KRÓTKA WIADOMOŚĆ

O PRZEDNIEJSZYCH POSZUKIWANIACH

ANALIZY NOWOCZESNEJ

NAD KOŁEM STYCZNEM DO TRZECH KÓŁ DANYCH

SKREŚLIŁ

ADOLF SĄGAJŁO

PROFESOR MATEMATYKI

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 2 marca 1876 roku.

I. — Nakreślić koło Σ styczne do trzech kół danych S, S', S''.

To co poprzedza wskazuje miejsce, na którém powinien się znajdować środek koła szukanego: można wyznaczyć inne miejsce rugując jego promień R między dwoma równaniami

$$S = R^2 - 2rR, \qquad S' = R^2 - 2r'R\,;$$

lecz znalazłoby się tym sposobem inną krzywę jak koło.

Otrzymuje się rozwiązanie więcéj elementarne szukając, zamiast spółrzędnych środka koła stycznego Σ, spółrzędne jego punktu zetknięcia z jedném z kół danych. Ten punkt styczności znajdując się na kole, mamy już od razu jeden jakikolwiek związek między jego spółrzędnemi; dosyć więc znaleźć drugi jakikolwiek związek, aby te spółrzędne były zupełnie wyznaczone.

Umieśćmy, dla uproszczenia, początek spółrzędnych w środku koła S, którego życzymy wyznaczyć punkt zetknięcia z Σ; równanie tego koła sprowadza się do;

$$x^2 + y^2 = r'^2,$$

a równania innych kół S' i S'' są zawsze

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 = r'^3,$$

$$(x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 = r''^2.$$

Jeżeli A i B są spółrzędnemi środka Σ, uczynią one zadość związkom

$$S - S' = 2R(r - r'), \qquad S - S'' = 2R(r - r'');$$

nadto, spółrzędne punktu zetknięcia koła S z Σ będąc x i y, otrzyma się

$$A = \frac{x(R + r)}{r}, \quad B = \frac{y(R + r)}{r}.$$

Aby otrzymać wypadek podstawienia mx, my za x i y w równaniu jakiéjkolwiek prostéj, można pomnożyć całe równanie przez m i odjąć od niego $(m - 1)$ razy wyraz stały. Ten wyraz będąc równym

$$r'^2 - r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2,$$

w $S - S'$ na mocy twierdzenia wyłożonego powyżéj, wypadek podstawienia ilości A i B za x i y w wyrażeniu $S - S' = 2R(r - r')$ będzie

$$\frac{R + r}{r}(S - S') + \frac{R}{r}(\alpha'^2 + \beta'^2 + r^2 - r'^2) = 2R(r - r'),$$

albo

$$(R + r)(S - S') = R[(r - r')^2 - \alpha'^2 - \beta'^2].$$

Otrzyma się podobnież

$$(R + r)(S - S'') = R[(r - r'')^2 - \alpha''^2 - \beta''^2].$$

Rugując R między temi dwoma równaniami, widzimy że punkt zetknięcia szukany znajduje się na przecięciu koła S z prostą

$$\frac{S - S'}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{S - S''}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2}.$$

2. — Aby uzupełnić rozwiązanie geometryczne zagadnienia, pozostaje nam jeszcze pokazać, w jaki sposób można wykreślić tę prostę. Ponieważ ona przechodzi przez środek pierwiastny kół danych, wystarczy przeto, aby ją otrzymać znaleźć jéj drugi punkt. Zastępując $S - S'$, $S - S''$ przez ich wartości rozwinięte, równanie téj prostéj staje się:

$$\frac{2\alpha' x + 2\beta' y + r'^2 - r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2}{\alpha'^2 - \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{2\alpha'' x + 2\beta'' y + r''^2 - r^2 - \alpha''^2 - \beta''^2}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2};$$

albo dodając jedność do każdego z wyrazów,

$$\frac{\alpha' x + \beta' y + (r' - r) r}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + (r'' - r) r}{\alpha''^2 + \beta''^2 + (r - r'')^2};$$

co wyraża, że ona przechodzi przez przecięcie prostych

$$\alpha' x + \beta' y + (r' - r) r = 0, \qquad \alpha'' x + \beta'' y - (r'' - r) r = 0.$$

Pierwsza z tych prostych jest, w kole S, cięciwą zetknięcia stycznych wspólnych kołom S i S'; inaczéj mówiąc, jest to biegunowa względem koła S środka podobieństwa kół S i S'; podobnież druga prosta jest biegunową względem koła S środka podobieństwa dwóch kół S i S''. Przecięcie tych prostych jest więc biegunem osi podobieństwa kół, względem koła S.

