Legendr

Początki

Geometryi

NAGRODA

Ученику IV Класса
Варшавской Реальной
Гимназіи Ивану
Лишевскому
За благонравіе, прилежаніе и успѣхи въ наукахъ. –
Варшава – Іюня 16/28 дня 1850 г.
Исправляющій должность Попечителя, Дѣйствительный Статскій
Совѣтникъ, Мухановъ

POCZĄTKI GEOMETRYI

PRZEZ

A. M. Legendre.

PRZEKŁAD Z PIĘTNASTEGO WYDANIA FRANCUZKIEGO.

PLANIMETRYA.

WYDANIE DRUGIE POPRAWIONE I POMNOŻONE.

WARSZAWA,
Nakład i druk S. ORGELBRANDA Księgarza i Typografa
przy ulicy Miodowéj Nr. 496.

1847.

Wolno drukować, z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby exemplarzy.

Warszawa dnia 18/30 Marca 1847 r.

Cenzor Niezabitowski.

OD TŁUMACZA.

Jakkolwiek małe są odmiany wprowadzone do obecnego wydania, przecież i takich nie wolno jest czynić tłumaczowi, zwłaszcza w dziele autora, tak wielkie jak *Legendre* mającego imię; niegodziłoby się przeto nie dać jakiego bądź z tego powodu usprawiedliwienia. Najważniejszą ze zmian lub dodatków wprowadzonych, jest różny od podanego w oryginale, wykład teoryi linij równoległych. Przedmiot ten pomimo pięknego wykładu w dziele *Legendre'a*, jest dla poczynających niedostępnym, z powodu dowodzeń rozmaitych prawd, wymagających głębokiéj rozwagi; aby przeto ułatwić pojęcie téj części geometryi, ośmieliłem się podać znany powszechnie sposób traktowania tego przedmiotu, który będąc prostszym i łatwiejszym, snadniéj trafi do przekonania młodocianych umysłów.

J. P.

KSIĘGA PIERWSZA.

ZASADY.

Opisania.

1. Geometrya jest nauka, mająca za przedmiot mierzenie rozciągłości.

Rozciągłość ma trzy wymiary: *długość*, *szerokość* i *wysokość*, czyli *grubość*.

2. *Linia* jest długość bez szerokości i wysokości.

Końce linii nazywają się *punktami*; więc punkt nie ma rozciągłości.

3. *Linią prostą* nazywa się najkrótsza droga od jednego punktu do drugiego.

4. Linia, która nie jest prostą i nie składa się z linij prostych, nazywa się *linią krzywą*.

I tak (fig. I) linia AB jest linią prostą; ACDB *linią łamaną*, czyli składającą się z linij prostych; AEB jest linią krzywą.

5. *Powierzchnią* jest to, co ma długość i szerokość bez wysokości, czyli grubości.

6. *Płaszczyzną* nazywa się powierzchnia, do któréj przystaje w całéj długości linia prosta, łącząca dwa punkta na téj powierzchni dowolnie obrane.

7. Powierzchnia, która nie jest płaszczyzną i nie składa się z kilku płaszczyzn, nazywa się *powierzchnią krzywą*.

8. *Bryłą* lub *ciałem* jest to, co ma trzy wymiary rozciągłości.

9. Jeżeli dwie linie proste (fig. 2) AB i AC przecinają się z sobą, natenczas ilość, o którą one, co do położenia swego, są oddalone od siebie, nazywa się *kątem*; punkt A, w którym dwie linie AB i AC przecinają się, jest *wierzchołkiem* kąta, a linie AB i AC są jego *ramionami*.

Kąt oznacza się niekiedy jedną tylko głoską A, napisaną przy jego wierzchołku; zwykle zaś kąt wyrażają trzema głoskami BAC lub CAB, bacząc aby głoska napisana przy wierzchołku, pomiędzy dwiema innemi była wymówiona.

Kąty, podobnie jak wszelkiego rodzaju ilości, mogą być dodawane, odejmowane mnożone i dzielone, i tak (fig. 20): kąt DCE jest summą kątów DCB i BCE, kąt BCD jest różnicą pomiędzy kątami DCE i BCE.

10. Jeżeli linia prosta (fig. 3) AB, spotykając się z drugą linią prostą CD, tworzy dwa kąty przyległe BAC i BAD, równe sobie, natenczas każdy z tych kątów nazywa się *kątem prostym*, a linia AB *prostopadłą* do CD.

11. Wszelki kąt (fig. 4) BAC mniejszy od prostego nazywa się *kątem ostrym*, a kąt DEF większy od prostego *kątem rozwartym*.

12. *Liniami równoległemi* nazywają się dwie linie proste, leżące na jednéj płaszczyznie, które będąc jak najdaléj przedłużone, nigdzie nie mogą spotkać się z sobą. Takiemi są (fig. 5) linie AB i CD.

13. *Figurą płaską* nazywa się płaszczyzna, ze wszech stron zamknięta liniami. Miejsce zamknięte liniami prostemi nazywa się *figurą*

prosto-kreślną lub *wielokątem* (fig. 6), same zaś linie razem wzięte stanowią *obwód* wielokąta, a oddzielnie uważane są jego *bokami.*

14. Wielokąt o trzech bokach jest najprostszym ze wszystkich i nazywa się *trójkątem*; wielokąt o czterech bokach nazywa się *czworokątem*; o pięciu, *pięciokątem*; o sześciu, *sześciokątem*; i t. d.

15. Trójkąt, którego wszystkie boki są sobie równe (fig. 7), nazywa się *trójkątem równobocznym*; *trójkąt równoramienny* jest wtenczas, kiedy tylko dwa jego boki są sobie równe (fig. 8); *trójkąt różnoboczny* zaś wtedy, kiedy wszystkie trzy jego boki są różne (fig. 9).

16. Trójkąt, w którym jeden kąt jest prosty, nazywa się *trójkątem prostokątnym.* Bok przeciwległy kątowi prostemu nazywa się *przeciwprostokątną;* i tak (fig. 10) trójkąt ABC jest prostokątnym przy A, i bok jego BC jest przeciwprostokątną.

17. Pomiędzy czworokątami odróżniamy: *Kwadrat* (fig. 11), w którym wszystkie boki są sobie równe i kąty proste.

Prostokąt, który ma kąty proste, lecz boki nierówne (fig. 12).

Równoległobok (fig. 13), w którym boki naprzeciw siebie leżące są rownoległe.

Kwadrat ukośny (fig. 14), w którym boki są równe, lecz kąty nie proste.

Nakoniec *trapez*, w którym dwa tylko boki (fig. 15) są równoległe do siebie.

18. *Przekątną* nazywa się linia, łącząca wierzchołki dwóch kątów wielokąta nie przy sobie leżących; taką jest (fig. 42) linia AC.

19. Wielokątem *równobocznym* nazywa się wielokąt, w którym wszystkie boki są sobie równe; wielokątem *równokątnym* nazywa się wielokąt, którego wszystkie kąty są sobie równe.

20. Dwa wielokąty są *równoboczne* pomiędzy sobą jeżeli boki jednego są równe bokom drugiego wielokąta, i jeżeli są jednakowo ułożone; t. j. jeżeli postępując po ich obwodach w jednakowym kierunku, pierwszy bok jednego wielokąta będzie równy pierwszemu bokowi drugiego, drugi bok pierwszego ró-

wny drugiemu drugiego, trzeci bok pierwszego równy trzeciemu bokowi drugiego, i t. d. Łatwo się domyśléć, jakie wielokąty nazywamy *równokątnemi*.

W pierwszym boki, a w drugim przypadku kąty sobie równe nazywają się odpowiedniémi.

NB. Wtém dziełku mówić będziemy tylko o figurach położonych na płaszczyznie.

Objaśnienie wyrazów i znaków.

Pewnikiem nazywa się prawda, sama przez się widoczna.

Twierdzeniem nazywa się prawda, która staje się widoczną w skutek rozumowania, nazywanego *dowodzeniem*.

Zagadnienie jest pytanie dane do *rozwiązania*.

Twierdzeniem przybraném nazywa się prawda, użyta w pomoc dla dowiedzenia twierdzenia, lub rozwiązania zagadnienia.

Ogólna nazwa *podanie*, stosuje się tak do twierdzeń, jako też zagadnień i twierdzeń przybranych.

Wnioskiem nazywa się prawda, wynikająca z jednego, lub kilku podań.

Uwaga czyni się nad jedném lub kilkoma podaniami poprzedzającémi, aby dać poznać ich związek, użyteczność i stosowanie się do niektórych szczególnych, lub wszystkich przypadków.

Założeniem nazywa się przypuszczenie uczynione w wysłowieniu twierdzenia, lub też w ciągu dowodzenia.

Znak $=$ oznacza równość; i tak wyrażenie $A=B$ oznacza, że A jest równe B.

Aby oznaczyć że A jest mniejsze od B, pisze się $A<B$.

Aby oznaczyć że A jest większe od B, pisze się $A>B$.

Znak $+$ wymawia się *więcéj*, i oznacza dodawanie.

Znak $-$ wymawia się *mniéj*, i oznacza odéjmowanie; i tak: $A+B$ oznacza summę ilości A i B; $A-B$ oznacza ich różnicę, czyli to co pozostaje po odjęciu B od A; podobnież

$A - B + C$, albo $A + C - B$ oznacza, że od summy ilości A i C należy odjąć B.

Znak $\times$ oznacza mnożenie; i tak $A \times B$ wyobraża iloczyn z pomnożenia A przez B. Zamiast znaku $\times$ używa się niekiedy kropka, i tak AB jest to samo co $A \times B$; niekiedy iloczyn oznacza się, pisząc obok siebie ilości dane do mnożenia bez żadnego znaku, np. AB; lecz podobny sposób pisania tylko wtenczas można używać, kiedy wyrażenia AB nie używamy zarazem na oznaczenie linji prostéj, t. j. odległości pomiędzy dwóma punktami A i B.

Wyrażenie $A \times (B + C - D)$ oznacza iloczyn z A przez ilość $B + C - D$. Jeżeliby potrzeba było mnożyć $A + B$ przez $A - B + C$, iloczyn oznaczylibyśmy przez $(A + B) \times (A - B + C)$; wszystko co jest zawarte między nawiasami uważa się za jedną ilość.

Liczba położona przed ilością, jest mnożnikiem tejże ilości; i tak aby oznaczyć że linia AB ma bydź wzięta razy trzy, pisze się 3AB; aby oznaczyć pół kąta A, pisze się $\frac{1}{2}$ A.

Kwadrat z linii AB oznacza się przez $\overline{AB}^2$, sześcian z niéj przez $\overline{AB}^3$. Na właściwém miejscu okażemy wyraźniéj znaczenie kwadratu i sześcianu z linji jakiéjkolwiek.

Znak $\sqrt{}$ oznacza pierwiastek, który należy wyciągnąć; tak $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z 2; $\sqrt{A \times B}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z iloczynu $A \times B$, albo średnio jeometrycznie proporcyonalną między A i B.

Pewniki.

1. Dwie ilości równe trzeciéj, są sobie równe.
2. Całość jest większa od swojéj części.
3. Całość jest równa summie części, na które ją podzielono.
4. Pomiędzy dwóma punktami można poprowadzić tylko jednę linję prostą.
5. Dwie wielkości, to jest: linje, powierzchnie lub bryły, są sobie równe, jeżeli będąc położone na sobie, przystają do siebie w całéj rozciągłości.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Wszystkie kąty proste są sobie równe.

Niech będzie (fig. 16) linia CD prostopadła do AB, i GH prostopadła do EF, mówię że kąty ACD i EGH są sobie równe.

Wziąwszy części równe CA, CB, GE, GF, linia AB będzie równa EF, i linią EF można tak położyć na AB, że punkt E padnie na A, i punkt F na B. Te dwie linie, będąc tak na sobie położone, przystaną do siebie w całéj długości; gdyż w razie przeciwnym pomiędzy dwóma punktami A i B można by było poprowadzić dwie linie proste, co bydź niemoże (pew. 4); a zatém punkt G, środek linii EF, padnie na punkt C, środek linii AB. Przyłożywszy ramię GE do CA, powiadam że i ramię GH pójdzie po CD; gdyż przypuśćmy, że padnie na linią CK różną od CD; ponieważ podług przypuszczenia kąt EGH=HGF, przeto i kąt ACK=KCB, że zaś kąt ACK jest większy od ACD, i nadto podług przypuszczenia, kąt ACD=BCD, przeto kąt ACK jest większy od KCB, a zatém linia GH niemoże pójść po linii CK, różnéj od CD, lecz przystanie do CD, i kąt EGH przystanie do ACD; więc wszzstkie kąty proste są sobie równe.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wszelka linia prosta (fig. 17) CD, *spotykająca się z drugą* AB, *tworzy z nią dwa kąty przyległe* ACD i BCD, *których summa jest równa dwóm kątom prostym.*

Wystawiwszy z punktu C linią CE prostopadłą do AB, kąt ACD będzie summą kątów ACE i ECD; więc ACD + BCD jest summą trzech kątów ACE, ECD i BCD, z których pierwszy jest kątem prostym, a dwa pozostałe razem stanowią drugi kąt prosty BCE; więc summa dwóch kątów ACD, BCD jest równa dwóm kątom prostym.

Wniosek 1. Jeżeli jeden z dwóch kątów ACD i BCD jest prosty, i drugi także musi być kątem prostym.

Wniosek 2. Jeżeli linia (fig. 18) DE jest prostopadła do AB, linia AB będzie prostopadła do DE.

Ponieważ linia DE jest prostopadła do AB, przeto kąt ACD jest równy kątowi jemu przyległemu DCB i oba są proste. Lecz ponieważ kąt ACD jest kątem prostym, przeto kąt jemu przyległy ACE jest także prosty; a zatém kąt ACE=ACD, i linia AB jest prostopadła do DE.

Wniosek 3. Wszystkie kąty kolejne (fig. 34) BAC, CAD, DAE i EAF, utworzone z jednéj strony linii prostéj, razem wzięte stanowią dwa kąty proste; gdyż summa ich jest równa summie dwóch kątów przyległych BAC i CAF.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Dwie linie proste mające wspólne dwa punkta, przystają do siebie w całéj długości i tworzą jednę linję prostą.

Niech będą (fig. 19) dwa punkta wspólne A i B; dwie linie proste pomiędzy punktami A i B tworzą jednę linią prostą, gdyż inaczéj pomiędzy dwóma punktami można by było poprowadzić dwie linie proste, co bydź nie może (pew. 4). Przypuśćmy że linje te będąc przedłużone, zaczynają się rozchodzić w punkcie C, i jedna z nich staje się CD, a druga CE; przez punkt C poprowadźmy linią CF, któraby z linią CA utworzyła kąt prosty ACF. Ponieważ linia ACD jest prosta, przeto kąt FCD będzie prosty (pod. 2 wn. I); ponieważ linia ACE jest prosta przeto podobnież kąt FCE jest prosty i tém samem równy kątowi prostemu FCD, lecz kąt FCE, jako część, nie może być równy całości FCD; przeto linie mające dwa punkta wspólne nie mogą się nigdzie w przedłużeniu rozchodzić; a zatém one tworzą jedną i tęż samą linią prostą.

PODANIE IV.

Twierdzenie.

Ramiona zewnętrzne AC i CB *dwóch kątów przyległych* (fig. 20) ACD i DCB, *których sum-*

ma jest równa summie dwóch kątów prostych, stanowią jednę linią prostą.

Jeżeli bowiem linia CB nie jest przedłużeniem AC, niech będzie niém CE, i wtedy, ponieważ linia ACE jest prosta, przeto summa kątów ACD i DCE równa się dwóm kątom prostym (pod. 2). Lecz z przypuszczenia summa dwóch kątów ACD i DCB jest równa dwóm kątom prostym, a zatém ACD + DCB, równe ACD + DCE; odejmując od obu summ kąt ACD, pozostałaby część DCB równa całości DCE, co bydź nie może; a zatém CB jest przedłużeniem linii prostéj AC.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Kąty wierzchołkiem stykające się (fig. 21), *utworzone przez dwie linie proste* AB i DE *przecinające się, są sobie równe.*

Ponieważ linia DE jest prosta, przeto summa kątów ACD i ACE jest równa dwóm kątom prostym, i ponieważ linia AB jest prosta, przeto summa kątów ACE i BCE jest równa także dwóm kątom prostym; więc summa ACD+ACE jest równa summie ACE+BCE. Odejmując od jednéj i ód drugiéj summy kąt im wspólny ACE, pozostanie kąt ACD równy kątowi BCE.

Podobnie możnaby dowieść, że kąt ACE jest równy kątowi BCD.

Uwaga. Summa czterech kątów, utworzonych na około punktu, przez dwie linie proste przecinające się, jest równa summie czterech kątów prostych; gdyż dwa kąty ACE i BCE, są równe dwóm kątom prostym, i dwa inne kąty ACD i BCD tworzą drugie dwa kąty proste.

W ogólności, jeżeli (fig. 22) ilekolwiek linij prostych CA, BC, i t. d. przecina się z sobą w punkcie C, summa wszystkich kątów kolejnych ACB, BCD, DCE, ECF i FCA będzie równa cztérem kątom prostym; gdyż poprowadziwszy przez punkt C dwie linie do siebie prostopadłe, przestrzeń zajęta przez tak utworzone cztery kąty proste, będzie taż sama co przestrzeń zajęta przez kąty kolejne ACB, BCD i t. d.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty mające po kącie równym, zawartym pomiędzy dwóma bokami odpowiednio równémi, są sobie równe.

Niech będzie (fig. 23) kąt A równy kątowi D, bok AB równy DE i bok AC równy DF; powiadam że i trójkąty ABC i DEF będą sobie równe. W saméj rzeczy jeden z tych trójkątów można położyć na drugim tak, że przystanie do niego. I tak, przyłożywszy bok DE do jemu równego boku AB, punkt D padnie na A i punkt E na B; ponieważ kąt D jest równy kątowi A, więc jeżeli bok DE będzie położony na AB, bok DF przystanie do AC. Nadto dla równości boków DF i AC, punkt F padnie na C, i trzeci bok EF przykryje trzeci bok BC; więc trójkąt DEF jest równy trójkątowi ABC (pewn. 5).

Wniosek. Ztąd że te dwa trójkąty mając po trzy rzeczy równe t. j. kąt $A = D$, bok $AB = DE$ i bok $AC = DF$, przystają do siebie, wynika, że i trzy pozostałe rzeczy jednego są równe trzem pozostałym rzeczom drugiego trójkąta, a mianowicie: kąt B = E, kąt C = F i bok BC = EF.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po boku równym, leżącym przy dwóch kątach odpowiednio równych.

Niech będzie (fig. 23) bok BC równy bokowi EF, kąt B równy kątowi E, i kąt C równy kątowi F, powiadam że trójkąt DEF będzie równy trójkątowi ABC.

Gdyż przyłożywszy bok EF do równego jemu BC, punkt E padnie na B, i punkt F na C. Ponieważ kąt E jest równy kątowi B, przeto bok ED przystanie do boku BA, a tém samém punkt D padnie na którykolwiek punkt linii BA. Podobnież dla równości kąta F z kątem C, bok FD pójdzie po CA, i punkt D padnie gdziekolwiek na bok CA; więc punkt

D ma się znajdować na dwóch liniach BA i CA, a zatém padnie na wspólne ich przecięcie A; przeto dwa trójkąty ABC i DEF, przystają do siebie i są sobie równe.

Wniosek. Z równości pomiędzy trzema rzeczami dwóch trójkątów. a mianowicie z tego że bok BC = EF, kąt B = E, C = F, można wnieść o równości trzech rzeczy pozostałych, to jest: że bok AB = DE, AC = DF, kąt A = D.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie bok którykolwiek jest mniejszy od summy dwóch innych boków.

Ponieważ (fig. 23) linia prosta BC jest najkrótszą drogą (opis 3) od punktu B do C, a zatém BC jest mniejsze od AB + AC.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli punkt (fig. 24) O *obrany wewnątrz trójkąta* ABC, *połączymy z końcami jakiego-*

bądź boku BC, *liniami prostemi* OB i OC, *summa tych linij będzie mniejsza od summy pozostałych boków* AB i AC *trójkąta.*

Przedłużywszy BO do przecięcia się z bókiem AC w D, linia OC będzie krótszą od OD + DC (pod 8), dodawszy do każdéj z tych ilości BO, będzie $BO + OC < BO + OD + DC$, czyli $BO + OC < BD + DC$.

Podobnież mamy $BD < BA + AD$; przeto dodawszy do obu ilości DC, będzie $BD + DC < BA + AC$. Lecz poprzednio znalezliśmy że $BO + OC < BD + DC$, przeto tém bardziéj $BO + OC < BA + AC$.

PODANIE X.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa boki AB i AC *trójkąta* ABC, (fig. 25, 26 i 27) *są równe dwóm bokom* DE i DF, *trójkąta* DEF, *lecz jeżeli kąt* BAC, *zawarty pomiędzy bokami piérwszémi, jest większy od kąta* EDF *utworzonego przez dwa drugie boki, bok trzeci* BC *trójkąta piérwszego, będzie większy od boku trzeciego* EF *w drugim trójkącie.*

Narysowawszy kąt $CAG = D$, wziąwszy $AG = DE$ i połączywszy C z G linią prostą CG, trójkąt GAC będzie równy trójkątowi DEF; gdyż one z wykreślenia mają po kącie równym, objętym bokami równemi (pod. 6), a zatém $CG = EF$. Zdarzyć się mogą tutaj trzy przypadki: albo punkt G padnie zewnątrz trójkąta ABC, albo na bok jego BC, lub też wewnątrz trójkąta.

Przypadek 1. Linia (fig. 25) prosta GC jest krótsza od $GJ + JC$, linia prosta AB jest krótsza od $AJ + JB$; przeto $GC + AB < GJ + AJ + JC + JB$, czyli $GC + AB < AG + BC$. Odjąwszy z jednéj strony AB i z drugiéj strony jemu równe AG, pozostanie $GC < BC$; ponieważ zaś $GC = EF$, przeto $EF < BC$.

Przypadek 2. Jeżeli punkt G (fig. 26) pada na bok BC, w takim razie widocznie bok GC, czyli jemu równy EF, jest mniejszy od BC.

Przypadek 3. Nakoniec, jeżeli punkt G (fig. 27) pada wewnątrz trójkąta ABC; podług twierdzenia poprzedzającego będzie: $AG + GC < AB + BC$. Odjąwszy od jednéj z tych ilości bok AG, a od drugiéj jemu równy AB, pozostanie GC $<$ BC, czyli EF $<$ BC.

Uwaga. Odwrotnie, jeżeli dwa boki AB i AC trójkąta ABC, są równe dwóm bokom DE i DF trójkąta DEF, a bok trzeci CB piérwszego, jest większy od boku trzeciego EF drugiego trójkąta, powiadam że i kąt BAC trójkąta piérwszego, będzie większy od kąta EDF drugiego trójkąta. Jeżeliby bowiem to założenie nie było prawdziwém, kąt BAC byłby albo równy kątowi EDF, albo mniejszy od niego; bok CB w pierwszym przypadku, byłby równy (pod. 6), a w drugim mniejszy od EF; lecz jak jedno, tak drugie sprzeciwia się założeniu, a zatém kąt BAC jest większy od kąta EDF.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po trzy boki odpowiednio równe.

Niech będzie (fig. 23) bok AB $=$ DE, AC $=$ DF, BC $=$ EF, powiadam że i kąt A $=$ D, B $=$ E, C $=$ F.

Jeżeliby bowiem kąt A był większym od kąta D, a z założenia boki AB i AC, są równe bokom DE i DF, podług twierdzenia poprzedzającego bok BC byłby większym od EF; jeżeliby zaś kąt A był mniejszym od kąta D, natenczas bok BC byłby mniejszym od EF; ponieważ zaś BC jest równe EF, przeto kąt A nie może bydź ani większym, ani mniejszym, lecz jest równy kątowi D. Podobnież można okazać że kąt B = E i kąt C = F.

Uwaga. Łatwo dostrzedz, że kąty równe leżą naprzeciw boków równych; i tak kąty równe A i D leżą naprzeciw boków równych BC i EF.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

W trójkącie równoramiennym kąty, leżące naprzeciw boków równych, są sobie równe.

Niech będzie (fig. 28) bok AB = AC, powiadam że i kąt C = B.

Połączmy *wierzchołek* A z punktem D, środkiem *podstawy* BC, linją prostą AD; dwa trojkąty ABD i ADC mają po trzy boki równe, a mianowicie: bok AD wspólny, AB $=$ AC według założenia, BD $=$ DC z wykreślenia, przeto podług twierdzenia poprzedzającego kąt B jest równy kątowi C.

Wniosek. W trójkacie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe, to jest: trójkąt równoboczny jest równokątny.

