicae*, t. IV, p. 144.

points de cet ensemble, mais cette méthode analytique s'applique à un classe des fonctions assez particulières et, d'autre part, elle n'est pas ainsi évidente comme la méthode géométrique exposée dans le chapitre I.

Enfin il faut ajouter que la théorie géométrique générale des fonctions monogènes dans un ensemble parfait quelconque, indépendante des expressions analytiques particulières et de la théorie des intégrales curvilignes, est nécessaire non seulement pour fournir des *méthodes* pour l'étude approfondie des fonctions analytiques ordinaires dans les domaines d'existence de ces fonctions, mais cette théorie est indispensable parce que (comme on montréra dans le chapitre II) pour certaines fonctions analytiques partout continues l'ensemble de tous les points où une quelconque de ces fonctions est monogène (c-.à-d. a une dérivée unique pour chaque point de cet ensemble) ne coïncide avec le domaine d'existence de cette fonction, mais contient quelques points singuliers de cette fonction.

Revenons maintenant à l'étude des valeurs singulières d'une fonction analytiqee partout continue et posons le problème suivant:

déterminer une partie aliquote U de l'ensemble P de tous les points singuliers ζ (d'une fonction analytique partout continue $f(z)$) telle, que la connaissance des valeurs singulières de cette fonction $f(z)$ dans l'ensemble U (c.-à-d. la connaissance de $f(\zeta)$ pour $\zeta \subset U$) doit définir *complètement* la fonction analytique $f(z)$ dans tout le plan.

Ainsi, il existe une fonction analytique *unique* ayant ses valeurs singulières dans l'ensemble U *données à priori* (si une telle partie aliquote U de l'ensemble P peut exister).

Nous avons obtenu la solution du problème posé sous la forme suivante:

chaque *portion séparée* de l'ensemble P [1]) est l'ensemble U du problème (on suppose que P est un ensemble parfait *partout discontinu* ou, en d'autres termes, *punctiforme*).

Il faut ajouter que dans notre démonstration *géométrique* de ce fait les notions de la mesure et de la sinuosité des ensembles ne serons pas utilisées (l'ensemble cherché U est une

---

[1]) Nous désignons par *une portion séparée* d'un ensemble parfait P chaque ensemble Q tel, que $Q \subset P$, Q est parfait et aussi $P - Q$ est parfait.

portion séparée quelconque quant à la mesure ou à la sinuosité de cet ensemble).

Il est vrai, que dans notre démonstration *analytique* de ce même fait l'ensemble P est supposé d'aire partout non nulle, cela tient à ce que nous avons considerés les fonctions analytiques partout continues, définies à l'aide des intégrales doubles de Lebesgue.

Passons maintenant à la solution du problème posé.

Il suffit évidemment pour obtenir la solution sous la forme indiquée de prouver, qu'une fonction analytique partout continue ne peut être nulle sur une portion séparée Q de l'ensemble singulier P sans être nulle identiquement.

A cet effet, remarquons que, l'ensemble Q étant séparé, il existe un domaine borné $\mathfrak{D}$ qui contient tous les points singuliers qui forment cet ensemble Q et ne contient d'autres points singuliers (les points d'ensemble $P - Q$). Considérons notre fonction $f(z)$ dans $\mathfrak{D}$.

Ainsi nous aurons une fonction continue dans ce domaine $\mathfrak{D}$ et holomorphe dans ce domaine sauf sur un ensemble parfait punctiforme des points singuliers transcendants ordinaires [1]).

Il suffit donc de prouver la proposition suivante:

Théorème fondamental.

Soit une fonction univoque et bornée dans un domaine et holomorphe dans ce domaine sauf sur un ensemble parfait punctiforme, situé à l'intérieur de ce domaine, chaque point de cet ensemble étant un point singulier transcendant ordinaire [2]) *de notre fonction* (*ainsi cette fonction est continue pour chaque point du domaine*) [3]). *Dans ces conditions, on peut affirmer qu'une telle fonction ne peut prendre la même valeur en chaque point de cet ensemble singulier punctiforme.*

Une démonstration *géomètrique* du théorème fondamental sera exposée dans le Chapitre I. Nous donnons une démonstration *analytique* de ce théorème dans le second Chapitre.

---

[1]) Pour cette terminologie des points singuliers voir, par exemple, Zoretti, *Leçons sur le prolongement analytique*, Paris, (1911), p. 61.

[2]) Voir, p. ex., Zoretti, l. c., p. 61.

[3]) On définit les valeurs de cette fonction sur l'ensemble singulier par la continuité.

Remarquons ici qu'un cas très particulier de ce théorème a été démontré par M. L. Zoretti [1]) et un théorème un peu plus général a été énoncé par M. D. Pompeiu [2]), mais la démonstration *rigoureuse* de ce dernier théorème n'a pas été publiée [3]).

CHAPITRE I.

Sur la théorie géométrique des fonctions monogènes sur un ensemble parfait punctiforme.

La structure des ensembles des valeurs d'une fonction uniforme et monogène sur un ensemble fermé punctiforme.

Soit $w = f(\zeta)$ une fonction définie pour les points ζ d'un ensemble parfait punctiforme P. Nous supposons que $f(\zeta)$ est univoque, continue et *uniformément monogène dans cet ensemble,* c.-à-d. telle que le rapport

$$\frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}$$

où ζ_0 et ζ sont deux points de P (ζ_0 fixe, ζ variable toujours sur P) tend vers une limite déterminée (*la dérivée* $f'(\zeta_0)$) quand $\zeta \rightarrow \zeta_0$ et cela *uniformément* pour chaque point ζ_0 de P. Ainsi, il existe une fonction positive d'une variable positive ε $\delta(\varepsilon)$ telle qu'on a, si petit que soit $\varepsilon > 0$,

$$(1') \qquad \left| \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} - f'(\zeta_0) \right| < \varepsilon$$

chaque fois quand ζ et ζ_0 sont situés dans un cercle du diamètre $\delta(\varepsilon)$. Un tel cercle sera désigné par

$$K(\varepsilon).$$

Dans ce cas $f'(\zeta)$ est une fonction continue sur P.

Cela posé, considerons $f(\zeta)$ sur un ensemble fermé Q

$$Q \subset P$$

---

[1]) Zoretti, l. c. p. 82.

[2]) D. Pompeiu, *Comptes Rendus*, t. 153, (1911), p. 624.

[3]) Voir aussi les indications interessantes de M. A. Denjoy: *Comptes Rendus*, (1909), t. 149, p. 386.

et étudions la structure d'ensemble des valeurs de $f(\zeta)$ pour tous les points de Q, ou, en d'autres termes, la structure de l'image de Q sur le plan de la variable w.

Dans cette étude nous distinguons les cas suivants:

1) dans Q la dérivée $f'(\zeta) \neq 0$;

2) dans Q l'ensemble M de tous les zéros de la dérivée est dénombrable;

3) dans Q l'ensemble M (qui est necessairement fermé) est non dénombrable, mais son noyau (parfait) N est *semi-linéaire* ou *ponctuel* [1]).

Nous allons voir que dans ces trois cas l'image de l'ensemble Q est necessairement punctiforme.

Dans le *premier* cas la démonstration de cette proposition est facile.

En effet, la dérivée $f'(\zeta)$ étant continue et non nulle sur l'ensemble fermé Q, il existe un nombre positif fixe ε tel qu'on a

$$|f'(\zeta)| > \varepsilon \quad \text{sur} \quad Q,$$

et ainsi pour des points quelconques ζ et ζ_0 de l'ensemble Q, situés dans un cercle $K(\varepsilon)$, on a

$$f(\zeta) \neq f(\zeta_0),$$

car dans le cas contraire on aura, en vertu de l'inégalité (1'),

$$|f'(\zeta_0)| < \varepsilon$$

ce qui est absurde.

Ainsi l'image de la portion de Q dans $K(\varepsilon)$ est évidemment punctiforme. De même l'image de tout l'ensemble Q est punctiforme, l'ensemble Q pouvant être enfermé dans un nombre fini de tels cercles $K(\varepsilon)$.

C. Q. F. D.

Dans le *second* cas considerons l'image de l'ensemble fermé M des zéros de la dérivée $f'(\zeta)$.

Cet image est un ensemble punctiforme, M étant dénombrable.

Maintenant, pour prouver que l'image de Q est aussi punctiforme, il est commode de démontrer le lemme général suivant:

L'image d'un ensemble fermé (et toujours punctiforme) Q est punctiforme, chaque fois quand l'image de l'ensemble M de tous les zéros de la dérivée $f'(\zeta)$ sur Q est lui même punctiforme.

---

[1]) Voir pour cette terminologie, par ex., Z o r e t t i, l. c., p. 81.

Démonstration. On peut évidement décomposer cet ensemble Q de la manière suivante

$$Q = M + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n + \cdots$$

où Q_1, Q_2, ... sont des ensembles fermés et

$$M \cdot Q_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

d'autre part, la distance des ensembles Q_i et M tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Comme la dérivée $f'(\zeta)$ ne peut être nulle sur Q_i, l'image de Q_i est punctiforme, de même l'image de Q est aussi punctiforme (comme la somme d'une infinité dénombrable des ensembles fermés punctiformes).

C. Q. F. D.

Considérons maintenant le *troisième* cas (l'ensemble M des zéros de la dérivée contenant un noyau parfait N *semi-linéaire* ou *ponctuel*).

Les propositions démontrées précédemment montrent que l'image de tout ensemble Q est punctiforme chaque fois quand l'image du noyau de M est punctiforme. Ainsi il suffit de prouver que *l'image d'un ensemble N sémilineaire ou ponctuel sur lequel la dérivée $f'(\zeta)$ est nulle est nécessairement punctiforme.*

Démonstration. Comme N est sémilineaire ou ponctuel, il existe un nombre L tel, qu'étant donné un nombre positif arbitraire δ, on peut trouver des ensembles parfaits, parties aliquotes de N et tels que désignant ces ensembles par $P_1, P_2, \ldots P_m$ on aura

$$N = P_1 + P_2 + \cdots + P_m$$

$$P_i \cdot P_k \neq 0 \qquad (i \neq k) \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \ldots m \\ k &= 1, 2, 3 \ldots m \end{aligned}$$

et de plus, si le diamètre de P_k est d_k, on a aussi

$$d_k < \delta$$

$$(1) \ldots \qquad \sum_{k=1}^{m} d_k < L$$

$\left(L \text{ est indépendant de } \delta, \text{ et } m \text{ tend vers infini avec } \frac{1}{\delta}\right)$.

D'autre part quel que soit $\varepsilon < 0$ on peut lui faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel, qu'on ait

(2) . . . . $$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \varepsilon . |\zeta - \zeta_0|$$

chaque fois quand

(3) . . . $$|\zeta - \zeta_0| < \delta$$

(ζ et ζ_0 étant deux points de l'ensemble N).

Supposons maintenant que l'image de N contient un ensemble continu K avec un diamètre $d > 0$.

Nous allons montrer que, quel que soit ε dans l'inégalité (2), on doit avoir

(4) . . . $$d < \varepsilon . L$$

ce qui est absurde.

Ainsi il suffit de prouver l'inégalité (4) pour en déduire que l'image de N est punctiforme.

Considérons avant tout les ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_m$ et leurs images $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ (sur le plan de la variable $w = f(\zeta)$). Nous montrerons sans peine que la somme des diamètres des ensembles $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ ne peut surpasser (quel que soit m) le nombre $\varepsilon . L$, qui tend vers zéro avec ε.

En effet, la fonction $f(\zeta)$ étant continue, on en déduit, que l'ensemble π_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) est parfait et qu'on peut trouver deux points ζ et ζ_0 dans l'ensemble P_i tels, que le diamètre de π_i est égal a $|f(\zeta) - f(\zeta_0)|$. Comme (ε étant donné) on peut supposer que le diamètre de P_i est inférieur à δ on a, en vertu des inégalités (1), (2) et (3), en désignant par S_m la somme des diamètres des ensembles $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$,

(5) . . . . . . $$S_m < \varepsilon . L .$$

Maintenant pour démontrer l'inégalité (4) il suffit de rapeler cette propriété générale des continus que *pour une décomposition quelconque d'un continu en un nombre fini des parties continues le diamètre de ce continu ne peut surpasser la somme des diamètres de ces parties.*

Cette propriété est évidente pour une décomposition d'un continu en deux parties continues et pour le cas général on peut employer la méthode de la démonstration par récurrence.

Ainsi on a

$$d \leqslant S_m$$

et, par conséquent, $d < \varepsilon . L$. C. Q. F. D.

Nous n'insistons plus sur l'étude des propriétés des fonctions monogènes sur un ensemble parfait punctiforme [1]) et nous passons à la démonstration du théorème fondamental.

Démonstration du théorème fondamental.

Soit $w=f(z)$ une fonction univoque et continue dans un domaine $\mathfrak{D}$ et de plus holomorphe dans cet domaine sauf sur un ensemble parfait punctiforme P qui est l'ensemble de tous les points singuliers (transcendants ordinaires) de cette fonction $f(z)$. Nous désignons par z un point quelconque extérieur à P (et dans $\mathfrak{D}$), et par ζ un point quelconque de l'ensemble P.

$f(\zeta)$ est donc une fonction univoque et continue (mais non holomorphe) dans l'ensemble P.

Notre but est de prouver, que la fonction $f(\zeta)$ ne peut être nulle (pour tous les points ζ) sans que $f(z)$ soit aussi nulle (pour tous les points z).

En effet, supposons, par impossible, que $f(\zeta)=0$ (pour chaque point ζ), mais que $f(z)$ ne soit pas nulle pour chaque point z (ainsi l'ensemble de tous les zéros de la fonction $f(z)$ est dénombrable ou fini).

Alons on peut à l'aide de l'intégrale de Cauchy décomposer notre fonction $f(\zeta)$ de la manière suivante [2])

$$f(z)=F(z)+H(z)$$

ou $F(z)$ est une fonction analytique partout continue et ayant pour points singuliers les points ζ et ces points seulement. La fonction $H(z)$ est partout holomorphe dans $\mathfrak{D}$ (ainsi cette fonction est holomorphe non seulement pour les points z, mais aussi pour les points ζ). On a aussi dans P

$$f(\zeta)=F(\zeta)+H(\zeta)$$

et, comme $f(\zeta)=0$, on a dans P

$$F(\zeta)=-H(\zeta).$$

Ainsi la fonction $F(\zeta)$, considerée sur l'ensemble P seulement, est une fonction univoque et continue sur P et de plus

[1]) Voir pour une telle étude une Note de l'auteur insérée dans le *Bulletin de l'Institut Polytechnique à Ivanovo-Vosniesensk*, Nr. 1, (1919), p. 45, (en russe).

[2]) Zoretti, l. c., pp. 79—82.

elle est uniformement monogène sur P (pour les points ζ) comme la fonction $H(\zeta)$.

D'ailleurs, la derivée $F'(\zeta)$ étant égale à $-H'(\zeta)$, on voit que l'ensemble de tous les zéros de la dérivée $F'(\zeta)$ sur P est *fini*.

Ainsi les valeurs singulières de la fonction analytique partout continue $F(z)$ (c.-à-d. les valeurs $F(\zeta)$ sur P) forment un ensemble parfait punctiforme.

Mais c'est évidemment absurdes (si la fonction analytique $F(z)$ n'est pas une constante), car les valeurs singulières $F(\zeta)$ doivent former dans le plan de la variable $t = F(z)$ [z désignant maintenant un point quelconque du plan] les frontières d'un continuum borné qui est l'ensemble de *tous* les valeurs de la fonction analytique $F(z)$ quand la variable z décrit tout son plan [1]).

Ainsi on doit être $f(z) = 0$ dans le domaine $\mathfrak{D}$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Sur les fonctions analytiques définies par les intégrales doubles de Lebesgue.

Relations fondamentales.

Nous considérons dans la suite des fonctions analytiques partout continues $f(z)$ telles que

(1) . . . $$f(z) = \iint_P \frac{\mu(\zeta)}{z - \zeta} d\omega$$

$d\omega$ désignant l'élément d'aire.

ζ la variable d'intégration ($\zeta \subset P$, P étant un ensemble parfait punctiforme d'aire partout non nulle).

z un point quelconque du plan *extérieur à* P.

$\mu(\zeta)$ une fonction bornée sur P

(2) . . . $$|\mu(\zeta)| < K.$$

L'intégrale est étendue à l'ensemble P au sens de M. Lebesgue [2]).

---

[1]) Voir aussi la démonstration de M. Zoretti, (l. c., p. 82), d'un cas très particulier de ce théorème.

[2]) Voir, p. ex., Zoretti, l. c., pp. 86—87.

Les valeurs *singulières* $f(\zeta)$ (les valeurs sur P) sont définies par la continuité.

Cela posé, citons deux formules connues. La première est la suivante:

si on pose pour deux points *quelconques* u et u' (extérieurs à P ou sur P) $d = |u - u'|$ on aura

$$|f(u) - f(u')| < [A \cdot d + \varepsilon(d) \cdot d + B\, d \cdot |\log d|]\, K;$$

A et B étant deux constantes, et $\varepsilon(d)$ une tonction qui tend vers zéro avec d [1]).

Il nous sera suffisant d'employer cette formule sous la forme plus générale

$$(3) \ldots \qquad |f(u) - f(u')| < K \cdot C \cdot d^{\alpha}$$

ou C est une constante (si on suppose que les points u et u' sont contenus dans un domaine $\mathfrak{D}$ fixe: $P \subset \mathfrak{D}$) et

$$(4) \ldots\ldots \qquad 2\alpha > 1\,.$$

La seconde formule (D. Pompéiu [2])) est la suivante:

$$(5) \ldots\ldots \qquad \int_L f(u)\, du = 2\pi i \iint_{P.(L)} \mu(\zeta)\, d\omega$$

ou L est une ligne réctifiable fermée quelconque (L peut passer par des points ζ) et (L) désigne le domaine limité par L. Enfin u désigne un point z ou un point ζ.

Nous allons maintenant établir d'autres relations [3]) très importantes dans la théorie des fonctions partout continues et nécessaires pour la démonstration analytique de notre théorème fondamental.

Théorème A [4]).

Soient deux fonctions analytiques partout continues

$$p(z) = \iint_P \frac{\alpha(\zeta)}{z - \zeta}\, d\omega, \quad q(z) = \iint_P \frac{\beta(\zeta)}{z - \zeta}\, d\omega$$

---

[1]) Z o r e t t i, l. c., p. 89.

[2]) P o m p e i u, *Comptes Rendus*, (1910), t. 150, p. 454.

[3]) Nous avons démontré beaucoup des relations nouvelles dans notre Note *Bulletin de l'Institut Polytechnique à Ivanovo-Vosniesensk*, Nr. 6, (1922), p. 43, (en russe).

[4]) Voir la Note citée de l'auteur.

P étant un ensemble parfait punctiforme, $\alpha(\zeta)$ *et* $\beta(\zeta)$ *deux fonctions bornées sur P.*

Ceci posé, on a l'identité suivante:

$$(6)\ \dots \qquad p(z) \cdot q(z) = \iint_P \frac{\alpha(\zeta) \cdot q(\zeta) + \beta(\zeta) \cdot p(\zeta)}{z - \zeta}\, d\omega\,.$$

Pour démontrer cette identité (6) il suffit évidemment de prouver, que pour *chaque* ligne L fermée et rectifiable on a la relation suivante:

$$(7)\ \dots \qquad \int_L p(u)\, q(u)\, du = 2\pi i \iint_{P(L)} [\alpha(\zeta)\, q(\zeta) + \beta(\zeta) \cdot p(\zeta)]\, d\omega.$$

De plus, il suffit de prouver cette relation on supposant que la ligne L est le contour d'un triangle quelconque Δ.

Dans ce dernier cas nous allons partager le triangle Δ par des parallèles à ses côtés en n^2 triangles égaux entre eux. Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n^2}$ ces triangles et soit Δ_i un quelconque de ces triangles qui contient des points ζ. Soient enfin ζ_0 un point singulier fixe dans Δ_i et L_i le contour de ce triangle.

On a évidemment:

$$\int_{L_i} p(u) \cdot q(u)\, du = \int_{L_i} [p(u) - p(\zeta_0)] \cdot [q(u) - q(\zeta_0)]\, du +$$

$$+ \int_{L_i} p(u) \cdot q(\zeta_0) \cdot du + \int_{L_i} q(u) \cdot p(\zeta_0) \cdot du\,.$$

Désignons la première intégrale par I_1, la seconde et la troisième par I_2 et I_3 resp.

Alors on a, en vertu de la relation (3),

$$(8)\ \dots \qquad |I_1| < M \cdot d^2 \cdot \varepsilon(d)$$

où d est le plus grand côté du triangle Δ_i $\varepsilon(d)$ une fonction qui tend vers zéro avec d, M une constante (qu'on peut supposer la même pour tous les triangles Δ_i, contenus dans un domaine fixe $\mathfrak{D}$, et pour tous les fonctions $p(u)$ et $q(u)$ avec $|\alpha(\zeta)|$ et $|\beta(\zeta)|$ bornés dans leurs ensemble).

De plus, en vertu de la relation (5), on a

$$I_2 + I_3 = 2\pi i \iint_{P.(L_i)} [\alpha(\zeta)\, q(\zeta_0) + \beta(\zeta) \cdot p(\zeta_0)]\, d\omega$$

et cette expression peut s'écrire de la manière suivante :

$$2\pi i \iint\limits_{P.(L_i)} [\alpha(\zeta) . q(\zeta) + \beta(\zeta) . p(\zeta)]\, d\omega + I_4 ,$$

où

$$I_4 = 2\pi i \iint\limits_{P.(L_i)} \{\alpha(\zeta)[q(\zeta_0) - q(\zeta)] + \beta(\zeta)[p(\zeta_0) - p(\zeta)]\}\, d\omega$$

et ainsi

(8′) . . . . . . $\qquad |I_4| < M.[mes\, P.(L_i)]\, \varepsilon_1(d)\, ;$

M est une constante [si on veut, la même que dans la relation (8)] et $\varepsilon_1(d)$ une fonction de la variable d qui tend vers zéro avec d.

Ceci posé, remarquons qu'on a

$$\int\limits_L p(u) . q(u)\, du = \sum_{i=1}^{n^2} \int\limits_{L_i} p(u) . q(u)\, du$$

et ainsi, en vertu des inégalités (8) et (8′), on doit avoir

$$\left| \int\limits_L p(u) . q(u)\, du - 2\pi i \iint\limits_{P(L)} [\alpha(\zeta) . q(\zeta) + \beta(\zeta) . p(\zeta)]\, d\omega \right| <$$

$$< M . n^2 . d^2 . \varepsilon(d) + M . mes[P.(L)] . \varepsilon_1(d) .$$

Maintenant on suppose que $d \to 0$. Alors on a

$$n \to \infty$$

mais $n^2 . d^2$ reste borné [1]) et ainsi la relation (7) est démontrée.

C. Q. F. D.

On voit sans peine que les considérations analogues montrent que pour une fonction $H(z)$ holomorphe dans un domaine $\mathfrak{D}$ (pour les points z et ζ dans $\mathfrak{D}$) on peut établir la relation suivante :

(9) . . . $\qquad \displaystyle\int\limits_L p(u)\, H(u)\, du = 2\pi i \iint\limits_{P(L)} \alpha(\zeta)\, H(\zeta)\, d\omega$

où $p(u)$ est la même fonction que dans le théorème A et L est une ligne fermée rectifiable *quelconque* dans $\mathfrak{D}$.

[1]) En effet $n . d$ est égal au plus grand côté du triangle Δ.

Théorème B [1]).

Soit

$$f(z) = \iint_P \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\omega$$

c'est-à-dire la même fonction que dans la formule (1), *alors on a*

$$(10) \ldots \qquad [f(z)]^n = n \iint_P \frac{[f(\zeta)]^{n-1} \cdot \mu(\zeta)}{\zeta - z} d\omega .$$

La démonstration par récurrence de cette proposition est facile: c'est une simple conséquence du théorème A.

Démonstration analytique du théorème fondamental.

Nous employons les notations du Chapitre I mais considérons le cas particulier où la fonction analytique partout continue $F(z)$ est définie par la formule (1) du Chapitre II:

$$(11) \ldots\ldots \qquad F(z) = \iint_P \frac{\mu(\zeta)}{z - \zeta} d\omega$$

$\mu(\zeta)$ étant bornée sur P, et P étant un ensemble parfait punctiforme d'aire partout non nulle.

Rappelons la relation [2]):

$$f(z) = F(z) + H(z)$$

$H(z)$ étant holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}$ (non seulement pour les points z, mais aussi pour les points ζ).

Remarquons qu'on a aussi (par la continuité):

$$f(\zeta) = F(\zeta) + H(\zeta) .$$

Ceci posé, admettons, par impossible, qu'on ait

$$(a) \ldots \qquad f(\zeta) = 0$$

pour chaque point ζ (c'est-à-dire sur P).

Considérons, pour démontrer l'impossibilité de la relation (a), la fonction suivante

$$[f(z)]^2 = [H(z)]^2 + 2\,F(z) \,.\, H(z) + [F(z)]^2$$

et l'intégrale

---

[1]) Voir la Note citée de l'auteur.

[2]) Voir la démonstration du théorème fondamental dans le Chapitre I.

$$I = \int\limits_{L} [f(u)]^2 \, du$$

où L est une ligne fermée rectifiable quelconque dans $\mathfrak{D}$.

Nous aurons, en vertu des relations (7), (9), (10) et (11),

$$I = 2\pi i \cdot 2 \iint\limits_{P(L)} \mu(\zeta) H(\zeta) \, d\omega + 2\pi i \cdot 2 \iint\limits_{P(L)} F(\zeta) \mu(\zeta) \, d\omega$$

mais, en vertu de l'égalité (a), on a pour chaque ζ

$$H(\zeta) + F(\zeta) = 0 .$$

Ainsi $I = 0$ et alors, en vertu du théorème bien connu de Morera, la fonction $[f(u)]^2$ doit être holomorphe dans $\mathfrak{D}$ (pour les points ζ aussi) ce qui est absurde: la relation (a) est impossible pour chaque ζ.

C. Q. F. D.

En terminant ce chapitre faisons quelques remarques sur la nature des points singuliers ζ de l'ensemble P, qui sont les points *transcendants ordinaires* pour la fonction analytique partout continue $f(z)$, définie par la formule (1).

Considérons un domaine (ouvert) D_0, contenant une portion de cet ensemble singulier P, et l'image de ce domaine dans le plan de la variable $w = f(u)$ (nous désignons par u un point quelconque de plan: z ou ζ, c'est-à-dire extérieur à P ou sur P). Soit Δ cette image: c'est un *continuum* borné, qui contient necessairement des points *intérieurs*.

Soit ζ_0 un point singulier quelconque dans D_0.

Deux cas sont *à priori* possibles:

1) le point $w_0 = f(\zeta_0)$, c'est-à-dire l'image de ζ_0, est un point *intérieur* à Δ.

2) Ce point w_0 est un point *frontière* de Δ.

Le *second* cas peut se réaliser très simplement pour une fonction quelconque partout continue: par exemple, on peut prendre pour ζ_0 celui de points singuliers pour lequel $|f(\zeta)|$ atteint son *maximum*.

Pour avoir le *premier* cas nous allons construire des fonction analytiques partout continues et telles qu'il existe pour une quelconque de ces fonctions $f(z)$ un point singulier ζ_0 (ou un nombre fini de tels points) avec la propriété suivante: le rapport

$$\frac{f(u)-f(\zeta_0)}{u-\zeta_0}$$

tend vers une limite unique et déterminée chaque fois quand $u \to \zeta_0$ *d'une manière quelconque.*

De plus, cette limite est *différente de zéro.*

Pour construire une telle fonction prenons une fonction $F(z)$ définie par la formule (1)

$$F(z)=\iint_P \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\omega$$

et considérons la fonction

$$f(z)=(z-\zeta_1).(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_n).[F(z)]^{n+1}$$

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ étant les points singuliers tels qu'on ait $F(\zeta_k)\neq 0$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$.

On peut écrire, en vertu de l'égalité (10):

$$f(z)=(z-\zeta_1).(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_n).(n+1).\iint_P \frac{[F(\zeta)]^n\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\omega.$$

On voit sans peine que la fonction $f(z)$ est partout continue (nulle à l'infini), les valeurs $f(\zeta)$ (c'est-à-dire sur P) étant définies par la continuité.

De plus, il est évident que le rapport

$$\frac{f(u)-f(\zeta_k)}{u-\zeta_k} \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

tend (pour chaque point fixe ζ_k) vers une limite unique chaque fois quand $u\to\zeta_k$ d'une manière quelconque et cette limite est différente de zéro.

C. Q. F. D.

Ainsi le *premier cas* des points singuliers est réalisé pour une telle fonction: $\zeta_0=\zeta_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$.

En effet, à une petite courbe fermée entourant le point ζ_k, il correspond dans le plan de la variable $w=f(u)$ (u désignant un point z ou un point ζ) une petite courbe fermée entourant l'image de ζ_k, c'est-à-dire le point $w_k=f(\zeta_k)$.

On voit aussi que la fonction continue $f(\zeta)$ est *monogène* sur l'ensemble singulier P pour les points ζ_k, c'est-à-dire il existe pour $\zeta = \zeta_k$ une dérivée $f'(\zeta_k) = \lim\limits_{\zeta \to \zeta_k} \dfrac{f(\zeta) - f(\zeta_k)}{\zeta - \zeta_k}$ [1]).

J. Neyman [2]) i E. S. Pearson [3]).

Nota o pewnych metodach sprawdzania hipotez statystycznych [4]).

Komunikat przedstawiony przez S. Mazurkiewicza dn. 19 lutego 1931 r.

Further Notes on χ^2 Distribution.

Présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 19 Février 1931.

Praca obecna ma na celu usunięcie pewnych luk w jednej z poprzednich naszych publikacyj [5]). Chodzi przedewszystkiem (a) o poprawienie pewnej niedokładności: jeden z podanych poprzednio wzorów na wiarogodność hipotezy jest tylko przybliżonym, chociaż traktowaliśmy go jako dokładny. Obecnie dajemy wzór dokładny. Dalsze punkty (b) i (c) dotyczą ewentualnych wyników nieuniknionych niedokładności przy zastosowaniu naszych wzorów w praktyce statystycznej.

---

[1]) Les considérations du Chapitre I montrent qu'une fonction $f(\zeta)$ (qui réprésente *les valeurs singuliers* d'une fonction analytique partout continue $f(z)$) ne peut être *uniformément monogène* sur une portion *séparée* de l'ensemble singulier, si *la dérivée* $f'(\zeta)$ est nulle sur cette portion sauf sur un ensemble *ponctuel* ou *semi-linéaire* (on suppose toujours que l'ensemble singulier est un ensemble parfait *punctiforme*).

[2]) Z Zakładu Biometrycznego Instytutu im. M. Nenckiego T. N. W. Warszawa.

[3]) Z Zakładu im. F. Galtona, University College, Londyn.

[4]) Sprawozdanie z pracy p. t. „Further Notes on χ^2 Distribution", będącej w druku w czasopiśmie Biometrika Vol. XXII.

[5]) J. Neyman and E. S. Pearson: „On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference". Biometrika, Vol. XX-A, str. 175—240 i 264—295.

(a) Niech Σ_1 i Σ_2 oznaczają dwie populacje próbne z nieznanych generalnych Ω_1 i Ω_2, co do których wiadomem tylko jest, że są one podzielone według tej samej zasady na t kategoryj każda. Oznaczamy przez

$$n_1, n_2, \ldots, n_t \tag{1}$$

i przez

$$m_1, m_2, \ldots, m_t \tag{2}$$

liczby osobników należących odpowiednio do Σ_1 i Σ_2 przypadających do każdej z t kategoryj. Niech dalej

$$N = \sum_{i=1}^{t} n_i, \quad M = \sum_{i=1}^{t} m_i . \tag{3}$$

Rozważamy hipotezę H, że populacje generalne Ω_1 i Ω_2 są identyczne. Wiarogodność tej hipotezy względem zbioru hipotez alternatywnych, obejmującego każdą hipotezą dotyczącą populacyj Ω_1 i Ω_2 z zachowaniem zasady podziału i liczby grup, ma wartość asymptotyczną

$$\lambda_H \underset{N, M \to \infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \tag{4}$$

gdzie χ ulega prawu prowdopodobieństwa

$$\frac{\chi^{t-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{\int_0^0 \chi^{t-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi} \tag{5}$$

i jest związane z liczbami (1), (2) i (3) równaniem

$$\chi^2 = \left(\sum_{i=1}^{t} \sqrt{\frac{n_i^2}{N} + \frac{m_i^2}{M}} \right)^2 - N - M, \tag{6}$$

podczas gdy w poprzedniej publikacji podaliśmy

$$\chi^2 = NM \sum_{i=1}^{t} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M} \right)^2}{n_i + m_i}, \tag{7}$$

który to wzór jest tylko przybliżony.

(b) i (c) Niech Σ oznacza populację próbną wylosowaną z nieznanej generalnej Ω, której osobniki są cechowane warto ściami pewnej zmiennej ewentualnej x.

Rozważamy hipotezę H, że zmienna x ulega pewnemu prawu prawdopodobieństwa

$$y = f(x, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_c), \tag{8}$$

gdzie postać funkcji f jest określona, natomiast wartości parametrów

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_c \tag{9}$$

nie są przez hipotezę wyszczególnione. Wiarogodność hipotezy H względem zbioru hipotez alternatywnych, obejmującego wszystkie dowolne prawa prawdopodobieństwa na x, daje się w przybliżeniu obliczyć w sposób następujący.

Dzielimy przedział zmienności na x na S części i rachujemy ile osobników populacji próbnej Σ przypada na każdą z nich. Niech to będą liczby

$$n_1, n_2, \ldots n_S. \tag{10}$$

Liczby te mogą być uważane jako specjalne wartości pewnych zmiennych ewentualnych, dla których na podstawie prawa prawdopodobieństwa (8) łatwo jest obliczyć nadzieje matematyczne:

$$m_i = N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \alpha_1 \ldots \alpha_c)\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots S \tag{11}$$

gdzie $N = \sum_{i=1}^{S} n_i$, a x_i oraz x_{i+1} oznaczają granice i-tego przedziału z pośród tych na które został podzielony przedział zmienności x.

Jak to z wymienionej naszej pracy wynika, wiarogodność hipotezy H ma wartość asymptotyczną

$$\lambda_H \underset{N \to \infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \tag{12}$$

gdzie χ^2 jest równe minimalnej wartości sumy

$$\sum_{i=1}^{S} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \tag{13}$$

względem zbioru jej wartości odpowiadających różnym układom wartości parametrów (9).

Dalszy nasz wynik dotyczył prawa prawdopodobieństwa zmiennej ewentualnej χ, rozważanej jako funkcji zmiennych ewentualnych $n_1, n_2, \dots n_S$. Wykazaliśmy, że jeśli liczba N jest dostatecznie duża, tak że każdy z ułamków $\frac{1}{\sqrt{m_i'}}$, gdzie m_i' oznacza wartość minimalizującą (13), jest dostatecznie mały, to prawo prawdopodobieństwa na χ dowolnie mało różni się od

$$\frac{\chi^{S-c-2}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{\int\limits_0^\infty \chi^{S-c-2}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\, d\chi}\,. \tag{14}$$

Przy zastosowaniu tych wyników w praktyce zachodzą często trudności, związane z małą częstokroć liczebnością populacji próbnej N. Zdarza się przy tem, że zadanie polega nie tylko na sprawdzeniu hipotezy H, lecz także na odnalezieniu najwiarogodniejszych wartości parametrów (9). W tym celu należy dzielić przedział zmienności x na większą liczbę przedziałów S i minimalizować sumę (13). Jeśli jednak liczba przedziałów częściowych S jest duża, a N — niezbyt duże, to ułamki $\frac{1}{\sqrt{m_i'}}$ nie mogą — przynajmniej nie wszystkie — posiadać bardzo małych wartości. W ten sposób, aby sprawdzić hipotezę H i wyznaczyć najwiarogodniejsze wartości na parametry (9) wypada właściwie używać dwóch równych podziałów przedziału zmienności na x i dwa razy minimalizować sumę (13), co związane jest ze znacznym nakładem pracy.

Chcąc uniknąć dwukrotnego minimalizowania sumy (13) możnaby próbować szacowania wiarogodności hipotezy korzystając z minimalnej wartości sumy (13) obliczonej przy wyznaczaniu najwiarogodniejszych wartości parametrów, przyczem jednak warunek o małości ułamków $\frac{1}{\sqrt{m_i'}}$ byłby nie spełniony. Możnaby również przegrupować populację próbną korzystając z mniejszej liczby, S', podziału przedziału zmienności x na przedziały częściowe, jednak potem nie minimalizować sumy (13) tylko skorzystać z odnalezionych wartości parametrów (9) odpowiadających pierwotnej wartości S. Obie metody nie są dokładne.

Dla wyjaśnienia sytuacji zostały dokonane liczne losowania populacyj próbnych, przyczem zostały ustalone empiryczne prawa prawdopodobieństwa na χ obliczone obu powyższemi sposobami. Okazało się, że zgodność ich ze wzorem (14) jest zadziwiająco dobra nawet w przypadku gdy liczebność populacji próbnej wynosi zaledwie $N = 10$. Okoliczność ta nasuwa myśl, że warunek o małości ułamków $\frac{1}{\sqrt{m_i'}}$ jest mniej istotny niżby to wynikało z naszych rozumowań i że ostateczne wyniki są zapewne ważne w bardziej ogólnych przypadkach.

Stanisław Kołodziejczyk.

Metoda sprawdzania hipotez o stałości prawdopodobieństwa w serjach niezależnych doświadczeń [1]).

Komunikat przedstawiony przez S. Mazurkiewicza dn. 19 lutego 1931 r.

(Z Zakładu Biometrycznego Instytutu im. M. Nenckiego T. N. W.)

La vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités.

Présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 19 Février 1931.

Streszczenie.

Nota niniejsza ma na celu wykazanie, że znana metoda Lexisa-Bortkiewicza sprawdzania hipotezy o stałości prawdopodobieństwa w serjach niezależnych doświadczeń, jest konsekwencja zaproponowanej przez J. Neymana i E. S. Pearsona [2]) ogólnej zasady sprawdzania hipotez statystycznych.

Zagadnienie może być sprecyzowane jak następuje.

---

[1]) Całość pracy publikowana jest w Annalach Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

[2]) J. Neyman and E. S. Pearson: „*On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference*". Biometrika, Vol. XX-A.

Rozważamy S seryj niezależnych doświadczeń, w wyniku których za każdym razem może zaistnieć albo zjawisko E, albo jego zaprzeczenie $\bar{E}$.

Niech n_i oznacza liczbę doświadczeń w i-tej serji.

Danem jest, że prawdopodobieństwo zjawiska E w każdem doświadczeniu tej samej i-tej serji jest stałe, zresztą bliżej nie określone. Oznaczmy jego wartość przez p_i. Wynik ogółu doświadczeń przedstawia się w postaci liczb k_i $(i=1, 2 \ldots S)$ zaistnień zjawiska E w każdej i-tej serji doświadczeń.

Na podstawie powyższych danych mamy sprawdzić hipotezę, że

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_S = p \tag{1}$$

przyczem hipoteza nie wymienia wartości p wspólnej dla wszystkich prawdopodobieństw p_i.

Postępując w myśl zasady Neymana i Pearsona dla rozwiązania zagadnienia mamy obliczyć λ_0 — wiarogodność sprawdzanej hipotezy oraz górny kres prawdopodobieństwa, że popełnimy błąd odrzucając hipotezy o wiarogodnościach $\leqslant \lambda_0$. Jeśli ta ostatnia liczba okaże się małą — co zresztą jest rzeczą konwencjonalną — hipotezę należy odrzucić i vice versa.

Niech

$$q_i = \frac{k_i}{n_i} \qquad i = 1, 2, \ldots S \tag{2}$$

oraz

$$q_0 = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_S}{n_1 + n_2 + \cdots + n_S}. \tag{3}$$

Prosty rachunek okazuje, że wiarogodność

$$\lambda = \prod_{i=1}^{S} \left(\frac{q_0}{q_i}\right)^{k_i} \left(\frac{1-q_0}{1-q_i}\right)^{n_i - k_i}. \tag{4}$$

Górny kres prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy prawdziwej, gdybyśmy się zgodzili odrzucić hipotezy o wiarogodnościach nie większych od jakiejś liczby λ_0, przedstawia się w postaci sumy

$$P\{\lambda \leqslant \lambda_0\} = \sum \prod_{i=1}^{S} C_{n_i}^{k_i} \, p^{k_i} \, (1-p)^{n_i - k_i} \tag{5}$$

rozciągającej się na wszystkie układy wartości zmiennych k_i spełniające nierówności

$$0 \leqslant k_i \leqslant n_i \tag{6}$$

oraz

$$\lambda \leqslant \lambda_0 . \tag{7}$$

Uproszczenie sumy (5) wydaje się bardzo trudnem. Natomiast nie trudno jest dowieść, że jeśli tylko ogólna liczba doświadczeń wzrasta nieograniczenie w ten sposób, że

$$n_i \geqslant \nu \sum_{i=1}^{S} n_i \tag{8}$$

gdzie ν oznacza pewną stałą dodatnią liczbę, oraz jeśli danem jest, że

$$0 < p < 1 , \tag{9}$$

to istnieje granica wyrażenia $P\{\lambda \leqslant \lambda_0\}$, która jest niezależna od wartości p, mianowicie

$$\lim P\{\lambda \leqslant \lambda_0\} = C \int_{Q}^{\infty} t^{S-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt , \tag{10}$$

gdzie

$$C^{-1} = \int_{0}^{\infty} t^{S-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{11}$$

oraz gdzie dolna granica całki Q jest określona przez równanie.

$$Q^2 = \frac{\sum_{i=1}^{S} (q_i - q_0)^2 n_i}{q_0 (1 - q_0)} . \tag{12}$$

Z powyższego wynika, że skoro tylko liczba dokonanych doświadczeń jest duża, sprawdzanie hipotezy o stałości prawdopodobieństwa może być wykonane na podstawie wzorów (10) i (12), przyczem wartość całki (10) może być odczytana z tablic K. Pearsona [1]). Ostatecznym sprawdzianem hipotezy jest cecha zbiorcza Q^2, według której są ułożone tablice. Jeśli Q^2 jest duże, górny kres prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy

[1]) K. Pearson: *Tables for Statisticians and Biometricians*. Cambridge 1930. Wydanie 3-cie.

prawdziwej $P\{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ — jest mały. Otóż ciekawem jest, że Q jest proporcjonalne do współczynnika dyspersji D, wprowadzonego dla sprawdzania rozważanej hipotezy przez Lexisa i zbadanego gruntownie przez Bortkiewicza [1]). Zachodzi mianowicie równość

$$Q = D\sqrt{S-1}\,. \tag{13}$$

Z powyższego wynika, że do szeregu ogólnie przyjętych metod sprawdzania hipotez statystycznych, stanowiących konsekwencję zasady Neymana i Pearsona — wszystkie, dotąd zbadane — należy zaliczyć jeszcze jedną, metodę Lexisa-Bortkiewicza. Odnosi się to tylko do przypadku, gdy jest zagwarantowana stałość prawdopodobieńswa zjawiska E w doświadczeniach należących do tej samej serji.

Arnold Walfisz.

Przyczynek do teorji przybliżeń diofantowych.

Przedstawił S. Dickstein dn. 19 lutego 1931 r.

Streszczenie.

Dla każdej rzeczywistej niewymierności Θ, która w rozwinięciu na ułamek łańcuchowy posiada ograniczone mianowniki, wyprowadzona zostaje ocena

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n\left(n\Theta - [n\Theta] - \frac{1}{2}\right)} = O(\log x)\,.$$

---

[1]) Patrz artykuł tego autora w Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2, str. 358.

Arnold Walfisz.

Zur Theorie der diophantischen Näherungen.

Note présenté par M. S. Dickstein dans la séance du 19 Février 1931.

Für reelle u sei

$$\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Θ bedeute eine reelle Irrationalzahl mit beschränkten Kettenbruchnennern. Unter diesen Voraussetzungen soll

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n\,\psi(n\,\Theta)} = O(\log x) \tag{2}$$

nachgewiesen werden.

Im folgenden bezeichne ich mit c unterschiedslos positive Konstanten, die nur von Θ abhängen dürfen; mit γ unterschiedslos reelle Zahlen, für die $|\gamma| \leq c$ ist.

Da $\psi(u)$, wie aus (1) unmittelbar hervorgeht, die Periode Eins besitzt, so darf zum Beweise von (2) ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$0 < \Theta < 1$$

angenommen werden.

Für nicht ganze u ist bekanntlich [1])

$$\psi(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k u}{k}. \tag{3}$$

Es sei

$$\Theta = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots \tag{4}$$

die Kettenbruchentwicklung von Θ;

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \dots \tag{5}$$

mögen die zugehörigen Näherungsbrüche sein [2]).

---

[1]) Vgl. etwa E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig 1927, 3 Bände), Bd. II, S. 59, Formel (493).

[2]) Für die im folgenden benutzten Eigenschaften der Kettenbrüche verweise ich auf das Buch von O. Perron „Die Lehre von den Kettenbrüchen" (Leipzig und Berlin 1913, zweite Auflage 1929).

Es werde von vornherein $x > q_2$ angenommen. Da von zwei in (5) aufeinanderfolgenden q mindestens eines ungerade ist, so gibt es ein grösstes ungerades $q \leq x$, etwa $q_s = Q$. Aus der Beschränktheit der Kettenbruchnenner a in (4) folgt dann

$$cx \leq Q \leq x. \tag{6}$$

Ferner setze ich

$$[x] = \xi. \tag{7}$$

Aus (3) folgt

$$\sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \psi(n\Theta) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sin 2\pi k n \Theta$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sum_{k=\xi+1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n \Theta}{k}. \tag{8}$$

Setzt man

$$\{u\} = \mathrm{Min}\,(u - [u],\ [u] + 1 - u) \tag{9}$$

(die positiv genommene Entfernung von u zur nächstliegenden ganzen Zahl), so gilt für irrationales u und beliebiges natürliches m bekanntlich [1])

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k u}{k} = \frac{\gamma}{m\{u\}}. \tag{10}$$

Mit $m = \xi + 1$, $u = n\Theta$ folgt aus (10)

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sum_{k=\xi+1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n \Theta}{k} = \frac{\gamma}{\xi} \sum_{n=1}^{Q-1} \frac{1}{\{n\Theta\}}. \tag{11}$$

Ist q_m ein beliebiger Nenner in der Bruchfolge (5), so gilt nach H. Behnke [2])

$$\sum_{n=1}^{q_m - 1} \frac{1}{\{n\Theta\}} = \gamma\, q_m \log q_m \tag{12}$$

---

[1]) Vgl. E. Landau, l. c. 1), S. 58, Satz 412.

[2]) H. Behnke „Zur Theorie der diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **3** (1924), S. 261—318], S. 289.

(für $q_m = 1$ bedeute die leere Summe Null). Da ich die Abschätzung (12) später mit $\left\{n\Theta + \frac{1}{2}\right\}$ statt $\{n\Theta\}$ im Nenner des Summanden brauche, so soll sie hier gleich in etwas allgemeinerer Gestalt hergeleitet werden, und zwar will ich die Summe

$$(13) \qquad S = \sum_{n=1}^{q_m-1} \frac{1}{\{n\Theta + r\}}$$

für rationales r, etwa

$$(14) \qquad r = \frac{a}{b}, \; b > 0,$$

betrachten. Es sei hierbei $q_m > 1$, also die Summe (13) nicht leer. Ich schätze zunächst ihr grösstes Glied σ ab.

Da nach Voraussetzung die Kettebruchnenner a in (4) beschränkt, d. h. $\leqq c$ sind, so folgt nach einfachen Sätzen der Kettenbruchlehre für jedes Paar ganzer Zahlen μ, ν mit $\nu \neq 0$

$$(15) \qquad \left|\Theta + \frac{\mu}{\nu}\right| \geqq \frac{c}{\nu^2}.$$

Wegen (14) ist daher

$$\{n\Theta + r\} = \left\{n\left(\Theta + \frac{a}{bn}\right)\right\} \geqq \frac{cn}{b^2n^2} = \frac{c}{b^2 n},$$

d. h.

$$(16) \qquad \sigma \leqq c\, b^2 q_m.$$

Ist S mit dem Gliede σ nicht erschöpft, so sei $1 \leqq n_1 < n_2 \leqq q_m - 1$. Mit geeigneten ganzen g_1 und g_2 ist dann nach (9)

$$\pm\{n_1\Theta + r\} = n_1\Theta + r + g_1,$$
$$\pm\{n_2\Theta + r\} = n_2\Theta + r + g_2.$$

In Verbindung mit (14) und (15) ergibt das

$$|\{n_2\Theta + r\} - \{n_1\Theta + r\}| = \left\{\begin{matrix} (n_2 - n_1)\left|\Theta + \dfrac{g_2 - g_1}{n_2 - n_1}\right| \\ (n_2 + n_1)\left|\Theta + \dfrac{2a + bg_2 + bg_1}{b(n_2 + n_1)}\right| \end{matrix}\right\}$$

$$\geqq \frac{c}{b^2(n_2 + n_1)} \geqq \frac{c}{b^2 q_m}.$$

Von den im Intervall $0 < u < \frac{1}{2}$ gelegenen $q_m - 1$ Zahlen

$$\{n\Theta + r\}$$

haben also insbesondere je zwei aufeinanderfolgende einen Abstand $\geq \frac{c}{b^2 q_m}$.

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (16)

$$S \leq \sigma + \sum_{n=1}^{q_m} \frac{1}{\frac{c\,n}{b^2 q_m}} \leq c\,b^2 q_m + c\,b^2 q_m \log q_m .$$

Also ergibt sich schliesslich

$$S = \gamma\, b^2 q_m \log q_m . \tag{17}$$

Wegen (13) und (14) ist in (17) neben (12) auch noch

$$\sum_{n=1}^{q_m - 1} \frac{1}{\left\{n\Theta + \frac{1}{2}\right\}} = \gamma\, q_m \log q_m \tag{18}$$

enthalten.

Aus (6), (7), (11) und (12) folgt

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sum_{k=\xi+1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n \Theta}{k} = \gamma \log x . \tag{19}$$

Nach A. Ostrowski [1]) gilt für stetig wachsendes y

$$\sum_{1 \leq n \leq y} (-1)^n \psi(n\Theta) = \gamma \log y . \tag{20}$$

Aus (6), (8), (19) und (20) ergibt sich

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sin 2\pi k n \Theta = \gamma \log x ,$$

also

$$\sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sin 2\pi k n \Theta = \gamma \log x . \tag{21}$$

---

[1]) A. Ostrowski „Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **1** (1921), S. 77—98], S. 85.

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{Q} \sin 2\pi k n \Theta = \frac{1}{2 \sin \pi k \Theta} (\cos \pi k \Theta - \cos (2Q+1) \pi k \Theta)$$

$$= \operatorname{ctg} \pi k \Theta \sin^2 \pi k Q \Theta + \frac{1}{2} \sin 2\pi k Q \Theta .$$

Ersetzt man hierin $k\Theta$ durch $k\Theta + \frac{1}{2}$ und berücksichtigt, dass Q ungerade ist, so folgt

$$\sum_{n=1}^{Q} (-1)^n \sin 2\pi k n \Theta = -\operatorname{tg} \pi k \Theta \cos^2 \pi k Q \Theta - \frac{1}{2} \sin 2\pi k Q \Theta$$

(22) $$= -\operatorname{tg} \pi k \Theta \cos^2 \pi k Q \Theta + \gamma .$$

Für irrationales u ist

(23) $$\operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{\pi\left(u - \left[u + \frac{1}{2}\right]\right)} = \gamma ,$$

wie man folgendermassen einsieht: Es genügt, die Werte $0 < |u| < \frac{1}{2}$ zu betrachten. Für $\frac{1}{4} < |u| < \frac{1}{2}$ ist

$$\left| \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{\pi\left(u - \left[u + \frac{1}{2}\right]\right)} \right| \leq |\operatorname{ctg} \pi u| + \frac{1}{\pi \left| u - \left[u + \frac{1}{2}\right] \right|}$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = c .$$

Für $0 < |u| \leq \frac{1}{4}$ ist aber

$$\operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{\pi\left(u - \left[u + \frac{1}{2}\right]\right)} = \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{\pi u}$$

$$= \frac{1}{u \sin \pi u} \left(u \cos \pi u - \frac{1}{\pi} \sin \pi u \right) = \frac{\gamma}{u^2} (u + \gamma u^3 - u + \gamma u^3)$$

$$= \gamma u = \gamma .$$

Also ist (23) erfüllt. Ersetzt man nunmehr u durch $u + \frac{1}{2}$, so folgt nach (1) für irrationales u

$$(24) \qquad \operatorname{tg} \pi u + \frac{1}{\pi \psi(u)} = \gamma .$$

(22) und (24) ergeben

$$(25) \qquad \sum_{n=1}^{Q} (-1)^n \sin 2 \pi k n \Theta = \frac{1}{\pi} \frac{\cos^2 \pi k Q \Theta}{\psi(k \Theta)} + \gamma .$$

Es sei nun P der zu Q gehörige Näherungszähler. Dann ist

$$\Theta - \frac{P}{Q} = \frac{\gamma}{Q^2},$$

also für jedes k in (21)

$$\pi k (Q \Theta - P) = \frac{\gamma k}{Q},$$

$$\cos^2 \pi k Q \Theta = 1 - \sin^2 \pi k (Q \Theta - P) = 1 + \frac{\gamma k^2}{Q^2}$$

$$(26) \qquad = 1 + \frac{\gamma k}{x},$$

wegen (6).

