DOWÓD

JEDNEGO ZASADNICZEGO TWIERDZENIA

ODNOSZĄCEGO SIĘ DO

HYPERGEOMETRYCZNYCH FUNKCYJ

PRZEZ

DRA M. A. BARANIECKIEGO

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa, dnia 2 grudnia 1875 roku.

Funkcye, które dają się przedstawić za pomocą hypergeometrycznego szeregu

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots \tag{1}$$

(w obszarze jego zbieżności), nazywać będziemy *hypergeometrycznemi funkcyami* i oznaczać symbolem $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, użytym pierwotnie przez Gauss'a (*Disquisitiones generales circa seriem*, etc.), dla oznaczenia szeregu (1).

Gdy wiele funkcyj, tak algebraicznych, jak i transcendentalnych, daje się przedstawić za pomocą szeregu (1), a tém samém są funkcyami typu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, przy rozmaitych wartościach argumentów, to badanie ogólnych własności funkcyj hypergeometrycznych, wprowadzając możność ogólnego traktowania różnorodnych funkcyj, przedstawia dostatecznie uzasadniony interes naukowy. Rezultaty, tą drogą osiągnięte, znajdują już częste zastosowania, choćby np. w badaniu własności funkcyj sferycznych, tyle ważnych w teoryi atrakcyi i ciepła.

Jedną z najważniejszych kwestyj w teoryi hypergeometrycznych funkcyj jest, bezwarunkowo, wyznaczenie, dla jakich wartości zmiennéj x funkcya $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ może być uważana za skończoną, ciągłą i jednowartościową. Tą kwestyą, tak postawioną (*), zajmował się p. L. W. Thomé i rozwiązał

(*) B. Riemann (*Abhandlungen der K. Gesel. der Wissenschaften zu Göttingen,* tom VII), inaczéj stawia zadanie. W liczbie warunków, któremi obstawia rozpatrywane przez się funkcye, znajduje się ten, że funkcya może mieć, jako punkta przerwy lub rozgałęzienia, punkta a, b, c (odpowiednią zamianą zmiennéj niezależnéj mogące być sprowadzonemi do punktów $0, 1, \infty$). Te funkcye, jak Riemann znajduje, koniecznie zadosyć czynią różniczkowemu równaniu liniowemu drugiego rzędu, bez niezależnego wyrazu i z racyonalnemi współczynnikami (*Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen*, § 7).

ją w LXVI^ym tomie dziennika Crelle'a (*), przy pomocy równania różniczkowego

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0, \tag{2}$$

któremu funkcya $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ zadosyć czyni. Przytoczymy cały ten ustęp.

« Rozprzestrzenienie tej funkcyi po za koło zbieżności szeregu potęgowego(1) wyznacza się z liniowego równania, któremu ten szereg zadosyć czyni, mianowicie z równania

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dF}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}F=0\,;$$

tu znajduje zastosowanie następujące twierdzenie o równaniach różniczkowych z racyonalnemi współczynnikami, które to twierdzenie zawdzięczam odczytom p. Weierstrass'a. Gdy dane jest równanie różniczkowe liniowe n^{go} rzędu z racyonalnemi współczynnikami i gdy około pewnego punktu x_0 zakreślimy koło, w obszarze którego te współczynniki pozostają ciągłemi, to danemu równaniu różniczkowemu zadosyć czyni jedna i tylko jedna funkcya, będąca jednowartościową i ciągłą funkcyą zmiennéj x, i przybierająca, wraz ze swemi $n-1$ pierwszemi pochodnemi, oznaczone wartości w tym punkcie x_0.

« Na mocy tego twierdzenia, funkcya hypergeometrycznego szeregu może być po za wszystkie punkta koła zbieżności tego szeregu, prócz punktu $x=1$, rozprzestrzenioną, jako funkcya ciągła, jednowartościowa i taką pozostaje, dopóki zmienna nie przekracza pewnéj, saméj siebie nie przecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $x=+1$ do nieskończoności.

« Jeśli zaś funkcya rozprzestrzeniona będzie i po za tę linię, to, w ogólności, ustaje jéj jednowartościowość, jak to wskazuje formuła p. Kummer'a (tom XV tego dziennika), którą $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ wyraża się przez całki szczególne równania różniczkowego, zależące od $(1-x)$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=AF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)+B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)$$

$$A=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}\,,\qquad B=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\,,$$

gdzie (**)

$$\Pi(x)=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1.2.3\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,n^x\right\};$$

albowiem ta formuła służy, dopóki $(\gamma-\alpha-\beta)$ nie jest liczbą całkowitą, a gdy przytém ani α ani β nie są równe zeru lub odjemnéj liczbie całkowitéj, to B nie znika i punkt $x=1$, jest punktem rozgałęzienia funkcyi. »

Dotąd Thomé. Przywiedzione przezeń twierdzenie Weierstrass'a dowiedzione zostało w tymże LXVI^ym tomie Crelle'a przez p. Fuchs'a (***). Dowód ten jednak wymaga zupełnie odrębnego traktowania, mogącego być niedogodném przy wykładzie teoryi hypergeometrycznych funkcyj, który należy

---

(*) *Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gauss'schen Function* $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, str. 322, 323.

(**) Zachowane przez pp. Kummer'a i Thomé'go Gauss'owe oznaczenie jest z Legendre'owskiém w takim związku :

$$\Pi(x-1)=\Gamma(x).$$

(***) *Zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.* Str. 122-125.

uczynić jak najelementarniejszym, aby z tą teoryą uczący się mogli wcześnie się zaznajamiać. — Prócz téj jednak niedogodności, przytoczona metoda dowodzenia p. Thomé wymaga wyprowadzenia ad hoc formuły Kummer'a. By obecnie ją wywieść, nie można się już uciekać do zbyt wyłącznego i długiego sposobu Kummer'a, i wypadnie, dla wyprowadzenia jéj korzystać ze wskazówek Jacobi'ego, zawartych w jego pośmiertnéj pracy *Ueber die Differenzialgleichung der hypergeometrichen Reihe* (*), a i w tym razie wywód ten będzie wymagał poszukiwań, nie będących w bezpośrednim związku z naszém główném założeniem.

