O RÓWNANIU RÓŻNICZKOWÉM

$$Xdx + X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots\ldots + X_ndx_n = 0$$

CAŁKOWALNÉM PRZEZ JEDNO RÓWNANIE PIERWOTNE.

PRZEZ

WŁADYSŁAWA ŻAJĄCZKOWSKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 18 lipca 1874 r.).

1. Równanie różniczkowe rzędu i stopnia 1° pomiędzy $n+1$ zmiennemi.

(1) $$Xdx + X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_ndx_n = 0,$$

w którém współczynniki X, X_1 X_2... X_n, są funkcyami wyraźnemi zmiennych x, x_1, x_2..., x_n, jest całkowalném przez jedno równanie pierwotne jednę stałę dowolną zawierające, jeżeli jego spółczynniki czynią zadość pewnym warunkom, zwanym warunkami całkowalności.

Jakoż, piszmy równanie (1) pod postacią:

(1^{bis}) $$x = -\frac{X_1}{X}dx_1 - \frac{X_2}{X}dx_2 - \ldots - \frac{X_n}{X}dx_n$$

i dajmy, że równanie pierwotne

(2) $$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n, C) = 0$$

ze stałą dowolną C jest jego całką ogólną. Jeżeli wtedy z równania (2) wyznaczymy x przez x_1, x_2,... x_n, C i wartość otrzymaną

(2^{bis}) $$x = x(x_1, x_2, \ldots x_n, C)$$

podstawimy w równanie (1^{bis}), mieć będziemy tożsamość; będzie więc :

$$\frac{\partial x}{\partial x_h} = -\frac{X_h}{X}, \qquad h = 1, 2, \ldots n, \tag{3}$$

a przeto także :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{X_i}{X}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{X_k}{X}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n-1, \quad i < k \leqq n,$$

albo, ponieważ należy teraz uważać zmienną x jako funkcyę ilości $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{X_i}{X}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_i}{X}\right)\frac{\partial x}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{X_k}{X}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_k}{X}\right)\frac{\partial x}{\partial x_i} = 0.$$

Wykonawszy wskazane różniczkowania cząstkowe i podstawiwszy za $\frac{\partial x}{\partial x_i}$ i $\frac{\partial x}{\partial x_k}$ wartości podane we wzorze (3), otrzymamy wyrażenie :

$$X\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) + X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x}\right) = 0. \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots n-1, \quad i < k \leqq n.$$

Wyrażenie to powinno stać się tożsamością, gdy w niém podstawimy za x wartość (2^{bis}); a że rzeczone podstawienie wprowadza stałę dowolną C, równanie więc (4) powinno być tożsamościowém także przed wykonaniem podstawienia.

A zatém : « jeżeli równanie (1) jest całkowalném przez jedno równanie pierwotne, wtedy spółczynniki $X, X_1, \ldots X_n$ muszą uczynić zadość $\frac{1}{2}n(n-1)$ warunkom całkowalności (4) ». Warunki całkowalności (4) można symbolicznie pisać pod postacią wyznacznika :

$$\begin{vmatrix} X, & X_i, & X_k, \\ \partial X, & \partial X_i, & \partial X_k, \\ \frac{1}{\partial x}, & \frac{1}{\partial x_i}, & \frac{1}{\partial x_k}, \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n-1, \quad i < k \leqq n. \tag{4^{bis}}$$

Jeżeli równanie (1) przywiedziemy do postaci :

$$dx = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \, dx_i, \tag{6}$$

natenczas warunki całkowalności przywiodą się do postaci :

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + X_k\frac{\partial X_i}{\partial x} - X_i\frac{\partial X_k}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n-1, \quad i < k \leqq n. \tag{7}$$

Wynalezione dopiero warunki całkowalności, znajdujące się już u Eulera (*Institutiones calculi integralis*, vol III, str. 1 i następne), są nie tylko konieczne, ale także wystarczające ; albowiem, gdy są dopełnione, może być całka ogólna równania pod postacią jednego równania pierwotnego z łatwością wynaleziona.

2. Według sposobu podanego przez Eulera (*loco citato*), sprowadza się całkowanie równania (1) lub (6), gdy warunki całkowalności są dopełnione, do całkowania n równań różniczkowych rzędu 1° między dwiema zmiennemi.