Aus (25) und (26) folgt

$$(27) \qquad \sum_{n=1}^{Q} (-1)^n \sin 2 \pi k n \Theta = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\psi(k \Theta)} + \gamma \frac{k}{x \psi(k \Theta)} + \gamma ,$$

aus (21) und (27)

$$\sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k \psi(k \Theta)} + \frac{\gamma}{x} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{|\psi(k \Theta)|} + \gamma \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} = \gamma \log x ,$$

d. h. wegen (7)

$$(28) \qquad \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k \psi(k \Theta)} = \frac{\gamma}{x} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{|\psi(k \Theta)|} + \gamma \log x .$$

Aus (1) und (9) folgt für jedes reelle u

$$|\psi(u)| = \left\{u + \frac{1}{2}\right\}.$$

Daher ist, mit Rücksicht auf (28),

$$(29) \qquad \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k \psi(k \Theta)} = \frac{\gamma}{x} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{\left\{k \Theta + \frac{1}{2}\right\}} + \gamma \log x .$$

Ich bestimme jetzt die natürliche Zahl $m = m(x)$ durch

(30) $$q_m > x \geq q_{m-1}.$$

Wegen (7) ist dann zunächst

(31) $$q_m - 1 \geq \xi.$$

Ferner folgt aus der Beschränktheit der Kettenbruchnenner a in (4), dass für jede natürliche Zahl n

$$q_{n+1} = \gamma\, q_n$$

ist. Wegen (30) ist daher

(32) $$q_m = \gamma\, x.$$

Aus (18), (31) und (32) folgt

$$\sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{\left\{k\Theta + \frac{1}{2}\right\}} = \gamma\, x \log x.$$

Setzt man dies in (29) ein, so ergibt sich wegen (7) die Behauptung (2).

J. Neyman [1]) i E. S. Pearson [2]).

Sprawozdanie z pracy p. t.

O zagadnieniu k prób [3]).

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dnia 19 lutego 1931 r.

On the Problem of k Samples.

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 19 Février 1931.

Rozważamy k populacyj próbnych $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_k$ wylosowanych z pewnych nieznanych populacyj generalnych $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k$. Dane są wymiary cechy x osobników należących do i-tej populacji próbnej, mianowicie

---

1) Z Zakładu Biometrycznego Instytutu im. M. Nenckiego, T. N. W.

2) Z Zakładu im. Galtona Uniwersytetu Londyńskiego.

3) Całość pracy p. t. „On the Problem of k Samples" ma być drukowana w Międzynarodowym Buletynie Akademji Umiejętności.

$$x_{i,1},\ x_{i,2},\ \ldots x_{i,n_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots k) \tag{1}$$

gdzie n_i oznacza liczebność tej populacji. Oznaczmy przez a_i i σ_i średnią wartość cechy x i średnie odchylenie w i-tej populacji π_i, $(i=1,\ 2,\ \ldots k)$.

Przedmiotem noty niniejszej jest sprawdzenie hipotez:

H — że populacje π_i są identyczne;

H_1 — że średnie odchylenia $\sigma_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots k)$ są wszystkie sobie równe, oraz

H_2 — że średnie $a_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots k)$ posiadają te same wartości.

W myśl zasad opublikowanych gdzie indziej [1]) rozwiązanie tych zagadnień polega na obliczeniu wiarogodności λ sprawdzanych hipotez oraz na wyznaczeniu prawa prawdopodobieństwa λ, określanego przez sprawdzaną hipotezę. Przedtem jeszcze należy ustalić zbiór Ω hipotez dopuszczalnych.

Hipotezy H i H_1 były sprawdzane względem tego samego zbioru Ω_1 hipotez dopuszczalnych. Obejmuje on każdą hipotezę zakładającą, że zmienna x w populacji π_1 $(i=1,\ 2,\ \ldots k)$ ulega prawu Gaussa:

$$\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma_i^2}} \tag{2}$$

gdzie stałe a_i i σ_i są zupełnie dowolne. Hipotezę H_2 udało się sprawdzić tylko względem mniej ogólnego zbioru hipotez dopuszczalnych Ω_2, który jest częścią Ω_1. Należące doń hipotezy zakładają jeszcze dodatkowo, że

$$\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_k \tag{3}$$

Rozwiązania przedstawiają się w sposób następujący. Niech x_i i S_i oznaczają odpowiednio średnią arytmetyczną liczb (1) i ich średnie odchylenie, dla $i=1,\ 2,\ \ldots k$. Wprowadźmy jeszcze oznaczenia

---

[1]) J. Neyman and E. S. Pearson. Biometrika Vol. XX-A, str. 175—240 i 263—294.

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$x_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \tag{4}$$

$$S_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i S_i^2$$

$$S_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_0)^2 + S_a^2 .$$

Wzory na wiarogodności sprawdzanych hipotez można teraz napisać:

$$\lambda_H = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{S_i}{S_0} \right)^{n_i} \tag{5}$$

$$\lambda_{H_1} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{S_i}{S_a} \right)^{n_i} \tag{6}$$

$$\lambda_{H_2} = \left(\frac{S_a}{S_0} \right)^{N} . \tag{7}$$

Wzór (7) jest interesujący z tego względu, że można go również przedstawić w postaci

$$\lambda_{H_2} = (1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \tag{8}$$

gdzie η jest t. zw. stosunkiem współzależnościowym — cechą zbiorczą zaproponowaną przez K. Pearsona i obecnie powszechnie stosowaną do sprawdzania hipotezy H_2, jednak bez bliższego sprecyzowania warunków. Mamy tu więc znów przykład tego, że ogólnie przyjęta metoda sprawdzania hipotezy jest, przy odpowiedniem sprecyzowaniu zagadnienia, konsekwencją ogólnych zasad, opublikowanych w wyżej wspomnianej pracy. Prawo prawdopodobieństwa, któremu ulega η jest znane [1]), wobec czego

[1]) R. A. Fisher. Journal of the Roy. Stat. Soc. Vol. LXXXV, str. 605, 1922. Patrz również publikację H. Hotelling'a w Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. II, str. 657, 1925.

zagadnienie o sprawdzeniu hipotezy H_2 można uważać za całkowicie rozwiązane.

Praw prawdopodobieństwa którym ulegają λ_H i λ_{H_1} nie umieliśmy przedstawić w formie skończonej. Natomiast udało się nam wyznaczyć ogólne wzory na momenty

$$\mu_p = \int_0^1 \lambda^p f(\lambda)\, d\lambda \tag{9}$$

gdzie $f(\lambda)$ oznacza prawo prawdopodobieństwa na λ. Dla trzech hipotez H, H_1 i H_2 mamy odpowiednio

$$\mu_p(H) = N^{\frac{pN}{2}} \prod_{i=1}^{k} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,n_i - 1}{2}\right)}{n_i^{\frac{p n_i}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)} \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,N - 1}{2}\right)} \tag{10}$$

$$\mu_p(H_1) = N^{\frac{pN}{2}} \prod_{i=1}^{k} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,n_i - 1}{2}\right)}{n_i^{\frac{p n_i}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)} \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{N-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,N - k}{2}\right)} \tag{11}$$

$$\mu_p(H_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,N-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(p+1)\,N-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-k}{2}\right)}. \tag{12}$$

Zakładając, że liczebności wszystkich populacyj próbnych wzrastają nieograniczenie, łatwo jest spostrzec, że momenty zdążają jednostajnie do granic, odpowiednio:

$$\lim \mu_p(H) = (p+1)^{-(k-1)} \tag{13}$$

$$\lim \mu_p(H_1) = \lim \mu_p(H_2) = (p+1)^{-\frac{k-1}{2}}. \tag{14}$$

Wynika z tego, że odnośne prawa prawdopodobieństwa zdążają jednocześnie do pewnych postaci granicznych, których momenty równe są odpowiednio (13) i (14). Jak łatwo spostrzec' graniczne prawa prawdopodobieństwa mają postać:

$$\frac{1}{\Gamma(k-1)}(-\lg \lambda_H)^{k-2} \tag{15}$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}(-\lg \lambda_{H_1})^{\frac{k-3}{2}}. \tag{16}$$

W razach, gdy populacje próbne są liczne, ze wzorów tych można korzystać dla niezbędnego przy sprawdzaniu hipotez obliczania prawdopodobieństwa, że zostanie zachowana nierówność

$$\lambda \leqslant \alpha \tag{17}$$

gdzie α oznacza dowolną liczbę $0 < \alpha < 1$. Jeśli populacje próbne są mało liczne, wzory (10) i (11) pozwalają na przybliżone obliczenie tegoż prawdopodobieństwa zapomocą interpolacyjnych metod K. Pearsona.

Wyniki powyższe są uogólnieniem opublikowanych przez nas poprzednio w pracy p. t. On the Problem of Two Samples [1]).

M. Wajsberg.

Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań.

Przedstawił J. Łukasiewicz dn. 19 lutego 1931 r.

WSTĘP.

Praca niniejsza zawiera dowód zupełności i niezależności pewnej mojej aksjomatyki rachunku trójwartościowego.

Twierdzeniami tej trójwartościowej logiki są wyrażenia implikacyjno-negacyjne teorji dedukcji, spełniające następującą tabelkę, której wartością wyróżnioną jest 1.

C	*0*	*1*	*2*	*N*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*2*	*0*
2	*2*	*1*	*1*	*2*

[1]) Buletyn Międzynarodowy Akademji Umiejętności, Marzec, 1930.

Twórcą rachunku 3-wartościowego i ogólniej, dla każdego naturalnego n, rachunku n-wartościowego oraz rachunku przeliczalnowielowartościowego jest Prof. Jan Łukasiewicz [1]).

W niniejszej pracy udowadniam, że każde twierdzenie rachunku trójwartościowego jest konsekwencją układu czterech twierdzeń tegoż rachunku:

1 $CqCpq$
2 $CCpqCCqrCpr$
3 $CCCpNppp$
4 $CCNqNpCpq$.

Regułami wnioskowania są przyjęte w teorji dedukcji „reguła podstawiania" i „reguła odrywania".

Konsekwencje powyższego układu aksjomatów nazywać będę tezami. Wyrażenia implikacyjno-negacyjne oznaczać będę przez „wd". Dla żadnych wd, explicite wypisanych, nie będę udowadniał, że są twierdzeniami rachunku trójwartościowego, gdyż to się da zawsze uskutecznić przy pomocy powyższej tabelki.

Rozdział I niniejszej pracy zawiera wyprowadzenie z powyższej aksjomatyki przy pomocy wyżej wymienionych reguł pewnych tez pomocniczych. Rozdział II zawiera dowód zupełności tej aksjomatyki, zaś rozdział III dowód jej niezależności.

Celem okazania zupełności danej aksjomatyki, udowadniam kolejno, że

a. Każde wd α jest tezą, jeżeli dla pewnego wd β tezami są: $C\beta C\beta\alpha$, $CN\beta CN\beta\alpha$ i $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$.

b. Oznaczając dla dowolnych wd α i α' oraz dowolnej zmiennej β, przez $\alpha\beta/\alpha'$ wd, które powstaje z α drogą podstawienia wd α' zamiast β, mamy, że

jeżeli jakieś wd α zawiera dwie zmienne różnej postaci β i γ, to

1. $C\beta C\beta\alpha$ jest tezą, jeżeli $\alpha\beta/C\gamma\gamma$ jest tezą,
2. $CN\beta CN\beta\alpha$ jest tezą, jeżeli $\alpha\beta/NC\gamma\gamma$ jest tezą, oraz
3. $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$ jest tezą, jeżeli tezami są: $\alpha\gamma/C\beta\beta$, $\alpha\gamma/NC\beta\beta$ i $\alpha\beta/\gamma$.

[1]) Por. J. Łukasiewicz i A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Comptes Rendus des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII. 1930. Cl. III. Poza tem: J. Łukasiewicz. *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (tamże).

c. Wobec a. i b. każde twierdzenie α rachunku trójwartościowego, zawierające dwie nierównokształtne zmienne, jest tezą, jeżeli tezami są pewne jego podstawienia, zawierające mniej zmiennych różnej postaci — zatem w ostatecznym rzędzie, jeżeli tezami są wszystkie twierdzenia rachunku trójwartościowego, które nie zawierają dwuch nierównokształtnych zmiennych.

d. Jeżeli jakieś wd α jest twierdzeniem rachunku trójwartościowego i każda zmienna, zawarta w α, jest równokształtna ze zmienną β, to tezami są wd: $\alpha\,\beta/C\beta\beta$, $\alpha\,\beta/NC\beta\beta$ oraz $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$; naskutek tego tezami są wd: $C\beta C\beta\alpha$, $CN\beta CN\beta\alpha$ i $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$, zatem również α jest tezą, zgodnie z a.

e. Wobec c. i d. Każde twierdzenie rachunku trójwartościowego jest tezą.

Uważam za miły obowiązek złożyć na tem miejscu jaknajserdeczniejsze podziękowania Prof. Dr. Janowi Łukasiewiczowi, którego liczne wskazówki, zawsze chętnie mnie udzielane, przyczyniły się do znacznego poprawienia niniejszej pracy zarówno pod względem formalnym jak rzeczowym.

ROZDZIAŁ I.

Dowody tez pisać będę sposobem Prof. J. Łukasiewicza, użytym w Jego „Elementach logiki matematycznej" [1]).

Dowód tezy *6* przy pomocy tezy *5* oraz dowód tezy *15* przy pomocy tez *6* i *14* — pochodzą z tegoż dzieła. Prawie dosłownie powtórzę za tem dziełem (str. 66 i 67) co następuje.

„Każda udowodniona teza zaopatrzona jest w numer i poprzedzona wierszem dowodowym. Tak np. twierdzenie *5* będzie poprzedzone następującym wierszem dowodowym:

$$2\,p/Cpq,\ q/CCqrCpr,\ r/s * C2-5.$$

Wiersz dowodowy składa się zawsze z dwuch części przedzielonych gwiazdką. Część pierwsza wskazuje na naszym przykładzie, że do tezy *2* należy zastosować regułę podstawiania. Część wiersza dowodowego znajdująca się po gwiazdce wskazuje,

---

[1]) Pr. J. Łukasiewicz. *Elementy logiki matematycznej.* Skrypt autoryzowany. Opracował M. Presburger. Warszawa 1929.

że otrzymane w poprzedni sposób podstawienie tezy *2* ma postać okresu warunkowego, którego poprzednik jest równokształtny z tezą *2*, a następnik jest równokształtny z właśnie dowodzonem twierdzeniem *5*. Możemy więc stosując regułę odrywania udowodnić twierdzenie *5*".

Napis typu „*r s/α*" zastępuje „*r/α, s/α*".

1 *CqCpq*
2 *CCpqCCqrCpr*
3 *CCCpNppp*
4 *CCNqNpCpq*

*

*2 p/Cpq, q/CCqrCpr, r/s * C2 — 5*
5 *CCCCqrCprsCCpqs*
*5 q/Cqr, r/Csr, s/CCsqCpCsr * C5 p/s, s/CpCsr — 6*
6 *CCpCqrCCsqCpCsr*
*5 s/CCCprsCCqrs * C2 p/Cqr, q/Cpr, r/s — 7*
7 *CCpqCCCprsCCqrs*
*2 p/q, q/Cpq * C1 — 8*
8 *CCCpqrCqr*
*8 q/Cqr, r/CCsqCpCsr * C6 — 9*
9 *CCqrCCsqCpCsr*
*9 q/CCrNrr, s/q * C3 p/r — 10*
10 *CCqCCrNrrCpCqr*
*10 q/CqCCrNrr, r/Cqr * C10 p/CCqrNCqr — 11*
11 *CpCCqCCrNrrCqr*
*11 p/CqCpq * C1 — 12*
12 *CCqCCrNrrCqr*
*5 p/CrNr, s/CCqrr * C12 q/Cqr — 13*
13 *CCCrNrqCCqrr*
*8 p/CrNr, r/CCqrr * C13 — 14*
14 *CqCCqrr*
*6 p/q, q/Cqr, s/p * C14 — 15*
15 *CCpCqrCqCpr*
*15 p/Cpq, q/Cqr, r/Cpr * C2 — 16*
16 *CCqrCCpqCpr*
*15 p/Cpq, q/CCprs, r/CCqrs * C7 — 17*
17 *CCCprsCCpqCCqrs*
*15 r/p * C1 q/p, p/q — 18*

18 *CqCpp*
*18 q/CqCpp * C18 — 19*

19 *Cpp*
*8 p/Nq, q/Np, r/Cpq * C4 — 20*

20 *CNpCpq*
*15 p/CNqNp, q/p, r/q * C4 — 21*

21 *CpCCNqNpq*
*21 p/Cpp * C19 — 22*

22 *CCNqNCppq*
*8 p/Nq, q/NCpp, r/q * C22 — 23*

23 *CNCppq*
*2 p/Np, q/Cpq * C20 — 24*

24 *CCCpqrCNpr*
*24 p/Np, q/NCpp, r/p * C22 q/p — 25*

25 *CNNpp*
*4 q/NNp * C25 p/Np — 26*

26 *CpNNp*
*7 p/NNq * C25 p/q — 27*

27 *CCCNNqrsCCqrs*
*27 r/NCpp, s/Nq * C22 q/Nq — 28*

28 *CCqNCppNq*
*27 r/Np, s/CpNq * C4 q/Nq — 29*

29 *CCqNpCpNq*
*2 p/Cqr, q/CCpqCpr, r/s * C16 — 30*

30 *CCCCpqCprsCCqrs*
*30 s/CCCprsCCpqs * C2 p/Cpq, q/Cpr, r/s — 31*

31 *CCqrCCCprsCCpqs*
*31 r/NNq * C26 p/q — 32*

32 *CCCpNNqsCCpqs*
*32 s/CNqNp * C29 q/p, p/Nq — 33*

33 *CCpqCNqNp*
*15 p/Cpq, q/Nq, r/Np * C33 — 34*

34 *CNqCCpqNp*
*16 q/Np, r/Cpq * C20 — 35*

35 *CCpNpCpCpq*
*13 r/p, q/CpCpq * C35 — 36*

36 *CCCpCpqpp*
*17 p/CpCpq, rs/p, q/r * C36 — 37*

37 $CCCpCpqrCCrpp$

6 p/Cqr, q/Cpq, r/Cpr * C16 — 38

38 $CCsCpqCCqrCsCpr$

38 s/Cqr, $p/CCprs$, $q/CCpqs$, r/t * C31 — 39

39 $CCCCpqstCCqrCCCprst$

39 q/Cpq, s/q, $t/CCqpp$, r/q * C37 r/q — 40

40 $CCCpqqCCCpqqCCqpp$

40 $p/CpCpq$, q/p * C36 — C36 — 41

41 $CCpCpCpqCpCpq$

33 p/q, q/Cpq * C1 — 42

42 $CNCpqNq$

30 $s/CCspCCpqCsr$ * C6 p/Cpq, q/p — 43

43 $CCqrCCspCCpqCsr$

17 p/q, $s/CCspCCpqCsr$, q/t * C43 — 44

44 $CCqtCCtrCCspCCpqCsr$

44 $q/NCpq$, t/Nq, p/t * C42 — 45

45 $CCNqrCCstCCtNCpqCsr$

16 $q/CqCCrNrr$, r/Cqr * C12 — 46

46 $CCpCqCCrNrrCpCqr$

46 $p/CNqq$, $q/CpCpq$, r/Cpq * C45 r/q, s/p, t/Cpq — 47

47 $CCNqqCCpCpqCpq$

6 $p/CNqq$, $q/CpCpq$, r/Cpq * C47 — 48

48 $CCsCpCpqCCNqqCsCpq$

48 $s/CpNp$ * C35 — 49

49 $CCNqqCCpNpCpq$

ROZDZIAŁ II.

W definicjach znak „//" oddziela definiendum od definiens. W dowodach twierdzeń nie powołuję się na definicje.

Df. 1. $\alpha \rightarrow \beta //$ Jeżeli α jest tezą, to β jest tezą.

Uwaga. Nie powołuje się na następujące twierdzenia:

a. $\alpha \rightarrow \alpha$.

b. Jeżeli $\alpha \rightarrow \beta$ oraz $\beta \rightarrow \gamma$, to $\alpha \rightarrow \gamma$.

c. Jeżeli α jest tezą i $\alpha \rightarrow \beta$, to β jest tezą.

d. Jeżeli $C\alpha\beta$ jest tezą, to $\alpha \rightarrow \beta$.

Df. 2. $C^0\alpha\beta//\beta$; jeżeli k jest liczbą naturalną, to: $C^k\alpha\beta//C\alpha C^{k-1}\alpha\beta$.

Przykład. Teza *41* przy zastosowaniu powyższej definicji przybiera postać: CC^3pqC^2pq.

T_1. Jeżeli m jest liczbą naturalną, oraz α, β, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ są wd, to tezą jest:

$$CC\alpha\beta CC\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_m \alpha C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_m \beta.$$

Twierdzenie powyższe udowadniamy przy pomocy tezy *16*, stosując indukcję względem m.

T_2. Jeżeli m i n są liczbami naturalnemi, $m < n$ oraz α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ sa wd, to

$$C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_m \alpha \rightarrow C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_n \alpha.$$

Dowód przy pomocy tezy *1* i T_1.

T_3. Jeżeli k i m są liczbami naturalnemi, oraz α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ są wd, to

$$C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C^{k+2}\alpha_m \alpha \rightarrow C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C^2\alpha_m \alpha.$$

Dowód przy pomocy tezy *41* i T_1.

T_4. Jeżeli α jest wd oraz m jest liczbą naturalną, $m > 1$ i ciągi wd α_1, α_2, $\ldots \alpha_m$ oraz β_1, $\beta_2 \ldots \beta_m$ różnią się od siebie tylko porządkiem wyrazów, to

$$C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_m \alpha \rightarrow C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_m \alpha.$$

Dowód przy pomocy tezy *15* i T_1.

T_5. Jeżeli α i β są wd oraz β powstaje z α w drodze zastąpienia w α jego części właściwej [1]) wd γ przez wd δ, to tezami są bądź:

$$\left.\begin{array}{l} CC\gamma\delta C\alpha\beta, \\ C\alpha CC\gamma\delta\beta, \\ CC\delta\gamma C\beta\alpha \text{ i} \\ C\beta CC\delta\gamma\alpha \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(zespół A)}$$

bądź:

$$\left.\begin{array}{l} CC\delta\gamma C\alpha\beta, \\ C\alpha CC\delta\gamma\beta, \\ CC\gamma\delta C\beta\alpha \text{ i} \\ C\beta CC\gamma\delta\alpha. \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(zespół B)}$$

Uwaga 1. W dowodzie niniejszego twierdzenia oraz twierdzeń T_6 i T_8 korzystam wyłącznie z tez: *2*, *16*, *33* i *34* oraz ich konsekwencyj.

---

[1]) część właściwa = część różna od całości.

Uwaga 2. W dowodach twierdzeń niniejszej pracy mających postać okresów warunkowych, oznaczać będę, za Prof. St. Leśniewskim, poprzedniki odnośnych twierdzeń przez „Hp”, zaś następniki przez „Tz”.

Dowód.

Oznaczmy Tz przez $T(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

a. Jeżeli α', β', γ', δ' i ε są wd, oraz α' jest równokształtne z jednem z trzech wd $C\varepsilon\gamma'$, $C\gamma'\varepsilon$ i $N\gamma'$, zaś β' jest równokształtne odpowiednio z jednem z trzech wd: $C\varepsilon\delta'$, $C\delta'\varepsilon$ i $N\delta'$, to $T(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.

Istotnie, jeżeli γ', δ' i ε są wd, to tezami są następujące wd oraz te wd, które powstają z następujących drogą zamiany γ' na δ' i nawzajem:

$$CC\gamma'\delta'CC\varepsilon\gamma'CC\varepsilon\delta' \, (16), \quad CC\varepsilon\gamma'CC\gamma'\delta'C\varepsilon\delta' \, (2),$$
$$CC\delta'\gamma'CC\gamma'\varepsilon C\delta'\varepsilon \, (2), \quad CC\gamma'\varepsilon CC\delta'\gamma'C\delta'\varepsilon \, (16)$$
$$CC\delta'\gamma'CN\gamma'N\delta' \, (33) \quad \text{i} \quad CN\gamma'CC\delta'\gamma'N\delta' \, (34).$$

Wynika stąd, że przypisując wd α' i β' w trzech możliwych kombinacjach postać zgodną z założeniem otrzymamy w każdym z tych wypadków, że $T(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.

Jeżeli Hp, to

b. Istnieją trzy ciągi skończone wd: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ oraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$, takie, że $\alpha_1 = \gamma$, $\alpha_n = \alpha$, $\beta_1 = \delta$, $\beta_n = \beta$ oraz dla $k = 1, 2 \ldots n-1$ α_{k+1} jest równokształtne z jednem z trzech wd $C\varepsilon_k\alpha_k$, $C\alpha_k\varepsilon_k$ i $N\alpha_k$, zaś β_{k+1} odpowiednio z $C\varepsilon_k\beta_k$, $C\beta_k\varepsilon_k$ lub $N\beta_k$.

Wobec a. wynika stąd, że

c. $T(\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1)$ oraz

d. Dla $l = 1, 2 \ldots n-1$ $T(\alpha_{l+1}, \beta_{l+1}, \alpha_l, \beta_l)$.

Łatwo okazać, że

e. Jeżeli $k = 1, 2 \ldots n-2$ oraz $T(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \alpha_k, \beta_k)$, to $T(\alpha_{k+2}, \beta_{k+2}, \alpha_k, \beta_k)$.

Rzeczywiście, jeżeli oznaczymy przez A_1, A_2, B_1, B_2 kolejno następujące pary wd:

$$CC\alpha_k\beta_kC\alpha_{k+1}\beta_{k+1} \text{ i } C\alpha_{k+1}CC\alpha_k\beta_k\beta_{k+1} \, (A_1)$$
$$CC\beta_k\alpha_kC\alpha_{k+1}\beta_{k+1} \text{ i } C\alpha_{k+1}CC\beta_k\alpha_k\beta_{k+1} \, (A_2)$$
$$CC\alpha_{k+1}\beta_{k+1}C\alpha_{k+2}\beta_{k+2} \text{ i } C\alpha_{k+2}CC\alpha_{k+1}\beta_{k+1}\beta_{k+2} \, (B_1)$$
$$CC\beta_{k+1}\alpha_{k+1}C\alpha_{k+2}\beta_{k+2} \text{ i } C\alpha_{k+2}CC\beta_{k+1}\alpha_{k+1}\beta_{k+2} \, (B_2),$$

oraz przez A_1', A_2', B_1', B_2' odpowiednio te pary wd, które powstają z powyższych dzięki zastąpieniu „α" przez „β" i nawzajem — to wobec d. tezami są bądź wyrażenia par A_1, B_1, A_1' i B_1', bądź A_2, B_1, A_2' i B_1', bądź A_1, B_2, A_1' i B_2' bądź wreszcie A_2, B_2, A_2' i B_2'. Rozpatrując każdą z tych możliwości, łatwo dochodzimy do wniosku, że $T(\alpha_{k+2}, \beta_{k+2}, \alpha_k, \beta_k)$. Np. w wypadku pierwszym korzystamy z następujących dwuch podstawień:

$$2\ p/C\alpha_k\beta_k,\ q/C\alpha_{k+1}\beta_{k+1},\ r/C\alpha_{k+2}\beta_{k+2}$$

$$6\ p/\alpha_{k+2},\ q/C\alpha_{k+1}\beta_{k+1},\ r/\beta_{k+2},\ s/C\alpha_k\beta_k.$$

Stosując dwukrotnie regułę odrywania do każdej z tych tez otrzymujemy $CC\alpha_k\beta_kC\alpha_{k+2}\beta_{k+2}$ oraz $C\alpha_{k+2}CC\alpha_k\beta_k\beta_{k+2}$.

Z łatwością udowadniamy obecnie

f. $T(\alpha_n, \beta_n, \alpha_1, \beta_1)$ (c, e)

Tz (f).

Uwaga. Łatwo okazać, że, jeżeli dla ciągu wd, wymienionego pod b.: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, wypadek ten, że α_k $(k = 2, 3 \ldots n)$ ma postać $C\varepsilon_{k-1}\alpha_{k-1}$, zachodzi równo m razy ($m = 0$ niewykluczone), to: tezami są wyrażenia zespołu A, gdy $n - m$ jest liczbą nieparzystą — zaś wd zespołu B w przeciwnym wypadku.

Jako przykład mogą posłużyć tezy: *2, 6, 7, 16, 17, 31, 33, 34, 38* i *39* oraz zespół tez twierdzenia T_1.

T_6. Jeżeli α i β są wd i n jest liczbą naturalną oraz istnieje pewien ciąg wd $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ taki, że $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ i dla $l = 1, 2 \ldots n$ α_l powstaje z α_{l-1} w drodze zastąpienia w α_{l-1} jego części właściwej wd γ_l przez wd δ_l, to tezami są pewne wd postaci $C\varphi_1C\varphi_2 \ldots C\varphi_nC\alpha\beta$ oraz $C\alpha C\varphi_1C\varphi_2 \ldots C\varphi_n\beta$, gdzie wyrażenia φ_k $(k = 1, 2 \ldots n)$ są równokształtne z $C\gamma_k\delta_k$ albo $C\delta_k\gamma_k$.

Dowód.

Oznaczmy Tz przez $T(\beta, n)$.

Jeżeli Hp, to

a. W myśl poprzedniego twierdzenia tezami będą pewne wd postaci $C\varphi C\alpha\alpha_1$ oraz $C\alpha C\varphi\alpha_1$, gdzie φ jest postaci $C\gamma_1\delta_1$ lub $C\delta_1\gamma_1$. Zatem $T(\alpha_1, 1)$.

b. Dla $k = 1, 2 \ldots n-1$, jeżeli $T(\alpha_k, k)$, to tezami są pewne wd postaci $C\varphi_1C\varphi_2 \ldots C\varphi_kC\alpha\alpha_k$ oraz $C\alpha C\varphi_1C\varphi_2 \ldots C\varphi_k\alpha_k$, gdzie dla $l = 1, 2 \ldots k$ φ_l jest postaci $C\gamma_l\delta_l$ lub $C\delta_l\gamma_l$; pozatem wobec tego, że α_{k+1} powstaje z α_k, a zatem również $C\alpha\alpha_{k+1}$

z $C\alpha\alpha_k$, w drodze zastąpienia części właściwej γ_{k+1} przez δ_{k+1}, w myśl poprzedniego twierdzenia tezami będą pewne wd postaci $C\alpha_k C\varphi_{k+1}\alpha_{k+1}$ oraz $CC\alpha\alpha_k C\varphi'_{k+1} C\alpha\alpha_{k+1}$, gdzie φ_{k+1} i φ'_{k+1} są postaci $C\gamma_{k+1}\delta_{k+1}$ lub $C\delta_{k+1}\gamma_{k+1}$. Otóż, stosując T_1 otrzymać możemy z tez $C\alpha C\alpha_k C\varphi_{k+1} C\alpha\alpha_{k+1}$ i $C\varphi_1 C\varphi_2 \ldots C\varphi_k C\alpha\alpha_k$ tezę $C\varphi_1 C\varphi_2 \ldots C\varphi_{k+1} C\alpha\alpha_{k+1}$, zaś z tez $C\alpha_k C\varphi_{k+1}\alpha_{k+1}$ i $C\alpha C\varphi_1 C\varphi_2 \ldots C\varphi_k \alpha_k$ tezę $C\alpha C\varphi_1 C\varphi_2 \ldots C\varphi_{k+1}\alpha_{k+1}$.

Wobec a. i b. mamy, że $T(\alpha_n, n)$, czyli $T(\beta, n)$, t. j. Tz.

Uwaga 1. Ciąg scharakteryzowany w Hp istnieje dla wd α i β zawsze, gdy wd α zawiera n części właściwych $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, takich, że żadna z nich nie jest częścią drugiej, zaś β powstaje z α w drodze zastąpienia tych części odpowiednio przez wd $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$; np. gdy β powstaje z α drogą podstawienia γ_1/δ_1 i α zawiera równo n części równokształtnych ze zmienną γ_1.

Uwaga 2. W Tz można zastąpić „α" przez „β" i nawzajem, gdyż konsekwencją Hp jest zdanie, które otrzymuje się z Hp drogą zamiany „α" na „β" i nawzajem, oraz „γ" na „δ" i nawzajem.

Df. 3. $\alpha = \beta // C\alpha\beta$ i $C\beta\alpha$ są tezami.

Uwaga. „$\alpha = \beta$" czytamy „α jest równoważne β".

T_7. Twierdzenia następujące są słuszne przy założeniu, że zmienne w nich występujące zastępują wyrażenia teorji dedukcji.

a. Jeżeli $\alpha = \beta$, to $\beta = \alpha$.

b. Jeżeli $\alpha = \beta$ i $\beta = \gamma$, to $\alpha = \gamma$ (*2*).

c. Jeżeli α jest tezą oraz $\alpha = \beta$, to β jest tezą.

d. Jeżeli α i β są tezami, to $\alpha = \beta$ (*1*).

e. $NN\alpha = \alpha$ (*25, 26*).

f. Jeżeli α jest tezą, to $C\alpha\beta = \beta$. (*14, 1*).

g. $CC\beta\beta\alpha = \alpha$. (f, *19*).

h. $CC\gamma C\beta\beta\alpha = \alpha$. (f, *18*).

i. $CCNC\gamma\gamma\beta\alpha = \alpha$. (f, *23*).

j. $C\beta C\alpha\alpha = C\gamma\gamma$. (d, *18, 19*).

k. $CNC\beta\beta\alpha = C\gamma\gamma$. (d, *23, 19*).

l. $C\beta NC\alpha\alpha = N\beta$. (*28, 20*).

T_8. Jeżeli przy założeniach twierdzenia T_6 dla $l = 1, 2 \ldots n$ $\gamma_l = \delta_l$, to $\alpha = \beta$.

Dowód.

W wypadku niniejszym, zgodnie z T_6 i uwagą 2 po T_6, tezą będzie pewne wd postaci $C\varphi_1 C\varphi_2 \ldots C\varphi_n C\alpha\beta$ oraz pewne wd postaci $C\psi_1 C\psi_2 \dots C\psi_n C\beta\alpha$, gdzie wd φ_k i ψ_k $(k = 1, 2 \dots n)$ są postaci $C\gamma_k \delta_k$ lub $C\delta_k \gamma_k$, a zatem są tezami, gdyż $\gamma_k \equiv \delta_k$.

Stąd tezami są $C\alpha\beta$ i $C\beta\alpha$, zatem $\alpha \equiv \beta$, c. b. d. o.

Uwaga. Zgodnie z powyższem, zastępując w jakiemś wd α pewne jego części przez wyrażenia im równoważne, otrzymujemy wd równoważne α.

T_9. Jeżeli α i β są wd oraz β powstaje z α w drodze zastąpienia w α pewnych jego części właściwych równokształtnych z wd γ, przez wd równokształtne z δ, to tezami są $C^2 C\gamma\delta$ $C^2 C\delta\gamma C\alpha\beta$ oraz $C\alpha C^2 C\gamma\delta C^2 C\delta\gamma\beta$.

Dowód przeprowadzamy przy pomocy T_6, T_4, T_2, i T_3.

Df. 4. α_1 i $\alpha_2 \dots i\, \alpha_n \to \beta //$ Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2 \dots i\, \alpha_n$ są tezami, to β jest tezą.

T_{10}. $C^2\alpha\beta$ i $C^2 N\alpha\beta$ i $CC\alpha N\alpha CCN\alpha\alpha\beta \to \beta$.

Uwaga. Zamiast powyższego twierdzenia możnaby okazać, że tezą jest $CC^2pqCC^2NpqCCCpNpCCNppqq$.

Analogicznie można zastąpić tezami wszystkie twierdzenia, występujące w poniższym dowodzie.

Dowód.

a. $CC\alpha N\alpha\beta \to CC\beta\alpha\alpha$ (*13*).
b. $CC\beta\alpha\alpha \to CC\alpha\beta\beta$ (*40*).
c. $CC\alpha N\alpha\beta \to CC\alpha\beta\beta$ (a, b).
d. $CC\alpha N\alpha\beta$ i $C\alpha\beta \to \beta$ (c).
e. $CCN\alpha NN\alpha\beta \to CCN\alpha\alpha\beta$ (T_8, T_7 punkt e.).
f. $CCN\alpha\alpha\beta$ i $CN\alpha\beta \to \beta$ (d $\alpha/N\alpha$, e).
g. $CC\alpha N\alpha\beta \to CC\alpha N\alpha C\alpha\beta$ (T_2).
h. $C\alpha C\alpha\beta$ i $CC\alpha N\alpha C\alpha\beta \to C\alpha\beta$ (d $\beta/C\alpha\beta$).
i. $CC\alpha N\alpha\beta$ i $C^2\alpha\beta \to C\alpha\beta$ (g, h).
j. $CC\alpha N\alpha\beta$ i $C^2\alpha\beta \to \beta$ (d, i).
k. $CCN\alpha\alpha\beta$ i $C^2 N\alpha\beta \to \beta$ (j $\alpha/N\alpha$, e).
l. $C^2\alpha\beta \to C^2\alpha CCN\alpha\alpha\beta$ (T_2).
m. $CC\alpha N\alpha CCN\alpha\alpha\beta$ i $C^2\alpha CCN\alpha\alpha\beta \to CCN\alpha\alpha\beta$ [(j $\beta/CCN\alpha\alpha\beta$).
n. $CC\alpha N\alpha CCN\alpha\alpha\beta$ i $C^2\alpha\beta \to CCN\alpha\alpha\beta$ (l, m).

Tz (k, n).

T_{11}. Tezami są

α. $CC^2CpNpqCCpNpq$.

α'. $CC^2CNppqCCNppq$.

Dowód.

a. $CCpNp\alpha$ $(14\ q/CpNp,\ r/CCpNpq)$.

b. $C^2p\alpha$ (35, T_2, T_4).

c. α (T_{10} punkt j, a, b).

d. α' (cp/Np, T_7 punkt e, T_8).

T_{12}. Jeżeli spełniony jest poprzednik twierdzenia T_9, to tezą jest $C\alpha CC\gamma N\gamma CCN\gamma\gamma CC\delta N\delta CCN\delta\delta\beta$.

Dowód.

Jeżeli Hp, to wobec T_9 tezą jest $C\alpha C^2C\gamma\delta C^2C\delta\gamma\beta$; pozatem wobec *49* tezami są $CCN\delta\delta CC\gamma N\gamma C\gamma\delta$ oraz $CCN\gamma\gamma CC\delta N\delta C\delta\gamma$. Stosując T_1 i T_4 łatwo okazać, że wobec powyższego tezą będzie wd

$$C\alpha C^2C\gamma N\gamma C^2CN\gamma\gamma C^2C\delta N\delta C^2CN\delta\delta\beta.$$

Przy pomocy T_4 i T_{11} udowadniamy obecnie, że Tz.

T_{13}. Jeżeli α jest wd, zawierającem zmienne „p" i „q", to

$$\alpha\, p/Cqq \text{ i } \alpha\, p/NCqq \text{ i } \alpha\, q/Cpp \text{ i } \alpha\, q/NCpp \text{ i } \alpha\, p/q \rightarrow \alpha.$$

Dowód.

Jeżeli Hp, to

a. $\alpha\, p/Cqq \rightarrow C^2CCqqpC^2CpCqq\alpha$ (T_9 γ/Cqq, δ/p).

b. $\alpha\, p/Cqq \rightarrow C^2p\alpha$ (T_8, a, T_7 punkty g. i h.).

c. $\alpha\, p/NCqq \rightarrow C^2CNCqqpC^2CpNCqq\alpha$
[(T_9 $\gamma/NCqq$, δ/p).

d. $\alpha\, p/NCqq \rightarrow C^2Np\alpha$ (T_8, c, T_7 punkty i. i l.).

Analogicznie otrzymujemy.

e. $\alpha\, q/Cpp \rightarrow C^2q\alpha$ i $\alpha\, q/NCpp \rightarrow C^2Nq\alpha$.

Oznaczmy wd $CCpNpCCNpp\alpha$ przez „β".

f. $C^2p\alpha$ i $C^2Np\alpha$ i $\beta \rightarrow \alpha$ (T_{10}).

g. $C^2q\alpha \rightarrow C^2q\beta$ i $C^2Nq\alpha \rightarrow C^2Nq\beta$ (T_2).

h. $\alpha\, p/q \rightarrow CCqNqCCNqqCCpNpCCNpp\alpha$ (T_{12}).

i. $\alpha\, p/q \rightarrow CCqNqCCNqq\beta$ (h).

j. $C^2q\alpha$ i $C^2Nq\alpha$ i $\alpha\, p/q \rightarrow \beta$ (T_{10}, g, i).

k. $C^2p\alpha$ i $C^2Np\alpha$ i $C^2q\alpha$ i $C^2Nq\alpha$ i $\alpha\, p/q \rightarrow \alpha$ (f, j).

Tz (b, d, e).

T_{14}. Jeżeli α jest twierdzeniem rachunku trójwartościowego, to α jest tezą, jeżeli tezą jest każde twierdzenie rachunku trójwartościowego, które nie zawiera dwóch nierównokształtnych zmiennych.

Dowód otrzymujemy przy pomocy T_{13}, biorąc pod uwagę, że jeżeli jakieś twierdzenie rachunku trójwartościowego α zawiera dwie nierównokształtne zmienne, powiedzmy „p” i „q”, to wyrażenia

$$\alpha p/Cqq,\ \alpha p/NCqq,\ \alpha q/Cpp,\ \alpha q/NCpp \text{ i } \alpha p/q$$

są również twierdzeniami rachunku trójwartościowego, jako podstawienia twierdzenia tegoż rachunku α i pozatem zawierają mniej zmiennych różnego kształtu, niż α.

T_{15}. Jeżeli α jest wd, zawierającem zmienną „p” jako część właściwą, to

$$\alpha p/Cpp \text{ i } \alpha p/NCpp \text{ i } CCpNpCCNpp\alpha \rightarrow \alpha.$$

Dowód.

Jeżeli Hp, to

a. $\alpha p/Cpp \rightarrow C^2 p\alpha$ oraz $\alpha p/NCpp \rightarrow C^2 Np\alpha$ (por. dowód poprzedniego twierdzenia).

Tz (T_{10}, a).

T_{16}. Jeżeli α jest wd i każda zmienna, która występuje w α jest równokształtna z „p”, to jeżeli α' ma postać $\alpha p/Cpp$ albo $\alpha p/NCpp$, to $\alpha' \equiv Cpp$ albo $\alpha' \equiv NCpp$.

Dowód.

Oznaczmy niniejsze twierdzenie przez $T(\alpha)$.

a. Jeżeli α jest zmienną, to $T(\alpha)$.

Rzeczywiście, α' ma wtedy postać Cpp albo $NCpp$, zatem $\alpha' \equiv Cpp$ albo $\alpha' \equiv NCpp$.

b. Jeżeli jakieś wd α ma postać $C\alpha_1\alpha_2$, oraz $T(\alpha_1)$ i $T(\alpha_2)$, to $T(\alpha)$.

Rzeczywiście, jeżeli α jest wd i każda zmienna w niem występująca jest postaci „p”, to, skoro α ma postać $C\alpha_1\alpha_2$, to α_1 i α_2 są również wd, nie zawierającemi zmiennych nierównokształtnych z „p”.

Jeżeli zatem $T(\alpha_1)$ i $T(\alpha_2)$, to każde z wd: $\alpha_1 p/Cpp$, $\alpha_2 p/Cpp$, $\alpha_1 p/NCpp$, $\alpha_2 p/NCpp$ jest równoważne jednemu z wd: Cpp i $NCpp$. Wobec T_8 wnioskujemy stąd, że α' jest równoważne jednemu z czterech następujących wd:

$$CCppCpp,\ CCppNCpp,$$

$$CNCppCpp \text{ i } CNCppNCpp.$$

Wobec T_7, punkty g i k, każde z tych czterech wyrażeń jest równoważne Cpp bądź $NCpp$, zatem również α', c. b. d. o.

c. Jeżeli jakieś wd α ma postać $N\alpha_1$, oraz $T(\alpha_1)$, to $T(\alpha)$ Dowód przy pomocy T_8 oraz T_7 punkt e.

Tz (a, b, c).

T_{17}. Jeżeli α jest twierdzeniem rachunku trójwartościowego, nie zawierającem zmiennych, nierównokształtnych z „p", to jeżeli α' ma postać $\alpha p/Cpp$ bądź $\alpha p/NCpp$, to α' jest tezą.

Dowód.

Jeżeli Hp, to α' jest podstawieniem twierdzenia rachunku trójwartościowego, zatem α' jest również twierdzeniem tegoż rachunku, stąd wobec T_{16} $\alpha' \equiv Cpp$, gdyż żadne twierdzenie rachunku trójwartościowego nie jest równoważne $NCpp$. Zatem wobec *19* α' jest tezą, c. b. d. o.

Df. 5. Jeżeli α i β są wd, to „α jest krótsze od β" znaczy tyle co: „α zawiera mniej znaków postaci „C" albo „N", niż β".

Np. „$NCpq$" jest krótsze od „$NNCpq$", ale nie jest krótsze od „$CpCpq$".

Uwaga. Wyrażeń typu „α jest najkrótszem wd o własności F" będę używał w tem znaczeniu, że: „α jest wd o własności F i nie jest krótsze od żadnego wd o własności F".

T_{18}. Jeżeli jakieś wd α posiada własność F oraz każde wd o własności F, nie będące najkrótszem wd o tejże własności, jest równoważne pewnemu krótszemu wd o tejże własności — to α jest równoważne pewnemu wd, będącemu najkrótszem wd o własności F.

T_{19}. Jeżeli α jest wd i zawiera część właściwą postaci „Cpp", to α jest postaci „$NCpp$", albo jest równoważne pewnemu wd, krótszemu od α.

Dowód.

Istotnie, jeżeli α nie jest postaci „$NCpp$", to, wobec Hp, α zawiera część γ bądź równokształtną z „$NNCpp$" bądź równokształtną dla pewnego wd φ z jednem z następujących wd: $CCpp\varphi$, $C\varphi Cpp$, $CNCpp\varphi$ i $C\varphi NCpp$. Wd γ jest równoważne pewnemu wd δ, a mianowicie odpowiednio wd: Cpp, φ, Cpp, Cpp i $N\varphi$ (T_7 punkty e, g, j, k, l). Zatem, zgodnie z T_8, α jest równoważne takiemu wd β, jakie otrzymuje się z α w drodze zastąpienia γ przez pewne wd równokształtne z δ; pozatem β jest krótsze od α, gdyż δ jest krótsze od γ.

Uwaga. Każda zmienna występująca w β jest równokształtna z pewną zmienną, zawartą w α.

T_{20}. Jeżeli α jest wd, zawierającem zmienne wyłącznie równokształtne z „p", to α posiada tę własność, że jest bądź równokształtne z „p", bądź zawiera część postaci „Cpp" albo „Np".

Dowód.

Oznaczmy powyższą własność przez „F", wtedy

a. „p" posiada własność F.

b. Jeżeli jakieś wd φ i ψ posiadają własność F, to $C\varphi\psi$ również posiade własność F, — gdyż albo

1) jedno przynajmniej z wd φ i ψ zawiera część postaci „Cpp" albo „Np" i wtedy $C\varphi\psi$ zawiera również taką część, albo

2) φ i ψ są postaci „p", zatem $C\varphi\psi$ jest postaci „Cpp".

c. Jeżeli jakieś wd φ posiada własność F, to również wd $N\varphi$ posiada tę własność (dowód jak punktu b.).

Tz (a, b, c, Hp).

T_{21}. Jeżeli jakieś twierdzenie rachunku trójwartościowego β ma postać „$CCpNpCCNpp\alpha$", gdzie α nie zawiera zmiennych nierównokształtnych z „p", to β jest postaci $CCpNpCCNppCpp$ albo jest równoważne pewnemu krótszemu twierdzeniu rachunku trójwartościowego postaci „$CCpNpCCNpp\alpha'$", gdzie α' również nie zawiera zmiennych nierównokształtnych z „p".

Dowód.

Jeżeli Hp, to

a. α nie jest postaci „p" ani „Np", gdyż, jak łatwo sprawdzić, ani wd $CCpNpCCNppp$, ani wd $CCpNpCCNppNp$ nie są twierdzeniami rachunku trójwartościowego.

b. α jest postaci „Cpp" i wtedy β postaci „$CCpNp$—$CCNppCpp$" albo α zawiera pewną część właściwą postaci „Cpp" albo „Np" (T_{20}, a).

c. α nie jest postaci „$NCpp$" (jak a.).

d. Jeżeli α zawiera część właściwą postaci „Cpp", to α w myśl T_{19} z uwagą oraz c. jest równoważne pewnemu krótszemu wd α', zawierającemu również zmienne wyłącznie postaci „p"; zatem, zgodnie z T_8, wd $CCpNpCCNpp\alpha$, czyli β, jest równoważne $CCpNpCCNpp\alpha'$, wyrażeniu krótszemu od β.

e. Jeżeli α zawiera część właściwą γ postaci „Np", to, oznaczając przez α' jakieś wd, które powstaje z α w drodze zastąpienia γ przez „p", oraz oznaczając przez β' pewne wd postaci $CCpNpCCNpp\alpha'$, mamy, że β' także powstaje z β naskutek takiego zastąpienia, oraz że β powstaje z β' naskutek zastąpienia odwrotnego.

Stąd wobec T_9 tezami będą $C\beta C^2CNppC^2CpNp\beta'$ oraz $C\beta' C^2CpNpC^2CNpp\beta$. Przy pomocy T_4 i T_{11} łatwo okazać, że wobec ostatniego tezami będą $C\beta\beta'$ i $C\beta'\beta$, zatem, że $\beta=\beta'$.

Otóż β' jest krótsze od β, gdyż α' jest krótsze od α, pozatem α' zawiera zmienne wyłącznie postaci „p".

Tz (b, c, d, e).

T_{22}. Jeżeli Hp twierdzenia T_{21}, to β jest tezą.

Dowód.

Jeżeli Hp, to wobec T_{18} i T_{21} β bądź jest postaci $CCpNp$—$CCNppCpp$ bądź jest równoważne temuż wyrażeniu, jako najkrótszemu twierdzeniu rachunku trójwartościowego, będącemu postaci $CCpNpCCNpp\alpha'$, gdzie α' zawiera zmienne wyłącznie postaci „p".

Wobec powyższego, biorąc pod uwagę, że wd $CCpNp$—$CCNppCpp$ jest konsekwencją tez *1* i *18*, mamy że Tz.

√T_{23}. Jeżeli α jest twierdzeniem rachunku trójwartościowego, zawierającem zmienne wyłącznie postaci „p", to α jest tezą.

Dowód.

Jeżeli Hp, to

a. α zawiera „p" jako część właściwą.

b. $\alpha p/Cpp$ i $\alpha p/NCpp$ i $CCpNpCCNpp\alpha \to \alpha$ (T_{15}).

c. $\alpha p/Cpp$, $\alpha p/NCpp$ i $CCpNpCCNpp\alpha$ są twierdzeniami rachunku trójwartościowego — wobec reguły podstawiania i tezy *1*.

d. $\alpha p/Cpp$, $\alpha p/NCpp$ i $CCpNpCCNpp\alpha$ są tezami (T_{17}, T_{22}).

Tz (b, d).

T_{24}. Jeżeli α jest twierdzeniem rachunku trójwartościowego, to α jest tezą (T_{14}, T_{23}).

ROZDZIAŁ III.

W niniejszym rozdziale zajmuję się kwestją niezależności każdej z tez *1*, *2*, *3* i *4* od trzech pozostałych.

Dla tez *1*, *3* i *4* przeprowadzam dowód niezależności metodą tabelkową — tabelki poniższe podał mi łaskawie Prof. J. Łukasiewicz. Wartością wyróżnioną w nich jest „*1*".

Dla *1*:

C	0	1	N
0	1	0	0
1	0	1	1

$$C0C00 = 0$$

Dla *3*:

C	0	1	2	3	N
0	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	0
2	3	1	1	1	3
3	2	1	3	1	2

$$CCC3N333 = 3$$

Dla *4*:

C	0	1	N
0	1	1	0
1	0	1	1

$$CCN0N1C10 = 0$$

Dla tezy *2* wolę — przy sposobności — bardziej ogólnie udowodnić, że nie jest ona konsekwencją żadnego układu wyrażeń teorji dedukcji, którego elementy zawierają conajwyżej dwie zmienne różnego kształtu oraz którego konsekwencją nie jest każde wd.

Łatwo zauważyć, że układ tez *1*, *3* i *4* posiada żądane własności.

Rozważania nasze prowadzimy w sposób następujący:

Oznaczmy przez „$T(\xi, \eta, \alpha, \beta)$" następujące zdanie: „$C\xi\eta$ jest dla pewnego wd φ postaci $\varphi p/\alpha\, q/\beta$" [1]).

Łatwo zauważyć, że

---

[1]) Gdziekolwiek w niniejszych wywodach używam wyrażeń „$\varphi p/\xi\, q/\eta$" bądź „$\varphi p/\xi$" pomijam istotne dla dowodu zastrzeżenie, że φ nie zawiera innych zmiennych niż „p" i „q", względnie „p".

a. Dla dowolnych wd ξ, η, α i β $T(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych wd φ_1, φ_2, φ_3 i φ_4 zachodzi jeden przynajmniej z następujących wypadków:

1) ξ jest postaci $\varphi_1 p/\alpha$ albo $\varphi_2 p/\alpha\, q/\beta$ — zaś η jest postaci $\varphi_3 q/\beta$ albo $\varphi_4 p/\alpha\, q/\beta$,

2) jak 1) z zamianą ξ na η i nawzajem.

Niech dalej dla pewnych α i β.

b. 1) α i β są wd,

2) α nie jest równokształtne z β, oraz

3) jeżeli dla jakichś wd α' i β' $T(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, to α i β są równokształtne odpowiednio z α' i β', bądź z β' i α'.

Np. $C\alpha\beta$ może mieć postać Cpq, $CpCqr$, $CCpqCqr$ — ale nie Cpp, $CpCpq$, $CCpqCqp$.