Sposób dowodzenia Thomé'go wymaga, aby przytoczona formuła Kummer'a była przygodną, co obejmuje warunek, aby ani $\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)$, ani $\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)$ nie miały wartości nieskończenie wielkich, co mianowicie zajdzie, ilekroć $\alpha+\beta-\gamma$ będzie zerem lub liczbą całkowitą. A ten właśnie przypadek dość często miejsce mieć może, np.

$$F(1,1,2,x)=-\frac{\log(1-x)}{x},$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\operatorname{tang}^2 x\right)=\frac{x}{\operatorname{tang} x},$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)=\frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x},$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},-x^2\right)=\frac{\operatorname{arctang} x}{x};$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du,$$

$$F\left(1,1+mk,2+mk,\frac{m}{m-x}\right)=\frac{(1+mk)(x-m)}{m}\int_0^\infty\frac{e^{-ku}}{x-u}\,du,$$

przy m zdążającém do nieskończoności. Etc.

Prowadząc sposobem p. Thomé'go dowód téj zasadniczéj własności funkcyi $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, musielibyśmy zupełnie oddzielnie wyprowadzać ciekawe związki między rozmaitemi hypergeometrycznemi funkcyami, gdy tymczasem, przy dowodzeniu, jakie tu będzie przeprowadzone, można nieznacznie przygotować wszystko to, co dla ustalenia tych związków będzie potrzebném (**). Metoda, jaką podać zamierzamy, da się w następujący sposób streścić.

Zbadać dla jakich wartości zmiennéj x całka ogólna równania (2) pozostaje skończoną, ciągłą i jednowartościową. Następnie, korzystając z niektórych związków, przy tém badaniu otrzymanych, wykazać, jakie są warości zmiennéj x, dla których całka ogólna równania (2) może nie być skończoną, ciągłą i jednowartościową, a jego całka szczególna $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ pozostaje już zawsze skończoną, ciągłą i jednowartościową. W ten sposób, wyłączywszy te ostatnie wartości z wartości, dla których całka ogólna może doznawać przerwy lub rozgałęzienia, rozwiążemy w zupełności nasze zadanie.

(*) LVI-ty tom dziennika *Crelle'a*, a także w trzecim tomie *Jacobi mathemathische Werke*.

(**) Porów. moją rozprawę « O hipergeometryczeskich funkcjach ». Moskwa 1873. (Rozdział I i II.)

Potrzeba zatém zająć się naprzód całkowaniem równania (2). Gdy całkowanie to, za pomocą różniczkowania przy dowolnym skaźniku, czego pierwsze zasady podał p. Liouville w XXI cahier dziennika Szkoły Politechnicznéj (*), a które w zupełności można uskutecznić dopiero według wskazań, podanych przez p. Holmgren w memoarze, przedstawionym (1865 r.) Sztokholmskiéj Akademii nauk (**), wymaga jeszcze należytego opracowania i uproszczenia téj metody, to pozostaje, dla uskutecznienia tego całkowania, postępować mniéj więcéj tą samą drogą, jakiéj się trzymał Jacobi w wyżéj wzmiankowanéj pracy, która cała, z wyjątkiem §§ 4, 5 i 8, jest poświęcona całkowaniu równania (2).

W pierwszym rozdziale wskażemy, jak Jacobi, w różnych przypadkach, przedstawia całkę ogólną równania (2). W drugim rozdziale zajmiemy się wyznaczeniem, dla jakich wartości zmiennéj niezależnéj, każda z całek, służących, w różnych przypadkach, na wyrażenie całki ogólnéj równania (2), pozostaje zawsze skończoną, ciągłą i jednowartościową. W trzecim zaś rozdziale rozpatrzymy, kiedy taką bywa hypergeometryczna funkcya $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

ROZDZIAŁ I

§ 1. — Całkując równanie (2) przez szeregi, jako całkę szczególną otrzymujemy szereg (1), który może być zsummowany i przedstawiony całką (***)

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\gamma}du \tag{3}$$

tak, że całka

$$y=\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du \tag{4}$$

jest całką szczególną równania (2), o czém i wprost możemy się przekonać (jak to właśnie Jakobi robi) wstawiwszy ją w równanie (2), wraz z jéj pierwszą i drugą pochodnemi względem x. Aby całka (4) miała znaczenie, potrzeba, aby β i $\gamma-\beta$ były dodatne, a jeśli są to ilości kompleksne, to aby ich rze-

(*) *Mémoire sur l'intégration de l'équation*

$$(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0,$$

à l'aide de différentielles à l'indices quelconques. Całkowanie jednak równania (2) według metody Liouville'a jest nieilluzyjném tylko wtedy, kiedy argumenta α i β, pierwiastki równania

$$m(\mu+1)\mu-q\mu+s=0, \text{ to jest } -1.(\mu+1)\mu+(\alpha+\beta+1)\mu-\alpha\beta=0,$$

są liczbami całkowitemi.

(**) Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst af H. J. Holmgren.

(***) Porównaj § 1 rozprawy « *Rozwinięcie na ułamek ciągły stosunku* » etc. (« *Pamiętnik* », tom VII). Tam także jest wyjaśnione, dlaczego argument γ nie ma znaczenia zera, lub liczby całkowitéj odjemnéj.

czywiste części były dodatne. Przy tém zastrzeżeniu, mamy następujące wyrażenie hypergeometrycznéj funkcyi :

$$(5)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

Tak z wyrażenia (1), jak i z wyrażenia (3) dla hypergeometrycznéj funkcyi $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ wypada że

$$[F(\alpha, \beta, \gamma, x]_{x=0}=1, \qquad \left[\frac{d\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}\right]_{x=0}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Dlatego téż hypergeometryczną funkcyę $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ możemy jeszcze określić, jako funkcyę zadosyć czyniącą równaniu (2) i dla $x=1$ przybierającą wartość 1, zaś jéj pierwsza pochodna, wartość $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

§ 2. — Jeśli w całce (4) uskutecznimy kolejno podstawienia

$$u=\frac{1-v}{1-vx}, \qquad u=1-v, \quad u=\frac{v}{1-x+vx},$$

to granice jej pozostaną niezmienione i otrzymamy kolejno

$$(6)\qquad \begin{cases} y=(1-x)^{\gamma-\beta-}\displaystyle\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}(1-xv)^{\alpha-\gamma}\,dv, \\ y=(1-x)^{-\alpha}\displaystyle\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{-\alpha}dv, \\ y=(1-x)^{-\beta}\displaystyle\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{\alpha-\gamma}dv. \end{cases}$$