Uwaga. Z równości trójkątów ABD i ACD wypada, że kąt BAD $=$ CAD, i kąt BDA $=$ ADC, więc dwa ostatnie kąty są proste; przeto *linia, łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego z środkiem jego podstawy, jest prostopadła do podstawy i dzieli kąt przy wierzchołku na dwie części równe.*

W trójkącie nierównoramiennym można dowolnie bok jego którykolwiek wziąść za podstawę i natenczas wierzchołkiem będzie wierzchołek kąta, przeciwległego temu bokowi; w trójkącie zaś równoramiennym za podstawę biorą bok różny od dwóch innych.

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

Odwrotnie, jeżeli dwa kąty w trójkącie są sobie równe, natenczas boki naprzeciw nich leżące, są sobie równe i trójkąt jest równoramienny.

Niech będzie (fig. 29) kąt ABC=ACB, powiadam że i bok AC będzie równy bokowi AB.

Jeżeliby bowiem boki AC i AB nie były sobie równe, jeden z nich, np. AB, byłby większy od drugiego. Weźmy BD=AC, i połączmy punkta D i C linją prostą DC. Podług założenia kąt DBC jest równy kątowi ACB, dwa boki DB i BC są równe bokom AC i CB, więc trójkąt DBC (pod 6) jest równy trójkątowi ACB; lecz część nie może być równa całości, a zatém boki AB i AC, nie mogą być nierówne, i tém samém trójkąt ABC jest równoramienny.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

Z dwóch boków trójkąta ten jest większy, który leży naprzeciw kąta większego; i odwrotnie, z dwóch kątów trójkąta ten jest większy, który leży naprzeciw boku większego.

1^{sze} Niech będzie (fig. 30) kąt $C > B$, powiadam że i bok AB, leżący naprzeciw kąta C, będzie większy od boku AC, leżącego naprzeciw kąta B.

Narysujmy kąt $BCD = B$; w trójkącie DBC (poda. 13) będzie $BD = DC$. Lecz $AD + DC$ jest większe od AC, a $AD + DC = AD + DB = AB$, przeto AB jest większe od AC.

2re Niech będzie bok $AB > AC$, powiadam że i kąt C, leżący naprzeciw boku AB, będzie większy od kąta B, leżącego naprzeciw boku AC.

Gdyż, jeżeliby było $C < B$, podług poprzedzającéj części twierdzenia byłoby, że $AB < AC$, co iest przeciwném założeniu.

Jeżeliby zaś było $C = B$, natenczas (tw. 13) AB byłoby równe AC, co również sprzeciwia się założeniu, a zatém kąt C jest większym od B.

PODANIE XV.

Twierdzenie.

Z punktu A (fig. 31), *danego nad linją prostą* DE, *można spuścić tylko jedną prostopadłą do téjże linji.*

Przypuśćmy że można spuścić dwie prostopadłe AB i AC, jednę z nich AB przedłużmy tak, aby BF było równe AB, i połączmy punkt F z C linią prostą FC.

Dwa trójkąty CBF i ABC mają kąty CBF i CBA równe sobie jako proste, bok CB wspólny, i bok $BF = AB$, a zatém są sobie równe (pod. 6), z czego wynika, że kąt $BCF = BCA$. Kąt BCA podług przypuszczenia jest prosty, a zatém kąt jemu równy BCF jest także prosty. Lecz jeżeli dwa kąty przyległe BCA i BCF razem wzięte są równe dwóm kątom prostym, linia ACF musi być prosta (pod. 4); z czego wypada że pomiędzy dwóma punktami A i F, można poprowadzić dwie linie proste ABF i ACF, co być nie może (pew. 4), przeto nie może być także, ażeby z jednego punktu można było spuścić dwie prostopadłe na jedną i tęż samą linję prostą.

Uwaga. Również z punktu (fig. 17), danego na linii prostéj AB, nie można wyprowadzić dwóch prostopadłych do téjże linii; jeżeliby bowiem linie proste CD i CE były prostopadłe, kąty DCB i BCE byliby kątami prostémi i w takim razie, część byłaby równa całości.

PODANIE XVI.

Twierdzenie.

Z punktu A (fig. 31), *danego nad linią prostą* DE, *spuściwszy do niéj prostopadłą i poprowadziwszy różne pochyłe* AE, AC, AD i t. d. *do różnych punktów téj linji, będzie:*

1-e *prostopadła* AB *krótszą od wszelkiéj pochyłéj;*

2-e *dwie pochyłe* AC, AE, *poprowadzone z dwóch różnych stron prostopadłéj, w odległościach* BC *i* BE *równych, będą sobie równe;*

3-e *Z dwóch pochyłych* AD *i* AC, *lub* AE *i* AD, *jakkolwiek poprowadzonych, ta będzie dłuższa, która jest bardziéj oddalona od prostopadłéj.*

Przedłużmy prostopadłą AB tak, aby przedłużenie BF było równe AB, i połączmy punkt F z punktami C i D liniami FC i FD.

1-e Trójkąt BCF jest równy trójkątowi BCA, gdyż kąt prosty CBF = CBA, bok CB wspólny i bok BF = BA; przeto (pod. 6) bok trzeci CF jest równy bokowi AC. Linia prosta ABF jest krótsza od linii łamanéj ACF; a zatém i AB, jako połowa linii ABF, jest krótsza od linii AC, połowy linii ACF, więc 1-e prostopadła jest krótsza od wszelkiéj pochyłéj.

2-e Przypuściwszy że BE = BC, ponieważ trójkąty CAB i EAB mają bok AB wspólny i kąt prosty ABE=ABC, (pod 6) więc boki AE i AC są sobie równe, i przeto 2-e dwie pochyłe, równo oddalone od prostopadłéj, są sobie równe.

3-e W trojkącie DFA summa linij AC i CF, jest mniejsza (pod. 9) od summy boków AD i DF, a tém samém i AC połowa linii ACF, jest mniejsza od AD, połowy linii ADF; a zatém 3-e pochyłe są tém dłuższe, im bardziéj są oddalone od prostopadłéj.

Wniosek I. Prostopadła będąc krótszą od każdéj pochyłéj, mierzy odległość punktu od linii prostéj.

II. Od punktu do jednéj linii prostéj nie można poprowadzić trzech linij prostych, równych sobie; gdyż, jeżeliby to mogło nastąpić, dwie pochyłe równe znajdowałyby się z jednéj strony prostopadłéj, co być nie może.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu C (fig. 32), *środka linii prostéj* AB, *wyprowadzimy prostopadłą* EF *do téjże linii, mówię że:* 1-e *każdy punkt na prostopadłéj będzie równo oddalony od końców linii* AB; 2-e *wszelki punkt, nie leżący na prostopadłéj, znajduje się w niejednakowéj odległości od końców* A *i* B.

1) Ponieważ zakładamy że AC=CB, przeto dwie pochyłe AD i DB są równo oddalone od prostopadłéj, a tém samém są sobie równe. Toż samo rozumiéć o dwóch pochyłych AE i EB, lub AF i FA, i t. d. a zatém 1-e wszelki punkt na prostopadłéj leżący, jest równo oddalony od końców A i B.

4) Niech będzie punkt J, znajdujący się nie na prostopadłéj: jeżeli połączymy go z końcami linii AB, liniami prostemi AJ i BJ, wtenczas jedna z nich przetnie prostopadłą w D, a poprowadziwszy DB, będzie DB=DA. Lecz linia prosta JB jest mniejsza od summy linij JD+DB, ponieważ zaś JD+DB=JD+DA=JA, przeto JB<JA; więc 2-e wszelki punkt leżący zewnątrz prostopadłéj, jest nierówno oddalony od końców A i B.

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty prostokątne, mające po przeciwprostokątnéj równéj i po jednemu bokowi równemu, albo po przeciwprostokątnéj równéj i po jednemu kątowi ostremu równemu, są sobie równe.

1-e Niech będzie (fig. 33) przeciwprostokątna AC = DF, i bok AB = DE, powiadam że trójkąt prostokątny ABC będzie równy trójkątowi prostokątnemu DEF.

Te dwa trójkąty byłyby widocznie równe, gdyby bok trzeci BC był równy trzeciemu bokowi EF; przypuśćmy, jeżeli można, że te boki nie są sobie równe i nadto, że bok BC jest większy od EF. Wziąwszy BG = EF, połączmy punkt A z G linią prostą AG. Trójkąt ABG jest równy trójkątowi DEF, gdyż kąt prosty B jest równy kątowi prostemu E, bok AB = DE i bok BG = EF, a zatém te dwa trójkąty są sobie równe (pod. 6) zkąd AG = DF; lecz z założenia DF = AC, przeto AG = AC. Ponieważ zaś pochyła AC, będąc bardziéj oddalona od prostopadłéj, nie może być równa pochyłéj AG (pod 16), przeto nie może być także, aby BC było różne od EF, a zatém trójkąt ABC jest równy trójkątowi DEF.

2-e Niech będzie przeciwprostokątna AC $=$ DF i kąt ostry C $=$ F, powiadam że trójkąty prostokątne ABC i DEF będą sobie równe.

Przenieśmy trójkąt DEF na ABC, tak aby punkt F padł na C i bok EF poszedł po BC, dla równości kątów F i C, przeciwprostokątna DF pójdzie po AC, że zaś one są sobie równe, przeto punkt D padnie na A, a w takim razie bok DE pójdzie po AB, gdyż inaczéj z punktu nad linią możnaby było spuścić dwie prostopadłe, co być nie może (pod. 15); a tém samém trójkąt DEF przystanie do trójkąta ABC.

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

Dwie linie proste AB *i* CD (fig. 34), *prostopadłe do linii trzeciéj* FG, *są względem* *siebie równoległe, t. j. będąc przedłużone jak najdaléj, nigdzie nieprzetną się z sobą.*

Jeżeliby bowiem linie AB i CD przecięły się z sobą w jakimkolwiek punkcie O, w takim razie mielibyśmy dwie prostopadłe OF i OG, spuszczone z jednego punktu O na linię FG, co być nie może (pod. 15).

PODANIE XX.

Twierdzenie.

Dwie linie proste, z których jedna AB (fig. 35) *jest prostopadła, a druga* CD *pochyła względem trzeciéj* BC, *muszą przeciąć się z sobą* (*).

Z punktu C wystawmy linię CE prostopadłą do BC, która będzie (pod. 19) równole-

(*) Trudność dowiedzenia tego podania jest powodem iż teorja linij równoległych nie odznacza się tą ścisłością, jaka znamionuje Geometryę. Wyłożymy tutaj skrócony dowód tego twierdzenia przez *Bertrand'a* podany, który ze wszystkich najwięcéj zbliża się do ścisłości matematycznéj. (Przyp. Tłumacza).

gła do AB. Łatwo jest dostrzedz, że kąt jakikolwiek ECD, wzięty pewną liczbę razy, będzie większy od kąta prostego, niech więc mieści się np. 3 razy w kącie ECF, większym od prostego; płaszczyzna zaś nieograniczona ECBA ilekolwiek razy powtórzona, nigdy nie zapełni kąta prostego ECL. Odetnijmy na linii CL, BG = GH = BC, wystawmy z punktów G i H, prostopadłe GJ, HK. Płaszczyzny nieograniczone ECBA, ABGJ, JGHK, przystają do siebie, a zatém płaszczyzna nieograniczona ECBA mieści się w całéj płaszczyźnie nieograniczonéj ECHK razy trzy, że zaś płaszczyzna nieograniczona ECHK z płaszczyzną nieograniczoną ECF ma bok EC i początek C wspólny i w niéj się mieści, przeto jest mniejsza od niéj; a zatém płaszczyzna nie ograniczona ECBA jest mniejsza od płaszczyzny nieograniczonéj ECD, a tém samém linie CD i AB dostatecznie przedłużone, muszą przeciąć się z sobą; gdyż inaczéj płaszczyzna nieograniczona ECD mieściłaby się w nieograniczonéj płaszczyźnie ECBA i tém samém byłaby od niéj mniejsza, co się sprzeciwia z dowodzeniem.

Twierdzenie to ma miejsce i wtenczas, kiedy kąt DCB jest rozwarty.

PODANIE XXI.

Twierdzenie.

Dwie linie proste AB *i* CD (fig. 36), *prostopadłe do dwóch innych linij* EF *i* GH, *przecinających się, muszą przeciąć się z sobą.*

W saméj rzeczy linia AB będąc prostopadła do EF jest pochyłą względem GH, gdyż inaczéj linia GH przecinając się z linią EF musiałaby być prostopadła do AB, a zatém z linią EF stanowić jedną linię prostą (pod. 15); skoro więc linia AB jest pochyła względem GH, przeto musi się przeciąć z linią CD do niéj prosto padłą (pod. 20).

PODANIE XXII.

Twierdzenie.

Linia AB (fig. 37) *prostopadła do jednéj* CD *z dwóch linij równoległych, musi być prostopadła do drugiéj* EF.

Gdyby linia AB nie była prostopadła do EF, natenczas EF byłaby pochyłą względem AB i (pod. 20) musiałaby się przeciąć z linią CD, co się sprzeciwia założeniu.

PODANIE XXIII.

Twierdzenie.

Dwie linie równoległe AB *i* CD (fig. 38) *przecięte trzecią* EF *tworzą*: 1-e *kąty naprzemianległe wewnętrzne*, AGH *i* DHG *równe sobie;* 2-e *jednostronne odpowiadające* DHG *i* BGE *równe sobie;* 3-e *naprzemianległe zewnętrzne* FHC *i* EGB *równe sobie;* 4-e *jednostronne wewnętrzne* BGH *i* DHG, *których summa jest równa dwóm kątom prostym, i nakoniec* 5-e *jednostronne zewnętrzne* BGE *i* DHF, *których summa jest równa dwóm kątom prostym.*

1-e Z punktu J, środka linii GH, spuśćmy JK prostopadłą do AB która będzie prostopadłą do CD (pod. 22). Dwa trójkąty prostokątne KJG i HJL, mają przeciwprostokątną GJ = HJ, tudzież kąt KJG = HJL, więc są sobie równe (pod. 18), a zatém kąt KGJ = JHL.

2-e Ponieważ kąt EGB = AGH (pod. 5), zaś kąt AGH = GHD, podług poprzedzającego dowodzenia, przeto kąty jednostronne odpowiadające EGB i GHD są sobie równe.

3-e Kąt CHF = GHD (pod. 5), kąt zaś GHD = EGB podług poprzedzającego dowodzenia, przeto kąty naprzemianległe zewnętrzne EGB i CHF są sobie równe.

4-e Summa kątów przyległych EGB i BGH jest równa dwóm kątom prostym (pod. 2), że zaś kąt EGB = GHD, przeto summa dwóch kątów jednostronnych wewnętrznych BGH i DHG jest równa dwom kątom prostym.

5-e Summa kątów przyległych DHF i DHG jest równa dwóm kątom prostym, że zaś kąty jednostronne odpowiadające DHG i BGE są sobie równe, przeto summa kątów jednostronnych zewnętrznych DHF i BGE jest równa dwóm kątom prostym.

Wniosek. Przez punkt (fig. 39) C dany nad linią AB, jednę tylko linię DE do niéj równoległą można poprowadzić. Gdyż poprowadziwszy dowolnie linię CF, kąty DCF i CFB będą sobie równe; gdyby przez punkt C można było poprowadzić inną linię GH równoległą do AB, kąt HCF byłby równy CFB, a zatém kąt DCF byłby równy kątowi HCF, co być nie może.

PODANIE XXIV.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linie AB *i* CD (fig. 38) *przecięte trzecią* EF, *tworzą z nią:* 1-e *kąty naprzemianległe wewnętrzne* AGH *i* GHD *sobie równe, albo* 2-e *kąty jednostronne odpowiadające* EGB *i* GHD *sobie równe, albo* 3-e *kąty naprzemianległe zewnętrzne* EGB *i* CHF *sobie równe, albo* 4-e *kąty jednostronne wewnętrzne* BGH *i* DHG, *których summa jest równa dwóm kątom prostym, albo nakoniec* 5-e *kąty jednostronne zewnętrzne* EGB *i* DHF, *których summa jest równa dwóm kątom prostym, dwie linie* AB *i* CD *będą do siebie równoległe.*

1-e Ze środka J linii GH spuściwszy prostopadłę JK na AB i przedłużywszy ją do spotkania z linią CD, dwa trójkąty GKJ i HJL mają: GJ=JH, kąt GJK=HJL (pod. 5), kąt KGJ=JHL z założenia, przeto przystają do siebie (pod. 7), a zatém kąt HLJ=JKG; że zaś kąt JKG jest prosty, więc kąt jemu równy JLH jest także prosty, i dwie linie AB i CD będąc prostopadłe do KL, są względem siebie równoległe (pod. 19).

2-e Ponieważ kąt EGB=AGH (pod. 5) i kąt EGB=GHD z założenia, więc kąt AGH=GHD a tém samém linie AB i CD podług poprzedzającego, są do siebie równoległe.

3-e Ponieważ kąt CHF=GHD (pod. 5) kąt CHF=EGB z założenia, przeto kąt GHD=EGB, a tém samém podług poprzedzającego linie AB i CD są do siebie równoległe.

4-e Kąty BGE i BGH przyległe (pod. 2) ważą dwa kąty proste, że zaś z założenia kąt DHG z kątem BGH ważą dwa kąty proste, przeto BGE+BGH=DHG+BGH, odjąwszy od obu tych ilości kąt BGH, będzie kąt BGE=DHG, a tém samém linie AB i CD, podług drugiéj części tego twierdzenia, są do siebie równoległe.

5-e Kąty DHF i DHG jako przyległe (pod. 2) ważą dwa kąty proste, że zaś podług założenia kąt DHF z kątem BGE ważą téż dwa kąty proste, przeto DHF+DHG=DHF+BGE, odjąwszy kąt DHF, pozostanie kąt DHG=BGE, a zatém linie AB i CD, podług drugiéj części twierdzenia tego, są równoległe do siebie.

PODANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwie linie (fig. 40) AB i CD *równoległe do trzeciéj* EF, *są równoległe względem siebie.*

Poprowadźmy sieczną PQR, prostopadłą do EF; ponieważ linia AB jest równoległa do EF, przeto sieczna PR będzie prostopadła do AB (podanie 22); podobnież, ponieważ linia CD jest równoległa do EF, przeto sieczna PR będzie prostopadła do CD. A zatém, linie AB i CD, będąc prostopadłe do jednéj i téj saméj linii prostéj PQ, są równoległe względem siebie (pod. 19).

PODANIE XXVI.

Twierdzenie.

Dwie linie równoległe są wszędzie równo oddalone od siebie.

Niech będą (fig. 41) dwie linie równoległe AB i CD; jeżeli z dwóch dowolnych punktów wystawimy prostopadłe EG i FH do linii AB, linie EG i FH będą prostopadłe do CD (pod. 22), a nadto równe pomiędzy sobą.

Gdyż, poprowadziwszy GF, kąty GFE i FGH, jako naprzemianległe wewnętrzne (pod. 24) względem linij równoległych AB i CD, są sobie równe; podobnie, linie EG i FH, będąc prostopadłe do linii AB, są równoległe do siebie, a zatém kąty EGF i GFH, jako naprzemianległe wewnętrzne względem tych linij równoległych, są sobie równe. Dwa trójkąty EFG i FGH, mając po dwa kąty odpowiednio równe, leżące na boku dla nich wspólnym, są sobie równe (pod. 7); zkąd bok EG, mierzący odległość dwóch linij równoległych AB i CD w punkcie E, jest równy bokowi FH, mierzącemu odległość tych samych linij równoległych w punkcie F.

PODANIE XXVII.

Twierdzenie.

Dwa kąty (fig. 42) BAC i DEF, *mające ramiona odpowiednio równoległe i rozchodzące się w jedne strony, są sobie równe.*

Przedłużmy, jeżeli tego potrzeba, DE do przecięcia się z AC w punkcie G, kąt DEF jest równy kątowi DGC, gdyż linia EF jest równoległa do GC (pod. 23); kąt DGC jest równy BAC, gdyż linia DG jest równoległa do AB; a zatém kąt DEF jest równy kątowi BAC.

Uwaga. W tém twierdzeniu wprowadzono warunek, aby bok EF był skierowany w tęż samą stronę co i bok AC, a ED w tę samą stronę co AB, a to dla tego, że przedłużywszy bok EF ku H, kąty DEH i BAC miałyby boki równoległe i nie byłyby równe, lecz czyniłyby summę równą dwóm kątom prostym.

PODANIE XXVIII.

Twierdzenie.

W równoległoboku boki i kąty przeciwległe są sobie równe.

Poprowadźmy (fig. 43) przekątną BD, dwa trójkąty ADB i DBC mają bok BD wspólny, nadto, dla równoległości boków AD i BC, kąt ADB = DBC (pod. 23), i dla równoległości boków AB i CD kąt ABD = BDC, przeto one są sobie równe (pod. 7); zkąd wynika, że bok AB, leżący naprzeciw kąta ADB, jest równy bokowi DC, leżącemu przeciw kąta DBC = ADB; podobnież bok trzeci AD jest równy bokowi trzeciemu BC; przeto boki przeciwległe w równoległoboku są sobie równe.

Powtóre, z równości tychże samych trójkątów wypada, że kąt A jest równy kątowi C, i że kąt ADC, złożony z dwóch kątów ADB i BDC, jest równy kątowi ABC, złożonemu z kątów, równych tamtym, DBC i ABD; przeto kąty przeciwległe w równoległoboku są sobie równe.

Wniosek. Dwie linie równoległe AB i CD, zawarte między dwiema liniami równoległemi AD i BC, są sobie równe.

PODANIE XXIX.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworokącie (fig. 43) ABCD *boki przeciwległe są sobie równe, to jest, jeżeli* AB = CD i AD = BC, *mówię że te boki są równoległe do siebie i czworokąt jest równoległobokiem.*

Gdyż poprowadziwszy przekątną BD, dwa trójkąty ABD i BDC, mając po trzy boki odpowiednio równe, są sobie równe; a zatém kąt ADB, leżący naprzeciw boku AB, iest równy kątowi DBC, leżącemu naprzeciw boku CD równego AB, i tém samém (pod. 24) bok AD jest równoległy do BC. Dla podobnéj przyczyny bok AB jest równoległy do CD; a zatém czworokąt ABCD jest równoległobokiem.

PODANIE XXX.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworokącie dwa boki przeciwległe AB i CD (fig. 43) *są sobie równe i równoległe, czworokąt* ABCD *będzie równoległobokiem.*

Niech będzie przekątna BD; ponieważ AB jest równoległa do CD, przeto kąty naprzemianległe ABD i BDC, są sobie równe (pod. 23), nadto bok AB = DC, i bok DB jest wspolny, więc trójkąt ABD jest równy trójkątowi DBC (pod. 6); a zatém bok AD = BC, kąt ADB = DBC, i tém samém bok AD jest równoległy do BC; przeto czworokąt ABCD jest równoległobokiem.

PODANIE XXXI.

Twierdzenie.

Dwie przekątne AC i BD (fig. 44) *w równoległoboku, przecinając się, dzielą się wzajemnie na dwie części równe.*

Gdyż dwa trójkąty ADO i COB, mając bok AD=CB, kąt ADO=CBO (pod 23) i kąt DAO=OCB, są sobie równe (pod 7); a ztąd wynika, że bok AO, leżący naprzeciw kąta ADO, jest równy bokowi OC, leżącemu naprzeciw kąta OBC, i bok DO=OB.

Uwaga. W przypadku kwadratu ukośnego, ponieważ boki AB i BC są sobie równe, przeto trójkąty AOB i OBC mają po trzy boki odpowiednio równe, a tém samém są sobie równe, zkąd wynika że kąt AOB=BOC, a tém samém w kwadracie ukośnym przekątne są prostopadłe do siebie (opis. 10).

PODANIE XXXII.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie summa trzech jego kątów jest równa dwóm kątom prostym.

Przedłużywszy bok AC (fig. 45) i przez punkt C poprowadziwszy linię CE równoległą do AB, utworzą się trzy kąty DCE, ECB i BCA, których summa jest równa dwóm kątom prostym (pod 2, wn.); że zaś kąt ECB $=$ CBA, jako kąty naprzemianległe wewnętrzne względem linij równoległych AB i CE i siecznéj BC, a kąt DCE $=$ BAC, jako kąty jednostronne odpowiadające względem tych samych równoległych i siecznéj AC (pod. 23), przeto widocznie summa trzech kątów BAC, ABC i ACB trójkąta ABC jest równa dwóm kątom prostym.

Wniosek I. Znając dwa kąty trójkąta, albo znając ich summę, znajdziemy kąt trzeci, odjąwszy summę wiadomych kątów od dwóch kątów prostych.

II. Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego, i trzeci kąt jednego musi bydź równy kątowi trzeciemu drugiego trójkąta, a tém samém dwa trójkąty są równokątne względem siebie.

III. W trójkącie nie może być więcéj jak jeden kąt prosty; gdyż jeżeliby ich było dwa, kąt trzeci musiałby być równy zeru; tém bardziéj trójkąt nie może miéć więcéj jak jeden kąt rozwarty.

IV. W trójkącie prostokątnym summa

dwóch kątów ostrych jest równa kątowi prostemu.