Jakoż, uważając ilości $x_2, \ldots x_n$ jako stałe, równanie (6) sprowadzimy do następującego :

$$dx = X_1 dx_1 \tag{8}$$

między dwiema zmiennemi x, x_1. Niech

$$f(x, x_1, x_2 \ldots x_n) = c \tag{9}$$

będzie równania (8) całką ogólną, a przeto niech będzie tożsamościowo :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

Ponieważ przy tém całkowaniu uważaliśmy ilości $x_2, \ldots x_n$ jako stałe, stałę więc całkowania c należy uważać jako funkcyę dowolną ilości $x_2, \ldots x_n$.

Otóż, gdy warunki całkowalności są dopełnione, możemy tę funkcyę dowolną tak wyznaczyć, że równanie pierwotne (9) czynić będzie zadość danemu równaniu różniczkowemu (6).

Różniczkując w tym celu równanie (9) względem wszystkich zmiennych i z otrzymanego równania

$$dc = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

rugując x i dx za pomocą (9) i (6), otrzymamy na wyznaczenie ilości c równanie różniczkowe następujące :

$$dc = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx_i,$$

albo ponieważ według (10) $\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$,

$$dc = \sum_{i=2}^{=n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial f}{\partial x} \right) \partial x_i. \tag{11}$$

Ażeby jednak z równania (11) można było wyznaczyć c, jako funkcyę ilości $x_2 \ldots x_n$, spółczynniki $\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial f}{\partial x}$, po wyrugowaniu z nich x za pomocą (9), nie powinny w sobie zawierać także zmiennéj x_1, co według znanego twierdzenia Jacobiego o wyznaczniku funkcyjnym miejsce mieć będzie, gdy zachodzić będą tożsamości następujące :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial c_1}, & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{vmatrix} = 0, \quad i = 2, \ldots n. \tag{12}$$

Rozwijając napisany dopiero wyznacznik i uważając, że według (10) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -X_1 \frac{\partial f}{\partial x}$, mieć będziemy po opuszczeniu wspólnego czynnika $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} + X_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_i} + X_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x} + X_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial X_i}{\partial x}\right) = 0,$$

różniczkując zaś tożsamość (10) cząstkowo względem x_i i x i uważając że :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} + X_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x} + X_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial x},$$

mieć będziemy po podstawieniu tych wartości :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + X_1 \frac{\partial X_i}{\partial x} - X_i \frac{\partial X_1}{\partial x}\right\} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + X_1 \frac{\partial X_i}{\partial x} - X_i \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0,$$

równanie, które jest tożsamościowém, jest ono bowiem jednym z warunków całkowalności (7).

Równanie (11) zawierać będzie tylko n ilości zmiennych c, $x_2 \ldots x_n$, a nadto, ponieważ wyprowadziliśmy je z równania danego (6) przez wprowadzenie zmiennych c, x_1, $x_2 \ldots x_n$, zamiast zmiennych $x, x_1 x_2, \ldots. x_n$, wprowadzenie zaś nowych zmiennych nie zmienia natury równania, spółczynniki więc równania (11) dopełnią warunków całkowalności analogicznych warunkom (7); a zatém równanie (11) będzie także całkowalne przez jedno równanie pierwotne.

Postępując z równaniem (11) tak samo, jakeśmy postąpili z równaniem danem, otrzymamy inne równanie całkowalne, zawierające już tylko $n - 1$ zmiennych, i t. d.

3. Sposób wyłożony w artykule poprzedzającym, jest w tém niedogodny, że każde następujące równanie, do którego sprowadza się całkowanie równania danego, może być utworzone dopiéro po zcałkowaniu wszystkich poprzedzających równań. Tę niedogodność można usunąć, gdy zamiast całki ogólnéj szukać będziemy całki nazwanéj przez Jacobiego (*Crelle Journal*, tom XVII) główną, t. j. gdy za stałę całkowania brać będziemy wartość początkową zmiennéj zależnéj, czyli wartość dowolną, którą zmienna zależna przyjmuje przy wartości szczególnéj na zmienną niezależną.