W tych całkach podintegralne funkcye są utworzone przez pewne potęgi czynników, zupełnie analogicznych z czynnikami podintegralnéj funkcyi całki (4). Całki te zatém, po pomnożeniu ich przez tenże sam czynnik

$$(7)\qquad \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

mogą być, według wzoru (5) tak przedstawione

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

$$(1-x)^{-\alpha}\,F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right);$$

$$(1-x)^{-\beta}\,F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Że zaś całki (6), po pomnożeniu ich przez stałę (7), są tylko przekształceniem całki (3), przedstawiającéj hypergeometryczną funkcyę $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, to otrzymaliśmy następujące trzy przekształcenia

Euler'a :

(8) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x) \text{ (*)},$$

(9) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right) \text{(**)},$$

(10) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right),$$

z których ostatnie może być z poprzedzającego wyprowadzone na zasadzie symetryczności tak równania (2), jak i szeregu (1) względem argumentów α i β, tak, iż oczywiście

(11) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

Dlatego, jeżeli rzeczywiste części liczb β i $\gamma - \beta$ nie są dodatne, lecz dodatne są rzeczywiste części liczb α i $\gamma - \alpha$, to możemy w prawéj stronie równości (5) wszędzie zamiast α stawić β, i wzajemnie,

§ **3.** — Probując, czy całka

(12) $$y = \int_a^b u^{\beta - 1}(1 - u)^{\gamma - \beta - 1}(1 - xu)^{-\alpha}\, du$$

nie czyni zadosyć równaniu (2) przy innych granicach, niż poprzednie 0 i 1, Jacobi znajduje, że granicami całki (12) mogą być tu jeszcze wartości

$$u = \pm \infty, \quad u = \frac{1}{x},$$

z których pierwsza jest uwarunkowana tém, żeby rzeczywista część liczby $\alpha + 1 - \gamma$ była dodatna, gdy druga wymaga, aby dodatną była rzeczywista część liczby $1 - \alpha$. W ogóle zatém, całka oznaczona (12) zadosyć czyni równaniu (2), jeśli jako granice, brać będziemy

(13) $$0, 1, \pm \infty, \frac{1}{x},$$

przy warunku, żeby rzeczywiste części, odpowiadających tym granicom, liczb

(14) $$\beta, \gamma - \beta, \alpha + 1 - \gamma, 1 - \alpha$$

były dodatne.

§ **4.** — Wartości (13) możemy w taki sposób nadawać granicom

$$a_1 \text{ i } b_1,$$
$$a_2 \text{ i } b_2$$

(*) *Nova acta academiæ imperialis petropolitanæ* (tomus XII. *Specimen transformationis singularis serierum*, pag. 62)

(**) Porównaj Kummer'a w XV-tym tomie dziennika *Crelle*'a, str. 35 i 54.

całek

$$\int_{a_1}^{b_1} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,\quad \int_{a_2}^{b_2} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du, \tag{15}$$

żeby liczby a_2 i b_2 były albo obie większe, albo obie mniejsze, niż liczby a_1 i b_1. W ten sposób otrzymamy trzy następujące układy granic:

	dla a_1 i b_1,	dla a_2 i b_2,
I ...	0 i 1,	$\frac{1}{x}$ i $\pm\infty$,
II ...	0 i $-\infty$,	1 i $\frac{1}{x}$,
III ...	0 i $\frac{1}{x}$,	1 i $+\infty$.

Z tego skematu widoczna, że, gdy w układzie I wielkość $\frac{1}{x}$ ma się znajdować zewnątrz przedziału, objętego liczbami 0 i 1, to układ granic I odpowiada przypadkowi, gdy szukamy całek dla wartości $x < +1$ i wtedy, w drugiéj całce, należy wziąć $+\infty$ lub $-\infty$ stosownie do tego, czy wartość x jest dodatną, czy też odjemną. Podobnie, układ granic III odnosi się do wartości $x > +1$ i $x < 0$. Układ zaś granic II odnosi się do $x > 0$, tak większych jak i mniejszych od jedności.

W skutek tego, jeśli w całce

$$\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du, \tag{16}$$

t. j. w jednéj z całek (15), traektorya całkowania jest linia prosta $a_\lambda \ldots b_\lambda$, to nie ma na téj linii punktów a_μ i b_μ, granic drugiéj całki (15), któreby mogły być punktami przerwy lub rozgałęzienia całki (16).

Ponieważ na płaszczyznie współrzędnych zmiennéj x, kompleksne wartości zmiennéj x znajdują się zewnątrz prostéj łączącéj dwie którekolwiek z granic 0, 1 i $\pm\infty$, to te całki oznaczone, przy pomocy których przedstawimy całkę ogólną dla wartości x, leżących zewnątrz osi odciętych, mogą tracić znaczenie, jeśli je zechcemy odnieść do wartości x, odpowiadających punktom osi odciętych. Lecz całki, mające znaczenie dla rzeczywistych wartości zmiennéj x, nie tracą go dla jéj kompleksnych wartości. Dlatego potrzeba we wszystkich przypadkach, jakie przedstawiać mogą argumenty α, β i γ, wyprowadzić dwie całki oznaczone, odnoszące się do rzeczywistych wartości zmiennéj x.

Prócz tego, gdy całki, odnoszące się do odjemnych wartości x, mogą być przedstawiane całkami układu I i III, t. j. całkami odnoszącemi się odpowiednio także i do wartości $x < +1$ i $+x > 1$, zaś całki układu II nie mają znaczenia dla wartości $x < 0$, to utworzywszy dwie całki, odnoszące się do $x < +1$, i dwie do $x > +1$, możemy, za pomocą dwóch z tych całek, nienależących do całek układu granic II, przedstawić całkę ogólną dla wartości $x < 0$. Widzimy więc, że należy tylko wyznaczyć całkę ogólną dla dodatnych rzeczywistych wartości x, z tém jednak, żeby w liczbie czterech całek (z których dwiema wyraża się całka ogólna dla $x < +1$, a dwiema dla $x > +1$) znajdowały się, dwie nie tracąc znaczenia dla odjemnych wartości zmiennéj x.

Te sześć całek typu (16) są :

$$\mathrm{I}^a \qquad \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\mathrm{I}^b \qquad \int_{\frac{1}{x}}^{(\pm)\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\mathrm{II}^a \qquad \int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\mathrm{II}^b \qquad \int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\mathrm{III}^a \qquad \int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\mathrm{III}^b \qquad \int_1^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du;$$

każda z nich traci znaczenie, jeżeli nie są wypełnione warunki wymagane przez jéj granice.