Bez dowodu przyjmiemy, że dla tych wd α i β mamy

c. Dla dowolnych wd φ, φ_1, ξ, η i φ_2: jeżeli φ jest postaci $\varphi_1 p/\xi\, q/\eta$ i zarazem postaci $\varphi_2 p/\alpha\, q/\beta$, to $T(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ (a, b).

Powyższe jest oczywiste w wypadku, gdy α i β są zmiennemi.

Z c. wynika

d. Dla dowolnych wd ξ i η: jeżeli dla pewnych wd φ, φ_1 i φ_2 φ jest postaci $\varphi_1 p/\xi\, q/\eta$ i zarazem $\varphi_2 p/\alpha\, q/\beta$, — to każde wd ψ, które dla pewnego wd ψ_1 jest postaci $\psi_1 p/\xi\, q/\eta$ jest zarazem dla pewnego wd ψ_2 postaci $\psi_2 p/\alpha\, q/\beta$ (c, a).

Dalej mamy

e. Dla dowolnych wd φ, φ_1, ξ i φ_2: jeżeli φ jest postaci $\varphi_1 p/\xi$ oraz $\varphi_2 p/\alpha\, q/\beta$, to ξ dla pewnego wd φ_3 jest postaci $\varphi_3 p/\alpha\, q/\beta$.

Rzeczywiście, przy danem założeniu, albo φ jest jednej z postaci „ξ", „$N\xi$", $NN\ldots N\xi$, i wtedy wniosek jest oczywisty — albo φ jest dla pewnego wd φ' postaci $\varphi' p/\xi\, q/\xi$ i wtedy, zgodnie z c, $T(\xi, \xi, \alpha, \beta)$.

Wobec a. z tego ostatniego wynika, że albo

1) ξ jest dla pewnego wd φ_3 postaci $\varphi_3 p/\alpha\, q/\beta$, albo

2) ξ jest dla pewnych wd ψ_1 i ψ_2 postaci $\psi_1 p/\alpha$ i $\psi_2 q/\beta$.

Możliwy jest jednakże tylko pierwszy wypadek, gdyż z drugiego wynika, że: bądź α jest dla pewnego wd α_1 postaci $\alpha_1 p/\beta$, bądź β jest dla pewnego wd β_1 postaci $\beta_1 p/\alpha$, co jest sprzeczne z a.

Zatem wniosek jest słuszny.

Niech dalej $C\alpha\beta$ zawiera równo n zmiennych różnego kształtu, powiedzmy: „p_1", „p_2"...„p_n"; oraz niech „q_1", „q_2"...„q_n" będzie ciągiem zmiennych.

Oznaczmy obecnie dla każdego wd φ przez „φ^z" pewne wd φ' takie, że bądź

1) φ' powstaje z φ drogą zastąpienia w φ każdej jego części φ_1, bębącej dla pewnego wd φ_2 postaci $\varphi_2\, p/\alpha\, q/\beta$, przez $\varphi_1\, p_1/q_1,\ p_2/q_2 \dots p_n/q_n$ — bądź

2) $\varphi' = \varphi$, jeżeli φ takiej części φ_1 nie zawiera.

Przykłady: weźmy $C\alpha\beta$, φ i φ^z odpowiednio postaci:

1. Cp_1p_2, $CCp_1qCCqp_2Cp_1p_2$, $CCp_1qCCqp_2Cq_1q_2$.
2. $Cp_1Cp_2p_3$, $CCp_2Cp_1p_3Cp_1Cp_2p_3$, $CCp_2Cp_1p_3Cq_1Cq_2q_3$.
3. Cp_1p_2, $Cp_1Cp_2p_3$, $Cp_1Cp_2p_3$.

Przyjmując powyższe określenie można udowodnić

f. Jeżeli jakieś wd φ jest konsekwencją pewnego układu U wyrażeń teorji dedukcji, zawierających conajwyżej 2 zmienne różnego kształtu, to φ^z jest również konsekwencją U.

W tym celu okazujemy kolejno (dla dowolnych wd φ, φ_1, ξ i η):

α. Jeżeli φ jest postaci $\varphi_1\, p/\xi\, q/\eta$, to φ^z jest postaci $\varphi\, p_1/q_1,\ p_2/q_2 \dots p_n/q_n$, albo postaci $\varphi\, p/\xi^z,\ q/\eta^z$.

Istotnie, jeżeli, przy powyższem założeniu, φ zawiera pewną część ψ, która dla pewnego wd ψ_1 jest postaci $\psi_1\, p/\alpha\, q/\beta$, to zachodzi jeden przynajmniej z trzech następujących wypadków:

1) ψ jest dla pewnego wd ψ_2 postaci $\psi_2\, p/\xi\, q/\eta$,

2) ψ jest dla pewnego wd ψ_2 postaci $\psi_2\, p/\xi$ albo $\psi_2\, p/\eta$,

3) ψ jest częścią pewnej części φ, równokształtnej z ξ lub z η.

W pierwszym wypadku, zgodnie z d., φ jest dla pewnego wd φ' postaci $\varphi'\, p/\alpha\, q/\beta$, zatem φ^z jest postaci $\varphi\, p_1/q_1,\ p_2/q_2 \dots p_n/q_n$. W drugim wypadku, zgodnie z e., ξ względnie η jest dla pewnego wd φ_3 postaci $\varphi_3\, p/\alpha\, q/\beta$. Zatem w obu ostatnich wypadkach, zastępując w φ każdą część równokształtną z ξ lub z η odpowiednio przez ξ^z lub η^z, zastępujemy tem samem ψ przez $\psi\, p_1/q_1,\ p_2/q_2 \dots p_n/q_n$.

Zatem jeżeli φ^z nie jest postaci $\varphi\, p_1/q_1,\ p_2/q_2 \dots p_n/q_n$, to φ^z jest postaci $\varphi\, p/\xi^z\, q/\eta^z$, c. b. d. o.

β. Jeżeli φ nie zawiera znaku „C", to $\varphi^z = \varphi$.

γ. Jeżeli φ jest podstawieniem pewnego wd układu U, to φ^z jest podstawieniem tegoż wd (α, β).

δ. Jeżeli φ jest postaci $C\xi\eta$ oraz φ, φ^z, ξ i ξ^z są konsekwencjami U, to η^z jest również konsekwencją U.

Istotnie, przy danem założeniu: albo $\eta^z = \eta$ albo — η zawiera dla pewnego wd η_1 część postaci $\eta_1\, p/\alpha\, q/\beta$ i wtedy φ^z ma postać $C\xi'\eta^z$, gdzie ξ' jest równokształtne z ξ^z albo jest podstawieniem ξ (zatem ξ' jest konsekwencją U). W obu wypadkach η^z jest konsekwencją U.

Łatwo obecnie okazać f. przy pomocy γ. i δ. jeżeli się uwzględni następujące znane twierdzenie:

Jeżeli jakieś wd φ jest konsekwencją pewnego układu wyrażeń teorji dedukcji, to pozostanie konsekwencją tegoż układu, jeżeli regułę podstawienia ograniczymy w tym sensie, że podstawiać wolno będzie jedynie w wyrażeniach danego układu.

Wróćmy obecnie do przykładu 1. po określeniu „φ^z".

Jak widzimy, dla wd φ, będącego podstawieniem tezy *2*, φ^z ma postać $CCp_1qCCqp_2Cq_1q_2$. Otóż konsekwencją φ^z jest każde wd, zatem, wobec f, jeżeli φ jest konsekwencją układu U o własnościach wymienionych w f., to każde wd jest konsekwencją U. A więc teza *2* nie jest konsekwencją takiego układu U, jeżeli niekażde wd jest konsekwencją U — c. b. d. o.

Analogiczną metodą można udowodnić twierdzenie następujące: jeżeli jakiś układ *U* wyrażeń teorji dedukcji spełnia pewną tabelkę *T* o skończonej liczbie wartości, oraz jeżeli dla pewnego naturalnego k wd C^kpp spełnia tabelkę *T*, to: bądź „*p*" jest konsekwencją *U*, bądź jakieś wd, które spełnia *T*, nie jest konsekwencją *U*, bądź jedno przynajmniej wyrażenie układu *U* zawiera więcej niż dwie zmienne.

*
* *

Na zakończenie warto zaznaczyć, zgodnie z pewną uwagą Prof. J. Łukasiewicza, że układ tez *1, 2, 3* i *4* daje się zastąpić przez układ tez *1, 2, 36* i *4*.

M. Wajsberg.

Ein Axiomensystem des dreiwertigen Aussagenkalküls.

Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz dans la séance du 19 Février 1931.

Meine polnische Abhandlung, die unter demselben Titel in dieser Nummer erscheint, enthält Beweise der Vollständigkeit und der Unabhängigkeit eines gewissen von mir aufgestellten Axiomensystems des dreiwertigen Aussagenkalküls.

Richtige Aussagen dieses dreiwertigen Kalküls sind alle Ausdrücke des Aussagenkalküls, die mit Hilfe zweier logischen Verknüpfungen: „Cpq" (Implikation) und „Np" (Negation) gebildet sind und die die folgende Tabelle erfüllen, deren ausgezeichnete Wert „1" ist.

C	*0*	*1*	*2*	*N*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*2*	*0*
2	*2*	*1*	*1*	*2*

Der hier betrachtete dreiwertige Aussagenkalkül ist von Prof. J. Łukasiewicz geschaffen worden [1]).

Ich beweise in der polnischen Abhandlung, dass jede wahre Aussage des dreiwertigen Aussagenkalküls eine Folgerung des folgenden Axiomensystems ist:

1 $CqCpq$
2 $CCpqCCqrCpr$
3 $CCCpNppp$
4 $CCNqNpCpq$

Zum System gehören zwei Schlussregeln: eine Einsetzungsregel, die die Aussagenvariablen in richtigen Aussagen durch andere Aussagen zu ersetzen erlaubt, sowie eine Abtrennungs-

[1]) Vergleiche J. Łukasiewicz und A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Comptes Rendus des séances de la Soc. des Sciences et des lettres de Varsovie XXIII. 1930. Cl. III. Ausserdem: J. Łukasiewicz. *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (daselbst).

regel: sind $C\alpha\beta$ und α richtige Aussagen, dann ist β eine richtige Aussage.

Um die Vollständigkeit des obigen Axiomensystems zu beweisen leite ich aus ihm erstens gewisse Thesen ab (Seiten 129—131 dieser Nummer), zweitens beweise ich:

a. Sind $C\beta C\beta\alpha$, $CN\beta CN\beta\alpha$ und $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$ Folgerungen (des gegebenen Axiomensystems), dann ist auch α eine Folgerung.

b. Bezeichnen wir, für beliebige Aussagen α und α' und jede Variable β, mit $\alpha\beta/\alpha'$ die Aussage, die aus α durch Einsetzung von α' für β entsteht, so gitt, sofern α zwei Variablen von verschiedener Form β und γ enthält:

1) ist $\alpha\beta/C\gamma\gamma$ eine Folgerung, so ist $C\beta C\beta\alpha$ eine Folgerung,

2) ist $\alpha\beta/NC\gamma\gamma$ eine Folgerung, so ist $CN\beta CN\beta\alpha$ eine Folgerung — sowie,

3) sind $\alpha\gamma/C\beta\beta$, $\alpha\gamma/NC\beta\beta$ und $\alpha\beta/\gamma$ Folgerungen so ist auch $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$ eine Folgerung.

Aus. a. und b. schliessen wir dass

c. Jede richtige Aussage des dreiwertigen Aussagenkalküls, die zwei Variablen von verschiedener Form enthält, ist eine Folgerung (des gegebenen Systems), wenn alle Substitutionen dieser Aussage, die weniger Variablen von verschiedener Form enthalten, Folgerungen sind. Daher genügt es zu zeigen, um die Vollständigkeit des Axiomensystems zu beweisen, dass alle richtige Aussagen des dreiwertigen Aussagenkalküls, die keine zwei Variablen von verschiedener Form enthalten, Folgerungen sind.

d. Ist α eine richtige Aussage des dreiwertigen Aussagenkalküls und sind alle Variablen, die in α vorkommen, mit β gleichgestaltet, dann sind die folgenden Aussagen Folgerungen: $\alpha\beta/C\beta\beta$, $\alpha\beta/NC\beta\beta$ und $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$; darauch schliessen wir, dass $C\beta C\beta\alpha$, $CN\beta CN\beta\alpha$ und $CC\beta N\beta CCN\beta\beta\alpha$ Folgerungen sind, folglich auch α (a.).

Aus c. und d. folgt endlich, dass

e. Jede richtige Aussage des dreiwertigen Aussagenkalküls eine Folgerung des gegebenen Axiomensystems ist.

Am Ende meiner polnischen Abhandlung beweise ich, dass das zweite Axiom: $CCpqCCqrCpr$ von jeder Aussagenmenge unabhängig ist, von welcher mindestens eine Aussage unabhängig ist und deren Elemente keine drei Variablen von verschiedener Form enthalten (als Beispiel kann die Menge dienen, die aus dem ersten, dritten und vierten Axiome besteht). Man kann ähnlich wie den letzten Satz auch den folgenden beweisen:

erfüllt eine Aussagenmenge M eine Tabelle T, die eine endliche Zahl von Werten enthält und für eine gewisse natürliche Zahl k auch von der Aussage $C^k pp$ erfüllt wird — dann ist entweder „p" eine Folgerung von M, oder eine gewisse Aussage, die T erfüllt, ist keine Folgerung von M, oder endlich ein gewisses Element von M enthält mehr als zwei Variablen von verschiedener Form.

Posiedzenie

z dnia 21 marca 1931 r.

Karol Borsuk i Stefan Mazurkiewicz.

O hyperprzestrzeni kontynuów.

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 21 marca 1931 r.

Streszczenie.

W nocie niniejszej dowodzimy następującego twierdzenia o hyperprzestrzeni danej przestrzeni E (t. zn. o przestrzeni zbiorów zamkniętych zawartych w E):

Jeżeli E jest kontynuum, wówczas hyperprzestrzeń jest łukowo spójna.

Karol Borsuk et Stefan Mazurkiewicz.

Sur l'hyperespace d'un continu.

Note présentée à la séance du 21 Mars 1931.

Soit E un espace métrique et compact. On appelle [1]) hyperespace de E et on désigne par 2^E l'espace dont les éléments sont les ensembles fermés de E.

Nous désignerons par ρ, δ la distance et le diamètre dans E, par ρ', δ' la distance et le diamètre dans 2^E.

[1]) Comp. Vietoris: Monatsh f. Math. Phys. 33 (1923) p. 49—62; Ważewski: Fund. Math. IV (1923), p. 214—245.

Théorème 1. *L'hyperespace d'un continu est „arcwise connected*[1]*)"*.

Supposons que E est un continu. Soient: C un ensemble fermé, connexe, D un continu et supposons que: $C \subset D \subset E$, $D - C \neq 0$. Désignons par $\Gamma(C, D)$ l'ensemble de tous les continus X tels que $C \subset X \subset D$. Soit $\eta > 0$.

Formons la suite d'ensembles fermés, connexes: $\{H_n(C, D, \eta)\}$ de manière suivante: (I) $H_1(C, D, \eta) = C$; (II) soit $K_n(C, D, \eta)$ l'ensemble de tous les points: $x \varepsilon D$ tels que $\rho[x, H_n(C, D, \eta)] \leq \eta$; l'ensemble $H_{n+1}(C, D, \eta)$ est le composant de $K_n(C, D, \eta)$ contenant $H_n(C, D, \eta)$. Je dis qu'il existe un premier entier $N(C, D, \eta)$ tel que pour $n \geq N(C, D, \eta)$ on a: $H_n(C, D, \eta) = D$. En effet, si pour un entier $n+1$ on a $D - H_{n+1}(C, D, \eta) \neq 0$, alors $D - K_n(C, D, \eta) \neq 0$, donc d'après un théorème de Janiszewski[2]) $H_{n+1}(C, D, \eta) \times \overline{[D - K_n(C, D, \eta)]} \neq 0$.

Soit $x_n \varepsilon H_{n+1}(C, D, \eta) \times \overline{[D - K_n(C, D, \eta)]}$, on a d'après la signification de $K_n(C, D, \eta)$ l'inégalité: $\rho(x_n, H_n(C, D, \eta)) = \eta$, donc pour $j < n$: $\rho(x_n, x_j) \geq \eta$.

L'ensemble $D \subset E$ étant compact, il en résulte que la suite $\{x_n\}$ est finie.

On a évidemment: $H_n(C, D, \eta) \varepsilon \Gamma(C, D)$ et

$$(1) \qquad \rho'[H_{n+1}(C, D, \eta), H_n(C, D, \eta)] = \underset{x \varepsilon H_{n+1}(C, D, \eta)}{\text{Maximum}} \rho[x, H_n(C, D, \eta)] = \eta.$$

On sait que $\Gamma(C, D)$ est un continu.

Posons maintenant:

$$(2) \qquad L_n(C, D) = H_n\left(C, D, \frac{1}{2}\rho'(C, D)\right)$$

$$(3) \qquad \Phi_1(C, D) = \sum_{(n)} \Gamma\{L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)\}$$

$$n = 1, 2 \ldots N\left(C, D, \frac{1}{2}\rho'(C, D)\right)$$

---

[1]) Un espace est „arcwise connected" si tout couple de ses points peut être rélié par un arc simple contenu dans l'espace considéré.

[2]) Janiszewski: Thèse. Paris 1911 p. 22, Th. IV.

$$\Phi_{m+1}(C, D) = \sum_{(n)} \Phi_m \{L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)\} \tag{4}$$

$$n = 1, 2 \ldots N\left(C, D, \frac{1}{2}\rho'(C, D)\right)$$

$$\Psi^{\cdot}(C, D) = \prod_{m=1}^{\infty} \Phi_m(C, D). \tag{5}$$

Je dis que $\Psi^{\cdot}(C, D)$ est un continu Péanien dans 2^E, contenant C et D.

En effet il résulte de (3) que $\Phi_1(C, D)$ est un continu contenant C et D; la formule (4) montre que si $\Phi_m(C, D)$ est un continu contenant C et D, il en de même pour $\Phi_{m+1}(C, D)$. Donc $\Phi_m(C, D)$ est un continu contenant C et D pour tout entier m et d'après (5) il en est de même pour $\Psi^{\cdot}(C, D)$.

Pour démontrer que $\Psi^{\cdot}(C, D)$ est Péanien, il suffit de démontrer, qu'il est pour tout $\eta' > 0$ décomposable en une somme finie de continus de diamètre $\leqq \eta'$ [1]), où ce qui revient au même, qu'il est, pour tout k naturel — décomposable en une somme finie de continus de diamètre $\leqq \frac{1}{2^k}\rho'(C, D)$. Or c'est assurément le cas pour $k = 1$, d'après (3) et la relation:

$$\delta'[\Gamma\{L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)\}] = \tag{6}$$

$$\rho'[L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)] = \frac{1}{2}\rho'(C, D).$$

Supposons que l'énoncé est vrai pour un entier k. On a alors:

$$\Psi^{\cdot}\{L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)\} = \sum_{i=1}^{i_n} Y_{ni} \tag{7}$$

$$n = 1, 2 \ldots N\left(C, D, \frac{1}{2}\rho'(C, D)\right)$$

les Y_{ni} étant des continus tels que:

---

[1]) Sierpiński: Fund. Math. I p. 44.

$$\delta'(y_{ni}) \leqq \frac{1}{2^k} \rho' [L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)] \tag{8}$$

donc d'après (1), (2):

$$\delta'(y_{ni}) \leqq \frac{1}{2^{k+1}} \rho'(C, D). \tag{9}$$

D'autre part (4), (5) entraînent

$$\Psi(C, D) = \sum_{(n)} \Psi\{L_n(C, D), L_{n+1}(C, D)\} = \sum_{(n)} \sum_{i=1}^{i_n} y_n \tag{10}$$

$$n = 1, 2 \ldots N\left(C, D, \frac{1}{2} \rho'(C, D)\right)$$

donc l'énoncé est vrai pour $k+1$.

Il en résulte que $\Psi(C, D)$ est un continu Péanien [1]).

E étant un continu soit A un sous-ensemble fermé de E, c.-à-d. $A \varepsilon 2^E$.

Soit p un point de A, et désignons par (p) l'ensemble composé du seul point p. D'après ce que nous avons démontré il existe un continu Péanien $\Psi((p), E) \subset 2^E$ contenant (p) et E. Ce continu peut être représenté par une fonction continue $X(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $X(0) = (p)$, $X(1) = E$.

Considérons la fonction continue: $A + X(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$. Elle représente un continu Péanien contenant: $A + X(0) = A$ et $A + X(1) = E$. Donc un élement quelconque de 2^E peut être relié à E par un continu Péanien dans 2^E. Il en résulte immédiatement que 2^E est „arcwise connected".

---

[1]) On voit facilement que pour $X \varepsilon \Psi(C, D)$, $X_1 \varepsilon \Psi(C, D)$ on a l'une des relations: $X \subset X_1$; $X_1 \subset X$.

Jan Łukasiewicz.

Dowód zupełności dwuwartościowego rachunku zdań.

Komunikat, przedstawiony dnia 21 marca 1931 r.

Streszczenie.

W komunikacie tym autor przedstawia elementarny dowód zupełności dwuwartościowego rachunku zdań, opartego na alternatywie i negacji jako na wyrazach pierwotnych.

Jan Łukasiewicz.

Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls.

Vorgelegt am 21 März 1931.

INHALT.

I. Das System.

§ 1. **Grundzeichen.** Das hier betrachtete gewöhnliche oder zweiwertige System des Aussagenkalküls ist ebenso, wie das in den „*Principia mathematica*" dargestellte System, auf der Negation und der Alternative als Grundbegriffen aufgebaut [1]). Definitionen anderer Zeichen, wie der Implikation, der Konjunktion und der Äquivalenz, werden in das System nicht eingeführt.

Die Aussagenvariablen bezeichne ich mit kleinen lateinischen Buchstaben: „*p*", „*q*", „*r*", „*s*" . . . . Die Negation der Aussage „*p*" bezeichne ich mit „*Np*" (lies „nicht-*p*"). Die Alternative der Aussagen „*p*" und „*q*" bezeichne ich mit „*Apq*" (lies „*p* oder *q*"). Sowohl die Negation einer Aussage als auch die Alternative zweier Aussagen sind Aussagen. Die Voranstellung der Funktoren „*N*" und „*A*" vor die ihnen zugehörigen Argumente macht alle Interpunktionszeichen, wie Klammern oder Punkte, entbehrlich [2]). Dadurch werden die Formeln kürzer und bekommen eine eindeutig bestimmte Struktur, was für metalogische Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist [3]).

In dieser klammerfreien Symbolik wird sich der Leser am leichtesten zurechtfinden, wenn er nur immer darauf achtgibt, dass zu einem jeden „*N*" eine-, und zu einem jeden „*A*" zwei Aussagen gehören, die unmittelbar jeden Buchstaben nachfolgen.

---

[1]) Vgl. A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica*, Vol. I, Cambridge 1910, p. 97. Anstatt des üblichen Ausdrucks „Disjunktion" gebrauche ich lieber den Terminus „Alternative".

[2]) L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, London 1922, behauptet (S. 126, These 5·461):

„Bedeutungsvoll ist die scheinbar unwichtige Tatsache, dass die logischen Scheinbeziehungen, wie $\vee$ und $\supset$, der Klammern bedürfen — im Gegensatz zu den wirklichen Beziehungen".

Dem gegenüber möchte ich feststellen, dass die logischen „Scheinbeziehungen", wie $\vee$ und $\supset$, d. h. Alternativen und Implikationen, der Klammern nicht bedürfen, sobald man eine geeignete Symbolik erwählt. Schon Frege, der Begründer des Aussagenkalküls, hat in seiner *Begriffsschrift* (1879) eine Symbolik dieses Kalküls erfunden, in der keine Klammern vorkommen.

[3]) Im Lehrbuch von D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XXVII, Berlin 1928), wird das Zeichen der Alternative „$\vee$" häufig fortgelassen (vgl. a. a. O. S. 9). So wird z. B. das „Assoziationsgesetz" sowohl in der Form „$X \vee (Y \vee Z) \rightarrow Y \vee (X \vee Z)$" (s. S. 23), als auch in der Form: „$X(YZ) \rightarrow Y(XZ)$" (s. S. 27) dargestellt. In der von mir eingeführten Bezeichnungsweise kann jenes Gesetz nur auf eine einzige Art ausgedrückt werden, nämlich durch die Formel: „$CApAqrAqApr$" (der Buchstabe „C" entspricht dem Zeichen der Implikation „$\rightarrow$"). In klammerfreien Formeln darf überhaupt kein Zeichen weggelassen werden.

§ 2. **Axiome.** Das Systems ist axiomatisch aufgebaut und auf drei Axiome sowie zwei Schlussregeln gegründet. Die Axiome lauten:

1 $ANANApqrANpr$
2 $ANANApqrANqr$
3 $ANANprANANqrANApqr$.

Einleuchtend sind diese Formeln nicht. Werden sie aber mit Hilfe der Implikation ausgedrückt, so können sie leicht zur Evidenz gebracht werden.

Die Implikation wird bekanntlich im System „*N*, *A*" in folgender Weise definiert:

$$Cpq = ANpq.$$

In Worten: „Wenn *p*, so *q*" bedeutet soviel als „nicht-*p* oder *q*" [4]). Auf Grund dieser Definition kann überall „*AN*" durch „*C*" und „*C*" durch „*AN*" ersetzt werden.

Wird diese Einsetzungsregel auf die Axiome *1*—*3* angewendet, so erhält man die Formeln:

I $CCApqrCpr$
II $CCApqrCqr$
III $CCprCCqrCApqr$.

In diesen Formeln kommen drei Ausdrücke vor:

(1) „$CApqr$" („wenn *p* oder *q*, so *r*") ist der Vordersatz von I und II und der Nachsatz von III.

(2) „Cpr" („wenn *p*, so *r*") ist der Nachsatz von I und der erste Vordersatz von III.

(3) „Cqr" („wenn *q*, so *r*") ist der Nachsatz von II und der zweite Vordersatz von III.

Die Formeln I—III besagen demnach: Ist eine Aussage vom Typus „wenn *p* oder *q*, so *r*" anerkannt, so dürfen nach I und II auch die Aussagen vom Typus „wenn *p*, so *r*" und „wenn *q*, so *r*" anerkannt werden. Sind umgekehrt Aussagen

---

[4]) Die älteste mir bekannte Gleichsetzung der Ausdrücke vom Typus „$AN\alpha\beta$" und „$C\alpha\beta$" findet sich bei Boethius, *De syllogismo hypothetico* (ed. Migne, Patr. lat. T. LXIV, 1891, p. 876): *Ea vero propositio quae dicit „aut non est A aut est B" ... est similis ei propositioni quae dicit „si est A, est B"*. (Vgl. dazu Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, I, S. 719).

vom Typus „wenn p, so r" und „wenn q, so r" anerkannt, so darf auch nach III die Aussage vom Typus „wenn p oder q, so r" anerkannt werden.

Diese Schlussweisen sind evident; folglich sind es auch die Formeln I—III. Wird nun in ihnen „C" durch „AN" ersetzt, so bekommen wir die Axiome 1—3.

§ 3. **Schlussregeln.** Zunächst einige terminologische Festsetzungen: Aus den Zeichen des Systems können Ausdrücke gebildet werden, die teils Aussagen sind, wie z. B. „p", „Np", „Apq", „$ANqr$", „$NApq$", teils keine Aussagen sind, wie z. B. „N", „A", „pq", „pN", „qAr". Ausdrücke, die Aussagen sind, nenne ich Formeln [5]). Formeln beliebiger Art bezeichne ich mit griechischen Buchstaben.

---

[5]) Der Ausdruck „Formel" wird gewöhnlich induktiv definiert. Nun aber hat Hr. S. Leśniewski, nachdem er bereits in seinen Universitätsvorlesungen über die Logistik 1924/25 eine strukturelle Definition der Formel für die Protothetik gegeben hatte, im Jahre 1930 die Aufgabe gestellt, für den klammerfreien Aussagenkalkül mit Definitionen eine strukturelle Definition der Formel zu finden. (Vgl. im Zusammenhang damit die Abhandlung Leśniewski's: *Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion*, die in diesen Sitzungsberichten demnächst erscheinen wird.) Diese Aufgabe hat in meinen Seminarübungen 1930 Hr. S. Jaśkowski teilweise gelöst, indem er eine rein strukturelle Definition der Formel für das System „N, C" ohne Definitionen fand, die übrigens ebensogut auf das System „N, A" anwendbar ist. Auf Grund der daran anknüpfenden Überlegungen des Hrn. C. Rozenberg sowie einer Bemerkung des Hrn. A. Tarski, hat Hr. Jaśkowski 1931 seine ursprüngliche Definition der Formel in folgender Weise vereinfacht (statt „C" schreibe ich „A"):

Ein aus den Buchstaben „N" und „A" sowie aus kleinen lateinischen Buchstaben, d. h. Variablen, gebildeter Ausdruck ist dann und nur dann eine Formel, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Anzahl der im Ausdruck vorkommenden Buchstaben „A" ist kleiner, als die Anzahl der Variablen.

(2) In jedem eigentlichen Abschnitt des Ausdrucks — d. h. in jedem Teil des Ausdrucks, der mit dem Anfangsbuchstaben beginnt und höchstens mit dem vorletzten Buchstaben abbricht — ist die Anzahl der Buchstaben „A" nicht kleiner, als die Anzahl der Variablen.

Aus den Bedingungen (1) und (2) ergibt sich, dass der letzte Buchstabe einer Formel stets eine Variable ist, und dass die Anzahl der Buchstaben „A" in einer Formel um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Variablen.

„N" spielt in der Definition keine Rolle.

Axiome und die aus ihnen gemäss den Schlussregeln abgeleiteten Formeln nenne ich Thesen. Thesen sind also die im System anerkannten Formeln.

Die zwei Schlussregeln, die zur Ableitung der Thesen dienen, sind die Einsetzungs- und die Abtrennungsregel.

Die Einsetzungsregel lautet: *Werden in einer These für gleichgestaltete Variablen* (z. B. für „p") *überall, wo sie vorkommen, beliebige gleichgestaltete Formeln* (z. B. „Apq") *eingesetzt, so ist das Ergebnis der Einsetzung eine These.*

Die Abtrennungsregel lautet: *Sind Formeln vom Typus „$AN\alpha\beta$" und „α" Thesen, so ist auch „β" eine These.*

Beide Schlussregeln sind evident. Die Abtrennungsregel geht in die bekannte Schlussregel *„modus ponens"* über, wenn man „AN" durch „C" ersetzt.

§ 4. **Technik der Ableitungen** [6]). Vor einer jeden abzuleitenden These, die alle mit laufenden Nummern versehen und dadurch als Thesen kenntlich sind, befindet sich eine nicht-numerierte Zeile, die von mir die „Beweiszeile" genannt wird. Jede Beweiszeile besteht aus zwei Teilen, die durch das Zeichen „$\times$" getrennt sind. Was vor und nach diesem Trennungszeichen steht, bezeichnet dieselbe Formel, nur auf eine andere Weise. Vor dem Trennungszeichen ist die Einsetzung angegeben, die an einer bereits gegebenen These ausgeführt werden soll. Z. B. in der Beweiszeile, die zur These *4* gehört, bedeutet der Ausdruck: „$2\,p/NApq,\ q/r,\ r/ANqr$", dass in *2* für „p" „$NApq$", für „q" „r" und für „r" „$ANqr$" eingesetzt werden soll. Die These, die durch diese Einsetzung entsteht, ist im Beweisgang der Kürze halber weggelassen; sie sieht folgendermassen aus:

$$4' \quad ANANANApqrANqrANrANqr$$

Der Ausdruck nach dem Trennungszeichen „$AN2-4$" deutet die Konstruktion ebenderselben These *4'* an, und zwar in einer solchen Weise, die einleuchtend klar macht, dass auf *4'* die Abtrennungsregel angewendet werden kann. Man sieht nämlich, dass These *4'* vom Typus „$AN\alpha\beta$" ist, wo „α" die These *2*

[6]) Vgl. dazu: J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII. 1930. Cl. III), S. 55, 56.

bezeichnet; also kann von ihr „β", oder *4*, als neue These abgetrennt werden.

In der Beweiszeile zur These *6*, und auch sonst öfters, ist die Abtrennungsregel zweimal angewendet. Der Ausdruck „rq/p" bedeutet, dass sowohl für „r" als auch für „q" „p" eingesetzt werden soll.

Schliesslich möchte ich hervorheben, dass alle Ableitungen lückenlos und vollständig formalisiert sind. Das heisst, die Richtigkeit der Ableitungen kann selbst von solchen Lesern kontrolliert werden, denen nur die Schlussregeln bekannt sind, nicht aber die Bedeutung der Zeichen [7]).

§ 5. **Abgeleitete Thesen.** Es werden nur diejenigen Thesen abgeleitet, die für den Vollständigkeitsbeweis nötig sind. Die Nummern dieser Thesen sind mit einem Sternchen bezeichnet. Zu solchen Thesen gehören auch die Axiome, die folglich auch mit dem Sternchen versehen sind.

**1* $ANANApqrANpr$

**2* $ANANApqrANqr$

**3* $ANANprANANqrANApqr$

$2\,p/NApq,\ q/r,\ r/ANqr \times AN2-4$

4 $ANrANqr$

$1\,q/r,\ r/ANqApr \times AN4\,r/Apr-5$

5 $ANpANqApr$

$3\,r/ANqApr,\ q/Apr \times AN5-AN4\,r/Apr-6$

6 $ANApAprANqApr$

$6\,p/Np,\ r/p,\ q/ANrANqr \times AN4\,rq/p-AN4-7$

**7* $ANpp$

$3\,rq/p \times AN7-AN7-8$

**8* $ANAppp$

$1\,r/Apq \times AN7\,p/Apq-9$

**9* $ANpApq$

$2\,r/Apq \times AN7\,p/Apq-10$

---

[7]) Die nachstehenden Ableitungen widersprechen m. E. der irrigen Meinung, dass formalisierte Beweise wegen ihrer ungewöhnlichen Länge praktisch undurchführbar seien. Man muss eben die Technik der Ableitungen vervollkommnen. Daran scheint man bisher nicht ernstlich gedacht zu haben, denn die meisten Beweise in der Mathematik und auch in der Logik (s. z. B. die „*Principia mathematica*") sind noch immer nach dem Vorbild Euklids stilisiert.

*10 ANqApq
3 p/q, r/Apq, q/p × AN10 — AN9 — 11
*11 ANAqpApq
11 q/Np × AN7 — 12
*12 ApNp
1 q/r, r/AqApr × AN10 q/Apr, p/q — 13
13 ANpAqApr
2 q/r, r/AqApr × AN10 q/Apr, p/q — 14
14 ANrAqApr
3 r/Apq, q/r × AN9 — 15
15 ANANrApqANAprApq
15 r/Apq × AN7 p/Apq — 16
*16 ANApApqApq
15 p/q, q/Apr × AN14 — 17
17 ANAqrAqApr
3 r/AqApr, q/Aqr × AN13 — AN17 — 18
*18 ANApAqrAqApr
18 p/Np, q/p, r/q × AN9 — 19
*19 ApANpq
3 r/ANNpq × AN19 p/Np — AN10 p/NNp — 20
*20 ANApqANNpq
20 p/Np, q/p × AN7 — 21
*21 ANNNpp
18 p/NANqr, q/Nq, r/Apr × AN17 q/Nq — 22
22 ANqANANqrApr
3 r/ANANqrApr × AN13 q/NANqr — AN22 — 23
23 ANApqANANqrApr
23 q/Np, r/q × AN12 — 24
*24 ANANNpqApq
18 p/NApq, q/NANqr, r/Apr × AN23 — 25
25 ANANqrANApqApr
25 q/Aqr, r/Arq × AN11 p/r — 26
*26 ANApAqrApArq
23 p/NApAqr, q/ApArq, r/s × AN26 — 27
27 ANANApArqsANApAqrs
27 s/ArApq × AN18 q/r, r/q — 28
28 ANApAqrArApq
26 p/NApAqr, q/r, r/Apq × AN28 — 29
*29 ANApAqrAApqr
25 q/AsAqr, r/AAsqr × AN29 p/s — 30

*30 *ANApAsAqrApAAsqr*
23 *p/NAqp, q/Apq* × *AN*11 — 31
31 *ANANApqrANAqpr*
31 *q/Arq, r/AqApr* × *AN*28 *q/r, r/q* — 32
32 *ANAArqpAqApr*
25 *q/AqAsr, r/ArAqs* × *AN*28 *p/q, q/s* — 33
33 *ANApAqAsrApArAqs*
33 *p/NAApqr, s/r, r/p* × *AN*32 *r/p, p/r* — 34
*34 *ANAApqrApAqr*
25 *q/AAsqr, r/AsAqr* × *AN*34 *p/s* — 35
*35 *ANApAAsqrApAsAqr*
31 *q/Aqr, r/ApArq* × *AN*26 — 36
36 *ANAAqrpApArq*
26 *p/NAAqrp, q/p, r/Arq* × *AN*36 — 37
37 *ANAAqrpAArqp*
25 *q/AAqrs, r/AArqs* × *AN*37 *p/s* — 38
*38 *ANApAAqrsApAArqs*
11 *q/Np, p/Apq* × *AN*9 — 39
39 *AApqNp*
20 *p/Apq, q/Np* × *AN*39 — 40
*40 *ANNApqNp*
11 *q/Nq, p/Apq* × *AN*10 — 41
41 *AApqNq*
20 *p/Apq, q/Nq* × *AN*41 — 42
*42 *ANNApqNq*
18 *p/NApq, q/NNp, r/q* × *AN*20 — 43
43 *ANNpANApqq*
28 *p/NNp, q/NApq, r/q* × *AN*43 — 44
44 *AqANNpNApq*
20 *p/q, q/ANNpNApq* × *AN*44 — 45
*45 *ANNqANNpNApq*

§ 6. **Eine Bemerkung zum System der „Principia mathematica".** Im Aussagenkalkül der *„Principia"* wird bekanntlich noch vor der Aufstellung der Axiome die Implikation definiert, so dass die formalen Axiome des Systems mittels der Zeichen der Implikation und der Alternative dargestellt sind. Es sind dies die folgenden fünf Axiome: [8])

[8]) Vgl. a. a. O. S. 100, 101.

*1·2 $CApp p$
*1·3 $CqApq$
*1·4 $CApqAqp$
*1·5 $CApAqrAqApr$
*1·6 $CCqrCApqApr$

Wie Hr. B e r n a y s gezeigt hat (was mir übrigens schon früher bekannt war), ist *1·5 aus den übrigen Axiomen ableitbar [9]).

Die formalen Axiome der *„Principia"* können nun aus unseren Axiomen *1—3* abgeleitet werden, sofern man „AN" durch „C" ersetzt. Und zwar erhält man *1·2 aus These *8*, *1·3 aus *10*, *1·4 aus *11* (nach Vertauschung der Buchstaben „p" und „q"), *1·5 aus *18* und *1·6 aus *25*. Daraus ersieht man schon, dass die Axiome *1—3*, oder nach Einführung der Implikation die im § 2 besprochenen Formeln I—III, zur Begründung des Aussagenkalküls ausreichen.

Es lohnt sich vielleicht zu bemerken, dass im Gegensatz zum Axiomensystem der *„Principia"* die Formeln I — III mit einander eng verwandt sind und zusammen e i n e Idee ausdrücken: die Idee nämlich, dass Aussagen vom Typus „wenn p oder q, so r" zweien Aussagen vom Typus „wenn p, so r" und „wenn q, so r" äquivalent sind.

II. Vorbemerkungen zum Vollständigkeitsbeweis.

§ 7. **Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit** [10]). *Ein auf gegebenen Axiomen und Schlussregeln errichtetes System des Aussagenkalküls heisst dann und nur dann* v o l l s t ä n d i g, *wenn jede Formel des Systems entweder aus den Axiomen gemäss*

---

[9]) P. B e r n a y s, *Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica"* (Math. Zeitschrift, Bd. 25, Berlin 1926), S. 312, 313. Vgl. dazu meine Note: *Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction* (Annales de la Société Polonaise de Math., T. III, Kraków 1925), S. 149. Im Lehrbuch von D. H i l b e r t und W. A c k e r m a n n ist *1·3 durch „$CpApq$" ersetzt (s. a. a. O. S. 22).

[10]) Zu den hier entwickelten Begriffen der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit vgl. E. L. P o s t, *Introduction to a general theory of elementary propositions* (Am. Journ. of. Math. 43, 1921), S. 169 ff. Vgl. ferner A. T a r s k i, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften* I. (Monatsh. f. Math. u. Phys. 37, 1930), S. 387 f. und S. 390 (Sonderdruck S. 27 f. und S. 30).

den Schlussregeln ableitbar ist, oder zu den Axiomen hinzu gefügt die Ableitbarkeit a l l e r *Formeln nach sich zieht.*

In dem hier angegebenen Sinne sind auch diejenigen Systeme vollständig, aus deren Axiomen a l l e Formeln ableitbar sind. Es ist jedoch klar, dass solche Systeme kein Interesse darbieten. Wert für uns hat nur die Vollständigkeit widerspruchsfreier Systeme, und *als* w i d e r s p r u c h s f r e i *bezeichnen wir ein System dann und nur dann, wenn* n i c h t a l l e *Formeln des Systems aus den Axiomen ableitbar sind.*

Die beiden soeben angeführten Definitionen, die der Vollständigkeit und die der Widerspruchsfreiheit, sind so gefasst, dass sie das Vorkommen irgend einer bestimmten logischen Funktion im System nicht voraussetzen. Dadurch erhalten die genannten Definitionen die grösste Allgemeinheit, indem sie auf beliebige Systeme des Aussagenkalküls angewendet werden können, selbst auf solche, in denen die Negation nicht vorkommt [11]). Zu solchen Systemen gehört u. a. das auf der S h e f f e r'schen Disjunktion gegründete System N i c o d's, ferner gewisse fragmentarische Systeme des Aussagenkalküls, wie der sogenannte „beschränkte" Aussagenkalkül [12]), sowie das vom Hrn. S. L e ś n i e w s k i axiomatisierte System der „Äquivalenzensätze" [13]).

Wir könnten ganz einfach v o r a u s s e t z e n, dass das von uns betrachtete System widerspruchsfrei ist. Da aber der Beweis der Widerspruchsfreiheit mit keinen besonderen Schwierigkeiten verknüpft ist, so wollen wir diesen Beweis im Folgenden skizzieren.

§ 8. **Beweis der Widerspruchsfreiheit.** Die Widerspruchsfreiheit eines Systems des Aussagenkalküls kann bewiesen werden, wenn man eine Eigenschaft E auffindet, die folgende Bedingungen erfüllt: (1) Die Eigenschaft E kommt allen Axiomen des Systems

---

[11]) Die übliche Definition der Widerspruchsfreiheit ist mit Hilfe der Negation formuliert und besagt, dass in einem widerspruchsfreien System keine zwei Formeln vom Typus „α" und „$N\alpha$" abgeleitet werden können. Es kann leicht nachgewiesen werden (auf Grund der These *19*, s. oben § 5), dass in unserem System die beiden Definitionen der Widerspruchsfreiheit übereinstimmen.

[12]) Vgl. J. Ł u k a s i e w i c z und A. T a r s k i, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* (Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII. 1930. Cl. III), Sonderdruck S. 13.

[13]) Vgl. S. L e ś n i e w s k i, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik* (Fundamenta Math. XIV, Warszawa 1929), S. 15-30.

zu. (2) Die Eigenschaft E ist in bezug auf die Schlussregeln des Systems „hereditär", d. h. sie vererbt sich auf alle Thesen, die aus Thesen abgeleitet sind, denen jede Eigenschaft zukommt. (3) Die Eigenschaft E kommt der Variablen „p" nicht zu.

Der Sinn dieser Bedingungen ist evident. Können aus den Axiomen nur solche Thesen abgeleitet werden, denen die Eigenschaft E zukommt, und hat die Variable „p" diese Eigenschaft nicht, so ist „p" aus den Axiomen nicht ableitbar. Das System ist somit widerspruchsfrei, da nicht alle Formeln aus den Axiomen ableitbar sind.

Eine solche Eigenschaft E kann für das von uns betrachtete System auf Grund der gewöhnlichen „zweiwertigen Matrix" leicht konstruiert werden. Wir wählen uns zwei beliebige konstante „Werte" aus, etwa „0" und „1", und treffen folgende Bestimmungen:

$$A00 = 0, \qquad A10 = 1, \qquad N0 = 1,$$
$$A01 = 1, \qquad A11 = 1, \qquad N1 = 0.$$

A	0	1	N
0	0	1	1
1	1	1	0

Diese Gleichungen sind in der nebenstehenden Tabelle zusammengestellt (das erste Argument von „A" steht links, das zweite oben).

Wird in einer Formel „α" für jede Variable einer von den Werten „0" oder „1" eingesetzt, so nenne ich den auf diese Weise entstandenen Ausdruck eine dem „α" zugehörige W e r t f o r m e l. Jede Wertformel, sofern sie nicht einer Variablen zugehört, lässt sich gemäss der obigen Tabelle r e d u z i e r e n, d. h. abkürzen, und das Endergebnis der sukzessiven Reduktionen ist jedesmal entweder „0" oder „1". So entsteht z. B. aus der Formel „$ANpq$" durch die Einsetzung $p/1$, $q/0$ die Wertformel „$AN10$", die nach der Reduktion in „0" übergeht.

Wir sagen nun: Eine Formel hat die Eigenschaft E dann und nur dann, wenn a l l e ihr zugehörigen Wertformeln durch Reduktion gemäss der obigen Tabelle den Wert „1" ergeben. So hat z. B. die These *9* „$ANpApq$" die Eigenschaft E, denn wir bekommen:

Für	$p/0,\ q/0$:	$AN0A00 = A10 = 1,$
„	$p/0,\ q/1$:	$AN0A01 = A11 = 1,$
„	$p/1,\ q/0$:	$AN1A10 = A01 = 1,$
„	$p/1,\ q/1$:	$AN1A11 = A01 = 1.$

Hat eine Formel „α" die Eigenschaft E, so kann „α" gleich „1" gesetzt werden.

Die Eigenschaft E erfüllt die drei oben angegebenen Bedingungen. Erstens kommt sie den Axiomen *1—3* zu, was unmittelbar verifiziert werden kann. Zweitens kommt sie der Variablen „p" nicht zu, da für $p/0$ die dem „p" zugehörige Wertformel gleich „0" ist. Drittens ist E in bezug auf die Schlussregeln der Einsetzung und Abtrennung hereditär. Für die Einsetzungsregel ist diese Behauptung evident. Dass sie auch für die Abtrennungsregel gilt, kann folgendermassen gezeigt werden: Haben zwei Formeln vom Typus „$AN\alpha\beta$" und „α" die Eigenschaft E, so ist:

$$AN\alpha\beta = 1 \qquad \text{sowie} \qquad \alpha = 1.$$

Daraus bekommen wir:

$$AN1\beta = A0\beta = 1.$$

Die letztere Gleichung aber ist nur dann richtig, wenn „β" gleich „1" ist, also die Eigenschaft E besitzt.

Damit ist der Beweis der Widerspruchsfreiheit unseres Systems erbracht.

§ 9. **Grundidee des Vollständigkeitsbeweises.** In einem unvollständigen System des Aussagenkalküls gibt es Formeln, die weder aus den Axiomen ableitbar sind noch zu den Axiomen hinzugefügt die Ableitbarkeit aller Formeln nach sich ziehen. Solche Formeln wollen wir freie Formeln nennen [14]). Wenn wir also annehmen, dass unser System unvollständig ist, so müssen in ihm freie Formeln vorkommen. Da aber alle Formeln aus einer endlichen Anzahl von Buchstaben bestehen, so muss

---

[14]) So ist z. B. in meinem dreiwertigen System des Aussagenkalküls die Formel „$CCNppp$" eine freie Formel. Vgl. dazu meine in Fussnote [6]) zitierte Arbeit *Philosophische Bemerkungen* S. 67, sowie die in Fussnote [12]) zitierte Mitteilung von Łukasiewicz und Tarski, Sonderdr. S. 12. Vgl. ferner die polnische Abhandlung von M. Wajsberg, *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań* (Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIV. 1931. Cl. III.).

A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preuss. Akad. d. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1930. II.), hat ein System des Aussagenkalküls axiomatisch entwickelt, in welchem u. a. die Formel „$ApNp$" (der Satz vom ausgeschlossenen Dritten) eine freie Formel ist.

es unter diesen freien Formeln wenigstens eine geben, von der keine andere freie Formel kürzer ist, d. h. aus einer kleineren Anzahl von Buchstaben besteht. Wird nun gezeigt, dass es in unserem System keine kürzeste freie Formel geben kann, so gibt es überhaupt im System keine freien Formeln und der Vollständigkeitsbeweis ist damit erbracht.

Die Durchführung des Beweises beruht darauf, dass man alle Formeltypen einzeln durchgeht und daraufhin feststellt, dass die kürzeste freie Formel keinem Typus angehören kann und daher im System nicht vorkommt. Der hier gegebene Vollständigkeitsbeweis ist ebensowenig formalisiert, wie der oben skizzierte Beweis der Widerspruchsfreiheit, und deshalb ist er nicht so streng, wie die Ableitung der Thesen unseres Systems aus den Axiomen. Ich war jedoch bestrebt die intuitiven Übergänge im Beweisgang möglichst klar zu gestalten, so dass ich hoffen kann, dass der Beweis sogar dem Anfänger keine Schwierigkeiten bereiten wird.

§ 10. **Zusammenstellung der Formeltypen.** Jede Formel unseres Systems ist entweder eine Variable, z. B. „p", oder eine Negation vom Typus „$N\alpha$", oder eine Alternative vom Typus „$A\alpha\beta$". In den zuletzt genannten Formeltypen kann „α" wiederum entweder eine Variable sein, also „p", oder eine Negation vom Typus „$N\alpha$", oder eine Alternative vom Typus „$A\alpha\beta$", so dass wir aus den vorhergehenden speziellere Formeltypen bekommen, nämlich:

aus „$N\alpha$"	bekommen wir:	„Np",	„$NN\alpha$",	„$NA\alpha\beta$";
„ „$A\alpha\beta$"	„ „	„$Ap\alpha$",	„$AN\alpha\beta$",	„$AA\alpha\beta\gamma$".

Diese Spezifikation der Formeltypen setzen wir solange fort, als es für unseren Beweis nötig ist. Im Ganzen werden wir folgende 36 Formeltypen zu untersuchen haben:

F 1	p	F 21	Np
F 2	$N\alpha$	F 22	$NN\alpha$
F 3	$A\alpha\beta$	F 23	$NA\alpha\beta$
F 31	$Ap\alpha$	F 321	$ANp\alpha$
F 32	$AN\alpha\beta$	F 322	$ANN\alpha\beta$
F 33	$AA\alpha\beta\gamma$	F 323	$ANA\alpha\beta\gamma$

F 311	$A p p$	F 3211	$A N p p$
F 312	$A p N \alpha$	F 3212	$A N p N \alpha$
F 313	$A p A \alpha \beta$	F 3213	$A N p A \alpha \beta$
F 3121	$A p N p$	F 32121	$A N p N p$
F 3122	$A p N N \alpha$	F 32122	$A N p N N \alpha$
F 3123	$A p N A \alpha \beta$	F 32123	$A N p N A \alpha \beta$
F 3131	$A p A p \alpha$	F 32131	$A N p A p \alpha$
F 3132	$A p A N \alpha \beta$	F 32132	$A N p A N \alpha \beta$
F 3133	$A p A A \alpha \beta \gamma$	F 32133	$A N p A A \alpha \beta \gamma$
F 31321	$A p A N p \alpha$	F 321321	$A N p A N p \alpha$
F 31322	$A p A N N \alpha \beta$	F 321322	$A N p A N N \alpha \beta$
F 31323	$A p A N A \alpha \beta \gamma$	F 321323	$A N p A N A \alpha \beta \gamma$

Alle Formeltypen sind mit einem „F" und nachfolgenden Ziffern so bezeichnet, dass man leicht herausfinden kann, aus welchen allgemeineren Typen die spezielleren entstehen. Und zwar bezeichnet „1" die Variable „p", „2" den Buchstaben „N", „3" den Buchstaben „A"; es entspricht also der Bezeichnung „F 3132" ein Formeltypus, der mit „$A p A N$" beginnt, dann kommen griechische Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge, die nicht mehr mit Ziffern bezeichnet sind. Betrachtet man nun z. B. die Formeltypen F 31321, F 31322, F 31323, so sieht man sofort, dass sie alle aus dem Formeltypus F 3132 hervorgehen, indem das „α" in F 3132 in die drei möglichen Fälle zerfällt: „p", „$N \alpha$", „$A \alpha \beta$". Wird daher bewiesen, dass die kürzeste freie Formel weder zum Typus F 31321 noch F 31322 noch F 31323 gehört, so ist auch dadurch der Beweis geliefert, dass sie nicht zum Typus F 3132 gehört. Wird dasselbe von den drei ersten Formeltypen, F 1, F 2, F 3 gezeigt, so ist auch damit der Vollständigkeitsbeweis gegeben.

Aus der Darstellung des Vollständigkeitsbeweises wird klar hervorgehen, dass die Untersuchung der hier zusammengestellten Formeltypen zum Beweis ausreicht.

