O WYZNACZENIU

SPÓLNYCH PIERWIASTKÓW

DWÓCH RÓWNAŃ DANYCH

PRZY POMOCY RUGOWNIKA TYCH RÓWNAŃ

PRZEZ

M.-A. BARANIECKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 13 lipca 1877 roku.)

Przy wykładzie « Podstawień liniowych » wypadło mi niekiedy przerabiać drobiazgowo niektóre z rachunków, wskazanych w dziele *Lessons introductory to the modern higher algebra by* GEORGE SALMON. Dała się spostrzedz takim sposobem pewna nieścisłość, powtarzająca się tak we wszystkich trzech wydaniach klasycznego dzieła (1), jako téż w obu wydaniach opracowania niemieckiego *Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen...* von Dr WILHELM FIEDLER (2), we francuzkim przekładzie *Leçons d'Algèbre supérieure...* par BAZIN (3) i w polskiém tłomaczeniu *Wykład zupełny algebry* przez ADOLFA SĄGAJŁĘ (4).

Wyłożymy w krótkich słowach odpowiednią teoryę i nasze sprostowanie sprawdzimy na przykładzie.

Jeżeli mamy dane dwa równania

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots = 0, & \text{albo krócéj } \varphi(x) = 0, \\ b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots = 0, & \text{albo krócéj } \psi(x) = 0, \end{array} \right.$$

i jeśli

$$(2)\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$$

(1) Trzeciego wydania str. 91.
(2) Drugiego wydania str. 119.
(3) Str. 63.
(4) Tom II, str. 111.

są rozwiązaniami równania

$$\psi(x) = 0$$

to, gdy pierwiastki (2) podstawimy zamiast x w lewą stronę równania

$$\varphi(x) = 0,$$

rezultaty zaś podstawień

$$\varphi(\alpha),\ \varphi(\beta),\ \varphi(\gamma),\ \varphi(\delta),\ \ldots$$

pomnożymy przez siebie, zaś w iloczynie

(3) $$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\ldots = \mathrm{R},$$

funkcye symetryczne ilości (2) zastąpimy przez spółczynniki równania

$$\psi(x) = 0,$$

którego te ilości są pierwiastkami; to R zjawi się jednorodną funkcyą spółczynników równań (1), przywodzącą się tożsamościowo do zera, w razie, jeśli równania (1) posiadają spólne rozwiązania, którą to funkcyę nazwiemy rugownikiem (résultante, eliminant) tych równań [1].

W przypadku istnienia spólnych rozwiązań równań (1), takiém rozwiązaniem będzie jedna z ilości (2), np. ilość α, a wtedy

(4) $$\varphi(\alpha) = 0$$

a tém samém, na mocy związku (3), także i nasza funkcya spółczynników tożsamościowo staje się zerem, t. j.

$$\mathrm{R} = 0.$$

Lecz, gdy w ogóle

$$\varphi(\alpha) = a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots$$

$$\varphi(\beta) = a_m\beta^m + a_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots\quad,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a zatém

$$\frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial a_p} = \alpha^p;\qquad \frac{\partial\varphi(\beta)}{\partial a_p} = \beta^p;\ \ldots,$$

to zawsze

(5) $$\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial a_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots + \varphi(\alpha)\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots + \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\gamma^p\varphi(\delta)\ldots + \ldots$$

Jeśli więc α ma być pierwiastkiem spólnym równań (1), t. j. ma miejsce związek (4), to wyrażenie (5) redukuje się w tym przypadku do jednego wyrazu, mianowicie

(6) $$\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial a_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ \ldots$$

---

(1) P. Żelewski w *Nauce o Wyznacznikach* (Kraków, 1877) tworzy dziwny termin: « wyniknik » (str. 131).

Podobnież, w tymże przypadku, moglibyśmy wyprowadzić

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \alpha^q \varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\dots \tag{7}$$

Z wyrażeń zaś (6) i (7) wypada

$$\frac{\partial R}{\partial a_p} : \frac{\partial R}{\partial a_q} = \alpha^p : \alpha^q,$$

$$= \alpha^{p-q},$$

co daje możność wyznaczyć ów spólny pierwiastek α przy pomocy pochodnych rugownika R względem którychkolwiek spółczynników jednego z równań (1). Gdybyśmy wzięli pochodne względem którychkolwiek dwóch po sobie następujących spółczynników, to mielibyśmy prościéj

$$\frac{\partial R}{\partial a_p} : \frac{\partial R}{\partial a_{p-1}} = \alpha^p : \alpha^{p-1} = \alpha.$$

Widzimy więc, że, mając wyrażenie rugownika dwóch danych równań, możemy, bez rozwiązywania tych równań wyznaczyć ich spólny pierwiastek.

