Entwicklung der Theorie der Singulären Lösugen

Rothenberg

Yrw

Kat

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XX.3

GESCHICHTLICHE DARSTELLUNG DER ENTWICKLUNG DER THEORIE DER SINGULÄREN LÖSUNGEN TOTALER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON DER ERSTEN ORDNUNG MIT ZWEI VARIABLEN GRÖSSEN

VON

SIEGFRIED ROTHENBERG

IN NÜRNBERG

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Literaturverzeichnis.[1])

[1] Huygens. Horologium oscillatorium. Über Evoluten, Paris 1673, Op. Bd. 1, p. 89.

[2] Tschirnhausen. Nova methodus tangentes curvarum. Invent. Nov. Par. Soc. Scient., p. 364. — De caustica. Acta Erud., Leipzig 1682.

[3] Leibniz. De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se currentibus formata easque omnes tangente ac de novo in ea re Analysis infinitorum usu. Acta Erud. Leipzig 1692, p. 168—172. Op. Bd. 3, p. 264—266, Genf 1768.

[4] Bernoulli, Johann. Solutio curvae causticae per vulgarem Geometriam Cartesianam. Acta Erud., Leipzig 1692, p. 30—35; ferner Oeuvres Bd. 3. Leç. 14.

[5] Leibniz. Nova calculi differentialis applicatio et usus, ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione. Acta Erud., Leipzig 1694, p. 311—316. Op. Bd. 3, p. 296. Genf 1768.

[6] Taylor, Brook. Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715.

[7] Clairaut. Solutions de plusieurs problèmes, où il s'agit de trouver des courbes, dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches exprimé par une équation donnée. Hist. de l'Ac. Paris 1734, publ. 1736, p. 196—215.

[8] Euler. Mechanica sive motus scientia analytice exposita. Petersburg I., II. 1736.

[9] D'Alembert. Methodes, pour intégrer quelques équations différentielles. Hist. de l'Ac. Berlin 1748, publ. 1750, p. 275—291 (13. April 1747 vorgelegt). IV. Teil von „Suite des recherches sur le calcul intégral".

[10] Clemm. Von einer Differentialgleichung, die man integrieren kann, ob sie sich schon durch die ordentlichen Regeln nicht integrieren läßt. Hamb. Magaz. 1752. Bd. 10, p. 637—641.

[11] Euler. Exposition de quelques paradoxes dans le Calcul intégral. Hist. de l'Ac. Berlin 1756, p. 300—321.

[12] Condorcet. Miscell. Taurinensia 1766—1769, Bd. 4, p. 6—11. cf. Calcul intégral, p. 67.

[13] Euler. Institutiones Calculi integralis. Petersburg 1768 (1. Ausg.) 1792 (2. Ausg.) Bd. 1, p. 342—360.

[1]) Das Literaturverzeichnis ist chronologisch geordnet; auf die den einzelnen Arbeiten beigefügten Nummern beziehen sich die in den Fußnoten angegebenen Zahlen. Die mit * versehenen Literaturangaben sind wegen ihres zu unbedeutenden Inhaltes nicht weiter erwähnt worden oder waren dem Verfasser unzugänglich geblieben.

[14] D'Alembert. Recherches sur le Calcul intégral. Hist. de l'Ac. Paris 1769, publ. 1772, p. 84—90. Beweis eines Theorems, das 1767 veröffentlicht.

[15] Laplace. Disquisitiones de calculo integralis. Acta Erud., Leipzig 1771, p. 537—559.

[16] Laplace. Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles. Hist. de l'Ac. Paris. I. Teil, 1772, publ. 1775, p. 343—370. cf. Oeuvres, Bd. 8.

[17] Laplace. Additions au Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles. Hist. de l'Ac. Paris, I. Teil, 1772, publ. 1775, p. 651.

[18] Laplace. Sur les solutions particulières des équations différentielles. Mém. de Math. et de Phys. (Sav. étr.) Bd. 6, Paris 1774, p. 654.

[19] Lagrange. Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Nouv. Mém. de l'Ac. Berlin 1774, publ. 1776. p. 197—275. cf. Oeuvres éd. Serret. Bd. 4, p. 5—108.

[20] Lagrange. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des solutions particulières. Mem. de l'Ac. Berlin 1779, p. 121, cf. Oeuvres, éd. Serret. Bd. 4, p. 585.

[21] Trembley. Recherches sur les équations différentielles du premier degré. Mém. de l'Ac. Turin 1790, publ. 1793, Bd. 5, p. 1—78.

[22] Legendre. Mémoire sur les intégrales particulières des équations différentielles. Hist. de l'Ac. Paris 1790, publ. 1797, p. 218—241.

[23] Lacroix. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. 1797 (1. Ausg.), 1814—15 (2. Ausg.), Bd. 2, Cap. V.: Des solutions particulières des équations différentielles. Nr. 635—658, 571, 588, 600.

[24] Lagrange. Théorie des fonctions analytiques. Paris 1797 (1. Ausg.), 1813 (2. Ausg.) p. 92, cf. Oeuvres, éd. Serret, Bd. 9.

[25] Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions. 1806. Leç. 14—17. cf. Oeuvres, éd. Serret, Bd. 10, p. 166—268. Zit. nach Crelles deutscher Ausgabe von Lagranges Werken. Berlin 1823. Bd. II.

[26] Poisson. Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles. Journ. de l'Éc. Polyt. 1806, Bd. 6, cah. 13, p. 60—103; daran anschließend: Addition au Mémoire précédent, contenant de nouveaux développements sur les remarques, qui terminent l'Article Ier de ce Mémoire.

[27] Lémaire. Dissert. Math. Inaug. de Aequationum differentialium primi ordinis et duarum indeterminatarum solutionibus peculiaribus. Univ. Gand. 1821, p. 1—33.

[28] Cournot. Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal. Bd. 2. 1841.
a) Théorie des enveloppes. § 182—189.
b) Théorie des intégrales singulières des équations différentielles. § 474—481.
c) Sur la construction des équations différentielles. § 520—530.

[29] Timmermans. Mémoire sur les solutions singulières des équations différentielles. Nouv. Mém. de l'Ac. Bruxelles 1842. Bd. 15.

[30] Cauchy. Leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Paris. Bd. 2, 1844. Herausgeg. von Moigno.

[31] Blanchets Methode der Auffindung der singulären Lösungen aus dem Jahre 1846 in Hoüel: Cours de Calcul infinitésimal. Paris 1879. Bd. 2, p. 390—394.

[32] Catalan. Note sur la théorie des solutions singulières. Journ. de l'Éc. Polyt. 1847. Bd. 18, cah. 31, p. 274—276.

[33] Raabe. Über die singulären Integralauflösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln. Crelles Journ. f. Math. 1848, publ. 1854. Bd. 48, p. 151. cf. Mitt. der naturf. Gesellsch. zu Zürich, 1848. Mitt. Nr. 29, p. 245—255.

[34] De Morgan. On some Points of the Integral Calculus. Transact. of the Cambr. Phil. Soc. Febr. 1851. Bd. 9. Part 2, p. 107—130.

[35] De Morgan. On some Points of the theory of differential equations. Transact. of the Cambr. Phil. Soc. März 1854. Bd. 9. Part 4, p. 515—554.

[36] Houtain. Des solutions singulières équations différentielles. Ann. des Univ. de Belgique 1851—1852, Brüssel 1854, p. 973—1323.

*[37] Girault. Notes sur les solutions singulières des équations différentielles. Caen Acad. Tables chron. méth. et alph. 1855, p. 17.

[38] Briot-Bouquet. Recherches sur les propriétés des Fonctions définies par des équations différentielles. Journ. de l'Éc. Polyt. 1856, Bd. 21, cah. 36, p. 191 bis 198.

[39] Cayley. Note on the singular solutions of differential equations. Quart. Journ. of Math. 1858, publ. 1860, Bd. 3.

[40] Boole. a) A Treatise on differential equations. Cap. 8. On the singular solutions of differential equations of the first order. Cambr. 1859 (1. Ausg.), 1865 (2. Ausg.), p. 139—186. Die Zitate beziehen sich auf die 2. Ausg.
b) Suppl. vol. herausgeg. von Todhunter 1865. Chap. 21. Addit. to ch. 8, p. 9—37.

*[41] Hinze. Über die singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Progr. 1861.

[42] Strauch. Prakt. Anwend. für die Integrale d. tot. und part. Differentialgleichungen. Braunschweig 1865. Bd. I, p. 23—47; 85—95.

[43] Cayley. A Remark on differential equations. Phil. Magaz. 1866. Bd. 33, p. 379—381.

*[44] Delarue. Singuläre Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln (russisch). Charkow 1868.

[45] Orloff. Untersuchungen über singuläre Lösungen von Differentialgleichungen (russisch). Math. Abh. d. Gesellsch. v. Moskau, 1869. Rec. Bull. des Sc. Math. 1873, Bd. 3, p. 71.

*[46] Zeuthen. Om Hansens Particular Oplosninger. Tidskr. f. Math. Kopenhagen 1869. Bd. 5, p. 3. Rec. Bull. des Sc. Math. 1872, Bd. 3, p. 180.

[47] Zeuthen. Yderligere Bemaerkninger om particular oplosninger. Tidskr. f. Math. Kopenhagen 1870. Bd. 6.

[48] Darboux. Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. Compt. Rend. de l'Ac. Paris 1870. 20. Juni. Bd. 70, p. 1331.

[49] Catalan. Remarque sur une note de Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. Compt. Rend. de l'Ac. Paris 1870. 4. Juli. Bd. 71, p. 50—53.

[50] Darboux. Réponse aux observations de M. Catalan. Compt. Rend. de l'Ac. Paris 1870. 25. Juli. Bd. 71, p. 267—270.

[51] Zajacrkowski. Beitrag zur Theorie der singulären Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (polnisch). Ann. d. russ. Gesellschaft von Krakau. 1871. Ser. III; Bd. 19. (deutsch) Arch. f. Math. Grunert, 1874. Bd. 56, p. 175—179.

[52] Clebsch. Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen 1872, p. 429—449. Math. Ann. 1873. Bd. 6, p. 211.

[53] Cayley. On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order. Mess. of Math. 1872. Ser. II. Bd. 2, p. 6—12.

[54] Mansion. Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Bull. de l'Ac. Belgique. 1872. Ser. II. Bd. 34, p. 149—169.

[55] Darboux. Sur les solutions singulières des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Bull. des Sc. Math. Paris, März 1873. Ser. I. Bd. 4, p. 158—176. Vorgelegt am 23. Nov. 1872.

*[56] Mansion. Boncompagni Bull. bibliogr. science math. Luglio. 1875. Bd. 8, p. 281—283.

[57] Cockle. On singular solutions. Quart. Journ. of Math. 1873. Bd. 12, p. 305 bis 318.

*[58] Vecchio. Nota sugli inviluppi. Giorn. Mat. Battaglini. 1873. Bd. 9, p. 318—320.

*[59] Tognoli. Ricerca dell'equazione dell'inviluppante d'una serie di curve piane. Giorn. Mat. Battaglini. 1873. Bd. 9, p. 376—377.

*[60] Laisant. Note sur l'Enveloppe d'un système de courbes planes. Nouv. Ann. de Math. 1874. Bd. 13. Ser. II, p. 571—573.

[61] Casorati. Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebraico-differentiali di primo ordine et due grado, aventi integrale generale algebraico. R. Inst. Lomb. Rend. 1874. Ser. II. Bd. 12, p. 846—850; dasselbe in Ann. di Mat. Mailand 1875. Ser. II. Bd. 7, p. 179—201 und franz. Übers. Darb. Bull. des Sc. Math. 1879. Ser. II. p. 42—48.

[62] Mansion. On the singular solution of differential equations of the first order. Rep. of the meet. Brit. Assoc. for the Advancem. of science. Lond. 1875, p. 19—21.

[63] Lindeberg. Historisk ofversigt af theorien för singulära solutioner till ordinära diff. eqvationer. Dissert. Upsala 1875, p. 37.

[64] H. St. Smith. On singular solutions. Zit. nach Rep. of the meet. Brit. Assoc. for the Adv. of Sc. London 1875, p. 21.

[65] Casorati. Sulla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali. R. Inst. Lomb. Rend. 1875. Ser. II. Bd. 8, p. 962—966.

[66] Casorati. Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secundo grado tra due variabili. Atti della R. Acc. dei Lincei Mem. 1876. Ser. II. Bd. 3. part. II., p. 160—167; franz. Übers. Darb. Bull. des Sc. Math. 1879. Ser. II. Bd. 3, p. 48—59.

[67] Clebsch-Lindemann. Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch. 1876. Bd. 1. Bemerkungen über singuläre Lösungen, p. 1032—1037.

[68] Heringa. De singuläre oplossingen van diff. vergelijken van de 1. ordre med 2 veranderlijken. Diss. Utrecht 1876.

[69] Mansion. On Clairants equation. Mess. of Math. 1877. Ser. II. Bd. 6, p. 90—93.

[70] Prix. Über die singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Abh. zum Programm Realsch. Annaberg 1876.

[71] Cockle. On tests of singularity. Quart. Journ. of Math. 1877. Bd. 14, p. 146—167.

[72] Veltmann. Kriterien der singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung. Arch. f. Math. Grunert. 1876. Bd. 58, p. 337—341.

[73] Cayley. On the theory on the singular solutions of differential equations. Mess. of Math. 1877. Ser. II. Bd. 6, p. 23—27.

[74] Wassilieff. Über die singulären Lösungen im Zusammenhang mit den neuen Aussichten über das Problem der Integration der Differentialgleichungen (russisch). Kasan 1877.

[75] Casorati. Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secundo grado. Att. de R. Acc. dei Lincei 1879. Ser. III. Bd. 3, II, p. 271—276.

[76] Casorati. Una formola fondamentale concernente i discriminanti delle equazioni differenziali e delle loro primitive complete. Collect. Math. ed. Cremona et Beltrami. 1881, p. 307—312; Bull. des Sc. Math. Ser. II. Bd. 3. 1881.

[77] Glaisher. Examples illustrative of Cayleys theory of singular solutions. Mess. of Math. 1882. Ser. II. Bd. 12, p. 1—14.

[78] Workman. On Tac loci. Mess. of Math. 1882. Bd. 12, p. 21—25.

[79] Johnson. Summary of Cayleys results. The Analyst. 1883. Bd. 4, p. 1—4.

[80] Schmidt, Carl. Über die singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Inaug.-Diss. Univ. Gießen 1884.

[81] Fuchs. Über die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. Sitzungsber. der Ak. Berlin 1884. Bd. 32, p. 699—710.

[82] Torelli. Contribuzione alla teoria delle equazioni algebraico-differenziali. Ann. del. R. Inst. tec. et naut. Neapel 1885. Bd. 2, p. 16; Giorn. di Mat. 1886. Bd. 24, p. 280—289.

*[83] Deschmann. Anwend. d. Diff. erst. Ordn. u. zweit. Gr. auf geom. Beispiele mit besonderer Berücksichtigung der singulären Lösungen. Programm Graz 1886.

[84] Picard. Des solutions singulières des équations différentielles ordinaires. Équations du premier ordre. Cours lith. (Cours d'Analyse de la Fac. des Sc.), 1886—1887, p. 330; Traité d'analyse 1896. Paris. Bd. 3. ch. 3, p. 44—52.

[85] Workman. The theory of the singular solutions of integrable differential equations of the first order. Quart. J. of Math. 1887. Bd. 22, p. 175; 308.

[86] Björling. Über die Coincidenzkurve der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bihang till Svenska Ak. Handlingar. Mitg. 15. Sept. 1886, publ. 1887. Bd. 12. Abschn. 1. Nr. 7.

[87] Johnson. On singular solutions of differential equations of the first order. Annals of Math. Univ. Virginia. New-York 1887. Bd. 3, p. 33—38.

[88] Johnson. Note on the singular solutions ctr. of homogenous differential equations. Mess. of Math. 1887. Ser. II. Bd. 16, p. 186—188.

*[89] Rau, Rawson. Solution of a question. Educational Times London. Bd. 47, p. 83—84. Über die singulären Lösungen einer Diff., bei welcher die gewöhnl. Meth. fehlschlagen.

[90] Kapteyn. Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Bull. des Sc. Math. 1888. Ser. II. Bd. 12, p. 135—143.

[91] Hill. On the c- and p-discriminant of ordinary integrable differential equations of the first order. Proceed. Lond. Soc. Math. 1888. Bd. 19, p. 561 bis 589.

[92] Fine. Singular solutions of ordinary differential equations. Americ. J. of Math. 1890. Bd. 22, p. 295—322.

[93] Mayer, Adolf. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen. Math. Ann. 1890. Bd. 37, p. 399—409.

[94] von Dyck. Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurvensysteme. Sitzungsber. der Ak. München, 1. Mitt. 1891. Bd. 21, p. 23—58. 2. Mitt. 1892. Bd. 22, p. 101—138.

[95] Torelli. Ricerca del rapporto fra i discriminanti di un' equazione algebraico differenziale di primo ordine della sua primitiva completa. Ann. di Mat. 1891. Bd. 19, p. 254—260.

[96] Hill. On Node and Cusp-loci, which are enveloped by the Tangents at the Cusps. (Später umgeänd. Titel „On Node and Cusp-loci, which are also Envelopes.) Proceed. Lond. Soc. Math. 1891. Bd. 22, p. 216—236.

[97] Hamburger. Über die singulären Lösungen der gewöhnl. Differentialgleichungen erster Ordnung. Crelle Journ. f. Math. 1893. Bd. 112, p. 205—246.

[98] Predella. Sulle soluzioni singulari delle equazioni differenziali ordinari di primo ordine. Giorn. di Mat. d. Battaglini. 1895. Bd. 33, p. 31—56.

[99] Raffy. Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant. Bull. de la Soc. Math. France. 1895. Bd. 53, p. 50—61.

[100] Goursat. Sur les équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut. Bull. de la Soc. Math. France. 1895. Bd. 53, p. 88—95.

[101] Maddison, Isabel. On singular solutions of differential equation of the first order. Quart. Journ. of Math. 1896. Bd. 28, p. 311—374.

[102] Lie. Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. Bd. I. 1896. Kap. 1. § 4, p. 29—33; Kap. 2. § 2, p. 41.

[103] Page. Note on singular solutions. Americ. Journ. of Math. 1895, publ. 1896. Bd. 18, p. 95—97.

[104] Petrowitch. Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Math. Ann. 1897. Bd. 50, p. 103 bis 112.

*[105] Amstein. Note sur les solutions singulières d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Bull. al. Soc. Vaud. Lausanne 1897. Bd. 33, p. 22—29.

[106] Chrystall. On the p-discriminant of a differential equation of the first order and on certain points in the general theory of envelopes connected therewith. Transact. of the Soc. Edinburgh. 1897. Bd. 38, p. 803—824.

*[107] Toussaint. Solutions singulières déduites de l'équation différentielle du premier ordre. Mem. dell Ac. Pontif. Nouv. Lincei. Rome 1898. Bd. 13, p. 283—300.

[108] Lindhagen. Om en klass of differential ekvationer. Nyt. Tidskr. f. Math. Kopenhagen 1899. Abt. B. Bd. 10, p. 35—39.

[109] Hudson. A geometrical theory of differential equations of the first and second ordre. Lond. Math. Soc. Proceed. 1901. Bd. 33, p. 380—403.

[110] Lachtin. Note über die singulären Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (russisch). Mosk. Math. Samml. 1903. Bd. 24, p. 30—56. Rec. von Sintzow. F. d. M. Bd. 34, p. 353.

Neuere Werke, in denen die Theorie der singulären Lösungen ausführlicher behandelt wird, sind die folgenden:

[111] Serret. Differentialgleichungen. Bd. 3 des Lehrb. Diff.- u. Integr.-Rechnung, deutsch bearb. von Harnack-Bohlmann-Zermelo. 2. Aufl. 1904. Kap. I, p. 15—26.

[112] Forsyth. Differentialgleichungen, deutsch von Maser. 1889, § 23—30.

[113] Boussinesq. Analyse inf. Bd. 2, II. Calc. intégr., p. 229—242.

[114] Forsyth. Theory of Differential Equations. 1900. Part. II. Vol. II. ch. 8.

[115] Liebmann. Lehrb. der Differentialgleichungen. 1901, p. 87—97.

[116] Hagen. Synopsis der höh. Math. Bd. 3. Diff.- und Integralrechnung, p. 183.

[117] Schlesinger. Differentialgleichungen. Samml. Schubert, Kap. 64.

[118] Horn. Gewöhnl. Differentialgleichungen belieb. Ordnung. Samml. Schubert § 78—79.

[119] Painlevé. Referat über die singulären Lösungen in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. II A. 4a.

Einleitung.

„Wenn es ein Problem gibt, das den Scharfsinn der geschicktesten Mathematiker beschäftigt hat, so ist es gewiß die Theorie der singulären Lösungen der Differentialgleichungen, hauptsächlich der Gleichungen von der ersten Ordnung.“ Diese Worte sprach gelegentlich der belgische Mathematiker GILBERT[1]) mit Recht, denn die bedeutendsten Männer der mathematischen Wissenschaft der letzten zwei Jahrhunderte, wie EULER, LAPLACE, LAGRANGE, POISSON, CAUCHY, in neuerer Zeit DARBOUX, CAYLEY, HAMBURGER machten diese Theorie zum Gegenstand ihrer Untersuchungen, während indirekt Männer wie BRIOT, BOUQUET und FUCHS zur Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen beitrugen. Die Theorie der singulären Lösungen hängt, wenn man sie auf das Gebiet der Geometrie überträgt, mit der Theorie der Enveloppen oder äußersten Verschneidungen zusammen. Eine geometrische Interpretation dient oft dazu, die starren Formen der rein analytischen Darstellung zu veranschaulichen, und es lag daher auch in der geometrischen Bedeutung der singulären Lösung ein Hauptmoment für das Interesse, welches man dieser Theorie entgegenbrachte. Doch merkwürdig ist es, wie spät erst die analytischen Untersuchungen den schon sehr frühe betrachteten geometrischen Darstellungen der einhüllenden Kurven folgen. Man kann sagen, daß die Enveloppentheorie fast schon vollständig begründet war, als deren erste Anfänge in der Analysis zu Beginn des 18. Jahrhunderts auftreten und zwar in Gestalt der singulären Lösungen der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung; aber fast ein ganzes Jahrhundert ging noch vorüber, bis man den Zusammenhang der singulären Lösungen und der Enveloppen erkannt hatte. Die Frage nach den singulären Lösungen, sagt LIEBMANN[2]), ist nicht nur der Vollständigkeit wegen wichtig, sie mußte nicht allein deswegen aufgeworfen werden, weil das Integrationsproblem es erfordert, alle Lösungen zu finden; sie ist vielmehr auch deswegen wichtig, weil bei einigen Differentialgleichungen die singuläre Lösung die einzige interessante ist.

---

[1]) Bull. de l'Ac. des Sc. Belgique 1872, Ser. II, Bd. 34, p. 142. [2]) LIEBMANN [115] p. 88.

I. Kapitel.

Bezeichnung der singulären Lösungen bei den einzelnen Autoren.

Clairaut, D'Alembert und Euler hatten für die singulären Lösungen noch keine besonderen Bezeichnungen. Lagrange, der die singulären Lösungen als erster erklärte, gab ihnen 1774 den Namen „intégrale particulière" und bezeichnete mit „solution particulière" die verschiedenen Fälle des vollständigen Integrals. Laplace, der sich 1772 mit Erfolg vor Lagrange mit diesem Gegenstande beschäftigt hatte, wendet die Bezeichnungen von Lagrange im umgekehrten Sinne an, wie es Lagrange 1779 selbst getan hat. Lacroix schloß sich Laplace in der Bezeichnungsweise vollständig an, und gab dafür als Grund an, daß die Gleichungen, welche die Differentialgleichungen lösen, ohne daß sie in deren allgemeinen Integralen enthalten sind, sich nicht durch die Regeln der Integralrechnung erlangen lassen und deshalb auch nicht einen Namen tragen dürften, welcher an ein Integrationsverfahren erinnert. Legendre bediente sich 1790 für die singulären Lösungen der Bezeichnung „intégrale particulière" und nennt „intégrale incomplète" einen speziellen Fall des allgemeinen Integrales. Das gleiche gilt für Trembley 1791 und Poisson 1805. Darauf änderte Lagrange 1806 wieder den Namen, den er den singulären Lösungen 1779 gegeben hatte, und nannte sie „équation singulière". Demzufolge gebrauchte Crelle 1823 in der Übersetzung von Lagranges Werken die Bezeichnung „singuläre Stammgleichung", was auch Maser in der deutschen Ausgabe von Mansions Werk über Differentialgleichungen getan hat. Lémaire verwendet in seiner lateinisch geschriebenen Dissertation den Namen „solutio peculiaris". „Intégrale singulière, singuläres Integral" findet sich gegen den Anfang des 19. Jahrhunderts häufiger, z. B. bei Duhamel, Moigno[1]), Cournot usw.; in neuerer Zeit hat diese Bezeichnung wieder Eingang in deutschen und französischen Werken gefunden. Cournot gibt Aufschluß, warum er den Namen Intégrale, welcher von einigen Autoren mit Unrecht verworfen worden sei, beibehalten habe. In der Tat wird, wenn die Zeit explizite oder implizite die Rolle der unabhängigen und veränderlichen Größe spielt, das eigentliche Problem der Integration, welches in der Bestimmung der

---

[1]) Moigno in seinem Werke über Cauchys Theorien [30]. Cauchy selbst hat die bestimmten Integrale, welche sich wegen ihrer anormalen Eigenschaften den gewöhnlichen Regeln der Berechnung der bestimmten Integrale entziehen, intégrale singulière genannt. (Nouv. Mém. prés. à l'Ac. des Sc. par div. Sav. Bd. I, p. 672.)

Summe der unendlich kleinen Inkremente der Funktion während eines gegebenen Zeitraumes besteht, sukzessive vermittels eines partikulären Integrales, und vermittels eines singulären Integrales gelöst, so daß die Auflösung nur dann vollständig ist, wenn man das singuläre Integral mit dem System der partikulären Integrale oder mit dem allgemeinen Integrale verbindet.[1]) Morgan faßte unter dem Namen „singular solutions" die partikulären Integrale und die singulären Lösungen zusammen; die Unterscheidung zwischen letzteren gab er durch „intraneous und extraneous solutions". Erst allmählich kam die heute fast allgemein gebräuchliche Bezeichnung „singuläre Lösung" zuerst bei Timmermans 1842, Catalan 1845, Houtain 1852 zur Verwendung. In Erwähnung dürfte noch gebracht werden, daß die erste aufgefundene singuläre Lösung von ihrem Entdecker mit „solutio singularis" bezeichnet worden war. Daß die verschiedenartige Nomenklatur sehr erschwert, die Abhandlungen über die singulären Lösungen aus den ersten Perioden zu lesen, braucht wohl nicht erst hervorgehoben werden.

II. Kapitel.

Übersicht der Entwicklungsgeschichte der Theorie der singulären Lösungen.

In der Geschichte der Theorie der singulären Lösungen kann man sieben Perioden unterscheiden. Zur ersten Periode rechne ich die vereinzelten Fälle des ersten Auftretens der singulären Lösungen, bei denen man noch nicht daran gedacht hatte, nach der Existenz der singulären Lösungen zu fragen.

In der zweiten Periode begannen dann die zielbewußten Untersuchungen und man gewann ein Mittel, die singulären Lösungen durch eine Regel aufzufinden. Aber man konnte die Lösungen nicht begreifen und nicht erklären und hielt ihr Auftreten für ein merkwürdiges Paradoxon.

Erst in der dritten Periode kommt man dazu, den wahren Grund dieser Lösungen zu erkennen, was dem genialen Forschungsgeiste Lagranges zu verdanken ist. Lagrange hat den Zusammenhang der singulären und vollständigen Lösungen von Differentialgleichungen dargelegt und gab zuerst präzise Anleitungen, um die singulären Lösungen aus den Differentialgleichungen einerseits und den Integralgleichungen andererseits zu erhalten.

[1]) Cournot [28], § 520.

Unmittelbar nach Lagrange finden wir eine Reihe von Arbeiten — die vierte Periode umfassend —, deren Hauptziel die Aufsuchung von unterscheidenden Merkmalen zwischen partikulären und singulären Integralen war.

Über ein halbes Jahrhundert, während der fünften Periode der Entwicklung unserer Theorie, wurden die Anschauungen von Lagrange als die allgemein gültigen angesehen, doch nur wegen Mangels an besseren. Man hatte nämlich bemerkt, daß in den von Lagrange aufgestellten Theoremen ein Widerspruch liege, der lange Zeit sogar als ein unlösbares Paradoxon angesehen wurde. Dieses Paradoxon war es auch, welches in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts einen vollständigen Umschwung in den Betrachtungen der singulären Lösungen verursachte.

