ROZWINIĘCIE NA UŁAMEK CIĄGŁY

STOSUNKU

DWOCH ZUPEŁNYCH CAŁEK ELIPTYCZNYCH PIERWSZEGO I DRUGIEGO GATUNKU

PRZEZ

DRA M. A. BARANIECKIEGO.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 4 lutego 1875 roku.

§ 1

Szereg

$$(1) \qquad 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots,$$

przy dowolnych, w ogóle, parametrach α, β i γ (na którego własności pierwszy Euler (*) zwrócił był uwagę), nazywany bywa szeregiem hypergeometrycznym (**). W przypadku, gdy α lub β jest całkowite i odjemne, np. $=-m$, parametr γ nie może mieć takiego całkowitego odjemnego znaczenia, któregoby wartość liczebna była mniejsza od m; we wszystkich zaś pozostałych przypadkach γ nie może być ani zerem, ani téż liczbą całkowitą odjemną. Jeżeli α lub β mają znaczenie zera lub odjemnéj liczby całkowitéj, która nie jest jednocześnie znaczeniem parametru γ, to szereg (1) składa się ze skończonéj liczby odpowiednio $1-\alpha$ lub $1-\beta$ pierwszych jego wyrazów i przedstawia funkcyę

(*) W przedstawionym w 1778 r. Petersburskiéj akademii nauk memuarze *Specimen transformationis singularis serierum*, a wydrukowanym w 1801 r. w XII-ym tomie *Nowa Acta Academiæ Imperialis Petropolitanæ*.

(**) W pierwszym Numerze *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* z roku 1857, w sprawozdaniu o znanéj pracy Riemann'a (ogłoszonéj póżniéj w VIIym tomie *Abhandlungen* tegoż towarzystwa), znajdujemy takie objaśnienie téj nazwy : « Tak dziś zwyczajna nazwa : szereg hypergeometryczny była jeszcze przed tém zaproponowaną przez Jana Fryderyka Pfaff'a dla szeregów ogólniejszych, w których stosunek pewnego wyrazu do poprzedzającego jest racyonalna funkcya jego skaźnika miejsca; gdy tymczasem Euler, za przykładem Wallis'a, rozumiał przez nią taki szereg, w którym ten stosunek jest całkowita funkcya pierwszego stopnia skaźnika miejsca ».

racyonalną. Nakoniec w przypadku, kiedy $\alpha=\gamma=-m$, lub $\beta=\gamma=-m$, przy m całkowitém i dodatném, w liczniku i mianowniku wyrazów szeregu (1) będą zachodzić spólne czynniki i skutkiem tego, te parametry α i γ, lub β i γ, mogą mieć jakiekolwiek wartości, tak, że w ogóle można przyjąć, że w nieskończonych szeregach hypergeometrycznych parametr γ nie jest ani zerem, ani też liczbą całkowitą odjemną.

Jeżeli parametry α i β są różne od zera i nie są liczbami całkowitemi odjemnemi, to wiele przestępnych funkcyj może być wyrażonych za pomocą szeregu (1), dopóki on nie przestaje być zbieżnym.

Stosunek $(m+1)$ wyrazu tego szeregu, do wyrazu poprzedzającego jest

$$\frac{(\alpha+m-1)(\beta+m-1)}{m(\gamma+m-1)}\,x=\frac{\left(1+\dfrac{\alpha-1}{m}\right)\left(1+\dfrac{\beta-1}{m}\right)}{1+\dfrac{\gamma-1}{m}}\,x.$$

Gdy m wzrasta do nieskończoności, stosunek ten zbliża się do $1.x$; szereg więc ten jest zbieżnym dla wszystkich znaczeń zmiennéj x, których moduł jest mniejszy od jedności.

Po Eulerze, szczegółowém badaniem własności szeregu hypergeometrycznego zajmował się Gauss (*). Dlatego Niemcy ten szereg nazywają Gauss'owym szeregiem. On także wprowadził powszechnie dziś używany symbol $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dla oznaczania tego szeregu, tak że

$$(2)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

Ponieważ szereg (1) jest symetryczny względem parametrów α i β, to $F(\alpha, \beta, \gamma, x)=F(\beta, \alpha, \gamma, x)$.

§ 2

$(m+1)$-szy wyraz szeregu (1), t. j. szeregu

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_m\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}x^m,$$

może uledz takiemu przekształceniu:

$$\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)\,\beta\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m\gamma\ldots(\gamma+m-1)}x^m=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\Gamma(m+\beta)}{\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(m+\gamma)}x^m,$$

$$=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\Gamma(m+\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(m+\gamma)}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}x^m,$$

$$=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}x^m\int_0^1 u^{m+\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du,$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left[\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)\,u^m}{1.2\ldots m}x^m\right]du,$$

(*) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+$ etc. (*Commentationes Göttingensis*, tom II, *Werke*, tom III). Tym szeregiem zajmował się jeszcze Gauss w znanéj rozprawie o mechanicznych kwadraturach i pośmiertnéj pracy: *Determinatio seriei nostræ per æquationem* etc. (*Werke*, tom III-ci.)