Jakoż, oznaczając przez x^0 wartość dowolną, którą według (9) zmienna zależna x przyjmie, jeżeli za zmienną niezależną x_1 podstawimy jakąś wartość szczególną x_1^0 (np. 0), mieć będziemy :

$$f(x^0, x_1^0, x_2, \ldots x_n) = c,$$

a przeto także

$$f(x, x_1 x_2, \ldots x_n) - f(x^0, x_1^0, x_2, \ldots, x_n)] = 0,$$

zkąd :

(13) $$x = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, x^0).$$

Uważając teraz x^0 jako funkcyę dowolną ilości $x_2, x_3, \ldots x_n$ i podstawiając na x wartości (13) w równaniu (6), otrzymamy na wyznaczenie téj funkcyi x^0 równanie :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}dx^0=\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dx_i,$$

albo, gdy podzielimy przez $\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$ i zauważymy, że $X_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0$, gdyż $x=\varphi$ jest całką równania $dx=X_1\,dx_1$; równanie następujące,

$$dx^0=\sum_{i=2}^{i=n}\frac{X_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}}dx_i. \tag{14}$$

Równanie (14) nie różni się niczém od równania (11), spółczynniki więc jego, po wyrugowaniu z nich zmiennéj x za pomocą równania (13), nie będą w sobie zawierały także zmiennéj x_1. Wiedząc, to, możemy w równaniu (14) podstawić $x_1=x_1^0$. A że wtedy $\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}=\frac{\partial x^0}{\partial x^0}=1$, a $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial x^0}{\partial x_i}=0$, gdyż dla $x_1=x_1^0$, jest $x=\varphi=x^0$; jeżeli więc oznaczymy przez X_i^0 wartość, którą spółczynnik X_i przyjmie, gdy w nim podstawimy $x_1=x_1^0$ a $x=x^0$, równanie (14) zamieni się na następujące :

$$dx^0=\sum_{i=2}^{i=n}X_i^0\,dx_i. \tag{15}$$

Postępując z równaniem (15) tak samo, jakeśmy postąpili z równaniem (6), t. j. oznaczając znowu przez $x^{0^0}=x^{0^2}$ wartość, którą x^0 przyjmie, gdy zamiast x_2 podstawimy wartość szczególną x_2^0, albo którą przyjmie x, gdy za x_1 i x_2 podstawimy x_1^0 i x_2^0, tudzież oznaczając przez $X_i^{0^0}=X_i^{0^2}$ wartość, którą przyjmie spółczynnik X_i, gdy w nim podstawimy $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $x=x^{0^2}$, przywiedziemy wtedy równanie (15) do następującego :

$$dx^{0^2}=\sum_{i=1}^{i=n}X_i^{0^2}dx_i, \tag{16}$$

i. t. d.

A zatém, jeżeli oznaczymy ogólnie przez $x^{0^{p-1}}$ wartość, którą x przyjmie gdy za x_1, x_2, ... x_{p-1} podstawimy odpowiednio x_1^0, x_2^0, ... x^0_{p-1} a przez $X_i^{0^{p-1}}$ wartość spółczynnika X_i dla $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0,\ldots,x_{p-1}=x^0_{p-1}$, $x=x^{0^{p-1}}$, wtedy równania pomiędzy dwiema zmiennemi, które celem otrzymania całki ogólnéj równania (6) należy całkować, wyrażą się pod postacią :

$$dx^{0^{p-1}}=X_p^{0^{p-1}}dx_p,\qquad p=1,\ 2,\ldots n; \tag{1}$$

jeżeli bowiem wynajdziemy tych równań całki główne i pomiędzy temi całkami wyrugujemy $n-1$ ilości x^0, x^{0^2} ....,$x^{0^{n-1}}$, otrzymamy równanie pierwotne kształtu :

$$F(x,x_1,x_2,\ldots x_n)=x^{0^n}, \tag{18}$$

w którém x^{0^n} jest stałą dowolną.

Uproszczenie tu wyłożone podał Natani (*Crelle Journal*, tom LVIII, str. 304).

4. Z równania (15) czytamy bezpośrednio, że jeżeli

$$X_i^0 = 0, \quad i = 2, \ldots n,$$

wtedy $dx^0 = 0$, a zatém $x^0 =$ stałéj. W tym przypadku równanie (13) będzie całką ogólną równania danego (6), a przeto dla jéj otrzymania wystarczy całkować tylko pierwsze z pomiędzy równań (17).