Mit Darboux und Cayley traten die Untersuchungen in ein neues Stadium — die sechste Periode. Im Gegensatz zu anderen Zweigen der Analysis kam man bei den singulären Lösungen erst jetzt dazu, also verhältnismäßig sehr spät, die geometrische Natur der durch Differentiation und Elimination erhaltenen Integrale der Differentialgleichungen eingehender zu studieren und die Fälle, in denen Lagranges Methoden keine singuläre Lösungen geben, mit Hilfe der Geometrie zu erklären. Jedoch ganz befriedigend waren auch diese neuen Untersuchungen nicht, und so konnte Adolf Mayer[1]) 1883 noch sagen: Die Aufgabe, ohne vollständige Integration der Differentialgleichung ein Kriterium für die singuläre Lösung aufzustellen, welches ebenso notwendig wie hinreichend sei, ist selbst für die Differentialgleichungen mit zwei Variablen noch nicht endgültig gelöst.

In der letzten und siebten Periode kam man deshalb wieder zur analytischen Behandlung der singulären Lösungen zurück, bei welcher die von Darboux aufgedeckten Schwierigkeiten, die so lange keinen befriedigenden Abschluß in unserer Theorie aufkommen ließen, in geschickter Weise vermieden wurden. Erst Hamburger war es gelungen, in das Wesen unseres Gegenstandes Klarheit zu bringen, so daß man dessen Arbeit in der Hauptsache als eine endgültige Erledigung der Theorie der singulären Lösungen der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Größen ansehen kann.

III. Kapitel.

Vereinzelte Fälle von Differentialgleichungen mit singulären Lösungen.

Im Jahre 1715 veröffentlichte Brook Taylor seine Methodus Incrementorum, welche die erste singuläre Lösung einer Differentialgleichung ent-

[1]) Math Ann. 1883, Bd. 23, p. 368.

hält, die durch direkte Ableitung einer solchen gewonnen ist. Ebenso wie Taylor in diesem Werke seine nach ihm benannte Reihe zum erstenmal den mathematischen Kreisen übergab, ohne eine Ahnung von deren großer Wichtigkeit für die Mathematik zu haben, ebenso wußte er nicht, welch bedeutsamen Fortschritt er in der Analysis anbahnte, als er eine vorgelegte Differentialgleichung zum zweitenmal differentiierte und daraus ein für ihn so sonderbares Resultat erhielt — die erste singuläre Lösung einer Differentialgleichung. Wenn er nämlich von ihr als einer singularis quaedam solutio problematis spricht, so geht daraus aller Wahrscheinlichkeit nach hervor, daß sie ihm nur als eine „merkwürdige" Lösung aufgefallen ist. Seine Worte dürften dieser Art von Lösungen den Namen gegeben haben, wenn auch die Bezeichnung „singuläre Lösung" heute in einer ganz anderen Bedeutung gebraucht wird, als Taylor ihr zugrunde legte.

Im Lemma I der Meth. Incr. spricht Taylor[1]) von der Gleichung

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

Ganz unvermittelt läßt er dann den Wert für x folgen, der die Differentialgleichung befriedigt, und zwar

$$x = \frac{1 + z^2}{(a + \sqrt{1 + a^2} \cdot z)^2}.$$

Erst einige Seiten[2]) nach dieser Bemerkung kommt er wieder auf diese Differentialgleichung zurück und gibt noch eine weitere Lösung derselben: $x = 1$, die singularis solutio.

Das Merkwürdige an der Lösung der Aufgabe, die Taylor behandelt hat, ist, wie schon hervorgehoben, die zweite Differentiation einer Gleichung. Cantor[3]) wirft die Frage auf, ob wohl Taylor bei diesem Vorgehen unter dem Einflusse Newtons gestanden habe, ohne daß er es jedoch versucht, diese Frage zu beantworten; diese Frage dürfte wahrscheinlich auch gar nicht zu beantworten sein. Ganz neu ist aber das zweimalige Differentiieren bei Taylor nicht mehr, da bereits Leibniz[4]) 1694 einen derartigen Prozeß zur Anwendung bringt. Auch kommt dieser Kunstgriff Taylors zur Umwandlung einer Differentialgleichung schon 1697 bei Johann Bernoulli[5]) und bei Jakob Bernoulli[5]) vor.

Längere Zeit dauerte es, bis Alexis Clairaut[6]) bemerkte, daß es eine gewisse Gattung von Differentialgleichungen gibt, die man durch Differen-

---

[1]) Taylor [6], p. 17; vgl. Lagrange [25], § 244, 245 und Cantor, Gesch. der Math. 2. Aufl., Bd. 3, p. 458. [2]) Taylor [6], p. 27. [3]) Cantor (siehe Anm. 1) p. 463. [4]) Leibniz [5]. [5]) Cantor (siehe Anm. 1) p. 459, 453. [6]) Clairaut [7] p. 206.

tiation integrieren kann, und daß die so gefundenen Integrale niemals in dem allgemeinen Integrale enthalten sind, welches sich nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung ergibt. Ebenso wie Taylor mag auch Clairaut nur durch Zufall auf die Entdeckung der singulären Lösungen gekommen sein; während der erstere direkt mit der Lösung einer vorgelegten Differentialgleichung sich beschäftigte, behandelte Clairaut nur eine besondere Art von geometrischen Problemen, die damals im Vordergrunde des Interesses standen[1]); es soll deshalb hier eines von Clairauts Beispielen hier ausführlicher gebracht werden.

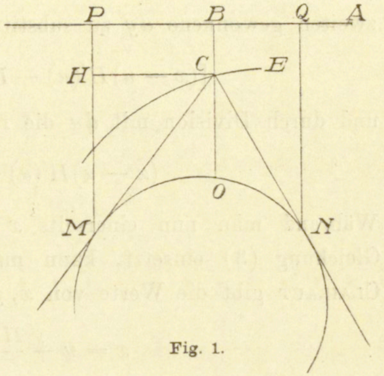

Fig. 1.

Clairaut bringt in seinem Aufsatze als drittes Problem folgende Aufgabe[2]): „Man bestimme die Gleichung einer Kurve MON (Fig. 1), welche derart beschaffen ist, daß sie von den Schenkeln eines konstanten Winkels MCN umhüllt wird, wobei gleichzeitig der Scheitel C dieses Winkels immer auf einer fest gegebenen Kurve EC sich bewegt."

Bei der Behandlung dieser Aufgabe kommt Clairaut auf die beiden Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \Phi(u)}{x - u} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Pi(u), \tag{2}$$

wo $\Phi(u) = BC$, $u = AB$, $PM = y$, $AP = x$ und $BP = x - u$ bedeuten, wenn A als Koordinatenanfangspunkt angesehen wird. Clairaut bespricht nun die Lösung dieser Aufgabe, indem er zeigt, daß man auf eine spezielle Lösung kommt, wenn man nicht die gewöhnliche Integrationsmethode anwendet, die darin bestehen würde, daß man aus Gleichung (2) den Wert für u in $\frac{dy}{dx}$ ausdrückt, denselben in Gleichung (1) einsetzt, wodurch eine Gleichung in x, y, dx, dy resultiert, deren Integration das allgemeine Integral liefert. Diese Lösung muß eine Konstante in sich schließen, welcher man jeden beliebigen Wert erteilen kann. Auf diesem Wege, sagt Clairaut[3]), wird man niemals die gewünschte Lösung erhalten, die man vielmehr

---

[1]) Siehe z. B. eine Arbeit von De la Fontaine, Hist. de l'Ac., Paris 1734, p. 527—537; ferner unten Anm. 2, S. 331. [2]) Clairaut [7], p. 209. Der etwas unklar gehaltene französische Text lautet: Trouver les courbes MON autour desquelles faisant glisser l'équerre MCN, le sommet C de cette équerre soit toujours dans la courbe donnée EC. [3]) Clairaut [7], p. 209.

ohne Hilfe der Integralrechnung erhält. In den Gleichungen

$$x\Pi(u) - u\Pi(u) = y - \Phi(u) \tag{3}$$
$$dy = dx \cdot \Pi(u)$$

sind $\Pi(u)$ und $\Phi(u)$ Funktionen einer Veränderlichen u, deren Elimination aus den beiden Gleichungen im allgemeinen unmöglich ist. Dieser Umstand führte wohl Clairaut auf den glücklichen Gedanken, eine der Gleichungen zu differentiieren und in die erhaltene derivierte Gleichung das aus der zweiten gewonnene dy zu substituieren. Dies ergab

$$[(x-u)\Pi'(u) - \Pi(u) + \Phi'(u)]\,du = 0$$ [1])

und durch Division mit du die reduzierte Gleichung

$$(x-u)\Pi'(u) - \Pi(u) + \Phi'(u) = 0.$$

Während man nun einerseits x aus dieser Gleichung berechnet und in Gleichung (3) einsetzt, kann man auch y als Funktion von u erhalten. Clairaut gibt die Werte von x, y als Funktionen von u an:

$$x = u + \frac{\Pi(u) - \Phi'(u)}{\Pi'(u)}$$
$$y = \Phi(u) + \frac{\Pi(u)\,[\Pi(u) + \Phi'(u)]}{\Pi'(u)}$$

und bezeichnet sie als résolution générale. Anderseits ist du gleich Null zu setzen, d. h. u gleich einer beliebigen Konstante a. $u = a$ in Gleichung (3) substituiert, gibt $x\Pi(a) - a\Pi(a) = y - \Phi(a)$, was immer eine gerade Linie darstellt, deren Gleichung keineswegs in dem nach der ersten Methode erhaltenen Resultat eingeschlossen ist.

Man sieht ein, daß von den erhaltenen Lösungen nur diejenige eine singuläre ist, die den beliebigen Parameter u enthält, und die andere, welche beliebige Konstante enthalten kann, das allgemeine Integral gibt.

$$[x\Pi(a) - a\Pi(a) = y - \Phi(a)].$$

So war es Clairaut gelungen, zwei Lösungen auf einmal aus der nämlichen Gleichung anzugeben, die eine verschieden von der anderen. Die erste Lösung ist die wahre Lösung der vorliegenden Aufgabe und zwar die singuläre, denn die zweite, anstatt die durch den Winkel berührte Kurve zu geben, drückt vielmehr die Geraden aus, welche die Schenkel dieser Winkel darstellen.[2]) Trotzdem darf man Clairaut nicht viel mehr als ein Erkennen einer Lösung, die nicht in der allgemeinen enthalten ist, zu-

[1]) Bei Clairaut sind die Differentiale von $\Pi(u)$ und $\Phi(u)$ mit $\Delta(u)$ und $\Xi(u)$ bezeichnet. [2]) Clairaut [7], p. 210.

schreiben. Von einer allgemeinen Methode oder einem Aufstellen einer bestimmten Regel zur Auffindung der singulären Lösung ist noch keine Rede. Doch spricht CLAIRAUT selbst zu Beginn seiner Abhandlung den Gedanken aus, daß die von ihm gefundene Lösung einer geometrischen Aufgabe (wie das zitierte Beispiel sie zeigt) bei anderen Problemen sehr gut benutzt werden könne. Daraus kann man mit Recht den Schluß ziehen, daß er wußte, etwas Wichtiges für die Entwicklung der Differentialrechnung geleistet zu haben, im Gegensatz zu TAYLOR, der seine singuläre Lösung gar nicht weiter beachtete. „Es hat mich sehr gefreut," sagte CLAIRAUT[1]), „diese Besonderheit (singularité) der Rechnung, welche sich hier leicht darbietet, zeigen zu können."

Das behandelte geometrische Problem dürfte auch ersehen lassen, was CLAIRAUT zu seiner Abhandlung veranlaßt haben dürfte; man kann wohl annehmen, daß CLAIRAUT durch eine Abhandlung von BOUGUER[2]) mit einer Ergänzung von MAUPERTUIS, in der die Ableitung der Verfolgungskurve (courbe de poursuite) gegeben ist, auf den Gedanken gekommen ist, noch weitere Aufgaben zu bearbeiten, die von Kurven handeln, welche unendlich viele Gerade berühren.

Noch eine Differentialgleichung aus CLAIRAUTS Aufsatz[3]) verdient besonders hervorgehoben zu werden, nämlich $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0$, die nach ihrem Entdecker den Namen „CLAIRAUTsche Gleichung" führt. Wird diese Gleichung nach x differentiiert, so erhält man eine weitere, die sich in die beiden Gleichungen $2\frac{dy}{dx} - x - 1 = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ zerlegt. Die zweite dieser beiden neuen Gleichungen zweimal integriert, gibt die gerade Linie $y = ax + b$, die eine vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung liefert; die erste Gleichung differentiiert, gibt die Parabeln $y = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + c$. Den analytischen Zusammenhang der beiden Integrale kannte CLAIRAUT merkwürdigerweise noch nicht; doch war ihm schon die geometrische Beziehung bekannt, daß nämlich das letztere Resultat die Kurve der Enveloppe der Schar von geraden Linien darstellt, welche durch das erstere Resultat bestimmt werden. LAGRANGE hob schon hervor, daß CLAIRAUT mit Unrecht die Geraden als weniger allgemein betrachtete, als die Parabel, an welche sie die Tangenten sind.

Fassen wir kurz die von CLAIRAUT gefundenen Resultate zusammen, so sehen wir, daß er die folgenden zwei Haupteigenschaften der singulären Lösungen der Differentialgleichungen klar ausgesprochen:

---

1) a. a. O. p. 213. 2) Mém. de l'Ac. Paris 1732, p. 1, 15. 3) CLAIRAUT [7], p. 210—211.

1. daß man Differentialgleichungen durch Differentiation integrieren kann;
2. daß die auf diesem Wege gefundenen Integrale niemals in den Integralen enthalten sind, die man auf dem gewöhnlichen Wege der Integration gefunden hat.

Direkt beeinflußt von CLAIRAUTS Entdeckung ist unzweifelhaft eine Arbeit D'ALEMBERTS[1]), die 1748 veröffentlicht wurde. Dort untersucht D'ALEMBERT die Differentialgleichung von der ersten Ordnung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, die in impliziter Form gegeben ist. Um die Gleichung nach y aufzulösen, führt er eine Transformation ein — die älteste, die eine Integration durch Differentiation bewerkstelligt —, mit Hilfe deren er die nach ihm benannte D'ALEMBERTsche Gleichung[2])

$$y\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\psi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \chi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

lösen kann. In einem Zusatze finden wir den besonderen Fall dieser Gleichung behandelt: $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, der die allgemeine Form der von CLAIRAUT behandelten Gleichung darstellt. Aus dieser Gleichung folgert D'ALEMBERT durch nochmalige Differentiation nach x

$$\left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die beiden Faktoren dieser Gleichung, jeder gleich Null gesetzt, geben die Gleichungen einer Kurve und von geraden Linien, wobei die Kurve die Berührende der geraden Linien darstellt.

D'ALEMBERT gab also zum erstenmal eine allgemeine Form der von CLAIRAUT behandelten Gleichungen und es dürfte hier vorausgreifend zu erwähnen sein, daß wahrscheinlich erst in den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts, z. B. bei COURNOT[3]), klar die bemerkenswerte Eigenschaft der CLAIRAUTschen Gleichungen ausgesprochen ist, wonach man in derselben für $\frac{dy}{dx}$ nur eine konstante Größe zu substituieren hat, um unmittelbar das all-

---

[1]) D'ALEMBERT [9]. [2]) PASCAL (Rep. d. höh. Math., übers. v. SCHEPP 1900, Bd. 1, p. 174) nennt diese Gleichung merkwürdigerweise die „MONGEsche Gleichung", während ROUCHÉ et LEVY (Analyse infin. 1902, Bd. 2, p. 509) und HUMBERT (Cours d'Analyse 1904, II. Bd., p. 283) ihr den Namen „l'équation de LAGRANGE" gaben. Man nennt sie vielfach auch die „verallgemeinerte" CLAIRAUTsche Gleichung. Die D'ALEMBERTsche Gleichung führte MONGE auf eine lineare Gleichung zurück, die sich durch zwei Quadraturen integrieren läßt (Corresp. sur l'éc. Polyt. 1805, Bd. 1, p. 73). NAVIER (Rés. des leç. d'analyse 1840, § 418) findet die singuläre Lösung dieser Gleichung durch Elimination von y' aus den Gleichungen $y = xM(y') + N(y')$ und $e^{\int\frac{dM}{M-y'}} = 0$, von welchen die letztere mit $\int\frac{dM}{M-y'} = \infty$ identisch ist.

[3]) COURNOT [28], siehe auch CAUCHY [30].

gemeine Integral derselben zu erhalten. Setzt man also die Clairautsche Gleichung in die Form

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so ist

$$f(C, y - xC) = 0$$

die allgemeine Integralgleichung derselben. Sehr lange glaubte man nun, daß diese Art der Herleitung des allgemeinen Integrals aus einer Differentialgleichung ausschließlich den Clairautschen Gleichungen zukäme — Mansion[1]) gab sogar einen Beweis, daß Clairauts Gleichung die einzige Gleichung ist, deren Integral man dadurch erhält, daß man $\frac{dy}{dx}$ durch eine wirkliche Konstante ersetzt —, bis vor kurzer Zeit Raffy[2]), Goursat[3]) und Lindhagen[4]) fanden, daß diese Methode auch bei andern Klassen von Differentialgleichungen mit bestimmter Beschaffenheit zur Verwendung kommen kann.

Bei den Clairautschen Gleichungen stellen die partikulären Integrale gerade Linien dar und gerade diesem Umstande muß man es zuschreiben, daß die Schwierigkeiten, die der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen so lange im Wege standen, bei der von Clairaut entdeckten Klasse von Differentialgleichungen glücklich vermieden wurden. Wie wir noch sehen werden, hatte man für die Existenz der singulären Lösungen das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen $F(x, y, y') = 0$, $\frac{dF}{dy'} = 0$, $\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} = 0$ als notwendig erkannt. Wenn aber die dritte Bedingungsgleichung auf die Clairautsche Gleichung angewendet wird, so wird dieselbe für alle Variablen x und y identisch erfüllt sein; folglich sind für die spezielle Klasse der Clairautschen Gleichungen gar nicht drei Bedingungsgleichungen nötig. Der Grund dafür liegt darin, daß die dritte Gleichung eine Wendepunktsbedingung für die Integralkurven der Differentialgleichungen ausdrückt, welche bei den partikulären Integralkurven der Clairautschen Gleichungen, die stets Gerade sind, in allen ihren Punkten erfüllt wird. Diese Eigenschaft der Integralkurven ließ die Clairautsche Gleichung stets eine Sonderstellung in der Theorie der singulären Lösungen einnehmen.

Bei dieser Gelegenheit sei noch erwähnt, daß die Theorie dieser Differentialgleichung im Grunde genommen den Keim des Begriffes Linienkoordinate enthält, wie Chasles[5]) gelegentlich bemerkt. Es ist auch deutlich aus der Einleitung zur Abhandlung Plückers[6]), in der die Linienkoordinaten

---

[1]) Mansion [69], p. 91. [2]) Raffy [99]. [3]) Goursat [100]. [4]) Lindhagen [108]. [5]) Lie-Scheffers [102] p. 31 Anm. [6]) Crelle, Journ. f. Math. 1830, Bd. 6, p. 107.

in die Geometrie eingeführt werden, ersichtlich, daß Plücker die Clairautsche Differentialgleichung vor Augen gehabt hatte.

Als ersten Deutschen, der eine Differentialgleichung mit einer singulären Lösung veröffentlichte, finden wir, wie schon Cantor mitteilt[1]), den Württemberger Wilhelm Clemm.[2]) In einer nur einige Seiten umfassenden Note aus dem Jahre 1752 spricht Clemm die Worte aus: „Nicht alles, was ich nicht durch die ordentlichen Regeln integrieren kann, ist deswegen der Integrierung ganz unfähig." Diesen Satz beweist er an der Hand der Differentialgleichung $ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Auf das gleiche „Beispiel einer Differentialgleichung, die durch eine doppelte Differentiation endlich ihr Integral gibt," kommt Clemm[3]) 1764 wieder zu sprechen, ohne aber bis dahin scheinbar von den anderen Untersuchungen über solche Lösungen Kenntnis erhalten zu haben.

Mit Clemm können wir die erste Periode der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen beschließen. Bisher waren nur einzelne Fälle von singulären Lösungen beobachtet und weiter ausgeführt worden; diese Resultate standen vereinzelt und ohne jeden Zusammenhang. Doch war die Aufmerksamkeit auf diese Lösungen einmal gelenkt und es dauerte daher nicht mehr lange, bis eine zusammenfassende Arbeit über die Theorie der singulären Lösungen erschien.

IV. Kapitel.

Über die ersten zielbewußten Untersuchungen in der Theorie der singulären Lösungen.

Erst nach der Veröffentlichung der wichtigen Arbeiten von Leonhard Euler können wir die Lehre von den Differentialgleichungen mit singulären Lösungen als einen neuen Zweig der Differentialrechnung ansehen. Euler hatte sich anscheinend zur Aufgabe gemacht, die neue Theorie vollständig auszuarbeiten, obwohl er es bei weitem nicht zu endgültigen Abschlüssen bringen konnte, da er hauptsächlich nur das Paradoxe in dem Auftreten der verschiedenen Lösungen der Differentialgleichungen behandelte. Sein Hauptverdienst in bezug auf die Entwicklung unserer Theorie bestand in der Anregung, die er durch seine allgemeinen Untersuchungen, besonders durch seine große Arbeit in den Berliner Miscellaneen gab, so daß sich

---

[1]) Cantor (siehe Anm. 1 S. 328) p. 889. [2]) Clemm [10]. [3]) Clemm, Math. Lehrb., Stuttgart 1764, p. 412.

auch später bedeutende Männer mit diesem interessanten Teil der Differentialrechnung befaßt haben. Nicht zuviel behauptet man, wenn man alle Anfänge der unmittelbar nach ihm erfolgten Entdeckungen auf unserem Gebiete Euler zuschreibt.

Fast zur nämlichen Zeit[1]) wie Clairaut kannte auch Euler bereits Differentialgleichungen, die singuläre Lösungen besitzen. Euler, der eigentliche Begründer der analytischen Mechanik, wendet zum erstenmal analytische Methoden auf mechanische Probleme[2]) an und kommt bei einigen auf die ihm sonderbar erscheinenden Lösungen. Eine solche Aufgabe aus seiner Mechanica[3]) sei im folgenden durchgeführt.

„Es zieht eine gleichförmige Kraft überall in vertikaler Richtung abwärts; man soll die Kurve AM bestimmen, auf welcher ein Körper gleichförmig nach einer bestimmten Seite AP (Fig. 2) hin fortschreitet."

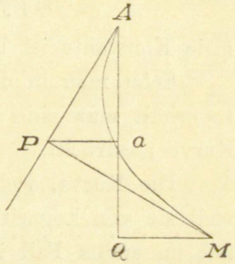

Fig. 2.

Auflösung: Es sei AM die gesuchte Kurve und man nehme als Abzissenachse die Tangente AP, welche nach der gegebenen Seite hin gerichtet ist. Die Aufgabe verlangt also, daß der unter Antrieb der gleichförmigen Kraft g auf AM sich bewegende Körper in derselben Zeit nach M gelange, in welcher ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ (Bezeichnung Eulers) sich bewegender Körper die entsprechende Achse AP durchläuft. Die Anfangsgeschwindigkeit des ersten Körpers in A wird ebenfalls $\sqrt{b}$ sein. Man setze $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ und ziehe die vertikale Linie AQ, welche die Horizontale durch M in a schneidet. Die Geschwindigkeit des Körpers in M wird daher ebenso groß sein, als diejenige, welche er in Q haben würde, wenn er mit der Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{b}$ durch AQ herabgefallen wäre. Setzt man also $AQ = z$, so wird jene Geschwindigkeit $= \sqrt{b + gz}$. Nach der Bedingung der Aufgabe ist aber

$$\int \frac{ds}{\sqrt{b + gz}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$$

und man erhält hieraus die Gleichung

---

[1]) Clairauts Aufsatz von 1734 [7] ist erst im Jahre 1736 von der Pariser Akademie veröffentlicht worden, also wurden Clairauts Entdeckungen im gleichen Jahre wie Eulers Aufgaben publiziert. [2]) Poisson [26], Art. 4 zeigte die Bedeutung der singulären Lösungen in Problemen der Dynamik. Poisson zog Fälle in Untersuchung, bei welchen die Bewegungen eines Systems von Massen während einer gewissen Zeit durch die allgemeinen Integrale, und während einer anderen bestimmten Zeit durch die singulären Lösungen gegeben werden. [3]) Euler [8], Bd. II, p. 115, § 262—268; ferner § 300—303, 331—335.

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}.$$

Es wird aber z als Funktion von x und y mit Hilfe des Winkels PAQ gegeben sein; dann wird, wenn $\sin PAQ = m$ gesetzt wird:

$$z = my + x\sqrt{1 - m^2} \quad \text{und} \quad dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{1 - m^2}}{m}$$

und folglich die Differentialgleichung

$$dx = \frac{\sqrt{b}\,dz}{\sqrt{b(1 - m^2)} + m\sqrt{gz}},$$

deren Integral die Form besitzt:

$$x = \frac{2\sqrt{bz}}{m\sqrt{g}} - \frac{2b\sqrt{1 - m^2}}{m^2 g}\log\frac{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1 - m^2)}}{\sqrt{b(1 - m^2)}}.$$

(Die Konstante ist bestimmt durch $z = 0$ für $x = 0$.)

Setzt man in diese Gleichung statt z seinen obigen Wert in x und y, so erhält man eine Gleichung in x und y, welche die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt.

Die Kurve, welche der Aufgabe Genüge leistet, ist also transzendent, weil sie von Logarithmen abhängt, ausgenommen, wenn $m = 0$ und $m = 1$ ist; im ersten Fall ist AP vertikal, im zweiten horizontal.

Ist $m = 1$, also AP horizontal, so wird $z = y$ und erhält die Gleichung $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gy}$ oder $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, d. h. $x^2 = \frac{4b}{g}y$. Diese Kurve, eine Parabel, ist diejenige Bahn, welche ein in A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ fortgeworfener Körper beschreibt.

Euler bemerkt zu dem zweiten Fall, wo $m = 1$, daß man die jenem Logarithmus gleiche Reihe bis ins Unendliche fortsetzen kann, und es werden, wenn man letztere substituiert, alle Glieder gegen das allerletzte, welches einen unendlich großen Wert besitzt, verschwinden. Dieses Glied wird aber $z = 0$ oder $y = 0$ geben, folglich wird in diesem Fall die gerade Linie der Differentialgleichung Genüge leisten. Euler sah, daß die Gleichung des allgemeinen Integrales diese gerade Linie nicht umfassen kann, was aus seinen Worten hervorgeht: Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae produit, si ponatur $m = 1$, parabolam tantum praebeat et rectam horizontalem excludere videatur.

Wie aus vorstehender Aufgabe zu ersehen ist, hat sich also Euler vorgenommen, Kurven zu finden, auf welchen Körper sich bewegen können, die gegebenen Kräften unterliegen und gleichzeitig gewisse Bedingungen zu erfüllen haben. „Nichts hindert, daß es mehrere Kurven gibt, welche einer bestimmten Eigenschaft genügen, und in der Tat zeigte obige Rechnung eine Parabel und eine horizontale Gerade im Einklang mit den in der Aufgabe gestellten Bedingungen.“

Euler versucht nun, durch solche Fälle von merkwürdigen Lösungen veranlaßt, eine Regel anzugeben, um diese Lösungen zu entdecken. Er schließt allgemein, daß die Differentialgleichung $\frac{dt}{T} = V du$, in welcher T eine für $t = 0$ verschwindende Funktion von t, und V eine beliebige Funktion von u bezeichnet, ebenso wie die Integralgleichung $t = 0$ diejenige Funktion enthält, welche $\int \frac{dt}{t} = \int V du$ nach der Integration ergibt. Euler meint, daß man das erste Integral t, das z. B. in dem zitierten Beispiel eine Funktion von x, y ist, nur mit Unrecht vernachlässigen könne.

Zwanzig Jahre später, im Jahre 1756 unterzieht Euler die zwei Arten von Paradoxa, zu denen Clairaut als schließlichem Resultat gelangt war, einer eingehenden Untersuchung.[1]) Er betrachtet die singulären Lösungen einmal wegen der Art ihrer Herleitung auf dem Wege der Differentiation und dann in bezug auf ihre Eigenschaft, nicht im allgemeinen Integral enthalten zu sein. Das erste Paradoxon, daß nämlich eine Differentiation zu demselben Ziele führen kann, zu welchem man nur durch Integration zu gelangen gewohnt war, hält Euler für einen überraschenden Zufall; da eine Differentiation gerade die entgegengesetzte Operation vom Integrieren ist, so konnte man annehmen, daß man sich durch eine abermalige Differentiation weiter vom Ziele entfernen würde. Von großem Vorteil hält er es, wenn eine zweimalige Differentiation stets zu einer singulären Lösung führen würde, wagt es aber nicht, diesen Weg einer Lösung für alle Fälle als gültig anzusehen. Euler weiß, daß die Kurven der partikulären Lösungen die Kurve der singulären Lösung berührt, hebt aber dennoch sonderbarerweise nicht ausdrücklich hervor, daß die letztere Kurve die Enveloppe aller partikulären Integralkurven darstellt.

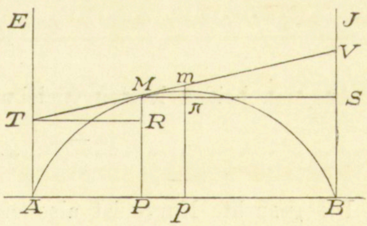

Fig. 3.