V. W trójkącie równobocznym każdy kąt jest trzecią częścią dwóch kątów prostych, czyli dwiema trzeciémi kąta prostego. Jeżeli zatém kąt prosty wyrazimy przez 1, kąt trójkąta równobocznego wyrazi się przez $\frac{2}{3}$.

VI. W każdym trójkącie ABC, przedłużywszy bok jego AC ku D, kąt zewnętrzny BCD będzie równy summie dwóch kątów wewnętrznych A i B, nie obok niego leżących w trójkącie: gdyż dodając jak do kąta BCD, tak do summy kątów A+C, kąt ACB, otrzymamy summy równe dwóm kątom prostym.

PODANIE XXXIII.

Twierdzenie.

W wielokącie summa kątów wewnętrznych jest równa dwóm kątom prostym, wziętym tyle razy, ile wielokąt ma boków mniéj dwa.

Niech będzie (fig. 46) wielokąt ABCD....; od wierzchołka kąta A poprowadziwszy przekątne AC, AD, AE i t. d. do wierzchołków wszystkich kątów, wielokąt o siedmiu bokach zostanie podzielony na pięć trójkątow, wielokąt o ośmiu bokach zostanie podzielony na sześć trójkątów, i w ogólności wielokąt będzie podzielony na tyle trójkątów, ile ma boków mniéj dwa; gdyż te trójkąty mogą być uważane jako mające wspólny wierzchołek w A, a za podstawy wszystkie boki wielokąta, wyjąwszy dwa boki, stanowiące kąt A. Nadto summa kątów w tych wszystkich trójkątach, jest równa summie kątów wielokąta; a zatém summa kątów wielokąta jest równa dwóm kątom prostym, wziętym tyle razy, ile jest trójkątów, to jest: wziętym tyle razy, ile jest jedności w liczbie boków wielokąta zmniejszonéj dwóma.

Wniosek I. Summa kątów czworokąta jest równa dwóm kątom prostym, pomnożonym przez 4 — 2, to jest: cztérem kątom prostym. Jeżeli więc wszystkie kąty w czworokącie są sobie równe, każdy z nich jest kątem prostym; co sprawdza opis, w którym powiedziano że w prostokącie i kwadracie wszystkie kąty są proste.

II. Summa kątów w pięciokącie jest równa dwom kątom prostym, pomnożonym przez $5-2$, to jest sześciu kątom prostym. Jeżeli więc pięciokąt jest *równokątny*, to jest, jeżeli jego kąty są sobie równe, każdy z nich jest piątą częścią sześciu katów prostych, czyli $\frac{6}{5}$ kąta prostego.

III. Summa kątów sześciokąta jest $2(6-2)$, czyli 8 kątów prostych; a zatém w sześciokącie równokątnym, każdy kąt jest $\frac{8}{6}$, czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego.

Uwaga. Jeżeliby chciano to podanie zastosować do wielokąta mającego jeden lub kilka kątów *wklęsłych* (fig. 47), należałoby uważać każdy kąt wklęsły, jako większy od dwóch kątów prostych. Lecz dla uniknienia tego, uważać będziemy tylko *wielokąty wypukłe.* Wielokąt jest wypukłym, jeżeli linia prosta, jakkolwiek poprowadzona, nie może przeciąć się z obwodem jego więcéj jak w dwóch punktach.

KSIĘGA DRUGA.

O KOLE I MIERZENIU KĄTÓW.

Opisania.

1. *Okrąg koła* jest linia krzywa, któréj wszystkie punkta są równo oddalone od punktu znajdującego się wewnątrz, który się nazywa *środkiem* (fig. 48). *Kołem* nazywa się płaszczyzna zamknięta przez tę linię krzywą.

NB. Mówią niekiedy *koło* zamiast *okrąg koła*, lecz nie trudno przywrócić ścisłość wyrażenia, pamiętając, że koło jest płaszczyzną mającą długość i szerokość, a okrąg jest linią.

2. Wszelka linia prosta CA, CE, CD i t. d. poprowadzona od środka do okręgu koła nazywa się *promieniem*; wszelka zaś linia prosta AB, przechodząca przez środek i koń-

cząca się z obu stron na okręgu koła, nazywa się *średnicą*.

Podług opisu koła, wszystkie promienie jego są sobie równe, i wszystkie średnice także są sobie równe, a nadto każda średnica jest dwa razy większa od promienia.

3. Część okręgu koła FHG nazywa się *łukiem*.

Cięciwą jest linia prosta FG, łącząca oba końce łuku.

4. *Odcinkiem* jest płaszczyzna, czyli część koła, zawarta pomiędzy łukiem i cięciwą.

NB. Jednéj i téj saméj cięciwie FG odpowiadają dwa łuki FHG i FEG, a tém samém i dwa odcinki; lecz zawsze, jeżeli nie ma wzmianki o większym, należy domyślać się że idzie o ten, który jest mniejszy.

5. *Wycinek* jest część koła, zawarta pomiędzy łukiem DE i dwóma promieniami CD i CE, przechodzącemi przez końce tegoż łuku.

6. Linia AB kończąca się z obu stron na okręgu nazywa się *wpisaną w koło* (fig. 49).

Kątem wpisanym nazywa się kąt BAC, utworzony przez dwie cięciwy, schodzące się z sobą na okręgu.

Trójkątem wpisanym nazywa się trójkąt BAC, którego wszystkie trzy kąty mają swoje wierzchołki na okręgu.

I w ogólności *wielokątem wpisanym* nazywa się wielokąt, którego wszystkie kąty mają swoje wierzchołki na okręgu; w tym przypadku mówi się także że *koło jest opisane* na wielokącie.

7. *Sieczną* nazywa się linia prosta, która przecina okrąg w dwóch punktach, np. linia AB (fig. 50).

8. *Styczna* jest linia prosta, mająca tylko jeden punkt wspólny z okręgiem koła; taką jest linia CD.

Punkt M, wspólny dla stycznéj i okręgu koła, nazywa się *punktem zetknięcia*.

9. Dwa okręgi kół, mające jeden tylko punkt wspólny, nazywają się *stycznémi*.

10. Wielokąt, którego wszystkie boki są stycznémi do okręgu koła, nazywa się *wielo-*

kątem opisanym na kole; w tym przypadku mówi się także że *koło jest wpisane* w wielokąt.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Wszelka średnica (fig. 51) AB *dzieli koło i jego okrąg na dwie części równe.*

Jeżeli bowiem przyłożymy figurę AEB do AFB, pozostawiając średnicę AB wspólną, linia krzywa AEB przystanie do AFB; gdyż inaczéj punkta ich nie byliby jednakowo oddalone od środka, coby się sprzeciwiało opisowi koła.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Cięciwa jest zawsze mniejsza od średnicy (fig. 51).

Jeżeli bowiem przez końce cięciwy AD poprowadzimy promienie AC i CD, będzie linia prosta $AD < AC + CD$, czyli $AD < AC + CB$, czyli $AD < AB$.

Wniosek. Średnica jest największa ze wszystkich linij, które można wpisać w koło.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Linia prosta tylko w dwóch punktach może przeciąć okrąg koła.

Jeżeliby linia prosta przecinała się z okręgiem koła w trzech punktach, natenczas one znajdując się na okręgu, byłyby jednakowo oddalone od środka; moglibyśmy zatém od punktu do jednéj linii prostéj poprowadzić trzy linie proste równe sobie, co być nie może (ks. I, pod. 16).

PODANIE IV.

Twierdzenie.

W kole lub w kołach równych, łuki równe są podparte przez cięciwy równe, i odwrotnie cięciwy równe podpiérają łuki równe.

Jeżeli promień AC (fig. 52) jest równy promieniowi EO, i łuk AMD równy łukowi ENG; powiadam że cięciwa AD, będzie równa cięciwie EG.

Ponieważ średnica AB jest równa średnicy EF, przeto można pólkole AMDB przyłożyć do półkola ENGF tak, że linia krzywa AMDB przystanie do linii krzywéj ENGF; lecz przypuszczamy że część AMD jest równa części ENG, przeto punkt D padnie na punkt G, a tém samém cięciwa AD przystanie do cięciwy EG i jest jéj równa.

Odwrotnie, pzzypuściwszy że promień AC $=$ EO, i cięciwa AD $=$ EG, łuk AMD ma być równy łukowi ENG.

Poprowadziwszy promienie CD, OG, dwa trójkąty ACD, EOG, mieć będą po trzy boki odpowiednio równe, a mianowicie AC $=$ EO, CD $=$ OG i AD $=$ EG; przeto te dwa trójkąty będą sobie równe (pod. 11, ks. 1), a zatém kąt ACD $=$ EOG. Przeniosłszy półkole ADB na jemu równe EGF, ponieważ kąt ACD $=$ EOG, promień CD padnie na promień OG i punkt D na G; a zatém łuk AMD jest równy łukowi ENG.

PODANIE V.

Twierdzenie.

W kole lub w dwóch kołach równych, cięciwa większa podpiéra łuk większy i odwrotnie; lecz łuki mają być zawsze mniejsze od połowy okręgu koła.

Niech będzie (fig. 52) łuk AH większy od łuku AD, poprowadźmy cięciwy AD i AH, i promienie CD i CH; dwa boki AC i CH trójkąta ACH są równe bokom AC i CD trójkąta ACD, lecz kąt ACH jest większy od kąta ACD, przeto (pod. 10, ks. 1) bok trzeci AH jest większy od boku trzeciego AD; więc cięciwa większa podpiéra łuk większy.

Odwrotnie, założywszy że cięciwa AH jest większa od AD, można będzie wnieść z tych samych trójkątów, że kąt ACH jest większy od kąta ACD, i że tém samém łuk AH jest większy od AD.

Uwaga. Zakładamy że łuki, o których mowa, są mniejsze od połowy okręgu koła; jeżeliby zaś łuki były większe od połowy okręgu koła, natenczas w miarę powiększania się łuku, cięciwa by się zmniejszała i odwrotnie: tak, że jeżeli łuk AKBD jest większy od AKBH, cięciwa AD piérwszego łuku, jest mniejsza od cięciwy AH drugiego łuku.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Promień (fig. 53) CG *prostopadły do cięciwy* AB. *dzieli tę cięciwę i łuk przez nią podparty* AGB *na dwie części równe.*

1-e Promienie CA i CB, są dwie pochyłe sobie równe, względem prostopadłéj CD, przeto odległości ich od prostopadłéj są sobie równe (pod. 16, ks. I); t. j. AD=DB; a zatém cięciwa AB jest podzielona w punkcie D na dwie części równe.

2-e Ponieważ AD=DB, przeto CG jest prostopadła do linii AB, wystawiona z jéj środka, więc (pod. 17, ks. I) wszelki punkt na prostopadłéj CG jest równo oddalony od końców A i B linii AB. Ponieważ zaś punkt G jest jednym z punktów prostopadłéj, przeto odległości jego AG i GB od końców linii AB są sobie równe. Skoro cięciwa AG jest równa cięciwie GB, łuk AG musi być równy łukowi GB (pod. 4); więc promień CG, prostopadły do cięciwy AB, dzieli łuk do niéj należący w punkcie G na dwie części równe.

Uwaga. Środek C koła, środek D cięciwy AB i środek G łuku, podpartego przez tę cięciwę, leżą na jednéj linii prostéj prostopadłéj do cięciwy; ponieważ zaś dla oznaczenia linii prostéj dość jest mieć dwa punkta, przeto wszelka linia poprowadzona przez którekolwiek dwa punkta z trzech wymienionych, przejdzie i przez trzeci i będzie prostopadła do cięciwy.

Ztąd wynika także że, *prostopadła do cięciwy, ze środka jéj wyprowadzona, przechodzi przez środek koła i środek łuku podpartego przez cięciwę.* Gdyż ta prostopadła stanowi jedno z prostopadłą spuszczoną ze środka koła na cięciwę; bo obie przechodzą przez środek cięciwy.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Przez trzy punkta (fig. 54) A, B *i* C *nie na linii prostéj leżące, zawsze można poprowadzić okrąg koła, lecz nie więcéj jak tylko jeden.*

Podzieliwszy na dwie części równe każdą z linij prostych AB i BC, łączących punkt B z punktami A i C, z punktów podziałów wystawmy do nich linie prostopadłe DE i FG, które przetną się z sobą w jakimkolwiek punkcie O (pod. 21, ks. I).

Punkt O, leżąc na linii DE, prostopadłéj do AB i wyprowadzonéj z jéj środka, znajduje się w jednakowéj odległości od punktów A i B (pod. 17 ks. I); tenże punkt O, leżąc na FG prostopadłéj do BC, jest jednakowo oddalony od punktów B i C; więc trzy linie proste OA, OB i OC są sobie równe, przeto okrąg koła opisany ze środka O promieniem OB, przejdzie przez trzy punkta dane A, B i C.

Dowiedziono więc, że przez trzy punkta,

nie leżące na jednéj linii prostéj, zawsze można poprowadzić okrąg koła; pozostaje jeszcze okazać, że tylko jeden okrąg koła może przez nie przechodzić. Jeżeliby można było przez trzy punkta dane A, B i C poprowadzić inny okrąg koła, wówczas środek jego musiałby się znajdować na linii DE, gdyż inaczéj on byłby nierówno oddalony od punktów A i B (pod. 17, ks. I); dla podobnéj przyczyny on znalazłby się na linii FG; przeto środek byłby i na linii DE i na FG; ponieważ zaś dwie linie proste przecinają się z sobą tylko w jednym punkcie, więc środkiem nowego okręgu koła byłby punkt O; a zatém przez trzy punkta dane nie na linii prostéj, można poprowadzić tylko jeden okrąg koła.

Wniosek. Okręgi dwóch kół przecinają się z sobą tylko w dwóch punktach; gdyż jeżeliby one miały trzy punkta wspólne, natenczas miałyby wspólny środek i stanowiłyby jeden okrąg koła.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Dwie cięciwy równe są równo oddalone od środka koła; z dwóch zaś cięciw nierównych mniejsza jest więcéj oddalona od środka koła.

1-e Niech będzie cięciwa (fig. 55) AB=DE; prostopadlémi CF i CG, spuszczonemi na nie ze środka koła, podzielmy je na dwie równe części i poprowadźmy promienie CA i CD. Trójkąty prostokątne CAF i DCG mają przeciwprostokątne CA i CD równe, nadto bok AF, będący połową AB, jest równy bokowi DG, który jest połową cięciwy DE; więc pomienione dwa trójkąty są sobie równe (pod. 18, ks. I), a tém samém bok trzeci CF jest równy bokowi trzeciemu CG; przeto dwie cięciwy równe AB i DE, są równo oddalone od środka koła.

2-e Niech będzie cięciwa AH większa od DE, łuk AKH będzie większy od łuku DME (pod. 5); na łuku AKH odciąwszy częśc ANB=DME, poprowadźmy cięciwę AB, spuśćmy CF prostopadłą na tę cięciwę i CJ prostopadłą do AH; linia CF, jest dłuższa od CO, i linia CO większa od CJ (pod. 16 ks. I), więc tém bardziéj CF > CJ. Lecz CF=CG, bo cięciwy AB i DE są sobie równe, więc także CG > CJ; przeto z dwóch cięciw nierównych mniejsza jest bardziéj oddalona od środka koła.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Prostopadła BD (fig. 56) *do promienia* CA, *z końca jego wystawiona, jest styczną z okręgiem koła.*

Wszelka pochyła CE jest dłuższa od prostopadłéj CA (pod. 16 ks. I), a zatém punkt E znajduje się zewnątrz koła; więc linia BD ma tylko jeden punkt A wspólny z okręgiem koła, a tém samém jest (opis. 8) styczną do niego.

Uwaga. Przez punkt A dany na okręgu koła tylko jedną styczną można poprowadzić;

jeżeliby bowiem można było poprowadzić drugą, ta nie byłaby prostopadła do promienia CA, i promień byłby względem niéj linią pochyłą; przeto prostopadła, spuszczona ze środka na nową styczną, byłaby krótsza od promienia AC, a tém samém druga styczna przecięłaby okrąg koła i byłaby sieczną.

PODANIE X.

Twierdzenie.

Łuki (fig. 57) MN *i* PQ, *odcięte na okręgu koła przez dwie linie równoległe* AB *i* DE *są sobie równe.*

Mogą się zdarzyć trzy przypadki:

1-e Jeżeli dwie linie równoległe są siecznemi, natenczas poprowadziwszy promień CH prostopadły do cięciwy MP, on będzie prostopadły i do cięciwy NQ, równoległéj do MP (ks. I, pod. 22); a zatém punkt H będzie środkiem łuków MHP i NHQ (pod. 6); więc mamy łuk MH = HP i łuk NH = HQ, zkąd wypada MH — NH = HP — HQ, czyli MN = PQ.

2-e Gdy jedna AB z dwóch linij równoległych (fig. 58) jest sieczną, a druga DE styczną; natenczas promień CH, poprowadzony przez punkt H, zetknięcia się stycznéj DE z okręgiem koła, będzie prostopadły (pod. 9) do stycznéj i do cięciwy MP z nią równoległéj. Ponieważ promień jest prostopadły do cięciwy MP, przeto punkt H jest środkiem łuku MHP, a tém samém łuki MH i HP, odcięte przez linie równoległe AB i DE, są sobie równe.

3-e Nakoniec kiedy obie linie równoległe DE i JL są stycznemi, jedna w punkcie H, a druga w K, poprowadziwszy sieczną AB równoległą do nich, podług tego co dowiedziono otrzymamy, MH = HP i MK = KP, przeto MH + MK = HP + KP, czyli HMK = HPK. Nadto widzimy, że każdy z tych łuków jest półokręgiem koła.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Linia prosta, łącząca środki dwóch okrę-

gów kół przecinających się z sobą, jest prostopadła do cięciwy, łączącéj dwa punkta wynikłe z przecięcia, i dzieli ją na dwie części równe.

Gdyż linia (fig. 59 i 60) AB, łącząca punkta przecięcia, jest cięciwą wspólną dla obu kół, przeto linia prostopadła, wystawiona z jéj środka, musi przejść przez środki C i D tychże kół (pod. 6 uw.). Lecz między dwóma punktami można poprowadzić tylko jedną linię prostą, więc linia prosta, przechodząca przez środki, jest prostopadła do cięciwy wspólnéj i dzieli ją na dwie części równe.

PODANIE XXII.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość środków dwóch kół jest mniejsza od summy ich promieni, a promień większy jest mniejszy od summy promienia mniejszego i odległości środków, natenczas dwa koła przetną się z sobą.

Widocznie że aby okręgi dwóch kół przecięły się z sobą, powinien mieć miejsce trójkąt CAD (fig. 59 i 60), a zatém potrzeba aby było $CD < AC+AD$, i aby promień większy $AD < AC+CD$. Przeto skoro można narysować trójkąt CAD, okręgi dwóch kół, opisane ze środków C i D, przetną się z sobą w jakichkolwiek puntach A i B.

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość CD (fig. 61) *środków dwóch kół jest równa summie ich promieni* CA *i* AD, *koła będą względem siebie stycznemi zewnętrznie..*

Koła takie widocznie nie będą miały żadnego punktu wspólnego prócz A; bo aby miały drugi punkt wspólny, potrzeba aby odległość ich środków była mniejsza od summy promieni.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość CD (fig. 62) *środków dwóch kół jest równa różnicy między ich promieniami* DA *i* AC, *koła będą stycznemi wewnętrznie.*

Widoczną jest rzeczą, że koła takie nie będą miały żadnego punktu wspólnego prócz A; bo aby miały drugi punkt wspólny, potrzeba żeby promień większy AD był mniejszy od summy promienia mniejszego CA i odległości środków CD (pod. 12), co miejsca nie ma.

Wniosek. Przeto jeżeli dwa koła są styczne do siebie, bądź to zewnętrznie, bądź wewnętrznie, środki ich i punkt zetknięcia leżą na jednéj linii prostéj.

Uwaga. Wszystkie koła mające środki swoje na linii prostéj CD (fig. 61 i 62) i przechodzące przez punkt A, są styczne do siebie, to jest: mają jeden tylko punkt wspólny A. Linia AE prostopadła do CD, wyprowadzona z punktu A, będzie do wszystkich kół styczną.

PODANIE XV.

Twierdzenie.

Kąty ACB *i* DCE (fig. 63) *równe sobie, mające wierzchołki swoje w środku jednego koła, lub w środkach kół równych, obejmują ramionami swémi na okręgach łuki* AB *i* DE *równe.*

Odwrotnie, łuki równe AB *i* DE *są zawarte między ramionami kątów równych* ACB *i* DCE.

Gdyż 1-e, jeżeli kąty ACB i DCE są sobie równe, jeden z nich można położyć na drugim tak, że punkt A padnie na D i B na E; w takim razie i łuk AB przystanie do łuku DE; jeżeliby bowiem te łuki nie przystały do siebie, natenczas punkta ich nie byłyby jednakowo oddalone od środka, co być nie może, a zatém łuk AB = DE.

2-e Założywszy że łuk AB = DE, mówię że będzie kąt ACB = DCE; gdyż jeżeli te kąty nie są sobie równe, niech będzie kąt ACB większy od DCE; nakréśliwszy kąt ACJ= DCE, podług tego co dowiedziono, byłby łuk AJ=DE, lecz podług założenia łuk AB=DE, przeto otrzymalibyśmy że część AJ jest równa całości AB, co być nie może; zatém kąt ACB=DCE.

PODANIE XVI.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa kąty ACB *i* DCE (fig. 64), *których wierzchołki są w środku jednego koła, lub w środkach kół równych, mają się do siebie jak dwie liczby całe, natenczas i łuki* AB *i* DE, *zawarte między ich ramionami, miéć się będą jak te same liczby, a tém samém stosunek kątów będzie równy stosunkowi łuków, to jest będzie:*

kąt ACB : kąta DCE = łuk AB : łuku DE.

Przypuśćmy że kąty ACB i DCE mają się do siebie jak dwie liczby 7 i 4; albo co jest to samo, załóżmy że kąt M, będący ich wspólną miarą, mieści się w kącie ACB razy 7, a w kącie DCE razy 4. Ponieważ kąty cząstkowe ACm, mCn, nCp i t. d., DCx, xCy i t. d. są sobie równe, przeto i łuki cząstkowe Am, mn, np i t. p., Dx, xy i t. d. także są sobie równe (pod. 15); a zatém łuk AB tak się ma do DE, jak 7 do 4. Widoczną jest rzeczą, że rozumowanie będzie toż samo, jeżeli na miejsce liczb 7 i 4 podstawimy jakiekolwiek inne liczby; przeto jeżeli stosunek kątów ACB i DCE może być wyrażony w liczbach całkowitych, łuki AB i DE mieć się będą do siebie, jak kąty ACB i DCE.

Uwaga. Odwrotnie, jeżeli łuki AB i DE mają się do siebie jak liczby całe, i kąty ACB i DCE mieć się będą do siebie jak też same liczby, i zawsze będzie ACB: DCE = AB : DE; gdyż jeżeli łuki cząstkowe Am, mn, i t. d. Dx, xy, i t. d. będą sobie równe, i kąty cząstkowe ACm, mCn, i t. d., DCx, xCy, i t. d. także będą sobie równe.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Dwa kąty ACB i ACD (fig. 65) *mającc się do siebie w jakimkolwiek stosunku, zawsze mieć się będą do siebie jak łuki* AB i AD, *zawarte między ich ramionami, i opisane z ich wierzchołków, jako ze środków, jednakowémi promieniami.*

Przypuśćmy że kąt mniejszy jest położony na większym. Jeżeli twierdzenie nie jest prawdziwe, kąt ACB tak się ma do kąta ACD jak łuk AB do łuku większego lub mniejszego od AD, przypuśćmy do łuku większego AO, to jest:

kąt ACB: kąta ACD $=$ łuk AB: łuku AO.

Wyobraźmy sobie, że łuk AB podzielono na ilekolwiek części równych, z których każda jest mniejsza od DO, w takim razie przynajmniéj jeden punkt podziału padnie między punktami D i O, niech tym punktem będzie J; poprowadziwszy CJ, łuki AB i AJ będą się miały do siebie jak liczby całe, a zatém podług twierdzenia poprzedzającego będzie:

kąt ACB: kąta ACJ = łuk AB: łuku AJ.

Ponieważ w tych dwóch proporcyach poprzedniki są sobie równe, przeto następniki stanowią proporcyę:

kąt ACD: kąta ACJ = łuk AO: łuku AJ.

Ponieważ łuk AO jest większy od łuku AJ, przeto aby ta proporcya mogła mieć miejsce, a tém samém aby przypuszczenie było prawdziwe, potrzeba żeby kąt ACD był większy od kąta ACJ; lecz kąt ACD jest mniejszy od ACJ, przeto być nie może aby kąt ACB miał się do kąta ACD, jak się ma łuk AB do łuku większego od AD.

Drogą podobnego rozumowania możnaby okazać, że czwarty wyraz proporcyi założonéj w twierdzeniu, nie może bydź mniejszy od AD; przeto może bydź nim tylko AD, i tém samém mamy proporcyą:

kąt ACB: kąta ACD = łuk AB: łuku AD.