Ztąd się wyprowadza wykreślenie następujące.

Wykreślić (fig. 1) jedną z czterech osi podobieństwa SS' trzech kół C, C', C''; wyznaczyć biegun téj osi kolejno względem trzech kół, i złączyć punkta tym sposobem otrzymane P, P' i P'' ze środkiem pierwiastnym R. Jeśli linie proste RP, RP', RP'', spotkają koła w punktach a, b; a', b'; a'', b'', koło przechodzące przez punkta a, a', a'' będzie jedném z kół stycznych szukanych, a koło poprowadzone przez punkta b, b', b'' będzie drugiém.

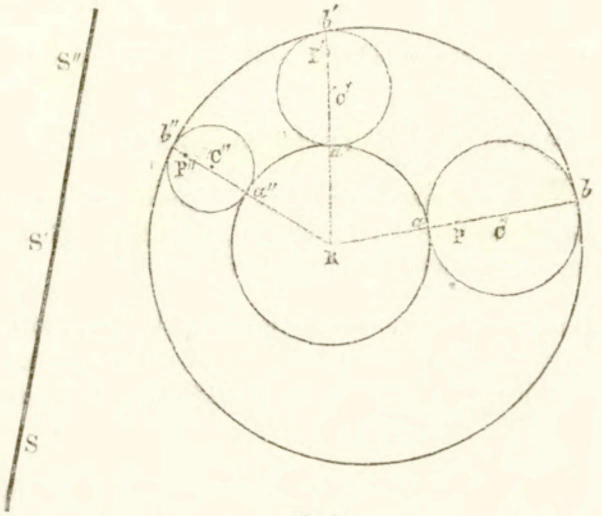

Fig. 1.

Stosując toż samo wykreślenie do trzech innych osi podobieństwa, wyznaczy się trzy inne pary kół stycznych.

STRESZCZENIE I UPORZĄDKOWANIE POWYŻÉJ ROZWINIĘTEGO ZAGADNIENIA.

3. — Oznaczmy przez A, B, C, środki trzech kół, do których żąda sie poprowadzić koło styczne.

Można mieć : 1° koło ω obwijające A, B, C, i koło ω' obwinięte przez A, B, C; 2° koło α styczne zewnętrznie do koła A, a wewnętrznie do kół B i C, i koło α' styczne wewnętrznie do koła A, a zewnętrznie do kół B i C; 3° koło β, styczne do koła B zewnętrznie, a do dwóch innych A i C wewnętrznie, i koło β' styczne do koła B wewnętrznie, a do B i C zewnętrznie; 4° nakoniec, koło γ styczne do C zewnętrznie a do A i B wewnętrznie, i koło γ' styczne do C wewnętrznie, a do A i B zewnętrznie. Tak więc może istnieć w przypadku ogólnym ośm rozwiązań, które się rozdzielają, jak to jużeśmy powyżéj wskazali, na *cztery* grupy dwóch kół stycznych do téjże saméj grupy wyłącznie przywiązanych.

Po czém, dopiero w całém świetle pod naszą uwagę się przedstawia : *rozwiązanie analityczne* zagadnienia rozwinięte w Nrze 1 i jego *wykreślenie ogólne* podane w numerze następnym.

4. — To piękne rozwiązanie, należne Gergonowi (*Roczniki matematyczne*, t. VII, str. 289), jest znakomitém swą prostotą, a nadewszystko łatwością z jaką się ono daje zastosować do wszystkich przypadków szczególnych, które się otrzymuje, przypuszczając, że jedno lub wiele kół A, B, C, sprowadzają się do punktów albo do linii prostych.