Do tego przypadku, pozornie bardzo szczegółowego, można zawsze sprowadzić równanie (6) przez stosowne przerobienie.

Jakoż, wprowadźmy do równania (6) za $x_1, x_2, \ldots x_n$ nowe zmienne $y_1, y_2, \ldots y_n$ za pomocą podstawień :

$$x_i = x_i^0 + (y_1 - y_1^0)\chi_i(y_1, y_2, \ldots y_n), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{19}$$

w których x_i^0 i y_1^0 są wartości szczególne ilości x_i i y_1 a χ_i oznaczają funkcye zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$ pomiędzy sobą niezależne, tedy otrzymamy nowe równanie :

$$dx = \sum_{h=1}^{h=n} Y_h\, dy_h, \tag{20}$$

gdzie ogólnie

$$\left\{\begin{aligned} Y_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i \left\{ \chi_i + (y_1 - y_1^0)\frac{\partial \chi_i}{\partial y_1} \right\}, \\ Y_h &= \sum_{i=1}^{i=n} (y_1 - y_1^0) X_i \frac{\partial \chi_i}{\partial y_h}, \quad h > 1. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

To zrobiwszy, jeżeli zcałkujemy równanie między dwiema zmiennemi x i y_1

$$dx = Y_1\, dy_1, \tag{22}$$

i jako stałę całkowania wprowadzimy wartość dowolną x^0, którą przyjmuje x dla $y_1 = y_1^0$, wyznaczenie ilości x^0 jako funkcyi ilości $y_2, \ldots, y_n$ sprowadzi się do całkowania równania :

$$dx^0 = \sum_{h=2}^{h=n} Y_h^0\, dy_h \tag{23}$$

gdzie Y_h^0 oznacza wartość, którą Y_h przyjmie gdy za x, y_1, podstawimy odpowiednio x^0 i y_1^0; a że według (21) $Y_h^0 = 0$, jeżeli tylko wartości szczególne $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ tak są dobrane, aby spółczynniki X_i pozostały skończonymi i wyznaczonymi, równanie więc (23) przywodzi się do

$$dx^0 = 0, \quad \text{zkąd } x^0 = \text{stałéj}. \tag{24}$$

Widzimy więc, że całka równania (22) będzie oraz całką równania (20), przywróciwszy zaś w téj całce zmienne pierwotne, otrzymamy całkę danego równania (6).

Prościéj postąpimy przerabiając równanie (6) za pomocą podstawień,

$$x_1 = y_1, \quad \text{i} \quad x_i = x_i^0 + (y_1 - y_1^0) y_i, \quad i > 1, \tag{25}$$

a jeszcze prościej, gdy celem otrzymania równania (22) położymy

$$x_1 = y_1, \quad x_i = a_i y_1 \quad i > 1, \tag{26}$$

gdzie a_i są spółczynniki stałe.

Tego ostatniego podstawienia nie można użyć, jeżeliby w skutek tego spółczynniki X_i stawały się nieskończonymi lub niewyznaczonymi dla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, jak to wypływa z teoryi ogólnéj.

Sposób tu wyłożony podał najprzód Du Bois-Reymond (*Crelle Journal*, tom LXX, str. 299-313) z małą odmianą; rozwinął go i zastosował do układu równań jednoczesnych kształtu (6) A. Mayer (*Mathematische Annalen*, tom V, str. 448-470) jako téż piszący; nim znaną mu była praca Mayera.

Weźmy pod uwagę np. równanie :

$$dx = \frac{1}{2(x_1 + c_1)} dx_1 + \sqrt{2c(x_1 + c_1)}\, dx_2 + \sqrt{\frac{2(x_1 + c_1)}{c}} dx^3 ,$$

do którego sprowadza się wynalezienie rozwiązania zupełnego równania o pochodnych cząstkowych

$$x = p_1, p_2, p_3, \text{ gdzie } p_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial x}{\partial x_2}, \quad p_3 = \frac{\partial x}{\partial x_3} .$$

Podstawiając

$$x_2 = ax_1, \quad x_3 = bx_1,$$

otrzymamy równanie między dwiema zmiennemi,

$$\frac{dx}{dx_1} - \frac{x}{2(x_1 + c_1)} = \left(a\sqrt{2c} + b\sqrt{\frac{2}{c}}\right) \sqrt{x_1 + c_1},$$

którego całką ogólną jest

$$x = c_2 \sqrt{x_1 + c_1} + ax_1 \sqrt{2c(x_1 + c_1)} + bx_1 \sqrt{\frac{2(x_1 + c_1)}{c}} ;$$

a gdy podstawimy na powrót $ax_1 = x_2$, $bx_1 = x_3$, mieć będziemy

$$x = c_2 \sqrt{x_1 + c_1} + x_2 \sqrt{2c(x_1 + c_1)} + x_3 \sqrt{\frac{2(x_1 + c_1)}{c}} ,$$

całkę ogólną równania danego.