Wniosek. Ponieważ kąt mający swój wierzchołek w środku koła i łuk na okręgu tegoż koła, zawarty pomiędzy ramionami kąta, mają tak ścisły z sobą związek, że w miarę powiększenia lub zmniejszenia się jednego z nich w jakimkolwiek stosunku, i drugi w tym że samym stosunku powiększa się lub zmiejsza; przeto jedną z tych wielkości można wziąść za miarę drugiéj,, i tak za miarę kąta ACB zawsze brać będziemy łuk AB. Lecz uważać należy, aby łuki brane za miary kątów, porównywanych pomiędzy sobą, były opisane promieniami jednakowémi; cośmy w saméj rzeczy zakładali we wszystkich wyżéj przytoczonych twierdzeniach.

Uwaga. Zdaje się, że właściwiéj byłoby mierzyć wielkości, zapomocą wielkości tegoż samego gatunku; podług téj zasady wypadałoby wszystkie kąty odnosić do kąta prostego, w takim razie wziąwszy kąt prosty za jedność, kąty ostre wyrazilibyśmy liczbami zawartemi między 1 i 2. Lecz ten sposób wyrażania kątów w użyciu nie jest dogodnym i znaleziono, że daleko prościéj wyrażać kąty łukami koła; gdyż łatwo nakreślić łuk równy łukowi danemu i dla wielu innych przyczyn. Nadto chociaż sposób mierzenia kątów łukami nie zdaje się być w pewnym względzie prostym, jednak łatwo jest przejść od téj miary, do miary kątów prostéj i bezwględnéj; gdyż porównawszy łuk, służący za miarę kąta danego, z czwartą częścią okręgu koła, otrzymamy stosunek tegoż kąta do kąta prostego, a to jest miarą kąta bezwzględną.

Uwaga 2. Wszystko co dowiedziono w trzech ostatnich podaniach o stosunkach kątów do łuków, rozciąga się i na wycinki porównywane z łukami; gdyż wycinki są sobie równe, jeżeli ich kąty są sobie równe, i w ogólności one są proporcyonalne kątom; przeto *dwa wycinki* ACB i ACD (fig. 65), *jednego koła, lub dwóch kół równych, mają się do siebie jak łuki* AB i AD, *będące ich podstawami.*

Ztąd widzimy że łuki koła, które służą za miarę kątów, mogą także być użyte do mierzenia wycinków jednego koła lub kół równych.

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Miarą kąta wpisanego BAD (fig. 66 i 67) *jest połowa łuku* BD, *zawartego między jego ramionami.*

Przypuśćmy na 1-ód że środek koła znajduje się między ramionami kąta BAD (fig. 66); poprowadźmy średnicę AE i promienie CB i CD. Kąt BCE, będąc zewnętrznym względem trójkąta ABC, jest równy summie jego kątów wewnętrznych CAB i ABC (pod. 32 wni. 6, ks. I); ponieważ zaś trójkąt BAC jest równoramienny, przeto kąt CAB$=$ABC, i tém samém kąt BCE jest dwa razy większy od kąta BAC. Kąt BCE, którego wierzchołek jest w środku, ma za miarę łuk BE, przeto miarą kąta BAC jest połowa łuku BE. Drogą takiego samego rozumowania znajdziemy, że miarą kąta CAD jest połowa łuku ED; a zatém summa kątów BAC i CAD, czyli kąt BAD ma za miarę połowę summy łuków BE i ED, czyli połowę łuku BD.

Przypuśćmy po 2-re, że środek koła C (fig. 67) znajduje się zewnątrz kąta BAD; poprowadziwszy średnicę AE, miarą kąta BAE będzie połowa łuku BE, a miarą kąta DAE połowa łuku DE; a zatém miarą różnicy tych dwóch kątów, t. j. kąta BAD, będzie połowa łuku BE zmniejszona połową łuku DE, czyli połowa łuku BD.

Więc miarą wszelkiego kąta wpisanego w koło jest połowa łuku, zawartego między jego ramionami.

Wniosek I. Wszystkie kąty BAC, BDC i t. d. (fig. 68), wpisane w jeden odcinek są sobie równe; gdyż wspólną ich miarą jest połowa łuku BOC.

II. Wszelki kąt BAD (fig. 69), wpisany wpółkole jest prosty, gdyż miarą jego jest połowa półokręgu BOD, t. j. czwarta część okręgu koła.

Aby to dowieść innym sposobem, poprowadźmy promień AC; trójkąt BAC jest równoramienny, przeto kąt $BAC = ABC$; trójkąt CAD jest także równoramienny, a zatém kąt $CAD = ADC$, więc $BAC + CAD$, czyli $BAD = ABD + ADB$. Lecz ponieważ w trójkącie summa dwóch kątów B i D jest równa trzeciemu BAD, a summa wszystkich trzech czyni dwa kąty proste, przeto kąt BAD musi być kątem prostym.

III. Wszelki kąt BAC (fig. 68) wpisany w odcinek większy od półkoła, jest ostry; gdyż ma za miarę połowę łuku BOC mniejszego od półokręgu.

Każdy kąt BOC, wpisany w odcinek mniejszy od półkola, jest rozwarty, bo ma za miarę połowę łuku BAC większego od półokręgu.

IV. W czworokącie wpisanym ABCD (fig. 70) dwa kąty przeciwległe A i C, razem wzięte, stanowią dwa kąty proste; gdyż kąt BAD ma za miarę pół łuku BCD, a miarą kąta BCD jest pół łuku BAD; więc miarą summy kątów BAD i BCD jest pół okręgu, a zatém oba stanowią dwa kąty proste.

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

Miarą kąta BAC *(fig, 71) zawartego między cięciwą i styczną, poprowadzoną przez którykolwiek koniec cięciwy, jest połowa łuku* AMDC, *podpartego przez cięciwę.*

Przez punkt A zetknięcia stycznéj z okręgiem, poprowadźmy średnicę AD, kąt BAD jest prosty (pod. 9), a więc ma za miarę połowę półokręgu AMD, miarą zaś kąta DAC jest połowa łuku DC (pod. 18), przeto miarą BAD + DAC, t. j. kąta BAC jest połowa łuku AMD więcéj połową łuku DC, czyli połowa całego łuku AMDC.

Podobnie można dowieść, że miarą kąta CAE jest połowa łuku AC.

PODANIE XX.

Twierdzenie.

Miarą kąta ABC (fig. 72), *mającego wierzchołek między środkiem a okręgiem koła, jest połowa łuku* AC *zawartego między jego ramionami, powiększona połową łuku* DE *zawartego między przedłużeniami tychże ramion.*

Przez punkt E poprowadźmy linię EF równoległą do DC, która odetnie na okręgu łuk CF = DE (pod. 10). Miarą kąta AEF (pod. 18) będzie połowa łuku AC, czyli $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CF, czyli $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ DE; że zaś kąt AEF jest równy kątowi ABC (pod. 23 ks. I.), przeto miarą kąta ABC jest $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ DE.

PODANIE XXI.

Twierdzenie.

Miarą kąta ABC (fig. 73), *mającego wierzchołek za okręgiem koła jest połowa łuku* AC *zmniejszona połową łuku* DE.

Prez punkt E poprowadźmy linię EF równoległą do AB, która odetnie na okręgu łuk AF = DE (pod. 10). Miarą kąta FEC jest połowa łuku FC (pod. 18); że zaś łuk FC = AC — AF, czyli łuk FC = AC — DE, przeto $\frac{1}{2}$ FC = $\frac{1}{2}$ AC — $\frac{1}{2}$ DE, a tém samém miarą kąta FEC jest $\frac{1}{2}$ AC — $\frac{1}{2}$ DE; a że kąt FEC = ABC (pod. 23, ks. I.), więc miarą kąta ABC jest $\frac{1}{2}$ AC — $\frac{1}{2}$ DE.

ZAGADNIENIA,

KTÓRYCH ROZWIĄZANIE POLEGA NA WIADOMOŚCIACH OBJĘTYCH W DWÓCH PIÉRWSZYCH KSIĘGACH.

ZAGADNIENIE I.

Daną linię prostą AB (fig. 74) *podzielić na dwie części równe.*

Z końców A i B, jako ze środków, promieniami równémi, lecz większémi od połowy AB, opiszmy łuki, które przetną się z sobą w punkcie D, który będzie się znajdował w jednakowéj odległości od punktów A i B; takim samym sposobem poniżéj linii AB oznaczmy punkt E, równo oddalony od jéj końców, i połączmy punkt D z E linią prostą DE;

powiadam, że linia AB w punkcie C, wynikającym z przecięcia się linii DE z linią AB, będzie podzielona na dwie części równe.

Ponieważ punkta D i E są równo oddalone od końców linii AB, przeto one winny się znajdować na linii prostopadłéj do AB, z jéj środka wystawionéj; że zaś pomiędzy dwóma punktami można poprowadzić tylko jedną linię prostą, więc linia DE jest prostopadła do AB i dzieli ją na dwie części równe.

ZAGADNIENIE II.

Z punktu A (fig. 75) *danego na linii* AB, *wystawić prostopadłą do téjże linii.*

Obierzmy na danéj linii punkta B i C równo oddalone od A, i z tych punktów, jako ze środków, promieniami równémi, lecz większémi od BA, zakreślmy łuki, które się przetną w D, a linia DA, łącząca punkt D z A, będzie żądaną prostopadłą.

Punkt D, będąc równo oddalony od B i C, leży na prostopadłéj wyprowadzonéj do linii BC z jéj środka; a zatém AD jest prostopadłą żądaną.

Uwaga. To samo wykreślenie służy do nakréślenia kąta prostego BAD, przy punkcie A na linii danéj BC.

ZAGADNIENIE III.

Z punktu A (fig. 76), *danego nad linią* BD, *spuscić prostopadłą do téjże linii.*

Z puktu A, jako ze środka, opiszmy promieniem dostatecznie wielkim łuk, któryby przeciął linię BD w dwóch punktach B i D; następnie oznaczmy punkt E, równo oddalony od B i D, a linia AE, łącząca punkta A i E będzie żądaną prostopadłą.

Linia AE dla tego jest prostopadła do BD, że dwa punkta A i E, na niéj leżące, są równo oddalone od końców linii BD.

ZAGADNIENIE IV.

Przy punkcie A (fig. 77), *na linii* AB *nakréślić kąt, równy kątowi danemu* K.

Z wierzchołka kąta K, jako ze środka, upodobanym promieniem KJ, opiszmy łuk JL, kończący się na ramionach kąta; z punktu A takim samym promieniem opiszmy łuk nieograniczony BO; z punktu B, jako ze środka, promieniem równym cięciwie LJ opiszmy łuk, któryby się przeciął z łukiem niegraniczonym BO w punkcie D, a połączywszy D z A linią prostą AD, otrzymamy kąt DAB równy kątowi danemu K. Gdyż dwa łuki BD i LJ, jako opisane promieniami równémi i podparte przez cięciwy równe, są sobie równe (pod. 4 ks. II), a tém samém kąt BAD = JKL.

ZAGADNIENIE V.

Podzielić kąt, lub łuk dany na dwie części równe.

1-e Aby łuk dany AB (fig. 78) podzielić na dwie części równe, zakreślmy z punktów A i B, jako ze środków, promieniami równémi dwa łuki, któreby się przecięły w D; przez D i środek koła C poprowadźmy linię prostą CD, a ta podzieli łuk AB na dwie części równe.

Każdy z dwóch punktów C i D jest równo oddalony od końców A i B cięciwy AB, przeto linia CD jest prostopadła do téj cięciwy i przechodzi przez jéj środek; ponieważ linia CD, jest to samo co promień prostopadły do cięciwy AB (pod. 6, ks. II), przeto dzieli łuk AB w punkcie E na dwie części równe.

2-e Aby podzielić kąt ACB na dwie części równe, potrzeba z wierzchołka jego C, jako ze środka, opisać jakimkolwiek promieniem łuk AB, i postępując daléj jak wyżéj, znajdziemy linię CD, która podzieli łuk AB a tém samém kąt ACB na dwie części równe.

Uwaga. Za pomocą takiego samego wykreślenia, można każdą połowę AE i EB podzielić na dwie części równe, i postępując daléj można będzie łuk, lub kąt dany podzielić na 4, 8, 16, 32 i t. d. części równych.

ZAGADNIENIE VI.

Przez punkt dany A (fig. 79) *poprowadzić linię równoległą do linii danéj* BC.

Z punktu A, jako ze środka, promieniem dostatecznie wielkim opiszmy łuk nieograniczony EO, z punktu E, jako ze środka, opiszmy takim samym promieniem łuk AF, weźmy ED=AF, a linia AD, łącząca punkt A z D, będzie żądana równoległa.

Połączywszy punkt A z E linią prostą AE, będą kąty naprzemianległe AEF i EAD sobie równe; a zatém linie AD i EF są równoległe do siebie (pod. 24, ks. I).

ZAGADNIENIE VII.

Mając dane dwa kąty A *i* B (fig. 80) *trójkąta, znaleźć kąt jego trzeci.*

Poprowadziwszy linię nieograniczoną DEF i nakreśliwszy przy E kąt DEC=A i kąt CEH=B, pozostały kąt HEF będzie kątem szukanym; gdyż te trzy kąty razem wzięte czynią summę, równą dwóm kątom prostym.

ZAGADNIENIE VIII.

Mając wiadome dwa boki B i C (fig. 81) *i* *kąt pomiędzy niémi zawarty* A, *nakréślić trójkąt.*

Poprowadziwszy linię nieograniczoną DE, nakreśliwszy na niéj, przy punkcie dowolnym D, kąt EDF równy kątowi danemu A, i wziąwszy DG = B i DH = C, poprowadźmy GH, a otrzymamy trójkąt DGH żądany.

ZAGADNIENIE IX.

Nakréślić trójkąt, mając dany bok jego i dwa kąty.

Albo oba kąty dane będą przyległe bokowi, albo jeden będzie przyległym a drugi naprzeciw niego leżącym; w drugim przypadku znalazłszy kąt trzeci (zag. 7), będą wiadome dwa kąty mające leżéć przy boku danym. To założywszy, poprowadźmy linię prostą DE (fig. 82) równą bokowi danemu, i na niéj przy punkcie D nakréślmy kąt EDF równy jednemu, a przy punkcie E kąt DEG równy drugiemu kątowi mającemu leżéć na DE; dwie linie DF i EG przetną się z sobą w punkcie H i dadzą trójkąt żądany DEH.

ZAGADNIENIE X.

Nakréślić trójkąt, mając wiadome trzy boki jego A, B i C (fig. 83).

Poprowadźmy DE = A; z punktu E, jako ze środka, promieniem równym bokowi drugiemu B, opiszmy łuk, z punktu D jako ze środka promieniem, równym bokowi trzeciemu C, opiszmy łuk, który przetnie się z tamtym w punkcie F; poprowadziwszy DF i EF, trójkąt DEF będzie żądany.

Uwaga. Jeżeliby jeden z danych boków był większym od summy dwóch innych, natenczas łuki nie przecięłyby się z sobą i zagadnienie byłoby niepodobne do rozwiązania; zawsze zaś można będzie rozwiązać to zagadnienie, jeżeli tylko summa dwóch którychkolwiek boków danych jest większa od trzeciego.

ZAGADNIENIE XI.

Nakréślić trójkąt, mając dane dwa boki A *i* B *i kąt* C *przeciwległy bokowi* B.

Mogą się zdarzyć dwa przypadki:

1-e Jeżeli kąt C (fig. 84) jest prosty lub rozwarty, nakreślmy kąt EDF = C, odetnijmy DE = A i z punktu E, jako ze środka, promieniem równym drugiemu bokowi B, opiszmy łuk, który się przetnie z linią DF w punkcie F; połączywszy F z E linią EF, otrzymamy trójkąt żądany DEF.

W tym przypadku potrzeba, aby bok B był większy od boku A; kąt bowiem C, jako prosty, lub rozwarty, jest największy z pomiędzy kątów trójkąta, a zatém i bok jemu przeciwległy powinien być największy.

2-e Jeżeli kąt C (fig. 85) jest otry, a bok B jest większy od A, za pomocą podobnego wykreślenia, znajdziemy trójkąt DEF żądany.

Jeżeli zaś kąt C (fig. 86) jest ostry, a bok B jest mniejszy od A, natenczas łuk opisany z punktu E, jako ze środka, promieniem EF = B, przetnie się z linią DF w dwóch punktach F i G, położonych z jednéj strony punktu D, a zatém otrzymamy dwa trójkąty DEF i DEG, które odpowiadają na zagadnienie.

Uwaga. Zagadnienie byłoby niepodobne do rozwiązania, gdyby bok B był mniejszy od prostopadłéj spuszczonéj z punktu E na linię DF.

ZAGADNIENIE XII.

Nakréślić równoległobok (fig. 87), *mając wiadome dwa jego boki przy sobie leżące* A *i* B *i kąt* C, *przez nie utworzony.*

Poprowadźmy linię DE = A, przy punkcie D nakréślmy kąt FDE = C, odetnijmy DF = B; opisawszy dwa łuki, jeden ze środka F promieniem FG = DE; a drugi ze środka E promieniem EG = DF, i punkt G, w którym te łuki przetną się z sobą, połączywszy z F i E liniami FG i EG, otrzymamy równoległobok żądany DEFG. Gdyż podług wykréślenia boki przeciwległe są sobie równe, przeto czworokąt jest równoległobokiem (pod. 29, ks. I); nadto w skład tego równoległoboku wchodzą boki i kąt dany.

Wniosek. Jeżeli kąt dany jest prosty, figura będzie prostokątem; jeżeli nadto boki dane są sobie równe, otrzymamy kwadrat.

ZAGADNIENIE XIII.

Znaléść środek koła, lub łuku danego.

Obrawszy na okręgu trzy punkta dowolne (fig. 88) A, B i C i połączywszy je liniami prostemi AB i BC, podzielmy każdą z nich na dwie częsci równe, i ze środków tych linij wystawmy do nich prostopadła DE i FG, które przetną się z sobą w punkcie szukanym O.

Uwaga. Toż samo wykreślenie służy do poprowadzenia przez dane trzy punkta A, B i C okręgu koła i do opisania koła na danym trójkącie ABC.

ZAGADNIENIE XIV.

Przez punkt dany poprowadzić styczną do koła.

Jeżeli punkt dany A (fig. 89) jest na okręgu, poprowadźmy prostopadłą AD do promienia CA, a AD będzie styczną żądaną (pod. 9 ks. II).

Jeżeli punkt dany A (fig. 90) jest za okręgiem, połączmy go ze środkiem danego koła C linią prostą AC; podzielmy linię AC na dwie części równe w punkcie O, i z punktu O, jako ze środka, promieniem OC, opiszmy okrąg, który z okręgiem danym przetnie się w punktach B i D; linie AB i AD, łączące punkta B i D z A, będą stycznemi żądanemi.

Gdyż kąty CBA i CDA, jako wpisane w półkole, są proste (pod. 18 ks. II), a zatém linie AB i AD są prostopadłe do promieni i przechodzą przez ich końce, a tém samém są styczne z kołem.

Uwaga. Przez punkt A dany za kołem, zawsze można poprowadzić dwie styczne AB i AD równe sobie; bo trójkąty prostokątne CBA i CDA, mając przeciwprostokątną wspólną i bok CB = CD, są sobie równe (pod. 18 ks. I); przeto AD = AB.

ZAGADNIENIE XV.

W dany trójkąt ABC *wpisać koło* (fig. 91).

Podzielmy kąty A i B na dwie części równe liniami prostemi AO i BO, które się zejdą w punkcie O; z punktu O spuśćmy prostopadłe OD, OE, OF na boki trójkąta, powiadam że trzy prostopadłe są sobie równe; gdyż podług wykréślenia kąt DAO = OAF, więc dwa trójkąty prostokątne AOD i AOF mając przeciwprostokątną AO wspólną i po dwa kąty przy niéj leżące odpowiednio równe, są sobie równe; a zatém DO = OF. Podobnie możnaby okazać, że trójkąty BOD i BOE są sobie równe, a tém samém że OD = OE; więc trzy prostopadłe OD, OE i OF są sobie równe.

Jeżeli więc z punktu O, jako ze środka, promieniem OD opiszemy okrąg koła widocznie on będzie wpisany w trójkąt ABC; gdyż bok AB, będąc prostopadły do promienia i przechodząc przez koniec jego jest stycznym z okręgiem; toż samo ma miejsce z bokami BC i AC.

Uwaga. Trzy linie proste, dzielące kąty trójkąta na dwie części równe, schodzą się z sobą w jednym punkcie.

ZAGADNIENIE XVI.

Na danéj linii prostéj AB (fig. 92 i 93) *opisać taki odcinek, aby każdy kąt w niego wpisany, był równy katowi danemu* C.

Przedłużmy AB ku D, i przy punkcie B nakréślmy kąt DBE=C, poprowadźmy linię BO prostopadłą do BE i ze środka linii AB wystawmy linię GO do niéj prostopadłą, która z linią BO przetnie się w punkcie O; z punktu O, jako ze środka, promieniem OB opiszmy koło, a odcinkiem żądanym będzie AMB.

Ponieważ linia BF jest prostopadła do promienia OB i przechodzi przez koniec jego, przeto jest styczną, a kąt ABF ma za miarę połowę łuku AKB (pod. 19 ks. II); nadto kąt AMB, jako wpisany, ma także za miarę połowę łuku ABK, więc kąt AMB=ABF=EBD=C; przeto wszystkie kąty wpisane w odcinek AMB są równe kątowi danemu C.

Uwaga. Gdyby kąt dany był prosty, natenczas odcinek szukany byłby półkolem, opisaném na średnicy AB.

ZAGADNIENIE XVII.

Znaleść stosunek liczebny pomiędzy dwiema liniami prostemi AB *i* CD (fig. 94), *mającemi wspólną miarę.*

Przenieśmy linię CD na linię większą AB i przypuśćmy że w niéj się mieści dwa razy z resztą BE.

Resztę BE przenieśmy na linię CD i przypuśćmy że mieści się w niéj raz jeden z resztą DF.

Przenieśmy resztę drugą DF na pierwszą BE, i dajmy że się w niéj mieści raz jeden z resztą BG,

Przenieśmy trzecią resztą BG na drugą DF tyle razy, ile razy się w niéj mieści.

I tak daléj postępujmy dopóty, dopóki nie dojdziemy do reszty, która będzie się zupełnie mieściła pewną liczbę razy w reszcie poprzedzającéj.

Ostatnia reszta będzie wspólną miarą linij danych, uważając zaś ją za jedność, łatwo znaléźć wartości (wyrażone w téj jedności) reszt poprzedzających i nakoniec linij danych, zkąd wyprowadzi się stosunek liczebny tychże linij.

Naprzykład, przypuściwszy że BG mieści się w FD razy dwa bez reszty, wspólną miarą linij danych będzie BG. Niech będzie $BG = 1$, przeto $FD = 2$; lecz $EB = FD + BG$, więc $EB = 3$; $CD = EB + FD$, więc $CD = 5$; nakoniec AB mieści w sobie CD dwa razy i EB, więc $AB = 13$; przeto stosunek linij AB i CD jest równy stosunkowi liczb 13 i 5. Wziąwszy linię CD za jedność, linia AB byłaby $\frac{13}{5}$, a wziąwszy AB za jedność, linia CD byłaby $\frac{5}{13}$.

Uwaga. Ten sposób wynajdywania wspólnéj miary dwóch linij jest taki, jaki daje arytmetyka na znalezienie wspólnego dzielnika dwóch liczb; a tém samém on nie potrzebuje oddzielnego dowodzenia.

Może się zdarzyć że posunąwszy najdaléj działanie, nigdy nie dojdziemy do reszty, któraby się zupełnie mieściła w reszcie poprzedzającéj. Natenczas dwie linie dane nie mają wspólnéj miary i nazywają się *niewspółmiernemi*; przykład takich linij napotkamy późniéj na przekątnéj i boku kwadratu. W takim więc przypadku nie można znaleść ścisłego stosunku liczebnego; lecz niezważając na ostatnią resztę, znajdziemy stosunek mniéj lub bardziéj przybliżony, w miarę tego jak daleko działanie posuniemy.

ZAGADNIENIE XVIII.

Mając dane dwa kąty A *i* B (fig. 95) *znaleść ich wspólną miarę, jeżeli one mają takową, i ztąd oznaczyć stosunek ich w liczbach.*

Promieniami równemi z wierzchołków kątów opiszmy łuki CD i EF, które mierzą kąty A i B; z łukami CD i EF tak postępujmy, jak w zagadnieniu poprzedzającém postępowaliśmy z liniami prostemi; gdyż łuk jeden może być przeniesiony na łuk drugi jednakowego z nim promienia, podobnie jak linia prosta na drugą linię prostą. Takim sposobem dojdziemy do wspólnéj miary łuków CD i EF, jeżeli one mają takową, i do stosunku ich liczebnego; ten zaś stosunek jest stosunkiem pomiędzy kątami danémi (pod. 17, ks II), i jeżeli łuk DO jest wspólną miarą łuków CD i EF, kąt DAO będzie wspólną miarą kątów A i B.