Te przypadki szczególne są w liczbie *dziesięciu*; przedstawiając jakiekolwiek koło przez C, jakąkolwiek prostę przez D i jakikolwiek punkt przez P; można wyrazić te dziesięć zagadnień w sposób następujący: PPP, PPD, PPC, PDD, PDC, PCC, DDD, DDC, DCC, CCC.

Wszystkie te przytoczone powyżéj zagadnienia, prócz ostatniego, były już w geometryi elementarnéj wprost i zupełnie rozwiązane.

5. — Można dojść, *bez rachunku algebraicznego,* do tegoż samego wypadku, w sposób następujący :

(Wróćmy do figury i do znakowania w Nrze **2** przez nas dostatecznie wskazanych).

1° Linie ab, $a'b'$, $a''b''$ spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem podobieństwa kół $aa'a''$, $bb'b''$:

2° Proste $a'a''$, $b'b''$ przecinają się w S środku podobieństwa kół C′ i C″ ;

3° Przeto linie poprzeczne $a'b'$, $a''b''$ przecinają się na osi pierwiastnéj kół C′ i C″. Podobnież $a'b''$ i ab przecinają się na osi pierwiastnéj kół C″ i C : punkt R, środek podobieństwa kół $aa'a''$, $bb'b''$ jest więc jednocześnie środkiem pierwiastnym trzech kół C, C′ i C″;

4° Ponieważ $a'b'$, $a''b''$ przechodzą przez środek podobieństwa kół $aa'a''$, $bb'b''$, proste $a'a''$, $b'b''$ spotykają się w S na osi pierwiastnéj tych dwóch kół. Punkta S′ i S″ znajdują się tym sposobem na téjże saméj osi pierwiastnéj. Więc, *oś podobieństwa* SS′S″ *kół* CC′C″ *jest jednocześnie osią pierwiastną kół* $aa'a''$, $bb'b''$;

5° A że $a''b''$ przechodzi przez środek podobieństwa kół $aa'a''$, $bb'b''$, styczne poprowadzone do tych kół w punktach, w których $a''b''$ spotyka je, przecinają się na osi pierwiastnéj SS′S″ w punkcie, który jest oczywiście biegunem cięciwy $a''b''$ względem koła C″. Biegun cięciwy $a''b''$ znajdując się na SS′S″, biegun osi SS′S″ względem koła C″ będzie na $a''b''$. Będzie więc można wykreślić $a''b''$, łącząc środek pierwiastny R z biegunem P″ osi S′S″ względem koła C″ ;

6° Środek podobieństwa dwóch kół będąc na ich linii środków, a oś pierwiastna prostopadłą do téj linii, prosta łącząca środki kół $aa'a''$, $bb'b''$ przechodzi przez punkt R prostopadle do SS′S″.

6 (*a*). *Gdy cztery koła są styczne do piątego, długości ich stycznych wspólnych zadość uczynią związkowi*

$$(12)\,(34) \pm (14)\,(23) \pm (13)\,(24) = 0,$$

w którym (12) *przedstawia długość stycznéj wspólnéj pierwszemu i drugiemu kołu*, etc.

Niech będą : R promień piątego koła, O jego środek (fig. 2); r i r' promienie kół 1 i 2, A i B ich środki; a i b ich punkta zetknięć z piątém. Trójkąt aOb, będąc równoramiennym, daje :

$$ab = 2\mathrm{R}\ \text{wst}\ \frac{1}{2} aOb.$$

Bokami trójkąta AOB są R — r, R — r' i D = AB, jest więc

$$\text{wst}^2 \frac{1}{2} aOb = \frac{\mathrm{D}^2 - (r-r')^2}{4(\mathrm{R}-r)(\mathrm{R}-r')};$$