tak że

$$1+\sum_m \frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)\beta\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m\gamma\ldots(\gamma+m-1)}x^m$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left[1+\sum_m \frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)u^m}{1.2\ldots m}x^m\right]du.$$

Lecz

$$1+\sum_m \frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}u^m x^m=(1-xu)^{-\alpha},$$

zatém

$$(3)\quad 1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du.$$

To przekształcenie (3) szeregu hypergeometrycznego podał był Kummer w rozprawie « *Ueber die hypergeometrische Reihe* $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+$ etc. (*). Aby całka po prawéj stronie wzoru (3) miała znaczenie i mogła być używaną, potrzeba, aby liczby β i $\gamma-\beta$ były dodatne; jeżeli zaś są to liczby złożone (kompleksne), to trzeba, aby ich rzeczywiste części były dodatnemi. Zauważyć należy, że wyrażenie po prawéj stronie wzoru (3) nie traci znaczenia dla tych wartości zmiennéj, dla których szereg po lewéj staje się rozbieżnym. Rozważeniem kwestyi, jak da się wyrazić funkcya F$(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dla znaczeń zmiennéj x, których moduł nie jest mniejszy od jedności, a także, jakim sposobem wyrazić tę funkcyę za pomocą całek w przypadku, kiedy parametrom nadajemy takie wartości, że całka, wypisana we wzorze (3) nie może być użytą, zajmował się Kummer w tylko co wspomnianéj pracy. Wyjaśnienia jednak zupełne dają dopiero badania, jakie prowadził Jacobi w memuarze « *Untersuchungen ueber die Differenzialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (**) », a także (choć na całkiem odmiennéj drodze) Riemann w « *Beitræge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* F$(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen* (***) ». Badania te są oparte na rozpatrywaniu znanego równania różniczkowego

$$(4)\qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

którego całką szczególną jest szereg (1), jak o tém można łatwo się przekonać, za pomocą całkowania równania(4) przez szeregi.

Tutaj zrobimy tylko uwagę, że zachodząca we wzorze (3) całka

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

jest summą funkcyj zmiennéj x, z których każda jest skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich znaczeń zmiennéj x, za wyłączeniem pewnéj, saméj siebie nie przecinającéj linii, łączącéj

(*) *Journal* Crelle'a, XV tom.

(**) *Journal* Crelle'a, LVI tom, a także Jacobi. *Werke*, tom III. Rezultaty tych dwóch prac są zestawione w pierwszych dwóch rozdziałach mojéj rozprawy, drukowanéj po rusku p. t. « O hipergeometriczeskich funkcjach ». Moskwa w drukarni uniwersyteckiéj, 1873.

(***) *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* Tom VII.

punkta $\frac{1}{u}$ i ∞, które to punkta, przy niektórych wartościach wykładnika α, mogą być punktami rozgałęzienia, albo też przerwy tych funkcyj. Że zaś całkowanie odbywa się według u między granicami 0 i 1, to $\frac{1}{u}$ przyjmuje ciąg wartości od $+1$ do ∞, tak, że pewna linia, nieprzecinająca saméj siebie, a łącząca punkt $+1$ z ∞, jest geometrycznem miejscem wszystkich możliwych niekiedy punktów rozgałęzienia lub przerwy wszystkich elementów naszéj całki, jeżeli tylko te elementa uważamy jako funkcye zmiennéj x. Całka zatém zawsze jest już funkcyą skończoną, ciągłą i jednowartościową dla wszystkich punktów płaszczyzny zmiennéj x, za wyłączeniem punktów leżących na pewnéj, saméj siebie nieprzecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $+1$ do ∞. Jeżeli zaś całkowanie uskuteczniamy po prostéj, to linia ta jest prostą $+1 \ldots +\infty$.

§ 3

Na mocy oznaczenia (2), możemy wzór (3) tak pisać:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^1 v^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

zkąd

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x). \tag{5}$$

Przyjmując tu

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

$$x = k^2, \qquad u = v^2,$$

i zważywszy, że

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

otrzymujemy:

$$F = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right). \tag{6}$$

Czyniąc też same założenia w równaniu (4), i zważywszy, że przy nich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k}\frac{dy}{dk},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4k^2}\frac{d^2y}{dk^2} - \frac{1}{4k^3}\frac{dy}{dk},$$

widzimy, że zupełna całka eliptyczna pierwszego gatunku zadosyć czyni równaniu różniczkowemu

$$k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2} + (1-k^2)\frac{dy}{dk} + ky = 0,$$

które Briot i Bouquet w *Théorie des fonctions doublement périodiques* (*) otrzymują za pomocą działań bardzo skomplikowanych.