5. Prócz całki ogólnéj, zawierającéj jednę stałę dowolną, posiada uważane równanie niekiedy tak zwane rozwiązania osobliwe, przez które rozumiemy takie całki, które nie zawierają stałéj dowolnéj i nie mieszczą się w całce ogólnéj, t. j. nie dają się otrzymać z całki ogólnéj przez podstawienie jakiéjś wartości szczególnéj za ilość stałą dowolną.

Wyobraźmy sobie dane równanie pierwotne pomiędzy $n + 1$ zmiennemi $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, zawierające jednę stałę dowolną i rozwiązane względem jednéj lecz któréjkolwiek zmiennéj

(1) $$x = f(x_1, x_2, \ldots x_n, C).$$

Różniczkując to równanie, i rugując z tak otrzymanego nowego równania

(2) $$dx = \sum_{i=1}^{i=n} f'(x_i) dx_i$$

stałę dowolną C za pomocą równania (1), mieć będziemy równanie różniczkowe :

(3) $$dx = \sum_{i=1}^{i=n} X_i dx_i,$$

któremu czyni zadość (1) jako całka ogólna.

Wypadek rugowania nie zmieni się, gdy uważać będziemy ilość C jako zmienną, byle tylko w skutek tego uważania postać równania (2) nie zmieniła się. Atoli, różniczkując równanie (1) w założeniu, że także c jest ilością zmienną, otrzymamy

$$dx = \sum_{i=1}^{i=n} f'(x_i)\,dx_i + f'(C) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial C}{\partial x_i}\,dx_i,$$

a zatém powinno być

$$f'(C) = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Ztąd wnosimy, że równanie (1) nie przestanie zadość czynić równaniu różniczkowemu (3), jeżeli za C podstawimy w niém wartość wypływającą z równania (4).

Jeżeli ta wartość na C jest stałą, mieć będziemy całkę szczególną, jeżeli zaś rzeczona wartość będzie funkcyą zmiennych $x_1, \dots x_n$ nowa całka będzie wtedy rozwiązaniem osobliwém.

Rozwiązanie więc osobliwe równania (3), którego całką ogólną jest (1), otrzymamy przez wyrugowanie stałéj dowolnéj C między równaniami :

(5) $$x = f(x_1, x_2, \dots, x_n, C), \quad \frac{\partial x}{\partial C} = 0.$$

W przypadku, gdyby dane równanie posiadało rozwiązanie osobliwe, niezawierające w sobie zmiennéj x, co łatwo może się zdarzyć, natenczas należy całkę ogólną rozwiązać względem innéj zmiennéj

(3) $$x_i = f_i(x, x_1, x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n, C)$$

i wyrugować z niéj C za pomocą równania,

(7) $$\frac{\partial x_i}{\partial C} = 0.$$

Jeżeli całka ogólna dana jest pod postacią,

(8) $$F(x, x_1, x_2 \dots x_n, C) = 0,$$

natenczas, ponieważ,

(9) $$\frac{\partial x_i}{\partial C} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}, \quad i = 0, 1, 2 \dots n,$$

rozwiązanie osobliwe można otrzymać, rugując C albo między równaniami

(10) $$F = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0,$$

albo też między równaniami,

(11) $$F = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \infty,$$

w każdym jednak razie należy sprawdzić, czy rzeczywiście warunek zasadniczy jest dopełniony, t. j. czy

(12)
$$\frac{\partial x_i}{\partial C}=0,\quad i=1,2\ldots n.$$

Aby się przekonać, czy jakaś całka, niezawierająca w sobie stałéj dowolnéj, jest lub też nie jest rozwiązaniem osobliwém, dość tylko z całki ogólnéj wyrugować jednę zmienną za pomocą całki badanéj. Jeżeli wartość na C z wypadku rugowania wypływająca jest funkcyą pozostałych zmiennych, wtedy całka badana będzie rozwiązaniem osobliwém.