Eines der Beispiele Eulers für das erste Paradoxon ist das folgende: „Es ist die Gleichung der Kurve AMB (Fig. 3) zu finden, welche in allen ihren Punkten die Eigenschaft besitzt, daß ihre Tangenten von zwei in ihren Schnittpunkten A und B mit der Achse AB errichteten Senkrechten AE und BJ Stücke (z. B. AT und BV) abschneiden, deren Produkte stets eine konstante Größe besitzen.[2])

[1]) Euler [11], p. 300. [2]) Euler, a. a. O. p. 308.

Lösung: Es sei $AB = 2a$, die Abzisse $AP = x$, die Ordinate $MP = y$. Zieht man in unendlich naher Entfernung von MP die Ordinate mp, so wird $Pp = M\pi = dx$ und $m\pi = dy$. Wenn die Geraden TR und MS parallel zur Achse gezogen werden, so wird die Ähnlichkeit der Dreiecke $M\pi m$, TRM und MSV, weil $PB = MS = 2a - x$ ist, die Gleichungen liefern:

$$RM = \frac{x\,dy}{dx} \quad \text{und} \quad SV = \frac{(2a - x)\,dy}{dx}.$$

Dann wird

$$AT = y - \frac{x\,dy}{dx} \quad \text{und} \quad BV = y + \frac{(2a - x)\,dy}{dx},$$

und damit die Relation $AT \cdot BV = \text{const.}$ durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\left(y - \frac{x\,dy}{dx}\right)\left(y - \frac{x\,dy}{dx} + 2\frac{a\,dy}{dx}\right) = \text{const.} = c^2.$$

Wollte Euler diese Differentialgleichung nach der gewöhnlichen Methode behandeln, so würde er bald auf Schwierigkeiten gestoßen sein. Er setzt daher zunächst $p = \dfrac{dy}{dx}$ und löst die Gleichung nach y auf:

$$y = -(a - x)p + \sqrt{c^2 + a^2p^2}.$$

Euler differentiiert nun diese Gleichung nach x;

$$dy = p\,dx = -(a - x)\,dp + p\,dx + \frac{a^2p\,dp}{\sqrt{c^2 + a^2p^2}}$$

und erhält nach Division mit dp daraus: $x = a - \dfrac{a^2p}{\sqrt{c^2 + a^2p^2}}$. Durch Substitution des Wertes von $(a - x)$ in die Gleichung für y folgt

$$y = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2p^2}}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen für x und y wird p eliminiert:

$$\frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = \frac{p^2a^2 + c^2}{c^2 + a^2p^2} = 1.$$

Die gesuchte Kurve ist also eine Ellipse, deren eine Achse AB und konjugierte Halbachse gleich c ist. Es ist aber klar, daß, was Euler hervorhebt, außer dieser Kurve der Aufgabe noch eine unbegrenzte Anzahl von geraden Linien TV genügen, die so liegen, daß das Produkt $AT \cdot BV$ immer gleich dem Quadrate der Halbachse c ist. Diese geraden Linien finden sich aus dem Divisor $dp = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, wenn derselbe gleich Null gesetzt wird.

Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichung der Ellipse, ohne willkürliche Konstante, nichts anderes als die singuläre Lösung ist; dagegen die Gleichung der geraden Linie mit einer willkürlichen Konstanten das allgemeine Integral der Differentialgleichung darstellt.

Für nicht weniger überraschend hält EULER das zweite Paradoxon, daß nämlich die singuläre Lösung nicht in dem allgemeinen Integral enthalten ist, da dies auch diametral den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung gegenübersteht. Man glaubte nämlich, daß von einer Differentialgleichung nur ihr allgemeines Integral zu suchen sei, dem man, um die allgemeinste Lösung zu erhalten, nur eine undefinierte Konstante beizufügen habe. Das Verhalten der singulären Lösungen, sagt EULER, sei um so mehr paradox, je mehr man von der Richtigkeit der in den letzten Zeilen ausgesprochenen Worte überzeugt ist. Wenn aber die Gleichung des allgemeinen Integrales, die man in vorgeschriebener Weise behandelt, alle Lösungen der Differentialgleichung nicht erschöpft, so müsse das betreffende Problem Lösungen zulassen, welche die Integration nicht liefert. EULER bemerkt, daß dieselben Fälle, die durch die gewöhnliche Integration nicht erreicht werden können, eben diejenigen sind, welche durch eine wiederholte Differentiation der Differentialgleichung das erste Paradoxon geliefert haben. Diese Übereinstimmung betrachtet EULER nicht mehr als einen Zufall, und stellt die Behauptung auf, die beiden Paradoxa seien dermaßen miteinander verbunden, daß das eine notwendig in dem anderen enthalten ist. EULER hat dagegen nicht weiter versucht, den Zusammenhang der beiden Lösungen zu erforschen, sondern er begnügte sich damit, das Vorhandensein verschiedenartiger Lösungen als Paradoxon der Integralrechnung hinzustellen. LAGRANGE[1]) wies darauf hin, daß die EULERschen Paradoxa doch schon als wesentliche Resultate der Analysis anzusehen sind.

Einen großen Fortschritt in der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen hat dagegen EULER dadurch gemacht, daß er zuerst eine exakte Regel[2]) aufstellt, um solche Lösungen einer Differentialgleichung zu finden.

Es sei z irgend eine Funktion zweier veränderlicher Größen x, y und Z irgend eine Funktion von z, ferner P, Q, V beliebige Funktionen von x, y und angenommen, daß man auf irgend einem Wege zu der Differentialgleichung $Vdz = Z(Pdx + Qdy)$ gekommen wäre; dann ist es klar, daß $Z = 0$ der Gleichung genügt. Man würde nun auch $z = \text{const.}$ erhalten und daraus folgernd $dz = 0$, so daß in diesem Falle für $z = c$ die Glieder Z und $Pdx + Qdy$ verschwinden. EULER erprobt diese Regel an mehreren Beispielen.

[1]) LAGRANGE [25], § 250; Oeuvres Bd. 10, p. 265. [2]) EULER [11], p. 319.

Wie wichtig für unsere Theorie Eulers Arbeit geworden ist, läßt sich aus den inhaltsvollen Worten von Lagrange ersehen: „Euler war der Erste, der die singulären Lösungen als Ausnahmen der Theorie der willkürlichen Konstanten in der Differentialrechnung betrachtet hat. Seitdem hat man erkannt, daß sie von der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen und deren Abgeleiteten abhängen und daß sie dazu dienen, dieselben zu vervollständigen."

Ein Jahr, bevor Euler die Inst. Calc. integr. und darin weitere Untersuchungen für die Theorie der singulären Lösungen herausgegeben hatte, wurde eine neue Art gefunden, die isoliert auftretenden Integrale von Differentialgleichungen zu finden. Marquis de Condorcet[1]) bringt in einem Essai von 1766 als erstes Problem die Aufgabe, von einer Differentialgleichung sowohl die allgemeine als auch die singuläre Lösung aufzusuchen.

Condorcet betrachtet die Differentialgleichung

$$A\,dx + B\,dy = 0, \tag{1}$$

wo A und B rationale und ganze Funktionen sind. Dann werde $A'dx + B'dy$ angenommen, so daß

$$\frac{dA'}{dy} = \frac{dB'}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}; \tag{2}$$

die beiden Gleichungen sind identisch, woraus, da $A' = B'\frac{A}{B}$ ist,

$$\frac{dA'}{dy} = B'\frac{d\frac{A}{B}}{dy} + \frac{A}{B}\frac{dB'}{dy}$$

folgt. Durch Substitution in Gleichung (2) ergibt sich nun

$$\frac{dB'}{dx} - \frac{A}{B}\frac{dB'}{dy} - B'\frac{d\frac{A}{B}}{dy} = 0.$$

Diese letzte Gleichung ist nichts anderes als die partielle Differentialgleichung zur Bestimmung des Eulerschen Multiplikators λ, in die sie sofort übergeht, wenn man $B' = \lambda B$ setzt; wird also hieraus B' oder λ bestimmt, so ist $A'dx + B'dy$ ein exaktes Differential, dessen Integral, $= 0$ gesetzt, das gesuchte von $A\,dx + B\,dy = 0$ ist. Die nächste Bemerkung ist nun die hier wichtige: Es ist $\frac{A\,dx + B\,dy}{A'dx + B'dy} = \frac{1}{\lambda}$ nach unserer Bezeichnung. Somit $C = \frac{1}{\lambda} = 0$ die singuläre Lösung![2])

Condorcet hat also hier als Erster versucht, die singulären Lösungen mit Hilfe des Integrationsfaktors aufzufinden; man braucht nur dem letzteren

[1]) Condorcet [12], p. 6—11. [2]) A. a. O., p. 7.

einen unendlich großen Wert beizulegen, um die singulären Lösungen zu erhalten.[1]) Später ist man wiederholt auf dieses Problem zurückgekommen, wovon noch die Rede sein wird.

V. Kapitel.

Erste vollständige Ausarbeitung der Theorie.

§ 1. EULERs Regeln.

Bisher hatte man die Gleichungen der singulären Lösungen nur als sonderbare Lösungen betrachtet, die sich ohne Integration darbieten. Man hatte jedoch noch kein Mittel, um a priori festzustellen, ob eine solche Lösung im allgemeinen Integral enthalten sein kann oder nicht. Euler war es wieder, der eine Regel aufstellte, welche diese Frage entscheiden sollte. Insigne hoc est paradoxon, sagte er 1768[2]), a nemine adhuc, quantum mihi quidem constat observatum, quod aequationi differentiali eius modi valor satisfacere queat, qui tamen eius non sit integrale; atque adeo vix patet, quomodo haec cum solita integralium idea conciliari possint. Im Problem 71 gab er ein Kriterium[3]), das Aufschluß geben sollte, ob ein gegebenes Integral der Differentialgleichung unbekannt ist.

Euler behandelte die Aufgabe: „Wenn in der Differentialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ für $x = a$ die Funktion verschwindet, so soll man die Fälle bestimmen, in welchen die Gleichung $x = a$ ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist oder nicht“, und kam zu folgendem Resultat: Der Wert $x = a$ ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung, wenn für $x = a$ nicht nur $Q = 0$, sondern auch $\int \frac{dx}{Q} = \infty$ wird. Setzt man dann $Q = (a - x)^n R$, wobei n eine positive Zahl bedeutet, so muß n kleiner als die Einheit sein, wenn die Gleichung $x = a$ kein partikuläres Integral der Differentialgleichung sein soll, obwohl dieselbe der letzteren Genüge leistet. Wenn aber der Exponent n kleiner als die Einheit ist, so

---

[1]) Auch Euler bemerkt, daß man das singuläre Integral erhält, indem man den reziproken Wert des integrierenden Faktors gleich Null setzt. Painlevés Zitat ([119], Anm. 76, p. 213) ist falsch, indem diese Bemerkung Eulers erst in Kap. IV, Nr. 574 (deutsche Ausg. von Salomon, p. 340) steht und nicht p. 351 der Inst. Calc. Integr. [2]) Euler [13], Schol. II in Probl. 71. [3]) Euler [13], § 547—564.

wird die Größe $\frac{dQ}{dx}$ ebenfalls unendlich für $x = a$. Man erhält also hierdurch ein neues Kennzeichen, das lehren soll, ob die irgend einer Differentialgleichung entsprechenden Werte als partikuläre Integrale angesehen werden oder nicht.

Wird $Q = 0$, wenn in der Differentialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ die Veränderliche $x = a$ gesetzt wird, so wird der Wert des Ausdruckes $\frac{dQ}{dx}$ für $x = a$ untersucht; wird derselbe endlich oder Null, so ist die Gleichung $x = a$ ein partikuläres Integral; wird aber jener Wert unendlich, so gehört $x = a$ nicht zu den partikulären Integralen, obgleich er die Differentialgleichung befriedigt.

Diese Regel gab zu Erörterungen Anlaß, die gleich hier erwähnt sein mögen. CAUCHY[1]) hat 1844 ein Theorem aufgestellt, das als Gegenstück zu der Regel von EULER aufgefaßt werden kann: Es seien α und β zwei unendlich kleine Größen, wovon die zweite so gewählt ist, daß die Funktion $f(x, y)$ beständig das nämliche Zeichen zwischen den Grenzen $y = \alpha$ und $y = \beta$ behält, d. h. daß die Funktion $f(x, y)$ in $dy = f(x, y)\, dx$ für die Stelle $y = 0$ sich ändere. Um nun zu entscheiden, ob der Wert $y = 0$ der Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ als singuläres oder partikuläres Integral genügt, ist es hinreichend, festzustellen, ob das zwischen denselben Grenzen in Beziehung auf die Veränderliche y genommene bestimmte Integral

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)}$ selbst eine unendlich kleine Größe ist oder nicht.

Wenn also $y = 0$ eine singuläre Lösung ist von $dy = f(x, y)\, dx$, so ist immer $\lim \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} = 0$ und wenn $y = 0$ eine partikuläre Lösung der nämlichen Differentialgleichung ist, so muß $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} = \frac{0}{0}$ oder ∞ sein. Die Konvergenz des Integrales $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)}$ gegen Null hat sich als ein hinreichendes Kriterium für die singuläre Lösung erwiesen unter der Voraussetzung, daß der Wert des Differentialquotienten, aus der Differentialgleichung erhalten, eine Funktion ist, die für $y = 0$ nicht unstetig wird. Wenn x bezw. y in diesem Theorem als Konstante angesehen wird, so ist

---

[1]) CAUCHY [30], p. 447—448; siehe auch PRIX [70] und DE MORGAN [35], § 7 über diese Regel.

leicht ersichtlich, daß das von CAUCHY gegebene zu dem von EULER gefundenen Kriterium führen kann, gleichzeitig aber auch zu gewissen Gleichungen, die das Endresultat der Regel von BOOLE für die Existenz von singulären Lösungen darstellen.[1])

EULER hat noch folgendes bemerkenswerte Kriterium[2]) aufgestellt, als er die Frage beantwortet: Si quaepiam relatio inter binas variabiles satisfaciat aequationi differentiali, definire utrum ea sit integrale particulare necne? Er entscheidet, ob ein gefundenes Integral ein spezieller Fall des allgemeinen Integrales oder eine singuläre Lösung ist, dadurch, daß er zeigt, es müsse die Entwicklung $y = \varphi\,(x, X + \omega)$ eine Potenz von ω enthalten, deren Exponent kleiner als 1 ist, wenn man y einen singulären Wert X beilegt. EULER prüft dieses Kriterium wieder an einer Reihe von Beispielen, von welchen ein solches zur weiteren Erläuterung der Regel hier folgen soll[3]): Da der Wert $y = x$ der Gleichung $a\,dy - a\,dx = dx\sqrt{y^2 - x^2}$ Genüge leistet, so untersuche man, ob derselbe ein partikuläres Integral sei oder nicht. Man setze $y = x + \omega$, wobei ω unendlich klein angenommen werden soll, so wird

$$a\,d\omega = dx\sqrt{2x\omega} \quad \text{oder} \quad \frac{a\,d\omega}{\omega^{1/2}} = dx\sqrt{2x},$$

weil $\sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{2\,x\omega}$ ist. Da hier $d\omega$ durch eine Potenz von ω, deren Exponent kleiner als die Einheit ist, dividiert wird, so folgt, daß der Wert $y = x$ kein partikuläres Integral der vorgelegten Gleichung ist, obwohl er derselben Genüge leistet.

Diese „methodus ingeniosissima“, wie sich LAPLACE[4]) gelegentlich über diese Regel ausdrückt, enthält allerdings die Unbequemlichkeit, daß sie nicht die Natur irgend einer beliebigen Lösung bestimmt, sondern die Voraussetzung enthält, daß y immer durch x dargestellt gefunden sein muß. Merk-

---

[1]) BOOLE ([40b], p. 23—31), hatte sich 1859 mit dem EULERschen Kriterium beschäftigt und die Schlußfolgerung, die bei EULER nicht vollständig entwickelt ist, weiter ausgeführt. BOOLE schreibt übrigens EULER zuviel zu, da letzterer nicht die Natur von irgend einer beliebigen Lösung, sondern nur von einer Lösung $x =$ const. diskutiert hat. Auf diese Tatsache hat bereits TODHUNTER ([40b], p. 34) aufmerksam gemacht. COCKLE [57] übt wiederum an BOOLEs Auseinandersetzung Kritik; es sei fraglich, ob BOOLEs Schlüsse in allen Fällen richtig seien; nur seine Annahme, daß eine Größe auf der rechten Seite einer Gleichung als Konstante und auf der linken Seite als Variable behandelt wurde und daß die singuläre Lösung durch eine Integration erhalten worden ist, scheinen wesentlich zu ihrer Gültigkeit beigetragen zu haben. [2]) EULER [13], § 565. Probl. 72. Eine vollständige Ableitung für dieses Kriterium findet sich bei LAGRANGE [25], § 204; Leç. 15. Oeuvres Bd. 10, p. 215ff., welche auch HOUTAIN [36], p. 1083—1085 wieder bringt. [3]) A. a. O. § 568. [4]) LAPLACE [15], p. 539.

würdigerweise hat auch hier Euler immer noch keinen besonderen Kunstausdruck für die neuen Integrale eingeführt; er mag sie immer noch, um Worte von Lalande[1]) zu gebrauchen, nur als „pour ainsi dire parasites" unter den Integralen angesehen haben.[2])

§ 2. Laplace.

Großes Verdienst um die Fortentwicklung unserer Theorie hat sich auch Laplace erworben, der sofort erkannt hatte, daß „haec analyseos pars maxime utilis"[3]) sei. Man glaubte bisher, daß sich Laplace mit den singulären Lösungen nur ganz gelegentlich in einer Abhandlung über die säkularen Ungleichheiten der Planeten, die 1772 in den Pariser Memoiren erschien[4]), beschäftigte; doch hatte er bereits 1771 in den Acta Eruditorum eine längere Abhandlung über dieses Gebiet veröffentlicht, die er aber selbst in manchen Teilen als mißlungen bezeichnete und deshalb im folgenden Jahre eine von den nämlichen Prinzipien ausgehende Arbeit gab, in welcher er die Beweise seiner Sätze einer strengen Formulierung unterwarf. Laplace spricht 1774 über diese beiden Arbeiten gelegentlich der Wiederholung[5]) eines 1772 entdeckten, aber erst 1775 veröffentlichten Satzes über singuläre Lösungen folgende Worte: „La méthode dont j'ai fait usage, vient de paroître dans les Actes de Lipsic pour l'année 1771. Mais comme il s'est glissé, durant l'impression plusieurs fautes assez considerables et que d'ailleurs j'ai eu depuis occasion d'approfondir d'avantage cette matière, je prie le lecteur de suivre mes recherches sur cet objet dans le volume de l'Academie (de Paris) pour l'année 1773."

Während Laplace 1771 an dem speziellen Beispiel

$$y\,dy + x\,dx = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

(an welchem er sowohl 1771 als auch 1772 die Existenz der singulären Lösungen nachwies) zuerst zeigte, daß die singuläre Lösung $x^2 + y^2 = a^2$ der vorgelegten Differentialgleichung nicht in dem allgemeinen Integrale $y + C = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$ enthalten sei[6]), so löste er diese Frage in seiner zweiten Abhandlung direkt in allgemeiner Weise an der Hand der Differentialgleichung $dy = p\,dx$[7]) mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen. Es sei im folgenden der Gedankengang des Beweises, den Laplace 1772

---

[1]) Montucla-Lalande. Hist. de math. Bd. 3, p. 194. [2]) D'Alembert [14], wurde 1769 durch Eulers Untersuchungen wieder veranlaßt, sich mit den singulären Lösungen zu beschäftigen, und versuchte, die Eulersche Darstellung zu erweitern. [3]) Laplace [15], p. 540. [4]) Laplace [16]. [5]) Laplace [18]. [6]) Laplace [15], p. 541—543. [7]) Laplace [16], p. 345—347; Oeuvres, Bd. 8, p. 327 bis 329.

gab, angedeutet. Wenn nämlich $\varphi = 0$ die gegebene Lösung der Differentialgleichung ist, deren allgemeines Integral durch die Gleichung $\psi = 0$ dargestellt wird, so kann man mit Hilfe der beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ zwei Kurven HCM und LCN (Fig. 4) über die Achse AB konstruieren. Dabei wird die Konstante in der Gleichung des allgemeinen Integrales $\psi = 0$ so angenommen, daß die partikuläre Kurve LCN durch den auf der Kurve $\varphi = 0$ als fest vorausgesetzten Punkt C hindurchgeht. Es ist nun augenscheinlich, daß im Falle des Enthaltenseins der Kurve $\varphi = 0$ im allgemeinen Integral $\psi = 0$ die beiden Kurven HCM und LCN in allen ihren Punkten übereinstimmen, d. h. die ersten Differentialquotienten und folglich alle höheren müssen in allen Punkten der beiden Kurven bezüglich gleich sein. Ist dies nicht der Fall, so muß die Gleichung $\varphi = 0$ eine singuläre Lösung darstellen. Auf Grund dieser Überlegung gab nun LAPLACE in analytischer Form ein Mittel, ohne Kenntnis des allgemeinen Integrales festzustellen, ob eine gegebene Gleichung eine singuläre Lösung sei oder nicht.

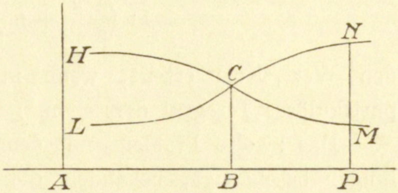

Fig. 4.

LAPLACE bespricht hierauf den speziellen Fall, in dem die Gleichung eines Integrales von $dy = p\,dx$ durch $y = 0$ gegeben ist, und gibt eine Regel[1]), nach welcher die singuläre oder partikuläre Natur von $y = 0$ erkannt werden kann. Dann ging er zu dem allgemeinen Fall über, wo die Lösung eine beliebige Gleichung zwischen x und y ist. Wenn $\mu = 0$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $dy = p\,dx$ sein soll, so wird über ihre Beschaffenheit die transformierte Differentialgleichung[2])

$$d\mu = -\mu^n \cdot q \frac{d\mu}{dy} \cdot dx$$

Aufschluß geben und zwar ist $\mu = 0$ ein partikuläres Integral, wenn $n \geqq 1$, andernfalls muß $\mu = 0$ eine singuläre Lösung sein.[3])

LAPLACE kennt also, wie leicht aus dem vorstehenden zu ersehen ist, die Tatsache (die später von LAGRANGE und POISSON weiter ausgeführt worden ist), daß eine singuläre Lösung durch eine geeignete Transformation von der Differentialgleichung abgetrennt werden kann.

Von dem letzten Satze aus gelangt nun LAPLACE zu folgendem

---

1) LAPLACE [16], p. 348. 2) q darf weder unendlich, noch Null werden.
3) Eine ähnliche Transformation, bei der das Verhalten eines Exponenten eines Faktors Aufschluß über die singuläre Lösung gibt, findet sich bei COURNOT [28] § 516.

I. Theorem: Wenn die Gleichung $\mu = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung $dy = p\,dx$ ist, so wird sie jedesmal eine singuläre Lösung sein wenn sie der Größe

$$1 : \left(\frac{d^2\mu}{dx^2} + p\frac{d^2\mu}{dx\,dy} + \frac{dp}{dx}\cdot\frac{d\mu}{dy}\right)$$

den Wert Null erteilt, wenn nicht, so wird die Gleichung $\mu = 0$ ein partikuläres Integral darstellen.[1])

Das zweite Problem, mit dem sich LAPLACE in seinen beiden Abhandlungen beschäftigt, behandelt die Frage, auf welche Weise man alle singulären Lösungen einer vorgelegten Differentialgleichung finden kann. Er gibt hierfür zwei Methoden an; in der ersten benützt er die Entdeckung von CONDORCET, daß in dem EULERschen Multiplikator die singuläre Lösung enthalten sein muß, wenn die Differentialgleichung eine solche besitzt. Seine Ableitung ist verschieden von der Methode CONDORCETS, jedoch in den beiden Arbeiten von LAPLACE vollständig gleich[2]) und er ist zu folgendem Ergebnis gelangt:

Wenn die linke Seite der Gleichung $R\,dx - S\,dy = 0$, welche, mit dem Faktor μ multipliziert, integrierbar gemacht wird, so daß

$$\mu R\,dx - \mu S\,dy = d\varphi(x, y)$$

ein vollständiges Differential ist, so wird $\xi = 0$ die singuläre Lösung der vorgelegten Differentialgleichung sein, wenn $\xi = 0$ ein Faktor der Gleichung $\frac{1}{\mu} = 0$ ist.

Auch LAGRANGE[3]), LACROIX[4]) und ORLOFF[5]) glaubten in der Methode des Integrationsfaktors einer Differentialgleichung ein gutes Mittel zu sehen, um aus dem Multiplikator die singulären Lösungen zu finden.[6]) LAGRANGE erwähnte u. a., daß man aus der Tatsache, daß jeder Multiplikator für die singuläre Lösung unendlich groß ist, nicht den reziproken Satz aufstellen kann, wonach jede Differentialgleichung, die einen unendlich großen EULERschen Multiplikator besitzt, auch eine singuläre Lösung haben muß.

LAPLACE gibt auch einen Weg an, um den Faktor ξ des Integrationsfaktors zu finden, der die singuläre Lösung darstellen soll. Bei dieser Untersuchung zeigt sich in LAPLACES Arbeiten eine Verschiedenheit; die Methode, die LAPLACE 1772 gibt, ist eine präzisere und baut sich auf das erste

---

[1]) Ein ausführlicher Beweis für dieses Theorem findet sich bei HOUTAIN [36], p. 1086—1091. [2]) LAPLACE [15], p. 551; [16], p. 352. [3]) LAGRANGE [25], § 175. Oeuvres, Bd. 10, p. 187ff; § 168. Oeuvres, Bd. 10, p. 181—182. [4]) LACROIX [23], § 600. [5]) ORLOFF [45]. [6]) Siehe auch BOOLE [40b], p. 23; DE MORGAN [35], § 2; COCKLE [71], § 11.

Theorem auf, das er 1771 noch nicht gefunden hatte. Auch die Regel, den Faktor ξ zu erhalten, ist strenger formuliert worden und lautet folgendermaßen:

II. Theorem. Wenn $\xi = 0$ eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $dy = p\,dx$ ist, so ist ξ ein gemeinsamer Faktor zu den beiden Größen $p + \dfrac{\frac{d^2p}{dx\,dy}}{\frac{d^2p}{dy^2}}$ und $\dfrac{1}{\frac{dp}{dy}}$, und umgekehrt, jeder zu diesen beiden Größen gemeinsame Faktor, gleich Null gesetzt, ist eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $dy = p\,dx$.[1])

Dieses Theorem hatte LAPLACE[2]) bereits früher, jedoch ohne Beweis veröffentlicht; es ist augenscheinlich, daß daraus eine einfache Methode resultierte, um direkt alle singulären Lösungen einer Differentialgleichung zu finden, und zwar ohne Kenntnis des allgemeinen Integrales und des EULERschen Multiplikators. LAPLACE benutzte dieses Theorem, um noch zwei weitere Regeln abzuleiten, welche die partikuläre oder singuläre Natur einer vorgelegten Gleichung bestimmen sollen, unter der Annahme, daß die Gleichung nur eine veränderliche Größe enthält.

1. Wenn $\xi = 0$ eine Funktion von y allein ist, und eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $dy = p\,dx$ sein soll, so muß ξ gemeinsamer Faktor zu den beiden Größen p und $\dfrac{1}{\frac{dp}{dy}}$ sein, und umgekehrt, jeder gemeinsamer Faktor in diesen beiden Größen, der nur y in sich schließt, gleich Null gesetzt, wird eine singuläre Lösung der Differentialgleichung geben.