wreszcie

$$(12)^2 = \mathrm{D}^2 - (r-r')^2;$$

przeto

$$ab = \frac{R.(12)}{\sqrt{(R-r)(R-r')}}.$$

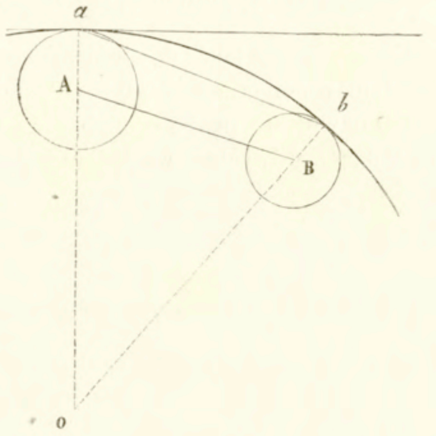

Fig. 2.

W czworoboku wpisanym utworzonym przez cztery punkta zetknięcia a, b, c i d czterech pierwszych kół z piątem, boki i przekątnie zadość uczynią warunkowi

$$ab.cd + ad.bc = ac.bd;$$

zastępując, w tém równaniu, każdą z cięciw ab,..... przez swą wartość, znalezioną poprzednio w funkcyi długości (12),... stycznéj wspólnéj odpowiadającéj, i znosząc czynnik wspólny $\frac{R^2}{\sqrt{(R-r)(R-r')(R-r'')(R-r''')}}$, otrzymuje się związek, którego należało dowieść.

6 (b). — Można wyprowadzić z tego twierdzenia rozwiązanie zagadnienia założonego w Nrze **1**. Gdy czwarte koło sprowadza się do punktu, ten punkt należy do koła stycznego względem trzech pierwszych; wyrażenia (41), (42) i (43) przedstawiają długości stycznych wyprowadzonych z tego punktu do tych trzech kół. Wreszcie, oznaczywszy przez S, S′ i S″ wartości szczególne, równań trzech pierwszych kół, gdy się w nich zastąpi spółrzędne *bieżące* (*) (les coordonnées *courantes*) przez spółrzędne tego punktu, otrzyma się, na mocy jednego z twierdzeń poprzednio wyłożonych

$$(41) = \sqrt{S}, \quad (42) = \sqrt{S'}, \quad (43) = \sqrt{S''}.$$

Spółrzędne jakiegokolwiek punktu koła szukanego uczynią więc zadość związkowi:

$$(23)\sqrt{S} \pm (31)\sqrt{S'} \pm (12)\sqrt{S''} = 0,$$

który się przekształca na jakiekolwiek równanie czwartego stopnia, znosząc w nim znaki pierwiast-

(*) *Spółrzędne bieżące* tak zwykle są nazwane spółrzędne dowolnie się odnoszące do jakiegokolwiekbądź punktu dostatecznie określonego miejsca.

Dzięki usilnym staraniom p. Folkierskiego literatura nasza matematyczna świeżo wzbogacona została nowym pięknym nabytkiem *Spółrzędnych bieżących*, za który składamy znakomitemu autorowi *Zasad Rachunku Różniczkowego i Całkowego* nasze publiczne podziękowanie.

kowe. W przypadku, w którym (23), (31) i (12) są stycznemi wspólnemi wprost, równanie tym sposobem przekształcone daje się ostatecznie rozłożyć na dwa równania drugiego stopnia przedstawiające względnie koła styczne wewnętrznie i zewnętrznie (fig. 1) do trzech kół danych.

To rozwiązanie, i twierdzenie zkąd się ono wyprowadza, są należne p. Casey.

6 (c). — Twierdzenie o którém mowa można także dowieść *nie uciekając się wcale do własności czworoboku wpisanego*. Biorąc na każdym promieniu wodzącym OP, poprowadzonym przez punkt O do jakiéjkolwiek krzywéj, długość OQ odwrotnie proporcyonalną do OP, otrzymuje się nową krzywę, która się nazywa *odwrotną* krzywéj danéj. Odwrotna, względem początku O koła

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

ma za równanie

$$c\,(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + 1 = 0.$$

Jest to koło, wyjąwszy w przypadku, w którym $c=0$ (to jest gdy punkt O jest na kole), który wtedy przedstawia jakąkolwiek linię prostą. Nawzajem, odwrotném jakiéjkolwiek prostéj jest koło przechodzące przez punkt O.