§ 11. **Übersicht der Formeltypen.** Diese Übersicht bezweckt dem Leser eine Idee zu geben, wie der Vollständigkeitsbeweis durchgeführt werden wird. Und zwar, unter den oben angeführten 36 Formeltypen befinden sich

a) 4 Formeltypen:

F 3211, F 3121, F 32131, F 31321,

die aus unseren Axiomen ableitbar sind; die kürzeste freie Formel kann also diesen Formeltypen nicht angehören, denn sie stellen überhaupt keine freien Formeln dar.

b) Es gibt ferner 4 Formeltypen:

F 1, F 21, F 311, F 32121,

die zu den Axiomen hinzugefügt die Ableitbarkeit aller Formeln nach sich ziehen; die kürzeste freie Formel kann also keinem von diesen Typen angehören.

c) Von den folgenden 6 Formeltypen:

F 22, F 23, F 322, F 323, F 3131, F 321321,

kann direkt nachgewiesen werden, dass sie gewissen kürzeren Formeltypen äquivalent sind und daher, was weiter unten gezeigt werden wird, nicht die kürzesten freien Formeln darstellen können.

d) Weitere 8 Formeltypen:

F 3122, F 3123, F 32122, F 32123
F 31322, F 31323, F 321322, F 321323,

sind solchen Formeltypen von gleicher Buchstabenanzahl äquivalent, von denen schon feststeht, dass sie nicht die kürzesten freien Formeln darstellen.

e) 3 Formeltypen, in denen zwei „A" nebeneinanderstehen:

F 33, F 3133, F 32133,

werden durch äquivalente Transformationen auf solche Formeltypen von gleicher Buchstabenanzahl zurückgeführt, in denen dem ersten „A" nicht mehr ein zweites „A", sondern entweder „p" oder „N" nachfolgt.

f) Die übriggebliebenen 11 Formeltypen:

F 2, F 3, F 31, F 32, F 321, F 312, F 313,
F 3212, F 3213, F 3132, F 32132,

brauchen nicht besonders untersucht zu werden, denn alle spezielleren Fälle, die aus ihnen hervorgehen, sind schon unter den Punkten a) — e) berücksichtigt.

§ 12. **Einige Hilfssätze.** Im Folgenden werden wir uns häufig auf gewisse Hilfssätze berufen, in denen der Begriff der Äquivalenz vorkommt.

Ich betrachte die Formeln „α" und „β" (mit Rücksicht auf unser System) als einander äquivalent, in Zeichen

$$\alpha \sim \beta,$$

wenn nach Hinzufügung der einen Formel zu unserem System die andere in ihm abgeleitet werden kann.

Eine hinreichende, wenn auch nicht notwendige Bedingung der Äquivalenz „$\alpha \sim \beta$" ist die, dass die Formeln:

$$AN\alpha\beta \quad \text{und} \quad AN\beta\alpha$$

Thesen unseres Systems sind. Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, und wird die eine von den Formeln, „α" oder „β", zum System hinzugefügt, so kann die andere durch Abtrennung aus den obigen Thesen gewonnen werden [15]).

Ich betrachte ferner die Formel „α" als äquivalent zweien Formeln, „β" und „γ", in Zeichen:

$$\alpha \sim \beta, \gamma,$$

wenn nach Hinzufügung von „α" zu unserem System sowohl „β" als auch „γ" abgeleitet werden kann, sowie umgekehrt, nach Hinzufügung von „β" und „γ" zum System — „α" abgeleitet werden kann.

Eine hinreichende Bedingung der Äquivalenz „$\alpha \sim \beta, \gamma$" ist die, dass die Formeln:

$$AN\alpha\beta, \quad AN\alpha\gamma, \quad AN\beta AN\gamma\alpha,$$

Thesen unseres Systems sind.

Der erste von unseren Hilfssätzen lautet:

H 1. Sind zwei Formeln „α" und „β" einander äquivalent, und ist „α" eine freie Formel, so ist auch „β" eine freie Formel.

Beweis: Ist „α" eine freie Formel, so ist sie aus den Axiomen nicht ableitbar; folglich ist auch „β" aus den Axiomen nicht ableitbar, denn aus „β" kann „α" abgeleitet werden. Ist ferner

[15]) Dass diese Bedingung nicht notwendig ist, erhellt aus der Untersuchung im § 15, die ein Gegenbeispiel bringt. In den meisten Fällen werden wir jedoch von dieser Bedingung Gebrauch machen, um gegebene Äquivalenzen nachzuweisen.

„α" eine freie Formel, so sind nach ihrer Hinzufügung zum System nicht alle Formeln ableitbar; folglich hat auch „β" dieselbe Eigenschaft, denn „β" ist aus „α" ableitbar. Die Formel „β" ist daher weder aus den Axiomen ableitbar noch zieht sie, zu den Axiomen hinzugefügt, die Ableitbarkeit aller Formeln nach sich, d. h., „β" ist eine freie Formel.

Der zweite Hilfssatz lautet:

H 2. Ist die Formel „α" zweien Formeln „β" und „γ" äquivalent, und ist „α" eine freie Formel, so ist wenigstens eine von den Formeln „β" oder „γ" eine freie Formel.

Beweis: Ist „α" eine freie Formel, so ist sie aus den Axiomen nich ableitbar; folglich ist wenigstens eine von den Formeln „β" oder „γ" aus den Axiomen nicht ableitbar, denn sonst wäre auch „α" ableitbar. Ist ferner „α" eine freie Formel, so sind nach ihrer Hinzufügung zu den Axiomen nicht alle Formeln ableitbar; folglich haben auch „β" und „γ" dieselbe Eigenschaft, da sie aus „α" ableitbar sind. Daraus ergibt sich, dass wenigstens eine von den Formeln „β" oder „γ" eine freie Formel ist.

Der dritte Hilfssatz lautet:

H 3. Sind die Formeln „α" und „β" einander äquivalent, und ist „β" kürzer als „α," so ist „α" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis: Ist „α" eine freie Formel, so ist nach H 1 auch „β" eine freie Formel, da sie aber kürzer ist als „α", so ist „α" nicht die kürzeste freie Formel.

Der vierte Hilfssatz lautet:

H 4. Ist die Formel „α" zweien Formeln „β" und „γ" äquivalent, und sind die beiden Formeln „β" und „γ" kürzer als „α", so ist „α" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis: Ist „α" eine freie Formel, so ist nach H 2 wenigstens eine von den Formeln „β" oder „γ" eine freie Formel, da aber beide kürzer sind als „α", so ist „α" nicht die kürzeste freie Formel.

III. Der Vollständigkeitsbeweis.

§ 13. **Variable und Negation. Formeltypen F 1 und F 2.** Nach den Vorbemerkungen, die im Abschnitt II gegeben wurden, kann nunmehr der Vollständigkeitsbeweis ohne Schwierigkeit durchgeführt werden. Man muss nur nachweisen, dass in unserem

System keine kürzeste freie Formel vorkommt; daraus ergibt sich sofort, dass das System überhaupt keine freien Formeln enthält, also vollständig ist.

Die kürzeste freie Formel, wenn sie überhaupt in unserem System vorkommt, muss entweder vom Typus einer Variablen sein (F 1), oder vom Typus einer Negation (F 2), oder vom Typus einer Alternative (F 3).

* * *

F 1: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „p".

Beweis: „p" ist keine freie Formel, denn durch Einsetzung sind aus „p" alle Formeln ableitbar.

* * *

Der Beweis des Satzes, dass die kürzeste freie Formel nicht vom Typus einer Negation ist, zerfällt in 3 Fälle: F 21, F 22, F 23.

F 21: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „Np"; wird nämlich „Np" zu den Axiomen hinzugefügt, so bekommt man „p", also alle Formeln.

Beweis:

I Np
  I $p/Np \times$ II
II NNp
  21 $\times$ AN II — III
III p

Die Beweiszeile zu II besagt, dass II durch die Einsetzung p/Np aus I entstanden ist.

F 22: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$NN\alpha$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$NN\alpha \sim \alpha\,.$$

Nun ist „α" um zwei „N" kürzer als „$NN\alpha$"; folglich ist nach H 3 eine Formel vom Typus „$NN\alpha$" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

  21 $p/\alpha \times$ IV
IV $ANNN\alpha\alpha$
  12 $p/N\alpha \times$ V
V $AN\alpha NN\alpha$

F 23: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$NA\alpha\beta$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$NA\alpha\beta \sim N\beta,\ N\alpha.$$

Nun sind sowohl „$N\beta$" als auch „$N\alpha$" wenigstens um zwei Buch staben kürzer als „$NA\alpha\beta$" („α" und „β" brauchen keine Variablen zu sein, sondern sind beliebige, auch zusammengesetzte Formeln); folglich ist nach H 4 eine Formel vom Typus „$NA\alpha\beta$" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

$$\begin{array}{ll}
 & 42\, p/\alpha,\ q/\beta \times \mathrm{VI} \\
\mathrm{VI} & ANNA\alpha\beta N\beta \\
 & 40\, p/\alpha,\ q/\beta \times \mathrm{VII} \\
\mathrm{VII} & ANNA\alpha\beta N\alpha \\
 & 45\, q/\beta,\ p/\alpha \times \mathrm{VIII} \\
\mathrm{VIII} & ANN\beta ANN\alpha NA\alpha\beta
\end{array}$$

Da nun die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 21 noch F 22 noch F 23 sein kann, so ist der Satz bewiesen:

F 2: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$N\alpha$".

§ 14. **Alternative. Formeltypen F 33, F 322 und F 323.** Der Beweis des Satzes, dass die kürzeste freie Formel nicht vom Typus einer Alternative ist, ist ziemlich umständlich. Wir betrachten zuerst den Fall F 33.

Es gilt die Äquivalenz:

$$AA\alpha\beta\gamma \sim A\alpha A\beta\gamma.$$

Beweis:

$$\begin{array}{ll}
 & 34\, p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \mathrm{IX} \\
\mathrm{IX} & ANAA\alpha\beta\gamma A\alpha A\beta\gamma \\
 & 29\, p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \mathrm{X} \\
\mathrm{X} & ANA\alpha A\beta\gamma AA\alpha\beta\gamma
\end{array}$$

Auf Grund dieser Äquivalenz kann jedesmal die Anzahl der am Anfang stehenden „A" um Eins verringert werden. Diese Transformation kann man solange fortsetzen, bis nach dem ersten „A" nicht mehr ein zweites „A" folgt, sondern entweder eine Variable oder eine Negation. Alle unseren Formeln bestehen ja aus einer endlichen Anzahl von Buchstaben. Es muss betont werden, dass durch diese Transformation die Anzahl der Buchstaben in den Formeln nicht verändert wird. Daraus ergibt sich, unter Berücksichtigung von H 1:

F 33: Wird angenommen, dass die kürzeste freie Formel vom Typus F 33 ist, so gibt es auch eine kürzeste freie Formel vom Typus F 31 oder F 32.

Dadurch wird F 33 auf F 31 und F 32 zurückgeführt.

* * *

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Formeltypen F 322 und F 323.

F 322: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANN\alpha\beta$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ANN\alpha\beta \sim A\alpha\beta.$$

„$A\alpha\beta$" ist um zwei „N" kürzer als „$ANN\alpha\beta$"; folglich ist nach H 3 eine Formel vom Typus „$ANN\alpha\beta$" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

$$\begin{array}{ll} & 24\, p/\alpha,\ q/\beta \times \mathrm{XI} \\ \mathrm{XI} & ANANN\alpha\beta A\alpha\beta \\ & 20\, p/\alpha,\ q/\beta \times \mathrm{XII} \\ \mathrm{XII} & ANA\alpha\beta ANN\alpha\beta \end{array}$$

F 323: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANA\alpha\beta\gamma$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ANA\alpha\beta\gamma \sim AN\alpha\gamma,\ AN\beta\gamma.$$

Sowohl „$AN\alpha\gamma$" als auch „$AN\beta\gamma$" sind wenigstens um zwei Buchstaben kürzer als „$ANA\alpha\beta\gamma$"; daher ist nach H 4 eine Formel vom Typus „$ANA\alpha\beta\gamma$" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

$$\begin{array}{ll} & 1\, p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \mathrm{XIII} \\ \mathrm{XIII} & ANANA\alpha\beta\gamma AN\alpha\gamma \\ & 2\, p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \mathrm{XIV} \\ \mathrm{XIV} & ANANA\alpha\beta\gamma AN\beta\gamma \\ & 3\, p/\alpha,\ r/\gamma,\ q/\beta \times \mathrm{XV} \\ \mathrm{XV} & ANAN\alpha\gamma ANAN\beta\gamma ANA\alpha\beta\gamma \end{array}$$

Der Beweis dieser Äquivalenz beruht direkt auf den Axiomen unseres Systems.

§ 15. **Das „α" in den Formeltypen F 31 und F 321.** Um den Vollständigkeitsbeweis zu Ende zu führen, müssen wir noch nachweisen, dass die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 31 noch F 321 ist. Wird das Zweite nachgewiesen, so ergibt sich daraus zusammen mit den soeben gegebenen Beweisen für F 322 und F 323, dass die kürzeste freie Formel nicht vom Typus F 32 ist. Wird dasselbe auch für F 31 gezeigt, so ist das ganze F 3 erledigt und der Vollständigkeitsbeweis durchgeführt.

In den Formeltypen F 31 und F 321, d. h. in „$Ap\alpha$" und „$ANp\alpha$", sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder enthält „α" eine mit „p" gleichgestaltete Variable, oder nicht. Wir betrachten zuerst den zweiten Fall.

Enthält „α" keine mit „p" gleichgestaltete Variable, so ändert sich „α" nicht, wenn für „p" eine beliebige Formel eingesetzt wird. Wird somit „$Ap\alpha$" resp. „$ANp\alpha$" zum System hinzugefügt, so kann aus den beiden Formeltypen „α" abgeleitet werden.

Beweis für F 31:

XVI $Ap\alpha$

XVI $p/NAp\alpha \times AN$XVI — XVII

XVII α

Beweis für F 321:

XVIII $ANp\alpha$

XVIII $p/ANp\alpha \times AN$XVIII — XIX

XIX α

Wird andererseits „α" zu unserem System hinzugefügt, so sind aus „α" sowohl „$Ap\alpha$" als auch „$ANp\alpha$" ableitbar.

Beweis:

XX α

$10\, q/\alpha \times AN$XX — XXI

XXI $Ap\alpha$

$10\, q/\alpha,\ p/Np \times AN$XX — XXII

XXII $ANp\alpha$

Damit sind folgende Äquivalenzen bewiesen:

$$Ap\alpha \sim \alpha \quad \text{und} \quad ANp\alpha \sim \alpha . \quad ^{16})$$

[16]) Der Beweis dieser Äquivalenzen lässt sich nicht auf Grund der Formeln „$ANAp\alpha\alpha$" und „$AN\alpha Ap\alpha$" resp. „$ANANp\alpha\alpha$" und „$AN\alpha ANp\alpha$" führen, da weder „$ANAp\alpha\alpha$" noch „$ANANp\alpha\alpha$" für ein beliebiges „α" Thesen unseres Systems sind (vgl. Fussnote [15])).

Da nun „α" kürzer ist als „$Ap\alpha$" resp. „$ANp\alpha$", so ist nach H 3 keine Formel vom Typus „$Ap\alpha$" resp. „$ANp\alpha$" die kürzeste freie Formel, — unter der Voraussetzung natürlich, dass „α" keine mit „p" gleichgestaltete Variable enthält.

Im Folgenden werden wir daher voraussetzen, dass in den Formeltypen F 31 und F 321 „α" eine mit „p" gleichgestaltete Variable enthält.

§ 16. **Formeltypen F 311, F 3211, F 3121, F 32121, F 3122, F 32122, F 3123 und F 32123.** Sowohl in F 31 als auch in F 321 kann „α" zunächst eine Variable sein, und dann ist sie natürlich gleich „p", da wir voraussetzen, dass „α" eine mit „p" gleichgestaltete Variable enthält. Wir untersuchen zuerst die Formeltypen F 311 und F 3211.

* * *

F 311: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „App"; wird nämlich „App" zu den Axiomen hinzugefügt, so bekommt man „p", also alle Formeln.

Beweis:

XXIII App

$8 \times ANXXIII — XXIV$

XXIV p

F 3211: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpp$", denn diese Formel ist laut These *7* aus den Axiomen ableitbar.

* * *

In den Formeltypen F 312 und F 3212, d. h. in „$ApN\alpha$" und „$ANpN\alpha$", kann „α" ebenfalls zunächst eine Variable sein, und dann ist sie gleich „p". Die Formeltypen F 3121 und F 32121, die auf diese Weise entstehen, verhalten sich ebenso, wie die vorhergehenden.

F 3121: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApNp$", denn diese Formel ist laut These *12* aus den Axiomen ableitbar.

F 32121: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpNp$", denn wird diese Formel zu den Axiomen hinzugefügt, so bekommt man aus ihr „Np", und somit alle Formeln (vgl. F 21).

Beweis:

XXV	$ANpNp$
	$8\,p/Np \times ANXXV - XXVI$
XXVI	Np

* * *

Die anderen spezielleren Formeltypen, die aus F 312 und F 3212 hervorgehen, nämlich F 3122 und F 3123 sowie F 32122 und F 32123, sind solchen Formeltypen von gleicher Buchstabenanzahl äquivalent, die nicht die kürzesten freien Formeln darstellen.

F 3122: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApNN\alpha$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ApNN\alpha \sim ANN\alpha p.$$

Nun ergibt sich aus Fall F 322, dass keine Formel, die mit „ANN" beginnt, die kürzeste freie Formel ist; folglich ist auch keine Formel vom Typus „$ApNN\alpha$" die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

	$11\,q/p,\ p/NN\alpha \times XXVII$
XXVII	$ANApNN\alpha ANN\alpha p$
	$11\,q/NN\alpha \times XXVIII$
XXVIII	$ANANN\alpha pApNN\alpha$

F 32122: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpNN\alpha$".

Der Beweis ist derselbe, wie für F 3122, nur muss für „p" überall „Np" eingesetzt werden.

* * *

F 3123: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApNA\alpha\beta$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ApNA\alpha\beta \sim ANA\alpha\beta p.$$

Es ergibt sich aber aus Fall F 323, dass keine Formel, die mit „ANA" beginnt, die kürzeste freie Formel ist; folglich ist auch keine Formel vom Typus „$ApNA\alpha\beta$" die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

	$11\ q/p,\ p/NA\alpha\beta \times$ XXIX
XXIX	$ANApNA\alpha\beta ANA\alpha\beta p$
	$11\ q/NA\alpha\beta \times$ XXX
XXX	$ANANA\alpha\beta pApNA\alpha\beta$

F 32123: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpNA\alpha\beta$".

Der Beweis ist derselbe, wie für F 3123.

* * *

Da nun die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 3121 noch F 3122 noch F 3123, und ebenso weder vom Typus F 32121 noch F 32122 noch F 32123 sein kann, so sind dadurch auch die Sätze bewiesen:

F 312: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApN\alpha$".

F 3212: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpN\alpha$".

§ 17. **Formeltypen F 313, F 3213, F 3133 und F 32133.** Ein Blick auf die Zusammenstellung der Formeltypen im § 10 genügt, um uns zu überzeugen, dass wir noch zwei Formeltypen mit ihren Unterfällen zu untersuchen haben, nämlich F 313 und F 3213, d. h. „$ApA\alpha\beta$" und „$ANpA\alpha\beta$".

Da diese Formeltypen aus F 31 und F 321 entstanden sind, so gilt für sie die Voraussetzung, dass „$A\alpha\beta$" eine mit „p" gleichgestaltete Variable enthalten muss. Wir können annehmen, dass „p" immer in dem e r s t e n Glied der Alternative „$A\alpha\beta$" enthalten ist, also in „α"; denn würde „p" im zweiten Glied, also in „β", enthalten sein, so könnten wir „α" und „β" mit einander vertauschen, auf Grund der Äquivalenzen:

$$ApA\alpha\beta \sim ApA\beta\alpha \quad \text{und} \quad ANpA\alpha\beta \sim ANpA\beta\alpha.$$

Beweis der ersten Äquivalenz:

	$26\ q/\alpha,\ r/\beta \times$ XXXI
XXXI	$ANApA\alpha\beta ApA\beta\alpha$
	$26\ q/\beta,\ r/\alpha \times$ XXXII
XXXII	$ANApA\beta\alpha ApA\alpha\beta$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz wird ebenso geführt, nur muss man für „p" überall „Np" einsetzen.

*
* *

Wir gehen nun zu den Formeltypen F 3133 und F 32133 über, d. h. zu Formeln vom Typus „$ApAA\alpha\beta\gamma$" und „$ANpAA\alpha\beta\gamma$". Auf Grund der vorhergehenden Betrachtung nehmen wir an, dass die mit „p" gleichgestaltete Variable in dem ersten Glied der Alternative „$AA\alpha\beta\gamma$", also in „$A\alpha\beta$" enthalten ist. Wir können aber noch weiter gehen und annehmen, dass „p" in „α" enthalten ist; würde nämlich „p" in „β" enthalten sein, so könnten wir „α" und „β" mit einander vertauschen, auf Grund der Äquivalenzen:

$$ApAA\alpha\beta\gamma \sim ApAA\beta\alpha\gamma \quad \text{und} \quad ANpAA\alpha\beta\gamma \sim ANpAA\beta\alpha\gamma.$$

Beweis der ersten Äquivalenz:

	$38\, q/\alpha,\ r/\beta,\ s/\gamma \times$ XXXIII
XXXIII	$ANApAA\alpha\beta\gamma ApAA\beta\alpha\gamma$
	$38\, q/\beta,\ r/\alpha,\ s/\gamma \times$ XXXIV
XXXIV	$ANApAA\beta\alpha\gamma ApAA\alpha\beta\gamma$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz beruht auf derselben These *38*, nur muss für „p" überall „Np" eingesetzt werden. Wir können somit voraussetzen, dass sowohl in „$ApAA\alpha\beta\gamma$" als auch in „$ANpAA\alpha\beta\gamma$" die mit „p" gleichgestaltete Variable in „α" enthalten ist.

Es gelten ferner folgende Äquivalenzen:

$$ApAA\alpha\beta\gamma \sim ApA\alpha A\beta\gamma \quad \text{und} \quad ANpAA\alpha\beta\gamma \sim ANpA\alpha A\beta\gamma.$$

Beweis der ersten Äquivalenz:

	$35\, s/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times$ XXXV
XXXV	$ANApAA\alpha\beta\gamma ApA\alpha A\beta\gamma$
	$30\, s/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times$ XXXVI
XXXVI	$ANApA\alpha A\beta\gamma ApAA\alpha\beta\gamma$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz wird ebenso geführt, nur muss für „p" überall „Np" eingesetzt werden.

In den Formeltypen „$ApA\alpha A\beta\gamma$" resp. „$ANpA\alpha A\beta\gamma$" kann „α" entweder eine Variable sein, und dann ist sie gleich „p", oder eine Negation oder eine Alternative. In diesem letzteren Falle kann die obige Beweisführung wiederholt werden, so dass wir wieder zu Formeln vom Typus „$ApA\alpha A\beta\gamma$" resp. „$ANpA\alpha A\beta\gamma$" gelangen, in denen „α" eine mit „p" gleichgestaltete Variable enthält. Es ist klar, dass dieser Prozess solange fortgesetzt werden kann, bis wir nach dem „p" keine zwei nacheinanderfolgende „A" bekommen. Wir können somit folgende Sätze aufstellen:

F 3133: Wird angenommen, dass die kürzeste freie Formel vom Typus F 3133 ist, so gibt es auch eine kürzeste freie Formel vom Typus F 3131 oder 3132.

F 32133: Wird angenommen, dass die kürzeste freie Formel vom Typus F 32133 ist, so gibt es auch eine kürzeste freie Formel vom Typus F 32131 oder F 32132.

Dadurch werden F 3133 und F 32133 auf andere Formeltypen zurückgeführt.

§ 18. **Formeltypen F 3131, F 32131, F 31321, F 321321, F 31322, F 321322, F 31323 und F 321323.** Sowohl in F 313 als auch in F 3213 kann „α" zunächst eine Variable sein, und dann ist sie gleich „p", da wir immer annehmen können, dass „α" eine mit „p" gleichgestaltete Variable enthält. Wir untersuchen zuerst die Formeltypen F 3131 und F 32131.

* * *

F 3131: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApAp\alpha$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ApAp\alpha \sim Ap\alpha .$$

Nun ist „$Ap\alpha$" um zwei Buchstaben kürzer als „$ApAp\alpha$"; folglich ist nach H 3 eine Formel vom Typus „$ApAp\alpha$" nicht die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

	$16\, q/\alpha \times$ XXXVII
XXXVII	$ANApAp\alpha Ap\alpha$
	$10\, q/Ap\alpha \times$ XXXVIII
XXXVIII	$ANAp\alpha ApAp\alpha$

F 32131: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpAp\alpha$", denn Formeln von diesem Typus sind aus den Axiomen ableitbar.

Beweis:

$$\begin{array}{ll} & 9\, q/\alpha \times \mathrm{XXXIX} \\ \mathrm{XXXIX} & ANpAp\alpha \end{array}$$

* * *

In den Formeltypen F 3132 und F 32132, d. h. in „$ApAN\alpha\beta$" und „$ANpAN\alpha\beta$", kann „α" ebenfalls zunächst eine Variable sein, und dann ist sie gleich „p". Die Formeltypen F 31321 und F 321321, die auf diese Weise entstehen, verhalten sich ähnlich, wie die vorhergehenden.

F 31321: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApANp\alpha$", denn Formeln von diesem Typus sind aus den Axiomen ableitbar.

Beweis:

$$\begin{array}{ll} & 19\, q/\alpha \times \mathrm{XL} \\ \mathrm{XL} & ApANp\alpha \end{array}$$

F 321321: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpANp\alpha$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ANpANp\alpha \sim ANp\alpha.$$

„$ANp\alpha$" ist aber um 3 Buchstaben kürzer als „$ANpANp\alpha$"; folglich ist nach H 3 eine Formel vom Typus „$ANpANp\alpha$" nicht die kürzeste freie Formel.

* * *

Die übrigen Formeltypen, die aus F 3132 und F 32132 hervorgehen, nämlich F 31322 und F 31323 sowie F 321322 und F 321323, sind solchen Formeltypen von gleicher Buchstabenanzahl äquivalent, die nicht die kürzesten freien Formeln darstellen.

F 31322: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApANN\alpha\beta$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ApANN\alpha\beta \sim ANN\alpha Ap\beta.$$

Nun ist aber, wie bereits bewiesen wurde, keine Formel, die mit „ANN" beginnt, die kürzeste freie Formel; folglich ist auch keine Formel vom Typus „$ApANN\alpha\beta$" die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

$$18\,q/NN\alpha,\ r/\beta \times \text{XLI}$$
$$\text{XLI}\quad ANApANN\alpha\beta ANN\alpha Ap\beta$$
$$18\,p/NN\alpha,\ q/p,\ r/\beta \times \text{XLII}$$
$$\text{XLII}\quad ANANN\alpha Ap\beta ApANN\alpha\beta$$

F 321322: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpANN\alpha\beta$".

Der Beweis verläuft in derselben Weise, wie für F 31322, nur muss für „p" überall „Np" eingesetzt werden.

* * *

F 31323: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApANA\alpha\beta\gamma$", denn es gilt die Äquivalenz:

$$ApANA\alpha\beta\gamma \sim ANA\alpha\beta Ap\gamma.$$

Es wurde aber bereits bewiesen, dass keine Formel, die mit „ANA" beginnt, die kürzeste freie Formel ist; folglich ist auch keine Formel vom Typus „$ApANA\alpha\beta\gamma$" die kürzeste freie Formel.

Beweis der Äquivalenz:

$$18\,q/NA\alpha\beta,\ r/\gamma \times \text{XLIII}$$
$$\text{XLIII}\quad ANApANA\alpha\beta\gamma ANA\alpha\beta Ap\gamma$$
$$18\,p/NA\alpha\beta,\ q/p,\ r/\gamma \times \text{XLIV}$$
$$\text{XLIV}\quad ANANA\alpha\beta Ap\gamma ApANA\alpha\beta\gamma$$

F 321323: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpANA\alpha\beta\gamma$".

Der Beweis verläuft in derselben Weise, wie für F 31323, nur muss für „p" überall „Np" eingesetzt werden.

* * *

Wir sind am Ende. Die fehlenden Glieder der Beweiskette können leicht vervollständigt werden.

Ist die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 31321 noch F 31322 noch F 31323, so gilt der Satz:

F 3132: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApAN\alpha\beta$".

Ist ferner die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 321321 noch F 321322 noch F 321323, so gilt der Satz:

F 32132: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpAN\alpha\beta$".

Nach den obigen Ausführungen gehört die kürzeste freie Formel weder zum Typus F 3131 noch F 3132; da wir aber gezeigt haben, dass Formeln vom Typus F 3133 auf die Formeltypen F 3131 oder F 3132 zurückgeführt werden können, so bekommen wir den Satz:

F 313: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ApA\alpha\beta$".

Das Gleiche gilt von F 3213. Nach dem obigen ist die kürzeste freie Formel weder vom Typus F 32131 noch F 32132, und Formeln vom Typus F 32133 können auf Formeln vom Typus F 32131 oder F 32132 zurückgeführt werden. Wir bekommen somit den Satz:

F 3213: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANpA\alpha\beta$".

Jetzt gehen wir noch weiter herauf.

Da die kürzeste freie Formel weder zum Typus F 311 noch F 312 noch F 313 gehört, und ebenso weder zum Typus F 3211 noch F 3212 noch F 3213, so gelten mit Berücksichtigung des § 15 die Sätze:

F 31: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$Ap\alpha$".

F 321: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$ANp\alpha$".

Da auch die Formeltypen F 322 und F 323 nicht die kürzesten freien Formeln darstellen, so ergibt sich daraus:

F 32: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$AN\alpha\beta$".

Wir sehen nun, dass die Formeltypen F 31 und F 32 die kürzesten freien Formeln nicht darstellen können; da aber Formeln vom Typus F 33 auf Formeln vom Typus F 31 oder F 32 zurückgeführt werden können, so bekommen wir schliesslich den Satz:

F 3: Die kürzeste freie Formel ist nicht vom Typus „$A\alpha\beta$".

Es steht nun fest, dass die kürzeste freie Formel weder vom Typus einer Variablen noch vom Typus einer Negation noch vom Typus einer Alternative sein kann; folglich gibt es überhaupt in unserem System keine kürzeste freie Formel. Damit ist der Beweis gegeben, dass in dem von uns betrachteten System keine freien Formeln vorkommen, oder mit anderen Worten, dass unser System vollständig ist.

§ 19. **Schlussbemerkungen.** Den hier dargestellten Vollständigkeitsbeweis habe ich schon vor mehr als zwei Jahren für das System „*N*, *C*" in meinen Universitätsvorlesungen behandelt [17]. Mein Beweis ist aber nicht der erste [18]. Dass ich ihn dennoch veröffentliche, dies geschieht aus folgenden Gründen:

Alle mir bekannten publizierten Vollständigkeitsbeweise beruhen darauf, dass man die Formeln des Aussagenkalküls auf „konjunktive" oder „disjunktive Normalformen" zurückführt. Ich möchte dazu Folgendes bemerken:

Das Zurückführen aller Formeln des Aussagenkalküls auf „Normalformen" scheint mir ein Überbleibsel der schon etwas veralteten algebraischen Logik zu sein. Die Konjunktion und die Disjunktion (besser gesagt „Alternative") haben die gleichen formalen Eigenschaften, wie die algebraische Multiplikation und Addition. Dem Mathematiker sind diese Operationen mehr vertraut, als die gewöhnlichen Funktionen des Aussagenkalküls; dem Logiker dagegen erscheinen die „Normalformen" als künstliche Gebilde, die für das Schliessen wertlos sind. Der Aussagenkalkül, so wie er von Frege begründet wurde, ist eine logische Disziplin, die ihre eigenen Ziele und Methoden hat und mathematischer Analogien nicht bedarf. Beweise, die auf die „Normalform" nicht zurückzugreifen brauchen, scheinen mir dem „Wesen" der Logik besser angepasst zu sein.

Es gibt aber auch andere Momente, die eine Berücksichtigung verdienen. Ich bin erstens überzeugt, dass der von mir gegebene Vollständigkeitsbeweis einfacher ist, als diejenigen

---

[17]) Vgl. J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej* (Elemente der mathematischen Logik), eine litographierte Ausgabe meiner im Herbsttrimester 1928/29 an der Universität Warszawa gehaltenen Vorlesungen, bearbeitet von M. Presburger, Warszawa 1929, S. 121—153. Wie ich im Vorwort zu dieser Publikation hervorhebe, hat Hr. Presburger meinen Beweis in Form von 18 Hilfssätzen dargestellt, unter denen auch die oben in § 12 angeführten Hilfssätze H 1 und H 3 vorkommen.

[18]) Der erste Vollständigkeitsbeweis des gewöhnlichen Aussagenkalküls stammt von Post (s. die in Fussnote [10]) zitierte Abhandlung). Einen etwas anderen Beweis findet man bei Bernays (*Axiomatische Untersuchung* S. 307), doch ist er nur kurz angedeutet. Ausführlicher ist der Bernays'sche Beweis im Lehrbuch von Hilbert und Ackermann dargestellt (S. 9—12 und 33). Einen nicht veröffentlichten Vollständigkeitsbeweis, der auf einer anderen Idee beruht, als die Beweise der vorhin genannten Autoren hat Hr. Tarski gegeben.

Beweise, die sich der Zurückführung auf „Normalformen" bedienen. Wir streben jetzt darnach, auch metalogische Untersuchungen zu formalisieren. Ich glaube, dass die Formalisierung des hier gegebenen Beweises auf geringere Schwierigkeiten treffen dürfte, als die Formalisierung der anderen Vollständigkeitsbeweise. Zweitens bin ich der Meinung, dass der von mir gegebene Vollständigkeitsbeweis auch vom methodologischen Standpunkt nicht unwichtig ist. Will man die Formeln eines gegebenen Systems des Aussagenkalküls auf „Normalformen" zurückführen, so müssen die Begriffe der Konjunktion und der Alternative entweder schon im System vorhanden sein, oder sie müssen in das System auf Grund von Definitionen eingeführt werden. Das erste ist nicht immer der Fall, das zweite ist nicht immer möglich, insbesondere wenn man mit nur fragmentarischen Systemen des Aussagenkalküls arbeitet. Die von mir angewandte Methode ist ganz allgemein, setzt keine speziellen Funktionen des Aussagenkalküls voraus, und kann beliebigen Systemen dieses Kalküls angepasst werden.

In den beiden soeben erwähnten Richtungen sind schon in Warschau Vorarbeiten begonnen und Ergebnisse erzielt worden, deren Publikation künftig erfolgen dürfte.

Alfred Tarski.

Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.

Przestawił J. Łukasiewicz na posiedzeniu dn. 21 marca 1931 r.

Praca wyjdzie in extenso w „Pracach Tow. Naukowego Warszawskiego".

Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen.

Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz dans la séance du 21 Mars 1931.

Ce travail vient de paraître dans les „Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie".

Posiedzenie

z dnia 30 kwietnia 1931 r.

W. Sierpiński.

O dwuch definicjach zbiorów zamkniętych.

Komunikat, zgłoszony dnia 30 kwietnia 1931 r.

Streszczenie.

W pracy tej autor zajmuje się dwiema definicjami zbiorów zamkniętych, z których jedna oparta jest na pojęciu punktu skupienia, zaś druga na pojęciu punktu granicznego. Autor rozstrzyga pozytywnie następujące zagadnienie, postawione przez prof. E. Borel'a: „czy można podać przykład efektywny zbioru, co do którego potrafimy dowieść bez pomocy pewnika wyboru, że jest zamknięty według jednej z tych definicji, ale nie potrafimy dowieść bez odwoływania się do pewnika wyboru, że jest zamknięty według drugiej?".

W. Sierpiński.

Sur deux définitions des ensembles fermés.

Présenté dans la séance du 30 Avril 1931.

Dans une de mes conférences que j'ai donné récemment à la Sorbonne (le 10 Mars 1931) je parlai de deux définitions des ensembles fermés: une basée sur la notion du point d'accumulation et l'autre sur celle du point limite, et j'ai signalé le fait que l'équivalence de ces deux définitions ne peut être démontrée sans recours à l'axiome du choix. A propos de ce fait M. Emile Borel m'a posé le problème suivant:

Peut-on nommer un ensemble de points dont on saurait démontrer sans que l'on fasse appel à l'axiome du choix qu'il est fermé suivant l'une de ces définitions, mais qu'on ne saurait pas démontrer sans recours à cet axiome qu'il est fermé suivant l'autre?

C'est la solution positive de ce problème qui est l'objet principal de ce travail.

1. Points d'accumulation et points limites.

Pour fixer les idées nous ne considérerons dans la suite que des ensembles linéaires.

Soit E un ensemble linéaire donné. Un point a appartenant à E ou non sera dit *point d'accumulation* de l'ensemble E, si tout intervalle contenant à son intérieur a, contient au moins un point de E autre que a. Un point a (appartenant à E ou non) sera dit *point limite* de l'ensemble E, s'il existe une suite infinie de points de E autres que a qui converge vers a.

On démontre sans peine, sans que l'on soit obligé de recourir à l'axiome du choix, que tout point limite d'un ensemble E est en même temps un point d'accumulation de cet ensemble; on ne sait pas cependant démontrer la proposition réciproque sans avoir recours à cet axiome.

En effet, soit a un point limite de l'ensemble E: il existe donc une suite infinie $p_1, p_2, p_3, \dots$ de points de E autres que a qui converge vers a. Soit d un intervalle quelconque contenant à son intérieur le point a: la suite infinie $p_1, p_2, p_3, \dots$ convergeant vers a, les points p_n seront, pour n suffisamment grands, intérieurs à l'intervalle d. Donc, tout intervalle contenant à son intérieur a contient des points de E autres que a, d'où résulte que a est un point d'accumulation de E.

Essayons maintenant de démontrer le réciproque, c'est-à-dire que si a est un point d'accumulation de E, a est aussi un point limite de E. On sait donc que tout intervalle contenant a à son intérieur contient au moins un point de E autre que a, et il faut extraire de E une suite infinie de points autres que a convergeant vers a. Soit donc n un indice quelconque et soit d_n l'intervalle $(a - 1/n,\ a + 1/n)$. D'après l'hypothèse il existe dans d_n un point p_n de E autre que d. Les longueurs des intervalles d_n tendant vers 0, les points p_n convergent évidemment vers a, et on a ainsi la suite désirée. Ce raisonnement fait cependant recours à l'axiome du choix. Pour chaque valeur naturelle d'indice n il existe certainement dans d_n un point de E autre que a: mais, comme on voit sans peine, il existe dans d_n une infinité de points de E autres que a, et il en faut *choisir* un seul qu'on désigne par p_n.

Pour chaque valeur naturelle de n on fait donc un choix. Il faut donc appliquer une infinité de choix sans pouvoir en donner une loi.

On peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que l'hypothèse d'après laquelle tout point d'accumulation d'un ensemble est en même temps un point limite de cet ensemble est équivalente à la proposition suivante:

Pour toute suite infinie d'ensembles de points $E_1, E_2, E_3, \ldots,$ non vides, sans éléments communs deux à deux, il existe au moins une suite infinie de points $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ dont les termes correspondant à des indices différents appartiennent toujours à des ensembles E_n différents [1].

On peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix qu'un point d'accumulation des points d'accumulation d'un ensemble est un point d'accumulation de cet ensemble; on ne soit pas cependant démontrer sans avoir recours à l'axiome du choix qu'un point limite des points limites d'un ensemble est un point limite de cet ensemble.

On peut démontrer sans que l'on fasse appel à l'axiome du choix que tout ensemble infini borné admet au moins un point d'accumulation, mais on ne le sait pas démontrer sans recours à cet axiome que tout ensemble infini borné admet au moins un point limite.

On peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que l'ensemble de tous les points d'un ensemble E qui ne sont pas des points d'accumulation de E est au plus dénombrable (et même effectivement énumérable); on ne sait pas cependant démontrer sans recourir à l'axiome du choix que l'ensemble de tous les points d'un ensemble E qui ne sont pas points limites de E est au plus dénombrable [2].

2. Deux définitions des ensembles fermés.

Nous dirons qu'un ensemble E est *fermé a* s'il contient tout son point d'accumulation, et nous dirons qu'il est *fermé l* s'il contient tout son point limite.

On peut démontrer sans peine sans faire appel à l'axiome du choix que *tout ensemble fermé a est fermé l* (puisqu'on sait démontrer sans l'aide de l'axiome du choix que tout point limite d'un ensemble est un point d'accumulation de cet ensemble, voir § 1). On ne sait pas cependant démontrer la proposition réciproque sans avoir recours à l'axiome du choix. On ne sait pas donc démontrer sans l'aide de l'axiome du choix l'équivalence de deux définitions des ensembles fermés: fermés *a* et fermés *l* [3].

---

[1]) Voir mon mémoire: *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensemble et l'Analyse.* Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1918, p. 119—121.

[2]) Voir l. c., p. 122—123.

[3]) J'ai signalé déjà ce fait dans mon mémoire cité, p. 121.

On pourrait cependant s'imaginer — d'après une remarque de M. Borel — que, la démonstration d'équivalence de deux définitions d'ensembles fermés étant impossible *dans le cas général* sans utiliser l'axiome du choix, elle l'est cependant possible *dans tout cas particulier,* où l'ensemble considéré est défini effectivement. En d'autre termes le problème se pose: peut-on définir effectivement un ensemble de points dont on saurait démontrer sans utiliser l'axiome du choix qu'il est fermé l, mais qu'on ne saurait pas démontrer sans recours à cet axiome qu'il est fermé a. Dans le § 5 nous donnerons un exemple d'un tel ensemble.

On peut sans peine démontrer sans utiliser l'axiome du choix que tout ensemble linéaire borné fermé a contient ses bornes. Il en résulte sans peine qu'on peut déterminer une loi d'après laquelle à tout ensemble fermé a correspond un point de cet ensemble. Or, nous ne savons pas démontrer sans recours à l'axiome du choix que tout ensemble linéaire borné fermé l contient ses bornes.

Soit E un ensemble fermé a, p — un point étranger à E. p n'est peut donc pas être un point d'accumulation de E (puisque, dans ce cas, E étant fermé a, p appartiendrait à E, contrairement à l'hypothèse). Il existe donc un intervalle d contenant à son intérieur p et ne contenant aucun point de E. Nous avons ainsi démontré (saus recours à l'axiome du choix) que le complémentaire d'un ensemble fermé a est toujours un ensemble *ouvert.* La proposition réciproque se démontre aussi sans peine sans l'aide de l'axiome du choix. Or, nous ne savons pas démontrer sans avoir recours à cet axiome que le complémentaire d'un ensemble fermé l est toujours ouvert. On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que les ensembles fermés a coïncident avec les ensembles des zéros d'une fonction continue (et cela indépendumment du choix d'une de deux définitions de la continuité — celle de Cauchy ou celle de Heine [1])). On ne sait pas cependant démontrer sans recours à l'axiome du choix que si E est un ensemble linéaire fermé l, il existe uue fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle, telle que E coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont à l'équation $f(x)=0$.

La définition des ensembles fermés a est donc préférable à celle des ensembles fermés l, puisqu'on peut en déduire sans faire appel à l'axiome du choix plusieurs propriétés importantes des ensembles fermés qu'on ne sait pas démontrer sans recours à cet axiome en partant de la définition des ensembles fermés l.

---

[1]) Voir mon mémoire cité, p. 131.

3. La fermeture l d'un ensemble.

E étant un ensemble de points donné, nous appellerons *fermeture* l de cet ensemble le plus petit ensemble fermé l contenant E, c'est-à-dire un ensemble fermé l contenant E et contenu dans tout autre ensemble fermé l qui contient E. On voit sans peine qu'un tel ensemble existe toujours (pour tout ensemble E donné) et qu'il est unique et égal au produit de tous les ensembles fermés l contenant E.

Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que le produit d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque d'ensembles fermés l est fermé l. Soit, en effet, $P = \Pi F$ un produit d'ensembles F fermés l et soit p la limite d'une suite infinie $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de points de P. Soit F un facteur quelconque du produit P: on aura donc $P \subseteq F$, et $p_n \varepsilon P$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte que les termes de la suite p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartiennent tous à F: l'ensemble F étant, par l'hypothèse, fermé l, il en résulte, d'après $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, que $p \varepsilon F$. On a donc $p \varepsilon F$ pour tout facteur F du produit P, d'où résulte que $p \varepsilon P$. L'ensemble P contient donc toute limite d'une suite infinie de points qui appartiennent à P, c'est-à-dire P est fermé l, c. q. f. d.

Or, il existe évidemment des ensembles fermés l contenant E: tel est p. e. l'ensemble de tous les points de l'espace considéré. Soit P le produit de tous les ensembles fermés l contenant E. D'après ce que nous venons de démontrer, P est fermé l. Or, il est evident que $E \subseteq P$, puisque chaque facteur du produit P contient E. Enfin, si F est un ensemble fermé l contenant E, F est un facteur du produit P et parsuite $P \subseteq F$. Donc P est le plus petit ensemble fermé l contenant E: c'est la *fermeture* l de l'ensemble E.

Il importe de remarquer qu'on ne peut pas démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que la fermeture l d'un ensemble E s'obtient en adjoignant à E tous les points limites de E. En effet, on ne sait pas démontrer sans utiliser l'axiome du choix qu'un point limite des points limites de E est un point limite de E (Cf. § 1).

Posons $E_0 = E$ et définissons, pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$, les ensembles E_α par l'induction transfinie comme il suit: E_α est l'ensemble de toutes les limites de suites p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, où $p_n \varepsilon E_{\xi_n}$ et $\xi_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. On démontre sans peine que la fermeture l de l'ensemble E coïncide avec la somme

$$\sum_{\alpha<\Omega} E_\alpha .$$

Quant à la *fermeture* $\bar{E}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé $\bar{E}$ contenant E, on démontre sans peine, sans recours à l'axiome du choix, que l'on obtient en adjoignant à E tous les points d'accumulation de E.

4. Un ensemble non vide de points dans lequel nous ne savons pas choisir aucun élément.

Nous allons à définir effectivement un ensemble de nombres réels E, dont nous démontrerons sans faire appel à l'axiome du choix qu'il est non vide et tel qu'on ne peut pas (dans l'état actuel de la Science) nommer aucun élément individuel de cet ensemble E. La construction de cet ensemble E ne sera d'ailleurs qu'une modification légère d'un raisonnement de M. N. Lusin [1]).

Sois U un ensemble plan analytique universel, p. e. celui qui est construit par M. Lusin à la page 146 de son livre cité. On obtient donc chaque complémentaire analytique linéaire en coupant CU (le complémentaire de U par rapport au plan) par une parallèle à l'axe OY.

Désignons par M l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x = a$ coupe CU en un ensemble non dénombrable ne contenant aucun sous-ensemble parfait. Désignons maintenant par E l'ensemble égal à M, si l'ensemble M n'est pas vide, et égal à l'ensemble formé d'un seul nombre 0, si l'ensemble M est vide.

L'ensemble E est non vide (ce qui est évident sans recours à l'axiome du choix) et nous ne savons pas dans l'état actuel de la Science nommer aucun élément de E [2]). (Il semble que à l'avis de M. N. Lusin la solution de ce problème déborde les limites de la Science au sens absolu [3])).

---

[1]) Voir: *Fundamenta Mathematicae* t. X (1927), p. 92; v. aussi le livre de M. N. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 295—297; cf. aussi sa note des *C. R.* t. 181, p. 279.

[2]) C'est M. E. Borel qui a posé le problème de définir un tel ensemble: voir ses *Leçons sur la théorie des fonctions* 3e éd., 1918, p. 161; cf. aussi le livre cité de N. Lusin, p. 294.

[3]) Voir N. Lusin, l. c., p. 294.

Il est à remarquer que s'il s'agissait de définir un ensemble non vide quelconque dans lequel nous ne savons pas choisir aucun élément, on pourrait donner des exemples tout à fait élémentaires. En effet, soit M l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle $f(x)$ qui ne sont pas de la forme ax (où a est une constante) et qui satisfont pour tous les nombres x et y réels à l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Si l'ensemble M est non vide, posons $E=M$, s'il est vide, désignons par E l'ensemble formé de toutes les fonctions continues. L'ensemble E est évidemment non vide (ce qu'on prouve sans avoir recours à l'axiome du choix) et nous ne savons pas nommer aucun élément de E [1]).

5. Solution du problème de M. Borel.

Soit E l'ensemble défini dans le § 4 (ou bien un ensemble de points non vide quelconque dans lequel nous ne savons pas choisir aucun élément individuel), et soit E^* la fermeture l de l'ensemble E (§ 3). L'ensemble E^* est évidemment fermé l: nous ne savons pas cependant, dans l'état actuel de la Science, de démontrer sans recours à l'axiome du choix qu'il est fermé a.

Il est encore à remarquer que E^* est un ensemble fermé l non vide, tel que nous ne savons nommer aucun élément, dont on pourrait démontrer sans recours à l'axiome du choix qu'il appartient à E^*.

Stefan Mazurkiewicz.

O typie wymiarowym hyperprzestrzeni kontynuum.

Komunikat zgłoszony dnia 30 kwietnia 1931 r.

Streszczenie.

W nocie niniejszej podaję dowód następującego twierdzenia: Typ wymiarowy (homoja) hyperprzestrzeni dowolnego metrycznego kontynuum jest równy typowi wymiarowemu przestrzeni Hilberta.

[1]) Cf. aussi ma note *„Sur une propriété de la décomposition de M. Vitali"*, Comptes rendus du 1er Congrès des Mathématiciens roumains à Cluj, 1929, *Mathematica*, vol. III (1930), p. 32. Voir aussi *Fundamenta Mathematicae*, t. XVIII, p. 191.

Stefan Mazurkiewicz.

Sur le type de dimension de l'hyperespace d'un continu.

Note présentée à la séance du 30 Avril 1931.

Je me propose de démontrer le suivant:

Théorème. *Le type de dimension (homoïe) de l'hyperespace d'un continu métrique est égal au type de dimension de l'espace hilbertien H.*

Désignons par $d(A)$ le type de dimension d'un espace arbitraire A, par C le continu donné, par 2^C son hyperespace, par H_0 l'ensemble de points: $(x_1, x_2 \ldots) \varepsilon H$ tels que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. D'après le théorème de Urysohn [1]) on a: $d(2^C) \leq d(H_0) = d(H)$ il suffit donc de démontrer l'inégalité:

$$d(H_0) \leq d(2^C) \tag{1}$$

C étant un continu on peut déterminer une suite de continus $\{C_n\}$, une suite de points $\{q_n\}$ et un point p de manière à avoir:

$$p \varepsilon C - \sum_{n=1}^{\infty} C_n; \; q_n \varepsilon C_n; \; C_n \subset C; \; C_m \times C_n = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n \tag{2}$$

$$\lim_{n=\infty} C_n = p. \tag{3}$$

L'espace 2^{C_n} est „arcwise connected" [2]) il existe par suite une fonction $U_n(t)$ continue pour $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ et telle que:

$$U_n(t) \varepsilon 2^{C_n}; \; U_n(0) = (q_n); \; U_n\left(\frac{1}{n}\right) = C_n \tag{4}$$

$$U_n(t_1) \neq U_n(t_2) \qquad \text{pour} \quad t_1 \neq t_2 \tag{5}$$

---

[1]) Urysohn: C. R. 178 (1924) p. 65.

[2]) Borsuk-Mazurkiewicz: C. R. Soc. Sc. Varsovie XXIV Classe III Mars 1931.

Soit $y = (x_1, x_2 \dots) \varepsilon H_0$; nous ferons correspondre à y l'ensemble:

$$(6) \qquad V(y) = (p) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_n)$$

et soit T la classe de tous les $V(y)$ pour $y \varepsilon H_0$. D'après (3), l'ensemble (6) est fermé,

$$(7) \qquad V(y) \varepsilon 2^C; \quad T \subset 2^C$$

en se servant de (3) on voit facilement que $V(y)$ est une fonction continue. Soit maintenant: $y^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \dots) \varepsilon H_0$, $i = 1, 2$ et $y^{(1)} \neq y^{(2)}$.

On aura alors pour un indice k l'inégalité $x_k^{(1)} \neq x_k^{(2)}$ donc:

$$(8) \qquad V(y^{(1)}) \times C_k = U_k(x_k^{(1)}) \neq U_k(x_k^{(2)}) = V(y^{(2)}) \times C_k$$

et par suite $V(y^{(1)}) \neq V(y^{(2)})$. La correspondance entre H_0 et T est biunivoque et continue, donc — H_0 étant compact et fermé — c'est un homéomorphisme. L'inégalité (1) est ainsi démontrée.

M. Kamieński.

Bieg Komety Wolfa I w okresie 1884—1919.

Praca przedstawiona dn. 30 kwietnia 1931 r.

Über die Bewegung des Kometen Wolf I in dem Zeitraume 1884—1919.

Vorgelegt am 30 April 1931.

Streszczenie.

Praca autora zawiera ostateczne wyniki powiązań wszystkich 50 miejsc normalnych przy ukazaniu się Komety w okresie 1884—1919. Zakłócenia biegu Komety — pochodzące od Wenus, Ziemi, Marsa, Jowisza, Saturna, Urana — zostały bardzo dokładnie uwzględnione; dla masy Jowisza przyjęta została nowa wartość, wyprowadzona przez W. de Sittera:

$$m = 1/1047.40\,.$$

W wyniku badań okazało się, że wszystkie 50 miejsc normalnych, zawierające ogółem 1888 oddzielnych obserwacyj, mogą być przedstawione za pomocą jednego systemu elementów, w założeniu, że średni ruch dzienny Komety ulega wiekowemu zmniejszeniu według wzoru

$$n = n_0 - 0''.00000042\,(t - t_0)$$

gdzie $(t - t_0)$ jest wyrażone w dniach.

W tem założeniu wszystkie miejsca normalne są przedstawione z błędem średnim

$$\varepsilon = \pm 1''.77$$

przyczem oddzielne odchylenia nie przekraczają kilku sekund łuku.

Jan Gadomski.

Pomiary fotometryczne zmiany blasku planety Erosa.

Przedstawił M. Kamieński dn. 30 kwietnia 1931 r.

Praca będzie wydrukowana in extenso w „Pracach Matematyczno-Fizycznych". Warszawa 1931.

Einige photometrische Messungen des Lichtwechsels von Eros.

Mémoire présenté par M. M. Kamieński dans la séance du 30 Avril 1931.