Uwaga. Takim sposobem możnaby znaleźć wartość bezwzględną kąta, porównywając łuk, służący mu za miarę, z całym okręgiem koła; np. jeżeli łuk CD ma się do okręgu koła, jak się ma 3 do 25, kąt A będzie $\frac{3}{25}$ cztérech kątów prostych, czyli $\frac{12}{25}$ kąta prostego.

Może się zdarzyć że łuki porównywane nie mają wspólnéj miary; w takim przypadku otrzymamy stosunek kątów mniéj lub więcéj przybliżony w miarę tego, jak daleko działanie posuniemy.

KSIĘGA TRZECIA.

O PROPORCYONALNOŚCI FIGUR.

Opisania.

1. Figury, których powierzchnie są sobie równe, nazywają się *równoważnemi.*

Dwie figury różne co do kształtu mogą być równoważne; np. koło może być równoważne z kwadratem, trójkątem, prostokątem i t. d.

Nazwisko figur równych zostaje zachowane dla tych, które po przyłożeniu przystają do siebie we wszystkich punktach; takiemi są: dwa koła opisane równemi promieniami, dwa trójkąty mające po trzy boki odpowiednio równe i t. d.

2. Dwie figury mające kąty odpowiednio równe i boki *odpowiednie* proporcyonalne są sobie *podobne*. Bokami odpowiedniémi nazywają się boki jednakowo położone w obu figurach, albo boki leżące przy kątach równych. Takie zaś kąty nazywają się *kątami odpowiedniémi.*

Dwie figury równe zawsze są sobie podobne; lecz dwie figury podobne mogą być nierówne.

3. W dwóch kołach różnych, *łukami podobnemi*, *wycinkami podobnémi*, *odcinkami podobnémi* nazywają się łuki, wycinki, odcinki odpowiadające kątom rownym, mającym swoje wierzchołki w środkach tychże kół.

I tak jeżeli kąt A (fig. 96) jest równy kątowi O, łuk BC będzie podobny łukowi DE, wycinek ABC podobny wycinkowi ODE i t. d.

4. *Wysokością* równoległoboku jest prostopadła EF, spuszczona z punktu obranego na jednym jego boku na bok przeciwległy, wzięty za podstawę (fig. 97).

5. *Wysokością* trójkąta jest prostopadła AD (fig. 98), spuszczona z wierzchołka któ-

regokolwiek kąta A na bok jemu przeciwległy BC, wzięty za podstawę.

6. *Wysokością* trapeza jest prostopadła EF (fig. 99); poprowadzona do dwóch jego boków AB i CD równoległych.

NB. Dla zrozumienia téj księgi należy miéć obecną w pamięci teoryą proporcyj, po którą odsyłamy do zwyczajnych wykładów arytmetyki lub algebry. Zrobimy tylko uwagę, która jest ważną dla należytego zrozumienia proporcyj i dla ułatwienia pojęcia bądź to wyrażeń, bądź dowodzeń.

Wiémy że w każdéj proporcyi $A:B=C:D$, iloczyn wyrazów skrajnych $A\times D$ jest równy iloczynowi wyrazów średnich $B\times C$.

Ta prawda jest niezaprzeczoną dla liczb, lecz taką jest i dla wielkości jakichkolwiek, byleby one były oznaczone liczbami, lub téż byleby wyobrażano sobie, że one są tak wyrażone, co zawsze można przypuścić. Jeżeli np. A, B, C, D są liniami, można wyobrazić sobie że jedna z tych linij, albo też jakakolwiek piąta, użyta za miarę dla wszystkich, jest wzięta za jedność; natenczas każda z linij A, B, C, D przedstawia pewną liczbę jedności całkowitą lub ułamkową, współmierną lub niewspółmierną, i proporcya między liniami A, B, C, D staje się proporcyą między liczbami.

Iloczyn z linij A i D, który nazywa się także prostokątem z tych linij, oznacza liczbę jedności podłużnych zawartych w A, pomnożoną przez liczbę jedności podłużnych zawartych w B; pojmujemy że ten iloczyn jest i powinien być równy iloczynowi wypadającemu z pomnożenia linij B i C przez siebie.

Dwie wielkości A i B mogą być jednego gatunku, np. liniami, a dwie drugie wielkości C i D innego gatunku, np. powierzchniami; natenczas należy uważać te wielkości jako liczby, A i B będą wyrażone w jednościach podłużnych, a C i D w jednościach powierzchni, i iloczyny $A \times D$ i $B \times C$ będą liczbami.

W ogólności we wszystkich działaniach, które odbywamy z proporcyami, należy uważać wyrazy proporcyi za liczby, z których każdy ma być właściwego jemu gatunku; w takim razie nie będziemy mieli żadnéj trudności w pojęciu działań i wypadków, jakie ztąd wynikają.

Winniśmy także uprzedzić, że wiele dowodzeń przez nas używanych, opiéra się na niektórych prawdach najprostszych, wziętych z algebry, które znowu zasadzają się na pewnikach wiadomych: i tak, mając $A = B + C$, jeżeli każdą stronę pomnożymy przez M, będzie $A \times M = B \times M + C \times M$; podobnie jeżeli mamy $A = B + C$ i $D = E - C$, dodawszy te ilości do siebie i w summie drugiéj opuściwszy $+C$ i $-C$, które niszczą się wzajemnie, otrzymamy $A + D = B + E$ i t. d. Wszystko to jest samo przez się widoczne, lecz w razie trudności należy poradzić się dzieł algebry i łączyć takim sposobem naukę algebry i geometryi.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Dwa równoległoboki, mające podstawy i wysokości równe, są sobie równoważne.

Niech będzie (fig. 100) AB podstawą wspólną dwóch równoległoboków ABCD i ABEF, które mając jednakową wysokość, będą miały podstawy górne DC i EF na jednéj linii równoległéj do AB. Z własności równoległoboków mamy $AD = BC$ i $AF = BE$; dla téjże przyczyny jest $DC = AB$ i $FE = AB$, a tém samém $DC = FE$; więc odjąwszy od linii DE raz DC i drugi raz FE, otrzymamy reszty CE i DF równe sobie.

Ztąd wynika że trójkąty DAF i CBE mają boki równe, a tém samém są równe sobie. Jeżeli od czworokąta ABED odéjmiemy trójkąt ADF, pozostanie równoległobok ABEF, odjąwszy zaś od tegoż czworokąta trójkąt CBE, pozostanie równoległobok ABCD; więc dwa równoległoboki ABCD i ABEF, mające podstawy i wysokości równe, są równoważne.

Wniosek. Równoległobok (fig. 101) ABCD jest równoważny prostokątowi ABEF, mającemu z nim jednakową podstawę i wysokość.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wszelki trójkąt ABC (fig 102) *jest połową równoległoboku* ABCD, *mającego z nim ednakową podstawę i wysokość.*

Gdyż dwa trójkąty ABC i ACD, mając bok AC wspolny, bok AD = BC (pod. 28 ks. I), bok AB = CD, są sobie równe; a zatém trójkąt ABC jest połową równoległoboku ABCD.

Wniosek I. Trójkąt ABC jest połową prostokąta BCEF, mającego z nim wspólną podstawę BC i wysokość AO; gdyż prostokąt BCEF jest równoważny z równoległobokiem ABCD.

II. Wszystkie trójkąty, mające podstawy i wysokości równe, są sobie równoważne.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Dwa prostokąty mające równe wysokości, są do siebie w stosunku swoich podstaw.

Niech będą (fig. 103) ABCD i AEFD dwa prostokąty, mające wspólną wysokość AD, mówię, że one mieć się będą do siebie jak ich podstawy.

Przypuśćmy naprzód, że podstawy AB i AD są współmierne, i że mają się do siebie w stosunku liczb 7 i 4; podzieliwszy AB na 7 części równych, AE będzie mieściła w sobie takich części 4; wyprowadziwszy z punktów podziałów prostopadłe do podstawy, piérwszy prostokąt zostanie podzielony na 7 prostokątów cząstkowych równych, a prostokąt drugi na 4 takich samych prostokątów cząstkowych; a zatém prostokąt ABCD tak się ma do prostokąta AEFD, jak 7 do 4, czyli jak AB do AE. Toż samo rozumowanie możnaby powtórzyć przy każdym innym stosunku podstaw; a tém samém, skoro podstawy są współmierne, będzie:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Przypuśćmy po 2-e, że podstawy AB i AE (fig. 104) są niewspółmierne, mówię że będzie także:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Jeżeli bowiem ta proporcya nie jest prawdziwa, trzy pierwsze jéj wyrazy mogą pozostać, lecz wyraz czwarty powinien być albo większy, albo mniejszy od AE. Przypuśćmy że powinien być większy, a w takim razie będzie:

$$ABCD ; AEFD = AB : AO.$$

Podzielmy linię AB na części równe mniejsze od EO; w takim razie przynajmniéj jeden punkt podziału J przypadnie między E i O;

z punktu J wyprowadźmy linię JK prostopadłą do AJ. Podstawy AB i AJ będą współmierne, a tém samém, podług tego co już dowiedziono, będzie:

ABCD : AJKD = AB : AJ,

lecz z przypuszczenia mamy,

ABCD : AEFD = AB : AO;

ponieważ poprzedniki w tych proporcyach są sobie równe, więc ich następniki stanowią proporcyę:

AJKD : AEFD = AJ : AO.

Ponieważ AO jest większe od AJ, więc, aby ta proporcya była dobrą, potrzeba żeby prostokąt AEFD był większy od AJKD, że zaś on jest mniejszy, przeto proporcya przypuszczona nie może mieć miejsca; a tém samém nie może się mieć ABCD do AEFD, jak się ma AB do linii większéj od AE.

Podobnież możnaby okazać że czwarty wyraz proporcyi założonéj nie może być mniejszy od AE; a tém samém on jest równy AE.

A zatém, jakikolwiek jest stosunek podstaw, dwa prostokąty ABCD i AEFD, mające jednakowe wysokości, mają się do siebie jak podstawy AB i AE.

PODANIE IV.

Twierdzenie.

Dwa prostokąty ABCD *i* AEGF *jakiekolwiek* (fig. 105) *mają się do siebie jak iloczyny z ich podstaw przez wysokości; to jest:*

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

Postawiwszy te dwa prostokąty tak, aby kąty przy A były wierzchołkiem stykającémi się, przedłużmy boki GE i CD do spotkania się z sobą w H. Dwa prostokąty ABCD i AEHD, mając wspólną wysokość AD, mają się do siebie jak ich podstawy AB i AE; podobnież dwa prostokąty AEHD i AFGE, mając wspólną wysokość AE, mają się do siebie jak ich podstawy AD i AF, a zatém mamy:

$$ABCD : AEHD = AB : AE,$$
$$AEHD : AEGF = AD : AF.$$

Pomnożywszy przez siebie wyrazy odpowiednie tych proporcyj i w otrzymanéj proporcyi opuściwszy czynnik AEHD, wspólny dla obu wyrazów piérwszego jéj stosunku, będzie:

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

Uwaga. Podług tego za miarę powierzchni prostokąta można wziąść iloczyn z jego podstawy przez wysokość; rozumiejąc przez to iloczyn z dwóch liczb, z których jedna jest liczbą jedności podłużnych zawartych w podstawie, a druga liczbą takich samych jedności zawartych w wysokości.

Ta miara nie jest bezwzględną, lecz stosunkową; przypuszczamy bowiem, że podobnież obliczono powierzchnię innego prostokąta, mierząc podstawę i wysokość jego za pomocą takiéj saméj jedności podłużnéj; pomnożywszy przez siebie dwie liczby ztąd wypadłe, otrzymamy drugi iloczyn, a stosunek takich dwóch iloczynów jest równy stosunkowi prostokątów, podług twierdzenia poprzednio dowiedzionego.

Naprzykład, jeżeli wysokość prostokąta A zawiéra 3 jedności a podstawa 10, prostokąt wyrazi się iloczynem 3×10, t. j. liczbą 30; ta liczba oddzielnie uważana nic nie wyraża. Lecz powierzchnia drugiego prostokąta B, którego podstawa zawiera 12 a wysokość 7 jedności, wyrazi się przez 12×7, czyli 84; ztąd wniesiemy, że prostokąty A i B mają się do siebie, jak 30 do 84; jeżeliby więc zgodzono się wziąść prostokąt A za jedność mierzenia powierzchni, natenczas bezwzględna miara powierzchni prostokąta B byłaby równa $\frac{84}{30}$, to jest: on zawierałby w sobie $\frac{84}{30}$ jedności miar powierzchni takich jak A.

Zwykle i to jest daleko prościéj, biorą za jedność do mierzenia powierzchni kwadrat, którego bok jest równy jedności miary podłużnéj; natenczas miara, którą uważaliśmy za stosunkową, staje się bezwzględną; np. liczba 30, za pomocą któréj mierzyliśmy prostokąt A, przedstawia 30 jedności miar powierzchni, albo 30 kwadratów, z których każdego bokiem jest jedność; fig. 106 przedstawia to najwidoczniéj.

W geometryi często iloczyn dwóch linij biorą za prostokąt z tychże linij; to wyrażenie używa się nawet w arytmetyce dla oznaczenia iloczynu z dwóch liczb nierównych; podobnie używa się wyrazu *kwadrat*, dla oznaczenia iloczynu z liczby przez nią samą.

Kwadraty liczb 1, 2, 3 i t. d. są 1, 4, 9 i t. d. I tak (fig. 107) widzimy że kwadrat z linii 2 razy większéj od danéj, jest 4 razy większy od kwadratu z linii danéj; kwadrat z linii 3 razy większéj, jest większy 9 razy i t. d.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Powierzchnia jakiegokolwiek równoległoboku jest równa iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.

Gdyż równoległobok ABCD (fig. 101) jest równoważny z prostokątem ABEF, mającym tęż samą podstawę AB i wysokość BE (pod. 1 wn.); ponieważ zaś powierzchnia prostokąta jest równa $AB \times BE$ (pod. 4) zatém i powierzchnia równoległoboku z nim równoważnego, jest równa $AB \times BE$.

Wniosek. Równoległoboki mające równe podstawy mają się do siebie w stosunku swoich wysokości, a mające równe wysokości mają się jak podstawy; gdyż jeżeli mamy trzy jakiekolwiek wielkości A, B i C, zawsze będzie $A \times C : B \times C = A : B$.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Powierzchnia trójkąta jest równa iloczynowi z jego podstawy przez pół wysokości.

Gdyż trójkąt ABC (fig. 108) jest połową równoległoboku ABCE, mającego z nim wspólną podstawę BC i wysokość AD (pod. 2); że zaś powierzchnia równoległoboku $= BC \times AD$ (pod. 5), przeto powierzchnia trójkąta $= \frac{1}{2} BC \times AD$, albo $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Wniosek. Dwa trójkąty, mające równe wysokości, są do siebie w stosunku swoich podstaw, a trójkąty mające równe podstawy, mają się do siebie jak wysokości.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Powierzchnia trapeza ABCD (fig. 109) *jest równa jego wysokości* EF, *pomnożonéj przez połowę summy boków równoległych* AB *i* CD.

Przez środek J boku CB, poprowadźmy linię KL równoległą do boku przeciwległego AD, i przedłużmy DC do spotkania się z KL.

Trójkąty JBL i JCK mają bok JB = JC z wykréślenia, kąt LJB = CJK, i kąt JBL = JCK, bo linie CK i BL są równoległe (pod. 23 ks. I); więc te trójkąty są sobie równe (pod. 7 ks. I) i tém samém trapez ABCD jest równoważny z równoległobokiem ADKL, a tém samem jego powierzchnia = EF × AL.

Lecz mamy AL = DK, a dla równości trójkątów JBL i KCJ, bok BL = CK, więc AB + CD = AL + DK = 2AL; i tak AL jest połową summy podstaw AB i CD; więc nakoniec powierzchnia trapeza ABCD jest równa wysokości EF, pomnożonéj przez półowę snmmy podstaw AB i CD, co da się tak wyrazić $ABCD = EF \times \left(\frac{AB+CD}{2}\right)$.

Uwaga. Przez punkt J, który jest środkiem boku CB, poprowadziwszy linię JH równoległą do podstawy AB, punkt H będzie środkiem boku AD; gdyż czworokąty AHJL i DHJK, mając boki przeciwne równoległe, są równoległobokami; a zatém mamy $HA = JL$ i $DH = JK$, że zaś $JL = JK$ przeto $AH = DH$.

Łatwo dostrzedz że linia $HJ = AL = \frac{AB+CD}{2}$, a zatém powierzchnię trapeza można wyrazić przez $EF \times HJ$, to jest: *powierzchnia trapeza* także *jest* ~~*równa*~~ *iloczynowi z wysokości przez linię łączącą środki dwóch boków nierównoległych.*

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Podzieliwszy linię AC (fig. 110) *na dwie części* AB *i* BC, *kwadrat z całéj linii* AC *będzie mieścił w sobie: kwadrat z części* AB, *kwadrat z drugiéj części* BC *i dwa prostokąty z części jednéj przez drugą; to jest:* $\overline{AC}^2$, *albo*

$$(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2.AB\times BC.$$

Wystawmy kwadrat ACDE, odetnijmy AF = AB, poprowadźmy FG równoległą do AC, i BH równoległą do AE.

Kwadrat ACDE podzielił się na 4 części: pierwsza z nich ABJF jest kwadratem z linii AB, gdyż wzięto AF = AB; część druga JGDH jest kwadratem z linii BC, gdyż mamy AC = AE i AB = AF, a tém samém i różnica AC — AB jest równa różnicy AE — AF, czyli BC = EF; lecz dla równoległości, JG = BC i DG = EF = BC, przeto czworokąt JGDH jest kwadratem z linii BC. Odjąwszy te dwie części od całego kwadratu, pozostaną dwa prostokąty BCGJ i EFJH, z których każdy ma za miarę AB×BC; przeto kwadrat z linii AC i t. d.

Uwaga. To podanie jest to samo, co twierdzenie dowiedzione w algebrze, o składzie kwadratu z dwumianu, to jest:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + .2ab.$$

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli linia AC (fig. 111) *jest różnicą dwóch linij* AB *i* BC, *kwadrat wystawiony na niéj będzie równy: kwadratowi z* AB, *więcéj kwadratem z* BC, *mniéj dwa razy wzięty prostokąt wystawiony na liniach* AB *i* BC*; to jest:* $\overline{AC}^2$, *czyli* $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2.AB \times BC$.

Wystawmy kwadrat ABJF, weźmy AE $=$ AC, poprowadźmy linię CG równoległą do BJ i HK równoległą do AB i wystawmy kwadrat EFLK.

Każdy z prostokątów CBJG i GLKD ma za miarę $AB \times BC$; jeżeli je odejmiemy od całéj figury ABJLKEA, która znaczy $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, pozostanie kwadrat ACDE, to jest kwadrat z AC; przeto i t. d.

Uwaga. To podanie sprowadza się do formuły algebraicznéj:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2.ab.$$

PODANIE X.

Twierdzenie.

Prostokąt mający za podstawę summę a za wysokość różnicę dwóch linij, jest równy różnicy kwadratów z tychże linij, t. j. $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$, (fig. 112.)

Na liniach AB i AC wystawmy kwadraty ABJF i ACDE, przedłużmy AB tak, aby przedłużenie BK było równe BC, i wystawmy prostokąt AKLE.

Podstawa AK prostokąta AKLE jest równa summie linij AB i BC, a jego wysokość AE jest różnicą tychże samych linij; przeto prostokąt $AKLE=(AB+BC)\times(AB-BC)$. Lecz ten prostokąt składa się z dwóch części: ABHE i BHLK, część BHLK jest równa prostokątowi EDGF, gdyż $BH=DE$ i $BK=EF$; więc $AKLE=ABHE+EDGF$. Że zaś te dwie części stanowią kwadrat ABJF zmniejszony czworokątem DHJG, który jest kwadratem z linii BC; przeto nakoniec $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Uwaga. To twierdzenie jest wysłowieniem wzoru algebraicznego:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

PODANIE XI.

Twierdzenie.

W trójkącie prostokątnym kwadrat z przeciwprostokątnéj jest równy summie kwadratów, wystawionych na ramionach kąta prostego.

Niech będzie (fig. 113) ABC trójkąt prostokątny przy A, wystawiwszy na każdym boku jego kwadrat, z wierzchołka kąta prostego spuśćmy prostopadłą AD na przeciwprostokątną, i przedłużmy ją do przecięcia się z FG w punkcie E, następnie poprowadźmy przekątne AF i CH.

Kąt ABF składa się z kąta ABC i kąta prostego CBF, kąt CBH składa się z tegoż samego kąta ABC i z kąta prostego ABH; przeto kąt ABF = HBC. Lecz nadto AB = BH, jako boki jednego kwadratu, i BF = BC dla téj saméj przyczyny; zatém trójkąty ABF i

HBC, mając po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio równe, są sobie równe.

Trójkąt ABF jest połową prostokąta DEFB, mającego z nim wspólną podstawę BF i jednakową wysokość BD (pod. 2). Podobnież trójkąt HBC jest połową kwadratu ABHL; gdyż, ponieważ kąty BAC i BAL są proste, linie AC i AL stanowią jedną linię prostą, równoległą do HB; zatém trójkąt HBC, mając wspólną podstawę BH i wysokość AB z kwadratem ABHL, jest jego połową.

Już dowiedziono, że trójkąt ABF jest równy trójkątowi HBC; a zatém prostokąt BDEF, dwa razy większy od trójkąta ABF, jest równoważny z kwadratem ABHL, dwa razy większym od trójkąta HBC. Podobnie można dowieść, że prostokąt CDEG jest równoważny z kwadratem ACJK. Lecz dwa prostokąty BDEF i CDEG stanowią kwadrat BCGF; przeto kwadrat BCGF, wystawiony na przeciwprostokątnéj, jest równy summie kwadratów ABHL i ACJK, wystawionych na ramionach kąta prostego, czyli $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Wniosek I. Więc kwadrat z któregokolwiek ramienia kąta prostego jest równy kwadratowi z przeciwprostokątnéj, zmniejszonemu kwadratem z drugiego ramienia kąta prostego; t. j. $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

II. Niech będzie kwadrat ABCD (fig. 122), i AC jego przekątna; ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny, przeto $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2.\overline{AB}^2$, t. j. *kwadrat z przekątnéj kwadratu, jest dwa razy większy od tego kwadratu.*

Tę własność kwadratu damy poznać widoczniéj, poprowadziwszy przez punkta A i C linie równoległe do BD i przez punkta B i D linie równoległe do AC; takim sposobem utworzy się nowy kwadrat EFGH, który będzie kwadratem z AC. Widzimy że kwadrat EFGH zawiera w sobie ośm trójkątów równych ABE, a kwadrat ABCD mieści ich tylko cztéry; przeto kwadrat EFGH jest dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Ponieważ $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = 2 : 1$, przeto wyciągnąwszy pierwiastki kwadratowe z wyrazów téj proporcyi, będzie $AC : AB = \sqrt{2} : 1$; a zatém, *przekątna kwadratu i bok jego są linie niewspółmierne.*

Obszerniéj to rozwiniemy na innéém miejscu.

III. Dowiedziono wyżéj, że kwadrat ABHL jest równoważny z prostokątem BDEF; dla wspólnéj wysokości BF, kwadrat BCGF tak się ma do prostokąta BDEF, jak podstawa BC do podstawy BD; a zatém

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD,$$

więc, kwadrat z przeciwprostokatnéj tak się ma do kwadratu z ramienia kąta prostego, jak się ma przeciwprostokątna do odcinka, przyległego temuż ramieniowi. Odcinkiem nazywa się każda z dwóch części, na które przeciwprostokątna została podzielona przez prostopadłą, spuszczoną na nią z wierzchołka kąta prostego; i tak: BD jest odcinkiem przyległym ramieniowi AB, a DC jest odcinkiem przyległym ramieniowi AC. Podobnie otrzymalibyśmy:

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : CD.$$

IV. Prostokąty BDEF i DCGE, mając wspólną wysokość DE, mają się do siebie jak podstawy BD i CD; ponieważ zaś te prostokąty są równoważne z kwadratami ABHL i ACJK, więc będzie:

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC.$$

Przeto, *kwadraty z ramion kąta prostego mają się do siebie, jak odcinki przeciwprostokątnéj, przyległe tymże ramionom.*

PODANIE XII.

Twierdzenie.

W trójkącie ABC (fig. 114), *z wierzchołka* A *spuściwszy prostopadłą* AD *na bok przeciwległy* BC, *kwadrat z boku* AB, *przeciwległego kątowi ostremu* C, *jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków* AC *i* BC *mniéj dwa razy wziętym prostokątem z boku* BC, *na który spuszczono prostopadłą, przez iego odcinek* DC, *przyległy kątowi ostremu* C; *to jest będzie:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2.BC \times CD.$$

Tutaj być mogą dwa przypadki:

1. Kiedy prostopadła pada wewnątrz trójkąta ABC, wtedy $BD = BC - CD$, a zatém (pod. 9) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2.BC \times CD$. Dodając do każdéj z tych ilości $\overline{AD}^2$ i uważając że trójkąty prostokątne ABD i ACD dają: $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ i $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, będzie $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2.BC \times CD$.