Zamianą zmiennéj niezależnéj sprowadza Jacobi te całki do takich, w których granicami są 0 i 1, a mianowicie

$$(17) \quad u=\frac{1}{xv} \qquad \mathrm{I}^b\ldots \quad x^{1-\gamma}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{-\alpha}(1-xv)^{\gamma-\beta-1}\,dv,$$

$$(18) \quad u=\frac{v-1}{v} \qquad \mathrm{II}^a\ldots \quad x^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{x-1}{x}v\right)^{-\alpha}dv,$$

$$(19) \quad u=\frac{1}{x+(1-x)v} \qquad \mathrm{II}^b\ldots \quad x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 v^{-\alpha}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x-1}{x}v\right)^{\gamma-\alpha}dv,$$

$$(20) \quad u=\frac{v}{x} \qquad \mathrm{III}^a\ldots \quad x^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}v\right)^{\gamma-\beta-1}dv,$$

$$(21) \quad u=\frac{1}{v} \qquad \mathrm{III}^b\ldots \quad x^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{1}{x}v\right)^{-\alpha}dv.$$

§ 5. — Całki te mają znaczenie, lub téż je tracą, stosownie do tego, czy odpowiednie każdéj całce dwie z liczb (14) mają rzeczywiste części dodatne, lub nie. Oznaczymy rzeczywiste części liczb α, β i γ przez α_0, β_0 i γ_0.

Jeśli argumenta α, β i γ zadosyć czynią warunkom, niezbędnym dlatego, aby dwie całki (15), które nazwiemy A i B, miały znaczenie, to dla tych wartości zmiennéj x, dla których one pozostają skończonemi, ciągłemi i jednowartościowemi, całka ogólna równania (2) będzie

$$(22) \qquad C_1A+C_2B,$$

gdzie C_1 i C_2 są stałe całkowania.

Ponieważ lewa strona równania (2) jest symetryczna względem argumentów α i β, to możemy ten z nich, którego rzeczywista część jest większą, nazwać β, tak, że w tym i następującym §§ przyjmujemy α_0 nie większe od β_0. W ten sposób Jacobi liczbę wszystkich możliwych tu przypadków zredukował do dziewięciu.

1°) $\beta_0 > 0, \quad \gamma_0 - \beta_0 > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \gamma_0 - \alpha_0 > 0.$

Z pierwszych dwóch nierówności wypada, że są wypełnione w tym przypadku warunki dla granic 0 1. Warunkom zaś dla pozostałych granic, t. j.

$$\alpha_0 + 1 - \gamma_0 > 0 \text{ i } 1 - \alpha_0 > 0. \tag{23}$$

zadosyć się tu stanie tylko dla wartości $-1 < \alpha_0 < +1$, a zatém $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 1 + \alpha_0 < 2$. Z tego wypada, że warunki (23) nie są wypełnione dla wszystkich, w naszym przypadku możliwych, wartości argumentów α, β, i γ; skutkiem tego, możemy tu całkę (16) wziąć tylko między granicami 0 i 1, tak, że z sześciu całek (16) możemy tu wziąć tylko całkę I^a, która, jakeśmy widzieli (§ **4**), nie odnosi się do wartości $x > 1$.

2°) $\beta_0 > 0, \ \gamma_0 - \beta_0 > 0, \ \alpha_0 < 0, \ \gamma_0 - \alpha_0 > 0;$

tutaj, oprócz warunków dla granic 0 i 1, wypełniony jest jeszcze warunek dla granicy $\frac{1}{x}$ to jest $1 - \alpha_0 > 0$, dla wszystkich, w tym przypadku możliwych, wartości argumentów α, β i γ. Zadosyć uczynienie czwartemu warunkowi

$$\alpha_0 + 1 - \gamma_0 > 0$$

wymagałoby znowu ograniczenia wartości tych argumentów: $0 > \alpha_0 > -1$, a skutkiem tego $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 1 + \alpha_0 < 1$. Nadając więc całce (16) granice 0, 1, $\frac{1}{x}$, możemy przy pomocy całek I^a i II^b wyrazić całkę ogólną, odnoszącą się do wartości $x < 1$, zaś przy pomocy całek II^b i III^a wyrazić całkę ogólną odnoszącą się do wartości $x > 1$.

3°) $\beta_0 > 0, \ \gamma_0 - \beta_0 < 0, \ \alpha_0 > 0, \ \gamma_0 - \alpha_0 > 0;$

jeżeli w tym przypadku zamiast wyznaczenia granic dla całki (16), będziemy je wyznaczać dla całki

$$\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}\, du,$$

to trzecia, czwarta i druga z nierówności założenia wskazują, że są wypełnione warunki dla granic 0, 1 i $\pm\infty$ téj całki. Pierwsza zaś nierówność założenia nie dozwala, dla wszystkich, w tym przypadku możliwych, wartości argumentów α, β i γ wziąć, jako jednę z granic ilości $\frac{1}{x}$. Widzimy więc, że, dla utworzenia całki ogólnéj należy z sześciu całek typu (16) wziąć dla $x < 1$ całki $\mathrm{I}^a_{(\alpha)}$ i $\mathrm{II}^a_{(\alpha)}$, zaś dla $x > 1$ całki $\mathrm{II}^a_{(\alpha)}$ i $\mathrm{III}^b_{(\alpha)}$; gdzie wskazówka ($\alpha$) oznacza, że w całkach (16) argumenty α i β są między sobą przemieszczone.