Przyjmując we wzorze (5)

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

$$u = v^2, \quad x = k^2,$$

mamy zeń

$$\text{(7)} \qquad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du = \frac{\pi}{2}\,F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right).$$

§ 4

Weźmy

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) = 1 + \frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2 + \ldots;$$

odejmując drugą równość od pierwszéj, mamy

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) - F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)}x\left[1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1.(\gamma+2)}x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2 + .\right],$$

to jest

$$\text{(8)} \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) - F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x),$$

zkąd

$$\text{(9)} \qquad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\,\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}}.$$

Tutaj stosunek

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)} = \frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}$$

może być według wzoru (9), tak wyrażony

$$\frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\,\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}}.$$

Postępując takimże samym sposobem, tak ze stosunkiem:

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)},$$

(*) § 235. To równanie wyprowadzone jest u Legendre'a w *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, § 46.

jak i z każdym po kolei, takim sposobem otrzymywanym, z tych wszystkich wyrażeń mamy następujące, podane przez Gauss'a, rozwinięcie na ułamek ciągły:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots-\cfrac{a_{n-2}x}{1-a_{n-1}x\cdot\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}}}}}, \tag{10}$$

gdzie

$$a_{2m}=\frac{(\beta+m)(\gamma+m-\alpha)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},$$

$$a_{2m+1}=\frac{(\alpha+m)(\gamma+m-\beta)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)},$$

$$\varphi_{2m}=F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m,x),$$

$$\varphi_{2m+1}=F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,x).$$

Jeżeli wciąż dalej będziemy wyrażać według wzoru (9) każde $\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$, to przy wciąż zwiększającém się n, stosunek

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$

rozwija się według wzoru (10) na ułamek ciągły skończony tylko w tym przypadku, kiedy albo α, albo β, albo $\gamma-\alpha$, albo nakoniec $\gamma-\beta$ są liczbami całkowitemi i odjemnemi. W innych zaś przypadkach, przy nieskończenie rosnącém n, otrzymujemy nieskończony ułamek ciągły

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots-\cfrac{a_{n-2}x}{1-\cfrac{a_{n-1}x}{1-\ddots}}}}},$$

który, jak to dowiódł L. Thomé (*), jest ułamkiem zbieżnym i mianowicie zdążającym do stosunku

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}.$$

(*) *Ueber die Kettenbruchentwickelung des Gauss'schen Quotienten* $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$. *Journal* Crelle'a, LXVII tom.

dla wszystkich wartości zmiennéj x, za wyłączeniem tych, które odpowiadają na płasczyznie zmiennéj x punktom pewnéj, siebie saméj nieprzecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $+1$ do ∞, (porównaj § 2), jak również tych, które przywodzą do zera funkcyę $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

§ 5

Odejmując $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$ od $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, znajdziemy w podobny sposób, jak wyżéj wzór (8), że

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) = -\frac{\beta}{\gamma} x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$$

zkąd

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \frac{\beta}{\gamma} x \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}}, \tag{11}$$

gdzie już stosunek

$$\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}$$

może być daléj rozwijany na ułamek ciągły według wzoru (10). Takim sposobem otrzymujemy

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{b_1 x}{1 - \cfrac{b_2 x}{1 - \cdots - \cfrac{b_{n-2} x}{1 - \cfrac{b_{n-1} x}{1 - \cdots}}}}}, \tag{12}$$

gdzie

$$b_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad b_2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},$$

a w ogóle, przy m większém od zera,

$$b_{2m} = \frac{(\alpha+m)\ (\gamma+m-1-\beta)}{(\gamma+2m-2)(\gamma+2m-1)},$$

$$b_{2m+1} = \frac{(\beta+m)(\gamma+m-\alpha-1)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)}.$$

Z wyrażenia (11) widoczna, że do rozwinięcia na ułamek ciągły stosunku

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} \tag{13}$$

można to odnieść, co w poprzedzającym paragrafie było powiedziane o rozwinięciu na ułamek ciągły stosunku

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

tak, że możemy powiedzieć, iż ułamek ciągły we wzorze (12) jest zbieżny i zdąża do granicy (13), dla wszystkich wartości zmiennéj x, nieodpowiadających na jéj płaszczyźnie punktom pewnéj, saméj siebie nieprzecinającéj linii, poprowadzonéj z punktu $+1$ do ∞; wyłączając przytém jeszcze znaczenia, dla których $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ma wartość zero.

§ 6

Przypatrując się wyrażeniom (6) i (7), widzimy, że możemy według wzoru (12) rozwinąć stosunek zupełnéj całki eliptycznéj pierwszego gatunku do takiéjże całki drugiego gatunku na następujący ułamek ciągły :

$$\frac{F'}{E'}=\frac{F\left(+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{2}k^2}{1-\cfrac{\frac{1}{8}k^2}{1-\cfrac{\frac{3}{8}k^2}{1-\cfrac{\frac{3}{16}k^2}{1-\cfrac{\frac{5}{16}k^2}{1-\cfrac{\frac{5}{24}k^2}{1-\,.}}}}}}}$$

Ten ułamek ciągły jest szybko zbieżnym i zdąża w granicy do stosunku

$$\frac{F'}{E'},$$

dla wszystkich wartości modułu k, prócz tych, które odpowiadają na jego płasczyznie punktom dwóch linij, nieprzecinających tak samych siebie, jak i jedna drugiéj, a wyprowadzonych z punktów $+1$ i -1 do ∞.