2. Wenn $\xi = 0$ eine Funktion von x allein ist und eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $\frac{1}{p}dy = dx$ sein soll, so muß ξ gemeinsamer Faktor von $\frac{1}{p}$ und $\dfrac{p^2}{\frac{dp}{dx}}$ sein, und umgekehrt, jeder gemeinsamer Faktor in diesen beiden Größen, welcher nur eine Funktion von x ist, gleich Null gesetzt, ist eine singuläre Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

Das wichtigste in diesen Sätzen war die Entdeckung, daß die singuläre Lösung die Gleichung

$$\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dy} = \infty\,.$$

befriedigen muß; damit war das bekannteste Kriterium für das Auftreten

---

[1]) LAPLACE [16], p. 355; Oeuvres, Bd. 8, p. 339. [2]) LAPLACE [18].

der singulären Lösungen gegeben. Es mußte also die partielle Ableitung in bezug auf y der nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelösten Differentialgleichung für jeden Wert von y, der als singuläre Lösung die Differentialgleichung befriedigen sollte, unendlich werden. Diese sog. Laplacesche Bedingungsgleichung[1]) führte zu mehreren Bemerkungen, die wichtig genug sind, um sie hier gleich folgen zu lassen. Lagrange hat dieses Kriterium aufs neue abgeleitet und in folgender Weise vervollständigt: „Hat man die gegebene Differentialgleichung auf die Form gebracht: $\frac{dy}{dx} = -f(x, y) = -p$, so müssen die beiden Größen $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dp}{dy}$ für eine singuläre Lösung unendlich groß sein. Dieser Umstand gibt ein einfaches Mittel, um zu erkennen, ob ein Ausdruck ohne willkürliche Konstante, welcher eine gegebene Differentialgleichung befriedigt, eine singuläre Lösung oder bloß ein besonderer Fall des allgemeinen Integrales ist. Auch kann diese Eigenschaft dazu dienen, die singulären Lösungen, deren eine Differentialgleichung fähig ist, zu finden; denn wenn eine Gleichung, für welche $\frac{dp}{dx} = \infty$ und $\frac{dp}{dy} = \infty$ zugleich $\frac{dy}{dx} + f(x,y) = 0$ genügt, so ist sie die singuläre Lösung."[2]) Lagrange hat also nur die Gleichung $\frac{dp}{dx} = \infty$ neu gefunden und es ist daher unrichtig, daß man ihm die Entdeckung beider Gleichungen zuschreibt, wie dies in neuerer Zeit bisweilen, z. B. von Boole[3]) und Predella[4]), geschehen ist. Aus der Ableitung von Laplace, die sich auf das Eulersche Kriterium gestützt hatte, konnte man schließen, daß die Gleichung $\frac{dp}{dy} = \infty$ eine notwendige Bedingung für die Existenz der singulären Lösungen darstellt; es war daher nur noch zu prüfen, ob sie auch hinreichend wäre für das Auftreten derselben. Es wurde aber sehr bald die Unzulänglichkeit der Bedingungsgleichungen an manchen Beispielen nachgewiesen und so ging man daran, dieselben zu vervollkommnen.[5]) Der Irrtum, der das Laplacesche Resultat nicht mehr einwandsfrei machte, besteht in der Annahme, daß das Unendlich-

---

[1]) Timmermans [29] und Navier (siehe Anm. 2 S. 332), § 412, deuten die Laplacesche Gleichung vom geometrischen Standpunkt aus. [2]) Lagrange [25], § 200, Oeuvres, Bd. 10, p. 212; zwei weitere Beweise Lagrange [24], chap. 9, n. 59, 60; ferner ein Beweis bei Zajacrkowski [51], Prix [70]. Auch Mansion [54] gibt eine neue Ableitung des Laplaceschen Kriteriums, dessen Auseinandersetzung mit einer Untersuchung Houtains ([36], p. 1028) identisch ist, die letzterer nach einem Beweise von Caraffa (Traité élém. de Calc. intégr.) gegeben hat. [3]) Boole [40a], p. 175. [4]) Predella [98], p. 31. [5]) Boole [40a], ch. 8, art. 7; ch. 21, art. 6. vgl. Hagen [116], p. 186; ferner Prix [70]; siehe auch die Arbeiten von Lagrange (S. 354, Anm. 1) und de Morgan (S. 378).

werden des Ausdruckes infolge des Auftretens eines verschwindenden Faktors mit seinem Nenner stattfindet.[1])

§ 3. Ausführliche Darlegung der Theorie von LAGRANGE.

Die Lektüre der zweiten Abhandlung von Laplace hatte in Lagrange[2]) Gedanken aufgefrischt, die er schon früher, wahrscheinlich durch Eulers grundlegenden Aufsatz angeregt, gefaßt hatte, und er beschäftigte sich mit Untersuchungen[3]), von denen er mit vollem Recht sprechen durfte: „dans lesquelles je me flatte de pouvoir présenter aux Geomètres une theorie nouvelle et complète sur le point d'analyse dont il s'agit." Das Gebiet der singulären Lösungen erfreute sich einer besonders eifrigen Behandlung durch Lagrange und wir verdanken ihm die erste vollständige Aufstellung der wesentlichsten Gesichtspunkte unserer Theorie.

In der Abhandlung von 1774 spricht Lagrange als Erster in systematischer Aufeinanderfolge:

A. Von den singulären Lösungen der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei Variabeln und von der Methode, sie aus den vollständigen Integralen herzuleiten.

B. Von dem Auftreten der singulären Lösungen der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung und der Methode, dieselben zu finden, ohne die vollständige Lösung zu kennen.

C. Von der Ableitung der singulären Lösungen aus der Betrachtung von Kurven.

---

1) Lagrange [25], § 229—231, Oeuvres, Bd. 10, p. 239—242. 2) Lagrange hatte die Arbeit von Laplace als Manuskript in Händen gehabt. 3) Lagranges erste Abhandlung wurde in den Sitzungen der Akademie in Paris am 12. Oktober und 9. November 1774 gelesen; also machte Lagrange seine Resultate in bezug auf die singulären Lösungen etwas früher bekannt, als Laplaces Arbeit von 1772 veröffentlicht wurde. Die erste Arbeit von Laplace hat Lagrange wahrscheinlich nicht gekannt. In den Leçons sur le Calcul des fonctions kommt Lagrange auf die gleichen Probleme von 1774 wieder zu sprechen. Er hatte diese Leçons in der École Polytechnique in Paris 1799 vorgetragen, 1801 in der neuen Ausgabe der Séances des Écoles Normales publiziert und im 12. Heft des Journ. de l'Éc. Polyt. von 1804 wieder abgedruckt. Lagrange hat besondere Ausgaben derselben in den Jahren 1806 und 1808 veranstaltet. — Die im folgenden angeführten Untersuchungen von Lagrange sind nicht in der Schreibweise, wie sie 1774 und 1779 gegeben wurden, angeführt, sondern schließen sich der mit aller Allgemeinheit, Gewandtheit und Klarheit der analytischen Kunst Lagranges vorgetragenen Theorie der singulären Lösungen in den Leçons an, da diese im Prinzip vollständig mit den früheren von 1774 übereinstimmen.

A. Ableitung der singulären Lösung aus dem allgemeinen Integral.

LAGRANGES Methode, die singuläre Lösung aus dem allgemeinen Integral zu finden, beruht auf der Variation[1]) der Konstanten in der allgemeinen Lösung[2]). LAGRANGE zeigte zuerst, daß eine Differentialgleichung

$$v = f(x, y, y') = 0$$

eine singuläre Lösung haben kann, die kein besonderer Fall des allgemeinen Integrales von $v = 0$ ist, und gab als I. Theorem, daß man die singuläre Lösung aus dem allgemeinen Integrale $u = F(x, y, C) = 0$ einer gegebenen Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ findet, wenn man in demselben der Größe C denjenigen veränderlichen Wert gibt, welcher der Gleichung $\frac{du}{dC} = 0$ entspricht, und zwar aus dem Grunde, weil für diesen Wert von C die erste von $u = 0$ abgeleitete Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ und die durch Verbindung derselben mit $u = 0$, vermittels Wegschaffung der Größe C entstehende Differentialgleichung $v = 0$ die nämliche bleibt, C mag konstant sein oder nicht.

Bezüglich der Gleichung $\frac{dF}{dC} = 0$ macht LAGRANGE noch die Bemerkung, daß dieselbe nach der Theorie der algebraischen Gleichungen die Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung $F(x, y, C) = 0$ ausdrückt, woraus folgt, daß der singuläre Wert von y für die Gleichung $F(x, y, C) = 0$ die Eigenschaft hat, der nach C aufgelösten Gleichung zwei gleiche Wurzeln zu geben.

Der Prozeß, wonach C aus $F(x, y, C) = 0$ und $\frac{dF}{dC} = 0$ eliminiert wird, führt zu einer Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, die man später als Diskriminantengleichung[3]) bezeichnete und die zur Vereinfachung der Schreibweise von nun an auch so genannt sein mag. Würde die Diskriminantengleichung einen konstanten Wert C enthalten, so würde sie aufhören, eine singuläre Lösung zu sein; sie wäre dann nur ein besonderer Fall des allgemeinen Integrales. Dem Beweise für das 1. Theorem von LAGRANGE, der in sehr vielen Abhandlungen und Werken, allerdings mehr oder weniger

---

1) STRAUCH [42. Vorw. VIII.] weist darauf hin, daß das Wort Variation in der Analysis schon in anderer Bedeutung verbraucht ist, und hat deshalb das Wort Mutation vorgeschlagen. 2) LAGRANGE [19], p. 199—206; [25] Leç. 14. 3) Die Bezeichnung „Diskriminante einer Gleichung“ findet sich zuerst bei SYLVESTER (Phil. Mag. 1851, II, p. 406), der Ausdruck „Diskriminantenort“ (discriminant-locus) bei CAYLEY [53].

modifiziert, wieder erscheint, haftet ein Mangel an: Man sieht zwar ein, daß man auf dem von Lagrange angegebenen Wege zu neuen singulären Lösungen gelangen kann, aber man erhält nicht die Sicherheit, daß auch alle singulären Lösungen der gefundenen Bedingungsgleichung notwendig genügen müssen, wie es tatsächlich der Fall ist. Carl Schmidt[1]) findet überdies einen Schluß, den Lagrange in seinem Beweise ausführt, als nicht ganz gerechtfertigt. Nach Lagrange erscheint es für ganz selbstverständlich, daß jeder von x abhängige Wert der Integrationskonstante C, welcher die Lösung $F(x, y, C) = 0$ wiederum in eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ überführt, notwendig der Bedingung $\frac{dF}{dC} = 0$ genüge. Dieser Satz ist indessen, wie Adolf Mayer[2]) 1890 darlegt, durchaus nicht allgemein gültig, vielmehr selbst dann, wenn man sich auf reelle Werte von C beschränkt, an sehr enge Grenzen gebunden und außerhalb derselben gibt es sogar unendlich viele von x abhängige Werte der willkürlichen Konstante C, welche ebenfalls die vollständige Lösung in eine Lösung der Differentialgleichung transformieren.

B. Ableitung der singulären Lösung aus der Differentialgleichung.

Lagrange hat auch das Problem behandelt, die singuläre Lösung unmittelbar aus der Differentialgleichung selbst zu finden[3]), und hat die gleiche Regel, die Laplace schon für die explizite Form der Gleichung gefunden, durch eine äußerst interessante Betrachtung auch für die implizite Form aufgestellt. Seiner Ableitung liegt der Gedanke zugrunde, daß eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung zwischen zwei Variabeln eine singuläre Lösung zuläßt, wenn man diese Gleichung immer in eine solche Form bringen kann, daß ihre Abgeleitete sich in zwei Faktoren zerlegt. Der eine dieser Faktoren gibt dadurch, daß man $\frac{dy}{dx}$ aus ihm und der Differentialgleichung eliminiert, die singuläre Lösung. Der andere liefert das allgemeine Integral, eine „Bemerkung, die bisher noch nicht gemacht worden war“.[4]) Lagrange geht dabei von dem im 1. Theorem aufgestellten Fundamentalprinzip der singulären Lösungen aus.

Es sei die Differentialgleichung $v = f(x, y, y') = 0$, die ihrer Natur nach das Resultat der Elimination der Konstante C zwischen der jetzt unbekannten Gleichung $u = F(x, y, C) = 0$ des allgemeinen Integrales und deren ersten Abgeleiteten $\frac{du}{dx} = 0$ ist. Denkt man sich nun die Kon-

---

[1]) Schmidt [80], p. 2. [2]) Mayer [93]. [3]) Lagrange [19], p. 206—219; [25], Leç. 15. [4]) Lagrange [25], Leç. 15, § 182.

stante C aus $\frac{du}{dx} = 0$ entwickelt und in die Gleichung $u = 0$ substituiert, so läßt sich die gegebene Differentialgleichung $v = 0$, wenn man den aus $\frac{du}{dx}$ gefundenen Wert von C durch $\varphi(x, y, y')$ bezeichnet, durch

$$v = F[x, y, \varphi(x, y, y')] = 0$$

ausdrücken. Die erste Ableitung dieser letzten Gleichung ist, wenn $\varphi(x, y, y')$ durch φ abgekürzt wird,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}{}^{1)} = 0,$$

da φ nur von x, y, y' abhängt. $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ ist identisch Null, also reduziert sich die Gleichung auf

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

die in

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

zerfällt. Die zweite Gleichung führt zum allgemeinen Integral, also ist nur noch die erste von Interesse. Eliminiert man daher y' zwischen

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad v = F(x, y, \varphi) = 0,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y allein, ohne Konstante. Nun ist aber diese Elimination von y' nichts anderes, als wenn man φ selbst weggeschafft hätte, weil nur φ allein die Größe y' enthält; die entstehende Gleichung zwischen x, y, ohne Konstante, ist daher das Endresultat der Elimination von φ aus $F(x, y, \varphi) = 0$, $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0$. Da es aber bei der Elimination gleichgültig ist, ob φ veränderlich ist oder nicht, so ist das hier auftretende Eliminationsprodukt identisch mit der nach dem I. Theorem erhaltenen singulären Lösung. Dieses seit Lagrange nun allgemein bekannte II. Theorem zur Auffindung der singulären Lösungen hat man in folgende Form gebracht: Man findet die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, indem man von allen Lösungen, welche der Eliminationsprozeß von y' aus $f(x, y, y') = 0$ und $\frac{df(x, y, y')}{dy'} = 0$ ergibt, diejenigen auswählt, welche die Differential-

---

[1]) Houtain [36], p. 989 bemerkt, daß $\frac{d\varphi}{dx}$ die Summe $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}$ darstellt, und es könnten kompliziertere Fälle eintreten als geprüft worden sind, in welchen Fällen die nachfolgenden Auseinandersetzungen nicht mehr genügend erscheinen.

gleichung befriedigen, ohne gleichzeitig dem allgemeinen Integrale Genüge zu leisten.

Es ist hier zu erwähnen, daß Houtain[1]) mit Unrecht Legendre die Entdeckung der Gleichung $\frac{df}{dy'} = 0$ zugeschrieben hat. Legendres Ableitung[2]) aus dem Jahre 1790 von diesem II. Theorem Lagranges basiert ganz zweifellos auf der von Lagrange 1774 gegebenen Auseinandersetzung.

C. Die drei für die Existenz der singulären Lösungen notwendigen Bedingungsgleichungen.

Wir kommen zunächst noch zum Inhalte des dritten Abschnittes der ersten Arbeit von Lagrange[3]), in welchem die geometrische Natur der singulären Lösungen einer Untersuchung unterzogen wird. Nach den bisherigen Ergebnissen „blieb es nur noch übrig, die Verbindung der singulären und vollständigen Integrale und der durch diese und jene ausgedrückten Kurven zu finden“.[4]) Lagrange erkannte, daß die Erledigung der Frage der singulären Lösungen sicherlich durch eine eingehendere Betrachtung des Integralkurvensystems näher gebracht werden müßte, da letzteres ein anschaulicheres Bild über den vorliegenden Gegenstand bringen würde, als die Differentialgleichung selbst. Es gelang ihm, die tangierende Eigenschaft der Kurve der singulären Lösung an die unendlich vielen partikulären Integralkurven, die durch die verschiedenen Werte des konstanten Parameters im allgemeinen Integrale bestimmt werden, festzustellen, und er erwarb sich dadurch das große Verdienst, den allgemeinen geometrischen Zusammenhang zwischen dem singulären und allgemeinen Integrale entdeckt zu haben. Daß die singuläre Lösung zugleich Enveloppe der partikulären Kurven des Integralkurvensystems darstellt, führt Lagrange mit folgenden Worten[5]) aus: Jede Differentialgleichung der ersten Ordnung stellt zuerst eine unendliche Anzahl von Kurven von derselben Art dar, die sich untereinander nur um den Wert der beliebigen Konstanten unterscheiden, welche an Stelle des Parameters getreten ist; dann zweitens stellt diese Gleichung noch die Kurve dar, welche alle erwähnten Kurven berührt, so daß man die berührten Kurven und auch die berührende Kurve als eine einzige Kurve ansehen kann, die eine unendliche Zahl von Zweigen (infinité de branches) besitzt. So wird es in jedem Punkt der berührenden Kurve zwei Zweige geben, welche sich in diesem Punkte begegnen und eine gemeinsame Tangente besitzen.

---

1) Houtain [36], p. 1025, 1027. 2) Legendre [22], p. 219. 3) Lagrange [19], p. 219—225; [25], Leç. 16. 4) Lagrange [25], Leç. 17, § 253, Oeuvres, Bd. 10, p. 267. 5) Lagrange [19], p. 221; Oeuvres, Bd. 4, p. 39; [25], § 237—240.

Der eine Zweig ist die berührende Kurve selbst und der andere ist die Kurve, welche sie in jenem nämlichen Punkte berührt.

Zu den bisher bekannten beiden Haupteigenschaften der singulären Lösungen, nämlich, daß sie erstens die Differentialgleichung befriedigen müssen und zweitens nicht durch eine passende Annahme der beliebigen Konstanten im allgemeinen Integrale erhalten werden können, hat Lagrange hier noch die weitere gefunden, daß die singulären Lösungen wenigstens zwei der reellen Werte von $\frac{dy}{dx}$, welche die Differentialgleichung befriedigen, gleich machen müssen.

Lagrange folgerte auf Grund der vorhergehenden Betrachtung weiter, daß jedem Wert von $\frac{dy}{dx}$ ein doppelter Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ entsprechen muß; er gelangte so zu einem Kriterium[1]) für die Existenz der singulären Lösungen, das seinem Grundgedanken nach von Laplace stammen dürfte (vgl. unten!): Eine singuläre Lösung veranlaßt den allgemeinen Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$, hergeleitet aus der (in impliziter Form gegebenen) Differentialgleichung den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ anzunehmen, also eine zweideutige Bedingung, die trotz ihres wenigstens teilweisen Unbestimmtwerdens als notwendiges Kriterium für die singulären Lösungen angenommen worden ist. Diese Zweideutigkeit ist augenscheinlich nur ein Ausdruck für die Tatsache, daß die Berührung einer Kurve der vollständigen Lösung und derjenigen der singulären Lösung nicht von der zweiten Ordnung ist.

Nach Trembley[2]) soll Laplace diejenige Funktion als singuläre Lösung erkannt haben, die Zähler und Nenner des Ausdruckes für $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden macht; doch gleichzeitig zeigt Trembley an der Hand der Differentialgleichung

$$x\,dy = dx\sqrt{y^2 - x^2},$$

daß die Regel nicht immer richtig ist, denn $y = x$, welches

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(x\,dy - y\,dx)}{(y^2 - x^2)^{3/2}} \quad \text{zu} \quad \frac{0}{0}$$

macht, ist hier gar keine Lösung der Differentialgleichung.

Lagrange benutzte dieses Kriterium, um eine sehr einfache Methode

[1]) Lagrange [19], Art. 2; [25], p. 220; eine Ableitung findet sich auch bei Boole [40a], p. 165; Brandes (Höh. Geom. in analyt. Darst. 1824. 2. Teil, 5. Abschn.) gibt eine geometrische Interpretation des Lagrangeschen Kriteriums.

[2]) Trembley [21] p. 7.

zur Herleitung der singulären Lösungen zu geben[1]), und hat dabei eine Entdeckung gemacht, die leider nicht so berücksichtigt worden ist, wie sie es verdient hätte. Ist die Differentialgleichung $v = f(x,y,y') = 0$ gegeben, so ist ihre Abgeleitete $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = 0$, und daraus $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dv}{dx} : \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$. Nun ist aber, wie LAGRANGE für die singulären Lösungen schon vorher[2]) bewiesen hat, einzeln $\frac{dv}{dx} = 0$ und $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 0$. In diesem Falle ist also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$, woraus folgende Regel resultiert: Man suche durch Differentiation der gegebenen Differentialgleichung den Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ und setze ihn gleich Null durch Null, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, welche wiederum zwei Gleichungen zwischen x und y geben, wenn man sie mit der gegebenen Differentialgleichung zur Elimination von $\frac{dy}{dx}$ verbindet. Haben die letzten Gleichungen einen gemeinsamen Faktor, so ist derselbe die singuläre Lösung der Differentialgleichung.

Anscheinend soll bei der von LAGRANGE gegebenen Untersuchung $\frac{dv}{dx}$ die Ableitung von v nach x, überall wo x außerhalb $\frac{dy}{dx}$ vorkommt, bedeuten. Wenn nun LAGRANGE auch die Größe y als Funktion von x aufgefaßt hat, wie es auch sein muß, so ist in $\frac{dv}{dx} = 0$ die Gleichung $\frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0$ zu erkennen, deren Bedeutung für die singulären Lösungen erst seit DARBOUX allgemein bekannt wurde. Von Interesse dürfte auch LAGRANGES Schreibweise solcher Gleichungen in seinen Leçons sur la théorie des fonctions (vgl. die Ausgabe seiner gesammelten Werke[2]): $f'(y') = 0$ und $f'(x,y) = 0$ sein.

Man sieht also schon 1806 bei LAGRANGE das wichtige Resultat auftreten, auf das 1842 COURNOT[3]) und 1865 STRAUCH[4]) wieder zu sprechen kommen und das 1873 von DARBOUX[5]) auf neuem Wege abermals gefunden wurde, daß nämlich drei Bedingungsgleichungen zur Aufsuchung der singulären Lösungen nötig sind. COURNOT gab zuerst die präzise Formulierung der dritten Bedingungsgleichung, die HOUTAIN[6]) in seiner großen Arbeit wiederbringt, ohne jedoch von ihrer Wichtigkeit etwas zu ahnen, er behandelte

---

[1]) LAGRANGE [25] § 191; Oeuvres Bd. 10, p. 204. [2]) A. a. O. § 189; Oeuvres Bd. 10. p. 203. [3]) COURNOT [28] § 476. [4]) STRAUCH [42] p. 36. [5]) DARBOUX s. S. 384; PAINLEVÉ schreibt irrtümlich CAUCHY die Entdeckung der dritten Bedingungsgleichung zu (Encykl. d. math. Wiss. II, A. 4a, p. 213, Anm. 85).
[6]) HOUTAIN [36].

sie vielmehr als etwas ganz Nebensächliches. Boole[1]) hat 1865, anscheinend ohne Cournots und Houtains Arbeiten zu kennen, einen strengen Beweis für $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$ gegeben, nimmt aber auch keine Rücksicht auf die Folgerung von Lagrange, daraus einen Weg zur Auffindung der singulären Lösungen abzuleiten.

D. Verschiedene Probleme von Lagrange in bezug auf die singulären Lösungen.

Lagrange[2]) untersuchte 1806 auch eine Gattung von Gleichungen, welche notwendig eine singuläre Lösung besitzen. Die Integrationsmethode, deren Lagrange sich hier bedient, kommt auf eine Kenntnis einer Berührungstransformation hinaus. Lagrange führt aus, daß die singulären Lösungen, obwohl sie weniger allgemein, als die vollständigen Integrale, weil sie keine willkürliche Konstante haben, auf der anderen Seite wieder allgemeiner sind als die letzteren, da ein und dieselbe singuläre Lösung einer unendlichen Menge von Differentialgleichungen Genüge leisten kann. Lagrange behandelte die Probleme: die Differentialgleichung zu einer singulären Lösung zu finden; ferner Differentialgleichungen aufzustellen, welche immer singuläre Lösungen besitzen; und schließlich die singuläre Lösung aus dem vollständigen Integrale zu finden, ohne die Konstanten zu entwickeln. Nur auf die erste Aufgabe sei im folgenden näher eingegangen.

Es sei $u = F(x, y, a, b) = 0$[3]) eine Gleichung zwischen x, y und den Konstanten a, b, wobei die eine Konstante irgendeine Funktion der anderen ist, so daß a und b z. B. durch $\Phi(a, b) = 0$ voneinander abhängen; man erhält die Differentialgleichuug zu $u = 0$, wenn man die beiden Konstanten zwischen $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ und $\Phi(a,b) = 0$ eliminiert. Nimmt man also die beiden Werte für a und b aus den Gleichungen $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, bezeichnet sie durch $[a =]\ \varphi(x, y, y')$ und $[b =]\ \psi(x, y, y')$ und substituiert sie in die Bedingungsgleichung $\Phi(a, b) = 0$, so erhält man die Differentialgleichung $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, wenn man der Kürze wegen wie Lagrange nur φ und ψ statt $\varphi(x, y, y')$ und $\psi(x, y, y')$ schreibt.

Jeder Wert von y in x, welcher der Gleichung $\Phi(\varphi, \psi) = 0$ genügt, während φ und ψ nicht konstante Größen sind, ist also im allgemeinen Integral der Differentialgleichung nicht enthalten und folglich eine singuläre Lösung, weil, wie Crelle[4]) dazu bemerkt, die singuläre Lösung diejenige

---

[1]) Boole [40a] p. 180 (4. Ausg. 1877). [2]) Lagrange [25] Leç. 16; Oeuvres Bd. 10, p. 220ff. [3]) A. a. O. § 208. [4]) Crelle [25] Bd. 2, p. 529.

sein wird, für welche a und b veränderliche Werte haben, die zu finden der Gegenstand der Aufgabe war. LAGRANGE weist dann von einer Gleichung $y = \sum(x)$, wo $\sum(x)$ eine gegebene Funktion von x ist, nach, daß sie der Gleichung $\Phi(\varphi, \psi) = 0$ genügt, und deshalb singuläre Lösung sein muß, die nicht im allgemeinen Integrale enthalten ist.

Mit dieser bemerkenswerten Klasse von Differentialgleichungen beschäftigte sich später SERRET[1]), welcher auch diese LAGRANGEsche Untersuchung verwendet hat,[2]) um die CLAIRAUTsche Gleichung zu lösen. LIE[3]) zeigte, daß es sich bei dem von LAGRANGE erörterten Problem darum handle, eine Berührungstransformation der Ebene zu finden, durch welche eine Differentialgleichung auf die Form $F(\varphi, \psi) = 0$ gebracht wird. Wenn auch der Begriff Berührungstransformation bei LAGRANGE noch nicht vorkommt, so ist doch LIE der Ansicht, daß durch solche spezielle Untersuchungen die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen vorbereitet worden war; man braucht auch LAGRANGES Ausführungen nur wenig hinzuzufügen, um den Ausgangspunkt für die geometrische Theorie der Berührungstransformationen der Ebene zu gewinnen.[4])

LAGRANGE behandelte auch schon in seiner Théorie des fonctions analyt.[5]) 1797 die singulären Lösungen, doch sind seine Untersuchungen noch etwas undeutlich und verwickelt. CRELLE[6]) urteilt über die dortige Behandlungsweise der Theorie der singulären Lösungen mit folgenden Worten: Alle die im 9. Abschnitt ausgeführten Partikularitäten erläutern den Gegenstand wenig und lassen ihn noch so dunkel, daß man sogar an der Existenz der singulären Lösungen gezweifelt hat.

Fassen wir nun zusammen, was LAGRANGE auf dem Gebiete unserer Theorie in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat, so müssen wir sagen, daß er größtenteils alles das schon erörtert hat, was wir heute noch als das Wesentlichste der Theorie der singulären Lösungen der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei veränderlichen Größen nennen. LAGRANGE hatte mit großem Erfolge auf den Grundlagen weiter gearbeitet, die ihm CLAIRAUT, EULER und LAPLACE gegeben haben. Wenn auch die Arbeiten von LAGRANGE noch mancher Ergänzungen bedurften, welche die spätere Zeit auch brachte, so kann man immerhin mit DE MORGAN sagen, daß er „at least a considerable moment of truth“, einen beträchtlichen Teil von wahren Tatsachen gegeben hat. Vor ihm waren die Arbeiten und Resultate, die in bezug auf die singulären Lösungen erzielt worden waren,

---

[1]) SERRET, J. de Math. pure et appl. Bd. 18. [2]) SERRET [111] Ausg. 1885, p. 57. [3]) LIE-ENGELS, Transformationsgruppen. 1881. Bd. 2, p. 31—33. [4]) LIE, a. a. O., p. 17. [5]) LAGRANGE [24], Oeuvres 9. [6]) CRELLE [25], Bd. 1, p. 293.

ganz vereinzelt und zusammenhangslos; die Wissenschaft hatte keinen allzu großen Nutzen. Lagrange war es wieder, der die bisher gefundenen Theoreme zu einer vollständigen Theorie organisierte, die, verbessert und weiter ausgeführt, als der Mittelpunkt der vielen Arbeiten auf dem Gebiet der singulären Lösungen anzusehen ist. Es mag hier noch ein Urteil Crelles[1]) aus dem Jahre 1823 über die in den Leçons dargelegte Theorie angeführt sein: „Der große Analyst klärt einen Gegenstand auf, der, obgleich er nicht neu ist, doch bis auf ihn noch ziemlich im Dunkel lag. Man sieht (aus der Darlegung der entwickelten Sätze), wie Lagranges Bescheidenheit ihm kaum erlaubt, sich auch nur einen kleinen Teil des Verdienstes um den Gegenstand zuzugestehen. Sein Verdienst ist aber unstreitig größer; denn hätte Lagrange auch selbst gar nichts Neues zu dieser Theorie hinzugefügt, so bliebe ihm dennoch das Verdienst, sie erläutert und ins Klare gebracht zu haben, und dieses Verdienst kann ebenso groß sein, wie dasjenige neuer Erfindungen.“ Ein treffenderes Urteil konnte dem großen Lagrange von berufener Seite nicht zuteil werden.

VI. Kapitel.

Geschichtliche Bemerkungen über die Enveloppen.