Prowadząc podobne rozumowanie i w pozostałych sześciu przypadkach, dochodzimy do rezultatów, które dla wszystkich dziewięciu, możemy w ten sposób zestawić :

	β_0	$\gamma_0 - \beta_0$	α_0	$\gamma_0 - \alpha_0$	dla $x < 1$	dla $x > 1$
1)	+	+	+	+	I^a	
2)	+	+	—	+	I^a i II^b	II^b i III^a
3)	+	—	+	+	$\mathrm{I}^a_{(\alpha)}$ i $\mathrm{II}_{(\alpha)}$	$\mathrm{II}^a_{(\alpha)}$ i $\mathrm{III}^b_{(\alpha)}$
4)	+	—	+	—	II^a	II^a
5)	+	—	—	+		III^a
6)	+	—	—	—	I^b i II^a	II^a i III^a
7)	—	+	—	+	II^b	II^b
8)	—	—	—	+	$\mathrm{I}^b_{(\alpha)}$ i $\mathrm{II}^b_{(\alpha)}$	$\mathrm{II}^b_{(\alpha)}$ i $\mathrm{III}^b_{(\alpha)}$
9)	—	—	—	—	I^b	

§ 6. — Ztąd widzimy, że w przypadku 1, 4, 5, 7 i 9 albo ani jedna z sześciu całek typu (16) nie zatrzymuje znaczenia dla niektórych wartości zmiennéj x, albo téż pozostaje niedosyć całek, aby można było przez nie wyrazić całkę ogólną postaci (22) równania różniczkowego (2) dla wszystkich wartości zmiennéj x.

Dla tych przypadków, za pomocą pewnéj ogólnéj metody (*), Jacobi wyprowadził następujące całki zastępujące ten niedostatek.

W przypadku 1ym, dla wartości $x < 1$

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\right].\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+n-\gamma}dt, \tag{24}$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, dostatecznie wielką, aby $1-(\gamma_0-\alpha_0-n)>0$; dla wartości zaś $x > 1$ odpowiedniemi całkami będą

$$\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right].(t-x)^{n-\alpha}dt, \text{ przy } 1-(\alpha_0-n)>0, \tag{25}$$

$$\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right].(t-x)^{n-\beta}dt, \text{ przy } 1-(\beta_0-n)>0, \tag{26}$$

W przypadku 4ym, dla wartości $x < 1$

$$x^{-\alpha}\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\right].\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n-\alpha}dt, \text{ przy } 1-(\alpha_0-n)>0\,; \tag{27}$$

zaś dla $x > 1$

$$\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\right].(t-x)^{n-\beta}dt, \text{ przy } 1-(\beta_0-n)>0. \tag{28}$$

(*) Ta metoda wyłożona w §§ 2 i 19 memoaru Jacobi'ego.

W przypadku 5ym, dla wartości $x < 1$,

$$(29)\qquad (1-x)^{-\beta}\int_{\frac{x}{x-1}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\right].\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta}dt,\text{ przy } 1-(\beta_0-n)>0,$$

$$(30)\qquad x^{-\beta}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{-\alpha}\right].\left(t-\frac{1}{x}\right)^{\gamma+n-\beta-1}dt,\text{ przy } 1-(\beta_0+1-\gamma_0-n)>0;$$

zaś dla wartości $x > 1$, niedostającą całkę możemy przedstawić całką (29), biorąc w niej tylko, jako górną granicę, $+\infty$ i zachowując tenże sam warunek dla całkowitej n.

W przypadku 7ym, dla wartości $x < 1$,

$$(31)\qquad x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{-\beta}\right].\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n+\alpha-1}dt,\text{ przy } 1-(1-\alpha_0-n)>0;$$

zaś dla wartości $x > 1$

$$(32)\qquad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_{x}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\right].(t-x)^{n+\beta-1}dt,\text{ przy } 1-(1-\beta_0-n)>0.$$

Nakoniec, w przypadku 9ym, dla wartości $x < 1$

$$(33)\qquad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-\beta}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right].\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{n+\alpha-1}dt,\text{ przy } 1-(1-\alpha_0-n)>0;$$

zaś dla wartości $x > 1$

$$(34)\qquad x^{1-\gamma}\int_{x}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-1}(1-t)^{-\beta}\right].(t-x)^{\gamma+n-\alpha-1}dt,\text{ przy } 1-(1+\alpha_0-\gamma_0-n)>0;$$

$$(35)\qquad x^{1-\gamma}\int_{x}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\right].(t-x)^{\gamma+n-\beta-1}dt,\text{ przy } 1-(1+\beta_0-\gamma_0-n)>0.$$

ROZDZIAŁ II

§ 7. Zajmijmy sie teraz wyznaczeniem, dla jakich wartości zmiennéj x każda z całek, któremi może być, przy rozmaitych argumentach α, β i γ, przedstawiona całka ogólna równania

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

pozostaje już zawsze funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową zmiennéj x.

Całka (4)

$$\mathrm{I}^a \qquad \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$$

jest summą funkcyj zmiennéj x, z których każda jest już zawsze skończona, ciągła i jednowartościowa dla wszystkich punktów płaszczyzny zmiennéj x, za wyłączeniem linii łączącéj punkta $\frac{1}{u}$ i ∞, które to punkta, przy niektórych wartościach wykładnika α, mogą być punktami rozgałęzienia, albo też punktami przerwy tych funkcyj. Że zaś całkowanie odbywa się między granicami 0 i 1, to $\frac{1}{u}$ przyjmuje wartości od 1 do ∞, tak że pewna linia, siebie saméj nie przecinająca, a łącząca punkt 1 z ∞, będzie geometrycznem miejscem wszystkich możliwych punktów rozgałęzienia lub przerwy wszystkich elementów naszéj całki, jeżeli tylko te elementy uważamy jako funkcye zmiennéj x. Całka zatém nasza jest już zawsze funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich punktów płaszczyzny zmiennéj x, nie leżących na pewnéj, saméj siebie nie przecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $+1$ do ∞.

Jeżeli zaś całkowanie uskutecznimy po prostéj $0\ldots+1$, to ta linia jest prostą $+1\ldots+\infty$.

§ 8. Co się tyczy całki (17)

$$\mathrm{I}^b \qquad x^{1-\gamma}\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}u(1-u)^{-\alpha}(1-xu)^{\gamma-\beta-1}du$$

to do całki

$$\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{-\alpha}(1-xu)^{\gamma-\beta-1}du$$

możemy odnieść to wszystko, cośmy o całce w poprzedzającym § rozbieranéj powiedzieli, z tém tylko; że wykładnikowi $-\alpha$ tamtéj całki odpowiada tu wykładnik $\gamma-\beta-1$. Że zaś, przy niektórych wartościach argumentu γ, czynnik $x^{1-\gamma}$ całki I^b może mieć punkt $x=0$ punktem przerwy lub rozgałęzienia, to, połączywszy punkt $x=0$ z ∞ pewną linią, nieprzecinającą tak saméj siebie, jak i linii łączącéj punkt $+1$ z ∞, widzieliśmy wszystkie te punkta płaszczyzny zmiennéj x, dla których całka I^b może doznawać przerwy lub rozgałęzienia. Tak, że, w ogóle, całka I^b jest już zawsze funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, prócz punktów dwóch linij, łączących każdy z punktów 0 i $+1$ z ∞ i nieprzecinających tak każda saméj siebie, jak i jedna drugiéj.