Ce travail vient de paraître in extenso dans les „Prace Matematyczno-Fizyczne". Varsovie 1931.

Posiedzenie

z dnia 28 maja 1931 r.

W. Sierpiński.

Dwie zasady Łuzina, a zbiory abstrakcyjne.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu w dniu 28 maja 1931 r.

Streszczenie.

W pracy tej formułuje autor t. zw. dwie zasady Łuzina dla zbiorów abstrakcyjnych i dowodzi na przykładach, że nie są one dla nich ogólnie stosowalne. Pozatem zajmuje się autor zagadnieniem relatywizacji zasad Łuzina, i wykazuje, że tylko druga z nich daje się zrelatywizować dla każdego zbioru punktów przestrzeni euklidesowej, pierwsza zaś dla zbiorów analitycznych, lecz już nie dla ich dopełnień.

W. Sierpiński.

Les deux principes de M. Lusin et les espaces abstraits.

Note, présentée dans la séance du 28 Mai 1931.

Introduction. Soit K un ensemble formé d'éléments quelconques, et soit F une famille donnée de sous-ensembles de K.

Nous désignerons par $B(F)$ la famille de tous les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles de la famille F et en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions et des soustractions. En d'autres termes, $B(F)$ est la plus petite famille Φ d'ensembles qui contient la famille F et qui jouit de deux propriétés suivantes: 1) la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ appartient à Φ, et 2) la différence de deux ensembles de la famille Φ appartient à Φ [1]).

Or, nous désignerons par $A(F)$ la famille de tous les ensembles E de la forme

$$E = \sum_{n_1, n_2, \dots} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \dots,$$

où E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des ensembles de la famille F et où la sommation $\sum\limits_{n_1, n_2, \dots}$ s'étend à toutes les suites infinies $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ de nombres naturels.

Nous dirons qu'à l'espace K et à la famille F s'applique le *premier principe* de M. Lusin [2]), si:

E et H étant deux ensembles, tels que $E \in A(F)$, $H \in A(F)$ et $EH = 0$, il existe toujours deux ensembles E^* et H^*, tels que $E^* \in B(F)$, $H^* \in B(F)$, $E^* H^* = 0$, $E \subset E^*$ et $H \subset H^*$.

Nous dirons qu'à l'espace K et à la fimille F s'applique le *deuxième principe* de M. Lusin [3]), si:

E et H étant deux ensembles, tels que $E \in A(F)$ et $H \in A(F)$, il existe toujours deux ensembles M et N, tels que $K - M \in A(F)$, $K - N \in A(F)$, $MN = 0$, $E - H \subset M$ et $H - E \subset N$.

M. Lusin a démontré que ses deux principes s'appliquent aux espaces euclidiens et aux familles F d'ensembles fermés. Or, la question importante se pose: *les principes de M. Lusin, sont-ils applicables aux espaces abstraits sans aucune restriction?* Si c'était le cas, on pourrait espérer de trouver des démonstrations algébriques de ces principes et de simplifier ainsi les démonstrations connues qui utilisent des propriétés particulières des espaces euclidiens.

Malheureusement ce n'est pas le cas: nous donnerons dans cete Note des exemples des espaces K et des familles F auxquelles les principes de M. Lusin ne sont pas applicables.

---

[1]) Des propriétés 1) et 2) résulte, comme on sait, que tout ensemble-produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ appartient à Φ.

[2]) Voir N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 156.

[3]) l. c., p. 210.

1. Nous construirons un espace métrique K, tel que pour la famille F de tous les ensembles fermés de K le premier principe de M. Lusin n'est pas applicable.

M. N. Lusin a démontré qu'il existe un couple U, V d'ensembles analytiques plans doublement universel, c'est-à-dire tel que, quels que soient les ensembles analytiques linéaires E_1 et E_2, il existe un droite parallèle à l'axe Oy qui coupe U et V en E_1 et E_2 respectivement [1]. Posons

$$K = (U - V) + (V - U) \tag{1}$$

et considérons K comme un espace métrique, la distance de deux points dans K coïncidant avec celle qu'ils ont dans le plan. Les ensembles fermés dans l'espace K coïncident évidemment avec les produits de K par les ensembles fermés dans le plan, et il en résulte sans peine que la famille $B(F)$ (où F est la famille de tous les ensembles fermés dans l'espace K) coïncide avec celle de tous les ensembles qui sont des produits de K par les ensembles plans mesurables B, et que la famille $A(F)$ coïncide avec celle de tous les ensembles qui sont des produits de K par les ensembles analytiques plans.

Posons

$$E = U - V, \quad \text{et} \quad H = V - U: \tag{2}$$

on voit sans peine que ce sont des ensembles de la famille $A(F)$: on a, en effet, d'après (1) et (2): $E = KU$ et $H = KV$, et U et V sont des ensembles analytiques. Or, d'après (2), on a évidemment $EH = 0$.

Admettons qu'il existe deux ensembles E^* et H^* de la famille $B(F)$, tels que $E^* H^* = 0$, $E \subset E^*$ et $H \subset H^*$. Soit M un ensemble mesurable B linéaire donné quelconque. Le couple d'ensemble analytiques U, V étant doublement universel (et tout ensemble mesurable B étant un ensemble analytique), il existe une droite D, telle que

$$DU = M \quad \text{et} \quad DV = D - M. \tag{3}$$

On a donc, d'après (3): $DUV = 0$ et parsuite, d'après (2) et (3):

$$DE = D(U - V) = DU = M \text{ et } DH = D(V - U) = DV = D - M. \tag{4}$$

---

[1] l. c., p. 220.

Or, d'après $E \subset E^*$, $H \subset H^*$ on a $DE \subset DE^*$ et $DH \subset DH^*$, donc, d'après (4):

$$M \subset DE^* \tag{5}$$

et $D - M \subset DH^*$, donc

$$(D - M)E^* = 0, \tag{6}$$

puisque $E^* H^* = 0$.

La formule (6) donne $DE^* \subset M$, ce qui donne, vu la formule (5): $DE^* = M$. L'ensemble M pouvant être un ensemble linéaire mesurable B quelconque, cela est impossible, puisque les intersections de l'ensemble E^* mesurable B par les droites sont des ensembles mesurables B dont les classes ne surpassent pas celle de l'ensemble E^*.

Le premier principe de M. Lusin ne s'applique pas ainsi à l'espace métrique K.

2. Nous définirons maintenant un espace abstrait K et une famille F de sous-ensembles de K, auxquels le deuxième principe de M. Lusin ne sera pas applicable.

Soit K l'espace formé de 4 éléments distincts: p, q, r, s. La famille F sera composée seulement de deux ensembles: (p, r) et (q, r).

On voit sans peine que le produit d'une suite infinie d'ensembles de F ne peut être ici qu'un de trois ensembles: (p, r), (q, r) ou (r), et il en résulte sans peine que la famille $A(F)$ est ici formée des ensembles

$$(p, r),\ (q, r),\ (r) \quad \text{et} \quad (p, q, r). \tag{7}$$

Posons maintenant $E = (p, r)$, $H = (q, r)$ et admettons qu'il existe deux ensembles, M et N, tels que $K - M \varepsilon A(F)$, $K - N \varepsilon A(F)$, $MN = 0$, $E - H \subset M$ et $H - E \subset N$. D'après $K - M \varepsilon A(F)$ et $K - N \varepsilon A(F)$, $K - M$ et $K - N$ sont des ensembles de la suite (7), donc il ne contiennent pas l'élément s qui est ainsi un élément des ensembles M et N (puisque $K = (p, q, r, s)$), contrairement à $MN = 0$.

Le deuxième principe de M. Lusin ne s'applique pas donc à l'espace K et à la famille F.

3. Or, on voit sans peine que si K est un ensemble de points d'un espace euclidien $\mathcal{E}$, et si F est la famille de tous les sous-ensembles de K fermés relativement à K (c'est-à-dire des produits de K par les ensembles fermés de l'espace $\mathcal{E}$), le deuxième principe de M. Lusin s'applique à l'espace K et à la famille F.

En effet, soient E et H deux ensembles, tels que $E \varepsilon A(F)$ et $H \varepsilon A(F)$. Il en résulte qu'il existe deux ensembles analytiques, E^* et H^*, tels que $E = KE^*$ et $H = KH^*$. Le deuxième principe de M. Lusin étant vrai pour l'espace $\mathcal{E}$ et pour la famille des ensembles fermés dans cet espace, il existe deux complémentaires analytiques M^* et N^*, tels que $M^* N^* = 0$, $E^* - H^* \subset M^*$ et $H^* - E^* \subset N^*$. Posons $M = KM^*$ et $N = KN^*$: nous aurons $K - M = K - M^* = K(\mathcal{E} - M^*)$ et $K - N = K(\mathcal{E} - N^*)$; $\mathcal{E} - M^*$ et $\mathcal{E} - N^*$ étant des ensembles analytiques, ces formules prouvent que $K - M \varepsilon A(F)$ et $K - N \varepsilon A(F)$. Or, de $M^* N^* = 0$ et de la définition des ensembles M et N résulte que $MN = 0$. Enfin de $E^* - H^* \subset M^*$ et $H^* - E^* \subset N^*$ on obtient, en multipliaat par K: $E - H \subset M$ et $H - E \subset N$.

Donc, *le deuxième principe de M. Lusin peut être relativisé aux ensembles de points quelconques, situés dans un espace euclidien.*

Or, ce n'est pas le cas pour le premier principe de M. Lusin qui, comme on voit sans peine, ne peut pas être relativisé à l'ensemble de points K défini dans le n⁰ 1 de cette Note. On peut démontrer sans peine que le premier principe de M. Lusin peut être relativisé aux ensembles analytiques quelconques (d'un espace euclidien), mais qu'il ne peut pas être relativisé aux complémentaires analytiques (ce qui résulte sans peine de l'existence de deux complémentaires analytiques disjoints, non séparables B [1]), dont il suffirait de prendre la somme).

[1]) Quant à l'existence de tels ensembles, voir N. Lusin l. c., p. 220, 260 et 263; aussi P. Novikoff Fundamenta Mathematicae t. XVII, p. 25.

Jan Gadomski.

Pomiary fotometryczne zmian blasku gwiazdy zaćmieniowej X Trianguli.

(Badanie zmian długości okresu następowania zaćmień).

Przedstawił M. Kamieński na posiedzeniu dn. 28 maja 1931 r.

Streszczenie.

W czasie siedmiu pogodnych wieczorów (16—22.X 1930 r.) obserwowałem przebieg zaćmień tej algolidy, posługując się fotometrem klinowym Graff'a, dostosowanym do refraktoru Cooke'a (134 mm średnicy objektywu), wypożyczonego przez Warszawskie Towarzystwo Naukowe. Klin fotometru został uprzednio wycechowany w ciągu 5 wieczorów zapomocą 227 pomiarów jasności białych gwiazd gromady Plejad.

Na podstawie 344 nawiązań jasności X Trianguli do jasności sąsiedniej gwiazdy BD $+27^{0}317 = 8^{m}.49$ otrzymałem 79 jasności badanej gwiazdy zmiennej, zestawionych chronologicznie w tablicy I. Dla redukcji momentów obserwacyj na Słońce obliczyłem tabelę II.

Obserwacje uwidocznione w tablicy I zredukowałem na wieczór: 19.X 1930. Otrzymałem jasności normalne przytoczone w tablicy III, a stąd następujące wyniki:

największy blask gwiazdy $= 8^{m}.57$
najmniejszy „ „ $= 10^{m}.46$
amplituda blasku $= 1^{m}.89$

czas trwania całego zjawiska zaćmienia $= 0^{d}.2$
„ „ zaćmienia pierścieniowego $= 0^{d}.020$
normalny moment najmniejszego blasku $=$ J. D. $2426269^{d}.3415$ (czas średni greenw.).

Rysunek 1 przedstawia przebieg jasności normalnych oraz kształt krzywej zmian blasku w pobliżu minimum głównego.

Okres następowania po sobie zaćmień tej gwiazdy był dotąd uważany za stały. Dla zbadania jego stałości poddałem dyskusji wszystkie dotychczas opublikowane oraz dostępne dla mnie momenty najmniejszego blasku, przytem 97 obserwacyj N. Ostergaarda oraz 112 J. Mergentalera, dotychczas

nieopracowanych, sam zredukowałem, uzyskując na podstawie nich 5 normalnych momentów najmniejszego blasku. Tablica V zawiera zestawienie 18 momentów minimów normalnych tej gwiazdy, pochodzących od 10 różnych obserwatorów.

Przebieg odskoków tych momentów w odniesieniu do linjowych elementów Dugana — (I) podano w kolumnie 4-ej tablicy V ($B - R_I$). Wykazują one: 1) wyraźny chód linjowy, oraz 2) wahania perjodyczne. Przez wzdłużenie okresu zaćmień o $0^d.000001 = 0^s.1$, przesunięcie epoki wyjściowej oraz wprowadzenie wyrazu perjodycznego, otrzymałem nowe elementy perjodyczne dla heliocentrycznych momentów następowania największej fazy zaćmień:

$$\text{J. D. } 2422772^d.78708 + 0^d.971535 \times E + 0^d.00237 \times \sin(0^\circ.1309 \times E) \quad \text{(III)}$$

Elementy powyższe najlepiej oddają wszystkie dotychczas zaobserwowane momenty najmniejszego blasku tej gwiazdy. W kolumnie siódmej tablicy V zestawiono odnośne różnice $B - R_{III}$ pomiędzy rachunkiem według elementów (III), a obserwacją. Przebieg ich ilustruje rysunek 2.

Odskoki momentów obserwacyj od efemerydy (II) oraz (III), zaczerpnięte z kolumny 6-ej i 7-ej tablicy V, zebrałem w wartości średnie (patrz tablica VI). Przebieg ich przedstawia rys. 3.

Z elementów (III) wynika, że okres następowania zaćmień tej gwiazdy ulega perjodycznym wahaniom w czasie 7.3 lat. Amplituda tych wahań wynosi: $0^d.000010_8 = 0^s.93$ (od $0^d.971529_6$ do $0^d.971540_4$) i powoduje w wymienionym czasie 7.3 lat odskoki ($B - R_{II}$) momentów obserwacyj od efemerydy opartej na elementach linjowych (II). Amplituda tych odskoków wynosi $0^d.00474 = 6^m.8$.

Potrzebne są dalsze dokładne obserwacje tej gwiazdy celem potwierdzenia powyższych wyników, opartych tylko na 10-letnich obserwacjach.

Listopad 1931.
Obserwatorjum Astronomiczne
Uniwersytetu Warszawskiego.

Jan Gadomski.

Photometrische Messungen des Lichtwechsels des Algolsternes X Trianguli

(Untersuchung der Änderungen der Länge der Verfinsterungsperiode).

Mémoire présenté par M. M. Kamieński dans la séance du 28 juin 1931.

Eine längere schöne Zeitperiode, welche in unserem Klima zur Seltenheit gehört, ausnutzend, habe ich die Verfinsterungen dieses Sternes während 7 aufeinander folgenden wolken — und mondlosen Abenden, vom 16 bis 22 Oktober 1930, mit Hilfe eines Photometers beobachtet. Da die Verfinsterungsperiode nur um $^3/_4$ Stunde kürzer als ein Tag ist, war ich im Stande beide Äste der Lichtkurve in der Nähe des Hauptminimums fast während jedem der oben angegebenen Abenden mit Beobachtungen zu belegen. Das gewonnene Beobachtungsmaterial, das auf diese Weise 7 aufeinander folgende Verfinsterungen dieses Sternes betrifft, ist zeitlich sehr eingeschränkt und darum ziemlich gleichartig.

Das Photometer wurde mit einem Refraktor von Cooke (134 mm Objektivdurchmesser, Vergr. 44) verbunden. Dieser Refraktor, der vormals in Płońsk von J. Jędrzejewicz benutzt worden war, wurde unserer Sternwarte vom „Towarzystwo Naukowe Warszawskie" leihweise geliefert. Das Photometer (Graffsches Keilphotometer mit künstlichem Stern) wurde vorher an 5 Abenden (insgesamt 227 Einstellungen des Keiles) mit Hilfe von weissen Sternen der Plejaden (K. Graff, Astronom. Abhandl. d. Hamburger Sternwarte in Bergedorf, Bd. II, Nr. 3) geeicht. Nach Berücksichtigung der differenziellen Extinktion erhielt ich:

Gebiet der Skala in cm	0·0—0·5	0·5—1·0	1·0—1·5	1·5—2·0	2·0—2·5	2·5—3·0
Mittlerer gemessener Wert von k für 1 mm der Skala	$0^{\mathrm{m}}.134$	$0^{\mathrm{m}}.135$	$0^{\mathrm{m}}.143$	$0^{\mathrm{m}}.146$	$0^{\mathrm{m}}.139$	$0^{\mathrm{m}}.131$
Gebiet der Skala in cm	3·0—3·5	3·5—4·0	4·0—4·5	4·5—5·0	5·0—5·5	5·5—6·0
Mittlerer gemessener Wert von k für 1 mm der Skala	$0^{\mathrm{m}}.129$	$0^{\mathrm{m}}.131$	$0^{\mathrm{m}}.132$	$0^{\mathrm{m}}.124$	$0^{\mathrm{m}}.121$	$0^{\mathrm{m}}.124$

Die Messungen von X Trianguli wurden in dem Gebiet der Skala 2·8 cm — 4·7 cm durchgeführt, in welchem die Eichung des Keiles ziemlich konstanten Wert für k gegeben hat. Es wurde bei Berechnung der Helligkeit des Variabeln für die Keilkonstante $k = 0^m.130$ angenommen. Der Veränderliche wurde an den benachbarten B D Stern $a = +27^0 317 = 8^m.49$ (Farbe $0^c.6$) (A. N. 5290) angeschlossen. Es wurde nach dem Schema: *aaaavvvvaaaavvvv*... gemessen, wobei die Zeitmomente mit Genauigkeit von einem Zehntel der Minute notiert wurden. Bei Berechnung der Helligkeit des Veränderlichen wurden meistens 4 nacheinanderfolgende Messungen zu einem Mittelwert verbunden. Aus 344 Einstellungen des Keiles auf den Veränderlichen erhielt ich auf diese Weise 79 Helligkeiten des Variabeln, die in der Tafel I angegeben sind. n — bezeichnet die Zahl der Einstellungen des Keiles auf den Variabeln.

I. Beobachtungen.

Datum	Weltzeit geoz.	M. Z. Gr. helioz.	n	Gr.	Bemerkung
1930		24262..			
		d		m	
Oktober 16	21^h 3^m	66.3827	4	9.13	
	14	.3905	4	9.39	1, 2, 3
	26	.3985	4	9.58	
	36	.4058	4	9.82	
	48	.4139	4	10.21	
	22 4	.4246	4	10.47	
	17	.4338	3	10.44	
	24	.4384	3	10.10	
	36	.4468	4	9.76	
	45	.4534	5	9.64	
	56	.4607	5	9.34	
	23 4	.4667	4	9.23	4
Oktober 17	17 48	67.2471	4	8.53	5, 6
	18 2	.2566	5	8.58	
	43	.2852	5	8.56	
	19 7	.3021	10	8.58	
	30	.3177	8	8.69	
	56	.3361	5	8.85	
		24262..			
		d		m	
Oktober 17	20^h 6^m	67.3431	4	9.01	
	11	.3466	4	9.13	
	22	.3545	4	9.19	
	41	.3673	4	9.53	
	54	.3760	4	9.75	
	21 2	.3816	4	9.84	7
Oktober 18	20 57	68.3785	4	10.49	4
	21 6	.3844	4	10 26	
	17	.3924	4	9.91	
	28	.3999	4	9.70	
	34	.4041	4	9.50	
	45	.4115	4	9.32	
	51	.4159	4	9.23	
	22 3	.4242	4	9.04	
	9	.4287	4	8.98	4, 1, 8
Oktober 19	17 27	69.2326	4	8.74	6
	40	.2420	4	8.80	
	48	.2471	4	8.78	

Datum	Weltzeit geoz.		M. Z. Gr. helioz.	n	Gr.	Bemerkung
			24262..			
	h	m	d		m	
Oktober 19	18	24	69.2719	4	8.84	3
		38	.2816	4	8.96	
		44	.2862	4	9.20	
		58	.2960	5	9.28	
	19	40	.3249	6	10.32	
		55	.3353	4	10.71	
	20	2	.3406	5	10.74	
		17	.3507	5	10.57	
		40	.3668	5	10.00	
		54	.3762	4	9.40	
	21	3	.3825	5	9.39	2
		22	.3959	4	9.17	4
Oktober 20	17	50	70.2486	4	8.96	
	18	0	.2556	4	8.89	
		6	.2598	4	9.08	
		17	.2672	4	9.23	
		44	.2860	4	9.79	
	19	15	.3073	4	10.34	
		27	.3162	4	10.54	
		34	.3210	4	10.40	
		46	.3292	4	10.09	
		53	.3341	5	9.83	

Datum	Weltzeit geoz.		M. Z. Gr. helioz.	n	Gr.	Bemerkung
			24262..			
	h	m	d		m	
Oktober 20	20	5	70.3422	4	9.47	
		9	.3452	5	9.65	
		27	.3577	4	9.31	
		37	.3644	5	9.23	
		54	.3769	5	9.04	2, 4
Oktober 21	17	23	71.2296	4	9.20	
		40	.2413	4	9.21	
		46	.2462	4	9.36	
		59	.2547	4	9.62	
	18	18	.2681	4	9.93	
		41	.2843	4	10.40	4
		46	.2874	4	10.35	
	21	11	.3827	5	8.66	
		27	.3996	4	8.70	
		36	.4054	5	8.80	
		52	.4166	5	8.54	
Oktober 22	21	8	72.3860	4	8.83	9
		23	.3968	4	8.79	
		33	.4033	4	8.77	1, 2
		51	.4160	4	8.72	
		58	.4198	4	8.62	4

Bemerkungen: 1. In der Nähe des Zeniths. — 2. Die Stellung unbequem. — 3. Die Luft klar. — 4. Die Luft sehr klar. — 5. Die Bilder sind neblig. — 6. In der Nähe des Horizontes. — 7. Es wird neblig; weitere Beobachtungen unmöglich. — 8. Stellung sehr unbequem. — 9. Der Himmel hat sich plötzlich geklärt. — 10. Die Bilder zittern. — 11. Die Bilder sind mässig.

Zwecks Berücksichtigung der Reduktion der Beobachtungsmomente auf die Sonne habe ich mit Hilfe der Formel:

Heliozentrische Zeit — Geozentrische Zeit =

$$-8^{m}.308 \times R \times \cos\beta \times \cos(\odot - \lambda)$$

folgende Tabelle II berechnet [Länge der Veränderlichen in der Ekliptik $\lambda_{1930.0} = 36^{0}\,50'.1$, $\log(8^{m}.308 \times \cos\beta) = 0.90520$]:

II. Reduktion auf die Sonne.

Datum		Korr.	Datum		Korr.	Datum		Korr.
Jan.	0^d	$+3^m.8$	Mai	10^d	$-7^m.9$	Sept.	17^d	$+5^m.8$
	10	+ 2.5		20	— 7.5		27	+ 6.7
	20	+ 1.1		30	— 6.9	Okt.	7	+ 7.4
	30	— 0.4	Juni	9	— 6.1		17	+ 7.8
Febr.	9	— 1.7		19	— 5.2		27	+ 8.0
	19	— 3.1		29	— 4.1	Nov.	6	+ 8.0
März	1	— 4.4	Juli	9	— 2.9		16	+ 7.7
	11	— 5.5		19	— 1.6		26	+ 7.2
	21	— 6.4		29	— 0.2	Dez.	6	+ 6.5
	31	— 7.1	Aug.	8	+ 1.1		16	+ 5.5
April	10	— 7.7		18	+ 2.4		26	+ 4.4
	20	— 8.0		28	+ 3.6		30	+ 3.2
	30	— 8.0	Sept.	7	+ 4.8			

Die Helligkeiten der Tafel I habe ich auf das Minimum E = + 3231 gemäss den Duganschen Lichtwechselelementen (Princeton Contr. Nr. 8_1):

$$\text{J. D. } 2423130^d.3136 + 0^d.971534 \times \text{E reduziert.} \qquad \text{(I)}$$

Ich erhielt folgende Normalgrössen (Tafel III) sowie die ihnen entsprechende Lichtkurve (Tafel IV):

III. Beobachtete Normalhelligkeiten von X Trianguli.

Phase	n	Gr.	Phase	n	Gr.	Phase	n	Gr.	Phase	n	Gr.
2426269^d.											
.2106	4	$8^m.57$	.2988	4	$9^m.21$	.3467	4	$10^m.43$	.3831	4	$9^m.31$
.2512	4	8.65	.3099	4	9.52	.3522	4	10.39	.3928	4	9.16
.2772	4	8.89	.3199	4	9.80	.3610	4	9.91	.4227	4	8.87
.2858	4	9.08	.3278	4	10.28	.3689	4	9.74	.4732	4	8.76
.2922	4	9.18	.3390	4	10.47	.3752	4	9.47	.4998	3	8.69

Auf Grund der Normalhelligkeiten der Tafel III erhielt ich:

$$M = 8^m.57 \qquad D = 0^d.2$$
$$m = 10^m.46 \qquad d = 0^d.020$$
$$m - M = 1^m.89$$

Normalminimum (M. Z. Gr.) helioz. $= 2426269^d.3415$.

Die beigefügte Figur 1 stellt den Verlauf der Normalhelligkeiten, sowie der Lichtkurve im Hauptminimum dar. *n* — in der Tafel III bezeichnet die Zahl der Beobachtungen der Tafel I, die zu einer Normalhelligkeit vereinigt wurden. Zu Ermitlung des „flachen Bodens" wurden in Nachtbarschaft des kleinsten Glanzes je zwei in der Phase nacheinander folgende Beobachtungen zu einem Mittelwert zusammengefasst.

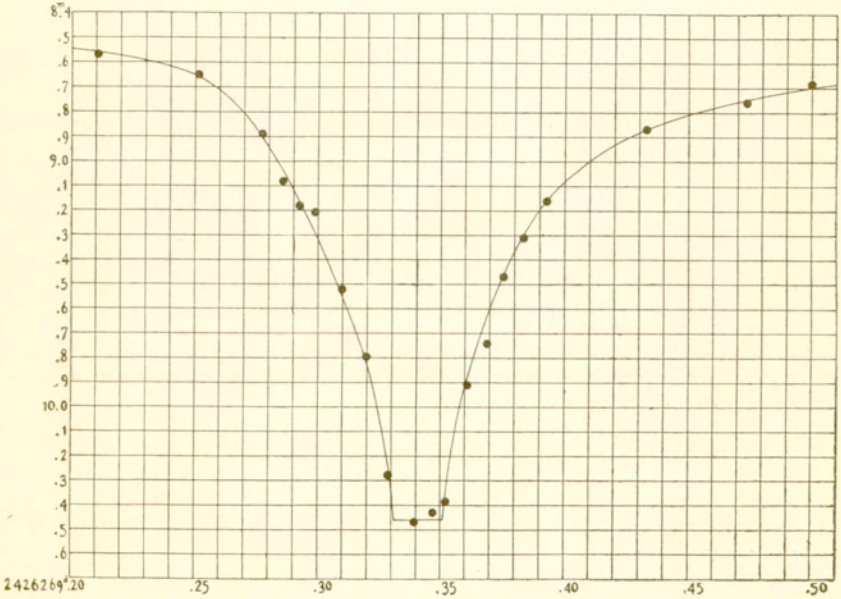


Fig. 1. Normalhelligkeiten und Lichtkurve von X Trianguli im Hauptminimum.

Die Lichtkurve hat in der Nähe des Hauptminimums folgenden Verlauf (Tafel IV):

IV. Der Verlauf der Lichtkurve in der Nähe des Hauptminimums.

Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase
$9^m.2$	$\pm 0^d.048$	$9^m.6$	$\pm 0^d.029$	$10^m.0$	$\pm 0^d.017$	$10^m.4$	$\pm 0^d.011$
9.3	.042	9.7	.025	10.1	.015	10.46	.000
9.4	.037	9.8	.022	10.2	.013		
9.5	.033	9.9	.019	10.3	.012		

In der Literatur dieses Sternes ist die Lichtwechselperiode bis jetzt als unveränderlich anerkannt. Da aber jetzt seit der Zeit der Entdeckung der Veränderlichkeit schon 10 Jahre verflossen sind, so war es schon sehr wohl möglich Änderungen der Periode aus dem vorhandenen Beobachtungsmaterial zu ermitteln. Zu diesem Zwecke stellte ich alle bis jetzt veröffentlichen Minima dieses Sternes in Normalepochen zusammen.

Beobachtungen, die nur in rohem Zustand gedruckt wurden oder noch im Manuskript bleiben, habe ich selbst bearbeitet. Aus 97 Beobachtungen von N. Ostergaard (Nord. Astr. Tidsskrift, VII_2, $VIII_2$), die mit Hilfe der Argelanderschen Methode angestellt wurden, habe ich folgende zwei heliozentrische Minima gewonnen:

J. D. (M. Z. Gr.) helioz.: $2424428^d.284$:
2424864.4995

Aus 112 mit derselben Methode angestellten Beobachtungen J. Mergentaler's, welche mir gütigst von dem Verfasser im Manuskript überliefert wurden, erhielt ich drei unten angegebene heliozentrische Normalepochen:

		n
J. D. (M. Z. Gr.) helioz.:	$2425212^d.310$	44
	2425892.390	25
	2426034.232	43

Im Resultat erhielt ich folgende 18 heliozentrische Normalepochen von 10 verschiedenen Beobachtern (Tafel V):

V. Normalminima von X Trianguli.

B	p	E_I	$B-R_I$	$E_{II}=E_{III}$	$B-R_{II}$	$B-R_{III}$	Beobachter	Autorität	Bemerkung
$2422786\overset{d}{.}3878$	3	— 354	— $0\overset{d}{.}0028$	+ 14	— $0\overset{d}{.}0008$	— $0\overset{d}{.}0008$	Neujmin	A. N. 5196	photographiesch
3208.0361	8	+ 80	— 0.0002	+ 448	+ 0.0013	— 0.0007	Leiner	A. N. 5250	visual
3404.2882	8	+ 282	+ 0.0020	+ 650	+ 0.0034	+ 0.0010	„	„	„
3732.6646	2	+ 620	— 0.0001	+ 988	+ 0.0009	— 0.0009	Dugan	Princ. Contr. 8	photographiesch
3733.6368	1	+ 621	+ 0.0006	+ 989	+ 0.0016	— 0.0002	„	„	„
3778.3277	13	+ 667	+ 0.0009	+ 1035	+ 0.0019	+ 0.0002	Jordan	Publ. All. Obs. VII	„
4114.4774	4	+ 1013	— 0.0001	+ 1381	+ 0.0005	+ 0.0005	Dugan	Princ. Contr. 8	„
4428.284	1	+ 1336	+ 0.0010	+ 1704	+ 0.0013	+ 0.0029	Ostergaard	Nor. Astr. Tids. VII	visual
4472.9707	7	+ 1382	— 0.0029	+ 1750	— 0.0026	— 0.0008	Nijland	A. N. 5789	„
4848.9568	10	+ 1769	— 0.0004	+ 2137	— 0.0006	+ 0.0018	„	„	„
4864.4995	4	+ 1785	— 0.0023	+ 2153	— 0.0024	— 0.0001	Ostergaard	Nor. Astr. Tids. VIII	„
5212.310	4	+ 2143	— 0.0010	+ 2511	— 0.0015	— 0 0002	Mergentaler	Manuskript	„
5421.1904	16	+ 2358	— 0.0004	+ 2726	— 0.0011	— 0.0010	Nijland	A. N. 5789	„
5589.271	4	+ 2531	— 0.0048	+ 2899	+ 0.0040	+ 0.0032	Olczak	A. A. c, I, 93	„
5856.440	11	+ 2806	+ 0.0020	+ 3174	+ 0.0008	— 0.0011	Pagaczewski	A. A. c, I, 154	„
5892.390	3	+ 2843	+ 0.0052	+ 3211	+ 0.0040	+ 0.0020	Mergentaler	Manuskript	„
6034.232	4	+ 2989	+ 0.0033	+ 3357	+ 0.0019	— 0.0004	„	„	„
6269.3415	8	+ 3231	+ 0.0015	+ 3599	0.0000	— 0.0023	Gadomski	„	Photometer

p — bezeichnet die Gewichte der einzelnen Normalminima, wobei für eine Gewichtseinheit je 10 den verminderten Glanz im Hauptminimum betreffenden Beobachtungen angenomen wurden. Eine Betrachtung der vierten Kolumne der Tafel V zeigt, dass die Werte von $B-R_I$, in Bezug auf die Duganschen Elementen (I), einen deutlichen linearen sowie periodischen Gang aufweisen. Die Werte $B-R_I$ nehmen nähmlich systematisch zu, und wechseln dreimal das Zeichen. Es ist ersichtlich, dass die Länge der Periode um $0^d.000001 = 0^s.1$ verlängert und die Ausgangsepoche verschoben werden muss.

Ich erhielt folgende neue lineare Elemente:

$$\text{J. D. } 2422772^d.78708 + 0^d.971535 \times E \tag{II}$$

In der sechsten Kolumne der Tafel V sind die Werte für $B-R_{II}$ angegeben. Sie zeigen noch deutlicher, als die Werte $B-R_I$, den periodischen Gang der Abweichungen. Nach Einführung eines periodischen Gliedes in die Elemente (II) habe ich folgende periodische Elemente (III), die am besten alle bis jetzt beobachteten Minima dieses Sternes vorstellen, bekommen:

$$\text{J. D. } 2422772^d.78708 + 0^d.971535 \times E + 0^d.00237 \times \sin(0^{\circ}.1309 \times E) \tag{III}$$

Die betreffenden Abweichungen $B-R_{III}$ sind in der siebenten Kolumne der Tafel V zusammengestellt. Für die Summe der Kwadrate der $B-R$ multipliezinrt durch $\sqrt{p}$ erhielt ich folgende Werte:

$$\Sigma (B-R_I)^2 \sqrt{p} = 0.00019828 \qquad \Sigma (B-R_{II})^2 \sqrt{p} = 0.00016640$$

$$\Sigma (B-R_{III})^2 \sqrt{p} = 0.00007664 .$$

Die beigefügte Figur 2 stellt den Verlauf der $B - R_{II}$ sowie $B - R_{III}$ der Tafel V dar:

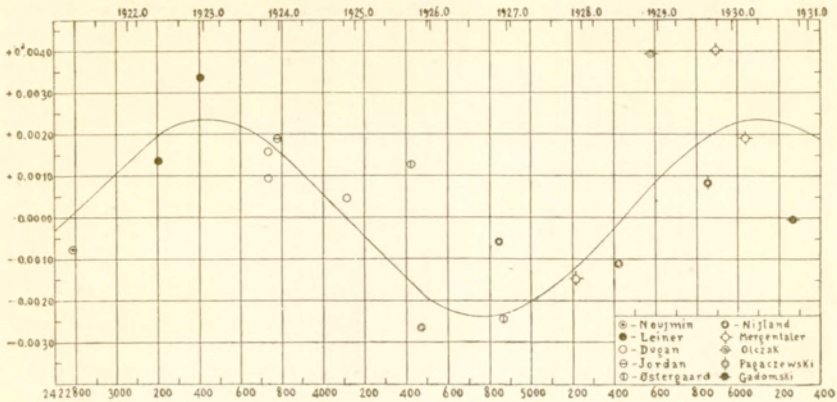


Fig. 2. Der Verlauf der $B - R_{II}$ und $B - R_{III}$ der Tafel V.

Die Werte von $B - R_{II}$ und $B - R_{III}$ der Tafel V habe ich mit Berücksichtigung der Gewichte in Mittelwerte vereinigt. Ich erhielt folgende mittlere Werte, die in der Tafel VI tabuliert und in Figur 3 dargestellt sind. Die entsprechenden Werte für die Summe der Kwadrate von $B - R$ multipliziert durch $\sqrt{p}$ sind:

$$\Sigma (B - R_I)^2 \sqrt{p} = 0.00006643 \qquad \Sigma (B - R_{II})^2 \sqrt{p} = 0.00007669$$
$$\Sigma (B - R_{III})^2 \sqrt{p} = 0.00001391 .$$

$\Sigma (B - R_{II})^2 \sqrt{p} > \Sigma (B - R_I)^2 \sqrt{p}$ nur wegen zufälliger Verteilung der Beobachtungen.

VI. Mittelwerte von $B - R_I$, $B - R_{II}$ und $B - R_{III}$.

E_I	$B - R_I$	$B - R_{II}$	$B - R_{III}$	p
— 354	$-0\overset{d}{.}0028$	$-0\overset{d}{.}0008$	$-0\overset{d}{.}0008$	3
+ 181	+ 0.0009	+ 0.0024	+ 0.0002	16
+ 658	+ 0.0008	+ 0.0018	+ 0.0001	16
+ 1013	— 0.0001	+ 0.0005	+ 0.0005	4
+ 1376	+ 0.0024	— 0.0021	— 0.0004	8
+ 1774	— 0.0010	— 0.0011	+ 0.0012	14
+ 2315	— 0.0005	— 0.0012	— 0.0008	20
+ 2733	+ 0.0002	+ 0.0017	0.0000	15
+ 3089	+ 0.0027	+ 0.0013	— 0.0009	15

Aus der obigen Diskussion aller bisherigen veröffentlichen Beobachtungen von X Trianguli ist ersichtlich, dass die Verfinsterungsperiode dieser Veränderlichen nicht konstant bleibt, sondern kleinen periodischen Schwankungen um den Mittelwert $0^d.971535$ im Zeitraum ca $2750\,E = 7.3$ Jahre unterliegt. Die

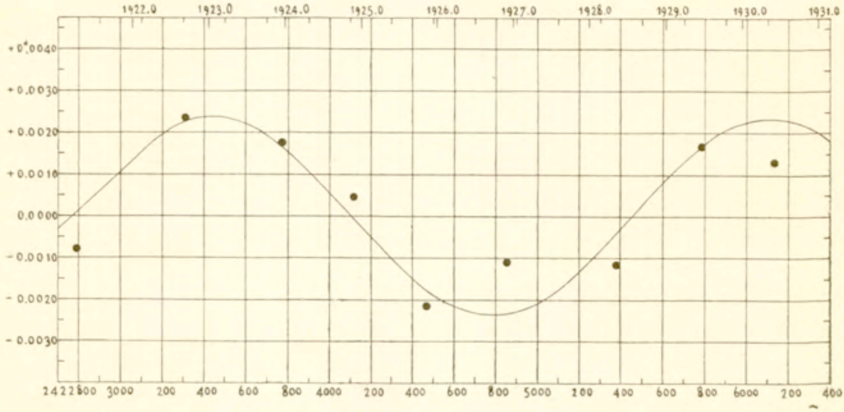


Fig. 3. Der Verlauf der $B-R_{II}$ und $B-R_{III}$ der Tafel VI.

Amplitude der Schwankungen der Periode — gemäss den Elementen (III) — beträgt nur $0^d.000010_{83} = 0^s.93$. Der Maximalwert $0^d.971540_4$ entspricht den Epochen $E_{III} = 0, +2750$, der Minimalwert $0^d.971529_6$ dagegen der Epoche $E_{III} = +1375$. Der Mittelwert $0^d.971535$ wurde während $E_{III} = +687, +2063, +3438$ erreicht.

Die Amplitude der $B-R_{II}$ beträgt nur $0^d.00474 = 6^m.8$. Die bisherigen Beobachtungen, die aus der Zeit 1921—1931 stammen, bedecken zeitlich nicht viel mehr als eine Amplitude. Es sind weitere gut gesicherte Normalepochen der Minima dieses Sternes nötig, um die oben erwähnten sekulären Änderungen der Periode in der Zukunft besser festzustellen.

Warszawa, Universitäts-Sternwarte.
November 1931.

Zusatz. Im Januar 1932 erhielt ich vom Herrn T. Olczak eine Abschrift seiner 43 Orginalbeobachtungen von X Trianguli. Eine neue Reduktion dieser Beobachtungen mit Hilfe der Stufenskala gab: Min. helioc. (M. Z. Gr.) $= 2425589^d.2707$, welches etwas besser an die Elemente (III) fasst.

Hanna Szmuszkowiczówna.

O pewnym lemmacie Pólyi.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dn. 28 maja 1931 r.

Streszczenie.

Praca niniejsza stanowiąca uzupełnienie komunikatu p. t. „O średnicy pozaskończonej” (Spr. Warsz. Tow. Nauk. 15 stycznia 1931 r.) zawiera uproszczony i nie posługujący się teorją liczb porządkowych pozaskończonych dowód lemmatu Pólyi [1]), na którym opiera się zastosowanie średnicy pozaskończonej do zagadnienia przedłużenia analitycznego.

Hanna Szmuszkowiczówna.

Sur un lemme de M. Pólya.

Note présenté par M. S. Mazurkiewicz à la séance du 28 Mai 1931.

Le théorème de M. Pólya, d'après lequel le diamétre transfini d'un ensemble fermé et borné est égal au diamétre transfini du noyau parfait de cet ensemble a été démontré par M. Pólya [1]) avec l'aide d'un lemme assez compliqué. Des démonstrations simplifiées du théorème de M. Pólya, évitant l'emploi du lemme cité ont été donné par M. Fekete [2]) et par moi [3]). Le lemme de M. Pólya garde néamoins un intérêt *per se,* car il sert de base à une application importante de la notion du diamètre transfini à la théorie du prolongement analytique. Ce pourquoi je donne ici une démonstration nouvelle de ce lemme, démonstration qui évite l'emploi des nombres transfinis et qui est basée uniquement sur les résultats de ma note citée.

En suivant M. Pólya appellons *courbe régulière* une ligne simple fermée composée d'un nombre fini d'arcs de circonférences. L étant une courbe régulière, son intérieur sera désigné par $I(L)$. La frontière d'un domaine G sera désignée par $F(G)$. A étant un ensemble borné, fermé nous désignerons par A_c son noyau parfait, par $\tau(A)$ son diamètre transfini.

[1]) Pólya: Math. Ann. 99 (1928) p. 687—706.

[2]) Fekete: Math. Zeitschr. 32 (1930) p. 108—115.

[3]) Szmuszkowiczówna: ces Comptes Rendus. 15 Janvier 1931 p. 1—8.

Lemme de M. Pólya. *Soit A un ensemble borné et fermé, $\tau = \tau(A)$; η un nombre positif. Il existe deux systèmes de courbes régulières: extérieures l'une à l'autre: $L_1, L_2 \ldots L_r$; $M_1, M_2 \ldots M_s$ et une suite de polynomes $\{R_m(z)\}$, $m = 1, 2 \ldots$ tels que:*

(I) $A_c \subset \sum_{k=1}^{r} I(L_k)$; $A \subset \sum_{k=1}^{r} I(L_k) + \sum_{k=1}^{s} I(M_k)$.

(II) $A_c \times I(L_k) \neq 0$, $k = 1, 2 \ldots r$; $A \times I(M_k) \neq 0$, $k = 1, 2 \ldots s$.

(III) $\rho(z, A_c) < \eta$ *pour* $z \in \sum_{k=1}^{r} L_k$; $\rho(z, A) < \eta$ *pour* $z \in \sum_{k=1}^{s} M_k$.

(IV) $R_m(z)$ *est de degré m; le coefficient de z^m dans $R_m(z)$ est* $= 1$.

(V) *La suite $\{R_m(z)(\tau + \eta)^{-m}\}$ est uniformément bornée pour $z \in \sum_{k=1}^{r} L_k$; la suite $\{R_m(z) \cdot \eta^{-m}\}$ est uniformément bornée pour* $z \in \sum_{k=1}^{s} M_k$.

Soit $\frac{\sigma}{4} =$ (maximum $|z|$) $+ \eta$; pour $z \in A$.

Soit G celui des domaines connexes déterminés dans le plan par A_c qui contient le point à l'infini, B le complémentaire de G. B est borné, fermé et $F(G) \subset A_c \subset B$. D'après le théorème de M. Pólya et une remarque de M. Löwner[1]), on a

(1) $$\tau(B) = \tau(A_c) = \tau = \tau(A).$$

$A - B$ étant dénombrable il résulte par un raisonnement géometrique connu, l'existence d'une suite de domaines $\{H_j\}$, $j = 1, 2 \ldots$ telle que:

(a_1) $B \subset H_j$; $\prod_{j=1}^{\infty} \overline{H}_j = B$.

(a_2) H_j est formé d'un nombre fini de composants.

---

[1]) Szegö: Math. Zeitschr. 21 (1924) p. 203—208.

(a_3) La frontière de chaque composant de H_j est une courbe régulière, — ces courbes étant sans points communs.

(a_4) $F(H_j) \times (A - B) = 0$.

(a_5) Chaque composant de H_j contient un point de B, donc un point de $F(G)$, donc un point de A_c.

D'après (a_1), on a: $\lim\limits_{j=\infty} \tau(\overline{H}_j) = \tau$ [1]). Donc nous pouvons déterminer un indice j_1 tel que:

$$\tau(\overline{H}_{j_1}) < \tau + \frac{\eta}{2} \tag{2}$$

$$\rho(z, B) < \eta \quad \text{pour} \quad z \varepsilon F(H_{j_1}) \tag{3}$$

(3) entraîne $\rho(z, F(G)) < \eta$, donc aussi:

$$\rho(z, A_c) < \eta \quad \text{pour} \quad z \varepsilon F(H_{j_1}). \tag{4}$$

Désignons par $L_1, L_2 \ldots L_r$ les frontières de composants de H_{j_1}.

Posons: $C = A - \overline{H}_{j_1}$. C est dénombrable et d'après (a_1) — fermé. On a donc $\tau(C) = 0$. D'autre part on peut déterminer une suite de domaines $\{K_i\}$ telt que.

(b_1) $C \subset K_i$; $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \overline{K}_i = C$.

(b_2) K_i est formé d'un nombre fini de composants.

(b_3) Les frontières de ces composants sont des courbes régulières sans points communs deux à deux; elles sont extérieurs aux courbes $L_1, L_2 \ldots L_r$ et vice versa.

(b_4) chaque composant de K_i contient un point de C.

Soit

$$\alpha = \frac{\log(\tau + \eta) - \log\left(\tau + \frac{\eta}{2}\right)}{\log \sigma - \log\left(\tau + \frac{\eta}{2}\right)} \tag{5}$$

comme $\frac{\sigma}{2} \geqq \tau + 2\eta > \tau + \frac{\eta}{2}$, le nombre α est positif.

[1]) comp. l. c. [3]) p. 7.

D'après (b_1) nous pouvons déterminer un indice i_1 tel que:

(6) $$\rho(z, C) < \eta \quad \text{pour} \quad z \varepsilon F(K_{i_1})$$

(7) $$\tau(\bar{K}_{i_1}) < \left(\frac{\eta}{1+\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Désignons les frontières des composants de K_{i_1} par M_1, $M_2 \dots M_s$. Les courbes $L_1, L_2 \dots L_r$, $M_1, M_2 \dots M_s$ satisfont évidement aux conditions (I), (II) et (III).

Soit $p_n = E(\alpha n)$. On aura: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p_n}{n} = \alpha$. Désignons par $P_n(z)$, $Q_n(z)$ respectivement les polynomes de Tchébyscheff de dégré n attachés aux ensembles $\bar{H}_{j_1}$, $\bar{K}_{i_1}$. Posons:

(8) $$R_n(z) = P_{n-p_n}(z) \,.\, Q_{p_n}(z).$$

La suite $\{R_n(z)\}$ satisfait à la condition (IV). Désignons par $P_n^{(1)}$, $Q_n^{(1)}$, $R_n^{(1)}$ les maxima de $|P_n(z)|$, $|Q_n(z)|$, $|R_n(z)|$ pour $z \varepsilon \bar{H}_{j_1}$, par $P_n^{(2)}$, $Q_n^{(2)}$, $R_n^{(2)}$ leur maxima pour $z \varepsilon \bar{K}_{i_1}$. Comme $\frac{\sigma}{4} \geq$ maximum (z) pour $z \varepsilon \bar{H}_{j_1} + \bar{K}_{j_1}$ on aura [1]):

(9) $$Q_n^{(1)} < \sigma^n > P_n^{(2)}.$$

En se servant de (2), (5), (7), (9) on obtient les inégalités:

Pour $z \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{r} L_k \subset \bar{H}_{j_1}$:

(10) $$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{R_n^{(1)}} \leq \overline{\lim_{n=\infty}} \left(P^{(1)}_{n-p_n}\right)^{\frac{1}{n}} \,.\, \overline{\lim_{n=\infty}} \left(Q^{(1)}_{p_n}\right)^{\frac{1}{n}} <$$
$$\left(\tau + \frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau + \frac{\eta}{2}}\right)^{\alpha} = \tau + \eta.$$

Pour $z \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{s} M_k \subset \bar{K}_{i_1}$

(11) $$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{R_n^{(2)}} \leq \overline{\lim_{n=\infty}} \left(P^{(2)}_{n-p_n}\right)^{\frac{1}{n}} \overline{\lim_{n=\infty}} \left(Q^{(2)}_{p_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \sigma^{1-\alpha} \,.\, \frac{\eta}{1+\sigma} < \eta.$$

De (10) et (11) résulte que la condition (V) est satisfaite. q. e. d.

---

[1]) l. c. [3]) p. 1—7.

Stefanja Braun.

O pewnym związku między funkcjami klasy $\leqslant 1$ i dopełnieniami zbiorów analitycznych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 28 maja 1931 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym udowadniam następujące

Twierdzenie. *Dla każdego zbioru linjowego E, będącego dopełnieniem zbioru analitycznego, istnieje funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$ klasy $\leqslant 1$ — taka, że E jest zbiorem wszystkich tych liczb rzeczywistych x, które spełniają warunek:*

$$f(x) \neq f(t), \quad dla \quad t < x.$$

Stefanja Braun.

Sur un rapport entre les fonctions de première classe et les ensembles $C(A)$.

Présenté par M. W. Sierpiński dans le séance du 28 Mai 1931.

$f(x)$ étant une fonction d'une variable réelle, désignons, d'après M. Sierpiński, par $P(f)$ l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont à la condition:

$$f(t) \neq f(x) \quad \text{pour} \quad t < x.$$

M. Sierpiński a établi [1]) une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe, pour un ensemble E donné, une fonction continue $f(x)$ (définie dans l'intervalle $J(0 \leqslant x \leqslant 1)$) telle que $P(f) = E$.

M. Sierpiński a démontré en outre le théorème suivant:

Si $f(x)$ est une fonction de Baire, $P(f)$ est un ensemble $C(A)$ (c'est-à-dire complèmentaire d'un ensemble analytique) [2]).

Je me propose de démontrer ici que le théorème inverse est encore vrai, même si nous ne considérons que les fonctions de classe $\leqslant 1$.

---

[1]) *Fund. Math.* t. XV, p. 287.

[2]) ibid. p. 290.

Théorème. *E étant un ensemble $C(A)$, il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$ de classe $\leqslant 1$ tel que $P(f)=E$.*

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de la propriété suivante des ensembles analytiques:

Propriété π. *P étant un ensemble linéaire (non vide) parfait et non dense [1]), chaque ensemble analytique linéaire (non vide) peut être considéré comme l'ensemble de valeurs d'une fonction de classe $\leqslant 1$ (relativement à P), définie dans P [2]).*

Soit maintenant E l'ensemble $C(A)$ donné. Désignons par $H=C(E)$ le complémentaire de l'ensemble E par rapport à l'axe OX.

Nous avons à distinguer les trois cas suivants:

I-er cas. H est *au plus dénombrable.*

II-ème cas. L'ensemble H étant *non dénombrable,* l'ensemble de tous ses points de condensation est *non borné inférieurement.*

III-ème cas. H étant *non dénombrable,* l'ensemble de tous ses points de condensation est *borné inférieurement.*

I. *H est au plus dénombrable.*

Nous pouvons supposer que H est non vide, car autrement la fonction $f(x)=x$ donnerait une solution triviale du problème. Soit

(1) $$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$$

une suite finie ou dénombrable formée de tous les éléments de H.

H étant au plus dénombrable, il existe pour chaque nombre x_n de la suite (1) un nombre réel t_n tel que

(2) $$\begin{cases} t_n < x_n < t_n + \dfrac{1}{n}, \\ t_n \in E. \end{cases}$$

Définissons maintenant la fonction $f(x)$ par les conditions suivantes:

(3) $$\begin{cases} f(x)=x, \quad \text{si} \quad x \in E, \\ f(x_n)=t_n. \end{cases}$$

---

[1]) Cette dernière condition n'est pas essentielle.

[2]) J'omets la démonstration de cette proposition évidente.

Les formules (2) et (3) donnent:

$$f(x_n) = f(t_n) \, .$$

La fonction $f(x)$ étant biunivoque sur E, la démonstration que $P(f) = E$ n'offre aucune difficulté.

Je dis que $f(x)$ est continue aux points appartenant à E. En effet, $f(x)$ étant continue sur E en tout point de l'ensemble E, il suffit de démontrer cette proposition en admettant que la suite (1) est infinie.

Supposons donc que l'on a $x_0 \in E$, et soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné.

On a d'après (3):

$$f(x_0) = x_0 \, . \tag{4}$$

Choisissons un nombre naturel N tel que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon/2 \tag{5}$$

et posons:

$$\delta_0 = \min. [\, |x_0 - x_1|\, , \; |x_0 - x_2|\, , \; \ldots |x_0 - x_N|\,] \tag{6}$$

et

$$\delta = \min. [\delta_0 \, , \; \varepsilon/2] \, . \tag{7}$$

H étant le complémentaire de E, nous en concluons, d'après $x_0 \in E$, que $\delta > 0$.

Soit x un nombre réel satisfaisant à l'inégalité

$$|x - x_0| < \delta \, . \tag{8}$$

Si $x \in E$, on a d'après (3), (4), (7), (8):

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon/2 < \varepsilon \, .$$

Si $x \in C(E)$, x est un élément de la suite (1), p. ex. $x = x_n$, l'indice n satisfaisant, d'après (6), (7) et (8), à l'inégalité $n > N$.