Seit Lagrange war es nun bekannt, daß eine Beziehung der singulären Lösungen von Differentialgleichungen und der Enveloppentheorie besteht. Es dürfte daher jetzt von Interesse sein, auch auf die Entwicklungsgeschichte der Enveloppentheorie bis zum ersten Auftreten der singulären Lösungen einen kurzen Blick zu werfen; wir werden dabei sehen, wie schon Leibniz und Johann Bernoulli über hundert Jahre vor Lagrange bei Untersuchungen von Enveloppen den singulären Lösungen nahe gekommen sind.

Die Theorie der Enveloppen ist zuerst mit den Abhandlungen von Huygens[2]) über die Evoluten und mit denjenigen über Caustica von Tschirnhausen[3]) begründet worden. Diese Mathematiker begnügten sich indessen, nur ganz vereinzelte Fälle von Bewegungen von geraden Linien geometrisch zu behandeln. Die erste Andeutung über den wahren Begriff einer einhüllenden Kurve finden wir bereits bei Toricelli im Jahre 1644 in dessen mathematischem Sammelwerk Opera geometrica. Fatio de Duillier gebührt das Verdienst, zuerst die Veranlassung gegeben zu haben zu Lö-

---

1) Crelle [25], Bd. 2, p. 616. 2) Huygens [1]. 3) Tschirnhausen [2].

sungen von Aufgaben, die vom geometrischen Ort der Berührungspunkte je zweier unendlich nahe liegender umhüllter Kurven handeln. Er legte Johann Bernoulli verschiedene Probleme vor, die jener auch löste, wenn auch nicht nach einer allgemeinen Methode.[1]) Es fand Bernoulli die Enveloppe einer Schar von parabolischen Kurven, die durch ein Geschoß, das mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit von einem bestimmten Punkte abgefeuert wurde, jedoch unter verschiedenen Elevationswinkeln, entstehen. Trotz dieser ersten Lösung eines Problems mit einer einhüllenden Kurve von Johann Bernoulli muß man doch die Priorität, den Begriff der Enveloppe in die Geometrie eingeführt zu haben, Leibniz zuschreiben. Leibniz stellte auch eine allgemeine Methode für die Lösung von Aufgaben von der erwähnten Art auf. Bereits im Jahre 1692 gibt er[2]) klar die Definition der Enveloppe als des Ortes der Durchschnittspunkte für je zwei nächste Linien an (proximae lineae, id est infinitisme differentes, seu infinite parvam habentes distantiam). Jedoch erst 1694 gibt Leibniz[3]) den Weg an, diejenigen Kurven zu finden, die durch ein fortwährendes Verschneiden von einer unendlichen Anzahl von Kurven entstanden sind. Diese unendlich vielen Kurven müssen durch eine einzige Gleichung dargestellt sein, die einen Parameter enthalten muß. Wenn z. B. die Gleichung einer Kurve mit den beiden veränderlichen Größen x und y und den Parametern a, b gegeben ist, so muß man nach einem von beiden Parametern, während der andere als konstant betrachtet wird, differentiieren[4]), um zur Gleichung der Berührungslinie zu gelangen (opus est aequationem eius curvae differentiare[5]). Durch die Differentiation wird eine neue Gleichung erhalten, die einen Wert des Parameters als Funktion der Koordinaten liefert und dieser Wert, in die vorgelegte Gleichung substituiert, gibt sofort die Gleichung der gesuchten Kurve.

Wir sehen, mit welch bewunderungswürdiger Klarheit und Einfachheit Leibniz das Problem gelöst hat. Leibniz suchte nun die Kurve zu finden, die durch aufeinanderfolgende Durchschnitte einer unendlichen Anzahl von Kreisen (concursus circulorum[6])), die ihre Mittelpunkte auf einer Achse haben, entstanden ist. Bei der Aufgabe war die Bedingung gegeben, daß die Normalen der entstehenden Kurven, hier die Halbmesser der Kreise, eine zu den entsprechenden Teilen der Achse gegebene Relation besitzen; es kommen dabei die Abschnitte in Betracht, die zwischen dem Anfangspunkt der Abszissen und Normalen liegen.

---

[1]) Brief vom 28. Sept. 1694 von Joh. Bernoulli an Leibniz. [2]) Leibniz [3]. [3]) Leibniz [5], p. 314—315. [4]) Montucla bemerkt in seiner Hist. des math. Paris, Bd. 3, p. 331, daß Bossut zuerst eine solche Differentiation nach einem Parameter vorgenommen hat. [5]) Leibniz [3], p. 169. [6]) Leibniz [5], p. 314.

Die Gleichung eines Kreises sei

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2xb + c^2,$$

worin x, y die Koordinaten der Kreispunkte, c die Abszisse zum Kreismittelpunkt und b Länge des Radius sind. Diese Gleichung liefert c als Funktion von x, y und es bleibt nur noch übrig, den Parameter b zu bestimmen. Die erhaltene Gleichung wird dann diejenige der Kurven sein, die durch sukzessives Durchschneiden aller Kreise gebildet wird und folglich die geforderte Eigenschaft besitzt. Leibniz nimmt an, daß die Gleichung $c^2 = a \cdot b$ diejenige einer Parabel sei, wo a eine ganz bestimmte Konstante darstellt. Die Kreisgleichung[1]) wird nun

$$x^2 + y^2 - 2xb + b^2 - ab = 0.$$

Läßt man b allein variieren, so erhält man durch Differentiation nach b die Gleichung $2b\,db = 2x\,db + a\,db$, und daraus $b = x + \frac{a}{2}$ durch Verschwinden von db. Leibniz bemerkt hier, daß diese Rechnung im Fall eines einzigen Differentials in der Wirklichkeit mit der alten Methode der Maxima und Minima von Fermat, die von Hudden erweitert wurde, übereinstimmt. Die Substitution des Wertes von b in die frühere Gleichung liefert eine Apollonische Parabel $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$ als gesuchte Kurve.

Lagrange bemerkt zu dieser Lösung, daß Leibniz merkwürdigerweise gar nicht berücksichtigt hat, daß sein Resultat keine beliebige Konstante in der Gleichung der Kurve zuläßt, während es klar ist, daß das Problem zu einer Differentialgleichung führt, deren Integral durch Einführen einer beliebigen Konstante nicht vollständig sein kann. Die von Leibniz gefundene Gleichung ist in der Tat eine singuläre Lösung, ausgedrückt durch die Parabelgleichung.[2])

Johann Beenoulli wurde durch das von Leibniz gelöste Problem veranlaßt, sich näher mit dieser Frage zu beschäftigen.[3]) Er kommt bei seinen Untersuchungen zu demselben Resultat wie Leibniz, wenn auch auf anderem Wege. Indem er nämlich zwei unendlich nahe Normalen betrachtet, beobachtet er, daß der unendlich kleine Zuwachs der Normalen sich verhält zum Zuwachs des der Normalen entsprechenden Teiles der Achse wie der Teil der Achse zwischen der Ordinate und der Normale zu der Normale selbst. Wenn b und c die nämliche Bedeutung wie in der obigen Aufgabe haben, so ist

$$\frac{db}{dc} = \frac{c - x}{b}.$$

---

[1]) Schreibweise von Leibniz. [2]) Lagrange [25], § 235. [3]) Joh. Bernoulli [4].

Durch Betrachtung des Dreiecks, in welchem b Hypotenuse, y und $c-x$ Katheten sind, erhält man

$$y^2+(c-x)^2=b^2;$$

aus den bisher erhaltenen Gleichungen gewinnt man

$$x=c-\frac{b\,db}{dc}; \qquad y=b\sqrt{1-\frac{db^2}{dc^2}}.$$

Die Bedingungen des Problems geben b als Funktion von c, x, y und durch Elimination dieser Größe wird man die Gleichung der gesuchten Kurve erhalten. Es sei deshalb $b^2=ac$ gesetzt; daraus

$$\frac{db}{dc}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Durch Substitution der beiden letzten Werte in die Ausdrücke für x und y erhält man

$$x=c-\frac{a}{2}; \qquad y=\sqrt{ac-\frac{a^2}{4}},$$

woraus die Elimination von c zur Parabelgleichung

$$y^2=ax+\frac{a^2}{4}$$

führt, die schon Leibniz gefunden hatte.

Bei der Art, wie Bernoulli die Aufgabe löste, muß man mit Lagrange[1]) verwundert sein, daß Bernoulli nicht gemerkt hat, daß dieses Problem wesentlich zur inversen Methode der Tangenten gehört, die ein Verfahren angibt, aus gegebenen Eigenschaften der Berührenden an eine Kurve oder der Normalen die Gleichung für die Kurve selbst zu finden; folglich müßte die allgemeine Lösung von einer Integration abhängen, welche notwendig eine beliebige Konstante in die Gleichung zwischen x, y einführen mußte; dieses Übersehen Bernoullis muß um so mehr überraschen, als er in den dieser Aufgabe vorangehenden Abschnitten seiner Leçons de Calcul intégral die Differentialausdrücke der Normalen und Subnormalen gegeben hat und das vorliegende Problem nur darin besteht, zwischen diesen Größen ein bestimmtes Verhältnis einzuführen. Leibniz und Bernoulli gaben sich keine Rechenschaft über die Natur und Ausdehnung ihres gefundenen Integrales. Die Sorge, die sie anwendeten, um die Integration zu vermeiden, wenn dies möglich ist, führte sie dazu, sich mit den unvollständigen Lösungen zu begnügen. Ebenso wie Leibniz hatte auch Bernoulli keine Ahnung, welche Widersprüche ihre Lösungen mit

1) Lagrange [25], Leç. 17, Oeuvres X, p. 251.

den Prinzipien der Differentialgleichungen darstellen; trotzdem können aber die erwähnten Lösungen als erste Beispiele von singulären Lösungen angesehen werden.[1]) Lagrange[2]) gab dann auch einen ausführlichen Nachweis, daß die Probleme von Leibniz und Bernoulli auf singuläre Lösungen der Differentialgleichung $f(x + yy', y\sqrt{1 + y'^2})$ führen müssen.

VII. Kapitel.

Aufsuchung von Merkmalen zur Unterscheidung der partikulären oder singulären Natur eines Integrales einer Differentialgleichung.

§ 1. Beziehungen des EULERschen Multiplikators zu den singulären Lösungen.[3])

Das Bestreben der Verfasser aller direkt nach Lagrange erscheinenden Arbeiten über die singulären Lösungen liegt in der Aufsuchung von Merkmalen, durch welche man die singulären Lösungen von den partikulären Integralen unterscheiden könnte. Dabei interessierte man sich ganz besonders für die Frage: Woher kommen eigentlich die singulären Lösungen? Die Beantwortung derselben führte auf immerhin sehr geistreiche Untersuchungen, die jedoch direkt für die Theorie der singulären Lösungen in keiner Weise eine Förderung brachten. Legendre[4]), dessen Abhandlung von 1790 sonst nur wenig Neues für unseren Gegenstand brachte, regte dieselben durch folgende Aufgabe an, mit der sich auch Laplace beschäftigt hatte: Die Gleichung $xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ sollte so vorbereitet werden, daß die singuläre Lösung als algebraischer Faktor erscheint. Dazu genügt es nach Legendre $\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = u$ zu setzen, woraus

$$xdx + ydy = udu,$$

weil durch diese beiden Werte die vorgelegte Differentialgleichung sich in $udu - udy = 0$ ändert. Durch Weglassen des Faktors u wird sie dann $du - dy = 0$ und diese neue Gleichung wird nicht mehr durch $u = 0$ befriedigt werden, d. h. Legendre hat die Differentialgleichung so trans-

---

[1]) Painlevé (siehe Anm. 5, S. 355), p. 213 sagt: Der Begriff des singulären Integrales ist Leibniz nicht entgangen; diese Bemerkung dürfte also nicht ganz richtig sein. [2]) Lagrange [25], § 242; Oeuvres, Bd. 10, p. 253. [3]) Siehe bereits bei Condorcet, S. 340—341 und Laplace S. 346. [4]) Legendre [22], p. 226.

formiert, daß dieselbe keine singuläre Lösung mehr enthält. Durch dieses Beispiel wurde POISSON zur Verallgemeinerung dieser Hypothese mit bestimmter Form der Differentialgleichung angeregt.

POISSON hebt 1806 hervor, daß man sich nur dann überzeugen kann, ob man eine gefundene singuläre Lösung nicht auf das allgemeine Integral zurückführen kann, wenn dasselbe gegeben vorliegt. Da dies in den wenigsten Fällen eintritt, setzt POISSON in seinen Untersuchungen[1]) das allgemeine Integral der Differentialgleichung nicht voraus, sondern beschäftigt sich hauptsächlich mit der Differentialgleichung selbst, die er, von dem EULERschen Kriterium ausgehend, an LEGENDRES Gedankengang anschließend, so umzutransformieren weiß, daß dieselbe in zwei Faktoren zerfällt, von denen der algebraische Faktor, gleich Null gesetzt, die Gleichung der singulären Lösung darstellen muß, während nach Unterdrückung des betreffenden Faktors die transformierte Gleichung keine singuläre Lösung mehr besitzt. Andererseits gab POISSON durch eine passende Umkehrung die reziproke Regel, um eine vorgelegte Differentialgleichung so zu verwandeln, daß dieselbe eine beliebige singuläre Lösung in sich schließen muß. POISSON leitete sein Verfahren aus analytischen Betrachtungen ab, die wegen der Anwendung von Reihen, die divergent werden können, einigen Schwierigkeiten unterliegen, welche erst durch CAUCHY behoben wurden.[2]) Es sei nur kurz erwähnt, daß BOOLE[3]) in POISSONS Beweis der zitierten Regel das wesentlich findet, daß die transformierte Form $\frac{dz}{dx} = Z \cdot \psi(x, z)$ ist, in welcher $\psi(x, z)$ weder verschwindet noch unendlich wird, wenn $z = 0$ die singuläre Lösung ist, während die Funktion Z und $\int\limits_0^z \frac{dz}{Z}$ beide mit z verschwinden. In einem längeren Zusatz[4]) zu seiner Abhandlung versuchte POISSON eine geometrische Interpretation zu geben, aus der man ersehen sollte, wie man in eine Differentialgleichung eine singuläre Lösung einführen und verschwinden lassen kann. POISSON zeigt schließlich auch noch den Weg, den man gehen muß, um eine Transformation zu finden, welche eine noch unbekannte singuläre Lösung von der Differentialgleichung trennt. Es scheint übrigens, daß POISSON dieser Transformation von Differentialgleichungen zuviel Bedeutung im eventuellen Gebrauch in der Integralrechnung zugeschrieben hat, außerdem glaubte er fälschlicherweise, daß sie dazu geeignet wäre, großes und neues Licht auf die Natur der singulären Lösungen zu werfen.

---

[1]) POISSON [26]. [2]) POISSONS Untersuchungen sind kurz bei COURNOT [28], § 478—480 dargelegt. [3]) BOOLE [40b], p. 25. [4]) POISSON [26].

Lacroix[1]) scheint diese Poissonschen Untersuchungen als einen ganz neuen Vorschlag vorzubringen, worauf Cockle zuerst aufmerksam gemacht hat.[2]) Im Gegensatz zu Poisson, der die Differentialgleichungen durch geeignete Transformationen der variabeln Größen umgeändert hat, war schon 1799 von Lagrange die nämliche Aufgabe auf eine andere Art gelöst worden, indem dieser zeigte, daß man auch durch Differentiation die Zerlegung der Differentialgleichung in Faktoren bewerkstelligen kann, von denen der eine die singuläre Lösung darstellen soll. Houtain, der den Untersuchungen von Lagrange und Poisson in dieser Richtung mehr Gewicht und Aufmerksamkeit als sie verdienen entgegengebracht hat[3]), erklärt ausführlich in einer allgemeinen Bemerkung[4]) die Wirkungsweise der beiden Maßnahmen bei der Einführung und Unterdrückung der singulären Lösungen und leitet zwei Regeln[5]) zur Aufsuchung der singulären Lösungen ab. Cayley[6]) gibt 1858 die Erklärung, wie diese Faktoren entstanden gedacht werden können. Es sei die Gleichung des allgemeinen Integrales

$$c^m + Pc^{m-1} + Qc^{m-2} + \cdots = 0,$$

worin c die beliebige Konstante und $P, Q \ldots$ Funktionen von x, y sind. Die Differentialgleichung entsteht dann durch Elimination von c aus der vorhergehenden und der derivierten Gleichung

$$P'c^{m-1} + Q'c^{m-2} + \cdots = 0$$

und das Resultat mag durch $F(P, Q \cdots P', Q' \cdots) = 0$ dargestellt sein. Nimmt man nun die Zerlegung der algebraischen Gleichung in ihre linearen Faktoren an:

$$c^m + Pc^{m-1} + Qc^{m-2} + \cdots = (c + X)(c + Y)(c + Z) \cdots,$$

so hat man

$$\begin{aligned} P &= X + Y + Z + \cdots \\ Q &= XY + XZ + YZ + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} P' &= X' + Y' + Z' + \cdots \\ Q' &= X'Y + X'Z + \cdots = (Y + Z + \cdots)X' + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $F = 0$ kann nun durch Substitution dieser

---

1) Lacroix [23], p. 309. 2) Cockle [71], p. 160. 3) Houtain [36], p. 1021 bis 1049. 4) A. a. O., p. 1045. 5) A. a. O., p. 1047—1049; auch Boole beschäftigt sich mit diesen Problemen [40a], p. 177—180; [40b], p. 23—25. 6) Cayley [39].

Werte auf die Form $UX'Y'Z'\cdots = 0$ gebracht werden, worin U eine symmetrische Funktion von X, Y, $Z\cdots$ ist und deshalb nur eine Funktion der P, $Q\cdots$. $U = 0$ ist folglich die singuläre Lösung.

CAYLEY glaubt, daß dieses Absondern der singulären Lösung, und daher das Auftreten derselben, von einer eigentümlichen Beschaffenheit der Differentialgleichung abhängig ist, denn er sagt: Es ist zu bemerken, daß, wenn die Wurzeln X, Y, $Z\cdots$ ebenso wie die P, $Q\cdots$ rationale und ganze, Funktionen sind, die Differentialgleichung U als einen trennbaren, ganzen rationalen Faktor enthält, aber wenn die Wurzeln irrational sind, dann besitzt die Differentialgleichung diesen Faktor U nicht, sondern $UX'Y'Z'\cdots$ ist hier eine unzerlegbare ganze Funktion.

Auf Grund der Untersuchungen des Verhältnisses eines integrierenden, bezw. algebraischen Faktors einer Differentialgleichung zu der singulären Lösung derselben glaubt LACROIX[1]) die Unterscheidung von zwei Arten von singulären Lösungen machen zu müssen: Die einen sind nichts anderes als die Faktoren der vorgelegten Differentialgleichung, in welche dx und dy keineswegs eintreten, und daher Relationen zwischen x und y, welche die Differentialgleichung identisch befriedigen. Indem man z. B. den gemeinsamen Faktor der Funktionen M und N sucht, findet man die Lösung dieser ersten Art, die der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ genügt. Die zweite Art dieser singulären Lösungen scheint auch mit der Differentialgleichung selbst verbunden zu sein; aber es wird möglich sein, die Differentialgleichung so umzuformen, daß diese Lösung sich als ein Faktor abtrennt, wie POISSON und LAGRANGE gezeigt haben.

Umgekehrt hatte schon TREMBLEY[2]) fast gleichzeitig mit LEGENDRE die Kenntnis der singulären Lösungen benutzt, um den EULERschen Multiplikator zu bestimmen, und hat damit zum erstenmal eine Verwendung der singulären Lösungen im Gebiet der Analysis selbst gegeben.

TREMBLEY sucht von einer Differentialgleichung zuerst die singuläre Lösung und partikuläre Integrale, bildet aus denselben ein Produkt, dessen Faktoren er mit unbestimmten Koeffizienten ausstattet; den so erhaltenen Wert substituiert er in die vorgelegte Differentialgleichung, die dann bestimmte Relationen liefert, mit Hilfe deren die Exponenten der Koeffizienten zu bestimmen sind; auf diesem Wege gelangt er zu dem Integrationsfaktor selbst. Eines seiner Beispiele wird diese Regel klarer erscheinen lassen. Es sei die Differentialgleichung

$$ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder

---

1) LACROIX [23] § 635. 2) TREMBLEY [21].

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - n^2) - (xy \pm n\sqrt{x^2 + y^2 - n^2}) = 0$$

gegeben. Ohne Mühe erkennt man, daß $x^2 - n^2 = 0$ diese Gleichung befriedigt und $x^2 + y^2 - n^2 = 0$ als singuläre Lösung auftritt. Man setzt nun $z = (x^2 - n^2)^q(x^2 + y^2 - n^2)^p$. Der Wert von z wird in

$$M\frac{dz}{dy} - N\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0 \quad \left(\text{aus } \frac{d(zM)}{dy} - \frac{d(zN)}{dx} = 0\right)$$

substituiert und man erhält für $p = -\frac{1}{2}$, $q = -1$ den integrierenden Faktor

$$z = \frac{1}{(x^2 - n^2)\sqrt{x^2 + y^2 - n^2}}$$

der Differentialgleichung.

Trembley gibt im Anschluß an solche Untersuchungen eine Regel, um a posteriori singuläre Lösungen zu finden; dieselbe möge gleich an der Hand des vorausgehenden Beispiels dargelegt werden. Der Wert eines partikulären Integrales wird mit unbestimmten Koeffizienten und Exponenten versehen: $y = A(x^2 - n^2)^r$. Dieser Wert in die gegebene Gleichung substituiert, gibt mit alleiniger Beachtung des negativen Zeichens:

$$2Arx(x^2 - n^2)^r - Ax(x^2 - n^2)^r + n\sqrt{A^2(x^2 - n^2)^{2r} + x^2 - n^2} = 0.$$

Um diese Gleichung identisch, d. h. unabhängig von $x^2 - n^2$ zu machen, setzt Trembley $2r = 1$, nach Division mit $\sqrt{x^2 - n^2}$ bleibt $\sqrt{A^2 + 1} = 0$ zurück. Da aber auch nach der Hypothese $A = \frac{y}{\sqrt{x^2 - n^2}}$, so erhält man aus $A^2 + 1 = 0$ die Gleichung $x^2 + y^2 - n^2 = 0$ als gesuchte singuläre Lösung. Wenn der Faktor nicht algebraisch ist, so muß Trembley sein Verfahren etwas umändern, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.[1])

§ 2. CAUCHYS Kriterien.

Außerhalb der chronologischen Reihenfolge wollen wir nun die beachtenswerten Beiträge Cauchys[2]) für unsere Theorie darlegen, die wir durch Vermittlung Moignos kennen gelernt haben; denn die Ziele, die Cauchy

[1]) In dieser Periode finden wir eine Arbeit von Lémaire [27], die sich darauf beschränkt, die von Euler bis Poisson gewonnenen Resultate zusammenzufassen, ohne jedoch wesentlich neue Gesichtspunkte zu enthalten. Houtain [36], p. 977 erwähnt Lémaires Abhandlung und zitiert nur ein Urteil von de Cuyper, Professor an der Univ. Lüttich, da er sich dieselbe nicht verschaffen konnte. Ein Exemplar findet sich in der Univ.-Bibl. von Gand. [2]) Cauchy [30] Leç. 29.

in bezug auf die singulären Lösungen verfolgte, müssen mit den Bestrebungen POISSONS in eine Reihe gestellt werden. EULER, LAPLACE, LAGRANGE und dann vorzugsweise POISSON haben sich nacheinander mit der Untersuchung der Merkmale der singulären Lösungen beschäftigt, vermöge welcher man sie unmittelbar aus der gegebenen Differentialgleichung ohne alle Integration ableiten kann. Insbesondere haben sie zu beweisen versucht, daß das eigentümliche Merkmal der singulären Lösungen darin bestehe, den Differentialkoeffizienten $\frac{dy'}{dy}$ Null, unendlich oder unbestimmt zu machen. Diese Eigenschaft ist jedoch nach CAUCHY nicht so allgemein, und zwar wurde CAUCHY zu dieser Ansicht geführt, weil die bis dahin bekannten Beweise von Reihenentwicklungen abhängig gemacht wurden, deren Konvergenz durch nichts bewiesen war und folglich diese Beweise nicht die nötige Strenge besaßen, die man verlangen mußte. CAUCHY, der eigentliche Begründer der Theorie der Konvergenzkriterien unendlicher Reihen, war mit Hilfe derselben zu einer strengen Definition des Charakters der singulären Lösungen und zu einer scharfen Trennung derselben von den partikulären Integralen gelangt.

CAUCHY zeigte, daß das LAPLACEsche Kriterium notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz der singulären Lösungen sei, weshalb er noch einige Ergänzungsregeln angeben mußte. Dazu mußte er neue Mittel zur Unterscheidung der beiden Arten von Integralen ausfindig machen und zwar beziehen sich alle auf den Fall, bei welchem das allgemeine Integral nicht bekannt ist. Seine neuen Lehrsätze sind die folgenden:

I. Um zu entscheiden, ob ein Wert $y = F(x)$ ein partikuläres oder singuläres Integral der Differentialgleichung $dy = f(x, y)dx$ ist, braucht man nur zu untersuchen, ob $z = 0$ ein partikuläres oder singuläres Integral der Differentialgleichung $dz = \{f[x, F(x) + z] \cdot f[x, F(x)]\}dx$ ist.[1])

II. Es seien α und β zwei unendlich kleine Größen, wovon die zweite so gewählt ist, daß die Funktion $f(x, y)$ zwischen den Grenzen $y = \alpha$, $y = \beta$ stets dasselbe Zeichen behält; wenn dann der Wert $y = 0$ der Differentialgleichung $dy = f(x, y)dx$ als singuläres Integral genügt, so ist das zwischen denselben Grenzen in Beziehung auf die Veränderliche y genommene bestimmte Integral

$$\int^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)}$$

selbst eine unendlich kleine Größe.[2])

In diesem Integral ist x als Konstante anzusehen, es ist auch leicht

---

[1]) a. a. O. p. 445. [2]) a. a. O. p. 447.

ersichtlich, daß dieses von Cauchy gegebene Theorem zu den Gleichungen

$$\int_0^u \frac{du}{f(x, u)} = 0, \qquad \int_0^u \frac{du}{f(y, u)} = 0$$

führen kann, die das Endresultat des Booleschen Kriteriums darstellen. Wenn man mit der Differentialgleichung in x und z vom 1. Theorem ebenso verfährt, wie mit derjenigen in x und y vom 2. Theorem, so folgt:

III. Um zu entscheiden, ob der Wert $y = F(x)$ der Differentialgleichung $dy = f(x, y)dx$ als singuläres oder partikuläres Integral genügt, braucht man nur zu untersuchen, ob das bestimmte Integral

$$\int_\alpha^\beta \frac{dz}{f[x, F(x) + z] - f[x, F(x)]}$$

eine unendlich kleine Größe ist oder nicht, indem x als Konstante betrachtet wird und α, β zwei unendlich kleine Grenzen von z bezeichnen, zwischen welchen die unter dem Integralzeichen stehende Funktion ihr Vorzeichen nicht ändert.[1])

Während das Eulersche und Laplacesche Kriterium sich nur als notwendige Bedingungen erzeigen, gibt das zuletzt zitierte von Cauchy auch eine hinreichende Bedingung. De Morgan bemerkt 1854[2]), das 3. Theorem von Cauchy „is a beautiful instance of the discriminating power of the process of integration and I (De Morgan) cannot help looking upon it as one of the most remarkable accessions of the century to the theory of differential equations“. Boole[3]) weist 1859 an der Differentialgleichung $y' = y(\log y)^2$ nach, daß Cauchys Regel[4]) bestimmt gewesen zu sein scheint, entgegengesetzt dem allgemeinen Geist, der Cauchys Schriften durchzieht, die Betrachtung von imaginären Werten auszuschließen. Durch Vermittlung

---

[1]) a. a. O. p. 453. [2]) De Morgan [35] p. 523. [3]) Boole [40a] p. 177.

[4]) Prix [70] gibt 1876 für das Cauchysche Kriterium einen strengen Beweis, transformiert hierauf die Integralbedingung in die folgende

$$\lim \frac{y - F(x)}{f(x, y) - f(x, (Fx))} = 0$$

für $y = F(x)$, aus der er dann unmittelbar das Laplacesche Kriterium ableiten konnte. Bezüglich der Voraussetzungen, unter denen das Laplacesche Kriterium nach Prix ungültig wird, bemerkt Hamburger (F. d. M. 1876 p. 184), daß dieselben nicht vollständig richtig sind, da die neue Prixsche Bedingungsgleichung, aus der das Kriterium abgeleitet wird, durch die unkontrollierbare Beschaffenheit der bei der Transformation eingeführten Größen zwar notwendig, aber nicht hinreichend für das Stattfinden des Cauchyschen Kriteriums geworden ist.

von HOÜEL haben wir ferner erfahren, daß BLANCHET 1846 wieder neue Merkmale zur Unterscheidung von partikulären und singulären Integralen entdeckte, deren eingehende Diskussion in LINDEBERGS Arbeit zu finden ist.[1])

§ 3. Über das Zusammenfallen der Enveloppe mit einer partikulären Integralkurve.