Jeżeli całkowanie odbywa się według prostéj $0\ldots+1$ i jeżeli punkt $x=0$ połączymy linią prostą z $+\infty$, to wtedy całka jest funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, prócz punktów prostéj $0\ldots+\infty$. Możemy także punkt 0 połączyć prostą z $-\infty$ i wtedy prosta $0\ldots+\infty$ będzie zastąpiona dwiema prostemi $-\infty\ldots0$ i $+1\ldots+\infty$.

§ 9. W całce (18)

$$\mathrm{II}^a \qquad x^{-\alpha}\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\beta-1}\left(1-\frac{x-1}{x}u\right)^{-\alpha}du$$

$$1-\frac{x-1}{x}u$$

stać się może zerem dla wartości

$$x = \frac{u}{u-1};$$

skutkiem tego, ciągowi wartości dla u od 0 do 1 odpowiada ciąg wartości dla x od 0 do $-\infty$ i całka II^a, jest funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny $x - u$, prócz punktów saméj siebie przecinającéj linii poprowadzonéj z punktu 0 do 8, a jeżeli całkowanie odbywa się po prostéj $0 \ldots + 1$ to tą linią jest prosta $0 \ldots -\infty$.

Całka (19)

$$\text{II}^b \qquad x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x-1}{x}u\right)^{\gamma-\alpha}du$$

może mieć prócz tego jeszcze punkt krytyczny $x=1$, tak, że całka II^b pozostaje skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, prócz punktów, dwóch tak samych siebie jak i jedna drugiéj nieprzecinających, linij, poprowadzonych z punktów 0 i 1 do ∞. Jeśli całkujemy po prostej $0 \ldots 1$ i jeżeli punkt $x=1$ połączymy linią prostą z $+\infty$ to wtedy całka II^b jest skończona, ciągła i jednowartościowa we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, prócz punktów dwóch prostych $-\infty \ldots 0$ i $+1 \ldots +\infty$. Jeśliśmy zaś punkt $x=1$ połączyli prostą z $-\infty$ to te dwie linie zastąpi prosta $-\infty \ldots +1$.

§ 10. Podobném rozumowaniem odnajdziemy, że całka (20)

$$\text{III}^a \qquad x^{-\alpha}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}u\right)^{\gamma-\beta-1}du$$

pozostaje skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, nie leżących na dwóch liniach, nieprzecinających tak samych siebie, jak i jedna drugiéj, poprowadzonych jedna z punktu 0 do punktu 1, a druga z punktu 0 do ∞. Jeśli całkujemy po prostéj i punkt $x=0$ połączymy prostą z $+\infty$, to te dwie linie zastąpi prosta $0 \ldots +\infty$; jeśli zaś punkt : $x=0$ połączymy prostą z $-\infty$, to odpowiednią linią będzie prosta $-\infty \ldots +1$.

Co się zaś tyczy całki (21)

$$\text{III}^b \qquad x^{-\alpha}\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{1}{x}u\right)^{-\alpha}du,$$

to zauważmy, że po wniesieniu czynnika $x^{-\alpha}$ pod znak całkowania, całka ta da się zastąpić całką

$$\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(x-u)^{-\alpha}du,$$

która pozostaje skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich wartości zmiennéj x, nie odpowiadających na jéj płaszczyznie punktowi pewnéj, saméj siebie nie przecinającéj, linii, łączącéj punkta 0 i 1. Jeśli całkowanie odbywa się po prostéj, to tą linią jest prosta $0 \ldots +1$.

§ 11. W podobny sposób możemy roztrząsać całki § 6, uprzednio jednak trzeba odpowiednią zamianą zmiennéj niezależnéj wyrazić każdę z owych całek za pomocą całki ze stałemi granicami.

Tak całka (24) podstawieniem

$$t = \frac{1}{1-x}u$$

może być zastąpiona przez całkę

$$\int_1^\infty \frac{d^n}{du^n}[u^{\gamma-\beta-1}(1-x-u)^{-\alpha}].(1-u)^{\alpha+n-\gamma}du,$$

która jest funkcyą zmiennéj x skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny x, nie odpowiadających punktom pewnéj, saméj siebie nie przecinającéj, linii, poprowadzonéj z punktu 0 do nieskończoności, które to punkta mogą niekiedy być punktami przerwy lub rozgałęzienia naszéj całki. Jeśli całkowanie odbywa się po prostéj, to owa linia jest prostą $-\infty\ldots0$

Całki (25) i (26) podstawieniem

$$t=x-(x-1)u$$

dadzą się zastąpić przez całki

$$(1-x)^{-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[\left(u-\frac{x}{x-1}\right)^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\beta-\gamma-1}\right]u^{n-\alpha}du,$$

$$(1-x)^{-\alpha}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[\left(u-\frac{x}{x-1}\right)^{\beta-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\right]u^{n-\beta}du,$$

które pozostają skończone dla wszystkich wartości zmiennéj x, prócz odpowiadających punktom dwóch, samych siebie i jedna drugiéj nieprzecinających linij, jednéj, łączącéj punkta 0 i 1, a drugiéj, poprowadzonéj z punktu 1 do nieskończoności. Gdy będziemy całkować po prostéj, to pierwsza z tych linij zamieni się na prostę $0\ldots1$, a gdy całki te mają się (§ **6**) odnosić do wartości $x>1$, to jeśli wystawimy sobie punkt $+1$ połączony linią prostą z $-\infty$, to wtedy całki te pozostają skończonemi, ciągłemi i jednowartościowemi we wszystkich punktach płaszczyzny x, prócz punktów prostéj $-\infty\ldots+1$.

Całka (27) w skutek podstawienia

$$t=\frac{x-1+u}{x}$$

zamienia się na całkę

$$x^{1-\gamma}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}[(u-1+x)^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\beta-1}]u^{n-\alpha}du,$$

która zostaje skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich wartości x, prócz punktów linij, łączących punkta $+1$ i 0 z nieskończonością. Gdy ta całka ma się odnosić do $x<+1$, to, całkując po prostéj i łącząc prostą punkt $x=0$ z $-\infty$, poprzednie linie zastępujemy dwiema prostemi $-\infty\ldots0$ i $+1\ldots+\infty$.