2. Jeżeli prostopadła AD pada zewnątrz trójkąta ABC, będzie $BD = CD - BC$, i zatém (pod. 9) $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2.CD \times BC$. Dodając do każdéj strony $\overline{AD}^2$ i postępując jak wyżéj, otrzymamy:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2.BC \times CD.$$

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

W trójkącie rozwartokątnym ABC (fi. 115) *z wierzchołka* A *spuściwszy prostopadłą* AD *na bok przeciwległy* CB, *kwadrat z boku* AB, *przeciwległego kątowi rozwartemu* C, *jest równy summie kwadratów wystawionych na ramionach kąta rozwartego* C, *więcéj dwóma prostokątami z boku* BC *na który spuszczono prostopadłą i odcinka* CD, *t. j. będzie:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2.BC \times CD.$$

Prostopadła AD nie może upaść wewnątrz trójkąta; gdyż jeżeliby ona przeszła np. przez punkt E, trójkąt ACE miałby jeden kąt prosty E i drugi rozwarty C, co być nie może (pod. 32, ks. I), a zatém prostopadła pada zewnątrz i mamy $BD = BC + CD$, zkąd wynika (pod. 8) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2.BC \times CD$. Dodając do każdéj strony $\overline{AD}^2$ i uważając że w trójkącie ABD, $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, a w trójkącie ACD, $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, otrzymamy:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2.BC \times CD.$$

Uwaga. Tylko w trójkącie prostokątnym summa kwadratów z dwóch jego boków jest równa kwadratowi z boku trzeciego; gdyż, jeżeli kąt pomiędzy dwóma bokami zawarty jest ostry, summa kwadratów wystawionych na tychże bokach jest większa, jeżeli zaś kąt jest rozwarty, summa kwadratów z ramion jego jest mniejsza od kwadratu z boku trzeciego.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

W jakimkolwiek trójkącie ABC (fig. 116), *połączywszy wierzchołek jego ze środkiem podstawy linią* AE, *będzie:*

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2.\overline{AE}^2+2.\overline{BE}^2.$$

Spuśćmy prostopadłą AD na podstawę BC, trójkąt AEC (pod. 12) da:

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2.EC\times ED.$$

Z trójkąta ABE (pod. 13) otrzymamy:

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2.EB\times ED.$$

Dodawszy do siebie otrzymane wyrażenia, i pamiętając że EB$=$EC, będzie:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Wniosek. Zatém, *w każdym równoległoboku summa kwadratów z boków jest równa summie kwadratów z przekątnych.*

Ponieważ przekątne AC i BD (fig. 117) dzielą się wzajemnie na dwie części równe w punkcie E (p. 31 k. I), więc trójkąt ABC daje:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Podobnież trójkąt ADC daje:

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2.$$

Dodając strony odpowiednie tych wyrażeń i pamiętając że BE = DE, będzie:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=4.\overline{AE}^2+4.\overline{DE}^2.$$

Że zaś $4.\overline{AE}^2$ jest kwadratem z 2.AE czyli z AC, a $4.\overline{DE}^2$ jest kwadratem z 2.DE czyli z BD, przeto:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2.$$

t. j. summa kwadratów z boków równoległoboku jest równa summie kwadratów z jego przekątnych.

PODANIE XV.

Twierdzenie.

Linia DE (fig. 118), *równoległa do podstawy trójkąta* ABC, *dzieli jego boki* AB i AC *na części proporcyonalne*, t. j. AD : DB = AE : EC.

Połączmy punkt B z E i D z C liniami prostemi BE i DC; dwa trójkąty BDE i DEC mają wspólną podstawę DE, ponieważ zaś ich wierzchołki B i C leżą na linii równoległéj do podstawy, przeto mają wysokości równe i są sobie równoważne (pod. 2 w. 2).

Trójkąty ADE i BDE, mając wspólny wierzchołek E, a podstawy na jednéj linii prostéj, mają wspólną wysokość, a tém samém mają się do siebie jak ich podstawy AD i DB (pod. 6), t. j.

$$ADE : BDE = AD : DB.$$

Trójkąty ADE i DEC, których wspólnym wierzchołkiem jest D, a podstawy leżą na jednéj linii prostéj, mają jednakową wysokość, i tém samém są do siebie w stosunku swoich podstaw AE i EC, to jest:

$$ADE : DEC = AE : EC.$$

Że zaś trójkąt $BDE = DEC$, więc te dwie proporcye, dla wspólnego stosunku $ADE : DEC$, dają,

$$AD : DB = AE : EC.$$

Wniosek I. Z téj proporcyi wypada

$$AD + DB : DB = AE + EC : EC,$$

czyli $AB:DB = AC:EC$, i także $AB:AD = AC:AE$.

II. Linie równoległe (fig. 119) AC, EF, GH, BD i t. d., przecinając dwie jakiekolwiek inie AB i CD, podzielą je na części proporcyonalne, i będzie $AE:CF = EG:FH = GB:HD$.

Gdyż niech będzie O punktem przecięcia się linij AB i CD; w trójkącie OEF, linia AC jest równoległa do podstawy EF, a tém samém $OE:AE = OF:CF$, albo $OE:OF = AE:CF$. W trójkącie OGH podobnież $OE:EG = OF:FH$ czyli $OE:OF = EG:FH$, a zatém, dla stosunku wspólnego $OE:OF$, te dwie proporcye dają $AE:CF = EG:FH$. Takim samym sposobem można okazać że $EG:FH = GB:HD$, i tak daléj; a zatém linie AB i CD są podzielone przez linie równoległe AC, EF, GH, i t. d. na części proporcyonalne.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

Odwrotnie, jeżeli boki AB *i* AC (fig. 120) *trójkąta* ABC *przez linię* DE *są podzielone na części proporcyonalne, tak że mamy* AD : DB = AE : EC, *mówię że linia* DE *jest równoległa do podstawy* CB.

Jeżeli bowiem linia DE nie jest równoległa do BC, przypuśćmy że jest taką linia DO; wówczas podług twierdzenia poprzedzającego, będzie AD : DB = AO : OC. Że zaś podług założenia mamy AD : BD = AE : EC, a zatém byłaby proporcya AO : OC = AE : EC, która nie może miéć miejsca, gdyż poprzednik pierwszy AO jest mniejszy od drugiego poprzednika AE, a następnik pierwszy OC jest większy od następnika drugiego EC; zatém linia równoległa do BC, przez punkt D poprowadzona, nie może się różnić od DE, i tém samém DE jest równoległa do BC.

Uwaga. Takiż sam wniosek uczynilibyśmy mając proporcyę AB : AD = AC : AE, gdyż ta proporcya dałaby AB — AD : AD = AC — AE : AE, czyli BD : AD = CE : AE.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Linia AD (fig. 121), *dzieląca kąt* BAC *trójkąta na dwie części równe dzieli bok jemu przeciwległy* BC *na dwa odcinki* BD *i* DC, *proporcyonalne bokom* AB *i* AC *przyległym tymże odcinkom, i będzie* BD : DC = AB : AC.

Przez punkt C poprowadźmy linię CE równoległą do AD i przedłużmy ją do spotkania się z przedłużeniem boku BA.

W trójkącie BCE jest linia AD równoległa do podstawy CE, przeto (pod. 15):

BD : DC = AB : AE.

Lecz trójkąt ACE jest równoramienny; gdyż dla równoległości linij AD i CE, kąt ACE = DAC i kąt AEC = BAD (pod. 23, ks. I), że zaś z założenia kąt DAC = BAD, więc kąt ACE = AEC i tém samém AE = AC (pod. 13, ks. I); a zatém, podstawiwszy w poprzedzającéj proporcyi AC na miejsce AE, otrzymamy,

BD : DC = AB : AC.

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty równokątne mają boki odpowiednie proporcyonalne i są sobie podobne.

Niech będą dwa trójkąty ABC i CDE (fig. 123), mające kąty odpowiednie równe, a mianowicie: kąt BAC = CDE, ABC = DCE, i ACB = DEC, powiadam że boki odpowiednie, t. j. boki leżące naprzeciw kątów równych, będą proporcyonalne, i będzie BC:CE = AB : DC = AC : DE.

Ustawmy dwa trójkąty tak, aby one, mając wspólny jeden wierzchołek, miały boki odpowiednie skierowane w jedne strony, i przedłużmy boki AB i ED do spotkania się z sobą w punkcie F.

Ponieważ BCE jest linią prostą, a kąt BCA = CED, przeto (pod. 24, ks. I) linia AC jest równoległa do EF; dla podobnéj przyczyny linia DC jest równoległa do BF, przeto czworokąt ACDF jest równoległobokiem.

Ponieważ w trójkącie BFE linia AC jest równoległa do podstawy FE, przeto mamy

BC : CE = BA : AF (pod. 15). Podstawiwszy CD zamiast jemu równego AF, będzie,

BC : CE = BA : CD.

W tymże trójkącie BFE, uważając BF za podstawę, linia CD jest równoległa do podstawy i mamy proporcyę BC : CE = FD : DE. Podstawiwszy AC w miejsce FD, będzie,

BC : CE = AC : DE.

Nakoniec z tych dwóch proporcyj, mających stosunek wspólny BC : CE, wypada:

AC : DE = BA : CD.

A zatém, trójkąty ABC i CDE mające kąty równe, mają boki odpowiednie proporcyonalne; że zaś, podług opisu 2, dwa wielokąty, mające kąty odpowiednie równe i boki odpowiednie proporcyonalne, są sobie podobne, przeto trójkąty BAC i CDE są sobie podobne.

Wniosek. Dla podobieństwa trójkątów dosyć jest, aby miały po dwa kąty odpowiednie równe; gdyż w takim razie i trzeci kąt jednego będzie równy trzeciemu kątowi drugiego trójkąta (pod. 32, wn. 2, ks. I), i dwa trójkąty będą równokątne, a tém samém sobie podobne.

Uwaga. W trójkątach podobnych boki odpowiednie leżą naprzeciw kątów równych, i tak jeżeli kąt ACB jest równy DEC, bok AB jest odpowiedni bokowi DC; podobnież boki AC i DE, jako leżące naprzeciw kątów ABC i DCE równych, są sobie odpowiednie. Rozpoznawszy boki odpowiednie, można z nich ułożyć proporcyę,

$$AB : CD = AC : DE = BC : CE.$$

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty, mające boki odpowiednie proporcyonalne, są równokątne i tém samém podobne sobie.

Przypuśćmy że jest (fig. 124) $BC : EF = AB : DE = AC : DF$, powiadam że trójkąty ABC i DEF będą miały kąty równe, a mianowicie kąt $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Przy punkcie E nakreślmy kąt $FEG = B$, i przy punkcie G kąt $EFG = C$, kąt trzeci G będzie równy kątowi A, i dwa trójkąty

ABC i EFG będą równokątne, a zatém, podług twierdzenia poprzedzającego, będzie $BC:EF = AB:EG$; że zaś podług założenia mamy $BC:EF = AB:DE$, przeto $EG = DE$. Podług tegoż samego twierdzenia będzie, $BC:EF = AC:FG$, że zaś podług założenia $BC:EF = AC:DF$, przeto $FG = DF$; więc dwa trójkąty EGF i DEF, mając bok $DE = EG$, $DF = FG$ i bok EF wspólny, są sobie równe (podanie 11, księga I) Że zaś podług wykreślenia trójkąt EGF jést równokątny z trójkątem ABC, przeto dwa trójkąty DEF i ABC są równokątne i podobne sobie.

Uwaga I. Ostatnie dwa twierdzenia dają poznać, że w trójkątach równość kątów sprowadza proporcyalność boków, i odwrotnie; tak że dość jest jednego z tych warunków, aby być pewnym że trójkąty są sobie podobne. Lecz nie tak jest z wielokątami o większéj liczbie boków; gdyż w czworokącie, nie zmieniając jego kątów, można zmienić stosunek pomiędzy bokami, a zatém równość kątów nie pociąga za sobą proporcyonalności boków, i proporcyonalność boków nie sprowadza równosci kątów. Widzimy np. (fig. 125) że w czworokącie ABCD poprowadziwszy linię EF równoległą do BC, otrzymamy czworokąt AEFD, którego kąty są równe kątom danego czworokąta, lecz stosunek pomiędzy bokami jest inny; podobnież, nie zmieniając boków AB, BC, CD i AD, można punkt B przybliżyć albo oddalić od D, co znowu wpłynie na zmianę kątów.

II. Dwa ostatnie podania, które właściwie stanowią jedno, łącznie z twierdzeniem o kwadracie z przeciwprostokątnéj są najważniejsze w geometryi i najobfitsze w zastosowania: one same wystarczają do rozwiązania niemal wszystkich zagadnień; wszystkie albowiem wielokąty można podzielić na trójkąty, a każdy trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. A zatém ogólne własności trójkątów mieszczą w sobie własności wszystkich wielokątów.

PODANIE XX.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty, mające po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio proporcyonalne, są sobie podobne.

Niech będzie kąt A=D, i AB:DE= AC:DF (fig. 126), mówię że trójkąt ABC jest podobny trójkątowi DEF.

Weźmy AG=DE, i poprowadźmy linię GH, równoległą do BC; kąt AGH będzie równy ABC (pod. 23, ks. I), i trójkąt AGH będzie równokątny a tém samém podobny trójkątowi ABC, więc będzie AB:AG= AC:AH; że zaś podług przypuszczenia AB: DE=AC:DF, a podług wykréślenia AG= DE, przeto AH=DF. Dwa trójkąty AGH i DEF, mają więc po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio równe, a zatém są sobie równe; ponieważ zaś trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC, przeto i jemu równy trójkąt DEF jest także podobny trójkątowi ABC.

PODANIE XXI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie podobne, kiedy boki jednego sa równoległe, albo prostopadłe do boków drugiego trójkąta.

Gdyż, 1^{ód} jeżeli bok AB (fig. 127) jest równoległy do DE, a bok BC do EF, będzie kąt ABC = DEF (pod. 27, ks. I); jeżeli nadto bok AC jest równoległy do DF, kąt ACB będzie równy DFE i BAC równy EDF; przeto dwa trójkąty ABC i DEF, będąc z sobą równokątne, są sobie podobne.

2^{re} Niech będzie bok DE (fig. 128) prostopadły do AB, bok DF prostopadły do AC; w czworokącie AJDH dwa kąty J i H są proste, że zaś summa wszystkich kątów jego jest równa cztérem kątom prostym (pod. 33, k. I), przeto dwa pozostałe JAH i JDH czynią summę równą dwóm kątom prostym. Lecz dwa kąty EDF i JDH także składają dwa kąty proste; przeto kąt EDF jest równy JAH, albo kątowi BAC. Jeżeli trzeci bok EF jest prostopadły do BC, podobnie dowiedziemy że kąt DFE = C, i DEF = B; przeto dwa trójkąty, mające boki wzajemnie prostopadłe, są równokątne, a tém samém podobne sobie.

Uwaga. W przypadku równoległości boków trójkątów, boki równoległe są sobie odpowiednie, w przypadku zaś ich prostopadłości, boki prostopadłe są odpowiednie. I tak w drugim przypadku bokami odpowiedniémi są: DE i AB, DF i AC, EF i BC.

Kiedy boki dwóch trójkątów są do siebie wzajemnie prostopadłe, mogłoby się zdarzyć, że położenie względne dwóch trójkątów byłoby różne od tego, jakie przypuściliśmy na fig. 128; lecz zawsze możnaby dowieść równości kątów odpowiednich, albo za pomocą czworokątów takich jak AJDH, w którym dwa kąty są proste, albo téż porównywając dwa trójkąty, któreby razem z kątami wierzchołkami stykającemi się, miały po kącie prostym; z resztą zawsze można przypuścić, że wewnątrz trójkąta ABC wystawiono trójkąt DFF, którego boki są równoległe bokom trójkąta porównywanego z ABC, i natenczas dowodzenie zostanie sprowadzone do tego, jakie podano na fig. 128.

PODANIE XXII.

Twierdzenie.

Linie AF, AG, i t. d. (fig. 129) *jakkolwiek poprowadzone przez wierzchołek trójkąta, dzielą jego podstawę* BC *i linię do niéj równoległą* DE *na części proporcyonalne, tak że będzie:* DJ : BF = JK : FG = KL : GH i t. d.

Ponieważ linia DJ jest równoległa do BF, przeto trójkąty ADJ i ABF są równokątne i tém samém mamy proporcyę DJ : BF = AJ : AF; podobnie, ponieważ linia JK jest równoległa do FG, przeto AJ : AF = JK : FG; dla stosunku AJ : AF wspólnego, będzie DJ : BF = JK : FG. Podobnie znajdziemy JK : FG = KL : GH i t. d.; przeto linia DE jest podzielona w punktach J, K, L na części proporcyonalne częściom podstawy BC, podzielonéj w punktach F, G, H.

Wniosek. Jeżeli więc linia BC jest podzielona w punktach F, G i H na części równe, linia do niéj równoległa DE będzie także podzielona w punktach J, K i L na części równe sobie.

PODANIE XXIII.

Twierdzenie.

W trójkącie prostokątnym, spuściwszy z wierzchołka kąta prostego A (fig. 130) *prostopadłą na przeciwprostokątną:*

1-e *dwa trójkąty cząstkowe* ABD *i* ADC *będą podobne sobie i całemu trójkątowi;*

2-e *każdy z boków* AB *i* AC *będzie średnio geometrycznie proporcyonalny między przeciwprostokątną* BC *i odcinkiem jemu przyległym* BD, *albo* DC;

3-e *prostopadła* AD *będzie średnio geometrycznie proporcyonalna między dwóma odcinkami* BD *i* DC *przeciwprostokątnéj.*

Gdyż 1-ód trójkąty BAD i BAC mają kąt B wspólny, nadto kąt prosty BDA jest równy kątowi prostemu BAC, a zatém trzeci kąt

BAD jednego jest równy trzeciemu kątowi C drugiego trójkąta; więc te trójkąty są równokątne i podobne sobie. Podobnie można dowieść, że trójkąt DAC jest podobny trójkątowi BAC; więc wszystkie trzy trójkąty są sobie podobne.

2-e Dwa trójkąty BAD i BAC, będąc sobie podobne, mają boki odpowiednie proporcyonalne. Bok BD trójkąta mniejszego jest odpowiedni bokowi BA większego trójkąta, bo leżą naprzeciw kątów równych BAD i BCA; przeciwprostokątna BA mniejszego, jest odpowiednia przeciwprostokątnéj BC większego trójkąta; przeto można ułożyć proporcyę BD : BA = BA : BC. Podobnie otrzymalibyśmy DC : AC = AC : BC; przeto 2-e każdy z boków AB i AC jest średnio geometrycznie proporcyonalny między przeciwprostokątną i odcinkiem jemu przyległym.

3-e Nakoniec dwa trójkąty podobne ABD i ADC dają proporcyę BD : AD = AD : DC; więc, 3-e prostopadła AD jest średnio geometrycznie proporcyonalna między odcinkami BD i DC przeciwprostokątnéj.

Uwaga. Z proporcyi $BD:AB=AB:BC$ mamy $\overline{AB}^2=BD\times BC$; z proporcyi $DC:AC=AC:BC$ mamy $\overline{AC}^2=DC\times BC$, więc dodawszy do siebie te dwa wypadki, będzie $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BD\times BC+DC\times BC$; druga strona téj równości jest to samo co $(BD+DC)\times BC$, czyli $BC\times BC$, albo $\overline{BC}^2$ a zatém $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$; przeto kwadrat z przeciwprostokątnéj BC jest równy summie kwadratów z ramion AB i AC kąta prostego. Dochodzimy więc znowu do twierdzenia o kwadracie z przeciwprostokątnéj drogą różną od téj, jaką postępowaliśmy poprzednio; ztąd widzimy że twierdzenie o kwadracie z przeciwprostokątnéj wypada z proporcyonalności boków w trójkątach równokątnych. A zatém główne twierdzenia geometryi sprowadzają się, że tak powiem, do tego jednego, że trójkąty równokątne mają boki odpowiednie proporcyonalne,

Często się zdarza, jak tego dopiéro napotkaliśmy przykład, że wyprowadzając wnioski z jednego lub kilku twierdzeń, natrafiamy na podania już dowiedzione poprzednio. W ogólności łącząc z sobą jakimkolwiek sposobem twierdzenia geometryczne, byleby rozumowanie nie było fałszywe, dojdziemy zawsze do wypadków prawdziwych; to jest cechą odznaczającą twierdzenia geometryi i służy za niezbity dowód ich prawdziwości. Nie tak by się rzecz miała, jeżeliby niektóre twierdzenia były zupełnie fałszywe, lub też prawdziwe na szczególne przypadki; w takim razie łączenie twierdzeń pomiędzy sobą powiększałoby błędy i czyniłoby je widocznémi. Widzieliśmy tego przykłady we wszystkich dowodzeniach, w których używaliśmy fałszywego założenia. Jeżeli w podobnych dowodzeniach mamy na celu okazać, że dwie ilości są sobie równe: staramy się dać poznać że jeżeliby te ilosci nie były równe, natenczas doszlibyśmy przez szereg rozumowań do wypadku widocznie fałszywego; a ztąd wnieślibyśmy że te dwie ilości muszą być sobie równe.

Wniosek. Jeżeli przez punkt A (fig. 131) obrany na okręgu koła poprowadzimy dwie cięciwy AB i AC do końców średnicy BC, trójkąt BAC będzie prostokątny przy A (pod. 18, ks. II); i tém samém: 1-e *prostopadła* AD *będzie średnio geometrycznie proporcyonalna między dwóma odcinkami* BD *i* DC *średnicy*, albo co jest to samo $\overline{AD}^2 = BD \times DC$.

2) *Cięciwa* AB *jest średnio geometrycznie proporcyonalna między średnicą* BC *i odcinkiem* BD *przyległym téjże cięciwie*, czyli co jest to samo $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Podobnie mamy $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; a zatém $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$: a porównawszy $\overline{AB}^2$ z $\overline{BC}^2$, wypada $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BD : BC$, podobnież $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = DC : BC$. Te stosunki pomiędzy kwadratami z ramion kąta prostego porównywanémi bądź to pomiędzy sobą, bądź z kwadratem z przeciwprostokątnéj, już były podane we wn. 3 i 4 pod. II.

PODANIE XXIV.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty mające po kącie równym mają się do siebie, jak prostokąty z boków *obejmujących te kąty; t. j.* (fig. 132) *trójkąt* ABC *ma się do trójkąta* ADE, *jak prostokąt* AB×AC *do prostokąta* AD×AE.

Poprowadźmy BE; dwa trójkąty ABE i ADE, mające wspólny wierzchołek E i podstawy na jednéj linii prostéj, mają wspólną wysokość, a tém samém mają się do siebie w stosunku swoich podstaw AB i AD (pod. 6), więc ABE : ADE = AB : AD.

Dla téjże przyczyny mamy:

ABC : ABE = AC : AE.

Pomnożywszy wyrazy odpowiednie tych proporcyj przez siebie i opuściwszy czynnik ABE, wspólny dla wyrazów piérwszego stosunku, będzie:

ABC : ADE = AB×AC : AD×AE.

Wniosek. Dwa trójkąty ABC i ADE (fig. 133) byłyby sobie równoważne, gdyby prostokąt AB×AC był równy prostokątowi AD ×AE, albo jeżeliby było AB : AD = AE : AC, co wtenczas mogłoby nastąpić, kiedyby linia DC była równoległa do BE.

PODANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty podobne mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiednich.

Niech będzie (fig. 126) kąt $A = D$ i kąt $B = E$; dla równości kątów A i D, podług podania poprzedzającego, będzie,

$$ABC : DEF = AB \times AC : DE \times DF.$$

Z podobieństwa trójkątów wypada,

$$AB : DE = AC : DF;$$

pomnożywszy wyrazy téj proporcyi przez wyrazy odpowiednie proporcyi

$$AC : DF = AC : DF,$$

będzie,

$$AB \times AC : DE \times DF = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2;$$

a zatém,

$$ABC : DEF = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Przeto dwa trójkąty ABC i DEE mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich AC i DF, albo téż jak kwadraty z którychkolwiek boków odpowiednich.

PODANIE XXVI.

Twierdzenie.

Dwa wielokąty podobne składają się z jednakowéj liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych.

W wielokącie ABCDE (fig. 134) poprowadźmy przekątne AC i AD, od wierzchołka kąta A do wierzchołków innych kątów. W drugim wielokącie FGHJK poprowadźmy przekątne FH i FJ, od wierzchołka kąta F, odpowiedniego kątowi A, do wierzchołków innych kątów.