Bei CAUCHY finden wir zum erstenmal auf den Umstand hingewiesen, daß der Fall eintreten könne, in welchem die Einhüllende selbst einen Teil des Systems der Integralkurven bildet; man hat das bemerkenswerte Beispiel einer Lösung, welche den doppelten Charakter eines singulären und partikulären Integrales besitzt. CAUCHY zeigte, daß die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 8y^2 - 4xy\,\frac{dy}{dx}\text{[2])},$$

die von manchen Autoren „LAGRANGEsche Gleichung" genannt wird, das allgemeine Integral $y = C\,(x + C)^2$ besitzt. Aus

$$\frac{dF}{dC} = (x + C)^2 + 2(x + C)\,C = 0$$

folgt nun

$$C = -\,x, \qquad C = -\,\frac{x}{3}.$$

Substituiert man den ersten Wert in die Gleichung des allgemeinen Integrales, so erhält man das partikuläre Integral $y = 0$, welches auch dem Nullwert der Konstante entspricht; $y = 0$ kann als Grenzfall einer Parabel angesehen werden (Fig. 5). Da aber diese Gerade sämtliche Integralkurven berührt, so kann man sie auch als singuläre Lösung betrachten. Die eigentliche singuläre Lösung ist jedoch die kubische Parabel

$$y = -\,\frac{4}{27}\,x^3,$$

die mit Hilfe des zweiten Wertes von C erhalten wird.

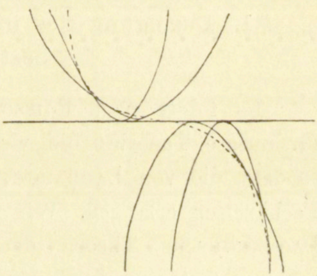

Fig. 5.

SERRET[3]) zieht im Anschluß an die Besprechung des CAUCHYschen Beispiels die allgemeine Folgerung, daß nur bei

---

[1]) HOÜEL-BLANCHET [31]; vgl. LINDEBERG [63] p. 28—29. [2]) CAUCHY [30], p. 377; diese Gleichung wurde sehr bald ein sehr beliebtes Beispiel in der Theorie der singulären Lösungen; wir finden sie z. B. bei HOUTAIN [36], GLAISHER [77], p. 11, SERRET [111]. An der Hand dieser Differentialgleichung beweisen die Richtigkeit ihrer Darlegungen BOOLE [40a], p. 151; 171—173; C. SCHMIDT [80], PAGE [103], HAMBURGER [97], siehe auch FORSYTH [114], p. 264 bis 265. [3]) SERRET [111], 1885, Bd. 3, p. 26.

einem Kurvensystem, welches die Konstante C mindestens in der dritten Potenz erhält, welches also die Ebene mindestens dreifach überdeckt, dieser Fall eintreten kann. Bei der Gleichung des Kurvensystems einer Differentialgleichung mit gleichen Eigenschaften, die Cournot[1]) gegeben hatte, finden wir aber die Konstante nicht in der von Serret geforderten Potenz auftreten. Die Cauchysche Gleichung ist ein spezieller Fall der allgemeinen Differentialgleichung, für welche die Schar der partikulären Kurven durch die Formel

$$(C - g(x, y))^2 + f(x, y) \cdot h(C, x, y) = 0$$

von Schmidt[2]) dargestellt wird, wo $f(x, y)$ gleichzeitig eine partikuläre Kurve mit dem Parameter Null und die Enveloppe der Kurvenschar definiert. Hamburger[3]) hat dann 1893 das Auftreten von Lösungen, die sich gleichzeitig durch ihre singuläre und partikuläre Beschaffenheit auszeichnen, eingehend theoretisch untersucht.

VIII. Kapitel.

Erste Untersuchung der geometrischen Natur der Diskriminantengleichung.

§ 1. Darlegung des in der Theorie der singulären Lösungen bestehenden Paradoxons.

Es folgte nach Poisson zunächst ein Stillstand in den Forschungen für unsere Theorie; die vielen bisher veröffentlichten Untersuchungen, besonders die von Lagrange, mußten erst eine weitere Verbreitung in den Fachkreisen erlangen. Wir finden deshalb die allerdings noch unvollkommene Lagrangesche Theorie der singulären Lösungen in den nächsten Jahrzehnten fast ausschließlich nur in Lehrbüchern der Integralrechnung, wie z. B. in denjenigen von Duhamel, Navier, Caraffa, Cournot, Moigno, Hymers und Gregory, ferner noch in geometrischen Werken, z. B. bei Littrow und Brandes. In jenen Darlegungen dürfte allmählich der Widerspruch, der in den bis dahin bekannten Methoden zur Aufsuchung der singulären Lösungen liegt, zum Vorschein gekommen sein; die Versuche, denselben aufzudecken, hatten eine überaus große Anzahl von Abhandlungen zur Folge. Im folgenden möge das Leitmotiv der meisten von nun an

---

1) Cournot [28], § 520. 2) Schmidt [80]. 3) Hamburger, siehe Seite 396.

erscheinenden Arbeiten, d. i. das Paradoxon, das man in der Theorie der singulären Lösungen sah, zu geben versucht werden.

Man hatte sich in der Frage der singulären Lösungen nach der LAGRANGEschen Methode auf den Standpunkt der Enveloppentheorie gestellt. Nach einer ersten Definition der Enveloppe von Integralkurven, die zur der Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

gehören, müssen nach LAGRANGE in allen ihren Punkten zwei zusammenfallende Tangentenrichtungen vorhanden sein; die Bedingung dafür ist:

$$\frac{df}{dy'} = 0. \tag{2}$$

Durch Elimination von y' aus (1) und (2) wird

$$\varphi(x, y) = 0$$

erhalten, welche die Enveloppenkurve darstellt. Nach einer zweiten Definition der Enveloppe als einer Schar von Kurven müssen alle ihre Punkte durch das äußerste Verschneiden je zweier aufeinanderfolgender Kurven entstanden sein. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{dF}{dC} = 0, \tag{4}$$

wenn

$$F(x, y, C) = 0 \tag{3}$$

die Schar der Integralkurven, die zur Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

gehört, darstellt. Das Eliminationsprodukt

$$\psi(x, y) = 0$$

aus diesen beiden Gleichungen (3) und (4) stellt dann wieder die Enveloppe dar.

Jedesmal, wenn nun die Differentialgleichung $f = 0$ als Integral eine singuläre Lösung besitzt und die Gleichung derselben aus der Differentialgleichung erhalten wurde, muß auch die Integralgleichung $F = 0$, die zu $f = 0$ gehört, zur Gleichung einer Enveloppe führen. Geht man aber andererseits von einer beliebigen Gleichung einer Kurvenschar aus und erhält aus derselben eine Gleichung, die der Bedingung

$$\frac{dF}{dC} = 0$$

Genüge leistet, so müßte man annehmen, daß die Differentialgleichung, die zu dieser Gleichung der Kurvenschar gehört, immer die Gleichung einer singulären Lösung liefern sollte, da doch, wie vorausgesetzt wurde, das Eliminationsprodukt

$$\varphi(x, y) = 0$$

aus

$$f = 0\,, \quad \frac{df}{dy'} = 0$$

unbedingt eine Kurve darstellen muß, bei der in allen ihren Punkten zwei zusammenfallende Tangentenrichtungen vorhanden sein müssen.

Diese Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht, wie man sehr bald erkannt hatte; man bemerkte, daß die beiden Aufgaben: die singuläre Lösung einer Differentialgleichung und die Enveloppe einer durch ihre Gleichung gegebenen Schar von Kurven zu finden, sich nicht decken. Es mußten zwar stets nach beiden Methoden Gebilde geliefert werden, die, vom geometrischen Standpunkt aus betrachtet, in allen ihren Punkten zusammenfallende Tangentenrichtungen besaßen, die jedoch keineswegs durch konsekutives Schneiden je zweier Kurven einer bestimmten Kurvenschar entstanden sein mußten. Lange Zeit dauerte es, bis man sich zu dieser letzteren Erkenntnis durchgerungen hatte; die Vorbereitung und ersten Ansätze finden wir bei RAABE, COURNOT und DE MORGAN, die Veranlassung zur energischen Inangriffnahme der Frage in einer Kontroverse zwischen DARBOUX und CATALAN im Jahre 1870, und ihre endgültige Erledigung bei HAMBURGER.

§ 2. Kurze Andeutungen von Versuchen, die LAGRANGEschen Regeln zu vervollkommnen.

Wie unsicher man durch die LAGRANGEschen Regeln geworden war, zeigen manche Stellen aus Abhandlungen über singuläre Lösungen. CATALAN[1]) hält 1845 den Weg zur Aufsuchung der singulären Lösungen aus den Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0$$

und

$$\frac{dF}{dC} = 0$$

wohl für richtig, dagegen nicht die Verwendung von

$$\frac{dF}{dy} = \infty$$

als zweite Gleichung an Stelle von

---

[1]) CATALAN [32].

$$\frac{dF}{dC} = 0,$$

woraus nach seiner Ansicht nicht die Enveloppe der durch $F = 0$ dargestellten Kurven resultieren könne, sondern nur der Ort derjenigen Punkte der einzelnen Kurven, für welche die Tangenten zu der x-Achse parallel sind. CAUCHY[1]) hält die beiden Methoden für gleichwertig, trotzdem er an einem Beispiel zeigt, daß die Bedingung

$$\frac{dF}{dy} = \infty$$

zu keiner singulären Lösung führt. Die Behauptungen CATALANS geben RAABE[2]) 1848 zu weiteren Erörterungen Anlaß. RAABE sieht auch in der Unzuverlässigkeit der gewöhnlichen Regel aus den Gleichungen

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{dC} = 0$$

eine unzweideutige Tatsache; die aus diesen Gleichungen erhaltenen Eliminationsresultate geben nach seiner Ansicht bisweilen Relationen unter den Variablen, die ebenfalls weder von singulärer noch partikulärer Beschaffenheit, und folglich dem fraglichen Falle ganz fremd sind. RAABE erklärt jedoch ausdrücklich, daß solche Fälle nur als Ausnahmen gegenüber dem Auftreten von Enveloppen anzusehen sind, während COURNOT[3]) bereits 1842 zur entgegengesetzten Ansicht gekommen war.

RAABE gibt deshalb dem 1. Theorem von LAGRANGE eine Fassung, die SCHMIDT[4]) wieder ausgesprochen hat: „Aus der Gleichung $F(x, y, C) = 0$," sagte RAABE, „stelle man den Ausdruck

$$\frac{dy}{dC} = -\frac{dF(x, y, C)}{dC} : \frac{dF(x, y, C)}{dy}$$

her und verbinde diese erste Gleichung durch Elimination von C mit jeder Relation, die dem Ausdruck für

$$\frac{dy}{dC}$$

den Nullwert gibt. Die so unter den Variabeln gefundenen Relationen sind entschieden Integralauflösungen der betreffenden Differentialgleichungen und zwar singulärer Art." RAABE legt auch dar, daß diese Regel fehlschlägt, wenn $\frac{dF}{dC}$ gleichzeitig mit $\frac{dF}{dy}$ unendlich wird. STRAUCH[5]) hatte 1865 wieder die Gleichung

---

[1]) CAUCHY [30], § 154. [2]) RAABE [33]. [3]) Siehe S. 378. [4]) SCHMIDT [80].
[5]) STRAUCH [42], Bd. 1, p. 25.

$$\frac{dF}{dC} : \frac{dF}{dy} = 0$$

vorgeschlagen. Ehe man jedoch aus dieser Gleichung ein Ergebnis herausziehen dürfe, müsse man zuvor den Ausdruck

$$\frac{dF}{dC} : \frac{dF}{dy}$$

auf seine einfachste Gestalt bringen. Namentlich müsse man im Zähler und Nenner alle gemeinschaftlichen Faktoren gegeneinander aufheben. Gewöhnlich versäumte man es, fährt Strauch fort, diese Gleichung herzustellen, und untersuchte die beiden Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dC} \quad \text{und} \quad \frac{dF}{dy}$$

einzeln. Folge dieses Versehens ist, daß man dann aus solchen Faktoren, welche man gegeneinander hätte aufheben sollen, ebenfalls Resultate zog, die aber unbrauchbar sind und auf Widersprüche und Irrtümer führen.

Das Bestreben, Lagranges Theoreme durch befriedigendere zu ersetzen, mag auch die Veranlassung zu einer Abhandlung des belgischen Mathematikers Timmermans[1]) 1842 gegeben haben. Timmermans hatte nämlich in der Theorie der singulären Lösungen von Lagrange ein Hindernis (inconvénient) erblickt, daß die verschiedenen Kriterien, die als analytische Resultate die Existenz der singulären Lösungen anzeigen, doch nicht sehen lassen, wie diese Lösungen mit der Zusammensetzung der Differentialgleichungen verbunden sind. Anstatt das Auftreten der singulären Lösungen aus der Anwendung einer Formel zu schöpfen, will es Timmermans als geeigneter erscheinen, Kennzeichen ihrer Existenz aus der Zusammensetzung der Differentialgleichung zu suchen und die bereits früher gefundenen analytischen Bedingungen als Folgerungen dieser Zusammensetzung zu betrachten. Von diesem Gesichtspunkte aus führt Timmermans seine Untersuchungen durch und kommt auf folgende, der Kürze wegen zusammengefaßte Regeln: Um die singulären Löungen aus der Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$[2]) oder aus deren Integralgleichung $F(x, y, C) = 0$[3]) zu erhalten, löst man die erste Gleichung in bezug auf y', die zweite nach C auf. Wenn die entsprechenden Werte für y' und C keine Ausdrücke unter Wurzelzeichen enthalten, so gibt es auch keine singulären Lösungen. Im entgegengesetzten Fall wird man die unter den Wurzelzeichen stehenden Funktionen gleich Null setzen; wenn diese Werte der Differentialgleichung genügen, ohne gleichzeitig das allgemeine Integral selbst zu befriedigen, so sind sie die gesuchten singulären Lösungen.

---

[1]) Timmermans [29]. [2]) a. a. O. p. 14. [3]) a. a. O. p. 23.

Es hat übrigens bereits LAGRANGE[1]) erkannt, daß in dem Ausdruck für y' der Wert der singulären Lösung unter dem Wurzelzeichen stehen kann, wenn er es auch nicht ausdrücklich hervorgehoben hat. HOUTAIN[2]) glaubte, daß TIMMERMANS durch diese Bemerkung von LAGRANGE veranlaßt worden war, seine neue Theorie auszuarbeiten. DARBOUX[3]) ist später geradezu zur entgegengesetzten Anschauung von der TIMMERMANS' gelangt, daß nämlich der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck im allgemeinen keine singuläre Lösung der Differentialgleichung darstellt.

TIMMERMANS behauptet auch, daß alle Funktionen, welche außerhalb des Wurzelzeichens im Ausdruck für y' stehen, gleich Null gesetzt, stets partikuläre Lösungen sind, wenn sie der Differentialgleichung genügen; diese Regel ist richtig, wie schon PREDELLA[4]) bemerkte, während der ganze Satz als nicht streng anzusehen ist. HOUTAIN[5]) hat in seiner Arbeit die Theorie von TIMMERMANS in größerer Ausführlichkeit behandelt, als es TIMMERMANS in seiner Abhandlung selbst getan hat. Es scheint daher, daß HOUTAIN diese Theorie für viel wichtiger für die Aufklärung der damals noch dunklen Theorie der singulären Lösungen gehalten hat, als die späteren Mathematiker, die sie gar nicht weiter beachteten; in der so umfangreichen Literatur finden TIMMERMANS' Untersuchungen nur zweimal und auch da nur beiläufig Erwähnung. Wenn wir also die Worte bei HOUTAIN lesen: Les méthodes de LAGRANGE et de TIMMERMANS constituent ensemble une théorie parfaite de la détermination des solutions singulières, so müssen wir wohl sagen, daß HOUTAIN die Untersuchungen von LAGRANGE, die unzweifelhaft zu dessen geistreichsten Schöpfungen gezählt werden können, mit den, wenn auch immerhin interessanten, so doch keineswegs fundamentalen Sätzen von TIMMERMANS mit Unrecht auf eine Stufe gestellt hat.

HOUTAIN, der anscheinend ein Schüler von TIMMERMANS gewesen ist, hat in einer vorzüglichen Arbeit die bis dahin bekannten Methoden einer Diskussion unterworfen; zwei neue Beobachtungen finden wir bei ihm: HOUTAIN hatte, wie später auch CAYLEY, die Behauptung aufgestellt, daß das Auftreten von singulären Lösungen von einer bestimmten Beschaffenheit der Gleichung des allgemeinen Integrales abhängig ist; er ist der Ansicht[6]), daß die singulären Lösungen nicht vorkommen können, wenn das allgemeine Integral der Differentialgleichung transzendente Funktionen von x und y in sich schließt; ferner sagt HOUTAIN sehr richtig, daß nach den meisten Abhandlungen die Gleichungen

$$\frac{dF(x, y, C)}{dx} = \infty, \qquad \frac{dF(x, y, C)}{dy} = \infty$$

[1]) LAGRANGE [25] § 201. [2]) HOUTAIN [36] p. 1070. [3]) DARBOUX [48].
[4]) PREDELLA [98]. [5]) HOUTAIN [36] p. 1021—24, 1068—72, 1075—82, 1105—13.
[6]) HOUTAIN [36] p. 999.

niemals anwendbar zu sein scheinen, wenn das allgemeine Integral nicht in bezug auf die Konstante C gelöst ist; HOUTAINS Ausführungen und zahlreiche Beispiele zeigen das Gegenteil.

Den singulären Lösungen der Differentialgleichungen schenkte auch BOOLE in seinem Treatise of diff. equations große Aufmerksamkeit, so daß das Kapitel, das diesem Gegenstand gewidmet ist, als eines der wertvollsten und wichtigsten seines Werkes anzusehen ist. BOOLE[1]) suchte eine gemeinsame Eigenschaft für alle Lösungen, welche für die Gleichung

$$\frac{dp}{dy} = \infty \ (p = y')$$

erfüllt sind. (Das gleiche geschieht auch für $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right) = \infty$.) Er leitet zunächst die Gleichung

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \log \frac{dy}{dC}$$

ab, die einen Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung $p = f(x, y)$ und ihrem allgemeinen Integrale $y = f(x, C)$ darstellt. Durch Berücksichtigung der für die singulären Lösungen bestehenden Bedingung

$$\frac{dy}{dC} = 0 \text{ }^{2})$$

findet er

$$\frac{d}{dx} \log \frac{dy}{dC} = \infty.$$

Diese Gleichung besteht, wenn sie entweder unabhängig von C ist, oder C einen bestimmten Wert besitzt, und zwar müßte im letzteren Fall C eine Funktion von x oder konstant, aber nicht absolut unabhängig von x sein. Jede Lösung, welche die vorstehende Bedingungsgleichung erfüllt, ist nun nach BOOLE nicht im allgemeinen Integral enthalten.

§ 3. Entdeckung des Spitzenortes.

COURNOT hatte schon 1842 bei einer Untersuchung der Konstruktion von Differentialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe als Erster die Entdeckung gemacht, daß die Diskriminantengleichung einer Differentialgleichung einen Ort von Spitzen darstellen kann.

Er diskutierte die Gleichung[3])

---

[1]) BOOLE [40a] p. 154. [2]) Siehe über $\frac{dy}{dC} = 0$ S. 373. [3]) COURNOT [28] § 517.

(1) $$y'^2x^2 - 2y'x(y-p) + y^2 + x^2 = 0\,,$$

die gleichbedeutend mit den beiden, jede für sich konstruierbaren Gleichungen

(2) $$y' = \frac{y - p \pm \sqrt{p(p-2y) - x^2}}{x}$$

ist. Hierin nimmt y' jedesmal einen imaginären Wert an, wenn die Veränderlichen x, y der Ungleichheit $p(p-2y) - x^2 < 0$ genügen. Die Kurve

(3) $$p(p-2y) - x^2 = 0$$

begrenzt folglich auf der Ebene x, y die Region, in welcher sich die durch die Gleichung (1) charakterisierten Kurven ausdehnen können. Die beiden Werte von y' werden für die auf der Kurve (3) liegenden Punkte einander gleich, d. h. die Kurve ist der geometrische Ort der Punkte, worin sich je zwei der resp. durch die Gleichung (2) charakterisierten Kurvenzweige vereinigen, was auf zwei verschiedene Arten stattfinden kann.

Im allgemeinen ist, bemerkt Cournot, die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kurvenzweige (2) für die auf der Kurve (3) liegenden Punkte von der Tangente der Kurve (3) in denselben Punkten verschieden, was namentlich bei dem von Cournot gewählten Beispiel der Fall ist. Der aus der Gleichung (2) abgeleitete Wert von y' reduziert sich für die auf der Kurve (3) liegenden Punkte auf

$$y' = \frac{y-p}{x}\,,$$

während die Differentiation der Gleichung (3)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{p}$$

gibt, und wenn dieser Wert von $\frac{dy}{dx}$ dem vorhin für y' gefundenen gleich sein sollte, so müßte man die Relation

$$\frac{y-p}{x} = -\frac{x}{p} \quad \text{oder} \quad p(p-y) - x^2 = 0$$

haben, welche nicht gleichzeitig mit der Gleichung (3) bestehen kann, ausgenommen für $y = 0$.

In solchen Fällen vereinigen sich die Kurvenzweige (2) auf der Kurve (3), indem sie einen Rückkehrpunkt bilden, und diese Grenzkurve ist der geometrische Ort aller Rückkehrpunkte der Kurven, zu welchen die Differentialgleichung (1) gehört.

Boussinesq machte 1890 darauf aufmerksam, daß Cournot, und nicht, wie man bis dahin angenommen hatte, DE MORGAN die Priorität dieser Entdeckung zukäme[1]). COURNOT ist somit das Verdienst zuzuschreiben, zuerst mit den geometrischen Untersuchungen der Diskriminantengleichung begonnen zu haben. Auch hatte er schon vorausgesehen, daß das Auftreten einer Kurve, die aus Spitzenpunkten der Integralkurven besteht, im allgemeinen vorkommt und daher das Auftreten einer Enveloppe der Integralkurven nur als Ausnahmefall anzusehen ist. Später sollten gerade über diese Tatsache, die also von COURNOT schon richtig entschieden worden war, noch lange Diskussionen stattfinden. Leider war das von COURNOT neu gefundene Resultat in den mathematischen Kreisen nicht bekannt geworden, oder es hat nicht das richtige Verständnis gefunden und ist daher zunächst ohne weiteren Einfluß auf die Fortentwicklung der Theorie der singulären Lösungen geblieben.

Von neuem entdeckt wurde das Auftreten eines Spitzenortes als Eliminationsprodukt aus der Differentialgleichung und ihrer Derivierten zehn Jahre später durch DE MORGAN[2]) und von da ab wurde diese Tatsache auch in weiteren Kreisen bekannt. DE MORGAN, der den LAGRANGEschen Resultaten nur ein „eingeschränktes Vertrauen" (qualified confidence[3])) entgegenbrachte, hat wichtiges Licht auf die Natur der Bedingungen

$$\frac{dp}{dy} = \infty, \qquad \frac{dp}{dx} = \infty \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

geworfen, als er bemerkte, daß beim Auftreten dieser Gleichungen ein Ort von Spitzen der Integralkurven vorhanden sein kann, wenn singuläre Lösungen nicht erhalten werden.[4]) Dem Beweise des Satzes DE MORGANS, nach welchem die Elimination von y' aus

$$f(xyy') = 0, \qquad \frac{df}{dy'} = 0$$

einen Ort von Rückkehrpunkten liefert, wenn keine singuläre Lösung auftritt, mangelt es in mehreren Punkten an Klarheit, was MANSION[5]) verbesserte, als er direkt die Beziehungen prüfte, die zwischen den beiden Problemen existieren: 1) die Enveloppe der durch $F(x, y, C) = 0$ dargestellten Kurven zu suchen, 2) den Ort der Punkte zu suchen, wo die Krümmung der Kurven unendlich ist. DE MORGAN hat gezeigt, daß irgend eine Relation zwischen x und y, welche der LAPLACEschen Bedingung genügt, die Differentialgleichung befriedigt, gleichgültig, ob der von der Dif-

[1]) Cours d'analyse inf. et calc intégr. II, 2, p. 233. [2]) DE MORGAN [34] p. 113. [3]) Nach BOOLE [40a] p. 76. [4]) DE MORGAN [35] § 6. Beweis auch bei BOOLE [40a] p. 181, [40b] p. 36—37. [5]) MANSION [54] p. 160—163.

ferentialgleichung abgeleitete Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wird oder nicht. Man ist nicht oft dem Fall begegnet, sagte Mansion, wo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

obwohl er am häufigsten vorkommt, weil die klassischen Beispiele[1]) fast alle auf ein allgemeines Integral führen, welches eine Kurve zweiten Grades, oder eine andere Kurve darstellt, die nur im Unendlichen einen Punkt besitzt, wo die Krümmung unendlich ist.

IX. Kapitel.

Ausführliche geometrische Interpretation der beiden Diskriminantengleichungen.

§ 1. Meinungsverschiedenheit zwischen DARBOUX und CATALAN über das allgemeine Auftreten des Spitzenortes.

Mit Darboux, Clebsch, Cayley und Casorati dürfen wir den Anfang einer neuen Periode der Theorie der singulären Lösungen bezeichnen. Die bisher besprochenen Untersuchungen zeigen deutlich, wie sehr man bemüht war, Licht und Klarheit in unsere Theorie zu bringen. Mit rein analytischen Betrachtungen war man aber nicht vorwärts gekommen; der Weg, den nun die Forscher einzuschlagen hatten, war daher die geometrische Interpretation der Diskriminantengleichungen, die einerseits aus den Differentialgleichungen, andererseits aus den allgemeinen Integralen derselben hergeleitet waren. Cournot hatte bereits den Anfang gemacht, die Diskriminantengleichung zu untersuchen, und kam auf das erwähnte Resultat. Darboux, besonders aber Cayley und Casorati geben nun eingehende Untersuchungen über die geometrischen Örter, welche die Gleichungen der beiden Diskriminanten darstellen können, und untersuchen, welche Faktoren derselben als die wahren singulären Lösungen zu betrachten sind.

Die neue Periode wurde mit einer Kontroverse zwischen Darboux und Catalan eingeleitet und von jenem Zeitpunkt an hatte man die Frage als eine der schwierigsten erkannt. Darboux gab durch einen am 20. Juni

---

[1]) Sehr viele finden sich bei Houtain [36] zusammengestellt.

1870 veröffentlichten Aufsatz[1]) über die Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer algebraischen Fläche zu einer Diskussion Anlaß, die weit über den vorgeschlagenen Gegenstand selbst hinausging. Angenommen, es sei eine Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ gegeben — DARBOUX nimmt eine solche vom 2. Grade an — und man will den Ort der Punkte suchen, für welche zwei Werte von y' gleich werden, so ist nach DARBOUX im allgemeinen der Ort dieser Punkte nicht mehr die Enveloppe des Kurvensystems, das die Differentialgleichung darstellt, sondern vielmehr ein Ort von Rückkehrpunkten für die partikulären Integralkurven.

Diese Bemerkung konnte zuerst seltsam erscheinen, denn alle die klassischen Beispiele von singulären Lösungen schienen ihr zu widersprechen. Nicht lange ließ deshalb die Kritik, die jene aufsehenerregende Behauptung herausforderte, auf sich warten. Bereits am 4. Juli 1870 wendet sich CATALAN[2]) gegen DARBOUX' Annahme. Es ist wohl wahr, sagt CATALAN, daß die betreffende Gleichung nicht immer die Enveloppe der Kurven darstellt; aber geht DARBOUX nicht ein wenig weit, wenn er behauptet, daß das Auftreten einer Enveloppe genau das Gegenteil von dem ist, was eintritt? CATALAN zeigte aber nur durch Beispiele, daß der allgemeine Satz von DARBOUX Ausnahmen unterworfen sei; doch mit solchen Mitteln konnte er denselben keineswegs entkräften; er hätte den Beweis liefern müssen, daß DARBOUX' Behauptung nicht allgemeine Gültigkeit besitzt; und dies hat CATALAN nicht getan. WORKMAN[3]) glaubt, daß CATALANS Kritik durch die Verwirrung entstanden ist, die durch DARBOUX' nicht klar genug gehaltene Unterscheidung zwischen integrierbaren und nicht-integrierbaren Differentialgleichungen[4]) hervorgerufen wurde. DARBOUX' Note bezieht sich auf nicht-integrierbare, CATALANS Antwort auf integrierbare Gleichungen.

DARBOUX blieb die Antwort an CATALAN nicht schuldig. Noch im nämlichen Jahre gab er eine Entgegnung[5]), in der er ausführte, daß solche Fälle seine Theorie nicht beeinträchtigen können. Ferner gab er einen Beweis für seine aufgestellte Behauptung und versprach gleichzeitig eine eingehende Untersuchung über den vorliegenden Gegenstand, die er auch 1873 folgen ließ.

§ 2. CLEBSCH.