Związek między całką ogólną a rozwiązaniem osobliwém podał najprzód Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions*), ograniczając się jednak uwagą równań różniczkowych z dwiema zmiennemi.

6. Rozwiązanie osobliwe można rozpoznać bez uprzedniéj znajomości całki ogólnéj opierając się na twierdzeniu następującém :

« Jeżeli $y=y(x,x_1,\ldots,x_n)=0$ jest całką równania różniczkowego $dx=\sum_{i=1}^{i=n}X_i\,dx_i$, zawierającą w sobie zmienną x, i jeżeli toż równanie różniczkowe zamieni się na $dy=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i\,dx_i$, gdy w niém za x wprowadzimy y za pomocą związku $y=y(x,x_1,\ldots,x_n)$, natenczas całka $y=0$ będzie lub też nie będzie rozwiązaniem osobliwém, według tego, czy przy wartości $y=0$ wraz z funkcyami Y przynajmniéj jedna z całek

$$\int_0^y\frac{dy}{Y_i}\quad i=1,2\ldots n,$$

wziętych cząstkowo względem y, przywiedzie się do zera lub też nie ».

Jakoż, dajmy że,

(13)
$$y(x,x_1,x_2\ldots,x_n)=0,$$

jest całką równania danego (3), zawierającą w sobie przynajmniéj zmienną x a nie zawierającą żadnéj stałéj dowolnéj, któraby nie była zawartą w równaniu różniczkowém; i dajmy, że równanie (3) zamienia się na

(14)
$$dy=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i\,dx_i,$$

gdy zeń wyrugujemy zmienną x za pomocą związku $y=y(x,x_1,\ldots,x_n)$; natenczas $y=0$ będzie także całką równania (14), a przeto wszystkie spółczynniki Y_i przywiodą się do zera, gdy w nich podstawimy $y=0$.

Załóżmy nadto, że

(15)
$$F(y,x_1,x_2,\ldots x_n)=C,$$

jest równania (14) całką ogólną, względem stałéj dowolnéj C rozwiązaną.

Jeżeliby ta całka ogólna była wiadomą, nie trudno byłoby rozpoznać, czy całka $y=0$ jest rozwiązaniem osobliwém, lub też tylko całką szczególną; wystarczyłoby bowiem podstawić w (15) $y=0$

i zbadać, czy wtedy na C otrzymana wartość jest stałą lub téż funkcyą niektórych przynajmniéj z pomiędzy ilości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i w pierwszym przypadku byłoby $y=0$ całką szczególną, a w razie drugim mielibyśmy rozwiązanie osobliwe.

Jeżeli całka ogólna równania (14) nie jest wiadomą, wtedy wyobrażając ją sobie przywiedzioną do postaci (15), mieć będziemy :

$$dy = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{\partial F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dx_i}}{\frac{\partial F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dy}} dx_i,$$

a porównywając to równanie z równaniem (14), otrzymamy :

$$Y_i = -\frac{\frac{\partial F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}}{\frac{\partial F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial y}},$$

w skutek czego będzie :

$$\int_0^y \frac{dy}{Y_i} = -\int_0^y \frac{\frac{\partial F(y, x_1, \ldots, x_n)}{\partial y}}{\frac{\partial F(y, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}} dy,$$

albo téż, według znanego wzoru :

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = f[a+\theta(b-a)]\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad o < \theta < +1,$$

$$\int_0^y \frac{dy}{Y_i} = -\frac{1}{\frac{\partial F(\theta y, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}} \int_0^y \frac{\partial F(y, x_1, \ldots, x_n)}{\partial y} dy,$$

czyli, gdy całkowanie cząstkowe wykonamy :