Dla podobieństwa wielokątów, kąt ABC jest równy kątowi FGH (op. 2), i boki AB i BC są proporcyonalne bokom FG i GH, to jest: AB : FG = BC : GH; ztąd wypada, że trójkąty ABC i FGH, mając po kącie równym, utworzonym przez boki proporcyonalne, są sobie podobne (pod. 20); a zatém kąt BCA jest równy kątowi GHF. Od kątów równych BCD i GHJ odjąwszy kąty równe BCA i GHF, pozostaną reszty ACD i FHJ równe sobie; za zaś dla podobieństwa trójkątów ABC i FGH, jest AC : FH = BC : GH, a dla podobieństwa wielokątów BC : GH = CD : HJ, zatém AC : FH = CD : HJ; więc dwa trójkąty ACD i FHJ, mając po kącie równym utworzonym przez boki proporcyonalne, są sobie podobne. Podobnież dowiedlibyśmy podobieństwa innych trójkątów, jakokolwiekby była liczba boków wielokątów danych; więc dwa wielokąty podobne składają się z jednakowéj liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych.

Uwaga. Równie jest sprawiedliwe twierdzenie odwrotne: *Jeżeli każdy z dwóch wielokątów, składa się z jednakowéj liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych, dwa wielokąty są sobie podobne.* Gdyż dla podobieństwa trójkątów mamy: kąt ABC = FGH, BCA = GHF, ACD = FHJ i t. d.; więc BCD = GHJ, CDE = HJK i t. d. Nadto będzie AB : FG = BC : GH = AC : FH = CD : HJ i t. d., więc dwa wielokąty, mają kąty równe i boki odpowiednie proporcyonalne, a tém samém są sobie podobne.

PODANIE XXVII.

Twierdzenie.

Obwody dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie, jak boki odpowiednie a ich powierzchnie, jak kwadraty z tychże boków.

Gdyż, 1-e z podobieństwa wielokątów mamy (fig. 134): $AB:FG=BC:GH=CD:HJ$, i t. d. a z tego szeregu stosunków równych można wyprowadzić: jak się ma summa poprzedników $AB+BC+CD+$ i t. d., czyli obwód pierwszego wielokąta, do summy następników $FG+GH+HJ$ i t. d., czyli do obwodu drugiego wielokąta, tak się ma którykolwiek poprzednik do swego następnika, czyli np. bok AB jednego wielokąta, do boku jemu odpowiedniego FG w drugim wielokącie.

2-e Ponieważ trójkąty ABC i FGH są sobie podobne, więc $ABC:FGH=\overline{BC}^2:\overline{GH}^2$; podobnie dwa trójkąty podobne ACD i FHJ dają: $ACD:FHJ=\overline{CD}^2:\overline{HJ}^2$; trójkąty podobne ADE i FKJ dają: $ADE:FKJ=\overline{DE}^2:\overline{JK}^2$; że zaś dla podobieństwa wielokątów mamy:

$BC:GH=CD:HJ=DE:JK$, i tém samém $\overline{BC}^2:\overline{GH}^2=\overline{CD}^2:\overline{HJ}^2=\overline{DE}^2:\overline{JK}^2$, przeto dla równości stosunków drugich w przytoczonych proporcyach, otrzymamy: $ABC:FGH=ACD:FHJ=ADE:FJK$.

W szeregu stosunków równych mamy: tak się ma summa poprzedników $ABC+ACD+ADE$, czyli wielokąt $ABCDE$, do summy następników $FGH+FHJ+FJK$, czyli do wielokąta $FGHJK$, jak się ma poprzednik ABC do swego następnika FGH, czyli jak się ma $\overline{AB}^2$ do $\overline{FG}^2$; więc powierzchnie dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich.

Wniosek. Nakreśliwszy trzy wielokąty podobne, którychby boki odpowiednie były równe bokom trójkąta prostokątnego, wielokąt nakreślony na boku największym będzie równy summie dwóch innych; gdyż te trzy wielokąty mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiednich, że zaś kwadrat z przeciwprostokątnéj jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków trójkąta prostokątnego, więc i t. d.

PODANIE XXVIII.

Twierdzenie.

Części dwóch cięciw AB *i* CD (fig. 135), *przecinającyśh się w kole, są sobie odwrotnie proporcyonalne, to jest:* AO : DO = CO : OB.

Połączmy punkta A i C tudzież B i D liniami AC i BD, dwa trójkąty ACO i BOD mają kąty przy O, jako wierzchołkiem stykające się, równe sobie; kąt A jest równy kątowi D, gdyż oba są wpisane w jeden odcinek (pod. 18 ks. II); dla téjże przyczyny kąt C = B; więc te trójkąty są sobie podobne, i boki ich odpowiednie stanowią proporcyę, AO : DO = CO : OB.

Wniosek. Z téj proporcyi wypada AO × OB = DO × CO; t. j. prostokąt wystawiony na częściach jednéj cięciwy, jest równy prostokątowi z części cięciwy drugiéj.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu O (fig. 136), *wziętego za kołem, poprowadzimy sieczne* OB *i* OC, *koń-*

czące się na łuku wklęsłym, całe sieczne będą odwrotnie proporcyonalne częściom ich zewnętrznym, t. j. będzie: OB : OC = OD : OA.

Gdyż, połączywszy A z C, i B z D liniami prostemi AC i BD, dwa trójkąty OAC i OBD, mając kąt O wspólny, kąt B = C (po. 18, ks. II), są sobie podobne i tém samém ich boki odpowiednie stanowią proporcyę:

OB : OC = OD : OA.

Wniosek. Więc prostokąt OA×OB jest równy prostokątowi OC×OD.

Uwaga. Łatwo dostrzedz, że to twierdzenie wiele ma podobieństwa z poprzedzającém, i tém tylko rożni się od niego, iż dwie cięciwy AB i CD, zamiast przecinać się wewnątrz, przecinają się zewnątrz koła. Twierdzenie następujące także może być uważane, jako przypadek szczególny tego samego twierdzenia.

PODANIE XXX.

Twierdzenie.

Przez punkt O (fig. 137), *wzięty za kołem,* *poprowadziwszy styczną* OA *i sieczną* OC, *styczna będzie średnio geometrycznie proporcyonalna między całą sieczną i częścią jéj zewnątrz koła leżącą, t. j. będzie:*

$$OC : OA = OA : OD.$$

Gdyż połączywszy punkta A i D, tudzież A i C liniami AD i AC, trójkąty OAD i OAC mają kąt O wspólny; nadto kąt OAD utworzony przez styczną i cięciwę, ma za miarę połowę łuku AD, i kąt C ma za miarę połowę tegoż łuku, więc kąt OAD = C, a tém samém trójkąty są sobie podobne i boki ich dają proporcyę:

$$CO : OA = OA : OD.$$

Wniosek. Więc kwadrat z OA, jest równy prostokątowi CO×OD.

PODANIE XXXI.

Twierdzenie.

W trójkącie ABC (fig. 138) *podzieliwszy kąt* A *linią prostą* AD *na dwie części równe, prostokąt z boków* AB *i* AC *będzie równy* *prostokątowi z odcinków* BD *i* DC, *więcéj kwadratem z siecznéj* AD.

Przez trzy punkta A, B i C poprowadźmy okrąg koła, przedłużmy AD do przecięcia się z nim i połączmy punkt C z E linią prostą CE.

Trójkąt BAD jest podobny trójkątowi EAC; gdyż, podług przypuszczenia kąt BAD $=$ EAC, i nadto kąt B $=$ E, bo każdy z nich ma za miarę połowę łuku AC; więc te trójkąty są sobie podobne i boki ich odpowiednie dają proporcyę: $BA:AE=AD:AC$, zkąd wypada $BA\times AC=AE\times AD$; lecz $AE=AD+DE$, więc $BA\times AC=(AD+DE)\times AD=\overline{AD}^2+DE\times AD$; że zaś $AD\times DE=BD\times DC$ (pod. 28), więc nakoniec,

$$BA\times AC=\overline{AD}^2+BD\times DC.$$

PODANIE XXXII.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie ABC (fig. 139) *prostokąt z dwóch jego boków* AB *i* AC *jest ró-*

wny prostokątowi wystawionemu na średnicy CE, *koła opisanego na trójkącie, i na prostopadłéj* AD, *spuszczonéj na bok jego trzeci* BC.

Gdyż połączywszy punkta A i E, trójkąty ABD i AEC są prostokątne, jeden przy punkcie D a drugi przy A, nadto kąt $B = E$; więc te trójkąty są sobie podobne i dają proporcyę $AB : CE = AD : AC$ zkąd $AB \times AC = CE \times AD$.

Wniosek. Pomnożywszy każdą z tych ilości równych przez BC, otrzymamy $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Że zaś $AD \times BC$ jest dwa razy wzięta powierzchnia trójkąta (pod. 6), przeto *iloczyn z trzech boków trójkąta, jest równy iloczynowi z jego powierzchni przez dwa razy wziętą średnicę koła na nim opisanego.*

Uwaga. Można téż dowieść, że *powierzchnia trójkąta jest równa iloczynowi z jego obwodu przez połowę promienia koła wpisanego.*

Gdyż trójkąty (fig. 87) AOD, BOC i AOC mając wspólny wierzchołek w punkcie O, mają za wspólną wysokość promień koła wpisanego; że zaś summa powierzchni tych trójkątów jest równa iloczynowi z summy ich podstaw AB, BC i AC przez pół promienia OD, więc powierzchnia trójkąta ABC jest równa iloczynowi z jego obwodu przez pół promienia koła wpisanego.

PODANIE XXXIII.

Twierdzenie.

W czworokącie wpisanym ABCD (fig. 139) *prostokąt z przekątnych* AC *i* BD, *jest równy summie prostokątów z boków przeciwległych, to jest:* $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Weźmy łuk $CO = AD$, i poprowadźmy linię BO, która przetnie przekątną AC w punkcie J.

Kąt $ABD = CBJ$; gdyż pierwszy ma za miarę pół łuku AD, a drugi pół łuku CO, równego AD; kąt $ADB = BCJ$, gdyż oba są wpisane w odcinek AOB; więc trójkąt ABD jest podobny trójkątowi JBC, a tém samém mamy proporcyę: $AD:CJ=BD:BC$: zkąd $AD\times BC=CJ\times BD$. Powiadam nadto, że trójkąt ABJ jest podobny trójkątowi BDC; gdyż, jeżeli do każdego z łuków równych AD i CO dodamy łuk OD, będzie łuk $AO=DC$, a zatém kąt $ABJ=DBC$; nadto kąt $BAJ=BDC$, jako kąty wpisane w jeden odcinek; więc trójkąty ABJ i DBC są sobie podobne i ich boki odpowiednie dają proporcyę, $AB:BD=AJ:CD$; zkąd wypada $AB\times CD=AJ\times BD$.

Dodając do siebie dwa znalezione wypadki, i uważając że $AJ\times BD+CJ\times BD=(AJ+CJ)\times BD=AC\times BD$, otrzymamy $AD\times BC+AB\times CD=AC\times BD$.

Uwaga. Takim samym sposobem można dowieść jeszcze innego twierdzenia o czworokącie wpisanym w koło.

Trójkąty podobne ABD i BJC dają proporcyę $BD:BC=AB:BJ$, zkąd $BJ\times BD=BC\times AB$. Połączywszy punkta C i O, utworzy się trójkąt JOC podobny ABJ, który będzie podobny trójkątowi BDC, a tém samém

$BD : CO = DC : OJ$; zkąd $OJ \times BD = CO \times DC$, albo, ponieważ $CO = AD$, będzie $OJ \times BD = AD \times DC$. Dodając do siebie dwa wypadki znalezione i uważając że $BJ \times BD + OJ \times BD$ sprowadza się do $BO \times BD$, będzie,

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Wziąwszy $BP = AD$, i poprowadziwszy CKP znaleźlibyśmy za pomocą podobnego rozumowania:

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Lecz ponieważ łuk BP jest równy CO, więc dodawszy do każdego z nich BC, będzie łuk $CBP = BCO$, a zatém cięciwa CP jest równa cięciwie BO, i następnie prostokąty $BO \times BD$ i $CP \times CA$ mają się do siebie jak BD do CA; więc $BD : CA = AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD$.

A zatém, *dwie przekątne czworokąta wpisanego w koło, mają się do siebie, jak summy prostokątów z boków dotykających końców przekątnych.*

Te dwa twierdzenia mogą służyć do znalezienia przekątnych, mając wiadome boki czworokątów.

PODANIE XXXIV.

Twierdzenie.

Niech będzie punkt P (fig. 141), *dany wewnątrz koła na promieniu* AC, *na przedłużeniu zewnętrznêm promienia obierzmy punkt* Q *w takiéj odległości, aby było* CP : CA = CA : CQ; *jeżeli jakikolwiek punkt* M *obrany na okręgu połączymy z punktami* P *i* Q *liniami* MP *i* MQ, *mówię że stosunek pomiędzy temi liniami wszędzie jest jednakowy, i będzie* MP : MQ = AP : AQ.

Gdyż podług przypuszczenia mamy CP : CA = CA : CQ; podstawiwszy CM zamiast CA, będzie CP : CM = CM : CQ; więc trójkąty CPM i CQM mają kąt C wspólny, utworzony przez boki proporcyonalne, a zatém są sobie podobne (pod. 20), więc trzeci bok MP ma się do trzeciego boku MQ jak CP do CM albo do CA. Że zaś proporcya CP : CA = CA : CQ daje, CP : CA = CA — CP : CQ — CA czyli CP : CA = AP : AQ, więc MP : MQ = AP : AQ.

ZAGADNIENIA
DO KSIĘGI TRZECIEJ.

ZAGADNIENIE I.

Daną linię prostą podzielić na ilekolwiek części równych, albo na części proporcyonalne danym liniom.

1. Niech będzie dana linia AB (fig. 142), do podzielenia na 5 części równych; przez punkt A poprowadźmy linię nieograniczoną AG i wziąwszy dowolną wielkość AC, przenieśmy ją na linię AG razy pięć. Połączmy ostatni punkt podziału G z końcem B linią BG, i poprowadźmy do niéj równoległą CJ; a powiadam, że AJ będzie piątą częścią linii AB, i że tém samém przeniosłszy AJ na AB razy pięć, linia AB zostanie podzielona na pięć części równych.

Gdyż, linia CJ równoległa do GB dzieli boki AB i AG na części proporcyonalne w punktach C i J (pod. 15); że zaś AC jest piątą częścią AG, więc AJ jest piątę częścią linii AB.

2. Niech będzie dana linia AB (fig. 143) do podzielenia na części proporcyonalne liniom P, Q i R. Przez koniec A poprowadźmy linię nieograniczoną AG i weźmy na niéj AC = P, CD = Q, DE = R, połączmy końce E i B linią prostą EB, a przez punkta C i D poprowadźmy linie CJ i DK równoległe do EB; mówię że linia AB będzie podzielona na części AJ, JK i KB, proporcyonalne liniom danym P, Q i R.

Gdyż, dla równoległości linij CJ, DK i EB, części AJ, JK i KB są proporcyonalne częściom AC, CD i DE (pod. 15), które podług wykreślenia są równe liniom danym P, Q i R.

ZAGADNIENIE II.

Do trzech linij danych A, B i C *znaleść czwartą geometrycznie proporcyonalną.*

Poprowadźmy dwie linie nieograniczone DE i DF (fig. 144), któreby czyniły z sobą kąt jakikolwiek. Na linii DE odetnijmy część DA$=$A i DB$=$B, na DF weźmy DC$=$C, połączmy punkt A z C, a przez punkt B poprowadźmy linię BX równoległą do AC; mówię że DX będzie czwartą proporcyonalną żądaną; gdyż linia BX jest równoległa do AC, więc DA:DB$=$DC:DX; ponieważ zaś trzy pierwsze wyrazy téj proporcyi są równe trzem liniom danym, przeto DX jest żądaną linią.

Wniosek. Podobnież można znaleść trzecią geometrycznie proporcyonalną do dwóch linij A i B; gdyż ona będzie to samo, co czwarta geometrycznie proporcyonalna do trzech linij A, B i C.

ZAGADNIENIE III.

Znaléść średnio geometrycznie proporcyonalną do dwóch danych linii A *i* B.

Na linii nieograniczonéj DF (fig. 145) weźmy DE$=$A i EF$=$B; na całéj linii DF, jako na średnicy, opiszmy półokrąg DGF, z punktu E wystawmy linię EG prostopadłą do średnicy, która przetnie się z okręgiem w punkcie G; powiadam że EG będzie średnio geometrycznie proporcyonalną żądaną.

Gdyż prostopadła GE, spuszczona na średnicę z punktu G, obranego na okręgu koła, jest średnio geometrycznie proporcyonalna między dwóma odcinkami DE i EF średnicy (pod. 13), równémi danym liniom A i B.

ZAGADNIENIE IV.

Daną linię AB (fig. 146) *podzielić na takie dwie części, aby część większa była średnio geometrycznie proporcyonalna między całą linią i częścią jéj mniejszą.*

Z końca B linii AB wystawmy do niéj prostopadłą BC, równą połowie linii AB; z punktu C jako ze środka, promieniem BC opiszmy okrąg koła, poprowadźmy linię AC, która przetnie się z okręgiem w punkcie D, a wziąwszy na danéj linii AF = AD, mówię że linia AB w punkcie F będzie podzielona w sposób żądany, to jest, że będzie $AB:AF = AF:FB$.

Linia AB, jako prostopadła do promienia BC, przechodząca przez koniec jego, jest styczną z kołem; więc przedłużywszy AC do przecięcia się z okręgiem w E, będzie: $AE:AB = AB:AD$, i $AE - AB:AB = AB - AD:AD$. Że zaś promień BC jest połową linii AB, więc średnica DE jest równa linii AB, i tém samém $AE - AB = AD = AF$; ponieważ $AF = AD$, przeto $AB - AD = FB$; a zatém mamy $AF:AB = FB:AF$, i odmieniwszy porządek między wyrazami, będzie $AB:AF = AF:FB$.

Uwaga. Ten sposób dzielenia linii AB nazywa się dzieleniem jéj *w stosunku średnim i skrajnym*; późniéj poznamy jego zastosowania. Można dostrzédz, że sieczna AE w punkcie D jest podzielona w stosunku średnim i skrajnym; gdyż dla równości AB i DE, mamy $AE:DE = DE:AD$.

ZAGADNIENIE V.

Przez punkt A, dany między ramionami kąta BCD (fig. 147), *poprowadzić linię prostą, którejby części* AB *i* AD, *zawarte między punktem* A *i ramionami kąta, były sobie równe.*

Przez punkt A poprowadźmy linię AE równoległą do CD, odetnijmy BE = CE, a linia BAD, poprowadzona przez punkta B i A, będzie żądaną.

Gdyż, dla równoległości AE i CD, mamy BE : EC = BA : AD; że zaś BE = EC, przeto BA = AD.

ZAGADNIENIE VI.

Wystawić kwadrat równoważny z równoległobokiem, lub trójkątem danym.

1. Niech będzie dany równoległobok ABCD (fig. 148), którego podstawą jest AB, a wysokością DE; znajdźmy średnio geometrycznie proporcyonalną XY między AB i DE (zag. 3); mówię, że kwadrat wystawiony na

linii XY, będzie równoważny z równoległobokiem ABCD. Gdyż z wykreślenia mamy $AB : XY = XY : DE$; więc $\overline{XY}^2 = AB \times DE$; że zaś $AB \times DE$ jest miarą danego prostokąta, a $\overline{XY}^2$ znalezionego kwadratu, przeto znaleziony kwadrat jest równoważny z prostokątem danym.

2. Niech będzie dany trójkąt ABC (fig. 149), którego podstawą jest BC, a wysokością AD; znajdźmy średnio geometrycznie proporcyonalną XY między BC i połową AD; mówię że kwadrat wystawiony na linii XY, będzie równoważny z trójkątem ABC.

Gdyż z proporcyi $BC : XY = XY : \frac{1}{2} AD$ wypada $XY^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$; przeto kwadrat z XY jest równoważny trójkątowi ABC.

ZAGADNIENIE VII.

Na linii danéj AD (fig. 150) *wystawić prostokąt* ADEX *równoważny z prostokątem danym* ABFC.

Wynajdźmy czwartą geometrycznie proporcyonalną AX do trzech linij AD, AB i AC: mówię że prostokąt wystawiony na liniach AD i AX, będzie równoważny prostokątowi ABFC.

Gdyż z proporcyi $AD:AB=AC:AX$ wypada $AD\times AX=AB\times AC$; więc prostokąt ADEX jest równoważny prostokątowi ABFC.

ZAGADNIENIE VIII.

Znaléść w liniach stosunek prostokąta z dwóch danych linij A *i* B (fig. 153), *do prostokąta z dwóch innych linij* C *i* D.

Niech będzie X czwartą geometrycznie proporcyonalną do trzech linij B, C i D, a mówię, że stosunek linii A i X będzie równy stosunkowi pomiędzy prostokątami $A\times B$ i $C\times D$.

Gdyż z proporcyi $B:C=D:X$ wypada $C\times D=B\times X$, a zatém $A\times B:C\times D=A\times B:B\times X=A:X$.

Wniosek. Więc aby mieć stosunek pomiędzy kwadratami z linij A i C, należy znaleść trzecią geometrycznie proporcyonalną X do dwóch linij A i C, tak aby było $A:C = C:X$, a będzie $A^2:C^2 = A:X$.

ZAGADNIENIE IX.

Znaleść w liniach stosunek iloczynu z trzech linij A, B *i* C (fig. 154), *do iloczynu z trzech innych linij* P, Q *i* R.

Znajdźmy czwartą geometrycznie proporcyonalną X do trzech linij P, A i B, do trzech linij C, Q i R znajdźmy także czwartą geometrycznie proporcyonalną Y; a dwie linie X i Y mieć się będą do siebie jak iloczyny $A \times B \times C$ i $P \times Q \times R$.

Gdyż z proporcyi $P:A = B:X$, wypada $A \times B = P \times X$; pomnożywszy obie ilości przez C, będzie $A \times B \times C = C \times P \times X$. Podobnież z proporcyi $C:Q = R:Y$, wypada $Q \times R = C \times Y$, a pomnożywszy obie ilości przez P będzie, $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; więc iloczyn $A \times B \times C$ tak się ma do $P \times Q \times R$ jak $C \times P \times X$ do $P \times C \times Y$, czyli jak się ma X do Y.

ZAGADNIENIE X.

Znaleść trójkąt równoważny danemu wielokątowi.

Niech będzie dany wielokąt ABCDE (fig. 150); poprowadźmy przekątną CE, która oddzieli trójkąt CDE; przez punkt D przeciągnijmy DF równoległą do CE, która spotka się z przedłużeniem boku AE w punkcie F; połączmy punkta C i F, a wielokąt dany ABCDE będzie równoważny z wielokątem ABCF, który ma mniéj jednym bokiem od niego.

Gdyż trójkąty CDE i CFE, mając wspólną podstawę CE, mają także wspólną wysokość, bo wierzchołki ich D i F leżą na linii prostéj DF równoległéj do podstawy; więc są sobie równoważne. Dodając do każdego z tych trójkątów wielokąt ABCE, otrzymamy wielokąty ABCDE i ABCF sobie równoważne.

Podobnież na miejsce trójkąta ABC, można otrzymać trójkąt jemu równoważny AGC, i takim sposobem pięciokąt ABCDE zamieni się na trójkąt GCF, z nim równoważny.

Toż samo postępowanie możnaby zastosować do każdego innego wielokąta; bo otrzymując za każdém działaniem, wielokąt mający mniéj jednym bokiem od poprzedzającego, dojdziemy nakoniec do trójkąta równoważnego z danym wielokątem.

Uwaga. Widzieliśmy już że każdy trójkąt można zamienić na kwadrat jemu równoważny (zag. 6); więc zawsze można otrzymać kwadrat równoważny jakiemubądź wielokątowi prostokréślnemu: co nazywa się *kwadraturą* wielokątów prostokréślnych.

Zadanie *kwadratury koła* ma na celu, znalezienie kwadratu równoważnego z kołem danéj średnicy.

ZAGADNIENIE XI.

Znaleść kwadrat równy summie lub różnicy dwóch kwadratów danych.

Niech będą A i B boki kwadratów danych.

1-e Jeżeli mamy znaleść kwadrat równy summie tych kwadratów, poprowadźmy dwie linie nieograniczone (fig. 151) ED i EF, prostopadłe do siebie, odetnijmy ED = A i EG = B, a linia prosta DG, łącząca punkta D i G będzie bokiem żądanego kwadratu.

Gdyż w trójkącie prostokątnym DEG kwadrat z DG jest równy summie kwadratów z ramion kąta prostego ED i EG.

2-e Podobnież jeżeli mamy znaleść kwadrat równy różnicy dwóch kwadratów danych, nakreślmy kąt prosty FEH, odetnijmy GE równe bokowi mniejszemu z dwóch danych, i promieniem GH, równym drugiemu bokowi, opiszmy z punktu G, jako ze środka, łuk któryby się przeciął z EH w punkcie H; mówię że kwadrat wystawiony na EH, będzie równy różnicy kwadratów z linij danych A i B.

Gdyż trójkąt GEH jest prostokątny, jego przeciwprostokątna GH = A, i bok GE = B; więc kwadrat wystawiony na EH i t. d.