Np. rugownik dwóch równań

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

jest

$$R = a^2C^2 - abBC + ac(B^2 - 2AC) + b^2AC - bcAB + c^2A^2,$$

zkąd

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2aC^2 - bBC + c(B^2 - 2AC),$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -aBC + 2bAC - cAB.$$

Jeśli dane są równania

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

to, podstawiając

$$A = 1,\quad B = 0,\quad C = -4,\quad a = 1,\quad b = -3,\quad c = 2,$$

mamy

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 48; \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = 24$$

i wypadnie nam istotnie spólny pierwiastek

$$\frac{\partial R}{\partial a} : \frac{\partial R}{\partial b} = 2.$$

Gdyby jednak równania (1) miały dwa spólne pierwiastki, np. α i β, to, jak widzimy z wyrażeń (6) i (7), pierwsze pochodne względem wszystkich spółczynników stawałyby się zerem, gdyż wtedy jeszcze i

$$\varphi(\beta)=0;$$

lecz zróżniczkujmy raz jeszcze względem a_p ogólne wyrażenie pierwszéj pochodnéj, t. j. wyrażenie (5); otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R}{\partial a_p{}^2}=&\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots+\alpha^p\varphi(\beta)\gamma^p\varphi(\delta)\ldots+\ldots\\&+\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots+\varphi(\alpha)\beta^p\gamma^p\varphi(\delta)\ldots+\ldots\\&+\alpha^p\varphi(\beta)\gamma^p\varphi(\delta)\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ponieważ zaś, w naszém założeniu, są teraz α i β spólnemi rozwiązaniami równań (1), skutkiem czego

$$\varphi(\alpha)=0 \quad \text{i} \quad \varphi(\beta)=0,$$

to w powyższém wyrażeniu drugiéj pochodnéj tylko pierwsze wyrazy pierwszych dwóch wierszy nie znikają, tak, że się ono w roztrząsanym obecnie przypadku, sprowadza do

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_p}=2\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots \tag{8}$$

Podobnież, przez odpowiednie zróżniczkowanie i uwzględnienie naszego założenia, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p\partial a_q}=(\alpha^p\beta^q+\alpha^q\beta^p)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_q}=2\alpha^q\beta^q\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots \tag{10}$$

Z wyrażeń (8), (9) i (10) wypada odpowiednio

$$\alpha^p\beta^p=\frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\,\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_p},$$

$$\alpha^p\beta^q-\alpha^q\beta^p=\frac{1}{\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\,\frac{\partial^2 R}{\partial a_p\partial a_q},$$

$$\alpha^q\beta^q=\frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\,\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_q}.$$

Uważając więc $\alpha^p:\alpha^q$, oraz $\beta^p:\beta^q$ za rozwiązania równania jednorodnego drugiego stopnia, mamy tu odpowiednie wyrażenia dla summy i iloczynów pierwiastków, tak, że równanie, którego te stosunki są rozwiązaniami, jest następujące:

$$\frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\lambda^2\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_q}-\frac{1}{\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\lambda\mu\frac{\partial^2 R}{\partial a_p\partial a_q}+\frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\mu^2\frac{\partial^2 R}{\partial a^2_p}=0,$$

czyli

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2_q} - 2\lambda\mu \frac{\partial^2 R}{\partial a_p \partial a_q} + \mu^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2_p} = 0\,; \tag{11}$$

gdy odnajdziemy rozwiązania tego równania, które oznaczmy :

$$\lambda' : \mu' \quad \text{i} \quad \lambda'' : \mu'',$$

to

$$\lambda' : \mu' = \alpha^p : \alpha^q,$$

$$= \alpha^{p-q},$$

$$\lambda'' : \mu'' = \beta^p : \beta^q,$$

$$= \beta^{p-q};$$

co wykazuje możność wyznaczenia dwóch spólnych pierwiastków α i β równań (1) przy pomocy rugownika tych równań, gdyż znając takowy, możemy łatwo utworzyć równanie (11) i je rozwiązać. Gdybyśmy brali pochodne rugownika względem dwóch po sobie następujących spółczynników jednego z równań (1), to z równania