Il en résulte, en vertu de (3):

$$f(x) = t_n \, , \quad \text{où} \quad t_n < x < t_n + \frac{1}{n} \, , \tag{9}$$

donc, d'après (8),

$$|t_n - x_0| \leqslant |t_n - x| + |x - x_0| < \frac{1}{n} + \delta \, ,$$

et, selon $n > N$, (5) et (7),

$$|t_n - x_0| < \varepsilon \, . \tag{10}$$

Comme, d'après (4) et (9), $f(x_0) = x_0$ et $f(x) = t_n$, donc $|f(x) - f(x_0)| = |t_n - x_0|$, il résulte de la formule (10):

(11) $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La condition (8) entraîne donc en tous cas l'inégalité (11), d'où il résulte que $f(x)$ est continue au point x_0.

Les points de discontinuité de la fonction $f(x)$ sont donc contenus tous dans l'ensemble dénombrable H, d'où il s'en suit que $f(x)$ est une fonction de classe 1 de Baire.

II. *H est un ensemble non dénombrable dont l'ensemble de tous les points de condensation $K(H)$ est non borné inférieurement.*

Posons

$$I_m = \underset{x}{\mathrm{E}}[-m < x < -m+1] \text{ [1]}.$$

L'ensemble $K(H)$ étant non borné inférieurement, il existe une infinité d'indices m tels que

(12) $$I_m \cdot K(H) \neq 0.$$

Soient $D_1, D_2, D_3, \ldots$ ceux parmi les intervalles I_m qui satisfont à la condition (12). Désignons par a_n et b_n $(a_n < b_n)$ les extrémités de l'intervalle D_n.

On a donc:

(13) $$D_k \cdot D_n = 0, \quad \text{pour} \quad k \neq n$$

(14) $$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = -\infty$$

(15) $$K(H) \cdot D_n \neq 0 \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Posons

(16) $$Q_n = D_n \cdot H \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

H étant un ensemble analytique, Q_n l'est aussi, et on voit d'après (15) que Q_n est non dénombrable. On en conclut que cet ensemble contient un ensemble parfait (non vide) P_n, et nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble P_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ est non dense.

Les ensembles P_n satisfont, d'après (13) et (16), aux conditions suivantes:

(17) $$P_n \subset D_n \cdot H$$

---

[1]) c'est-à-dire: I_m est l'intervalle ouvert, formé de tous les nombres réels x tels que $-m < x < -m+1$.

et

(18) $$P_n \cdot P_k = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq k.$$

Posons

(19) $$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Les ensembles P_n $(n=1, 2, 3\ldots)$, contenus (d'après (17) et (13)) dans les intervalles disjoints de longueur constante, étant fermés, l'ensemble P l'est aussi.

H étant un ensemble analytique et non vide, il en résulte, d'après la propriété π énoncée plus haut, qu'il existe pour tout n naturel une fonction $f_n(x)$ définie sur P et telle que

(20) $$\begin{cases} 1^0 & f_n(x) \text{ est de classe} \leqslant 1 \text{ sur } P_n \\ 2^0 & f_n(P_n) = H \qquad (n=1, 2, 3\ldots)\ ^{1)}. \end{cases}$$

Posons maintenant:

(21) $$f(x) = f_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in P_n$$

et

(22) $$f(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in C(P).$$

D'après (19), la fonction $f(x)$, définie par les formules (21) et (22), est univoque et bien déterminée pour tout x réel.

Je dis qu'elle satisfait à toutes les conditions du théorème.

1. *$f(x)$ est de classe $\leqslant 1$.*

Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ sont, comme nous l'avons vu, de classe $\leqslant 1$ relativement aux ensembles P_n. Les ensembles P_n $(n=1, 2, 3\ldots)$ étant contenus dans les intervalles disjoints, on en conclut que $f(x)$ est de classe $\leqslant 1$ relativement à l'ensemble P.

D'après (22), $f(x)$ est continue sur $C(P)$. Or, P étant fermé, donc $C(P)$ étant ouvert, il en résulte, comme on le vérifie sans peine, que $f(x)$ est de classe $\leqslant 1$.

2. Il résulte des formules (19), (21), (20) que l'on a:

---

[1]) F étant un ensemble donné, $f(F)$ désigne l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour $x \in F$.

$$f(P) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(P_n) = H. \tag{23}$$

D'après (17) et (19), l'ensemble P est contenu dans le complémentaire H de l'ensemble E, donc $E \subset C(P)$. Il en résulte, en vertu de (22), que pour chaque nombre réel x appartenant à l'ensemble E on a: $f(x) = x$, donc $f(E) = E$.

On en déduit, d'après (23), que

$$f(E) \cdot f(P) = 0. \tag{24}$$

La fonction $f(x)$ étant (d'après (22)) biunivoque sur l'ensemble $C(P)$, il résulte de (24) que si $x_0 \in E$, la condition $t \neq x_0$, donc à plus fort raison la condition $t < x_0$, entraîne l'inégalité $f(t) \neq f(x_0)$.

On en déduit la relation

$$E \subset P(f). \tag{25}$$

Supposons maintenant que

$$x_0 \,\overline{\in}\, E, \quad \text{donc} \quad x_0 \in H. \tag{26}$$

L'ensemble P étant contenu dans H, $H = P + (H - P)$, donc $x_0 \in P$ ou bien $x_0 \in H - P$.

Si $x_0 \in P$, on voit, d'après (23), que $f(x_0) \in H$.

Si $x_0 \in H - P$, x_0 étant contenu dans $C(P)$, on a d'après (22): $f(x_0) = x_0$, donc $f(x_0) \in H - P$.

La formule (26) entraîne donc en tout cas la relation:

$$f(x_0) \in H. \tag{27}$$

Par conséquent il existe (d'après (20) et (21)) pour tout n naturel un point x_n tel que

$$x_n \in P_n \tag{28}$$

et

$$f(x_n) = f(x_0). \tag{29}$$

Les formules (28) et (17) impliquent:

$$a_n < x_n < b_n,$$

donc, d'après (14),

$$\lim_{n=\infty} x_n = -\infty,$$

d'où il résulte qu'il existe un nombre naturel n tel que

(30) $$x_n < x_0 .$$

Les formules (29) et (30) entraînent la relation

(31) $$x_0 \in P(f) .$$

La formule (31) étant une conséquence de (26), il en résulte :

$$P(f) \subset E ,$$

ce qui donne, d'après (25):

$$P(f) = E .$$

III. *H est non dénombrable; l'ensemble $K(H)$ de tous ses points de condensation est borné inférieurement.*

Soit a la borne inférieure de l'ensemble $K(H)$.

Désignons par Z, respectivement par T, l'ensemble de tous les nombres réels x *plus petits,* respectivement *plus grands* que a.

On a donc

(32) $$Z + T = X - (a) \text{ [1]} .$$

Posons :

(33) $$E_1 = E \cdot Z , \quad E_2 = E \cdot T$$

(34) $$H_1 = H \cdot Z , \quad H_2 = H \cdot T.$$

On en déduit les formules suivantes :

(35) $$E_1 + E_2 = E - (a)$$

(36) $$H_1 + H_2 = H - (a)$$

(37) $$Z = E_1 + H_1$$

(38) $$T = E_2 + H_2 .$$

a étant la borne inférieure de l'ensemble $K(H)$, on a

(39) $$K(H) \cdot Z = 0 ,$$

d'où il résulte que H_1 (contenu dans H) est un ensemble au plus dénombrable (puisqu'on aurait autrement: $K(H_1) \cdot H_1 \subset K(H) \cdot Z \neq 0$, contrairement à (39)) [2]).

---

[1]) X désigne l'ensemble de tous les nombres réels, (a) désigne l'ensemble composé d'un seul point a.

[2]) F étant l'ensemble donné, $K(F)$ désigne l'ensemble de tous ses points de condensation.

Nous avons donc $K(H_1) = 0$, et, selon (36):

$$K(H) = K(H - (a)) = K(H_1) + K(H_2) = K(H_2). \tag{40}$$

$K(H)$ étant fermé, on a $a \in K(H)$. L'ensemble de tous les points de condensation d'un ensemble non dénombrable étant parfait, il en résulte, d'après (32) et (39), que a est un point limite de l'ensemble $K_1 = K(H) \cdot T$.

Soient maintenant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions croissantes dont l'une est définie sur l'ensemble Z et l'autre sur T, transformant d'une manière biunivoque et bicontinue les ensembles Z et T en l'ensemble X de tous les nombres réels.

Nous avons donc les relations:

$$\begin{cases} \varphi(Z) = X, \\ \psi(T) = X. \end{cases} \tag{41}$$

Posons:

$$E_1^* = \varphi(E_1), \quad E_2^* = \psi(E_2) \tag{42}$$

$$H_1^* = \varphi(H_1), \quad H_2^* = \psi(H_2) \tag{43}$$

et

$$K_1^* = \psi(K_1). \tag{44}$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant biunivoques, on en conclut, d'après (41), (37), (38), (42), (43), que l'on a:

$$X = \varphi(Z) = \varphi(E_1 + H_1) = \varphi(E_1) + \varphi(H_1) = E_1^* + H_1^*,$$

$$X = \psi(T) = \psi(E_2 + H_2) = \psi(E_2) + \psi(H_2) = E_2^* + H_2^*,$$

donc

$$\begin{cases} H_1^* = C(E_1^*), \\ H_2^* = C(E_2^*). \end{cases} \tag{45}$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant biunivoques et bicontinues et la propriété d'être un ensemble $C(A)$ étant un invariant topologique, les ensembles E_1^* et E_2^* sont des ensembles $C(A)$ (car les ensembles E_1 et E_2, dont chacun est le produit du complémentaire analytique E par une demi-droite, sont eux-mêmes des ensembles $C(A)$).

On voit en outre que l'ensemble H_1^* est au plus dénombrable (d'après (43) et la définition de l'ensemble H_1) et que les relations (44), (40) et (43) entraînent la formule suivante:

$$K_1^* = \psi[K(H_2) \cdot T] \subset K[\psi(H_2)] = K(H_2^*). \tag{46}$$

Le point a étant un point limite de l'ensemble K_1, il résulte de (46) ($\psi(x)$ étant une fonction croissante qui transforme T en X) que l'ensemble $K(H_2^*)$ est non borné inférieurement.

Le complémentaire H_1^* de E_1^* est, comme nous l'avons vu, au plus dénombrable, et le complémentaire H_2^* de E_2^* est un ensemble non dénombrable dont l'ensemble de points de condensation est non borné inférieurement; or, les ensembles E_1^* et E_2^* étant des complémentaires analytiques, nous sommes ainsi ramenés aux cas déjà considerés.

Il existe donc deux fonctions de classe $\leqslant 1$ $f_1(x)$ et $f_2(x)$ telles que

$$(47)\qquad \begin{cases} P(f_1) = E_1^*, \\ P(f_2) = E_2^*. \end{cases}$$

On voit sans peine, d'après la définition de l'ensemble $P(f)$, que si $f(x)$ est une fonction arbitraire donnée et $\vartheta(x)$ est une fonction croissante, la fonction $\omega(x) = \vartheta(f(x))$ satisfait à la relation $P(\omega) = P(f)$. Il en résulte, en vertu de l'existance d'une fonction croissante qui établit une homéomorphie entre l'ensemble X et l'intérieur d'un intervalle, que nous pouvons toujours supposer que l'on a:

$$(48)\qquad \begin{cases} f_1(X) \subset I_1, \\ f_2(X) \subset I_2, \end{cases}$$

où I_1 désigne l'intervalle $(0 < x < 1)$ et I_2 l'intervalle $(1 < x < 2)$.

Posons:

$$(49)\qquad \begin{cases} f(x) = f_1(\varphi(x)) \quad \text{pour} \quad x \in Z, \\ f(x) = f_2(\psi(x)) \quad \text{pour} \quad x \in T. \end{cases}$$

D'après (41), la fonction $f(x)$ est univoque et bien déterminée pour tout point de l'ensemble $Z + T = X - (a)$.

Il ne reste qu'à définir $f(x)$ au point a.

Posons $f(a) = 2$, si $a \in E$.

Si $a \in H$, posons

$$(50)\qquad f(a) = f(x_0),$$

x_0 étant un point arbitraire de l'ensemble Z.

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant de classe $\leqslant 1$ et $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant continues sur Z, respectivement sur T, on voit que la fonction $f(x)$, définie par les formules (49) et (50), est une fonction d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$ de Baire.

Les relations (49) et (48) donnent:

$$f(Z) \subset I_1,$$
$$f(T) \subset I_2,$$

donc, les intervalles I_1 et I_2 étant disjoints,

(51) $$f(Z) \cdot f(T) = 0.$$

On a, d'après (50) et (51),

(52) $$f(a) \,\overline{\in}\, f(T).$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant croissantes, on déduit de (49), (51), (52) les conséquences suivantes:

Si $x \varepsilon Z$, la condition $x \in P(f)$ est équivalente à la condition $\varphi(x) \in P(f_1)$.

Si $x \varepsilon T$, la condition $x \in P(f)$ est équivalente à la condition $\psi(x) \in P(f_2)$.

Il en résulte qu'en désignant par $\varphi^{-1}(x)$ et $\psi^{-1}(x)$ les fonctions inverses aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ nous obtenons les formules:

$$Z \cdot P(f) = \varphi^{-1}(P(f_1)),$$
$$T \cdot P(f) = \psi^{-1}(P(f_2)),$$

et, d'après (47) et (42):

$$Z \cdot P(f) = E_1,$$
$$T \cdot P(f) = E_2.$$

Nous avons donc, en vertu de (35) et (32):

(53) $$E - (a) = (Z + T) \cdot P(f) = (X - (a)) \cdot P(f) = P(f) - a.$$

Or, il résulte de la formule (50):

si $a \in E$, on a: $f(t) \neq f(a)$ pour $t < a$, donc $a \in P(f)$;

si $a \in H$, on a: $f(t) = f(x_0)$, où le nombre x_0 appartenant à Z remplit la relation $x_0 < a$, donc $a \,\overline{\in}\, P(f)$.

On en conclut, d'après (53), que l'on a:

$$P(f) = E. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Posiedzenie

z dnia 26 czerwca 1931 r.

W. Sierpiński.

Uwaga o rozłączalności zbiorów zamkniętych.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu w dniu 26 czerwca 1931 r.

Streszczenie.

O dwuch zbiorach E i H mówimy, że są *rozłączne zapomocą zbiorów rodziny* Φ, jeżeli istnieją dwa zbiory rozłączne tej rodziny, z których jeden zawiera E, zaś drugi H.

Istnieje rodzina przeliczalna zbiorów otwartych, taka, iż każde dwa zbiory przestrzeni euklidesowej zamknięte i ograniczone, rozłączne, są rozłączne zapomocą zbiorów tej rodziny. Autor dowodzi natomiast, że nie istnieje żadna rodzina zbiorów, Φ, mocy mniejszej niż continuum, taka iżby każde dwa zbiory linjowe zamknięte były rozłączne zapomocą zbiorów rodziny Φ.

W. Sierpiński.

Une remarque sur la séparabilité des ensembles fermés.

Présenté dans la séance du 26 Juin 1931.

On dit que deux ensembles E et H sont séparables au moyen des ensembles d'une famille Φ, s'il existe deux ensembles disjoints de cette famille, dont un contient E et l'autre H [1]).

[1]) La notion de la séparabilité des ensembles est due à M. N. Lusin, voir *Fund. Math.* t. X, p. 51.

On démontre sans peine que, dans un espace euclidien, il existe une famille dénombrable Φ d'ensembles ouverts, telle que deux ensembles fermés et bornés disjoints sont toujours séparables au moyen des ensembles de la famille Φ.

(Voici p. e. la démonstration pour l'espace linéaire. Soit Φ la famille de tous les ensembles qui sont des sommes d'un nombre fini d'intervalles aux extrémités rationnelles: la famille Φ est évidemment dénombrable. Soient maintenant E et H deux ensembles fermés et bornés, disjoints. Comme on sait, il existe deux ensembles ouverts disjoints, M et N, contenant resp. E et H. Or, tout ensemble ouvert linéaire est, comme on sait, une somme d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts aux extrémités rationnelles. D'après $E \subset M$ et d'après le théorème de Borel (appliqué à l'ensemble fermé et borné E et à la famille des intervalles ouverts aux extrémités rationnelles contenus dans M) il existe un nombre fini d'intervalles ouverts aux extrémités rationnelles dont la somme S recouvre E. On a donc $E \subset S \subset M$ et S est un ensemble de la famille Φ. Pareillement on trouve un ensemble T de la famille Φ, tel que $H \subset T \subset M$, et, d'après $MN = 0$, on a évidemment $ST = 0$. Deux ensembles fermés et bornés, disjoints sont donc toujours séparables au moyen des ensembles de la famille Φ, c. q. f. d.).

Or, nous prouverons qu'*il n'existe aucune famille d'ensembles, Φ, de puissance inférieure à celle du continu, telle que deux ensembles linéaires fermés disjoints soient toujours séparables au moyen des ensembles de la famille Φ.*

En effet, soit Φ une famille d'ensembles, telle que deux ensembles linéaires fermés disjoints sont toujours séparables au moyen des ensembles de la famille Φ.

Soit t un nombre réel donné quelconque, tel que $0 < t \leq 1$, et soit

$$t = (0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots)_2 \tag{1}$$

son développement en fraction dyadique contenant une infinité de chiffres non nuls.

Désignons par $E(t)$ l'ensemble de tous les nombres $(-1)^{\alpha_n} . n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et par $H(t)$ l'ensemble de tous les nombres $(-1)^{\alpha_n + 1} . n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Les ensembles $E(t)$ et $H(t)$ sont évidemments fermés et disjoints. D'après l'hypothèse il existe donc deux ensembles $M(t)$ et $N(t)$ de la famille Φ, tels que

(2) $$M(t)\,N(t)=0,$$

et

(3) $$E(t)\subset M(t),\quad H(t)\subset N(t).$$

Je dis que si $t\neq t'$ $(0<t\leqslant 1,\ 0<t'\leqslant 1)$, on a toujours $M(t)\neq M(t')$.

En effet, admettons qu'on a $t\neq t'$ (où $0<t\leqslant 1,\ 0<t'\leqslant 1$) et $M(t)=M(t')$.

Soient (1) et

(4) $$t'=(0,\ \beta_1\beta_2\beta_3\ldots)_2$$

resp. les développements de t et de t' en fractions dyadiques contenant une infinité de chiffres non nuls. D'après (1) et (4) et d'après $t\neq t'$, il existe un indice q, tel que $\alpha_q\neq\beta_q$, donc on a ou bien 1) $\alpha_q=0$ et $\beta_q=1$, ou bien 2) $\alpha_q=1$ et $\beta_q=0$.

Or, nous avons $E(t)\subset M(t)$, $H(t)\,M(t)=0$, $E(t')\subset M(t')$, $H(t')\,M(t')=0$, et, d'après (1), (4) et la définition des ensembles $E(t)$ et $E(t')$ on a $(-1)^{\alpha_q}q\in E(t)$, $(-1)^{\alpha_q+1}.q\in H(t)$, et $(-1)^{\beta_q}.q\in E(t')$, $(-1)^{\beta_q+1}.q\in H(t')$, donc

$$(-1)^{\alpha_q}.q\in M(t),\quad (-1)^{\alpha_q+1}.q \text{ non } \in M(t),$$
$$(-1)^{\beta_q}.q\in M(t'),\quad (-1)^{\beta_q+1}.q \text{ non } \in M(t'),$$

ce qui donne, dans le cas 1):

$$q\in M(t),\ q \text{ non } \in M(t'),$$

et dans le cas 2):

$$q \text{ non } \in M(t),\ q\in M(t'),$$

d'où résulte toujours que $M(t)\neq M(t')$.

A des nombres réels t différents de l'intervalle $0<t\leqslant 1$ correspondent donc toujours des ensembles $M(t)$ différents de la famille Φ, d'où résulte que la puissance de cette famille ne peut pas être inférieure à celle du continu.

Notre assertion est ainsi démontrée.

M. Neubauer.

O funkcjach ciągłych, przyjmujących każdą wartość skończoną liczbę razy.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 26 czerwca 1931 r.

Streszczenie.

Nawiązując do pracy M. Čech'a z XVII-go tomu „Fund. Math.", autor wyprowadza kilka twierdzeń, dotyczących funkcji wymienionych w tytule.

M. Neubauer (Brno, Tchécoslovaquie).

Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 26 Juin 1931.

Dans son article, publié [1]) sous le même titre, M. Čech s'occupe des fonctions (réelles d'une variable réelle) continues f, jouissant de la propriété suivante: f prend chaque sa valeur un nombre fini de fois (*la propriété P*). A l'aide des définitions 3, 5 et 6 de cette Note, on peut énoncer les résultats de M. Čech dans les deux théorèmes suivants:

Théorème A. *Si la fonction f, définie et continue dans $[a, b]$, jouit de la propriété P, on a* $M(f) = [a, b] - \overline{A(f)}$ [2]), $A(f) \in \mathbf{K}$ et $A(f) \subset (a, b)$.

Théorème B. *Si* $A \in \mathbf{K}$ et $A \subset (a, b)$, *il existe, dans* $[a, b]$, *une fonction continue f qui jouit de la propriété P et telle que* $M(f) = [a, b] - \bar{A}$.

Un cas spécial des dites fonctions sont celles qui jouissent de la propriété suivante (*la propriété Q*): il existe un tel n que toute équation de la forme $f(x) = c$ n'admet qu'un nombre $\leq n$

[1]) Voir Fundamenta Mathematicae t. XVII, p. 32.

[2]) (a, b) est l'intervalle $a < x < b$, $[a, b]$ — sa fermeture; $[a, b)$ resp. $(a, b]$ signifie dans la suite l'intervalle $a \leq x < b$ resp. $a < x \leq b$. $\bar{A}$ est la fermeture de A.

de solutions. Pour une telle fonction donnée f, soit $n(f)$ le plus petit nombre de ce caractère. A la fin de son travaille, M. Čech énonce la proposition suivante:

En ajoutant aux propriétés de l'ensemble $A(f)$ resp. A celle d'être d'ordre fini (voir la définition 4 dans la suite), *on peut remplacer dans les théorèmes A et B la propriété P par Q.*

Le but de cette Note est de démontrer la proposition précédente et, d'autre part, d'établir les relations entre le nombre $n(f)$ et l'ordre de l'ensemble $A(f)$ resp. A correspondant (théorèmes C et D au § 3).

C'est M. E. Čech qui avait bien voulu attirer mon attention au sujet de cet article; je me permets de lui adresser mes meilleurs remercîments.

§ 1. Je ne considère, parmi les ensembles de points, que ceux de l'espace euclidien linéaire.

Définition 1. Etant donné une classe Γ d'intervalles finis et ouverts, je définis [1]), pour chaque nombre ordinal $\xi < \Omega$, la sous-classe Γ_ξ de Γ comme il suit:

1° D_0^Γ étant l'ensemble de toutes les extrémités d'intervalles (u, v) de Γ, on a $(u, v) \in \Gamma_0$ lorsque u ou v est un point isolé de D_0^Γ.

2° Soit $0 < \xi < \Omega$, soit $\Gamma_{\xi'}$ déjà définie pour $\xi' < \xi$ et D_ξ^Γ — l'ensemble de toutes les extrémités d'intervalles de $\Gamma - \underset{\xi'<\xi}{V} \Gamma_{\xi'}$. On a $(u, v) \in \Gamma_\xi$ lorsque u ou v est un point isolé de D_ξ^Γ.

Les intervalles de Γ_ξ s'appellent *intervalles d'ordre* ξ de Γ. Pour $(u, v) \in \Gamma_\xi$, u resp. v s'appelle *extrémité distingueée* de (u, v) lorsque u resp. v est un point isolé de D_ξ^Γ.

On a évidemment

$$(1) \qquad D_{\xi''}^\Gamma \subset D_{\xi'}^\Gamma \quad \text{pour} \quad \xi' < \xi''.$$

Définition 2. Pour chaque ensemble A, je désigne par Γ_A la classe de tous les intervalles finis et contigus à son dérivé A', auxquels se trouve un nombre (fini et) impair de points de A.

On a évidemment

$$(2) \qquad (\Gamma_A)_{\xi'} \cdot (\Gamma_A)_{\xi''} = 0 \quad \text{pour} \quad \xi' \neq \xi''.$$

[1]) Voir Čech l. c. p. 37.

Définition 3. Je désigne par $\mathbf{K}$ la classe de tous les ensembles isolés A, pour lesquels la classe Γ_A remplit la condition suivante: Pour $0 \neq \Delta \subset \Gamma_A$, l'ensemble de toutes les extrémités des intervalles de Δ n'est pas dense en soi [1]).

On démontre sans peine le suivant

Lemme 1. [2]) *$A \in \mathbf{K}$ étant donné, il existe un et un seul $\alpha < \Omega$ tel que $(\Gamma_A)_\xi \neq 0$ pour $\xi < \alpha$ et $\Gamma_A = \underset{\xi<\alpha}{V} (\Gamma_A)_\xi$.*

Définition 4. Pour $A \in \mathbf{K}$ j'appelle *ordre* de A et désigne par $\alpha(A)$ le nombre ordinal, défini par le lemme 1.

Lemme 2. *Soit $A \in \mathbf{K}$ et (u, v) un intervalle d'ordre ξ de Γ_A. Alors il existe, dans tout voisinage de u à gauche et de v à droite,*

1⁰ des points de A, n'appartenant à aucun intervalle d'ordre ξ,

2⁰ une infinité de points de A, appartenant à des intervalles d'ordre ξ', pour tout $\xi' < \xi$.

Démonstration. Il suffit de considérer l'extrémité u. Je pose $\Gamma_A = \Gamma$ et $D^\Gamma_{\xi'} = D_{\xi'}$ pour $\xi' \leqq \xi$. Si u n'est pas une extrémité distinguée, il existe, dans tout voisinage de u à gauche, des points de D_ξ, donc des intervalles de $\Gamma - \underset{\xi'<\xi}{V} \Gamma_{\xi'}$, donc aussi, d'après $A \in \mathbf{K}$, des intervalles de Γ_ξ. Une au moins des extrémités étant toujours distinguée, il va donc suffir de supposer l'extrémité u comme distinguée.

Cela posé, 1⁰ suit immédiatement de $u \in A'$. Quant à 2⁰, soit $\xi' < \xi$. On a, d'après (1), $u \in D_\xi \subset D_{\xi'}$. Si u était un point isolé de $D_{\xi'}$, on aurait $(u, v) \in \Gamma_{\xi'}$ — contrairement à (2) et $(u, v) \in \Gamma_\xi$. u étant parsuite un point d'accumulation de $D_{\xi'}$, on en conclut, comme tout à l'heure, qu'il existe, dans tout voisinage de u à gauche, des intervalles de $\Gamma_{\xi'}$.

Lemme 3. *Lorsqu'on supprime d'un ensemble $A \in \mathbf{K}$ d'ordre $\alpha + 1$ tous les points, situés dans les intervalles d'ordre α de Γ_A, il en résulte un ensemble $A^* \in \mathbf{K}$ d'ordre α.*

Démonstration. On déduit aisément de 1⁰ du lemme 2 que $(A^*)' = A'$. Il s'ensuit aisément

$$\Gamma_{A^*} = \underset{\xi<\alpha}{V} (\Gamma_A)_\xi . \tag{3}$$

[1]) L. c. p. 32.

[2]) L. c. p. 38.

On a donc $A^* \in \mathbf{K}$. En s'appuyant sur 2° du lemme 2 et (3), on prouve sans peine, par l'induction, que $(\Gamma_{A^*})_\xi = (\Gamma_A)_\xi$ pour $\xi < \alpha$. Il résulte de là et de (3), en vertu du lemme 1, que A^* est d'ordre α.

Lemme 4. *Soit $A \in \mathbf{K}$ et (u, v) un intervalle d'ordre $\xi > 0$ de Γ_A. Alors il existe, dans tout voisinage de u à gauche et de v à droite, deux points a^* et $b^* > a^*$ tels, qu'en posant $A^* = A[a^*, b^*]$:*

(4) $$A^* \subset (a^*, b^*), \ (A^*)' = A'[a^*, b^*],$$

(5) $$A^* \in \mathbf{K}, \ \alpha(A^*) = \xi,$$

(6) *pour $\xi' < \xi$, $(\Gamma_{A^*})_{\xi'}$ contient une infinité d'intervalles.*

Démonstration. Il suffit, comme plus haut, de considérer l'extrémité u et de la supposer comme distinguée. On a donc $(\Gamma = \Gamma_A)$

(7) $$(u - \varepsilon, u) D_\xi^\Gamma = 0,$$

$\varepsilon > 0$ étant convenablement choisi. D'après le lemme 2 et $\xi > 0$, il existe, dans tout voisinage de u à gauche, un point $v^* \in (u - \varepsilon, u)$ qui est l'extrémité *droite* d'un intervalle de Γ. En posant $a^* = v^*$ et $b^* = u$, on en conclut (4) sans difficulté. De plus, en désignant par Δ la classe de tous les intervalles de Γ, contenus dans (a^*, b^*), on déduit de la deuxième relation (4), en vertu de (7) et l'inclusion $(a^*, b^*) \subset (u - \varepsilon, u)$, aisément

$$\Gamma_{A^*} = \Delta \cdot \underset{\xi' < \xi}{V} (\Gamma_A)_{\xi'}$$

— une relation analogue à (3). Comme auparavant, on a $A^* \in \mathbf{K}$ et on trouve $(\Gamma_{A^*})_{\xi'} = \Delta \cdot (\Gamma_A)_{\xi'}$ pour $\xi' < \xi$, donc aussi $\alpha(A^*) = \xi$ et (6), d'après 2° du lemme 2.

§ 2. Je ne considère, parmi les fonctions, que les fonctions réelles et finies d'une variable réelle.

Définition 5. Pour chaque fonction f, je désigne par $M(f)$ l'ensemble de tous les points x de son domaine B tels que f est monotone dans un voisinage de x sur B.

Lemme 5. *Si l'ensemble $A \subset (a, b)$ contient au moins* 3 *points et si la fonction continue f de la propriété P* (voir l'introduction) *est définie dans $[a, b]$ de sorte que*

(8) $$M(f) = [a, b] - \bar{A},$$

alors

(9) *f prend une valeur 3-fois,*

(10) *pour $a' \in A'_+$ resp. A'_-* [1]*), f prend, dans tout voisinage de a' à droite resp. à gauche, une valeur 3-fois.*

Démonstration. Soit $a' \in A'_+$ et $\varepsilon > 0$. En vertu de la propriété P, il existe un $b' \leqq b$ tel que $b' \leqq a' + \varepsilon$ et $f \neq f(a')$ dans $(a'\, b']$. f étant continue, $f - f(a')$ est du même signe partout dans $(a', b']$, p. e. positif. f prend parsuite son maximum dans $[a', b']$ à un point $x_0 \in (a', b']$. Si f était monotone dans (a', x_0), on aurait $(a', x_0) \subset M(f)$ — contrairement à (8) et $a' \in A'_+$. Il existe donc des points x', x'' tels que $a' < x' < x'' < x_0$ et $f(x') > f(x'')$. Mais on a $f(x') \leqq f(x_0)$. Il en résulte tout de suite que f prend dans $(a', x_0) \subset (a', a' + \varepsilon)$ une valeur 3-fois. (10) étant ainsi démontré, il reste à prouver (9) pour A fini. Mais pour cela, il suffit de remarquer qu'en vertu de P et de la continuité, l'inclusion $(a', b') \subset M(f)$ implique toujours que f est monotone dans $[a', b']$, sans y être constante, et que A contient au moins trois points.

Théorème 1. *Prémisses: Soit $A \in \mathbf{K}$ un ensemble d'ordre fini α, contenant au moins 3 points et contenu dans (a, b). Pour $\alpha > 0$, la classe Γ_A contient au moins 3 intervalles d'ordre $\alpha - 1$. Une fonction continue f de la propriété P soit définie dans $[a, b]$ de sorte qu'elle remplisse (8).*

Thése: f prend une valeur $(2\alpha + 3)$-fois.

Démonstration. Le théorème étant vrai, d'après (9), pour $\alpha = 0$, je le suppose vrai pour un $\alpha \geqq 0$ et je l'en déduirai pour $\alpha + 1$. J'admets qu'il ne soit pas vrai pour $\alpha + 1$, c'est-à-dire je suppose: malgré les prémisses du théorème avec $\alpha + 1$ au lieu de α, la fonction

(11) f prend chaque valeur $[(2\alpha + 3) + 1]$-fois au plus.

$a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ étant tous les points de A dans un intervalle (u, v) de Γ_A, on voit que f est alternativement croissante et décroissante dans les sous-intervalles $[u, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_p, v]$. Je décompose la classe $(\Gamma_A)_\alpha$ en deux sous-classes disjointes Γ' et Γ'', en donnant à Γ' ceux et seulement ceux des intervalles (u, v) de $(\Gamma_A)_\alpha$, dans lesquels f commence à croître

---

[1]) A'_+ (A'_-) est l'ensemble de tous les points d'accumulation de A à droite (à gauche).

(donc, p étant impair, finit par décroître). $(u, v) \in \Gamma'(\Gamma'')$ étant donné, j'appelle *critique* et désigne par w celle des extrémités u, v, pour laquelle $f(w) \geq f(u), f(v)$ $(f(w) \leq f(u), f(v))$. (Si $f(u) = f(v)$, toutes les deux extrémités sont critiques.) En désignant par G le maximum de f dans $[u, v]$, on a évidemment

(12) $$f(u), f(v) \leq f(w) < G \quad \text{pour} \quad (u, v) \in \Gamma'.$$

Enfin, je définis la sous-classe $\Delta' \subset \Gamma'(\Delta'' \subset \Gamma'')$ comme il suit: Pour $(u, v) \in \Gamma'(\Gamma'')$ soit $(u, v) \in \Delta'(\Delta'')$, lorsque $f < f(w)$ $(f > f(w))$ dans un voisinage assez petit de chaque extrémité critique w — „voisinage de l'extrémité critique w" signifiant ici et dans ce qui suit l'intervalle de la forme $(u - \varepsilon, u)$ ou $(v, v + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ selon que $w = u$ ou $w = v$.

Je vais montrer d'abord que

(13) $$\Gamma' = \Delta', \ \Gamma'' = \Delta''.$$

On peut se borner à Γ'. J'admets qu'il existe un $(u, v) \in \Gamma' - \Delta'$. Par conséquent, il existe un voisinage U de l'extrémité critique convenable w de (u, v) tel gue $f > f(w)$ dans U. D'après (12) et la continuité de f, on peut supposer que

(14) $$f(w) < f < G \quad \text{dans} \quad U.$$

Je dis que

(15) f prend une valeur $(2\alpha + 3)$-fois dans U.

En effet, cela résulte, pour $\alpha = 0$, de (10) et, pour $\alpha > 0$, du lemme 4, parce qu'en posant $f^* = f$ dans $[a^*, b^*]$, les prémisses du théorème 1 (supposé vrai pour α) sont remplies par A^*, $[a^*, b^*]$ et f^*, particulièrement (8) en vertu de la seconde relation (4). Mais f prend, d'après (12) et (14), chaque valeur, prise dans U, deux fois encore dans (u, v); elle prend parsuite une valeur $[(2\alpha + 3) + 2]$-fois ce qui est contradictoire à (11). L'hypothèse $\Gamma' - \Delta' \neq 0$ étant, par conséquent, impossible, il en résulte (13).

En s'appuyant sur (15) et la notion de l'extrémité critique, on prouve sans difficulté que

(16) si $(u, v) \in \Delta'(\Delta'')$, on a $f(x) < f(w)$ $(f(x) > f(w))$ pour x non $\in [u, v]$.

On en conclut que

(17) $\Delta'(\Delta'')$ ne contient qu'un intervalle au plus.

En effet, si Δ' en contenait deux, (u_1, v_1) et (u_2, v_2), on aurait, en désignant par G_1 resp. G_2 le maximum de f dans $[u_1, v_1]$ resp. $[u_2, v_2]$, d'après (16) et (12), $G_2 < G_1$ et $G_1 < G_2$ simultanément.

Il s'ensuit de (13) et (17), vu la décomposition $(\Gamma_A)_\alpha = \Gamma' + \Gamma''$, que la classe $(\Gamma_A)_\alpha$ ne contient que deux intervalles au plus. Mais, les prémisses du théorème 1 avec $\alpha + 1$ au lieu de α étant supposées remplies, $(\Gamma_A)_\alpha$ contient au moins 3 intervalles. L'hypothèse (11) est donc impossible et le théorème se trouve démontré.

Maintenant, on démontre sans peine le suivant

Théorème 2. *Soit $A \in \mathbf{K}$ un ensemble d'ordre fini $\alpha > 0$, contenu dans (a, b), et f une fonction continue de la propriété P, définie dans $[a, b]$ de sorte qu'elle remplisse* (8). *Alors f prend une valeur $(2\alpha + 2)$-fois.*

En effet, il existe un intervalle $(u, v) \in (\Gamma_A)_{\alpha-1}$. D'après le théorème 1 et les lemmes 4 et 5, f prend une valeur $[2(\alpha - 1) + 3]$-fois dans tout voisinage de chaque extrémité critique de (u, v). Il s'ensuit qu'on peut se borner à $(u, v) \in \Delta' (\subset (\Gamma_A)_{\alpha-1})$. A partir d'ici, le raisonnement se fait sans difficulté.

Théorème 3. *Soit $A \in \mathbf{K}$ un ensemble d'ordre fini α, contenu dans (a, b). Alors il existe, dans $[a, b]$, une fonction continue f, remplissant* (8) *et prenant chaque valeur $(2\alpha + 3)$ — fois au plus.*

Démonstration. Le théorème étant clair pour A fini, on peut supposer $A' \neq 0$. En désignant par $l(L)$ la borne inférieure (supérieure) de A' et en posant $I_l = [a, l)$ ou $0 \; (I_L = (L, b]$ ou $0)$ suivant que $a < l$ ou $a = l$ $(L < b$ ou $L = b)$, $[a, b]$ se décompose en parties deux à deux disjointes comme il suit:

$$[a, b] = A' + I_l + I_L + (u_1, v_1) + (u_2, v_2) \ldots;$$

ici (u_n, v_n) sont les intervalles finis et contigus à A' (s'il y en a).

Je définis d'abord

$$f(x) = x \text{ dans } A' \text{ et } f(a) = a, \; f(b) = b. \tag{18}$$

Pour définir f dans les intervalles I_l, I_L et (u_n, v_n), soit $[u, v]$ la fermeture de l'un quelconque d'eux. Trois cas sont à distinguer.

1° Si $A(u, v) = 0$, f soit linéaire dans $[u, v]$.

2° Si $A(u, v)$ contient une infinité ou un nombre pair (> 0) de points de A, il est aisé de définir f dans $[u, v]$ de manière qu'elle remplisse non seulement les six conditions, posées par M. Čech l. c. p. 39, mais encore les deux suivantes:

$$f(x) \in (u, v) \text{ pour } x \in (u, v),$$

f prend chaque valeur 3-fois au plus, dans $[u, v]$.

3⁰ Au cas restant, $A(u, v)$ se compose d'un nombre impair p de points $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$. Je définis f dans les intervalles $[u, v]$ de ce genre au moyen de l'induction par rapport à α, en y employant l'une ou l'autre des constructions suivantes, où ε désigne un nombre positif:

$$\text{(I)} \begin{cases} f(u) = u,\ f(v) = v,\ f(a_1) = u - \varepsilon,\ f(a_3) = \dfrac{a_2 + u}{2}, \\ f(a_{2n}) = a_{2n} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots, \dfrac{p-1}{2}, \\ f(a_{2n+1}) = f(a_{2n-2}) \text{ pour } n = 2, 3, \ldots, \dfrac{p-1}{2}, \\ f \text{ linéaire dans } [a_n, a_{n+1}] \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, \\ \qquad p\ (a_0 = u,\ a_{p+1} = v). \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} f(u) = u,\ f(v) = v,\ f(a_2) = \dfrac{a_1 + u}{2},\ f(a_p) = v + \varepsilon, \\ f(a_{2n+1}) = a_{2n+1} \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, \dfrac{p-3}{2}, \\ f(a_{2n}) = f(a_{2n-3}) \text{ pour } n = 2, 3, \ldots, \dfrac{p-1}{2}, \\ f \text{ linéaire dans } [a_n, a_{n+1}] \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, \\ \qquad p\ (a_0 = u,\ a_{p+1} = v). \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$ la classe Γ_A est vide, donc (I) et (II) n'entrent en considération que pour I_l et I_L au plus. Si $I_l\ (I_L)$ contient un nombre impair de points de A, je définis f dans $\overline{I_l}\ (\overline{I_L})$ d'après (I) ((II)). On justifie sans peine que la fonction f, ainsi définie dans $[a, b]$, jouit des propriétés demandées.

Le théorème étant ainsi démontré pour $\alpha = 0$, je le suppose vrai pour un $\alpha \geqq 0$ et je l'en déduirai pour $\alpha + 1$.

En supprimant de A tous les points, situés dans les intervalles de $\Gamma_\alpha\ (\Gamma_A = \Gamma)$, il résulte, d'après le lemme 3, un ensemble $A^* \in \mathbf{K}$ d'ordre α, contenu dans (a, b). Cela posé, soit f^* une fonction, qui satisfait au théorème 3 (supposé vrai pour α) quand on y remplace A par A^*. Pour parvenir à la fonction f cherchée, je vais modifier la définition de f^*, dans les intervalles de Γ_α, de la manière suivante. Soit $(u, v) \in \Gamma_\alpha$ et u resp. v — son extrémité distinguée. Donc il existe un tel $\varepsilon_{(u,v)} = \varepsilon > 0$ que $(u - 3\varepsilon, u) D_\alpha^\Gamma$ resp. $(v, v + 3\varepsilon) D_\alpha^\Gamma$ soit vide. Maintenant, je définis f dans $[u, v]$ d'après (I) resp. (II) avec ce nombre ε. On s'assure sans difficulté que cette fonction f remplit toutes les conditions du théorème.

En particulier, pour démontrer la continuité de f, il suffit, abstraction faite des cas triviaux et ceux où il s'agit de la fonction f^*, continue par l'hypothèse, de supposer

(19) $$x \in A',$$

(20) $$x_n \to x,\ x_n \in (u_n, v_n) \in \Gamma_\alpha,\ x < u_{n+1} < u_n$$

et d'en déduire

(21) $$f(x_n) \to f(x).$$

Mais on tire de (20)

(22) $$u_n \to x,\ v_n \to x,$$

donc aussi $u_{n-1} - v_{n+1} \to 0$ ce qui donne, en posant $\varepsilon_{(u_n, v_n)} = \varepsilon_n$, d'après l'inégalité $\varepsilon_n < u_{n-1} - v_{n+1}$,

(23) $$\varepsilon_n \to 0.$$

En outre, on a, d'après (I) et (II), certainement

$$u_n - \varepsilon_n \leq f(x_n) \leq v_n + \varepsilon_n.$$

Il en résulte (21), d'après (22) et (23), en tenant compte de (19) et (18).

Supplément. Eu égard à (18), on peut dire au sujet de la fonction f qui vient d'être définie, qu'elle est ordonnée par rapport à la droite $y = x$ (du plan euclidien (x, y)). Mais on l'aurait pu aussi ordonner par rapport à toute droite $y = kx + q$, où $k \neq 0$. C'est de là que s'explique la proposition suivante:

Quels que soient les nombres f_1 et $f_2 > f_1$, on peut toujours demander que la fonction f du théorème 3 remplisse les relations suivantes:

$$f_1 \leq f \leq f_2 \text{ dans } [a, b]$$

et

$$f(b) = f_1 \text{ ou } f(a) = f_1,\quad f(b) = f_2 \text{ ou } f(a) = f_2$$

selon que

$$b = L \text{ ou } a = l,\quad b = L \text{ ou } a = l.$$

Cela posé on démontre sans difficulté ce

Théorème 4. *Prémisses: Soit $A \in \mathbf{K}$ un ensemble d'ordre fini $\alpha > 0$, contenu dans (a, b). La classe Γ_A contient au plus 2 intervalles d'ordre $\alpha - 1$.*

Thèse: Il existe, dans $[a, b]$, une fonction continue f, remplissant (8) *et prenant chaque valeur* $(2\alpha + 2)$*-fois au plus.*

En effet, en se bornant au cas de deux intervalles, (u_1, v_1) et (u_2, v_2), de $(\Gamma_A)_{\alpha-1}$, on a

$$[a, b] = [a, u_1] \dot{+} [u_1, v_1] \dot{+} [v_1, u_2] \dot{+} [u_2, v_2] \dot{+} [v_2, b].$$

Je définis d'abord f dans $[u_1, v_1]$ resp. $[u_2, v_2]$ d'après (I) resp. (II). Or, en désignant par $a_n^{(1)}$ resp. $a_n^{(2)}$ les points de $A(u_1, v_1)$ resp. $A(u_2, v_2)$ et par p_1 resp. p_2 leur nombre, f prend (vu (I) et (II)), selon que p_1 resp. $p_2 > 1$ ou $= 1$, chaque valeur de l'intervalle $(f(u_1), f(a_3^{(1)}))$ ou $(f(u_1), f(v_1))$ resp. $(f(a_{p_2-2}^{(2)}), f(v_2))$ ou $(f(u_2), f(v_2))$ *seulement une fois* dans $[u_1, v_1]$ resp. $[u_2, v_2]$. Cela posé et en observant que $A(a, u_1)$, $A(v_1, u_2)$ et $A(v_2, b)$ sont évidemment des ensembles de $\mathbf{K}$ d'ordre $\alpha - 1$, je définis, conformément au théorème 3 et au supplément, f dans $[v_1, u_2]$ de sorte que $f(v_1) \leqq f \leqq f(u_2)$, et dans $[a, u_1]$ resp. $[v_2, b]$ de sorte que $f(u_1) \leqq f \leqq f(a_3^{(1)})$ ou $f(u_1) \leqq f \leqq f(v_1)$ resp. $f(a_{p_2-2}^{(2)}) \leqq f \leqq f(v_2)$ ou $f(u_2) \leqq f \leqq f(v_2)$. La fonction f ainsi définie jouit des propriétés demandées.

§ 3. **Définition 6.** Pour chaque fonction f, je désigne par $A(f)$ l'ensemble de tous les points isolés du complémentaire $CM(f)$ (par rapport au domaine de f).

Théorème C. *Si la fonction f, définie et continue dans $[a, b]$, jouit de la propriété Q* (voir l'introduction), *on a $M(f) = [a, b] - \overline{A(f)}$, $A(f) \in \mathbf{K}$, $A(f) \subset (a, b)$ et $A(f)$ est d'ordre fini α. En particulier*

$$A(f) = 0 \text{ pour } n(f) = 1,$$

$$A(f) \neq 0 \text{ et contient au plus 2 points pour } n(f) = 2,$$

$$\alpha \leqq \frac{n(f) - 3}{2} \text{ pour } n(f) = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\alpha \leqq \frac{n(f) - 2}{2} \text{ pour } n(f) = 4, 6, 8, \ldots$$

Démonstration. En vertu du théorème A dans l'introduction, on n'a que prouver que $A(f)$ n'est pas d'ordre infini. Or, autrement, la classe $\Gamma_{A(f)}$ comprendrait des intervalles de tout ordre fini (d'après le lemme 1) ce qui est incompatible avec la propriété Q en raison du lemme 4 et théorème 1. Cela posé, les relations indiquées ne sont que soit triviales soit des conséquences immédiates de (9) et du théorème 2.

Inversement, on obtient, à l'aide des quatre théorèmes établis au § 2, le suivant

Théorème D. *Si* $A \in \mathbf{K}$, $A \subset (a, b)$ *et si* $\alpha(A)$ *est fini, il existe, dans* $[a, b]$, *une fonction continue* f *qui jouit de la propriété* Q *et telle que* $M(f) = [a, b] - \bar{A}$. *En particulier on a*

$$n(f) = 1 \text{ pour } A = 0,$$

tandis qu'on peut diminuer, pour $A \neq 0$, *le nombre* $n(f)$ *jusqu'à la borne suivante:*

Si $\alpha(A) = 0$, $n(f) = 3$ *ou* 2 *selon que* A *contient au moins* 3 *points ou non; si* $\alpha(A) > 0$, $n(f) = 2\alpha + 3$ *ou* $2\alpha + 2$ *selon que* $(\Gamma_A)_{\alpha(A)-1}$ *contient au moins* 3 *intervalles ou non.*

Sophie Piccard.

Przyczynek do badania funkcji $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\}$ Mirimanoff'a.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 26 czerwca 1931 r.

Streszczenie.

Treścią tej pracy są badania, będące w ścisłym związku z badaniami Mirimanoff'a, ogłoszonemi przez niego w dwuch notach, które ukazały się w IV-tym tomie Fundamenta Mathematicae.

Sophie Piccard.

Contribution à l'étude de la fonction $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\}$ de M. Mirimanoff.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 26 juin 1931.

Le présent travail se rattache aux deux remarquables notes de M. D. Mirimanoff, intitulées „Sur un problème de la théorie de la mesure" [1]).

---

[1]) Fundamenta Mathematicae, t. IV, pp. 76—81 et pp. 118—123.

Définitions [1]). Soit M un ensemble parfait construit sur un intervalle $< A, B >$, par élimination successive d'intervalles ouverts, appelés intervalles noirs de M. Les sousintervalles de $< A, B >$, complémentaires aux intervalles noirs de M, sont appelés intervalles blancs de M. Désignons par δ_0 et appelons intervalle noir de rang 0 de M les deux portions de la droite portant $< A, B >$ et extérieures à cet intervalle qui constitue lui-même l'intervalle blanc σ_0 de rang 0 de M. Un intervalle noir δ_k, de rang k ($k =$ entier quelconque $\geqslant 1$), de M s'élimine d'un intervalle blanc σ_{k-1}, de rang $(k-1)$, de M, et il est bordé de deux intervalles blancs de rang k de M que nous désignons par σ'_k et σ''_k, avec $\sigma_{k-1} = \sigma'_k + \delta_k + \sigma''_k$. Soit $\delta_k > \begin{matrix}\sigma'_k \\ \sigma''_k\end{matrix}$.

Soient M_x et M_y deux ensembles identiques M construits respectivement sur l'intervalle $< 0, 1 >$ de l'axe des x et sur l'intervalle $< 0, 1 >$ de l'axe des y (coordonnées retangulaires), et soit 0λ un axe passant par l'origine des coordonnées et faisant avec $0x$ l'angle ϑ $\left(0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$. Menons par tous les points de M_x des droites $\parallel$ à l'axe des y, par tous les points de M_y des droites $\parallel$ à l'axe des x, et projetons tous les points d'intersection de ces deux familles de droites sur l'axe 0λ (projections orthogonales). Appelons $E(\vartheta)$ l'ensemble de ces projections. *La fonction* $\mathrm{m}\{E(\vartheta)\}$ *représente la mesure de* $E(\vartheta)$.

Problème I. Soient $< a, b >$ et $< \alpha, \beta >$ deux intervalles situés sur un même axe $0x$ ($0 = a < \alpha < b$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta \leqslant ab$) et soient M_1 et M_2 deux ensembles semblables M, construits respectivement sur le premier et sur le second de ces intervalles. Etant donnée la longueur de $< \alpha, \beta >$, quel doit être α, pour que les deux ensembles M_1 et M_2 ne puissent pas avoir de points communs?

Lemme 1 (fondamental). La condition nécessaire et suffisante pour que les deux ensembles M_1 et M_2 ne puissent pas avoir de points communs est qu'il existe un nombre entier $k > 0$ et tel que tous les intervalles blancs de rang k de M_2 soient situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1.

[1]) Nous employons le même symbole pour désigner un intervalle et la longueur de cet intervalle et nous désignons par la même lettre un point et l'abscisse de ce point.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $M_1 M_2 = 0$. Supposons, contrairement au lemme, que pour toute valeur de l'entier $k \geqslant 1$, il existe au moins un intervalle blanc $\sigma'_{k,t}$, de rang k, de M_2 qui n'est pas situé à l'intérieur d'un intervalle noir de M_1. Alors $\sum_t \sigma'_{k,t} . M_1 \neq 0$, quel que soit k, la somme Σ étant étendue à tous les intervalles blancs de rang k de M_2. Par conséquent $\prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_t \sigma'_{k,t} . M_1 \right\} \neq 0$. Or, un point de l'ensemble $\prod$ est en même temps point limite de M_1 et de M_2 et, comme ces deux ensembles sont fermés, tout point de $\prod$ appartient en même temps à M_1 et à M_2. Donc $M_1 M_2 \neq 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse. La condition est bien nécessaire.

La condition est suffisante. Supposons qu'il existe un nombre entier $k \geqslant 1$ et tel que tous les intervalles blancs de rang k de M_2 soient situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1. Il est évident que dans ce cas $M_1 M_2 = 0$, puisque tous les points de M_2 sont situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1.

Remarque. Le lemme 1 est encore exacte si les deux ensembles M_1 et M_2 sont deux ensembles parfaits quelconques.

La solution du problème I dépend de la structure de l'ensemble M. Nous n'en donnons que quelques solutions particulières.

I.

Supposons que tout intervalle noir δ_k, de rang $k \geqslant 1$, de M a pour longueur $\delta_k = \frac{(n-2) AB}{n^k}$, et que tout intervalle blanc σ_k, de rang k, de M a pour longueur $\sigma_k = \frac{AB}{n^k}$, n désignant un nombre entier quelconque, supérieur ou égal à 4.

Posons, pour fixer les idées, $ab = 1$.

Nous nous servirons, dans la suite, du système de numération à base n.

Cas 1. $\alpha\beta = \frac{1}{n^m}$ $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

a) Soit $m = 0$.