Aby nie powtarzać więcéj tych samych wyrażeń, co do dalszych całek § **6**ego, przez skrócenie wymienimy tylko przy każdéj podstawienie, całkę w którą przez to podstawienie ona przechodzi, linie, które należy wyłączyć z płaszczyzny zmiennéj, a także te linie, w jakie poprzednie przechodzą, w razie całkowania po prostéj i łączenia pozostałych punktów krytycznych liniami prostemi z ∞.

Całka (28);

$$t=ux;$$

$$x^{-\alpha}\int_1^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}[u^{\beta-\gamma}(1-ux)^{\gamma-\alpha-1}](1-u)^{n-\beta}du,$$

linie, łączące 0 z 1 i 0 z ∞; prosta $-\infty\ldots+1$.

Całka (29) (*);

$$t = \frac{x}{x-1}(1-u)\,;$$

(36) $$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[(1-u)^{\beta-\gamma}(1-xu)^{\alpha-1}\right].\,u^{n-\beta}\,du$$

linie, łączące punkta 0 i 1 z ∞ proste $-\infty\ldots 0$ i $+1\ldots+\infty$.

Całka (30);

$$t = \frac{1+(x-1)u}{x}\,;$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[\{1-(1-x)u\}^{\alpha-\gamma}(1-u)^{-\alpha}\right].\,u^{\gamma+n-\beta-1}\,du$$

linia, łącząca punkt 1 z ∞; prosta $+1\ldots+\infty$.

Całka (31);

$$t = \frac{x-1+u}{x}\,;$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[(u-1+x)^{\beta-\gamma}(1-u)^{-\beta}\right].\,u^{n+\alpha-1}\,du;$$

linia, łącząca punkt $+1$ z ∞; prosta $+1\ldots+\infty$.

Całka (32);

$$t = x(1-u)\,;$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[(1-u)^{\gamma-\beta-1}\{1-x(1-u\}^{\alpha-\gamma}\right].\,u^{n+\beta-1}\,du;$$

linie, łączące punkta 0 i $+1$ oraz $+1$ z ∞; prosta $-\infty\ldots+1$.

Całka (33);

$$t = \frac{1-u}{1-x}\,;$$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[(1-u)^{-\beta}(u-x)^{\gamma-\alpha-1}\right].\,u^{-n+\alpha-1}\,du;$$

linie, łączące 0 i $+1$ z ∞; proste $-\infty\ldots 0$ i $+1\ldots+\infty$.

(*) Całka (29), gdy za górną granicę weźmiemy $+\infty$, odpowiada wartościom $x > 1$ w 5-tym przypadku (§ 6). Wtedy ta całka, témże samém podstawieniem

$$t = \frac{x}{x-1}(1-u)$$

gdyż tu mianownik jest już dodatny, gdy poprzednio był odjemny) przechodzi w całkę (36). Odpowiednie linie są: linie, łączące punkta 0 i 1 z ∞; prosta $-\infty\ldots+1$.

Całki (34) i (35);

$$t = x + (1 - x)\, u;$$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[\{x+(1-x)u\}^{\alpha-1}(1-u)^{-\beta}\right]u^{\gamma+n-\alpha-1}du,$$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{du^n}\left[\{x+(1-x)u\}^{\beta-1}(1-u)^{-\alpha}\right]u^{\gamma+n-\beta-1}du;$$

linie, łączące punkta 0 i $+1$ z ∞; prosta $-\infty \ldots +1$.

ROZDZIAŁ III

§ **12.** Z badań poprzedzającego rozdziału widzimy, że każda z dwóch całek szczególnych, za pomocą których może być przedstawiona całka ogólna równania

$$(2) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

przy wszelkich wartościach argumentów α, β i γ pozostaje zawsze funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową we wszystkich punktach płaszczyzny zmiennéj x, prócz jednéj, albo też dwóch z pomiędzy następujących trzech linij, nieprzecinających (każda) tak samych siebie, jak i jedna drugiéj; jednéj, łączącéj punkt 0 z punktem $+1$, drugiéj, łączącéj punkt 0 z ∞, i trzeciéj, łączącéj punkt $+1$ z ∞. Tak że, w ogóle, trzema krytycznemi (osobliwemi) punktami są punkta 0, $+1$, ∞.

Jeżeli całkowanie odbywa się po prostej, to te trzy linie mogą być następującemi prostemi: 1) $0\ldots+1$, 2) $+1\ldots+\infty$, 3) $-\infty\ldots0$.

§ **13.** Gdy hypergeometryczna funkcya, według określenia, może być przedstawiona za pomocą szeregu (1), dopókąd on nie przestaje być zbieżnym, t. j.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

a ten szereg jest zbieżnym dla wartości x, mających moduł mniejszy od jedności, to funkcya $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ jest dla tych wartości, a tém samém w punkcie $x = 0$ i około niego, funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową.

Ponieważ tedy punkt $x = 0$ nie jest krytycznym punktem funkcyi $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, to ta funkcya nie może doznawać przerwy lub rozgałęzienia w punktach tych z powyżéj wzmiankowanych linij, które łączą punkt $x = 0$ z innemi krytycznemi punktami jakiejkolwiek całki równania (2). Dlatego, z powyższych trzech linij należy wyłączyć od punktu $x = 0$ do punktu $x = +1$, jak również linię, idącą od punktu $x = 0$ do nieskończoności (ta linia nie przechodzi przez punkt $x = +1$). Tym sposobem pozostaje tylko linia, łącząca punkt $x = +1$ z nieskończonością.

Gdy owe linie są w poprzednim paragrafie wyliczonemi prostemi, to wypada wyłączyć proste $-\infty \ldots 0$ i $0 \ldots +1$, tak że pozostaje tylko prosta $+1 \ldots +\infty$.

Widzimy zatém, że hypergeometryczna funkcya $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (*) pozostaje zawsze skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich wartości zmiennéj x, nie odpowiadających na płaszczyźnie $x-u$ punktom pewnéj, saméj siebie nieprzecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $x=+1$ do ∞, którą można zastąpić prostą $+1\ldots+\infty$.