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2_{p-1}} - 2\lambda\mu \frac{\partial^2 R}{\partial a_p \partial a_{p-1}} + \mu^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2_p} = 0$$

otrzymalibyśmy bezpośrednio poszukiwane pierwiastki, gdyż wtedy

$$\lambda' : \mu' = \alpha,$$

$$\lambda'' : \mu'' = \beta.$$

W razie, gdyby równania (1) miały trzy spólne rozwiązania, to wyrażenia (8), (9) i (10), t. j. drugie pochodne rugownika względem wszystkich spółczynników każdego z danych równań, byłyby równe zeru, lecz wtedy odpowiedniem postępowaniem moglibyśmy zawsze, przy pomocy trzecich pochodnych rugownika, bez rozwiązywania danych równań, odnaleźć owe spólne pierwiastki, i t. d.

Pan Salmon, jak również i wspomnieni wyżéj tłomacze jego dzieła, zamiast brać drugą pochodnę wyrażenia ogólnego (5) pierwszéj pochodnéj i dopiero w otrzymaném rozwinięciu drugiéj pochodnéj robić założenia

$$\varphi(\alpha) = 0, \qquad \varphi(\beta) = 0,$$

postępują inaczéj. W pierwszéj pochodnéj (5) robią już założenie

$$\varphi(\alpha) = 0;$$

otrzymawszy uproszczone wyrażenie pierwszéj pochodnéj, mianowicie

$$\frac{\partial R}{\partial a_p} = \alpha^p \varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots,$$

różniczkując je po raz drugi względem a_p i wtedy, w otrzymaném wyrażeniu, przyjmują, że jeszcze

$$\varphi(\beta) = 0.$$

Tak niemetodyczne postępowanie prowadzi do tego, że, zamiast wyrażeń (8) i (10), otrzymują

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2} = \alpha^p \beta^p \varphi(\gamma)\varphi(\delta) \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2} = \alpha^q \beta^q \varphi(\gamma)\varphi(\delta) \ldots,$$

skutkiem czego zamiast równania (11), wyznaczającego spólne pierwiastki, mają, jako takie, równanie następujące

(12) $$\lambda^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2} - \lambda\mu \frac{\partial^2 R}{\partial a_p \partial a_q} + \mu^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2} = 0.$$

Że równanie (12) nie może służyć do wyznaczenia spólnych rozwiązań, i że za takowe przyjąć należy równanie (11), przekona nas najlepiéj przykład.

Rugownik dwóch równań

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

jest

$$\begin{aligned} R = {} & a^3D^3 - a^2bCD^2 + a^2cD(C^2 - 2BD) - a^2d(C^3 - 3BCD + 3AD^2) + ab^2BD^2 - abcD(BC - 3AD) \\ & + abd(BC^2 - 2B^2D - ACD) + ac^2D(B^2 - 2AC) + acd(2AC^2 + ABD - B^2C) \\ & + ad^2(B^3 - 3ABC + 3A^2D) - b^3AD^2 + b^2cACD - b^2dA(C^2 - 2BD) - bc^2ABD \\ & + bcdA(BC - 3AD) - bd^2A(B^2 - 2AC) + c^3A^2D - c^2dA^2C + cd^2A^2B - d^3A^3\,; \end{aligned}$$

jeśli weźmiemy np. równania

$$x^3 + 1 = 0,$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

to

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0. \quad D = 1\,;$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2, \quad d = -1.$$

Opuszczając w pochodnych wyrazy zawierające czynniki B lub C, mamy tutaj

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} = 6aD^3 - 6dAD^2 = 6 + 6 = 12,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} = 3cAD^2 = 6,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} = -6bAD^2 = +12.$$

Skutkiem tego, według równania p. SALMON'a będzie tu

(12) $$12\lambda^2 - 6\lambda\mu + 12\mu^2 = 0,$$

gdy tymczasem równanie nasze daje

(11) $$12\lambda^2 - 2.6\lambda\mu + 12\mu^2 = 0,$$

czyli

$$\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 = 0,$$

lub inaczéj

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 = 0,$$

co właśnie być powinno, albowiem pierwsze strony danych równań mogą być tak przedstawione:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1).$$