Unterdessen war eine im Nachlasse von CLEBSCH[6]) gefundene Ab-

---

[1]) DARBOUX [48]. [2]) CATALAN [49]. [3]) WORKMAN [85] p. 175. [4]) Eine Differentialgleichung ist integrierbar oder nicht, d. h. wenn sie selbst rational, total vom n. Grade in $\frac{dy}{dx}$, ein Integral zuläßt oder nicht, das auch rational, vollständig und von n. Grade in einer beliebigen Konstante C ist. [5]) DARBOUX [50]. [6]) CLEBSCH [52].

handlung 1872 veröffentlicht worden, die Darboux' angekündigte Untersuchungen sichtlich beeinflußt hat. In Clebschs Arbeit war nämlich der Grundgedanke ausgesprochen, der den scheinbaren Widerspruch des in Lagranges Theoremen liegenden Paradoxons lösen sollte.

Clebsch bringt eine algebraische Gleichung

$$f(x\,y\,p) = 0 \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

mit Hilfe der Legendreschen Transformation auf die Form

$$F(xy; -p; xp - y) = 0.$$

Dann ist immer die doppelthomogene Form $F(\xi, \eta; u, v)$[1], gleich Null gesetzt, die Gleichung eines Konnexes, dessen Konnexkurven durch die Gleichung $f = 0$ gegeben werden. Solange nun über die Koeffizienten des Konnexes, sagt Clebsch[2], besondere Festsetzungen nicht gemacht werden, hat die Differentialgleichung keine singuläre Lösung. Es sind aber diejenigen Kurven leicht aufzustellen, von welchen die eine der Ort der Rückkehrpunkte der Integralkurven ist, während die andere von den Wendetangenten derselben umhüllt wird. In die singuläre Lösung der einen oder anderen Form der Differentialgleichung verwandeln sich diese Kurven, sobald die Richtung der Rückkehrtangente überall mit der Tangente der Kurven der Rückkehrpunkte zusammenfällt bezw. der von den Wendetangenten umhüllte Ort mit dem Ort der Wendepunkte selbst identisch ist[3].

So kurz auch die Bemerkungen von Clebsch über die innere Natur der singulären Lösungen sind, so tiefgreifend sind auch die Gedanken, die in denselben ausgesprochen sind. Erst durch die Vergleichung der von Clebsch in so einfachen Worten dargelegten geometrischen Beziehungen der Örter, welche die Diskriminantengleichung darstellen kann, mit den Resultaten von Darboux, Cayley und Casorati können wir das Ergebnis, zu dem Clebsch gelangt war, voll und ganz würdigen.

§ 3. DARBOUX.

Darboux legte seine 1870 angekündigte Abhandlung[4] am 23. November 1872 der Société Philomatique vor; eine kurze Inhaltsangabe hat

---

[1] $\xi = \frac{x_1}{x_3}$, $\eta = \frac{x_2}{x_3}$; $u = \frac{u_1}{u_3}$, $v = \frac{u_2}{u_3}$. [2] Clebsch [52], p. 442; Ann. 6, p. 211. [3] Lindemann [67] und Wasilieff [74] gaben elementare Auseinandersetzungen der auf die Theorie der singulären Lösungen sich beziehenden Untersuchungen von Clebsch. [4] Darboux [55].

Darboux selbst im Institut Nouveau ser. 6. am 5. Februar 1873 gegeben und damit nur einige Tage nach Cayleys Arbeit[1]) (Januar 1873) seine Resultate den mathematischen Kreisen angezeigt. Darboux[2]) sprach sich eingehend über den Ursprung des Irrtums aus, der so lange in der Theorie der singulären Lösungen angedauert hatte. Die Mathematiker hatten nach Darboux' Auffassung bisher alle mit Unrecht die Ansicht gehabt, daß eine Differentialgleichung erster Ordnung immer ein Integral $F(x, y, C) = 0$ zuläßt, da man die Differentialgleichung durch Elimination von Konstanten aus der endlichen Gleichung und ihrer Derivierten bildet. Dagegen behauptet Darboux, daß die Untersuchungen von Cauchy und Briot-Bouquet über die Existenz von Integralen aussagen, daß es eine unendliche Anzahl von allgemeinen Integralen gibt; doch würden dieselben nicht beweisen, daß diese Integrale von der Form $F(x, y, C) = 0$ sind, wo F die Eigenschaften einer analytischen Funktion besitzt. Er selbst nimmt daher bei seinen Untersuchungen nichts über die Herkunft der Differentialgleichungen an und glaubt dann die Frage dadurch gelöst zu haben, daß er den Satz, jede Differentialgleichung von der ersten Ordnung habe ein Integral $F(x, y, C) = 0$, als eine unbegründete Annahme zurückweist[3]), was sich zunächst, wie Hamburger[4]) bemerkt, nicht mit dem Cauchyschen Existenzbeweis von Integralen einer Differentialgleichung mit beliebigen Anfangswerten in Einklang bringen läßt. Weiterhin hat Hamburger gezeigt, daß die Zuverlässigkeit der fraglichen Form der Integralgleichung auch aus der Existenz der allgemeinen Integrale partieller Differentialgleichungen hervorgehe, die zunächst von Cauchy, dann von Frau von Kowalevsky[5]) und schließlich von Darboux[6]) selbst festgestellt wurde.

Von fundamentaler Bedeutung für unsere Theorie war die von Darboux aufgeworfene Frage geworden[7]), was im allgemeinen eintrete, wenn die Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung keinen besonderen Relationen genügen. Es erschien seltsam, daß eine allgemeine Differentialgleichung einer Kurvenschar entspricht, die der besonderen Eigenschaft genügt, keine Enveloppe zu besitzen, während einer beliebigen Kurvenschar, auf die man die Enveloppentheorie anwenden kann, eine besondere Differentialgleichung entspricht, welche eine singuläre Lösung haben wird. Lindemann[8]) faßte diese Tatsache in den folgenden Satz: „Die Konstanten in einer Differentialgleichung erster Ordnung müssen besonderen Bedingungen genügen, wenn die Integralkurven eine eigentliche Umhüllungskurve haben

---

[1]) Cayley [53]. [2]) Darboux [55] p. 167. [3]) Darboux [55], p. 167. [4]) Hamburger [97], p. 206. [5]) Compt. Rend. 1875, Bd. 80, p. 101. 137. [6]) Crelle Journ. f. Math. 1875, Bd. 80, p. 1—32. [7]) Darboux [48]. [8]) Lindemann [67], p. 1033.

sollen; andernfalls bestehen zwischen den Konstanten der Integralgleichung solche Relationen, wenn statt dessen ein Ort von Spitzen auftritt. Welcher von beiden Fällen vorkommt, hängt sonach davon ab, ob man die Differentialgleichung oder die Integralgleichung allgemein voraussetzt."

Darboux hielt es deshalb für unumgänglich notwendig, daß man die Theorie der singulären Lösungen in zwei getrennte Teile scheiden muß, der eine dem Gebiete der Differentialrechnung zugehörig, in welchem man die Differentialgleichungen prüft, die durch Elimination von Konstanten erhalten werden; der andere der Integralrechnung angehörend, bei welchem man, ohne etwas über den Ursprung der Differentialgleichung angenommen zu haben, gezwungen ist, sich an allgemeine Hypothesen zu halten und die Existenz eines Integrales nicht vorauszusetzen. Diese Unterscheidung[1]) hat Darboux mit Clebsch gemeinsam, der sie mit folgenden Worten einführt[2]): „Ein solcher Unterschied in der Behandlungsweise, motiviert durch verschiedene Definition dessen, was man allgemein nennt, tritt in der Auffassung von Theorien nicht nur bei geometrischen Gebilden sehr häufig auf und wird nicht immer hinlänglich beobachtet. So sind die allgemeinen Eigenschaften der Differentialgleichungen verschieden, je nachdem man die Differentialgleichungen oder die Integralgleichungen durch allgemeine Funktionen gegeben denkt." Clebsch bemerkt, daß diese merkwürdige Tatsache nichts anderes als die der Punkt- und Linienkoordinaten ist; deshalb hat auch Darboux eine Differentialgleichung als ein Fortschreitungsgesetz sowohl für Punktkoordinaten, als auch für Linienkoordinaten betrachtet.

Darboux gab 1873 zwei ausführliche Beweise seiner fundamentalen Sätze, von denen der eine mit Hilfe der reziproken Polaren durchgeführt wurde, während der andere elementar zu nennen ist. Er ging im ersten Teil seiner Arbeit von der Voraussetzung aus, daß die reziproken Polaren auch einer Differentialgleichung erster Ordnung genügen, wenn man dieselben von allen Kurven $\varphi(x, y, C) = 0$ nimmt, welche die Differentialgleichung $\psi(x, y, y') = 0$ erfüllen. Die Folge davon wird sein, daß jeder Eigenschaft der Kurvenintegrale, die man als Ort von Punkten betrachtet, nach dem Prinzipe der Dualität eine Eigenschaft bezüglich dieser Kurven, als Enveloppe von Geraden aufgefaßt, entsprechen wird. Diese Symmetrie hält Darboux für geeignet, Licht in die Frage der singulären Lösungen zu bringen. Er kam dann zu folgenden Ergebnissen: „Wenn eine Differentialgleichung eine oder mehrere singuläre Lösungen zuläßt, so ist es notwendig, daß die folgenden Örter übereinstimmen oder Teile gemeinsam haben:

a) Der Ort der Punkte, für welchen die Werte von $\frac{dy}{dx}$ gleich werden;

---

[1]) Darboux [55], p. 167. [2]) Clebsch [52], p. 449.

b) Der Ort der Inflexionspunkte des Kurvensystems, zu welchem die Differentialgleichung gehört. Der übereinstimmende Teil der Örter ist die singuläre Lösung; wenn sie nicht übereinstimmen, so erhält man den Ort der Rückkehrpunkte und andererseits einen Ort von Inflexionspunkten."

Daran anschließend, gab er folgendes Schema zur Aufsuchung einer singulären Lösung aus der Differentialgleichung:

1. Man suche den Ort A, Resultat der Elimination von y' aus

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{df}{dy'} = 0.$$

$A = 0$ ist die Gleichung dieses Ortes.

2. Man suche den Ort B, resultierend aus den Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0.$$

Es sei $B = 0$ die Gleichung dieses Ortes.

Wenn die beiden Kurven A und B keinen Teil gemeinsam haben, so gibt es keine singuläre Lösung; die erstere enthält Rückkehrpunkte, die zweite Inflexionspunkte. Wenn die beiden Kurven A und B eine oder mehrere Teilkurven C, $C' \cdots$ besitzen, dann enthalten die Örter A und B noch resp. die Rückkehrpunkte und Inflexionspunkte. Aber die Gleichungen $C = 0$, $C' = 0 \cdots$ werden noch nicht notwendig singuläre Lösungen geben. In der Tat sind für alle Punkte der Kurve C die beiden Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{df}{dy'} = 0$$

und auch

$$f = 0, \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0$$

durch den nämlichen Wert befriedigt. Aber der Wert für y' der gemeinsamen Wurzel für das erste Gleichungspaar kann auch unter Umständen keine Wurzel für das zweite Gleichungspaar darstellen. Die Bedingung, daß $C = 0$ eine singuläre Lösung, ist nun die, daß die drei Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{df}{dy'} = 0, \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0$$

durch einen g e m e i n s a m e n Wert von y' für alle Punkte von C befriedigt sind. Wenn dies eintritt, ist noch zu prüfen, ob nicht eine der Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$$

identisch bewahrheitet wird; erst dann ist man sicher, daß $C = 0$ eine singuläre Lösung ist.

Wenn wir auch schon bei LAGRANGE[1]) die dritte Bedingungsgleichung zur Aufsuchung der singulären Lösungen vorfinden, so sehen wir doch erst bei DARBOUX den geometrischen Grund ihrer notwendigen Existenz.

§ 4. CAYLEY.

Fast gleichzeitig mit DARBOUX hat CAYLEY seine hervorragenden Resultate auf unserem Gebiete bekannt gemacht. CAYLEY hatte bereits 1866 in einer kurzen Note[2]) ähnliche Betrachtungen wie schon früher[3]) über Differentialgleichungen angestellt; er untersuchte die Form der Differentialgleichung, welcher die Gleichung $U^\alpha V^\beta W^\gamma \cdots = 0$ (zusammengesetzt aus den unzerlegbaren Kurvengleichungen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0 \cdots$) Genüge leistet. Diese Arbeit diente CAYLEY 1872[4]) als Grundlage; er definierte in dieser neuen Abhandlung zunächst eine Funktion $F(x, y, c_1, c_2 \cdots c_m)$ als eine rationale, ganze, unzerlegbare algebraische Funktion von x, y und den Parametern c_1, $c_2 \cdots c_m$, welche durch $m - 1$ algebraische Relationen verbunden sein sollen. Die Gleichung

$$F(x, y, c_1, c_2 \cdots c_m) = 0$$

stellt dann ein System von ebenen Kurven dar, so daß die Diskriminante von

$$F(x, y, c_1, c_2 \cdots c_m) = 0$$

mit Bezug auf die Parameter c gebildet, aus einer Anzahl mehrfach zählender Funktionen besteht, welche die Örter der Enveloppe, Knotenpunkte und Spitzen des Kurvensystems darstellen. Bezeichnet $\psi(x, y)$ die Diskriminante der Kurvenschar, so ist:

$$\psi(x, y) = EK^2S^3 = 0,$$

wo $E = 0$ die Gleichung der Enveloppe, $K = 0$ der Ort der Knotenpunkte (Doppelpunkte), $S = 0$ der Ort der Spitzen darstellt. Die Kurve $\psi = 0$ kann also Örter von Doppelpunkten von Integralkurven zweiten Grades und solche von Rückkehrpunkten von Integralkurven dritten Grades enthalten.

Wenn nun andererseits die Differentialgleichung durch $f(x, y, y') = 0$ gegeben ist und die Diskriminante $\varphi(x, y)$ von f in bezug auf y' gebildet wird, dann besteht sie aus den Örtern der Enveloppe, Spitzen und Berührungspunkten (der sich berührenden Kurven) und zwar in der Form

$$\varphi(x, y) = ESB^2 = 0,$$

---

[1]) Siehe S. 355. [2]) CAYLEY [43]. [3]) Vgl. S. 364—365. [4]) CAYLEY [53].

wo E und S die bereits erwähnte Bedeutung besitzen, $B = 0$ Ort der Berührungspunkte darstellt. $B = 0$ resultiert aus Integralkurven zweiten Grades.

In einem Artikel von SALMONS Higher Plane Curves[1]) zeigte CAYLEY, wie diese Resultate erwartet werden mögen; HILL[2]) gab dazu eine analytische Untersuchung, die äquivalent zu der geometrischen von CAYLEY ist.

Hat man nach CAYLEY die Diskriminante auf die Form $P^\lambda Q^\mu R^\nu$ gebracht, wo P, Q, R voneinander verschiedene Polynome in x, y bezeichnen, so genügt es, wie HAMBURGER[3]) 1893 nachwies, je eine Wurzel jeder der irreduktiblen Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

in welche die Diskriminantenkurve zerfällt, zu untersuchen, um den besonderen Charakter der Kurven

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

zu erkennen: ob sie Integralkurven, und im besonderen, ob sie Enveloppen oder partikuläre Kurven sind.

Fünf Jahre später veröffentlichte CAYLEY eine weitere Arbeit[4]) über singuläre Lösungen, in der er ausführlich den Fall betrachtete, wo die Differentialgleichung $Lp^2 + 2Mp + N = 0$ (L, M, N rat. Fkt. von x, y) im allgemeinen keine singuläre Lösung hat, d. h. wo es im allgemeinen keine Enveloppe der zur Differentialgleichung $(LMN)(p\,1)^2 = 0$[5]) gehörigen Kurvenschar $(PQR)(c\,1)^2 = 0$ gibt. CAYLEY zeigte hierauf, wie ein System von algebraischen Kurven $\Phi = 0$ (Φ ist rat. Fkt. von x, y und von einem beliebigen Parameter abhängig) immer eine Enveloppe hat, welche singuläre Lösung der zu $\Phi = 0$ gehörigen Differentialgleichung wird. Wenn also eine Differentialgleichung keine singuläre Lösung besitzt, schließt nun CAYLEY, so müßte man daraus folgern, daß sie im allgemeinen kein Integral zuläßt, welches ein System algebraischer Kurven darstellt. Bei der Beantwortung der damals aktuellen Frage, aus welchem Grunde eine Differentialgleichung im allgemeinen eine Kurvenschar definiert, die keine Enveloppe besitzt, nimmt also CAYLEY irrtümlich an, daß die Gleichung des allgemeinen Integrales gewöhnlich transzendenter Natur ist und ein Kurvensystem, das durch eine transzendente Gleichung dargestellt wird, keine Enveloppe besitzen kann. Wie wir später bei HAMBURGERS Resultaten sehen werden, hat die Existenz der Enveloppen oder singulärer Lösungen

[1]) Nr. 90. 2. Ed., vgl. auch CAYLEY [73] p. 24. [2]) HILL [91] p. 573
[3]) HAMBURGER [97] p. 219—220; siehe auch FORSYTH [114] p. 262. [4]) CAYLEY [73].
[5]) CAYLEYS Bezeichnungsweise.

mit der transzendenten oder algebraischen Natur der allgemeinen Integralgleichung gar nichts zu tun. Chrystall[1]) legte 1897 klar die Ursachen dar, durch welche Cayley zu seinen irrtümlichen Ansichten gelangt war. Merkwürdigerweise gibt auch Cayley selbst in seiner Abhandlung ein Beispiel,[2]) das seiner Regel, daß nur ein System algebraischer Kurven eine Enveloppe besitzen kann, widerspricht. Er zeigt, daß die Differentialgleichung

$$dy^2 - (1 - y^2)\,dx^2 = 0$$

kein algebraisches Integral zuläßt, sondern ein System von transzendenten Kurven definiert, und trotzdem eine Enveloppe $y = \pm 1$ besitzt; doch hilft er sich über diesen Widerspruch gegen seine Annahme, die das Paradoxon in Lagranges Methoden beseitigen sollte, hinweg: er nennt das erwähnte Kurvensystem ein quasi-algebraisches. Durch die Einführung einer neuen Bezeichnung für bestimmte Gleichungen kann man jedoch keineswegs das Paradoxon als gehoben annehmen.

§ 5. CASORATI.

Fast zu gleicher Zeit mit Darboux und Cayley veröffentlichte Casorati unabhängig von ihnen seine Untersuchungen in der Theorie der singulären Lösungen, in denen er auch den algebraisch-geometrischen Begriff derselben darzulegen suchte. Leider waren Casorati die wichtigen Resultate Darboux' von 1873 unbekannt geblieben[3]), und so kam es wohl, daß seine Untersuchungen stets von der Voraussetzung ausgingen, daß die Differentialgleichung und deren allgemeines Integral als bekannt angenommen sei. Im Gegensatz dazu hatte Darboux, wie wir bereits wissen, die Frage der singulären Lösungen nur unter der Voraussetzung behandelt, daß die Differentialgleichung allein bekannt sei, was notwendigerweise einen sehr großen Unterschied in der ganzen Behandlung des Problems bedeuten mußte. Von den fünf Abhandlungen Casoratis, die in den Zeitraum von 1874—1881 fallen, sind die erste, die dritte und die letzte von Wichtigkeit, da die in denselben niedergelegten Resultate neue Aufschlüsse über die geometrische Bedeutung der beiden Diskriminanten und deren Zusammenhang ergeben hatten; besonders große Sorgfalt widmete Casorati dem Studium des letzteren Punktes.

In seiner ersten[4]) interessanten Note von 1874 stellte er die Haupt-

---

[1]) Chrystall [106]. [2]) Cayley [73] p. 24. Ex.; Collect. Papers Bd. 10, p. 20.
[3]) Anm. von Darboux. Darb. Bull. des Sc. Math. 1879, Bd. 14, p. 59.
[4]) Casorati [61].

sätze für eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades auf und kam auf eine Formel für die Zerlegung der Diskriminante, die bereits 1870 von Catalan[1]) entdeckt und von Darboux[2]) weiter behandelt worden war. Catalan hatte nämlich die Beziehung

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2$$

aufgestellt, und damit einen Zusammenhang der aus der Differentialgleichung

$$Ay'^2 + By' + C = 0$$

und der zugehörigen Integralgleichung

$$c^2 + Pc + Q = 0$$

erhaltenen Diskriminanten

$$B^2 - 4AC$$

und

$$P^2 - 4Q$$

gegeben. Die erstere dieser beiden Formen zerlegt sich in zwei Faktoren, von welchen der eine, gleich Null gesetzt, die Enveloppe, der andere den Ort der Berührungspunkte definiert. Im Anschluß an diesen Casorati schon seit 1869 bekannten Zusammenhang[3]) legte derselbe in der erwähnten Note[4]) die Beziehung der Diskriminante

$$G = B^2 - AC$$

der Differentialgleichung

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 = 0$$

und der Diskriminante

$$g = b^2 - ac$$

der aus der Differentialgleichung erhaltenen Integralgleichung

$$aw^2 + 2bw + c = 0\,^{5)}$$

(a, b, c Fkt. von x, y; w ist die Konstante) in der Form dar

$$G = 4gk^2, \tag{1}$$

wo k die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{dx} & \frac{db}{dx} & \frac{dc}{dx} \\ \frac{da}{dy} & \frac{db}{dy} & \frac{dc}{dy} \end{vmatrix}$$

bedeutet.

---

[1]) Catalan [49]. [2]) Darboux [55], p. 176. [3]) Casorati [66]. [4]) Casorati [61]. [5]) Bezeichnungsweise von Casorati.

Enthalten die Funktionen A, B, C den gemeinschaftlichen Faktor ϑ, also

$$A = \vartheta\alpha, \quad B = \vartheta\beta, \quad C = \vartheta\gamma,$$

so wird Gleichung (1)

$$\vartheta^2\sigma = 4gk^2, \tag{2}$$

worin $\sigma = \beta^2 - \alpha\gamma$ bedeutet. Auch Hamburger[1]) kam 1893 auf den Zusammenhang der beiden Diskriminanten zu sprechen. Die Größe k, von der die wichtigen Gleichungen (1) und (2) abhängen, war noch der Gegenstand eingehender Untersuchungen von Casorati selbst und von Torelli. So wies ersterer 1875 darauf hin[2]), daß die Formel eine Verallgemeinerung für die Differentialgleichungen höheren Grades zuläßt, deren Darstellung er 1881[3]) auch wirklich ausführte, nachdem er schon 1876[4]) eine Methode zur Auffindung der Form der Determinante für Gleichungen 3. und 4. Grades angegeben hatte. Torelli gab 1885[5]) einen analytischen Beweis von Casoratis Formel und gleichzeitig eine Verallgemeinerung der Größe k, von der Workman[6]) kompliziertere Ausdrücke veröffentlichte als Torelli schon gefunden hatte. Dieser aber nahm 1891[7]) die Untersuchung der Formel wieder auf und gelangte auf geometrischem Wege zu der früher gefundenen Relation (1).

Weiter benützte Casorati 1876[8]) die beiden Formeln (1) und (2) zu einer ausführlichen Diskussion der beiden Diskriminanten, wobei er sich nur auf Gleichungen zweiten Grades beschränkte. Nach dem Grade der Vielfachheit der in den Diskriminanten enthaltenen Faktoren unterschied er sieben Fälle; es seien

$$g = p \cdot q \cdot r^{2\mu - 1} \cdot s^{2\nu - 1} \cdot x^{2\xi} \cdot y^0 \cdot z^{2\zeta}$$
$$\sigma = p \cdot q^{2\lambda + 1} \cdot r \cdot s^{2\varrho + 1} \cdot x^0 \cdot y^{2\eta} \cdot z^{2\omega}.$$

Dann geben in diesen Produkten, wie bei Cayley, diejenigen Primfaktoren, die in beiden Diskriminanten einfach und gleichzeitig enthalten sind, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Enveloppe oder der singulären Lösung. Die Diskussion der Eigenschaften der übrigen Faktoren dürfte im Vergleich mit denjenigen von Cayley von Interesse sein und soll deshalb im folgenden angeführt werden:

1. Die Faktoren p geben, und zwar nur diese allein, die singulären Lösungen; sie sind weder in ϑ, noch in k (Gl. 2) als Faktoren enthalten.

2. Die Faktoren q geben immer partikuläre Integrale, die in k, nicht in ϑ vorkommen.

---

[1]) Hamburger [97], p. 239. [2]) Casorati [65]. [3]) Casorati [76]. [4]) Casorati [66]. [5]) Torelli [82]. [6]) Workman [85]. [7]) Torelli [95]. [8]) Casorati [66].

3. Die Faktoren r geben niemals Integrale der Differentialgleichung (Ort der Rückkehrpunkte); sie sind in k und ϑ enthalten.

4. Die Faktoren s geben partikuläre oder keine Integrale (im letzteren Falle stellen sie Spitzenörter dar); sie sind in ϑ und k enthalten.

5. Die Faktoren x geben niemals Lösungen (Örter der Knotenpunkte, Doppelpunkte); sie sind in k und ϑ enthalten.

6. Die Faktoren y geben keine Lösungen der Differentialgleichung (Örter der Berührungspunkte) oder partikuläre Integrale; sie sind in ϑ und k enthalten.

7. Die Faktoren z geben partikuläre Integrale oder keine Lösungen der Differentialgleichung; sie sind in ϑ und k enthalten.

§ 6. Arbeiten über die DARBOUX- und CAYLEYschen Theoreme.

Eine Reihe von Abhandlungen beschäftigen sich noch mit den von Darboux, Cayley und Casorati aufgestellten Sätzen. Glaisher[1]), Hill[2]) und Johnson[3]) geben Zusammenfassungen von Cayleys Arbeiten, und besonders die beiden ersteren viele Beispiele für die einzelnen Fälle der Örter, welche die Faktoren der Diskriminanten darstellen können. Kapteyn[4]) und Picard[5]) liefern neue analytische Beweise für die von Darboux und Cayley gegebenen Sätze. Workman[6]) veröffentlicht 1882 eine kleinere Note, in der er einen Satz behandelt, welcher die Relation zwischen den Berührungsörtern und der Integralgleichung gibt, und kommt auf diesem Wege wieder zu den nämlichen Resultaten, die von Cayley ohne Beweise gegeben waren. Die Grundlage dieser Arbeit ist jedoch nicht ganz einwandfrei, wie Workman[7]) 1886 selbst nachweist. Dabei unterzieht er die Resultate von Darboux, Cayley und Casorati einer ausführlichen Kritik, besonders aber die sieben Fälle von Casorati, die er als eine „unvollständige Anordnung höherer Singularitäten" bezeichnet. Er übersieht dabei, daß Casorati ausschließlich quadratische Scharen von Kurven behandelte. Auch hält Workman die von Casorati angenommenen Exponenten der Primfaktoren für unnötig unbestimmt. Mit Erfolg aber dehnt er hierauf die Theorie auch auf höhere Singularitäten aus, nachdem Cayley dieselbe für gewöhnliche Singularitäten abgeleitet hatte. Hill[8]) betrachtet 1888 einen speziellen Fall der von Cayley allgemein gehaltenen Betrachtungen; dabei gelingt es ihm, durch Übertragung gewisser Theoreme, die Henrici[9]) in seiner Abhandlung: On certain Formulae concerning the Theory of Discriminants

[1]) Glaisher [77]. [2]) Hill [91] p. 596. [3]) Johnson [79]; von dems. Verf. [87], [88]. [4]) Kapteyn [90]. [5]) Picard. [84]. [6]) Workman [78]. [7]) Workman [85]. [8]) Hill [91]. [9]) Proceed of Lond. Math. Soc. Bd. 2.

veröffentlicht hatte, neue Ableitungen von CAYLEYS Resultaten zu geben. PREDELLA[1]) hatte 1895 einen neuen geometrischen Beweis der von CAYLEY dargelegten und von KAPTEYN analytisch bewiesenen Probleme gefunden. Dann setzte er unter Berücksichtigung aller bisher von CASORATI und WORKMAN erzielten Resultate das Studium der beiden Diskriminanten und die Unterscheidung ihrer verschiedenen Faktoren nach CASORATIS Methode fort, und stellte Untersuchungen über eine spezielle, vereinfachte Form der Differentialgleichungen dritten Grades an, die jedoch MADDISON[2]) als nicht hinreichend bezeichnete, weshalb sie selbst allgemein für Differentialgleichungen dritten und vierten Grades die höheren Singularitäten prüfte.