Propriété 1. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ sont comprises dans les intervalles (I_k^1, I_k^2) définis comme suit:

$$I_k^1 = 0, \ a_1 a_2 \dots a_k$$

$$I_k^2 = I_k^1 + \frac{n-3}{n^k},$$

où k est un entier $\geqslant 1$, les chiffres $a \neq 0$, $(n-1)$ se succèdent, à partir du premier de ces chiffres, toujours dans l'ordre: $(n-2)$, 1, $(n-2)$, 1, $(n-2)$, 1, ..., sauf le dernier de ces chiffres a_k qui est égal à 1, si le nombre total de ces chiffres est impair, ou à 2, si ce nombre est pair, et tous les autres chiffres a peuvent prendre indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

La démonstration de cette propriété est basée sur le lemme 1. Elle s'effectue dans l'ordre suivant.

D'abord on montre que quel que soit l'intervalle (I_k^1, I_k^2), si α est compris au sens étroit entre I_k^1 et I_k^2, tous les intervalles blancs de rang k de M_2 sont situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1, ce qui prouve, en vertu du lemme 1, que pour les valeurs en question de α on a bien $M_1 M_2 = 0$.

Puis, on remarque que tous les intervalles (I^1, I^2), définis ci-dessus, sont distincts.

Désignons par $\{\gamma_k\}$ la suite de tous les intervalles (I_ρ^1, I_ρ^2), de rang ρ compris, au sens large, entre 1 et k, ces intervalles étant rangés par ordre des I^1 croissants. On prouve que la distance qui sépare deux intervalles successifs (I_r^1, I_r^2) et (I_s^1, I_s^2) de la suite $\{\gamma_k\}$ est égale à $\frac{2}{n^k}$, l'un au moins de ces intervalles devant être de rang k. En plus, on a

$$a I_{k,i}^1 = \frac{1}{n^k} \text{ et } I_{k,f}^2 b = \frac{2}{n^k},$$

$(I_{k,i}^1, I_{k,i}^2)$ et $(I_{k,f}^1, I_{k,f}^2)$ désignant respectivement le premier et le dernier des intervalles de la suite $\{\gamma_k\}$.

Ensuite, on démontre que quelle que soit la valeur de l'entier k, et pour un k donné quel que soit l'intervalle (I_k^1, I_k^2), il existe au moins un intervalle noir $\delta_k = (\varepsilon_k', \varepsilon_k^2)$ de rang k de M_2 et un intervalle blanc $\sigma_k = (\beta_k', \beta_k^2)$ de rang k de M_1 tels que $\varepsilon_k^2 = \beta_k^2$, si $\alpha = I_k^1$, et que $\varepsilon_k' = \beta_k'$, si $\alpha = I_k^2$.

On déduit des propriétés précédentes que si le point α n'appartient à aucun des intervalles (I_ρ^1, I_ρ^2) de la suite $\{\gamma_k\}$, il existe au moins un intervalle blanc de rang k de M_2 qui ne peut pas être situé à l'intérieur d'un intervalle noir de M_1. Ceci étant vrai quel que soit k, il en résulte, en vertu du lemme 1, que les intervalles (I^1, I^2) déterminent bien toutes les valeurs de α, pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$.

Propriété 2. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

On le voit sans peine, en remarquant que la mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ est égale à la somme des longueurs de tous les intervalles (I^1, I^2) et que le nombre d'intervalles (I_k^1, I_k^2), de reng k, est égal à 3^{k-1}.

b) Soit $m > 0$.

Propriété 3. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ sont comprises dans les intervalles (J^1, J^2) de l'une des trois formes suivantes:

$$(1) \qquad {}_1J_r^1 = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_{r-1} 1$$

$${}_1J_r^2 = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r a_{r+1} \ldots a_m,$$

où r est un entier $\geqslant 1$ et $\leqslant m$; $a_m = (n-1)$, si $m > r$; $a_r = (n-2)$; $a_{r+1} = a_{r+2} = \ldots = a_{m-1} = (n-1)$, si $r < (m-1)$, et les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ prennent indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

$$(2) \qquad {}_2J_k^1 = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r a_{r+1} \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_k$$

$${}_2J_k^2 = {}_2J_k^1 + \frac{n-3}{n^k},$$

où l'indice r et les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ont la même signification que ci-dessus, k est un entier $> m$ et les chiffres $a_{m+1}, \ldots, a_k$ sont définis de façon que le nombre ${}_2J_k^1$ soit de la forme I_k^1.

$$(3) \qquad {}_3J_k^1 = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_t a_{t+1} \ldots a_k$$

$${}_3J_k^2 = {}_3J_k^1 + \frac{n-3}{n^k},$$

où t est un entier $> m$, k est un entier $\geqslant t$, les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}$ prennent indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$ et les chiffres $a_t, a_{t+1}, \ldots, a_k$ sont définis de manière que le nombre ${}_3J_k^1$ soit de la forme I_k^1.

Propriété 4. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

Les démonstrations des deux propriétés énoncées ci-dessus se ramènent aux démonstrations correspondantes du cas $m=0$ et à l'application du lemme 1.

Cas 2. $\alpha\beta=\frac{i}{n^m}$ $(i=2, 3, \ldots, (n-2)$; $m=1, 2, 3, \ldots)$.

A) $n=4$; $i=2$.

Propriété 1. Si $m=1$, il n'existe point de valeur de α pour laquelle $M_1 M_2=0$; si $m>1$, les ensembles M_1 et M_2 n'ont pas de points communs seulement si les deux points α et β sont situés à l'intérieur d'un même intervalle noir de M_1.

Pour le prouver, on montre que, si $m=1$, quel que soit α compris entre a et b et, si $m>1$, quel que soit α compris entre les mêmes limites, à condition, toutefois, que les deux points α et β ne soient pas situés simultanément à l'intérieur d'un même intervalle noir de M_1, il existe, pour toute valeur de l'entier $k>1$, au moins un intervalle blanc, de rang k, de M_2 qui ne peut pas appartenir à un intervalle noir de M_1. La propriété énoncée résulte de ce fait, en vertu du lemme 1.

Propriété 2. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2=0$ est égale à 0, dans le cas $m=1$, et à $\sum_{j=1}^{m-1} 2^{j-1}\left(\frac{2}{4^j}-\frac{2}{4^m}\right)$, dans le cas $m>1$.

B) $n>4$.

a) $m=1$.

Propriété 3. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2=0$ sont comprises dans les intervalles de deux catégories $('I_k^1, 'I_k^2)$ et $(''I_k^1, ''I_k^2)$ définies comme suit:

Un intervalle $('I_k^1, 'I_k^2)$ a pour extrémités les points d'abscisses

$$'I_k^1=0,\ a_1 a_2 \ldots a_k$$

$$'I_k^2='I_k^1+\frac{n-i-2}{n^k},$$

où k est un entier quelconque $\geqslant 1$ et le nombre $'I_k^1$ peut être de l'une des quatre formes suivantes:

(1) $$'_1I_k^1=0,\ a_1^1 a_2^1 \ldots a_k^1,$$

où les chiffres $a^1 \neq 0$ et $(n-1)$ se succèdent, à partir du premier de ces chiffres, toujours dans l'ordre: $(n-i-1)$, i, $(n-i-1)$,

$i, \ldots,$ sauf a_k^1 qui est égal à 1, si le nombre de chiffres $a' \neq 0$, $(n-1)$ qui le précèdent est nul ou pair, ou à $(i+1)$, si ce nombre est impair, tous les autres chiffres a^1 pouvant être indifféremment des 0 ou des $(n-1)$,

(2) $$ {}_2'I_k^1 = 0\,,\; a_1^2\, a_2^2 \ldots a_k^2 = {}_1'I_k^1 + \sum_{\gamma} \left(\frac{1}{n^{\gamma-1}} - \frac{1}{n^{\gamma}} \right), $$

où γ est un entier satisfaisant aux inégalités $1 < \gamma < k$, ${}_1'I_k^1 = 0,\; a_1^1\, a_2^1 \ldots a_k^1$ est un nombre quelconque de la forme (1), avec $a_\gamma^1 = i$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices γ,

(3) $$ {}_3'I_k^1 = 0\,,\; a_1^3\, a_2^3 \ldots a_k^3 = {}_{1,2}'I_k^1 - \sum_{\mu} \left(\frac{1}{n^{\mu}} - \frac{1}{n^{\mu'}} \right), $$

où μ et μ' sont deux entiers satisfaisant aux inégalités $1 < \mu < \mu' < k$, le nombre ${}_{1,2}'I_k^1 = 0\,,\; a_1^{1,2}\, a_2^{1,2} \ldots a_k^{1,2}$ est un nombre quelconque de l'une des deux formes (1) ou (2), avec $a_\mu^{1,2} = i$ ou $(i-1)$, $a_{\mu'}^{1,2} = (n-i-1)$ ou $(n-i)$, les chiffres $a^{1,2}$ intermédiaires entre $a_\mu^{1,2}$ et $a_{\mu'}^{1,2}$ (s'il y en a) étant tous égaux à $(n-1)$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices μ,

(4) $$ {}_4'I_k^1 = 0,\; a_1^4\, a_2^4 \ldots a_k^4 = {}_{1,2,3}'I_k^1 - \sum_{\nu'} \left(\frac{1}{n^{\nu}} - \frac{1}{n^{\nu'}} \right), $$

où ν et ν' sont deux entiers satisfaisant aux inégalités $1 \leqslant \nu < \nu' < k$, le nommbre ${}_{1,2,3}'I_k^1 = 0\,,\; a_1^{1,2,3}\, a_2^{1,2,3} \ldots a_k^{1,2,3}$ est un nombre quelconque de l'une des trois formes (1), (2) ou (3), avec $a_\nu^{1,2,3} = (n-1)$, $a_{\nu'}^{1,2,3} = (n-i)$ ou $(n-i-1)$, tous les chiffres $a^{1,2,3}$ intermédiaires (s'il y en a) entre $a_\nu^{1,2,3}$ et $a_{\nu'}^{1,2,3}$ étant égaux à $(n-1)$ et, si $\nu > 1$, la somme $(a_1^{1,2,3} + a_2^{1,2,3} + \ldots + a_{\nu-1}^{1,2,3})$ étant un multiple entier ou nul de $(n-1)$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices ν'.

Un intervalle $(''I_k^1, ''I_k^2)$ a pour extrémités les points d'abscisses

$$ ''I_k^1 = 0\,,\; a_1\, a_2 \ldots a_{k+1} $$

$$ ''I_k^2 = ''I_k^1 + \frac{i(n-2)-n}{n^{k+1}}, $$

où k est un nombre entier quelconque $\geqslant 1$ et le nombre $''I_k^1$ est de l'une des quatre formes suivantes:

(1′) $$''_1I_k^1 = 0\,,\ a_1^1\, a_2^1 \dots a_{k+1}^1\,,$$

où $a_{k+1}^1 = i$ et les chiffres $a^1 \neq 0$, $(n-1)$, de rang $<(k+1)$, dont il existe au moins un, se succèdent, à partir du premier de ces chiffres, toujours dans l'ordre: $(n-i-1)$, i, $(n-i-1)$, i, ..., sauf le dernier de ces chiffres a_Φ^1 qui est égal à $(n-i)$, si le nombre total de ces chiffres est impair, ou à 1, si ce combre est pair, les chiffres a^1 intermédiaires entre a_Φ^1 et a_{k+1}^1 ne pouvant être que des 0 et tous les autres chiffres a^1 pouvant prendre indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

(2′) $$''_2I_k^1 = 0\,,\ a_1^2\, a_2^2 \dots a_{k+1}^2 = {}''_1I_k^1 + \sum_\gamma \left(\frac{1}{n^{\gamma-1}} - \frac{1}{n^\gamma}\right),$$

où $1 < \gamma < k$, $''_1I_k^1 = 0$, $a_1^1\, a_2^1 \dots a_{k+1}^1$ est un nombre quelconque de la forme (1′), avec $a_\gamma^1 = i$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices γ.

(3′) $$''_3I_k^1 = 0\,,\ a_1^3\, a_2^3 \dots a_{k+1}^3 = {}_{1,2}''I_k^1 - \sum_\mu \left(\frac{1}{n^\mu} - \frac{1}{n^{\mu'}}\right),$$

où $1 < \mu < \mu' \leqslant k$, ${}_{1,2}''I_k^1 = 0$, $a_1^{1,2}\, a_2^{1,2} \dots a_{k+1}^{1,2}$ est un nombre quelconque de l'une des deux formes (1′) ou (2′), avec $a_\mu^{1,2} = i$ ou $(i-1)$, $a_{\mu'}^{1,2} = (n-i)$ ou $(n-i-1)$, les chiffres $a^{1,2}$ intermédiaires (s'il y en a) entre $a_\mu^{1,2}$ et $a_{\mu'}^{1,2}$ étant tous égaux à $(n-1)$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices μ.

(4′) $$''_4I_k^1 = 0,\ a_1^4\, a_2^4 \dots a_{k+1}^4 = {}_{1,2,3}''I_k^1 - \sum_{\nu'} \left(\frac{1}{n^\nu} - \frac{1}{n^{\nu'}}\right),$$

où $1 \leqslant \nu < \nu' \leqslant k$, ${}_{1,2,3}''I_k^1 = 0$, $a_1^{1,2,3}\, a_2^{1,2,3} \dots a_{k+1}^{1,2,3}$ est un nombre quelconque de l'une des trois formes (1′), (2′) ou (3′), avec $a_\nu^{1,2,3} = (n-1)$, $a_{\nu'}^{1,2,3} = (n-i)$ ou $(n-i-1)$, les chiffres $a^{1,2,3}$ intermédiaires (s'il y en a) entre $a_\nu^{1,2,3}$ et $a_{\nu'}^{1,2,3}$ étant tous égaux à $(n-1)$ et, si $\nu > 1$, la somme $(a_1^{1,2,3} + a_2^{1,2,3} + \dots + a_{\nu-1}^{1,2,3})$ étant un multiple entier ou nul de $(n-1)$, la somme Σ pouvant s'étendre à un nombre quelconque d'indices ν'.

Remarque. Si $i = (n-2)$, ils ne subsistent que les intervalles de la seconde catégorie.

Voici la marche à suivre pour démontrer cette propriété. Désignons, d'une manière générale, par (I^1, I^2) tout intervalle de l'une des deux formes $('I^1, 'I^2)$ ou $(''I^1, ''I^2)$.

D'abord on établit que quel que soit l'intervalle (I_k^1, I_k^2), si le point α est compris au sens étroit entre I_k^1 et I_k^2, tous les intervalles blancs de rang k de M_2 sont situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1, ce qui démontre, en vertu du lemme 1, que pour les valeurs en question de α on a bien $M_1 M_2 = 0$.

On remarque, ensuite, que tous les intervalles (I^1, I^2) sont distincts.

Désignons par $\{S_k\}$ la suite de tous les points I_ρ^1, de rang ρ compris, au sens large, entre 1 et k, ces points étant de l'une des deux catégories $'I_\rho^1$ ou $''I_\rho^1$, la définition des nombres $'I_\rho^1$ étant étendue aussi au cas $i = (n-2)$, et tous ces points étant rangés par ordre des abscisses croissantes.

On démontre que si I_r^1 et I_s^1 désignent deux points successifs de la suite $\{S_k\}$ $(I_r^1 < I_s^1)$, la distance qui sépare I_r^2 et I_s^1 est toujours égale à $\dfrac{1}{n^k} + \dfrac{i}{n^{k+1}}$, I_r^2 étant égal à $I_r^1 + \dfrac{n-i-2}{n^r}$, si $I_r^1 = {}'I_r^1$, ou à $I_r^1 + \dfrac{i(n-2)-n}{n^{r+1}}$, si $I_r^1 = {}''I_r^1$, l'un au moins des points I_r^1 et I_s^1 devant être de rang k. En plus, si $I_{k,i}^1$ et $I_{k,f}^1$ désignent respectivement le premier et le dernier des points de la suite $\{S_k\}$, on a:

$$a I_{k,i}^1 = \frac{1}{n^k} \quad \text{et} \quad I_{k,f}^2 b = \frac{1}{n^k} + \frac{i}{n^{k+1}}, \quad \text{avec} \quad I_{k,f}^2 = I_{k,f}^1 + \frac{i(n-2)-n}{n^{k+1}}.$$

On établit, ensuite, que quelle que soit la valeur de l'entier k et pour un k donné quel que soit le point $'I_k^1$ de la suite $\{S_k\}$, il existe au moins un couple σ_k', σ_k'' d'intervalles blancs successifs de rang k de l'ensemble M_2, séparés par un intervalle noir δ_k' de rang k de M_2, et un intervalle noir δ_k de rang k de l'ensemble M_1 tels, que si $\alpha = {}'I_k^1$, l'extrémité gauche β_k' de σ_k' coïncide avec l'extrémité gauche ε_k' de δ_k et, si $\alpha = {}'I_k^2 = {}'I_k^1 + \dfrac{n-i-2}{n^k}$, l'extrémité droite β_k'' de σ_k'' coïncide avec l'extrémité droite ε_k'' de δ_k; quel que soit k, et pour un k donné, quel que soit le point $''I_k^1$ de la suite $\{S_k\}$, il existe au moins un intervalle noir $\delta_k' = (\varepsilon_k^1, \varepsilon_k^2)$ de rang k de M_2 et un intervalle blanc $\sigma_k = (\beta_k^1, \beta_k^2)$ de rang k de M_1 tels que $\varepsilon_k^2 = \beta_k^2$, si $\alpha = I_k^1$, et que $\varepsilon_k^1 = \beta_k^1$, si $\alpha = I_k^2$.

On déduit des propriétés précédentes que si le point α n'appartient à aucun des intervalles (I^1, I^2), il existe, pour toute valeur de l'entier k, au moins un intervalle blanc de rang k de M_2 qui ne peut pas apparenir à un intervalle noir de M_1. Il en résulte, en vertu du lemme 1, que les intervalles (I^1, I^2) déterminent bien toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$.

Propriété 4. La Mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

Pour le démontrer, on envisage l'ensemble complémentaire $C\{\alpha\}$, formé par tous les points de l'intervalles $< a, b >$ qui n'appartiennent à aucun intervalle (I^1, I^2).

On a:

$$\text{mesure } C\{\alpha\} = \lim_{k\to\infty}\left[(2+2^3+\ldots+2^{2k-1})\left(\frac{1}{n^k}+\frac{i}{n^{k+1}}\right)+\frac{1}{n^k}\right]=0.$$

Il en résulte que $\mathfrak{M}\{\alpha\} = 1$.

b) $m > 1$.

Propriété 5. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ sont comprises dans les intervalles (J^1, J^2) de l'une des trois formes suivantes:

(1) $\quad {}_1J_r^1 = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{r-1}\, 1$

$${}_1J_r^2 = 0, a_1 a_2 \ldots a_{r-1}\, a_r a_{r+1} \ldots a_m = 0, a_1 a_2 \ldots a_{r-1}(n-1) - \frac{i}{n^m},$$

où $1 \leqslant r \leqslant m$, si $i < (n-2)$; $1 \leqslant r < m$, si $i = (n-2)$, et les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ prennent uniquement l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

(2)
$${}_2J^1 = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{m-1}\, a_m \ldots a_k = I^1$$
$${}_2J^2 = I^2,$$

où I^1 est un point de l'une des formes $'I^1$ ou $''I^1$, $I^2 = I^1 + \frac{n-i-2}{n^k}$, si $I^1 = {}'I_k^1$, $I^2 = I^1 + \frac{i(n-2)-n}{n^k}$, si $I^1 = {}''I_{k-1}^1$, les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ ayant la même signification que ci-dessus, a_m pouvant prendre l'une des valeurs $(n-i-1)$, $(n-i)$ ou $(n-2)$, si $m = r$, et k étant un entier quelconque supérieur à m.

(3)
$${}_3J^1 = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_t\, a_{t+1} \ldots a_k = I^1$$
$${}_3J^2 = I^2,$$

où I^1 et I^2 ont la même signification que ci-dessus, les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_t$ prennent indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$ et $t=m$, si $i \neq (n-2)$, ou $t=(m-1)$, si $i=(n-2)$, l'entier k étant supérieur à t.

Propriété 6. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

Les démonstations des deux dernières propriétés se ramènent aux démonstrations correspondantes du cas $m=1$ et à l'application du lemme 1.

Cas 3. $\alpha\beta = \dfrac{n-1}{n^m}$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.

a) $m=1$.

Propriété 1. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ sont comprises dans les intervalles (I_k^1, I_k^2) définis comme suit:

$$I_k^1 = 0, a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}$$

$$I_k^2 = I_k^1 + \frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}},$$

où k est un entier $\geqslant 1$, $a_{k+1} = (n-1)$, l'un au moins des chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ est $\neq 0$, $(n-1)$, les chiffres $a \neq 0$, $(n-1)$ pouvant former des groupes de trois catégories. Soit b le nombre de chiffres a qui constituent un groupe et soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_b$ les rangs respectifs de ces chiffres dans l'expression de I_k^1 $(\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_b)$.

Si le groupe est de première catégorie, on a: $2 \leqslant b \leqslant (k-1)$, $a_{\varphi_1} = (n-2)$ et les autres chiffres du groupe se succèdent, à partir de a_{φ_2}, toujours dans l'ordre: 2, $(n-3)$, 2, $(n-3)$, $\ldots$, sauf a_{φ_b} qui est égal à $(n-2)$, si b est impair, ou à 1, si b est pair, les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{2\rho}}$ et $a_{\varphi_{2\rho-1}}$ $(1 < 2\rho \leqslant b)$ ne pouvant prendre que la valeur $(n-1)$ et les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{2\rho}}$ et $a_{\varphi_{2\rho+1}}$ $(1 < 2\rho < b)$ ne pouvant prendre que la valeur 0.

Si le groupe est de seconde catégorie, on a: $2 \leqslant b \leqslant (k-1)$, $a_{\varphi_1} = 1$, les autres chiffres du groupe se succèdent, à partir de a_{φ_2}, toujours dans l'ordre: $(n-3)$, 2, $(n-3)$, 2, $\ldots$, sauf a_{φ_b} qui est égal à $(n-2)$, si b est pair, ou à 1, si b est impair, les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{2\rho}}$ et $a_{\varphi_{2\rho-1}}$ $(1 < 2\rho \leqslant b)$ ne pouvant prendre que la valeur 0 et les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{2\rho}}$ et $a_{\varphi_{2\rho+1}}$ $(1 < 2\rho < b)$ ne pouvant être que des $(n-1)$.

Si le groupe est de troisième catégorie, on a: $1 \leqslant b \leqslant k$, les chiffres a_{φ} se succèdent, à partir de a_{φ_b}, toujours dans l'ordre: 2, $(n-3)$, 2, $(n-3)$, ..., sauf a_{φ_1} qui est égal à 1, si b est impair, ou à $(n-2)$, si b est pair, les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{b-2\rho+1}}$ et $a_{\varphi_{b-2\rho+2}}$ $(1 \leqslant b-2\rho+1 < b)$ ne pouvant être que des $(n-1)$ et les chiffres a intermédiaires entre $a_{\varphi_{b-2\rho+1}}$ et $a_{\varphi_{b-2\rho}}$ $(1 < b-2\rho+1 < b)$ ne pouvant prendre que la valeur 0.

Les groupes des deux premières catégories peuvent se succéder dans un odre quelconque, l'une, ou même les deux catégories, pouvant faire défaut dans l'expression de I_k^1 et le groupe de la troisième catégorie, qui est unique et qui existe toujours, suit tous les autres, les chiffres a intermédiaires entre le dernier chiffre $a \neq 0$, $(n-1)$ et a_{k+1} ne pouvant prendre que la valeur 0 et tous les autres chiffres a pouvant prendre indifféremment l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

Voici, dans ce cas, la marche de la démonstration.

On établit, d'abord, que quel que soit l'intervalle (I_k^1, I_k^2), si α est compris au sens étroit entre I_k^1 et I_k^2, tous les intervalles blancs de rang k de M_2 sont situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1, ce qui prouve, en vertu du lemme 1, que pour les valeurs en question de α on a bien $M_1 M_2 = 0$.

On remarque, ensuite, que tous les intervalles (I^1, I^2) sont distincts.

Soit $\{\gamma_k\}$ la suite de tous les intervalles (I_ρ^1, I_ρ^2), de rang ρ compris au sens large entre 1 et k, ces intervalles étant rangés par ordre des I^1 croissants.

On démontre que la distance qui sépare deux intervalles successifs (I_r^1, I_r^2) et (I_s^1, I_s^2) de la suite $\{\gamma_k\}$ est égale soit à $\frac{1}{n^k} + \frac{n-1}{n^{k+1}}$, soit à $\frac{2}{n^k} + \frac{n-2}{n^{k+1}}$, l'un au moins des intervalles (I_r^1, I_r^2) et (I_s^1, I_s^2) devant être de rang k, dans le premier cas, et tous deux étant de rang k dans le second cas. En plus,

$a\ I^1_{k,i} = I^2_{k,f}\ b = \frac{1}{n^k} + \frac{n-1}{n^{k+1}}$, $(I^1_{k,i}, I^2_{k,i})$ et $(I^1_{k,f}, I^2_{k,f})$ désignant respectivement le premier et le dernier des intervalles de la suite $\{\gamma_k\}$.

On établit ensuite, que quelle que soit la valeur de l'entier k et pour un k donné quel que soit l'intervalle (I^1_k, I^2_k), il existe au moins un intervalle noir $\delta_k = (\varepsilon^1_k, \varepsilon^2_k)$, de rang k, de M_2 et un intervalle blanc $\sigma_k = (\beta^1_k, \beta^2_k)$, de rang k, de M_1 tels que $\varepsilon^2_k = \beta^2_k$, si $\alpha = I^1_k$, et que $\varepsilon^1_k = \beta^1_k$, si $\alpha = I^2_k$, l'intervalle σ_k étant bordé à gauche par un intervalle noir s'_k, de rang k de M_1, si l'intervalle (I^1_r, I^2_r) se trouve à distance $\frac{2}{n^k} + \frac{n-2}{n^{k+1}}$ de l'intervalle (I^1_r, I^2_r) de la suite $\{\gamma_k\}$ qui le précède, ou σ_k étant bordé à droite par un intervalle noir s''_k, de rang k, de M_1, si l'espace qui sépare l'intervalle (I^1_k, I^2_k) de l'intervalle (I^1_s, I^2_s) de la suite $\{\gamma_k\}$ qu'il précède est égal à $\frac{2}{n^k} + \frac{n-2}{n^{k+1}}$.

On déduit des propriétés précédentes que si le point α n'appartient à aucun des intervalles (I^1, I^2), il existera, pour toute valeur de l'entier k, au moins un intervalle blanc de rang k de M_2 qui n'est pas situé à l'intérieur d'un intervalle noir de M_1.

Il en résulte, en vertu du lemme 1, que les intervalles (I^1, I^2) déteminent bien toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$.

Propriété 2. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

La démonstration se présente dans l'ordre suivant.

Comme tous les intervalles (I^1, I^2) sont distincts et comme ils déterminent toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$, la mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ est égale à la somme des longueurs de ces intervalles.

Soit m_k le nombre d'intervalles (I^1_k, I^2_k) de rang k. On a:

$$m_k = m_{k-1} + n_k = 2\,m_{k-1} + 2\,n_{k-1}.$$

$$\mathfrak{M}\{\alpha\} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \left\{\frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}}\right\} < 1 \text{ et } \lim_{k\to\infty} m_k \left\{\frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}}\right\} = 0.$$

Considérons l'ensemble complémentaire $C\{\alpha\}$, constitué par les points de l'intervalle $< a, b >$ qui ne font partie d'aucun intervalle (I^1, I^2).

Cet ensemble a pour mesure

$$\mathfrak{m}[C\{\alpha\}] = \lim_{k\to\infty}\left[1 - \sum_{j=1}^{j=k} m_j \left\{\frac{n-4}{n^j} + \frac{2}{n^{j+1}}\right\}\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}\,.\,n - 2\,.\,m_k}{n^{k+1}}.$$

Or

$$\frac{m_{k+1}\,.\,n - 2\,.\,m_k}{n^{k+1}} \leqslant 7\,.\,m_k \left\{\frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}}\right\},$$

quel que soit $n \geqslant 4$ et quel que soit $k \geqslant 1$, et comme

$$\lim_{k\to\infty} m_k \left\{\frac{n-4}{n^k} - \frac{2}{n^{k+1}}\right\} = 0$$

on a

$$\mathfrak{m}[C\{\alpha\}] = 0\,.$$

Donc

$$\mathfrak{M}\{\alpha\} = 1\,.$$

b) $m > 1$.

Propriété 3. Toutes les valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ sont comprises dans les intervalles (J^1, J^2) de l'une des trois formes suivantes

(1) $${}_1J_r^1 = 0,\ a_1\,a_2 \ldots a_{r-1}\,1$$

$${}_1J_r^2 = 0,\ a_1\,a_2 \ldots a_{r-1}\,a_r\,a_{r+1} \ldots a_{m-1}\,1,$$

où $1 \leqslant r < m$, $a_r = (n-2)$, $a_{r+1} = a_{r+2} = \ldots = a_{m-1} = (n-1)$ et les chiffres a_1, a_2, ..., a_{r-1} prennent indifféremment, l'une des valeurs 0 ou $(n-1)$.

(2) $${}_2J_k^1 = 0,\ a_1\,a_2 \ldots a_{r-1}\,a_r\,a_{r+1} \ldots a_{m-1}\,a_m\,a_{m+1} \ldots a_{k+1}$$

$${}_2J_k^2 = {}_2J_k^1 + \frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}},$$

où l'indice r et les chiffres a_1, a_2, ..., a_{m-1} ont la même signification que ci-dessus, $k \geqslant m$, $a_m \geqslant 1$ et le nombre ${}_2J_k^1$ est de la forme I_k^1.

(3) $${}_3J_k^1 = 0,\ a_1\,a_2 \ldots a_{m-1}\,a_m \ldots a_{k+1}$$

$${}_3J_k^2 = {}_3J_k^1 + \frac{n-4}{n^k} + \frac{2}{n^{k+1}},$$

où $k \geqslant m$, les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ sont indifféremment des 0 ou des $(n-1)$ et le nombre ${}_3J_k^1$ est de la forme I_k^1.

Propriété 4. La mesure $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$ est égale à l'unité.

Les démonstrations des deux dernières propriétés se ramènent aux démonstrations correspondantes du cas $m=1$ et à l'application du lemme 1.

Corollaires. Soit n un nombre entier.

1) Si $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{n^m}$ $(n \geqslant 4, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, on a: $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = 0$.

2) Si $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2}{4^m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, on a:

$$\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = \sin \vartheta + \left(\frac{3 \cdot 2^m}{4^m} - \frac{2}{4^m}\right) \cos \vartheta .$$

3) Si $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{i}{n^m}$ $(n > 4; i = 2, 3, \ldots, (n-2); m = 1, 2, 3, \ldots)$, on a: $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = 0$.

4) Si $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{n-1}{n^m}$ $(n \geqslant 4; m = 1, 2, 3, \ldots)$, on a: $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = 0$.

Remarque. Si $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2}$, on a: $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = \sin \vartheta + \cos \vartheta = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

On en déduit la propriété suivante: si x et y sont deux nombres compris, au sens large, entre 0 et 1 et qui dans le système de numération à base 4 s'écrivent au moyen des seuls chiffres 0 ou 3, les sommes $x + 2y$ fournissent tous les nombres réels compris entre 0 et 3.

II.

Supposons maintenant que tout intervalle noir δ_k, de rang $k \geqslant 1$, de M a pour longueur $\delta_k = \frac{\varepsilon^{k-1} \cdot AB}{(1+2\varepsilon)^k}$, et que tout intervalle blanc σ_k de rang k de M_2 a pour longueur $\sigma_k = \varepsilon \cdot \delta_k$, ε désignant un nombre positif fixe quelconque, compris au sens étroit entre 0 et 1.

Proposition 1. L'intervalle $<\alpha, \beta>$ ayant une longueur fixe donnée, s'il n'existe point de valeur de α $(a < \alpha < b)$ pour laquelle les deux intervalles blancs $\sigma'_{1,1}$ et $\sigma'_{1,2}$ de rang 1 de M_2 soient situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1, quelle que soit la valeur de l'entier $k > 1$ et quel que soit α compris entre a et b, il existe au moins un intervalle blanc de rang k de M_2 qui ne peut pas être situé à l'intérieur d'un intervalle noir de M_1.

La démonstration de cette proposition se fait par la méthode d'induction mathématique complète, en remarquant qui si pour aucune valeur de α, comprise entre a et b, les deux intervalles blancs de rang 1 de M_2 ne peuvent appartenir simultanément à des intervalles noirs de M_1, on doit avoir $\alpha\beta \geqslant \delta_1$, $\sigma_1 \geqslant \delta_1'$ et, par conséquent, $\sigma_k \geqslant \delta_k'$, avec $\delta_1 = \frac{ab}{1+2\varepsilon}$, $\sigma_1 = \varepsilon . \delta_1$, $\delta_1' = \frac{\alpha\beta}{1+2\varepsilon}$, $\sigma_k = \frac{\varepsilon^k . ab}{(1+2\varepsilon)^k}$ et $\delta_k' = \frac{\varepsilon^{k-1} . \alpha\beta}{(1+2\varepsilon)^k}$.

Corollaire. Il découle de la proposition 1 et du lemme 1 que, étant donnée la longueur de $< \alpha, \beta >$, si pour aucune valeur de α $(a < \alpha < b)$ les deux intervalles blancs de rang 1 de M_2 ne peuvent être situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1, les ensemble M_1 et M_2 auront nécessairement au moins un point commun, quel qûe soit α compris entre a et b.

Notation. Désignons par $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ la mesure de l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $M_1 M_2 = 0$.

Proposition 2. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a $\mathfrak{M}\{\alpha\} > 0$, quel que soit $\alpha\beta \leqslant ab$.

En vertu du lemme 1, pour établir cette propriété il suffit de prouver que quel que soit $\alpha\beta \leqslant ab$, il existe au moins un intervalle de valeurs de α $(a < \alpha < b)$ pour lesquelles les deux intervalles blancs de rang 1 de M_2 sont situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1. Or, on voit sans peine que, si $\alpha\beta < \delta_1$, l'intervalle (J_1^1, J_1^2), où $J_1^1 = \sigma_1$ et $J_1^2 = \sigma_1 + \delta_1 - \alpha\beta$, et, si $\alpha\beta \geqslant \delta_1$, l'intervalle (I_1^1, I_1^2), où $I_1^1 = \max(\sigma_1, 2\sigma_1 + \delta_1 - \sigma_1' - \delta_1')$ et $I_1^2 = \sigma_1 + \delta_1 - \sigma_1'$, avec $\sigma_1' = \varepsilon . \delta_1'$, sont de tels intervalles de valeurs de α, tous deux étant de longueur > 0.

Proposition 3. Si $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$, quel que soit $\alpha\beta$ compris au sens arge, entre δ_1 et $\frac{\sigma_1}{\delta_1} \cdot ab$, il n'existe point de valeur de α pour laquelle $M_1 M_2 = 0$.

Pour le prouver, on montre que dans les conditions de la présente proposition, il n'existe point de valeur de α $(a < \alpha < b)$

pour laquelle les deux intervalles blancs de rang 1 de M_2 soient situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1. Ce fait démontre la proposition énoncée, en vertu de la proposition 1.

Proposition 4. Si $\varepsilon > \frac{1}{2}$ et si $0 < \alpha\beta < \delta_1$ ou si $\frac{\sigma_1}{\delta_1} \cdot ab < \alpha\beta \leqslant ab$, on a: $\mathfrak{M}\{\alpha\} > 0$.

En vertu du lemme 1, pour établir cette proposition, il suffit de montrer qu'il existe, dans les deux cas, un intervalle de valeurs de α pour lesquelles deux intervalles blancs de rang 1 be M_2 soient situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1. Or, si $0 < \alpha\beta < \delta_1$, l'intervalle (J_1^1, J_1^2) et, si $\frac{\sigma_1}{\delta_1} \cdot ab < \alpha\beta \leqslant ab$, l'intervalle (I_1^1, I_1^2) (voir proposition 2) sont de tels intervalles de valeurs de α.

Corollaires. 1) Si $\varepsilon > \frac{1}{2}$ et si $\frac{1}{1+2\varepsilon} \leqslant \operatorname{tg} \vartheta \leqslant \varepsilon$ on a:

$$\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = \sin\vartheta + \cos\vartheta .$$

2) Dans tous les autres cas, c.-à-d. si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, quel que soit $\operatorname{tg}\vartheta$ compris, au sens large entre 0 et 1, ou si $\varepsilon > \frac{1}{2}$ et si $0 \leqslant \operatorname{tg}\vartheta < \frac{1}{1+2\varepsilon}$ ou si $\varepsilon < \operatorname{tg}\vartheta \leqslant 1$, on a:

$$0 \leqslant \mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} < \sin\vartheta + \cos\vartheta .$$

Remarque. Si les ensembles M_1 et M_2 ne sont pas de la forme M, définie sous II, la proposition 1 cesse d'être vraie.

Exemple. Supposons que tout intervalle noir δ_k, de rang k, de l'ensemble M est bordé respectivement à gauche et à droite par deux intervalles blancs $\sigma_{k,g}$ et $\sigma_{k,d}$, de rang k, de M de longueurs $\sigma_{k,g} = \varepsilon_1 . \delta_k$ et $\sigma_{k,d} = \varepsilon_2 . \delta_k$, ε_1 et ε_2 étant deux nombres positifs donnés qui satisfont aux conditions:

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \ 0 < \varepsilon_2 < 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 .$$

Supposons que

$$ab = 20,$$

$$\alpha\beta = 10$$

et que les deux ensembles semblables M_1 et M_2 construits respectivement sur les intervalles $\langle a, b \rangle$ et $\langle \alpha, \beta \rangle$

$(0 = a < \alpha < b;\ \alpha < \beta)$ sont de la forme M que nous venons de définir, avec $\varepsilon_1 = \frac{7}{8}$ et $\varepsilon_2 = \frac{5}{8}$.

On voit sans peine que pour aucune valeur de α comprise entre a et b les deux intervalles blancs de rang 1 de M_2 ne sont situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1. Or, quelle que soit la valeur de α, comprise, au sens étroit, à l'intérieur de l'intervalle (17,375, 17,525), tous les intervalles blancs de rang 2 de M_2 sont situés à l'intérieur d'intervalles noirs de M_1.

Neuchâtel, juin 1931.

W. Ślebodziński.

O odwzorowaniu geodezyjnem przestrzeni Cartana.

Przedstawił S. Mazurkiewicz dn. 26 czerwca 1931 r.

Streszczenie.

Przestrzeniami Cartana nazywać będziemy w tym artykule przestrzenie o koneksji afinalnej, w których krzywizna i skręcenie zachowują się niezmiennie podczas przesunięcia równoległego. O przestrzeniach takich udowodnimy następujące twierdzenie: ażeby przestrzeń Cartana, bez skręcenia, dała się odwzorować geodezyjnie na innej przestrzeni tego samego rodzaju, potrzeba i wystarcza, ażeby się dała odwzorować geodezyjnie na przestrzeni afinalnej (holonomicznej). Wyznaczenie przestrzeni posiadających żądaną własność sprowadza się do całkowania pewnego nieograniczenie całkowalnego układu równań o różniczkach zupełnych.

W. Ślebodziński.

Sur la représentation géodésique des espaces de M. Cartan.

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 26 Juin 1931.

M. Cartan a le premier attiré l'attention sur les variétés à connexion affine dont la courbure et la torsion se conservent par le transport parallèle. Ses Mémoires publiés depuis 1927 ont mis en évidence toute l'importance et les principales propriétés de ces variétés aux quelles nous donnerons le nom d'espaces de M. Cartan. Nous allons ajouter dans cet article une contribution à la théorie de ces espaces, en démontrant le théorème suivant:

Pour que deux variétés de M. Cartan, sans torsion, puissent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles se laissent représenter géodésiquement sur une variété affine (holonome).

La détermination des variétés qui jouissent de la propriété demandée revient à l'intégration d'un système complètement intégrable d'équations à différentielles totales.

1. Désignons par les symboles L_n et $'L_n$ deux variétés sans torsion appartenant à la classe de M. Cartan et distinguons dans la suite par un accent placé à gauche les grandeurs qui se rapportent à la variété $'L_n$. Supposons que ces variétés soient représentées géodésiquement l'une sur l'autre; il s'ensuit qu'il existe un vecteur covariant p_λ tel que l'on ait

$$'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu} p_{\lambda}, \quad A^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \mu = \nu \\ 0 \quad \text{»} \quad \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{1}$$

$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ étant les coefficients du déplacement parallèle dans la variété L_n. Un calcul facile montre que les composantes des affineurs de courbure des espaces L_n et $'L_n$ doivent être liées par les relations

$$'R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - 2p_{[\varkappa\lambda]} A^{\nu}_{\mu} + 2A^{\nu}_{[\varkappa} p_{\lambda]\mu}, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$p_{\varkappa\lambda} = \nabla_{\varkappa} p_{\lambda} - p_{\varkappa} p_{\lambda}. \tag{3}$$

Les variétés considérées étant des espaces de la classe de M. Cartan, on a par hypothèse $\nabla_{\varkappa} R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} = 0$ et $'\nabla_{\varkappa}\, 'R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} = 0$. Si dans la dernière équation on remplace les grandeurs $'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ et $'R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ par les expressions tirées de (1) et (2), on trouve la relation suivante:

$$\begin{aligned} A^{\pi}_{[\lambda} \nabla_{|\varkappa|} p_{\mu]\nu} - \nabla_{\varkappa} p_{[\lambda\mu]} A^{\pi}_{\nu} - R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_{\varkappa} + p_{[\lambda} R_{\mu]\varkappa\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} - \frac{1}{2} R_{\lambda\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_{\nu} + \\ + \frac{1}{2} A^{\pi}_{\varkappa} R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\rho} p_{\rho} - 2p_{\varkappa} A^{\pi}_{[\lambda} p_{\mu]\nu} - A^{\pi}_{[\lambda} p_{\mu]} p_{\varkappa\nu} - A^{\pi}_{[\lambda} p_{\mu]\varkappa} p_{\nu} + \\ + 2p_{[\lambda\mu]} A^{\pi}_{\nu} p_{\varkappa} - 2p_{[\varkappa[\lambda]} p_{\mu]} A^{\pi}_{\nu} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

La saturation des indices λ, π dans l'égalité ci-dessus donne

$$n \nabla_{\varkappa} p_{\mu\nu} - \nabla_{\varkappa} p_{\nu\mu} - 2 R_{\mu\nu} p_{\varkappa} - R_{\varkappa\nu} p_{\mu} - R_{\mu\varkappa} p_{\nu} - 2 n p_{\varkappa} p_{\mu\nu} -$$
$$- n p_{\mu} p_{\varkappa\nu} - n p_{\nu} p_{\mu\varkappa} + 2 p_{\varkappa} p_{\nu\mu} + p_{\mu} p_{\nu\varkappa} + p_{\nu} p_{\varkappa\mu} = 0 , \quad (5)$$

$R_{\mu\nu}$ étant les composantes de l'affineur de courbure contracté. La différentiation covariante de la relation (3) nous conduit à la formule suivante

$$\nabla_{\varkappa} p_{\lambda\mu} = \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} p_{\mu} - p_{\varkappa\lambda} p_{\mu} - p_{\lambda} p_{\varkappa\mu} - 2 p_{\varkappa} p_{\lambda} p_{\mu} .$$

L'alternation des indices $\varkappa$, λ dans la dernière relation donne

$$\nabla_{[\varkappa} p_{\lambda]\mu} = \nabla_{[\varkappa} \nabla_{\lambda]} p_{\mu} - p_{[\varkappa\lambda]} p_{\mu} + p_{[\varkappa} p_{\lambda]\mu} .$$

D'autre part, on a [1])

$$2 \nabla_{[\varkappa} \nabla_{\lambda]} p_{\mu} = R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\alpha} p_{\alpha} .$$

Le rapprochement de deux dernières formules nous permet d'écrire l'équation de la forme

$$2 \nabla_{[\varkappa} p_{\lambda]\mu} = R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\alpha} p_{\alpha} - 2 p_{[\varkappa\lambda]} p_{\mu} + 2 p_{[\varkappa} p_{\lambda]\mu} . \quad (6)$$

En résolvant les équations (5) par rapport aux dérivées covariantes de l'affineur $p_{\mu\nu}$, on trouve facilement

$$(n^2 - 1) \nabla_{\lambda} p_{\mu\nu} = 2 n R_{\mu\nu} p_{\lambda} + 2 R_{\nu\mu} p_{\lambda} + n R_{\lambda\nu} p_{\mu} + R_{\nu\lambda} p_{\mu} +$$
$$+ n R_{\mu\lambda} p_{\nu} + R_{\lambda\mu} p_{\nu} + 2 (n^2 - 1) p_{\lambda} p_{\mu\nu} + (n^2 - 1) p_{\mu} p_{\lambda\nu} +$$
$$+ (n^2 - 1) p_{\nu} p_{\mu\lambda} . \quad (7)$$

On en déduit au moyen de l'alternation des indices λ, μ

$$(n^2 - 1) \nabla_{[\lambda} p_{\mu]\nu} = n p_{[\lambda} R_{\mu]\nu} - R_{\nu[\lambda} p_{\mu]} - (n - 1) R_{[\lambda\mu]} p_{\nu} +$$
$$+ (n^2 - 1) p_{[\lambda} p_{\mu]\nu} - (n^2 - 1) p_{[\lambda\mu]} p_{\nu} . \quad (8)$$

En rapprochant les formules (6) et (8), on obtient

$$(n^2 - 1) R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\alpha} p_{\alpha} = 2 n p_{[\varkappa} R_{\lambda]\mu} - 2 R_{\mu[\varkappa} p_{\lambda]} - 2 (n - 1) R_{[\varkappa\lambda]} p_{\mu} . \quad (9)$$

Remplaçons dans la relation (4) les dérivées covariantes de l'affineur $p_{\lambda\mu}$ par leurs expressions tirées des équations (7), et

[1]) J. A. Schouten. Der Ricci-Kalkül, 1924, p. 85, équ. (116 b).

la somme $R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} p_\alpha$ par l'expression (9); on obtient ainsi une condition qui peut s'écrire de la façon suivante

$$2 P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\varkappa + P_{\varkappa\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\lambda + P_{\lambda\varkappa\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\mu + P_{\lambda\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\nu = 0. \tag{10}$$

On a posé ici

$$(n^2-1) P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} = (n^2-1) R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} - 2n A_{[\lambda}^{\pi} R_{\mu]\nu} +$$
$$+ 2 R_{\nu[\lambda} A_{\mu]}^{\nu} - (n-1) V_{\lambda\mu} A_{\nu}^{\pi},$$

$V_{\lambda\mu}$ désignant, comme d'habitude, l'affineur contracté $R_{\lambda\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$. L'affineur de composantes $P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi}$ est, comme on sait, affineur de courbure projective [1]) de l'espace L_n.

Posons dans la relation (10) $\varkappa = \nu$; on aura

$$3 P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\nu + P_{\nu\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\lambda - P_{\nu\lambda\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\mu = 0. \tag{11}$$

Si l'on y suppose $\nu = \mu$ cette relation devient

$$P_{\mu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\mu = 0.$$

Considérons un point arbitraire M de la variété L_n; le système de coordonnées du point de celle-ci peut toujours être choisi de la façon que l'on ait au point $M: p_\mu \neq 0$ pour toutes les valeurs de l'indice μ. La dernière relation montre qu'il doit être, au point M,

$$P_{\mu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} = 0.$$

En égard à la relation (11), ceci exige que l'on ait au même point

$$P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} p_\nu = 0,$$

d'où l'on conclut

$$P_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\pi} = 0. \tag{12}$$

Ces équations étant covariantes relativement à tout changement de variables, elles sont valables dans tout système de coordonnées du point de la variété L_n. D'après le théorème de M. Weyl les relations (12) expriment que la variété L_n peut être représenté géodésiquement sur la variété affine, c'est ce qu'il fallait démontrer. La réciproque est immédiate.

---

[1]) J. A. Schouten, l. c., p. 131.

Remarquons la conséquence suivante du théorème démontré plus haut: si une variété riemannienne de la classe de M. Cartan peut être représentée géodésiquement sur une autre variété riemannienne de même classe, elle est une variété à courbure riemannienne constante.

2. Nous allons déterminer les variétés à connexion affine dont il a été question au n° **1**. Revenons pour ce but aux équations (2) en y supposant $'R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$. On aura donc

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 2\, p_{[\varkappa\lambda]}\, A_{\mu}^{\nu} - 2\, A_{[\varkappa}^{\nu}\, p_{\lambda]\mu}\,. \tag{13}$$

La saturation des indices $\varkappa$, ν donne ensuite

$$R_{\lambda\mu} = -n\, p_{\lambda\mu} + p_{\mu\lambda}$$

ou encore

$$-(n^2-1)\, p_{\lambda\mu} = n\, R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda}\,. \tag{14}$$

La variété L_n étant un espace de M. Cartan, on a $\nabla_{\iota} R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$ et par suite $\nabla_{\varkappa} R_{\lambda\mu} = 0$. L'équation (14) montre qu'il doit être aussi

$$\nabla_{\varkappa}\, p_{\lambda\mu} = 0\,. \tag{15}$$

Réciproquement, la dernière relation entraîne, en vertu de la formule (13), l'égalité suivante: $\nabla_{\iota} R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$. De la formule (3) on déduit

$$\nabla_{\lambda}\, p_{\mu} = p_{\lambda\mu} + p_{\lambda}\, p_{\mu}\,.$$

Pour résoudre la question posée au commemement de ce n°, nous devons exprimer que les conditions

$$\nabla_{\lambda}\, p_{\mu} = p_{\lambda\mu} + p_{\lambda}\, p_{\mu}\,, \quad \nabla_{\varkappa}\, p_{\lambda\mu} = 0 \tag{16}$$

sont compatibles. Prenons la dérivée covariante de la première des relations ci-dessus; en tenant compte de la deuxième, on trouve

$$\nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda}\, p_{\mu} = 2\, p_{\varkappa(\lambda}\, p_{\mu)} + 2\, p_{\varkappa}\, p_{\lambda}\, p_{\mu}\,,$$

d'où il résulte

$$\nabla_{[\varkappa} \nabla_{\lambda]}\, p_{\mu} = 2\, p_{[\varkappa(\lambda]}\, p_{\mu)}\,.$$

D'autre part, on a [1])

$$2\, \nabla_{[\varkappa} \nabla_{\lambda]}\, p_{\mu} = R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\, p_{\alpha}\,.$$

---

[1]) J. A. Schouten, l. c., p. 85.

En rapprochant les deux dernières conditions, nous arrivons à la relation suivante

$$4\, p_{[\varkappa\,(\lambda]}\, p_{\mu)} = R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}\, p_\alpha\,,$$

qui est identiquement satisfaite en vertu de la formule (13). La différentiation covariante de la deuxième des équations (16) donne $\nabla_\iota \nabla_\varkappa p_{\lambda\mu} = 0$. Mais on a

$$2\, \nabla_{[\iota} \nabla_{\varkappa]}\, p_{\lambda\mu} = R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}\, p_{\alpha\mu} + R_{\iota\varkappa\mu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}\, p_{\lambda\alpha}\,.$$

On trouve ainsi les conditions suivantes

$$R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}\, p_{\alpha\mu} + R_{\iota\varkappa\mu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}\, p_{\lambda\alpha} = 0\,.$$

En y remplaçant les composantes $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\nu}$ par les expressions (13), on obtient

$$2\, p_{[\iota\varkappa]}\, p_{\lambda\mu} - p_{[\varkappa\lambda]}\, p_{\iota\mu} + p_{[\iota\lambda]}\, p_{\varkappa\mu} = 0\,.$$

Posons dans cette relation $\lambda = \varkappa$, $\mu = \iota$; elle change alors en l'équation suivante

$$p_{[\iota\varkappa]}\, p_{\iota\varkappa} = 0\,.$$

Comme on peut écrire aussi $p_{[\varkappa\iota]}\, p_{\varkappa\iota} = 0$, on voit bien que la dernière condition ne peut être satisfaite que si l'on a

$$p_{[\iota\varkappa]} = 0\,. \tag{17}$$

Ce sont les seules conditions qui doivent être vérifiées, pour que le système (16) soit complètement intégrable.

Supposons maintenant que le système de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ du point de la variété affine $'L_n$ soit un système cartésien. On aura parsuite $'\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = 0$ et les formules (1) prendront la forme

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = -A_\lambda^\nu\, p_\mu - A_\mu^\nu\, p_\lambda\,. \tag{18}$$

On aura d'après les relations (3) et (17)

$$\nabla_{[\lambda}\, p_{\mu]} = 0\,.$$

Cette condition exprime que le vecteur p_λ doit être le grandient d'une fonction φ: $p_\lambda = \nabla_\lambda \varphi$. En ayant égard aux formules (18), le système (16) peut être remplacé par le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 p_\mu}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} + 2 p_\lambda \dfrac{\partial p_\mu}{\partial x^\varkappa} + 2 p_\varkappa \dfrac{\partial p_\mu}{\partial x^\lambda} + p_\mu \dfrac{\partial p_\lambda}{\partial x^\varkappa} + p_\mu \dfrac{\partial p_\varkappa}{\partial x^\lambda} + \\ \qquad + 4 p_\varkappa p_\lambda p_\mu = 0, \quad p_\lambda = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}.\end{array}\right. \tag{19}$$

La détermination des espaces de M. Cartan sans torsion qui peuvent être représentés géodésiquement sur un espace affine revient donc à l'intégration du système complètement intégrable formé d'équations (19). En posant

$$q_{\lambda\mu} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial x^\mu},$$

le système (19) peut être remplacé par le suivant

$$\left\{\begin{array}{l} dq_{\lambda\mu} + 2 p_\lambda dp_\mu + p_\mu dp_\lambda + (2 p_\varkappa q_{\mu\lambda} + p_\mu q_{\varkappa\lambda} + 4 p_\varkappa p_\lambda p_\mu) dx^\varkappa = 0 \\ \qquad dp_\lambda = q_{\lambda\mu} dx^\mu, \quad d\varphi = p_\lambda dx^\lambda, \end{array}\right.$$

où les inconnues sont désignées par φ, $p_\varkappa$, $q_{\varkappa\lambda}$.