Jakiéjkolwiek parze kół odpowiada, względem jednego punktu, para odwrotna, tworząca się z pierwszego układu, który posiada własność następującą, wskazaną przez p. Casey : *stosunek kwadratu stycznéj wspólnéj do iloczynu z promieni jest tenże sam dla jednéj i drugiéj pary* (*). W rzeczy saméj, promień r jakiegokolwiek koła będąc dany za pomocą związku

$$r^2 = g^2 + f^2 - c,$$

promień jego odwrotny otrzyma się zastępując, w tém równaniu, g, f i c przez $\frac{g}{c}$, $\frac{f}{c}$, $\frac{1}{c}$, i będzie tym sposobem równym $\frac{r}{c}$. Ilość $D^2 - r^2 - r'^2$, która jest przedstawioną przez $c + c' - 2gg' - 2ff'$, przez podobne podstawienie stanie się równą $\frac{D^2 - r^2 - r'^2}{cc'}$. Stosunek $D^2 - r^2 - r'^2$, do iloczynu rr' promieni, a tém samém, stosunek ilości $D^2 - (r \pm r')^2$ do rr' jest tenże sam dla każdéj z par.

Uważmy teraz cztery koła styczne do tejże saméj prostéj w czterech punktach. Odległości wzajemne tych czterech prostych leżących w linii prostéj, które przedstawiają wtedy długości stycznych wspólnych, są połączone między sobą związkiem

$$(12)\,(34) + (14)\,(32) = (13)\,(24),$$

jak to łatwo jest widzieć wychodząc z tożsamości

$$(b - a)\,(d - c) + (d - a)\,(c - b) = (c - a)\,(d - b),$$

w któréj a, b, c, d przedstawiają odległości tych czterech punktów od jakiegokolwiek punktu prostéj, wziętego za początek.

Odwrotny układu, względem jakiegokolwiek punktu, jest złożony z czterech kół stycznych do

(*) Co na jedno wychodzi powiedzieć, że kąt pod którym się przecinają dwa koła jednéj pary jest tenże sam dla obu par : podanie które łatwo da się uzasadnić geometrycznie.

piątego; i związek poprzedzający przechowa się jeszcze, ponieważ stosunek każdego z jego wyrazów do pierwiastku kwadratowego iloczynu z promieni czterech pierwszych kół, nie zmieni się wcale, gdy się przechodzi z pierwszego układu do jego odwrotnego.

Związek między stycznemi wspólnemi będąc tym sposobem wprost uzasadnionym, można ztąd wyprowadzić, jako przypadek szczególny, własności względne do boków i przekątni czworoboku wpisanego. W tym celu dosyć jest przypuścić, że cztery pierwsze koła sprowadzają się do czterech punktów.

To dowodzenie pokazuje nadto, że w przypadku, w którym dwa koła są styczne razem wewnętrznie lub zewnętrznie do piątego koła, należy wprowadzić do związku danego powyżéj ich styczną wspólną wprost, i ich styczną odwrotną, gdy one są położone jedna wewnątrz, druga zewnątrz. Tym sposobem równanie czterech par kół stycznych do trzech kół danych

$$(23)\sqrt{S} \pm (31)\sqrt{S'} \pm (12)\sqrt{S''} = 0.$$

będzie przedstawiało:

1° Koła styczne zostawiające z téj saméj strony, wewnętrznéj lub zewnętrznéj, trzy koła dane, kiedy (12), (23) i (31) będą stycznemi wspólnemi wprost; 2° koła styczne wewnętrznie do pierwszego koła a zewnętrznie do dwóch innych (lub odwrotnie), kiedy (23) będzie jakąkolwiek styczną wprost, (34) i (12) stycznemi odwrotnemi; 3° nakoniec dwie inne pary kół, uważając kolejno jedną ze stycznych (31) i (12) jako styczną wprost, a trzecią styczną jako odwrotną.

Paryż, dnia 10 lutego 1876 r.