(16) $$\int_0^y \frac{dy}{Y_i} = \frac{F(o, x_1, \ldots, x_n) - F(y, x_1, \ldots, x_n)}{\frac{\partial F(\theta y, x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i}}, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Jeżeli teraz założymy w ostatnim wzorze $y=0$, wtedy licznik ułomka po stronie prawéj przywiedzie się do zera, a mianownik przywiedzie się do zera przy każdéj wartości skaźnika i, wziętéj z szeregu liczb 1, 2, ..., n, tylko wtedy, gdy $y=0$ jest całką szczególną; albowiem $F(0, x_1 \ldots, x_n)$ jest wtedy ilością stałą. Jeżeli zaś $y=0$ jest rozwiązaniem osobliwém, natenczas $F(0, x_1, \ldots x_n)$ będzie zawierać przynajmniéj jednę zmienną $x_1, \ldots, x_n$, mianownik więc ułomka po stronie prawéj będzie różny od zera przynajmniéj przy jednéj wartości na skaźnik i. Widzimy więc, że dla $y=0$ przywiedzie się do zera przynajmniéj jedna z całek (16) lub nie przywiedzie się do zera żadna z tych całek, według tego, czy $y=0$ jest rozwiązaniem osobliwém, lub téż całką szczególną.

Jeżeliby całka $y=0$, nie zawierała w sobie zmiennéj x, natenczas wyrugować należy za pomocą związku $y = y(x, x_1, \ldots, x_n)$ inną zmienną z danego równania, która w téj całce jest zawartą, a potém postąpić podług prawidła dopiéro wyłożonego.

Twierdzenie, dowiedzione w tym artykule podał najprzód Cauchy (Moigno, *Leçons du calcul différentiel et intégral*, vol. II, str. 445) dla równań rzędu 1° między dwiema zmiennemi, dowodzenie zaś nasze jest uogólnieniem tego dowodzenia, jakie podał dla twierdzenia Cauchy'ego Boole (*Treatise on differential equations*. Supplementary volume, str. 28).

7. Z tego znamienia, odróżniającego rozwiązanie osobliwe od całki szczególnéj nie trudno wywnioskować sposób na wyprowadzenie rozwiązania osobliwego z samego równania różniczkowego.

Jakoż dajmy, że $y=0$ jest rozwiązaniem osobliwém równania (3) zawierającém w sobie zmienną x czyli, co na jedno wychodzi, rozwiązaniem osobliwém równania (14), i że dla $y=0$ jest

$$\int^y \frac{dy}{Y_i}=0.$$

Według znanego wzoru:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f[a+\theta(b-a)], \qquad o<\theta<+1,$$

można równanie ostatnie tak pisać,

$$\frac{y}{(Y_i)_{\theta y}}=0;$$

a że dla $y=0$ licznik i mianownik strony pierwszéj przywodzą się do zera, a przeto ułamek przybiera postać niewyznaczoną $\frac{0}{0}$, postępując więc podług znanego prawidła, mieć będziemy:

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}(Y_i)_{\theta y}}=0, \quad \text{dla } y=0,$$

czyli,

$$\frac{\partial}{\partial y}\cdot(Y_i)_{\theta y}=\infty, \quad \text{dla } y=0,$$

albo,

$$(17) \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial y}=\infty, \quad i=1,2\ldots n.$$

A zatém: «jeżeli $y=0$ jest rozwiązaniem osobliwém równania (14), wtedy równanie $y=0$ uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań (17)».

Twierdzenie niniejsze, o ile odnosi się ono do równań różniczkowych rzędu 1° z dwiema zmiennemi, udowodnił najprzód Euler (*Institutiones calculi integralis*. Vol. I, problema 72).

Jeżeli teraz z równania (14) wyrugujemy y za pomocą związku $y=y(x, x_1, \ldots x_n)$, wrócimy napowrót do równania (3), t. j.:

$$(3) \qquad dx=\sum_{i=1}^{i=n} X_i\,dx_i,$$

gdzie

$$X_i = \frac{Y_i - \frac{\partial y}{\partial x_i}}{\frac{\partial y}{\partial x}}; \tag{18}$$

a gdy weźmiemy wyrażenia (18) pochodnę cząstkową co do x, mieć będziemy :

$$\frac{\partial X_i}{\partial x} = \frac{\partial Y_i}{\partial y} + Y_i \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\frac{\partial y}{\partial x}}\right]. \tag{19}$$

Ponieważ — z założenia — y zawiera w sobie zmienną x, a przeto $\frac{\partial y}{\partial x}$ nie może być zerem, według więc ostatniego wzoru (19), równanie warunkowe $\frac{\partial Y_i}{\partial x} = \infty$, pociąga za sobą równanie $\frac{\partial X_i}{\partial x} = \infty$. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące :

« Rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego,

$$dx = \sum_{i=1}^{i=n} X_i\, dx_i, \tag{3}$$

zawierające w sobie zmienną x, uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań warunkowych :

$$\frac{\partial X_i}{\partial x} = \infty, \quad i = 1, 2 \ldots n». \tag{20}$$

Jeżeli żaden związek pomiędzy zmiennemi, czyniący zadość równaniom warunkowym (20), nie jest całką równania (3), natenczas równanie albo nie posiada żadnego rozwiązania osobliwego, albo jego rozwiązania osobliwe nie zawierają w sobie zmiennéj x. W tym ostatnim przypadku należy równanie (3) rozwiązać względem różniczki jakiéjkolwiek innéj zmiennéj i postąpić zgodnie z powyższém twierdzeniem.

Ogólnie, jeżeli równanie dane jest pod postacią :

$$X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0, \tag{21}$$

natenczas według twierdzenia ostatniego, rozwiązanie osobliwe uczyni niewątpliwie zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy równań,

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{X_i}{X_h}\right) = \infty, \tag{22}$$

gdzie $h = 0, 1, 2, \ldots n-1, \quad h < i \leqq n$.

Twierdzenia niniejsze znane były już Laplace'owi i wyprowadził on je za pomocą rozwijania na szeregi, jak to można czytać w pracy p. Louis Houtain « Des solutions singulières des équations différentieles ». Nasze uzasadnienie nie opierające się na uważaniu szeregów, zdaje się być ściślejszém.

Weźmy pod uwagę np. równanie :

$$(a)\qquad dz=2x\,dx-\frac{y-\sqrt{4z-4x^2+y^2}}{2}\,dy.$$

Celem wynalezienia całki tego równania postąpmy sposobem Nataniego. Oznaczając przez z^0 wartość dowolną, którą przyjmie z dla $x=0$, mieć będziemy dwa równania między dwiema zmiennemi.

$$(b)\qquad \begin{cases} dz=2x\,dx, \\ dz^0=-\dfrac{y-\sqrt{4z^0+y^2}}{2}\,dy. \end{cases}$$

Całką główną pierwszego równania jest,

$$(c)\qquad z-x^2=z^0;$$

drugie zaś równanie wychodzi na następujące :

$$2\frac{dz^0}{dy}+y=\sqrt{4z^0+y^2};$$

podnosząc je do kwadratu, otrzymamy po opuszczeniu spółczynnika liczebnego 4 :

$$(d)\qquad \left(\frac{dz^0}{dy}\right)^2+y\frac{dz^0}{dy}=z^0,$$

a gdy to równanie zróżniczkujemy co do y, mieć będziemy :

$$\frac{d^2z^0}{dy^2}\left[2\frac{dz^0}{dy}+y\right]=0;$$

jest więc : albo

$$\frac{d^2z^0}{dy^2}=0,\quad \text{zkąd}\quad \frac{dz^0}{dy}=c,$$

w skutek czego (d) daje,

$$(e)\qquad z^0=cy+c^2;$$

albo téż,

$$2\frac{dz^0}{dy}+y=0,\quad \text{zkąd}\quad \frac{dz^0}{dy}=-\frac{y}{2},$$

w skutek czego (d) zamienia się na :

$$(f)\qquad z^0=-\frac{y^2}{4}.$$

Rugując z^0 raz między (c) i (e), drugi raz między (c) i (f) otrzymamy dwie całki równania danego (a), mianowicie :

$$(g)\qquad z=x^2+cy+c^2,$$

$$(h)\qquad z=x^2-\frac{y^2}{4}.$$

pierwsza jest całką ogólną, druga zaś jest rozwiązaniem osobliwém.

Nie trudno poznać, że rozwiązanie osobliwe czyni zadość jednemu z równań warunkowych wskazanych ostatniém twierdzeniem. Jakoż,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\frac{y-\sqrt{4z-4x^2+y^2}}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{4z-4x^2+y^2}}=\infty,$$

gdy $4z-4x^2+y^2=0$; t. j. gdy

$$z=x^2-\frac{y^2}{4}.$$

Lwów, 27 czerwca 1874 roku.