Zb. Sujkowski.

Wpływ pustyni na osady morza Czerwonego.

Przedstawił J. Lewiński na posiedzeniu w dn. 26 czerwca 1931.

Z 1 rys. w tekście i 1 tablicą.

Analiza osadu morskiego współczesnego, pochodzącego z różnych głębokości, różnych klimatów, różnych odległości od brzegu i t. d. dała już niejednokrotnie kapitalne podstawy do wniosków i porównań przy badaniu skał osadowych kopalnych typu morskiego.

Wnioski te prowadziły do rekonstrukcyj paleogeograficznych w odniesieniu do mórz, jako zbiorników, których osady kopalne poddawane były badaniu.

Dla peleogeografji niemniej ważnem byłoby jednak móc przedstawiać sobie również warunki, egzystujące na lądach otaczających ongiś owe kopalne morza.

Zadania te, jakkolwiek pierwszorzędnej wagi, stawiane być mogą i rozwiązywane naogół tylko pośrednio, gdyż z reguły morze a nie ląd było i jest obszarem gromadzenia się osadów, tak, iż najczęściej osadów lądowych i wogóle śladów pozytywnych po ongiś egzystujących lądach brak.

Sądzę, że rozwiązanie niejednego zagadnienia w tej dziedzinie dałoby się osiągnąć dopiero poprzez wyniki badań sedymentologicznych, pod tym kątem prowadzonych.

Konkretnie zaś biorąc — mam w tej chwili na myśli zagadnienie pustynności pralądów. Umiejętność rozpoznawania w osadzie śladów sąsiadowania pustyni z morzem byłaby poważnym krokiem naprzód przy rekonstrukcjach peleograficznych a w szczególności paleoklimatycznych, począwszy od kambru aż do czwartorzędu.

Osobiście niejednokrotnie utykałem na niemożności wnioskowania w tej dziedzinie przy opracowywaniu naszej kredy piszącej.

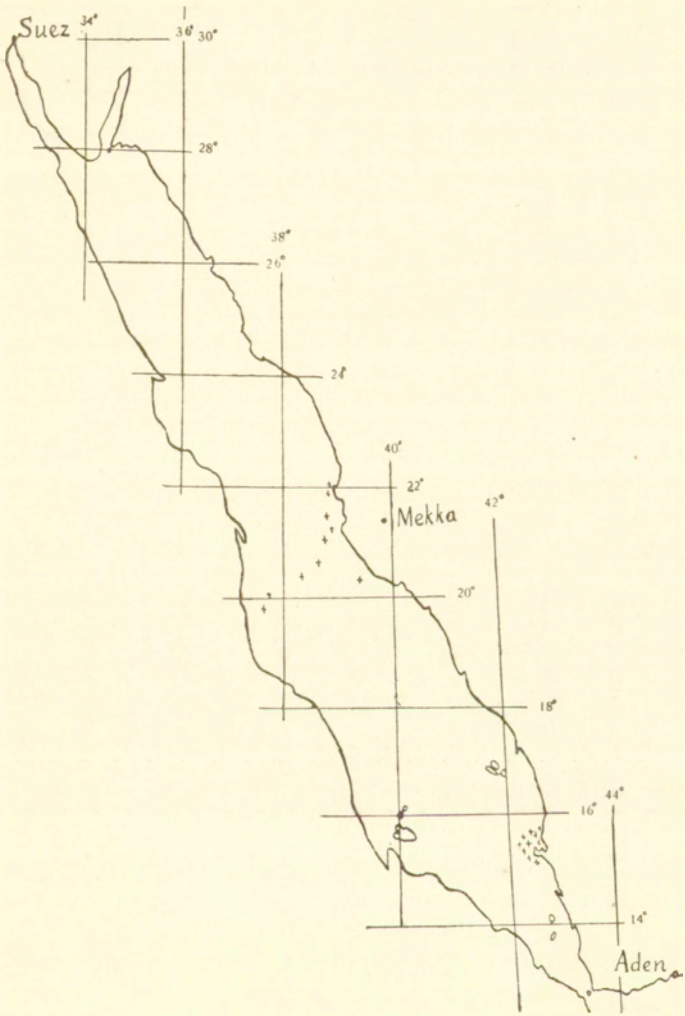
To też korzystając z dostępu do zbiorów oceanograficznych, zgromadzonych w londyńskiem British Museum (dział South Kensington), pokusiłem się w czasie pobytu w Anglji o zdanie sobie sprawy z tego, w jaki sposób dzisiaj sąsiedztwo pustyni modyfikuje osad morski.

Niniejsza praca jest częścią poszukiwań, dokonanych przezemnie w tym kierunku. Wybrałem osady morza Czerwonego, gdyż ostatnie przedstawia dla danego celu może wyjątkowo szczęśliwy zespół warunków:

Jest to najbardziej śród - pustynne z pośród istniejących mórz. Ponadto sąsiedztwo pustyń jest tu jedynem, inne regiony geograficzne nie graniczą z morzem Czerwonem, to też wpływ pustyni na osad można a priori uznać tu za najsilniejszy. Brak większych ujść rzecznych powoduje, iż wpływ ten nie jest maskowany przez materjał, przynoszony przez rzeki. Znaczna głębokość morza (2189 m. w nagłębszej części) sprowadza do zera dla osadów dalszych od brzegu rolę materjału, pochodzącego z abrazji brzegów. Materjał pochodzenia detrytycznego może dostawać się do morza tylko drogą eoliczną.

Jestem też niezmiernie wdzięczny p. dr. W. Colman'owi w Londynie, pod którego zarządem znajdują się zbiory oceanograficzne w British Museum, za uprzejme udzielenie mi do badań próbek osadów morza Czerwonego, które to próbki stanowią

materjał faktyczny moich rozważań. Uprzejmość tę cenię sobie tem więcej, że jak winienem podkreślić, materjały te nie są dotychczas opracowane.



Rys. 1. Rozmieszczenie próbek wziętych do badań (zebrane przez okręt Endeavour 1927—8); miejsca próbek oznaczone krzyżykami.

Próbki w liczbie kilkudziesięciu i wystarczająco obfite zostały zebrane w latach 1927/8 przez admiralicję angielską, podczas badań, prowadzonych na okręcie Endeavour.

Minusem badań tych było dość przypadkowe rozmieszczenie stacyj, skupionych w środkowej i południowej części morza. Brak też materjału z największych głębi.

Braki te jednak nie pozwalają na razie traktować całości zagadnień, związanych z osadami morza Czerwonego, tak iż ograniczam się na razie do jednego tylko zagadnienia wpływu sąsiedztwa pustyni na osad.

Mimo to materjał jest pierwszorzędny i bardzo ciekawy.

W literaturze przedmiotu osady morza Czerwonego są dotychczas wyjątkowo zaniedbane.

Jedyną poważniejszą ekspedycją naukową była wyprawa austrjacka okrętu — Pola — w r. 1896.

Wyprawa ta ograniczyła się tylko do północnej części morza Czerwonego. Dla geologji wielce słabą stroną tych badań było to, iż osady badał chemik z zawodu dr. Naterer, który uwzględniał tylko skład chemiczny nie oznaczając ani minerałów, ani szczątków organicznych, zato mierzył nawet stężenie jonów wodoru w wodzie nad dnem. W rezultacie, jeśli chodzi o geologję, to o osadach współczesnych morza Czerwonego wiemy tyle co nic.

Po za austrjacką wyprawą, były prowadzone badania poszczególnych zagadnień, tyczących się morza Czerwonego, głównie plaż oolitowych i raf koralowych.

Zagadnienia te nie wiążą się jednak zupełnie z tematem obecnych rozważań, wobec tego nie przytaczam literatury, tyczącej się tych badań, jako nie mających danych istotnych dla tego artykułu.

Osady zaś głębszych części należy traktować jako prawie niezbadane.

W niniejszej krótkiej wzmiance nie zamierzam omawiać całokształtu zagadnień, związanych z osadami, tworzącemi się obecnie na dnie morza Czerwonego, odkładając to napóźniej. Ograniczę się tutaj do szukania wpływu lądu na osad.

Zanim jednak przejdę do tematu, przedstawię w paru słowach z jakiemi typami osadów mamy tutaj doczynienia.

O ile odrzucimy na bok osady plaży, rafy koralowe i osady litoralne, to zresztę osadów można scharakteryzować jako muły mniej lub więcej wapienne. Wśród nich można wyróżnić dwa typy: muł płytki szary, mniej lub więcej redukcyjny, przesycony subst. bitumicznemi, w szczegółach składu silnie zmienny od miejsca do miejsca. Drugi typ stanowi muł głębszych części, jasno popietaty lub biało ceglasty, cielisto - żółty i t. p. Na pierwszy rzut oka robi on wrażenie materjału dobrze utlenionego, co jednak będzie można przyjąć dopiero po pewnem omówieniu, o którem niżej. Granica tych dwu obszarów przebiega w różnych głębokościach, średnio między 100 i 200 m. głębokości.

Charakter składników mineralnych jest naogół wspólny obu grupom, ale bardziej jednolity i bez odchyleń lokalnych w drugiej grupie. Tutaj też wpływ pustyni jest bardziej czysty, niemaskowany przez ziarna mineralne innego pochodzenia, np. z abrazji pobliskiego brzegu.

Minerały detrytyczne są jedynemi, wśród których można szukać materjału, pochodzącego z lądów. Skład mineralny tego materjału, wielkość i kształt ziaren gra dla nas decydującą rolę.

Wiemy a priori, iż materjał ten nie jest przywożony przez rzeki, że przeważnie bywa przywiany przez wiatry i pochodzi z otaczających pustyń, przytem obojętne jest w tej chwili, czy został przywiany z zachodu czy ze wschodu.

Odpadają odrazu z rozważań minerały autogeniczne, powstałe w osadzie i szczątki organizmów, żyjących w morzu. Substancji organicznej, a pochodzącej z lądu — w osadach morza Czerwonego nie spotkałem, jak to było do przewidzenia.

Co do materjału detrytycznego, który nas tu przedewszystkiem interesuje, to należy zaznaczyć, iż rzeczą uboczną i bez większego znaczenia dla toku rozumowania jest fakt, do jakiego typu osadu domieszane są ziarna mineralne, przywiane przez wiatry. Mogą i muszą być przywiane do każdego miejsca powierzchni morza. Z tego wypływa jeden wniosek: Będą nas tu obchodziły ziarna, które się powtarzają we wszystkich próbkach.

Ziarna zaś sporadyczne lub obecne tylko w poszczególnych stacjach uznamy z góry za lokalnego znaczenia i niekoniecznie pustynnego pochodzenia.

Muły morza Czerwonego są wszędzie wapniste i zbliżają się miejscami do typu mułów wapiennych (Globigerinowych). Naogół jednak procent $CaCo_3$ waha się w szerokich granicach około 60—80% wyjątkowo przekraczając te liczby i węglan wapna pochodzi głównie ze szczątków organicznego pochodzenia o szkielecie wapiennym przeważnie planktonicznym. Szczątki zwierząt dennych grają zupełnie podrzędną rolę. Od fauny oceanicznej plankton tu różni się obfitością Pteropodów i Heteropodów.

Dla zbadania składu mineralnego materjału detrytycznego z każdej próbki rozpuszczałem kilka gramów osadu w zimnym rozcieńczonym kwasie solnym.

Residuum było rozdzielane przez szlamowanie na dwie frakcje o wielkości poniżej i powyżej 0,005 mm.

Materjał otrzymany poddany był badaniu mikroskopowemu. Okazało się, iż po usunięciu składników wapiennych i substancji ilastej materjał mineralny z większości stacyj był bardzo do siebie zbliżony.

Wyraźnie był tego samego pochodzenia.

Tylko stosunek ilościowy do części wapiennej osadu ulegał pewnym wahaniom, co raczej w tym wypadku zależeć może od różnej szybkości gromadzenia się szczątków wapiennych na dnie. Jest bowiem prawdopodobne, iż ilość materjału mineralnego, docierająca do osadu, jest dość stała i równomierna dla powierzchni morza.

Opis materjału mineralnego.

Frakcja drobniejsza. Substancja ilasta stanowi 1/10 do 1/4 osadu. Z wyjątkiem części przybrzeżnych, które wskutek silnej zawartości substancji bitumicznej są szare, w pozostałych próbkach subst. ilasta jest czerwona lub czerwonawa i ona jest przyczyną zabarwienia osadów morza Czerwonego. Ta czerwona barwa pochodzi od tlenków żelaza i nadaje osadowi charakter osadu ze środowiska dobrze utlenionego. Chodzi o to, iż w przeciwieństwie do czerwonej barwy żelazistej innych osadów morskich, (np. iłów głębinowych) nie została ona wytworzona w osadzie na dnie morza, lecz jest to pył przywiany zzewnątrz i mechanicznie domieszany do osadu, czyli utleniony na powierzchni otaczających lądów i domieszany do wszelkiego typu osadu. Naturalnie osad nie może być silnie redukcyjnym, gdyż inaczej tlenki żelaza nie byłyby w stanie trwałym. Z temi zastrzeżeniami można mówić o charakterze chemicznym osadu. Brak bowiem na dnie morza Czerwonego w badanych próbkach i glaukonitu i pirytu, tych najczęstszych wskaźników charakteru osadu.

Mineralne ziarna detrytycznego pochodzenia powyżej 0,01 mm. wielkości.

Kształt i wielkość ziarn. Cechą charakterystyczną ziarn omawianych jest ich jednakowa stale wielkość. Dla większości minerałów wielkość ta waha się od 0,06 do 0,01 mm. (drobniejsze przeszły do frakcji ilastej), i tylko miki są stale trochę większe i osiągają wielkość 0,1 mm. lub 0,13 mm. Brak nawet pojedyńczych ziarn, przekraczających te rozmiary. Przytem wielkość ziarn dalej od brzegu jest niezależna od głębokości.

Drugą cechą charakterystyczną jest kształt ziarn. Wszystkie są kanciaste i bez śladów otoczenia.

Przez obie te cechy: to jest wielkość i kształt ziarn, ziarna te przypominają bardzo ziarna typowego lessu, ale różnią się od niego składem mineralnym.

Stan zachowania ziarn jest również bardzo charakterystyczny. Wszystkie ziarna są świeże — rzadko, ze śladami powierzchownego zmatowienia, jako początku rozkładu (tylko plagioklaz), nawet mało odporne na wietrzenie ziarna są zachowane całkiem dobrze.

Odbija się to na składzie mineralnym.

Mianowicie rzuca się w oczy udział minerałów, które normalnie nie przedostają się na złoże wtórne bez rozkładu.

A więc głównym składnikiem są amfibole i to różne z przewagą zielonej hornblendy, potem pirokseny, wśród których dominuje augit. Dalej idą skalenie (zarówno ortoklazy jak i plagioklazy) i mika czarna. Rzadziej kwarce.

Pozatem zdarza się hematyt, skaleniowce, fluoryt. Cyrkon — jedyny minerał, wykazujący kontury krystaliczne — bardzo rzadki występuje w niektórych tylko stacjach.

Nawet z większych próbek wśród oddzielonych minerałów ciężkich nie znalazłem lub prawie nie znalazłem minerałów tak pospolitych w residuum jak turmaliny, rutyle i t. d.

Tłomaczę to w ten sposób iż nie nastąpiła tu selekcja usuwająca mniej odporne minerały i przez to niema naturalnego w piaskach wzbogacenia w minerały b. rzadkie ale b. odporne na wietrzenie.

Cechą wybitną składu mineralnego materjału detrytycznego będzie więc przewaga minerałów nieodpornych na wietrzenie i przez to normalnie w osadzie nieobecnych, a co zatem idzie przewaga minerałów femicznych nad salicznemi. Ta przewaga minerałów kolorowych nad bezbarwnemi jest pierwszą cechą która się rzuca w oczy.

Wszystkie wyżej przytoczone cechy są tak originalne i charakterystyczne, iż pozwolę zatrzymać się nad niemi przez chwilę. Znajdują one całkowite swoje wyjaśnienie, gdy się uprzytomni w jaki sposób i w jakich warunkach materjał nas interesujący dostaje się do osadu.

Materjał detrytyczny pochodzi z otaczających lądów Arabji i Afryki, obu w sąsiedztwie morza zajętych przez wielkie pustynie.

Materjał ten w większości jest przywiany przez wiatry. Jednocześnie wietrzenie skał polega głównie na wietrzeniu mechanicznem bez rozkładu chemicznego. Odpowiada to dobrze minerałom detrytycznym z osadów morza Czerwonego, gdzie uderza świeżość ziarn i obfitość (przewaga) ziarn nie trwałych na wietrzenie.

Jednocześnie ziarna nie przekraczają zwykle 0,06 mm. z wyjątkiem mik, ale tam cienkie blaszki są jeszcze lżejsze, niż inne ziarna, pomimo większej trochę średnicy, dochodzącej 0,10-0,13 mm). Jest to bowiem pył, który długo może unosić się w powietrzu. Materjału toczonego po powierzchni brak.

Zgodność tego co obserwujemy rzeczywiście w osadzie z pochodzeniem materjału detrytycznego jest wielka. Jednocześnie wyróżnione cechy spotykają się tak rzadko wśród materjału detrytycznego jakiegokolwiek osadu, iż nadają specyficzny charakter osadom morza Czerwonego. Wszystkie te cechy, związane z pochodzeniem ziarn odbijają wpływ pustyni na osady, tworzące się dzisiaj w sąsiedztwie.

Od pyłu mineralnego równie drobnego, występującego w mułach wielkich głębi oceanicznych, badany materjał detrytyczny różni się składem mineralnym. Przedewszystkiem w osadach m. Czerwonego nie spotykamy szkliwa wulkanicznego, sidorolemanu, palagonitu i pumeksu — tak charakterystycznych dla utworów wielkich głębi. Następnie w osadzie wielkich głębi oceanicznych nie mamy kwarcu, a i cały zespół mineralny odpowiada pochodzeniem skałom zasadowym wylewnym, tutaj zaś zarówno obecność kwarcu, jak i innych minerałów wskazuje na podstawowy udział skał kwaśnych, lądowych. Jednocześnie skalenie z głębi są bardzo świeże i czasami o konturach geometrycznych, a tutaj skalenie są świeże naogół, ale pojedyńcze ziarna bywają zmatowiałe, i nigdy nie mają konturów geometrycznych.

Zato ubóstwo ilościowe kwarcu i minerałów rzadkich a obfitość minerałów łatwo wietrzejących dowodzi wietrzenia tylko mechanicznego i odrazu różni od wszelkich znanych mułów i piasków przyniesionych przez wody i pochodzących z wietrzenia w klimacie w którym istnieją opady atmosferyczne. Wreszcie brak transportu wodnego widać w kanciastym kształcie ziarn i zachowaniu ziarn miękkich, łatwo ulegających roztarciu w warunkach transportu wodnego.

Materjał opisywany nasuwa parę porównań: pierwsze z lessami typowemi. Oba osady wykazują dużą analogję. Mianowicie wielkość ziarn, brak ziarn większych, i kształt ziarn są w obu osadach jednakowe. Od lessu europejskiego różnią się bardzo składem mineralnym, wskazującym na inne źródła pochodzenia materjału. A jednakowy skład mechaniczny zależny jest od jednakowego sposobu eolicznego transportu materjału. Jeśli porównany pył badany nie z lessem naszym ale chińskim to podobieństwo zwiększy się znacznie.

Mianowicie rola kwarcu zmniejsza się, przybywają jako składniki główne biotyt, ortoklaz, plagioklazy, hornblenda, węglany, kaolinity i podrzędny apatyt. Szczególniej obfity jest biotyt. Wielkość ziarn średnia 0,013 mm., maksymalnie 0,12 mm. Jak widać z powyższego skład mineralny lessu chińskiego i skład mineralny residuum nierozpuszczalnego z osadu morza Czerwonego wykazują wielkie podobieństwo, choć jeszcze rola kwarcu pozostaje ilościowo znaczniejsza w lessie chińskim [1]).

W badanem residuum mineralnem zasługuje na uwagę brak pojedyńczych ziarn mineralnych większych (do 1 mm. śred.) dobrze otoczonych, znanych z różnych osadów kopalnych np. z białej kredy i chętnie uważanych przez niektórych autorów za eolicznego pochodzenia. Z przypuszczenia tego wysnuwano nawet wnioski o pustyniach otaczających morze białej kredy piszącej [2]).

Okazuje się iż ziarna eolicznego pochodzenia, zaokrąglone podczas toczenia ich po powierzchni (np. ziarna piasków wydmowych) nie dostają się do osadu dalekiego od brzegu w warunkach normalnych, a przynajmniej nie drogą eoliczną. Jest to zupełnie logicznie do przewidzenia, iż te większe ziarna detrytyczne z wydm lądowych i pustynnych, jeśli się dostaną do osadu, to toną przy brzegu, nie dostając się dalej, a przynajmniej nie eoliczną drogą. Ale jest to ważny punkt, gdyż zmusza do rewizji poglądów na pochodzenie ziarn dobrze obtoczonych spotykanych sporadycznie w różnych osadach.

[1]) Barbour G. B. The loess of China. From the Smithsonian Report for 1926 publ. 2890. Washington. 1927. str. 279—296.

[2]) np. Bailey C. B. The desert shores of the chalk Sea. Geol. Mag. vol. LXI. pl. V, VI London. 1924. str. 102—116.

Drugie porównanie to analogje miedzy materjałem detrytycznym z osadu morza Czerwonego, a niektóremi szarowakami paleozoicznemi.

Chodzi tu o nieraz daleko idące podobieństwo składu mineralogicznego. Czy jednak wolno z tego powodu wysnuwać jakiekolwiek przypuszczenia co do analogicznego pochodzenia materjału w obu osadach, narazie nie wiemy, gdyż szarowaki dotychczas bliżej petrograficznie, czy sedymentologicznie badane nie były.

Na zakończenie tego krótkiego artykułu można spróbować dać odpowiedź na postawione na początku pytanie. Czy bliskość pustyni odbija się na charakterze sąsiednich osadów morskich?

Otóż sądzę, że tam gdzie jak w morzu Czerwonem wpływ pustyni nie jest maskowany przez inne czynniki, wpływ ten daje się odczuć i skonstatować w osadzie.

Zaznaczy się on w materjale pochodzenia detrytycznego, który składa się z dwuch części czerwonego pyłu najdrobniejszego i ziarn mineralnych. Najcharakterystyczniejszym jest skład mineralny i mechaniczny, jako też kształt ziaren tej drugiej mineralnej części materjału pochodzenia pustynnego.

Skład mineralny wyróżniać się będzie obfitością minerałów mało odpornych na wietrzenie, co przedewszystkiem się wyrazi przez dominowanie minerałów ciemnych, a w konsekwencji nieznacznym procentem kwarcu.

Skład mechaniczny zaznaczy się równomierną wielkością ziarn i małym ich rozmiarem: nie przekraczają 0,06 mm. (z wyjątkiem biotytytu).

Kształt stale kańciasty ziarn dopełni cechy zespołu.

Wymieniony cechy wskazują jednocześnie na eoliczny transport materjału i na mechaniczne (pustynne) warunki wietrzenia skał, bez ich chemicznego rozkładu.

Praca niniejsza jest tylko krótkim przyczynkiem do wielkiego zagadnienia wpływu pustyń na sąsiednie morza i wyniki jej mogą być przenoszone na osady kopalne tylko z wszelkiemi zastrzeżeniami. Z tych zastreżeń pokreślę kilka. Po pierwsze rezultaty mogą się stosować tylko do pustyń gorących, po drugie do takich, w których budowie skały ogniowe i metamorficzne biorą poważny udział. Następnie inną trudnością może być zjawisko wtórnego wietrzenia w osadzie minerałów charakterystycznych, a nie odpornych na wietrzenie. Wreszcie, łatwo możemy mieć w osadzie do czynienia z mieszaniną matarjału eolicznego i fluwialnego, a wtedy rozróżnienie niezawsze będzie możliwe.

Z temi zastrzeżeniami oddaję artykuł do druku. Uważam jednak za krok naprzód fakt, że w osadach morza Czerwonego wpływ pustyni dał się wyraźnie uchwycić i scharakteryzować.

Opis materjału faktycznego.

Wszystkie próbki zostały zebrane przez okręt Endeavour, podczas pomiarów dokonywanych dla admiralicji angielskiej. Próbki znajdują się w British Museum. Część z nich otrzymałem dla bliższego opracowania do Warszawy. Opis tych ostatnich próbek z uwzględnieniem przedewszystkiem minerałów detrytycznych podaję poniżej. (Próbki oglądane w Londynie nie różniły się zasadniczo od niżej opisanych).

Stacje wymiemiam według malejącej głębokości.

I — (1928) położenie 21 20′ 30″ *N*.
39 00′ 30″ *E*.
głębokość 901 m.

Osad na sucho b. jasny, kremowy, bardzo równomiernie pelitowy, łatwo rozmacza się w wodzie. W przełomie szorstki i na powierzchni widać ułamki pteropodów i foraminifer.

Po odszlamowaniu substancji ilastej (poniżej 0,05 mm.) pozostaje frakcja, składająca się przedewszystkiem z wapiennych mikroszczątków organicznych pochodzenia planktonicznego. Po zniszczeniu kwasem solnym szczątków wapiennych pozostaje dość liczne residuum mineralne.

Zespół mineralny wyróżnia się wielką jednostajnością co do wielkości, kształtu i świeżego stanu zachowania ziarn. Zato jest bardzo różnorodny co do składu mineralnego.

Wszystkie ziarna są kanciaste. Z wyjątkiem mik nie przekraczają wielkości 0,07 mm. (miki osiągają czasami 0,16 mm.). Wszystkie ziarna są świeże. Co do ilości minerały barwne przeważają znacznie nad przezroczystemi bezbarwnemi.

Wśród pierwszych dominują ilościowo trzy grupy: biotytu, amfiboli (reprezentowane głównie przez zieloną hornblendę) i mniej częste pirokseny. Inne minerały barwne spotykają się, ale należą do elementów akcesorycznych (np. ciemno-granatowy fluoryt.).

Wśród minerałów przezroczystych, bezbarwnych pierwsze miejsce zajmują skalenie. Wśród nich łatwo można wyróżnić ortoklaz, mikroklin, różne plagioklazy (z których udało się mnie uchwycić cechy optyczne albitu, andezytu, ale z pewnością istnieją i inne). Kwarce są dość rzadkie. Spotykają się i minerały bezbarwne, pewno z grupy skaleniowców.

II — (1927) położenie 20 18′ *N.*
38 41′ *E.*
głębokość 895 m.

Osad po wyschnięciu koloru jasno bronzowo-ceglastego, drobnopelitowy. Przełom, równy, szorstki i można na nim wyróżnić gołem okiem białe plamki otwornic (Globigerin).

Facja wapnista.

Po rozpuszczeniu w *HCl* i odszlamowaniu subst. ilastej pozostaje dość liczne residuum głównie mineralne.

Wszystkie minerały świeże, b. kanciaste. Wielkość maksymalna 0,07 mm. (dla mik 0,14 mm.). Minerały barwne 2 do 3 razy liczniejsze od bezbarwnych. Wśród pierwszych dominuje biotyt, amfibole (głównie hornblenda zwykła, ale zdarza się i bazaltowa, glaukofan, aktynolit).

Do rzadkich należy fluoryt.

Wśród bezbarwnych przeważają znacznie skalenie. Są różne, zarówno plagioklazy jak i ortoklaz, mikroklin. Podrzędne — kwarce i skaleniowce. Akcesoryczne: Tytanit?, anatas?, cyrkon (o ślicznych konturach geometrycznych).

III — (1927) położenie 20° 05′ 05″ *N.*
38° 13′ *E.*
głębokość 882 m.

Osad koloru cielisto żółtego, jasny. Przełom na sucho szorstki, równy.

Po odszlamowaniu subst. ilastej widać, iż szczątki fauny przeważają znacznie nad częścią mineralną. Po wytrawieniu *HCl* pozostaje residuum złożone tylko z minerałów detrytycznych.

Wszystkie ziarna kanciaste, maksymalna wielkość 0,06 mm., dla mik 0,12 mm.

Wśród minerałów minerały barwne i bezbarwne są prawie równe co do ilości, z lekką przewagą bezbarwnych. Wśród nich dominują skalenie (duży procent zbliźniaczonych). Dużo ziarn zlekka zwietrzałych, mętnych, bliżej nieoznaczonych, z łupliwością podłużną, reliefem silniejszym od skaleni, bezbarwne), Wśród kolorowych dominują miki (biotyty) i hornblendy. Miki mają czasami zlekka otarte kontury.

IV — (1925) położenie 21° 25′ *N.*
39° 01′ 30″ *E.*
głębokość 740 m.

Osad żółto-ochrowy, do bronzowego, nierównego natężenia barwy. Jest to muł wapienno-ilasty drobno pelitowy.

Przy szlamowaniu spływa niewielka ilość subst. ilastej. Po wytrawieniu w *HCl* zostaje residuum stanowiące kilka procent osadu.

W residuum oprócz minerałów są i szczątki zwierzęce (spikule gąbek—głównie mono i tetractinellidae—zachowane w opalu.

Przeważają jednak minerały detrytyczne. Ziarna nie przekraczają naogół. 0,07 mm. (miki osiągają 0,13 mm.) (w próbce dość obfitej znalazłem jedno ziarno kwarcu 0,20 mm.).

Mineralny ziarna są b. świeże i kanciaste (tylko skalenie bywają czasami zmatowiałe).

Minerały barwne są liczniejsze od bezbarwnych. Dominują amfibole, biotyty, pirokseny, skalenie, kwarce. Akcesorycznie spotykają się: kordieryt, szkliwo wulk., spinel? i kilka nieoznaczonych.

III — (1927) położenie 19° 49′ *N.*
37° 44′ *E.*
głębokość 618 m.

Osad wapienny ze znaczną domieszką subst. ilastej, koloru brunatno-cielistego, jasny. Po wyschnięciu w przełomie szorstki i wtedy widać gołym okiem liczne foraminifery.

Po odszlamowaniu sub. ilastej (niżej 0,05 mm.) i wytrawieniu kwasem solnym otrzymujemy residuum mineralne stanowiące mniej niż $^{1}/_{10}$ osadu.

Minerały kanciaste, bez konturów geometrycznych. Wielkość nie przekracza 0,06 mm. (miki do 0,13 mm.). Z wyjątkiem lekko zmatowiałych niektórych ziarn plagioklazów, wszystkie ziarna b. świeże. Min. barwne trochę liczniejsze od bezbarwnych.

Dominują: hornblenda (inne amfibole dość rzadkie), biotyt, pirokseny, skalenie, rzadszy — kwarc.

Akcesorycznie: jakiś skaleniowiec (min. reg.) cyrkon (kształty geometryczne).

IV — (1927) położenie 19° 35′ *N.*
37° 16′ *E.*
głębokość 615 m.

Osad brunatny w tonie ciepłym. Przełom (po wyschnięciu) równy, mało szorstki, widać na nim zrzadka białe kulki otwornic i włókna pteropodów.

Muł wapienno-ilasty.

Po odszlamowaniu subst. ilastej i rozpuszczeniu reszty w *HCl* otrzymujemy dość liczne residuum mineralne. Ziarna kanciaste, bez kształtów geometrycznych. Wielkość nie przekracza 0,06 mm. (miki 0,13 mm). Ziarna świeże. Minerały barwne znacznie liczniejsze od bezbarwnych.

Dominują: amfibole (głównie ziel. hornblenda), pirokseny, biotyty, skalenie, kwarce.

Akcesoryczne: muskowit, fluoryt, kilka min. bezbarwnych reg. bliżej nieoznaczonych.

V — (1927) położenie 20° 32′ *N.*
39° 9′ 30″ *E.*
głębokość 571 m. (albo 560 m.).

Osad wapienno-ilasty dość grubo ziarnisty, gołem okiem widać szczątki pochodzenia organicznego. Kolor mułu na sucho brunatny.

Residuum mineralne po odszlamowaniu subst. ilastej i wytrawieniu *HCl* składa się z pewnej ilości drobnego pyłu. Ziarna nie przekraczają 0,06 mm wielkości (tylko miki dochodzą 0,13 mm.). Minerały barwne 6 do 7 razy liczniejsze od bezbarwnych.

Dominują Amfibole, biotyty, pirokseny, skalenie, kwarce.

Akcesoryczne magnetyt (?), rutyl, regularny minerał zielono zabarwiony (ew. spinel.) i inne. Wszystkie ziarna kanciaste, nawet miki nie mają otartych krawędzi.

Jak zwykle ziarna nie posiadają kształtów geometrycznych.

Większość ziarn b. świeża, ale niektóre skalenie są silnie zmatowiałe.

VI — (1927) położenie 21 24′ *N.*
39 08′ *E.*
głębokość 29 m.

Osad wapienny, prawie biały po wyschnięciu (jasno-popielaty na mokro), drobno pelitowy, ale suchy w palcach i prawie bez subst. ilastej.

Po *HCl* i odszlamowaniu śladów subst. ilastej otrzymuje się dość znaczne residuum prawie wyłącznie mineralne (wielkość maks. ziarn 0,05—6 mm., tylko miki 0,11 mm.) Kolorowe minerały są znacznie liczniejsze od bezbarwnych. Biotyty mają lekko zaokrąglone krawędzie, wszystkie inne ziarna są kanciaste.

Najliczniejsze są amfibole, skalenie, biotyty, pirokseny, rzadsze — kwarce.

VII — (1928) położenie 15 29′ 00″ *N.*
42 34′ 06″ *E.*
głębokość 28 m.

Osad szary z silnym odcieniem oliwkowym. Po wyschnięciu w przełamie szorstkawy z widocznemi ułamkami ziarn i szczątków organicznych. Muł bardzo słabo wapnisty.

Po odszlamowaniu dość licznej subst. ilastej i wytrawieniu *HCL* otrzymujemy residuum głównie mineralne. Są zrzadka i spikule gąbek. Minerały wszystkie są kanciaste. Ziarna nie przekraczają 0,06 mm., tylko miki są większe i dochodzą 0,10 mm., ale spotykają się b. rzadko. Minerały barwne są znacznie liczniejsze od bezbarwnych. Składniki główne: amfibole, pirokseny, skalenie. Podrzędne składniki kwarce i miki. Akcesoryczne — dolomit (w romboedrach) i inne.

VIII — (1928) położenie 15 29′ 01″ *N.*
42 39′ 04″ *E.*
głębokość 21 m.

Muł piaszczysto-wapnisty. Osad grubookruchowy z licznemi ułamkami drobnych małży i innych organizmów wapiennych. Przy szlamowaniu po wytrawieniu *HCl* odchodzi sporo subst. ilastej. Residuum głownie mineralne składa się z ziarn: skaleni, amfiboli, piroksenu, biotytu i kwarcu. Ziarna kanciaste. Oprócz mik nie przekraczają 0,06 mm. Bardzo świeże. Kolorowe i bezbarwne min. mniejwięcej jednakowo liczne.

Stacje 15° 28′ 03″ *N.*, 42° 41′ 08″ *E.* głęb. 19 m. i 15° 21′ 00″ *N.*, 42° 43′ 05″ *E.* głęb. 23 m. nie różnią się niczem charakterystycznym od stacji poprzedniej.

IX — (1928) położenie 15 24′ *N.*
42 42′ *E.*
głębokość 16 m.

Piasek z mułem wapiennym i szczątkami szkieletów. Osad jasno-szary. Po odszlamowaniu subst. ilastej otrzymuje się znaczną ilość pogruchotanych szczątków skorup zwierzęcych, która przewyższa ilość ziarn mineralnych. Wśród szczątków szkieletów dominują pteropody. Wśród materjału po wytrawieniu *HCl* widzimy tylko minerały detrytyczne.

Ziarna mineralne nie przewyższają naogół 0,2 mm. tylko miki białe osiągają 0,25 a nawet 0,3 mm. Minerały barwne plus minus tak liczne jak i bezbarwne. Wśród barwnych dominują amfibole (głównie ziel. hornblenda), rzadsze augity. Wśród bezbarwnych liczne skalenie (są pliagioklazy, mikrokliny, ortoklazy) biała mika, kwarce. Tylko niektóre skalenie są skalenizowane większość ziarn b. świeża. Wszystkie kanciaste.

X — (1928) położenie 15 25′ 05″ *N.*
42 42′ 04″ *E.*
głębokość 13 m.

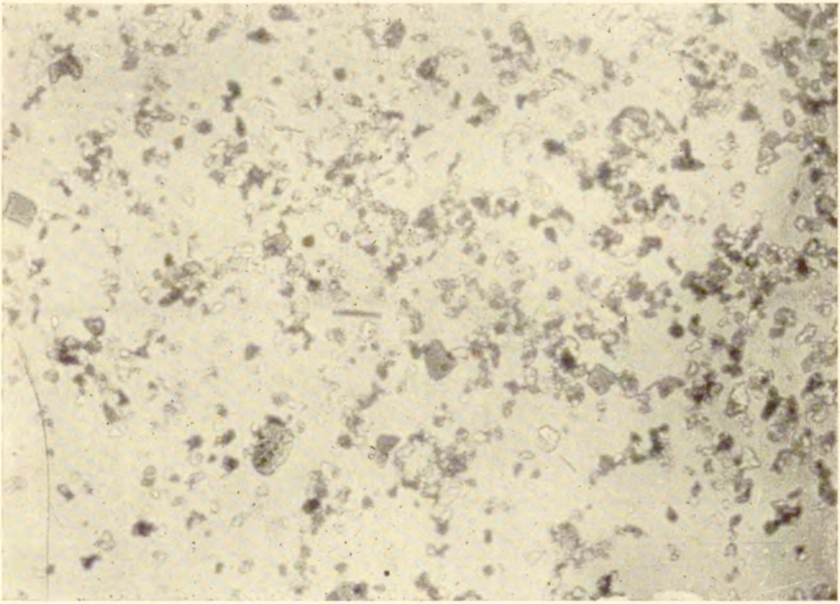
Muł ilasty ze skorupkami wapiennemi. Osad szaro-popielaty. Przełom b. nierówny, szorstki, usiany białemi punktami szczątków zwierzęcych.

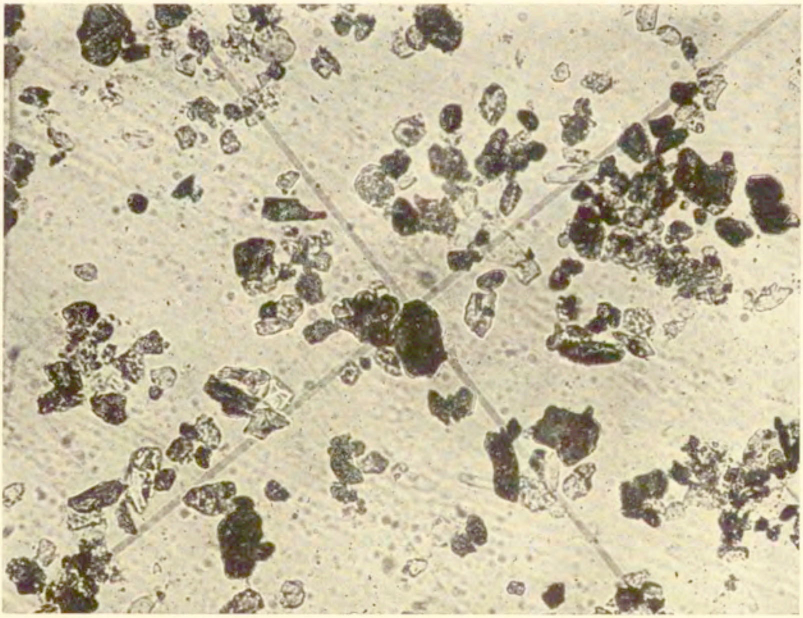
Po odszlamowaniu subst. ilastej i wytrawieniu *HCl* otrzymujemy pewną ilość residuum mineralnego. Ziarna dwu typów: świeże, kanciaste nie przekraczające 0,06 mm. (miki głównie muskowit 0,16 mm.) i większe dochodące 0,50 mm. lepiej lub gorzej otoczone, często porysowane lub matowe na powierzchni, wśród ostatnich dominuje kwarc i skaleń. Są to niewątpliwie ziarna z abrazji sąsiedniego brzegu.

XI — (1928) położenie 15 24′ 00″ *N.*
42 43′ 09″ *E.*
głębokość 8,5 m.

Piasek ciemno-szary b. drobny, trochę ilasty, prawie bezwapienny.

Łatwo można wyróżnić dwa typy ziarn. Większe, wielkości do 0,50 mm. obtoczone, porysowane lub zmatowiałe na powierzchni. Głównie składające się z ziarn kwarcu i skaleni, rza-





Mikrofotografje z pyłu mineralnego znajdywanego w residuum mułu
z Morza Czerwonego. St. 5, gł. 618 m. pow. 40×. sw. ||

Duże ciemne ziarna — biotyty. Małe ciemne ziarna — hornblenda.
Większość ziarn jasnych — skalenie.

dziej amfiboli i drobne kanciaste, świeże nie przekraczając 0,07 mm. W drugiej grupie min. barwne (amfibole, piroks.) są liczniejsze od bezbarwnych (skaleni, kwarcy).

Grupa dużych ziarn mineralnych, zaokrąglonych i porysowanych jest znacznie liczniejsza od grupy ziarn drobnych, kanciastych. Ziarn pośrednich prawie niema.

Niewątpliwie pierwszą grupę stanowią minerały, pochodzące z abrazji sąsiedniego brzegu, drugą prawdopodobnie minerały, przyniesione przez wiatry. Są one identyczne z minerałami występującemi w utworach głębi. (Zaznacza się tylko w utworach b. płytkich ubóstwo lub brak biotytu — jest to pewnie rezultatem roztarcia tego miękkiego minerału przez poruszany falami piasek).

Zb. Sujkowski.

The influence of the desert on the Red Sea deposits.

Mémoire présenté par M. J. Lewiński dans la séance du 26 Juin 1931.

Summary.

The influence of a desert may be considered as bringing positive traces to the deposits. It seems possible to establish the proximity of a desert on the base of the exploration of the Red Sea deposits only.

These traces are:

1-the freshness and angularity of detrital grains,

2-their size which does not exceed 0,07 mm. only for mica 0,14 mm.,

3-the characteristic mineral composition with the predominance:

a-of coloured minerals and

b-of common rock forming minerals,

c-and of easy weathering minerals.

These results are evidently valuable for some particular condition in which the Red Sea and the naighbouring desert are to be found.

M. Kamieński.

Obserwacje całkowitego zaćmienia księżyca, dokonane w dniu 2 Kwietnia 1931 r. w Obserwatorjum Astronomicznem Warszawskiem.

Komunikat wygłoszony dn. 26 czerwca 1931 r.

Praca będzie wydrukowana w „Pracach Matematyczno-Fizycznych". Warszawa, 1931.

Observations de l'éclipse totale de la lune faites le 2 Avril 1931 à l'Observatoire Astronomique de Varsovie.

Mémoire présenté dans la séance du 26 Juin 1931.

Ce travail vient de paraître dans les „Prace Matematyczno-Fizyczne". Varsovie, 1931.

E. Zaniewska-Chlipalska.

Skład skaleni pegmatytowych jako kryterjum wodnego pochodzenia pegmatytów.

Przedstawił St. J. Thugutt na posiedzeniu dn. 26 czerwca 1931 r.

Streszczenie.

Na podstawie zestawienia wyników analiz skaleni pegmatytów i skał magmatycznych stwierdził prof. St. J. Thugutt [1]), że skalenie granitów, trachitów i in. wykazują normalny stosunek tlenków alkalicznych, glinki i krzemionki, natomiast skalenie pegmatytowe wykazują niedobór krzemionki. Zgadza się to z wynikiem eksperymentu wspomnianego autora nad rozpuszczalnością ortoklazu w wodzie [2]); do roztworu przeszło ciało kwaśniejsze, część nierozpuszczalna była uboższa w SiO_2 od pierwotnego ortoklazu.

[1]) St. J. Thugutt. „O pochodzeniu skaleni pegmatytowych", Arch. Miner. T. N. W., T. I, 1925.

[2]) Tegoż autora: „O rozpuszczalności pewnych krzemianów w wodzie", Spr. T. N. W., 6 (1913), 629.

W celu potwierdzenia tej zasady dla zjawisk, zachodzących w przyrodzie, wykonany został rozbiór chemiczny mikroklinu, wydzielonego z żyły pegmatytowej z Klesowa [1]) oraz sanidynu z Wehr (Eifel). Analizy obu minerałów wykonane zostały na materjale czystym, w jednakowych warunkach i jednakowemi metodami, z zachowaniem daleko idących ostrożności przy przygotowaniu materjału do analizy; sanidyn wykazał skład normalny ($R_2O : Al_2O_3 : SiO_2 = 1{,}0 : 1 : 6{,}01$), mikroklin natomiast niedobór krzemionki ($R_2O : Al_2O_3 : SiO_2 = 1{,}02 : 1 : 5{,}91$) [2]).

Przeliczone zostały (na stosunki tlenków alkalicznych do krzemionki przy glince wziętej za jedność) 44 analizy chemiczne skaleni pegmatytowych, skał magmatycznych i adularów [3]) (z uwzględnieniem rozbiorów, przytoczonych we wspomnianej pracy prof. St. J. Thugutta) oraz wykonano wykres, przyczem na osi rzędnych oznaczone były tlenki alkaliczne, na odciętych krzemionka. W środku wykresu zaznaczyło się „skupienie" skaleni pochodzenia ogniowego; skalenie pegmatytowe wykazały rozproszenie w obszarze, wykazującym niedobór SiO_2; [4]) nadmiar natomiast tego tlenku zdają się wykazywać adulary, o ile można było wnosić z małej ilości opublikowanych analiz tego minerału.

Występowanie skaleni o składzie chemicznym, stale odbiegającym od normy, jest regułą dla pegmatytów i wskazuje na wodne pochodzenie tych utworów.

Pracownia Mineralogiczna T. N. W.; czerwca 1931 r.

---

[1]) E. Zaniewska: „Przyczynek do znajomości żył pegmatytowych w porfirycie klesowskim", Arch. T. N. W., T. I, 1925.

[2]) Fakt nieznacznego odchylenia od normy wartości dla SiO_2 mógł być spowodowany występowaniem w mikroklinie b. drobnych wtrąceń kwarcu, trudnych do oddzielenia mechanicznie.

[3]) Analizy przeważnie zaczerpnięte z dzieła Doeltera „Handb. d. Mineralchemie" T. II, oraz z prac oryginalnych.

[4]) Kilka analiz mikroklinów, wykazujących nadmiar SiO_2, jak się okazało, wykonane zostało na materjale, wykazującym domieszki kwarcu.

E. Zaniewska-Chlipalska.

Composition des feldspaths alcalins des pegmatites comme critérium de l'origine aqueuse des pegmatites.

Note présentée par. M. St. J. Thugutt dans la séance du 26 Juin 1931.

Résumé.

M. St. Thugutt a fait voir[1]) que les feldspaths alcalins des pegmatites sont sans exception anormaux au point de vue de leur composition chimique, tandis que les feldspaths ignés représentent des types normaux. Cela est en accord avec les résultats de l'expérience du même auteur sur la solubilité de l'orthose dans l'eau[2]).

Dans le présent travail on a pu constater encore une fois que l'idée de St. J. Thugutt était juste. On a analysé notamment la microcline des pegmatites de Klesowo (Volhynie, Pologne) et la sanidine de Wehr (Eifel, Allemagne) et calculé les relations $R_2O : Al_2O_3 : SiO_2$.

La relation entre l'alumine et la silice est égale à 1:6 (1:6,01) pour la sanidine; elle n'atteint pas 1:6 pour la microcline (1:5,91); cependant que pour l'adulaire de St. Gotthard[3]) elle semble dépasser en génerale 1:6.

La composition anormale des feldspaths des pegmatites suggère l'idée de l'origine aqueuse des filons pegmatiques.

---

[1]) St. J. Thugutt: „Sur la genèse des feldspaths des filons pegmatiques" Arch. de Minér. de la Soc. d. Sc. de Varsovie, Vol. I, 1925, 69—77.

[2]) St. J. Thugutt: Sur la solubilité de certains silicates dans l'eau". C. R. Soc. Scient. de Varsovie, **6** (1913), 629; voir aussi; Revue de Géol. Belgique, 1921, No 8, 337.

[3]) Analyses citées dans le II Vol. de „Handbuch d. Mineralchemie" de Doelter.

E. S. Litmanowiczówna.

O mikroklinie szarego granitytu z Maczulanki na Wołyniu.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 26 czerwca 1931 r.

Sur le microcline du granitite gris de Maczulanka en Volhynie.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 26 Juin 1931.

Streszczenie.

W pracy niniejszej poddany był badaniu mikroskopowemu z zastosowaniem metody Fedorowa mikroklin szarego granitytu z Maczulanki na Wołyniu.

Ponieważ mikroklin ten okazał się mikropertytem, zajęłam się najpierw sprawą zrostów mikroklinu z plagioklazem. Badany mikroklin jest poprzerastany licznemi wkładkami albitu, rzadko przekraczającemi 0,02 mm. grubości. Wkładki te są utworami blaszkowemi, rozwiniętemi równolegle do ścian pasa [010], najczęściej równolegle do plaszczyzny b. stromego daszka poprzecznego (h01) t. j. do płaszczyzny podzielności murchisonitowej.

Ilość albitu w mikroklinie bywa rozmaita; uderzające jest, że w miejscach nagromadzenia większej ilości albitu występują skupienia minerałów z grupy mik, epidotu i kaolinu, niewątpliwie wtórnego pochodzenia. Ta parageneza rzuciła pewne światło na powstanie mikropertytu. Z porównania poglądów innych badaczów na sprawę powstawania pertytów z własnemi spostrzeżeniami nad mikropertytem z Maczulanki, doszłam do wniosku, że powstał on na skutek albityzacji skalenia sodowo-potasowego. Albityzacja dojść musiała do skutku za sprawą roztworów wodnych, o czem świadczy obecność obwódki albitowej w niektórych kryształach mikroklinu i parageneza albitu z wyżej wymienionemi minerałami z grupy mik, epidotu i kaolinu.

Do zbadania sprawy ustroju zrostów pertytowych zastosowałam mikroskop teodolitowy; wyznaczyłam na nim metodą Fedorowa położenie elipsoidów współczynnikowych obu składników zrostu; poczem elipsoid albitu przekształciłam w teoretyczny

elipsoid mikroklinu. Przekonałam się, że nie zachodzi tu zrost równoległy, a także że położenie albitu i mikroklinu nie jest symetryczne względem jakiegoś kierunku krystalograficznego.

Charakter plagioklazu, tworzącego zrost pertytowy, określony został pośrednio przez pomiar kąta osi optycznych na stoliku Fedorowa metodą Bereka ($2V = 81^0$), a także przez pomiar kątów znikania światła na dwuścianie podstawowym i w przekroju $\perp \alpha$.

Drugą część pracy stanowi badanie rodzaju zbliźniaczeń mikroklinu z Maczulanki. Wyniki, osiągnięte przez zastosowanie metody Fedorowa, przedstawiają się następująco:

Do najpospolitszych należą bliźniaki według prawa Karlsbadzkiego lub Roc-Tourné, złożone z dwóch dużych osobników. Jest to pierwsza generacja zbliźniaczeń, właściwa symetrji jednoskośnej. W drugiej generacji każdy z dwu dużych osobników rozpada się na drobne elementy, o dwóch różnych orjentacjach; osobniki te są zbliźniaczone według prawa albitowego. Te fragmenty dwóch dużych osobników tworzą między sobą bliźniaka według pozostałego prawa danej grupy, mianowicie: R.-T. w przypadku, jeśli duże osobniki tworzą bliźniaka karlsbadzkiego, lub prawo karlsbadzkie — jeśli tworzą one bliźniaka Roc-Tourné. Spotykają się jednak bliźniaki, w których zbliźniaczeniu drugiej generacji podległa jedna tylko połówka bliźniaka — wtedy powstaje bliźniak, złożony z trzech osobników, zbiźniaczonych według tej samej grupy praw. Jeśli zbliźniaczeń wtórnej generacji brak zupełnie, wówczas mamy do czynienia z dwojakiem, najczęściej karlsbadzkim.

W przypadkach, gdy blaszki zbliźniaczenia albitowego były b. drobne, stosowałam do wyznaczenia płaszczyzny i osi bliźniaczej metodę, opartą na zjawisku równego rozjaśnienia, opisaną przez M. Kołaczkowską.

W końcu pracy starałam się wniknąć w istotę struktury kratkowej, która w badanym mikroklinie rzadko bywa typową.

Stwierdzić można, że struktura kratkowa badanego mikroklinu wywołana jest przez zbliźniaczenia drugiej generacji. Z dwu poglądów na rodzaj tych zbliźniaczeń, w badanym przypadku słuszniejszym wydaje się pogląd Sabersky'ego, niż pogląd Böggilda i innych. Struktura kratkowa mikroklinu tego wywołana jest obecnością fragmentów jednego tylko zbliźniaczenia albitowego. Powstaje bądź dzięki szczególnemu ich ułożeniu w szeregi, bądź wskutek tego, że tworzą one blaszki, wydłużone w dwóch kierunkach: w kierunku krawędzi [100] i [010]. Jedne z nich mają płaszczyznę zrostu (010), drugie zaś płaszczyznę z pasa [010], bliską płaszczyźnie podzielności murchisonitowej. Blaszki te tworzą kąt bliski 90^0, tak że w przekrojach prostopadłych do ścian słupa, tworzą rodzaj prostokątnej kraty.

Praca niniejsza drukowana będzie w całości w Archiwum Mineralogicznem Tow. Nauk. Warsz. T. VII (1931).