Welches Aufsehen die Entdeckungen von DARBOUX, CAYLEY und CASORATI in den mathematischen Kreisen hervorgerufen haben, beweisen diese zahlreichen Abhandlungen, die als unmittelbare Folge jener anzusehen sind. Eigentlich hätte man glauben sollen, daß durch die neuen Resultate, die einen völligen Umschwung in der Auffassung der Frage der singulären Lösungen bedeuten, eine endgültige Erledigung der Theorie herbeigeführt worden sei. Es herrschte jedoch keineswegs allgemeine Befriedigung über die Art der Erklärungen, die das bekannte Paradoxon gefunden hatte; man zog deren Richtigkeit bisweilen sogar ernsthaft in Zweifel, wie wir dies schon in einer Kritik CATALANS gegen DARBOUX' Behauptungen von 1870 gesehen haben. Auch MANSION[3]) konnte sich lange nicht mit DARBOUX' Resultaten einverstanden erklären; er hatte wie CATALAN eine Anzahl von Fällen vor Augen, in denen die betreffende Methode zu keinen exakten Resultaten führte. MANSION suchte deshalb nach einem Mittel, um eine unendliche Anzahl von Gleichungen aufzustellen, bei denen DARBOUX' Einwände gegen die gewöhnliche Regel der Aufsuchung der singulären Lösungen keine Berücksichtigung finden können, und kam dabei zu einer Auseinandersetzung ähnlich derjenigen, die HOUTAIN schon früher gemacht hatte. Weiter kritisierte MANSION die Bedingungsgleichungen, zu denen DARBOUX gelangt war, bezeichnete sie als fehlerhaft und schlug seinerseits folgende Gleichungssysteme vor, die zu singulären Lösungen führen sollten, wenn solche existieren:

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{df(x, y, y')}{dy'} : \frac{df(x, y, y')}{dy} = 0$$

und

$$f\left(x, y, \frac{1}{x'}\right) = 0, \qquad \frac{df\left(x, y, \frac{1}{x'}\right)}{dx'} : \frac{df\left(x, y, \frac{1}{x'}\right)}{dy} = 0.$$

DARBOUX erwiderte darauf, daß diese neuen Regeln sich nur auf einzelne Fälle anwenden lassen, wo die Funktion f ungenau bestimmt sei; höchstens

[1] PREDELLA [98]. [2]) MADDISON [101]. [3]) MANSION [54].

könne sie die Gleichung

$$y' = \infty$$

liefern, die aus

$$\frac{df}{dy'} = 0$$

nicht erhalten werden kann. Mansion[1]) wies jedoch, auf die letzte Behauptung von Darboux zurückkommend, 1875 nach, daß die von Darboux ausgesprochenen Ausnahmen in Wirklichkeit keine Ausnahmen sind, wenn die Linie im Unendlichen in Betracht gezogen wird.

Da Mansion auch der Meinung war, daß die beiden Fälle: das Auftreten einer Enveloppe und eines Spitzenortes dieselbe Ausdehnung besitzen, fertigte ihn 1873 Darboux[2]) kurz mit folgenden Worten ab; M. Mansion ne paraît pas avoir compris le raisonnement si simple que j'ai présenté au t. 71. des C. R. de l'Ac. d. Sc.[3])

X. Kapitel.

Funktionentheoretische Untersuchungen über singuläre Lösungen. Endgültige Erledigung der Theorie.

So große Fortschritte in der vor Darboux noch nicht völlig geklärten Theorie der singulären Lösungen über die Bedingungen ihres Auftretens gemacht worden waren, so dauerte es doch nicht lange, bis man zu rein analytischen Betrachtungen gegenüber den geometrischen zurückkam und sich mit Erfolg der funktionentheoretischen Untersuchungen bediente. Es waren auch noch weitere strittige Einwürfe gegen den Gebrauch einer vollständigen Lösung einer Differentialgleichung bei einer Untersuchung erhoben worden, die allgemein und streng sein sollte. Man sagte nämlich, es sei eine Umkehrung der natürlichen Ordnung einer Untersuchung, wenn man immer das Geforderte als die Bedingung setzt, welche eine Differentialgleichung erfüllen muß, damit eine Kurve — die nicht im eigentlichen Sinne im Integralkurvensystem enthalten ist, aber durch die Differentialgleichung selbst definiert wird — dieselbe befriedigt. Man kam aus diesem Grunde zur Ansicht, es müsse eine einwandfreie Methode der Theorie der singulären

[1]) Mansion [62]. [2]) Darboux [55] p. 158 Anm. 2. [3]) Mansion scheint vermutlich noch im gleichen Jahre 1873 eine Entgegnung in der Abhandlung [56] gegeben haben; der Verf. konnte sich jene Arbeit nicht verschaffen.

Lösungen zunächst unmittelbar auf die Differentialgleichung gegründet und jeder direkte und indirekte Gebrauch des Begriffes des allgemeinen Integrales vermieden werden. Außerdem war man durch die geometrische Theorie der Diskriminantengleichungen gezwungen, sich ausschließlich auf reelle Werte der Differentialgleichung zu beschränken, was bei den in der Theorie der Differentialgleichungen gemachten Fortschritten bald als ein Mißstand empfunden wurde. Während bei HAMBURGER noch die Einführung der analytischen Funktion durch die Potenzreihe im reellen Gebiet zu finden ist, hat schon FORSYTH die Diskussion der funktionalen Beziehungen der durch die Diskriminantengleichung (aus der Differentialgleichung erhalten) gegebenen uneingeschränkten, d. h. auch komplexen Werte zu den Integralfunktionen der Differentialgleichungen begonnen.

§ 1. SCHMIDT. FINE.

Von mehreren Mathematikern wurde erkannt, und zwar unabhängig voneinander, daß die Grundlagen einer sehr guten Methode, die zu einer allgemeinen Untersuchung der Bedingungen der Existenz der singulären Lösungen und deren Eigenschaften führen, in den fundamentalen Abhandlungen von BRIOT und BOUQUET vom Jahre 1856 niedergelegt worden waren. BRIOT und BOUQUET haben den Satz bewiesen[1]), daß die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dz} = f(u, z)$$

eine Lösung hat, welche für $z = z_0$ den Wert u_0 annimmt und die Entwicklung in eine nach ganzen positiven Potenzen von $u - u_0$, $z - z_0$ fortschreitende Reihe gestattet. Zu diesem Satz haben FUCHS und SCHMIDT[2]) 1884 gleichzeitig die Erweiterung gegeben, daß die erwähnte Lösung ein partikuläres Integral sein muß. Es gibt nämlich eine Potenzreihe

$$u - u_0 = P(z - z_0, C)$$

der beiden Variablen $z - z_0$ und C, welche für hinlänglich kleine Werte die Differentialgleichung befriedigt und für $C = 0$ in die genannte Lösung übergeht. Es blieb daher der BRIOT-BOUQUETsche Satz mit der Modifikation bestehen, daß der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dz} = f(u, z),$$

worin $f(u, z)$ in der Umgebung von $z = z_0$, $u = u_0$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $u - u_0$, $z - z_0$ fortschreitende Reihe darstellbar ist,

---

[1]) BRIOT-BOUQUET [38] p. 136—144. [2]) SCHMIDT [80].

nur ein einziges nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelbares partikuläres Integral u genügt, das für $z = z_0$ den Wert u_0 annimmt und zwar ein solches, das nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitet.

SCHMIDT schloß aus dem soeben zitierten Existenzsatz für die Lösungen einer Differentialgleichung, daß notwendigerweise unter den Gebilden, die man aus einer algebraischen Differentialgleichung ohne Kenntnis der allgemeinen Lösung erhält, sich die singulären Lösungen vorfinden müssen. Er untersuchte, da diese Gebilde jedoch im allgemeinen gar keine Lösungen sind, ihre Bedeutung und ihren Zusammenhang mit den partikulären Integralen und stellte fest, daß die singulären Lösungen nur solche Gebilde sein können, welche die Eigenschaften haben, daß in der Umgebung ihrer Stellen y' sich nicht regulär verhalten kann[1]), d. h. daß sie nicht mehr durch Potenzreihen dargestellt werden. Für die Erkenntnis der Diskriminantenkurve hatte SCHMIDT die verschiedenen Fälle berücksichtigt, in welchen die den verschiedenen Wurzeln entsprechenden Parameter der partikulären Kurven beim Durchgange durch die Diskriminantenkurve, wo mehrere Werte von y' zusammenfallen, ebenfalls einander gleich werden oder verschieden bleiben; er erkennt daher die Beschaffenheit der Diskriminantenkurve durch Bestimmung des Verhaltens der partikulären Kurven in der Umgebung ihrer einzelnen Stellen $(x_0 y_0)$. Man hat demgemäß alle Lösungen der Differentialgleichung, welche die Stelle $(x_0 y_0)$ enthalten und mehrfachen Wurzeln y' der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ entsprechen, zu untersuchen und nach SCHMIDT folgende Frage zu beantworten: Wie verhält sich bei den Stellen $(x_0 y_0)$ $y - y_0$, als Funktion von $x - x_0$ betrachtet, für hinreichend kleine Werte von $x - x_0$, oder in welche konvergente Reihe kann $y - y_0$ entwickelt werden? Nach einem Verfahren, das der NEWTON-CRAMERschen Regel zur Untersuchung algebraischer Kurven in der Umgebung singulärer Punkte nachgebildet ist, erforscht SCHMIDT die Differentialgleichung in bezug auf diese Frage. SCHMIDT hat dagegen über den Fall, in welchem das Verhalten der Umgebung der Stelle $(x_0 y_0)$ keine Lösung der Differentialgleichung zuläßt, keinen Aufschluß gegeben.

Aus SCHMIDTS Arbeit ist noch eine Darlegung des Überganges der Diskriminantenkurve in eine singuläre Lösung zu erwähnen. Die Diskriminantenkurve ist, wie BRIOT und BOUQUET[2]) gezeigt haben, der Ort singulärer Punkte der partikulären Kurven, wenn neben den Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{df}{dy'} = 0$$

---

[1]) Auch bei SERRET [111] p. 17—18 findet man einen Beweis, daß an keiner Stelle x, y, wo $f(x, y)$ regulär ist, eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ existieren kann. [2]) BRIOT-BOUQUET [38] p. 39.

die Gleichung

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}y'=0$$

nicht besteht. Tritt dieser Fall ein, so kann man durch stetige Veränderung von einem oder mehreren Koeffizienten der Differentialgleichung bewirken, daß

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}y'$$

gleich Null und die Diskriminantenkurve eine singuläre Lösung wird. Dann ändert sich plötzlich die Beschaffenheit der partikulären Kurven in der Nähe der Diskriminantenkurve; die singulären Punkte verschwinden und die Diskriminantenkurve wird singuläre Lösung. Solche Übergänge behandelte von Dyck eingehend in einer Vorlesung an der Technischen Hochschule zu München W.-S. 1904/1905 und zwar unter Zuhilfenahme seiner schon 1892 dargelegten Methode[1]), nach welcher die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definierten Kurvensysteme erforscht werden können. Es wird die einzelne Differentialgleichung durch Einführung eines Parameters als Glied einer Reihe von kontinuierlich ineinander übergehenden Differentialgleichungen betrachtet und die Änderung studiert, welche die Integralkurven durch eine stetige Variation der Differentialgleichung erleiden. Ein solcher Übergang wird beispielsweise bei Betrachtung der Clairautschen Gleichung besonders einfach und übersichtlich.

Auch der amerikanische Mathematiker Fine[2]) basierte seine Untersuchungen auf einen Satz, den Briot und Bouquet 1856 gegeben hatten. Fine — von der Tatsache ausgehend, daß die singulären Lösnngen Ausnahmelösungen sind gegenüber den Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, für welche der Cauchysche Existenzsatz gilt — nimmt an, daß in denjenigen Punkten der y'-Diskriminante, welche der Enveloppe angehören, die Entwicklung von y nach positiven Potenzen von x im allgemeinen divergent wird und so aufhört, eine Lösung der Differentialgleichung darzustellen. Die Annahme, die Fine hier ausspricht, ist jedoch nur auf ganze Potenzen beschränkt; auch zeigen die Resultate von Hamburger — wie dieser auch selbst darauf hinweist[3]) —, daß ihr allgemeine Gültigkeit nicht zukommt, denn es gibt in fast allen Punkten der aus der Differentialgleichung erhaltenen Diskriminante Entwicklungen nach gebrochenen Potenzen, welche sich als Lösungen der Differentialgleichung darstellen.

Fine weist zuerst nach, daß nach der von Bbiot und Bouquet[4]) aus-

[1]) von Dyck [94] 2. Mitt. [2]) Fine [92]. [3]) Hamburger [97] p. 208.
[4]) Briot-Bouquet [38] p. 114.

geführten Diskussion der Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

wobei

$$\left(\frac{df}{dy'}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\right)_0 \neq 0$$

vorausgesetzt wurde, der Ort der Spitzen und nicht der Enveloppe sich ergibt. Bei seiner weiteren Untersuchung geht Fine von dem Theorem von Briot und Bouquet aus, daß alle gewöhnlichen Lösungen einer Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$, welche durch einen gegebenen Punkt $(x_0 y_0)$ gehen und dort $y' - y_0'$ gemeinsam haben, durch geeignete Transformationen[1]) auf die Form $y = Vvx^m$ zurückzuführen sind; V sei in dieser Gleichung eine bestimmte Funktion von v und x, welche Größen durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dv}{dx}x = \Phi(v, x)$$

verbunden sind, worin Φ für $x = 0$, $v = 0$ verschwindet. Fine beweist, daß, falls die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ eine singuläre Lösung besitzt, unter den Funktionen V, die durch die Briot-Bouquetsche Methode bestimmt sind, eine sich vorfindet, welche den singulären Lösungen entsprechen wird, — aber daß dabei die Differentialgleichung zwischen v und x, welche zu jenem Werte von V gehört, in die Form

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{\psi(v, x)}{\psi(v, x)}\chi(v, x)$$

übergeht; letztere wird dann nur durch $\psi(v, x)$ befriedigt. Fine hielt dieses Resultat für geeignet, daraus das Verhältnis klarzulegen, in welchem die singuläre Lösung zur Differentialgleichung selbst steht, und will damit das Paradoxon durch folgendes Ergebnis seiner Aufklärung entgegenführen: Die singuläre Lösung ist ebenso wenig in der Differentialgleichung enthalten, als eine beliebige Funktion $\Phi(x, y) = 0$ in der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}\Phi(x, y) = \Phi(x, y)\varphi(x, y)$$

enthalten ist.[2]) Hamburger hält diese Folgerung nicht dem Sachverhalt entsprechend[3]); allerdings wäre $\Phi = 0$ keine Lösung, aber auch keine Enveloppe der durch die Differentialgleichung repräsentierten Kurvenschar.

§ 2. HAMBURGER.

Briot und Bouquet[4]) haben ferner gezeigt, daß die Werte der Variablen, welche die Diskriminante einer Differentialgleichung nicht zum Verschwinden

[1]) Fine [92] p. 300—302. [2]) a. a. O. p. 296, p. 305 ff. [3]) Hamburger [97] p. 208. [4]) Briot-Bouquet [38] p. 192.

bringen, reguläre Funktionen bestimmen, und zwar jede der letzteren ein Integral, während Werte von Variablen, welche die Diskriminante zum Verschwinden bringen, Funktionen bestimmen, von denen einige vielleicht regulär, andere dagegen sicherlich nicht regulär sind, doch mit der Voraussetzung, daß der Punkt ein Verzweigungspunkt für diese nicht regulären Funktionen ist, d. h. in geometrischer Ausdrucksweise, die Diskriminante erfüllt einen Ort von singulären Punkten (im Sinne Poincarés) für einige von den Zweigen der Integrale. Es war nun von Interesse, das Verhältnis einer Wurzel $y = \eta(x)$ der Diskriminante einer Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ zu den partikulären Integralen von $f = 0$ genauer zu untersuchen, gleichviel ob $y = \eta(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist oder nicht.

Hamburger nahm 1893 diese Untersuchnng auf und gab die endgültige Lösung des mehrfach erwähnten Paradoxons, das Clebsch, Darboux und Lindemann zuerst klar ausgesprochen, Darboux und Cayley vergeblich zu lösen versucht hatten. Man hatte gefunden, daß eine Differentialgleichung bestimmte Eigenschaften besitzen müsse, wenn dieselbe eine singuläre Lösung zulassen sollte. Das Auftreten einer singulären Lösung bedingte folglich nur einen Ausnahmefall in der Beschaffenheit einer Integralkurvenschar. Hamburger findet nun die Lösung dieses Paradoxons darin, daß, wenn die Differentialgleichung in allgemeiner Form angesetzt wird, die Integralgleichung einer solchen Differentialgleichung sich so spezialisiert, daß das durch sie repräsentierte Kurvensystem in der Tat keine Enveloppe hat, also keine singuläre Lösung vorhanden ist, daß aber ferner, wenn die Integralgleichung in allgemeiner Form angesetzt wird, die aus ihre abgeleitete Differentialgleichung so spezialisiert erscheint, daß sie eine Enveloppe liefert.

Hamburgers Untersuchungen sind bereits mehrfach so eingehend dargestellt worden[1]), daß es unnötig erscheint, dieselben hier ausführlicher wiederzugeben. Wir wollen daher nur den Gang seiner Methoden, wie er ihn selbst mit kurzen Worten zusammengefaßt hat, im folgenden anführen.

Hamburger[2]) geht zunächst von der Differentialgleichung aus und bedient sich der Prinzipien, die der wichtigen Abhandlung von Fuchs[3]) „Über die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“ zugrunde liegen. Ihre wesentliche Bedeutung liegt in der Zer-

---

[1]) Siehe Schlesinger [117], Horn [118], Forsyth [114], p. 249—265, ferner Painlevé [119], p. 209. [2]) Hamburger [7], p. 208—209. [3]) Fuchs [81]. Die Resultate der Fuchsschen Arbeit finden Erklärungen von Wallenberg, Beitrag zum Studium der algebr. Differentialgleichung 1. O. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1890 Bd. 35 p. 193; von Poincaré, Sur un théorème de M. Fuchs. Acta Math. 1885, Bd. 7 p. 1—32; Forsyth [114] ch. 9 p. 269—285; schließlich sind sie bei Hamburger [97] p. 208 kurz dargelegt.

legung der Diskriminante $\varDelta$ der Differentialgleichung in ihre linearen Teiler und in der Entwicklung der verschiedenen zusammenhängenden Zweige von y' als algebraische Funktion von y, wie sie durch die Differentialgleichung gegeben ist, in Reihen, die nach Potenzen eines solchen Teilers $y-\eta$ fortschreiten, und deren Koeffizienten, ebenso wie η, von x abhängig sind.

Integriert man die nach den Fuchsschen Theoremen definierte Differentialgleichung mit der Bestimmung, daß für einen willkürlichen Wert c von x das Integral y (d. h. eine Entwicklung von verschiedenen Zweigen von y' als algebraische Funktion von y, wie sie durch die Differentialgleichung gegeben wird) mit $\eta(x)$, d. h. mit einer Wurzel der Diskriminantengleichung übereinstimmt, so erhält man, jeder Gruppe von zusammenhängenden Zweigen von y' entsprechend, eine Darstellung von $y-\eta$ durch eine Reihe, die nach Potenzen von $x-c$ fortschreitet, falls eine solche überhaupt existiert. Der Exponent der niedrigsten Potenz in diesen Reihen gibt charakteristische Merkmale dafür, ob $y-\eta$ kein Integral oder ein singuläres Integral, also eine Enveloppe einer Schar entsprechender Integralkurven, oder endlich ein partikuläres Integral darstellt, wobei die beiden letzteren Eigenschaften vereinigt sein können.

Weiter zeigte Hamburger[1]), daß ein genaues Studium der allgemeinen Integralgleichung $F(x, y, C) = 0$ zu ebendenselben Bedingungen für die Existenz einer singulären Lösung führt, wie das Studium der Differentialgleichung selbst. Der Gedankengang ist folgender: Hat man eine Integralgleichung $F(x, y, C) = 0$ vom Grade n in bezug auf C und analytischen Funktionen von x und y als Koeffizienten der Potenzen von C, so erhält man die Differentialgleichung durch Elimination von C aus $F(x, y, C)$ und dem totalen Differential nach x

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0$$

(indem C als durch die Gleichung $F(x, y, C) = 0$ bestimmte Funktion von x und y betrachtet wird) und zwar in der Form

$$M(A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \cdots + A_n) = (-1)^n D \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx},$$

oder

$$Mf(x, y, y') = (-1)^n D \frac{dC_1}{dx} \frac{dC^2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx},$$

worin M ein nur x und y enthaltender Faktor ist, und $A_0, A_1 \ldots A_n$ ganze rationale Funktionen von x und y sind; D ist die durch Elimination von

[1]) Hamburger [97], p. 209—210 und p. 229 ff.

C aus $F(x, y, C) = 0$ und $\frac{dF}{dC} = 0$ hervorgehende Diskriminante.

Verschwindet nun der von y' freie Faktor M mit $D = 0$, so ist wohl $D = 0$ eine Lösung von $M = 0$, jedoch wird die eigentliche Differentialgleichung nicht befriedigt, d. h.

$$f(x, y, y') = \frac{D}{M}\frac{dC_1}{dC} \cdot \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx}$$

nicht $= 0$; somit ist $D = 0$ kein Integral der Differentialgleichung. Die Kurvenschar besitzt also keine Enveloppe.

Ist aber M für $y = \eta$ nicht gleich Null und $y - \eta$ ein Teiler der Diskriminante D, so ist $y = \eta$ eine Lösung der Differentialgleichung. Entwickelt man nun die verschiedenen Zweige von $C(y)$ in Reihen nach Potenzen von $y - \eta$, so erhält man durch Umkehrung ebensoviele Darstellungen von $y - \eta$ nach Potenzen von $x - c$, wobei C derart partikularisiert wird, daß für $x = c$, $y = \eta$ wird. *Diese Reihen liefern dieselben Resultate, wie die aus der Betrachtung der Differentialgleichung gewonnenen.* Hamburger konnte daher mit Recht sagen, die Behauptung der angeblichen Inkongruenz der beiden Betrachtungsweisen verliere nunmehr jede Berechtigung.

XI. Kapitel.

Besondere Arten der Behandlung der Theorie der singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Obwohl die Mehrzahl der Abhandlungen nach 1870 mehr oder weniger durch die Arbeiten von Darboux, Cayley und Casorati beeinflußt waren, in denen sich die Untersuchungen hauptsächlich auf das geometrische Wesen der Diskriminantengleichungen gerichtet hatten, so fehlte es in jener Zeit doch nicht an Versuchen, die schon früher aufgestellten Sätze und Kriterien für die singulären Lösungen zu verbessern. So sind besonders die Arbeiten von Zajaczkowski, Zeuthen, Cockle und Prix[1]) zu nennen, die sich vorzugsweise mit den von den älteren Mathematikern gegebenen Regeln beschäftigten. Es müssen aber auch noch andere Arbeiten hier besonders hervorgehoben werden, welche die Frage der singulären Lösungen von ganz

[1]) [47; 51; 57; 70; 71.]

27*

neuen Gesichtspunkten aus behandelten, dadurch aber vollständig isoliert dastehen.

Eine ganz neue Fassung der Definition der singulären Lösungen gab Veltmann im Jahre 1876. Wenn für die Auflösung $y = \varphi(x)$ in der ganzen Ausdehnung, in welcher y als Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist, keine benachbarten Auflösungen existieren, so nennt sie Veltmann[1]) singulär. Unter benachbarten Lösungen verstand er solche, die entstehen, wenn man die Funktion $\varphi(x)$ unendlich wenig variieren läßt. Die Gleichung $y = \varphi(x)$ stellt also eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung dar, wenn die Kurve $y = \varphi(x)$ keine noch so geringe Formveränderung erleiden kann, ohne daß sie aufhört, eine Lösung der Differentialgleichung darzustellen. So einfach und elegant die neue Definition der singulären Lösungen ist, so kompliziert wird das Kriterium, zu welchem Veltmann schließlich gelangte.

Björling[2]) fand 1887 eine neue Methode, um die Art der Punkte der Integralkurven in der Koinzidenzkurve (wie Björling die Diskriminantenkurve nennt), die aus der Differentialgleichung erhalten wurde, zu bestimmen. Um die Diskriminantenkurve auf ihre Bestandteile zu untersuchen, transformierte er $f(x, y, p) = 0$ durch Verlegen des Koordinatenanfangspunktes o in einen beliebigen Punkt (h, k) der Diskriminantenkurve in

$$f(x + h,\ y + k,\ \pi + \alpha) = 0$$

(π ist der in (h, k) entsprechende Doppelwert von p), die entwickelt die folgende Gleichung liefert:

$$a\alpha^2 + a_1\alpha^3 + \cdots = 2x(b + b_1\alpha + \cdots) + 2y(c + c_1\alpha + \cdots) + x^2(d + d_1\alpha + \cdots)$$
$$+ 2xy(e + e_1\alpha + \cdots) + y^2(f + f_1\alpha + \cdots) + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $a, b, c, d \cdots$ rationale Funktionen von h, k sind. Weil nun in der Umgebung von o sowohl $x, y,$ als auch α unendlich klein sind, wird die vorstehende Gleichung approximativ durch $bx + cy = 0$ gegeben, welche Gleichung dann den durch o gehenden Zweig der Koinzidenzkurve darstellt.

Nach einer längeren Untersuchung findet Björling, daß der Punkt in der Koinzidenzkurve in o

1. eine Spitze ist, wenn weder α noch $b + c\pi$ identisch, d. h. für jeden (h, k)-Wert verschwinden;
2. ein Punkt der Enveloppe, d. h. eine singuläre Lösung, wenn $b + c\pi$ identisch verschwindet;
3. ein Punkt des Ortes der Berührungspunkte der Integralkurven, wenn, b und c, d. h. jede Größe für sich, identisch verschwinden.

---

1) Veltmann [72]. 2) Björling [86].

Vom Jahre 1896 finden wir eine Arbeit von PAGE[1]), welcher die Bedingung zugrunde liegt, die die Kurven $F(x, y) = C$ in sich selbst transformiert. Die Transformation wird durch die Gruppe

$$\Phi F = \varphi(x, y) \frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}$$

dargestellt, die zu der Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ gehört; diese letztere ist dann invariant unter der Transformationsgruppe ΦF, jedoch die Bahnkurven der Gruppe werden im allgemeinen nicht identisch mit den Integralkurven der Differentialgleichung sein; es kann aber doch vorkommen, daß eine begrenzte Anzahl von Bahnkurven von ΦF mit den partikulären Integralkurven $F = 0$ zusammenfällt. Längs dieser Kurven, wenn solche existieren, ist der Wert von y' durch ΦF gegeben, nämlich

$$y' = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)};$$

dieser Wert muß mit demjenigen von y' aus $f(x, y, y') = 0$ übereinstimmen. Diese Kurven sind dann durch

$$f\left(x, y, \frac{\psi}{\varphi}\right) = 0$$

dargestellt und die Gleichung der Enveloppe muß, falls eine solche existiert, in der letzten Gleichung eingeschlossen sein.

Die Methode von PAGE hat außer dem Vorzug der Einfachheit noch die Eigenschaft, daß sie ein Mittel an die Hand gibt, um die Örter der Rückkehr-, Knoten- und Berührungspunkte beim Aufsuchen der singulären Lösungen zu vermeiden, die nach anderen Methoden mit den Enveloppen gleichzeitig auftreten.

Anschauliche Betrachtungen für das bekannte Paradoxon bietet auch eine grundlegende Definition LIES[2]), die in seinen älteren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt; das Integrationsproblem einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung $f(x, y, y') = 0$ kommt nach LIE darauf hinaus, alle auf der Fläche $f(x, y, p) = 0$ des Raumes x, y, p gelegenen Integralkurven der PFAFFschen Differentialgleichung $dy - p\,dx = 0$ zu bestimmen.[3])

Wird eine Schar von Integralkurven der PFAFFschen Gleichung $dy - p\,dx = 0$ vorgelegt, die eine Fläche $f(x, y, p) = 0$ bilden, so kennt man auch die Integralkurven der Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ als Projektionen $F(x, y, C) = 0$ der gegebenen Kurven in der x, y-Ebene. Erhält man nun aus

---

[1]) PAGE [103]. [2]) LIE Gött. Nachr. 1874, p. 529—542. Arch. f. Math. Christiania 1878, Bd. 3, p. 404. — LIE [102], p. 189. [3]) Die gleiche Regel findet sich 1901 bei HUDSON [109].

$$F = 0, \frac{dF}{dC} = 0$$

durch Elimination von C einen Ort von Punkten, so stellt dieser Elementverein die singuläre Lösung dar, welcher auf der Fläche eine Bildkurve entspricht. Da aber in jedem Punkt der Bildkurve der singulären Lösung die Tangentenebene auf der x, y-Ebene senkrecht stehen muß, so ist diese Kurve Berührungslinie des um die Fläche gelegten Zylinders. Umgekehrt, wenn eine beliebige Fläche im Raum x, y, p vorgelegt wird, so wird zwar der vertikale Zylinder, welcher die Fläche umhüllt, eine Kurve auf der Fläche bestimmen, aber diese Kurve ist im allgemeinen keine Bildkurve. Diese Betrachtung zeigt also: Gibt man ∞^1 Integralkurven der Pfaffschen Differentialgleichung $dy - p\,dx = 0$, d. h. ∞^1 Kurven in der x, y-Ebene $F(x, y, C) = 0$, so hat man allerdings im allgemeinen eine singuläre Lösung der von diesen Kurven erfüllten Differentialgleichung erster Ordnung. Wird dagegen von vornherein eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, so besitzt sie im allgemeinen keine singuläre Lösung[1]).

[1]) Es möge an dieser Stelle noch erwähnt werden, daß neuere Arbeiten (darunter Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle. J. de l'Éc. polyt. cah. 45, von Dyck [94]) sich mit der Untersuchung des Gesamtverlaufes eines Integralkurvensystems im Sinne der Analysis situs beschäftigen; es spielt dabei die Betrachtung der singulären Stellen der Diskriminantenkurve eine wesentliche Rolle; doch fallen diese Untersuchungen außerhalb des Rahmens der gegenwärtigen Betrachtung.

Inhalt.

[illegible]