§ **14**. Że punkt $x=+1$ może być istotnie punktem krytycznym funkcyi $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, objaśnią najlepiéj przykłady. Tak

$$F(1, 1, 2, x) = -\frac{\log(1-x)}{x};$$

jakoż, dla $x=+1$, funkcya $F(1, 1, 2, x)$ nie ma wartości skończonéj. Jak tylko na płaszczyźnie zmiennéj x z punktu $x=+1$ poprowadzimy saméj siebie nie przecinającą linię do nieskończoności, od pewnéj wartości naszéj funkcyi, odpowiadającéj jakiemukolwiek, na téj linii nie leżącemu, punktowi płaszczyzny $x$ów, do innéj wartości podobnéj, będziemy mogli (nieprzekroczywszy owéj linii) dojść, nie doznając przerwy albo rozgałęzienia.

Podobnie funkcya

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^{-2}\right) = \frac{x}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{x}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{x-u}$$

mieć będzie linię punktów przerwy lub rozgałęzienia, wychodzącą z punktu $x^{-2}=+1$ do $x^{-2}=\infty$, czyli dwie linie (nie przecinające tak samych siebie, jak i jedna drugiéj): jednę, łączącą punkta $x=+1$ i $x=0$, drugą zaś łączącą punkta $x=-1$ z $x=0$. Tak, że, jeżeli całkowanie odbywa się po prostéj, to te linie zamieniają się na prostę $-1\ldots+1$.

Weźmy jeszcze taki przykład. Przy nieskończenie wzrastającém k, jest

$$F\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right) = e^x;$$

ta funkcya (**) ma doznawać przerwy na linii od $\frac{x}{k}=+1$ do nieskończoności, czyli od $x=k$ do nieskończoności. Lecz, gdy k jest nieskończenie wielkie, to nasza funkcya e^x jest skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich skończonych wartości x.

§ **15**. Można jeszcze w taki sposób bezpośrednio dowieść, że hypergeometryczna funkcya $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pozostaje zawsze skończoną, ciągłą i jednowartościową dla rzeczywistych odjemnych wartości zmiennéj x.

Wyprowadzone w § **2**im przekształcenia Euler'a (8) i (9) otrzymane były z porównania całek, które mają znaczenie tylko przy niektórych wartościach argumentów α, β i γ. Łatwo sprawdzić przygodność tych formuł i wtedy, kiedy owym warunkom dla całek nie staje się zadosyć.

(*) Ta funkcya może być niekiedy racyonalną funkcyą zmiennéj x i wtedy jest skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich skończonych wartości x. Np. przy n całkowitém i odjemném

$$F(1, n, 1, x) = (1-x)^{-n}.$$

(**) Równanie różniczkowe (2), któremu ta hypergeometryczna funkcya zadosyć czyni, jest

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dx}{dy} - y = 0.$$

Funkcya $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, mogącą być przedstawioną dla wartości zmiennéj x, mających moduł mniejszy od 1, za pomocą szeregu

$$(a) \qquad y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 . \gamma} x + \ldots,$$

zadosyć czyni równaniu

$$(b) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Przyjmijmy

$$(c) \qquad x = \frac{s}{s-1};$$

wtedy równanie (b) przejdzie w następujące:

$$s(1-s)^2\frac{d^2y}{ds^2} + (1-s)[\gamma + (\alpha + \beta - \gamma - 1)\, s]\frac{dy}{ds} - \alpha\beta y = 0.$$

Czyniąc w tém równaniu

$$(d) \qquad y = (1-s)^m z$$

i dzieląc, następnie, jego wyrazy przez $(1-s)^m$, otrzymujemy

$$(e) \quad s(1-s)^2\frac{d^2z}{ds^2} + (1-s)[\gamma - (\alpha + \beta - \gamma - 2m - 1)\, s]\frac{dz}{ds} + \{m^2 s + [(\gamma - \alpha - \beta)\, s - \gamma]\, m + \alpha\beta\}\, z = 0.$$

Ażeby wszystkie współczynniki w tem równaniu były podzielne przez $(1-s)$, t. j. żeby ono mogło być sprowadzoném do takiego równania, jak równanie (b), należy liczbie m dać taką wartość, aby współczynnik przy z był wielokrotnością ilości $1-s$. To będzie mieć miejsce, gdy liczbie m damy jednę z dwóch wartości

$$m = \alpha, \quad m = \beta.$$

Dla pierwszéj z tych wartości, równanie (b) przejdzie w równanie

$$s(1-s)\frac{d^2z}{ds^2} + \{\gamma - [\alpha + (\gamma - \beta) + 1]\, s\}\frac{dz}{ds} - \alpha(\gamma - \beta)z = 0,$$

zkąd widoczna, że temu równaniu zadosyć czyni hypergeometryczna funkcya

$$z = F(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, s),$$

mogąca być dla wartości s, mających moduł mniejszy od 1, przedstawioną zbieżnym szeregiem

$$z = 1 + \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{1 . \gamma} s + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\gamma - \beta)(\gamma - \beta + 1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma + 1)} s^2 + \ldots$$

czyli szeregiem

$$(f) \qquad z = 1 + \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{1 . \gamma}\,\frac{x}{x-1} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\gamma - \beta)(\gamma - \beta + 1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma + 1)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \ldots$$

Zatém, na zasadzie związków (c) i (d), otrzymujemy

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

t. j. formułę (8). Formułę zaś (9) otrzymamy w podobny sposób, przy $m = \beta$.

Gdy funkcya

$$(g)\qquad (1-x)^{-\alpha} z = (1-x)^{-\alpha}\left[1 + \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{1.\gamma}\,\frac{x}{x-1} + \ldots\right]$$

Zadosyć czyni równaniu różniczkowemu (h) i gdy

$$[(1-x)^{-\alpha} z]_{x=0} = 1,$$

$$\left[\frac{d}{dx}(1-x)^{-\alpha} z\right]_{x=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

to funkcya (g), dópóki szereg z jest zbieżnym, przedstawia hypergeometryczną funkcyę F (α, β, γ, x), według jéj określenia, danego w § 1szym. A ponieważ szereg z, t. j. szereg (f) jest zbieżnym dla wartości $-1 < s < 1$; zaś ciągowi wartości s od -1 do $+1$ odpowiada na mocy związku (c), ciąg wartości x od $+\frac{1}{2}$ do $-\infty$, to hypergeometryczna funkcya F (α, β, γ, x) jest funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich odjemnych wartości zmiennéj x.