Uwaga. Tym sposobem można otrzymać kwadrat równy summie ilukolwiek kwadratów; gdyż wykreślenie, które służy do zamiany dwóch na jeden, doprowadzi też do dwóch kwadratów na miejsce trzech, i do otrzymania jednego na miejsce dwóch ostatnich kwadratów; toż samo rozumiéć o większéj ich liczbie. Podobnież postępowalibyśmy, gdyby potrzeba było odjąć kwadrat którykolwiek od summy innych.

ZAGADNIENIE XII.

Znaleść kwadrat, któryby się miał do kwadratu danego ABCD, *jak się ma linia* M *do linii* N (fig. 155).

Na linii nieograniczonéj EG weźmy EF = M i FG = N; na EG jako na średnicy, opiszmy półkole, i z punktu F wystawmy prostopadłą FH do średnicy. Przez punkt H poprowadźmy cięciwy HG i HE, weźmy na piérwszéj z nich HK, równe bokowi AB danego kwadratu; przez punkt K poprowadźmy linię KJ równoległą do EG, a HJ będzie bokiem kwadratu szukanego.

Gdyż dla równoległości linij KJ i GE, mamy: HJ : HK = HE : HG, i tém samém $\overline{HJ}^2 : \overline{HK}^2 = \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$; a że w trójkącie prostokątnym EHG (pod. 23) $\overline{HE}^2 : \overline{HG}^2 =$

EF : GF, czyli $\overline{HE}^2 : \overline{HG}^2 = M : N$, więc $\overline{HJ}^2 : \overline{HK}^2 = M : N$; że zaś HK = AB, przeto kwadrat z HJ tak się ma do kwadratu z AB, jak M do N.

ZAGADNIENIE XIII.

Na boku FG (fig. 134) *odpowiednim bokowi* AB, *nakreślić wielokąt podobny wielokątowi danemu* ABCDE.

W wielokącie danym poprowadźmy przekątne AC i AD: na boku FG, przy punkcie F nakreślmy kąt GFH = BAC, i przy punkcie G kąt FGH = ABC; linie FH i GH przetną się z sobą w punkcie H i dadzą trójkąt FGH, podobny trójkątowi ABC; podobnież na boku FH odpowiednim bokowi AC, wystawmy trójkąt FJH podobny trójkątowi ADC, i na boku FJ odpowiednim AD, wystawmy trójkąt FJK podobny ADE. Wielokąt FGHJK będzie wielokątem żądanym, podobnym wielokątowi ABCDE; gdyż te dwa wielokąty składają się z jednakowéj liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych (pod. 26).

ZAGADNIENIE XIV.

Mając dane dwa wielokąty podobne, wystawić trzeci podobny każdemu, i równy ich summie, lub różnicy.

Niech będą A i B boki odpowiednie dwóch wielokątów danych, znajdźmy bok X kwadratu równego summie, lub różnicy kwadratów wystawionych na A i B: a X będzie bokiem wielokąta szukanego, odpowiednim bokom A i B wielokątów danych. Sam zaś wielokąt nakreślimy podług zagadnienia poprzedzającego.

Gdyż wielokąty podobne mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich; że zaś kwadrat z boku X jest równy summie, albo różnicy kwadratów z linij A i B, przeto wielokąt z boku X jest równy summie, albo różnicy wielokątów jemu podobnych, wystawionych na bokach A i B.

ZAGADNIENIE XV.

Wystawić wielokąt podobny wielokątowi danemu, któryby się miał do niego, jak się ma M *do* N.

Niech będzie A bokiem wielokąta danego, a X bokiem jemu odpowiednim w wielokącie szukanym; potrzeba aby się miał kwadrat z X do kwadratu z A, jak się ma M do N (pod. 27); znajdziemy X za pomocą zagadnienia XII, a znając X, uskutecznimy resztę podług zagadnienia XIII.

ZAGADNIENIE XVI.

Wystawić wielokąt podobny wielokątowi P *i równoważny z wielokątem* Q (fig. 156).

Znajdźmy bok M kwadratu równoważnego z wielokątem P, i bok N kwadratu równoważnego z wielokątem Q. Niech będzie X czwartą geometrycznie proporcyonalną do trzech linij danych M, N i AB; a wielokąt podobny wielokątowi P, wystawiony na boku

X, odpowiednim bokowi AB, będzie równoważny z wielokątem Q.

Gdyż oznaczywszy przez Y wielokąt wystawiony na X, będzie $P : Y = \overline{AB}^2 : X^2$; że zaś podług wykreślenia $AB : X = M : N$, albo $AB^2 : X^2 = M^2 : N^2$, więc $P : Y = M^2 : N^2$. A że podług wykreślenia mamy, $M^2 = P$ i $N^2 = Q$, przeto $P : Y = P : Q$; zkąd $Y = Q$, i tém samém wielokąt Y jest podobny wielokątowi P i równoważny z wielokątem Q.

ZAGADNIENIE XVII.

Wystawić prostokąt równoważny z danym kwadratem C, *któregoby boki przyległe czyniły summę daną* AB (fig. 157).

Na AB jako na średnicy, opiszmy półokrąg koła; w odległości AD równéj bokowi danego kwadratu C, poprowadźmy linię DE równoległą do średnicy. Z punktu E, w którym równoległa przecina okrąg, spuśćmy prostopadłą EF na średnicę: AF i FB będą bokami szukanego prostokątu.

Gdyż summa tych boków jest równa AB,

a prostokąt z nich $AF \times FB$ jest równy kwadratowi z EF (pod 25), czyli kwadratowi z AD; przeto prostokąt $AF \times FB$ jest równoważny z kwadratem danym C.

Uwaga. Aby zagadnienie było podobne do rozwiązania, potrzeba żeby odległość AD nie była większa od promienia, to jest: aby bok kwadratu C nie był większy od połowy linii AB.

ZAGADNIENIE XVIII.

Wystawić prostokąt równoważny z kwadratem C (fig. 158), *aby różnica między jego bokami przyległémi była równa* AB.

Na linii danéj AB, jako na średnicy, opiszmy okrąg koła, przez koniec średnicy poprowadźmy styczną AD równą bokowi kwadratu C, przez punkt D i środek O poprowadźmy sieczną DF; powiadam że DE i DF będą bokami przyległémi żądanego prostokątu.

Gdyż 1-e, różnica pomiędzy témi bokami jest równa średnicy EF, czyli AB; 2-e prostokąt $DE \times DF$, będąc równy $\overline{AD}^2$ (pod. 30), jest równoważny z kwadratem danym C.

ZAGADNIENIE XIX.

Znaleść wspólną miarę, jeżeli takowa znajduje się, między przekątną i bokiem kwadratu.

Niech będzie jakikolwiek kwadrat ABCG, i jego przekątna AC (fig. 159).

Aby rozwiązać zagadnienie, potrzeba przenieść CB na CA tyle razy, ile razy można to uskutecznić (zag. 17, ks. II), i dla tego niech będzie pół-kole DBE opisane promieniem CB ze środka C: wiémy że CB zawiera się w AC raz jeden z resztą AD, wypadkiem więc pierwszego działania jest iloraz 1 z resztą AD, którą należy porównać z BC, albo jemu równém AB.

Można odciąć $AF = AD$, i przenieść AF na bok AB, znaleźlibyśmy że mieści się w nim dwa razy z resztą; ponieważ zaś ta reszta i po niéj następujące, coraz bardziéj zmniejszając się, dla swéj małości uchodziłyby naszéj uwagi, przeto podobne postępowanie byłoby niedokładném działaniem mechaniczném, które nie dałoby poznać, czyli linie AC i CB mają, lub nie mają wspólnéj miary; lecz nastręcza się tutaj bardzo prosty sposób uniknienia linij zmniejszających się, podług którego będziemy mieli do czynienia z liniami jednakowéj wielkości.

I tak, jeżeli kąt ABC jest prosty, linia AB jest styczną, i AE sieczną, że zaś obie przechodzą przez jeden punkt, przeto mamy (pod. 30) AD : AB = AB : AE. W drugiém więc działaniu, w którém idzie o porównanie AD z AB, można wziąść stosunek AB do AE, zamiast stosunku AD do AB; że zaś AB, albo jemu równe CD, mieści się w AE dwa razy z resztą AD. przeto w wypadku z drugiego działania będzie iloraz 2 z resztą AD, którą potrzeba porównywać z AB.

Działanie trzecie, w którém potrzeba porównywać AD z AB, sprowadzi się do porównywania AB, albo jemu równego CD, z AE, i otrzymamy w ilorazie 2 i na resztę AD.

Ztąd widzimy, że działanie nigdy się nie skończy, i że tém samém przekątna i bok kwadratu nie mają wspólnéj miary; ta prawda, wiadoma już z arytmetyki (gdyż te dwie linie mają się do siebie jak $\sqrt{2}:1$) (pod. 11), staje się widoczniejszą przez rozwiązanie geometryczne.

Uwaga. Nie można więc ściśle oznaczyć stosunku liczebnego między przekątną i bokiem kwadratu, lecz można go uczynić tyle przybliżonym do prawdziwego, ile się podoba, i wyrazić za pomocą ułamku ciągłego. Pierwsze działanie dało na iloraz 1, drugie i każde z następujących aż do nieskończoności dają 2; a zatém w mowie będący ułamek jest:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+$$ i t. d. do nieskończoności.

Naprzykład, obliczywszy ten ułamek aż do czwartego wyrazu włącznie, znajdujemy że jego wartość jest: $\frac{12}{29}$, czyli $\frac{41}{29}$; tak że przybliżony stosunek średnicy koła do boku kwadratu wpisanego, jest $= 41 : 29$. Gdybyśmy obliczyli większą liczbę wyrazów powyższego ułamku ciągłego, znaleźlibyśmy stosunek bardziéj przybliżony do prawdziwego.

KSIĘGA CZWARTA.

O WIELOKĄTACH FOREMNYCH I O MIERZENIU KOŁA.

Opisy.

Wielokąt mający wszystkie kąty i boki sobie równe, nazywa się *wielokątem foremnym.*

Wielokątami foremnémi mogą być wszystkie wielokąty. Trójkąt równoboczny, jest wielokątem foremnym o trzech bokach; kwadrat, jest czworokątem foremnym.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Dwa wielokąty foremne o jednakowéj liczbie boków, są sobie podobne.

Niech będą np. dwa sześciokąty foremne ABCDEF i *abcdef* (fig. 160); summa kątów w obu wielokątach jest jednakowa, i w każdym z nich równa ośmiu kątom prostym (pod. 28, ks. I). Kąt A równie jak i kąt *a*, jest szóstą częścią téj summy, a zatém kąty A i *a* są sobie równe; toż samo rozumiéć o kątach B i *b*, C i *c*, i t. d.

Nadto, ponieważ z opisu wielokątów foremnych boki AB, BC, CD, i t. d. są sobie równe, i boki *ab*, *bc*, *cd* i t. d. także są sobie równe, przeto widocznie mamy proporcye: AB : *ab* = BC : *bc* = CD . *cd* i t. d. Więc dwa wielokąty w mowie będące, mają kąty równe i boki odpowiednie proporcyonalne, a tém samém są sobie podobne (opis. 2, ks. III).

Wniosek. Obwody dwóch wielokątów foremnych o jednakowéj liczbie boków, mają się do siebie jak boki odpowiednie, a ich powierzchnie jak kwadraty z tychże boków (pod. 27, ks. III).

Uwaga. Kąt wielokąta foremnego można oznaczyć, podobnie jak kąt wielokąta równokątnego (pod. 20, ks. I), mając wiadomą liczbę jego boków.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Każdy wielokąt foremny może być wpisany i opisany na kole.

1-e Niech będzie ABCDE... wielokąt o którym mowa (fig. 161): wystawmy sobie że przez trzy punkta A, B i C poprowadzono okrąg koła, którego środkiem jest punkt O, ze środka spuśćmy prostopadłą OP na bok BC, która go podzieli na dwie części równe; połączmy punkt A z O i O z D.

Dwa czworokąty OPCD i OPBA przystaną do siebie: gdyż w rzeczy saméj bok OP jest wspólny dla obu, kąt OPC = OPB jako proste, przeto bok PC pójdzie po boku PB, i punkt C padnie na B. Nadto w wielokącie foremnym kąt PCD = PBA, a zatém bok CD pójdzie po BA, a ponieważ CD = BA, przeto punkt D padnie na A, i dwa czworokąty przystaną do siebie, a tém samém OD = AO; ponieważ więc odległość OD jest równa odległości OA, zatém okrąg koła, przechodzący przez trzy wierzchołki wielokąta A, B i C, przejdzie i przez czwarty D: drogą podobnego rozumowania okażemy, że okrąg koła przechodzący przez trzy wierzchołki B, C i D, przejdzie przez E, i t. d.; więc okrąg koła poprowadzony przez trzy wierzchołki A, B i C, przejdzie przez wszystkie inne, i wielokąt będzie wpisany w koło.

2-e Wszystkie boki AB, BC, CD, i t. d. jako cięciwy równe, są równo oddalone od środka koła opisanego na danym wielokącie (pod. 8, ks. II); więc okrąg koła opisany z punktu O, jako ze środka promieniem OP, zetknie się z bokiem BC i z każdym innym w srodku jego, a tém samém koło będzie wpisane w wielokąt, czyli wielokąt opisany na kole.

Uwaga I. Punkt który jest środkiem koła wpisanego i opisanego na wielokącie, może być uważany jako środek wielokąta; a ztąd *kątem środkowym* wielokąta nazywa się kąt AOB, utworzony przez dwa promienie poprowadzone do końców boku AB.

Ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są sobie równe, przeto wszystkie kąty środkowe także są sobie równe; że zaś summa wszystkich kątów środkowych jest równa czterem kątom prostym, więc znajdziemy wartość każdego z nich, dzieląc cztery kąty proste przez liczbę boków wielokąta.

II. Aby w dane koło wpisać wielokąt foremny o jakiéjkolwiek liczbie boków, potrzeba okrąg koła podzielić na tyle części równych, ile ma mieć boków wielokąt wpisany; gdyż jeżeli łuki będą równe i cięciwy AB, BC, CD i t. d. (fig. 161) podpierające je, będą także równe sobie; że zaś trójkąty ABO, BOC, COD i t. d. mając boki równe, są sobie równe, przeto wszystkie kąty ABC, BCD, CDE i t. d. będą sobie równe; i wielokąt ABCDE... będzie foremny.

PODANIE III.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać kwadrat.

Poprowadźmy (fig. 162) dwie średnice AC i BD prostopadłe do siebie, połączmy z sobą końce A, B, C i D, a czworokąt ABCD będzie kwadratem wpisanym; gdyż kąty AOB, BOC i t. d. jako proste są sobie rowne, a zatém łuki AB, BC i t. d. i tém samém cięciwy AB, BC i t. d. są sobie równe.

Uwaga. Ponieważ trójkąt BOC jest prostokątny i równoramienny, przeto mamy (pod. 11, ks. III) $BC : BO = \sqrt{2} : 1$; a zatém, *bok kwadratu wpisanego w koło tak się ma do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 2 do 1.*

PODANIE IV.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać sześciokąt foremny i trójkąt równoboczny.

Przypuśćmy że zagadnienie jest rozwiązane, i że bokiem sześciokąta foremnego wpisanego (fig. 163) jest AB; poprowadziwszy promienie AO i OB, mówię że trójkąt AOB będzie równoboczny.

Gdyż kąt AOB jest szóstą częścią czterech kątów prostych; wziąwszy zatém kąt prosty za jedność, będzie AOB $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$: dwa inne kąty ABO i BAO razem wzięte, ważą $2-\frac{2}{3}$, czyli $\frac{4}{3}$, a ponieważ one są sobie równe, przeto każdy z nich $=\frac{2}{3}$; więc trójkąt ABO mając wszystkie kąty równe, jest równoboczny, i tém samém bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło, jest równy promieniowi.

Ztąd wypada, że aby w dane koło wpisać sześciokąt foremny, należy przenieść promień sześć razy na okrąg, a dojdziemy do tego samego punktu, od którego podział zaczęliśmy uskuteczniać.

Mając wpisany sześciokąt foremny ABCDEF, otrzymamy trójkąt równoboczny wpisany, jeżeli połączymy pierwszy wierzchołek z trzecim i piątym, a piąty z trzecim wierzchołkiem sześciokąta.

Uwaga. Czworokąt ABCO jest kwadratem ukośnym, gdyż $AB = BC = CO = AO$, przeto summa (pod. 14, ks. III) kwadratów z przekątnych $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$ jest równa summie kwadratów z boków: $4\overline{AB}^2$, czyli $4\overline{BO}^2$; odjąwszy z jednéj i z drugiéj strony $\overline{BO}^2$, zostanie $\overline{AC}^2 = 3\overline{BO}^2$, przeto $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 = 3 : 1$, czyli $AC : BO = \sqrt{3} : 1$; więc *bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło, tak się ma do promienia tegoż koła, jak pierwiastek kwadratowy z 3 do 1.*

PODANIE V.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać dziesięciokąt foremny, a następnie pięciokąt i piętnastokąt.

Podzielmy promień AO (fig. 164) w stosunku średnim i skrajnym w punkcie M (zag. 4 ks. III), weźmy cięciwę AB równą części większéj OM promienia, a ona będzie bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego; którą potrzeba przenieść na okrąg razy dziesięć.

Gdyż połączywszy B z M, mamy podług wykreślenia, AO : OM = OM : AM, a ponieważ AB = OM, przeto AO : AB = AB : AM; więc trójkąty ABO i ABM, mając kąt wspólny, utworzony przez boki proporcyonalne, są sobie podobne; że zaś trójkąt OAB jest równoramienny, przeto i w trójkącie AMB mamy AB = BM; że zaś AB = OM, więc MB = OM i trójkąt BMO jest równoramienny. Kąt AMB, zewnętrzny względem trójkąta równoramiennego BMO, jest dwa razy większy od kąta wewnętrznego O (pod. 32 k. I); że zaś kąt AMB = MAB, więc w trójkącie OAB każdy z kątów OAB i OBA, jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku O, a zatém trzy kąty trójkąta AOB ważą pięć kątów O, i tém samém kąt O jest piątą dwóch, czyli dziesiątą częścią cztérech kątów prostych; a zatém łuk AB jest dziesiątą częścią okręgu koła, a cięciwa AB jest bokiem dziesięciokąta foremnego.

Wniosek I. Połączywszy wierzchołek piérwszy z trzecim, trzeci z piątym, piąty z siódmym, siódmy z dziewiątym i dziewiąty z pierwszym wierzchołkiem dziesięciokąta foremnego, otrzymamy pięciokąt foremny ACEGJ.

II. Jeżeli AB jest bokiem dziesięciokąta foremnego, niech będzie AL bokiem sześciokąta, natenczas łuk $BL = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ okręgu koła, więc cięciwa BL jest bokiem piętnastokąta foremnego wpisanego w koło. Widzimy zarazem, że łuk CL jest trzecią częścią łuku CB, a zatém jego cięciwa jest bokiem trzydziestokąta foremnego, wpisanego w koło.

Uwaga. Jeżeli każdy z łuków, podpartych przez boki wielokąta foremnego, wpisanego w koło, podzielimy na dwie części równe, i punkta podziałów połączymy liniami prostemi, natenczas otrzymamy wielokąt foremny wpisany w koło o dwa razy większéj liczbie boków od danego: widzimy przeto, że kwadrat może posłużyć do wpisania w koło wielokątów foremnych o 8, 16, 32, 64 i t. d. bokach. Podobnież sześciokąt posłuży do wpisania wielokątów foremnych o 12, 24, 48, i t. d, bokach; dziesięciokąt, o 20, 40, 80 i t. d., a piętnastokąt o 30, 60, 120 i t, d. bokach (*).

PODANIE VI.

Zagadnienie.

Na daném kole (fig. 165) *opisać wielokąt foremny, podobny danemu wielokątowi foremnemu* ABCD... *wpisanemu w koło.*

Przez środek T łuku AB poprowadźmy styczną GH, która będzie równoległa do cięciwy AB (pod. 10, ks. II), podobnież przez środek każdego innego łuku BC, CD i t. d. poprowadźmy styczne, a one przecinając się

(*) Długi czas mniemano, że za pomocą sposobów znanych w geometryi elementarnéj, albo co jest to samo, przez rozwiązanie równań stopnia pierwszego i drugiego, można wpisać i opisać na kole tylko wyżéj wyliczone wielokąty; lecz *Gauss* w dziele: *Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae* 1801, dowiódł, że podobną drogą można wpisać wielokąt o siedémnastu bokach, i w ogólności o $2^n + 1$ bokach, byleby $2^n + 1$ było liczbą pierwszą.

wydadzą wielokąt opisany GHJK... podobny wielokątowi wpisanemu.

Łatwo dostrzedz, że trzy punkta O, B i H leżą w linii prostéj: trójkąty OTH i OHN mając przeciwprostokątną OH wspólną i bok OT = ON, są sobie równe (pod. 18, ks. I), a zatém kąt TOH = HON, i tém samém linia OH przechodzi przez środek B łuku TN; dla podobnéj przyczyny punkt J znajduje się na przedłużeniu OC, i t. d. Ponieważ linia GH jest równoległa do AB, a HJ do BC, przeto kąt GHJ = ABC (pod. 27. ks. I); podobnież kąt HJK = BCD, i t. d.; więc kąty wielokąta opisanego są równe kątom wielokąta wpisanego, i tém samém są równe pomiędzy sobą. Nadto dla równoległości tych samych linij, mamy: GH : AB = OH : OB i HJ : BC = OH : OB, więc GH : AB = HJ : BC, że zaś AB = BC, przeto GH = HJ. Dla podobnéj przyczyny HJ = JK, i t. d.; więc boki wielokąta opisanego są sobie równe, a zatém ten wielokąt jest foremnym i podobnym wielokątowi wpisanemu.

Wniosek I. Odwrotnie, jeżeliby potrzeba było, wpisać w koło wielokąt ABC..., mając wielokąt na niém opisany GHJK..., byłoby dostateczném połączyć wierzchołki G, H, J, K... wielokąta danego z środkiem koła liniami OG, OH, i t. d., któreby się przecięły z okręgiem w punktach A, B, C..., a poprowadziwszy cięciwy AB, BC i t. d. otrzymalibyśmy wielokąt żądany. Można także w tym przypadku połączyć z sobą punkta zetknięcia T, N, P, i t. d. liniami TN, NP i t. d., a ztąd wyniknie wielokąt wpisany podobny opisanemu.

II. Ztąd wynika, że na danéın kole można opisać wielokąty foremne takie, jakie umiémy wpisywać.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Powierzchnia wielokąta foremnego jest równa iloczynowi z jego obwodu przez pół promienia koła wpisanego.

Niech będzie (fig. 165) wielokąt foremny GHJK..., powierzchnia trójkąta

$GOH = GH \times \frac{1}{2}OT$, powierzchnia trójkąta $OHJ = HJ \times \frac{1}{2}ON$, że zaś $ON = OT$, więc powierzchnia obu trójkątów $= (GH + HJ) \times \frac{1}{2}OT$. Postępując tak samo z innémi trójkątami, znajdziemy, że powierzchnia summy wszystkich trójkątów, czyli powierzchnia całego wielokąta, jest równa iloczynowi z summy podstaw GH, HJ, JK i t. d., czyli z obwodu wielokąta przez $\frac{1}{2}OT$, to jest: przez pół promienia koła wpisanego.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Obwody dwóch wielokątów foremnych o jednakowéj liczbie boków, mają się do siebie, jak promienie kół opisanych, albo jak promienie kół wpisanych; a ich powierzchnie jak kwadraty z tych samych promieni.

Niech będzie AB (fig. 166) bokiem jednego z wielokątów w mowie będących, punkt O jego środkiem, a tém samém AO promieniem koła opisanego, a linia OD, prostopadła do AB promieniem koła wpisanego; podobnież niech będzie *ab* bokiem drugiego wielokąta podobnego tamtemu, *o* jego środkiem, *oa* promieniem koła opisanego i *od* promieniem koła wpisanego. Obwody dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie jak boki AB i *ab*; że zaś kąty A i *a* są sobie równe, jako połowy kątów w wielokątach, podobnież kąty B i *b* są sobie równe, więc trójkąty ABO i *abo* równie jak i trójkąty ADO i *ado* są sobie podobne; więc $AB : ab = AO : ao = OD : od$; a zatém obwody wielokątów foremnych mają się do siebie, jak promienie AO i *ao* kół opisanych, albo jak promienie OD i *od* kół w nie wpisanych.

Powierzchnie tych samych wielokątów mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich AB i *ab*; a tém samém one mają się do siebie, jak kwadraty, z promieni OD i *od* kół wpisanych, albo jak kwadraty z promieni AO i *ao* kół na nich opisanych.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Wszelka linia krzywa, albo łamana otacza-

jąca od jednego końca do drugiego linię wypukłą AMB, *jest dłuższa od linii otoczonéj* AMB (fig. 167).

Już wyżéj powiedziano, że linią wypukłą nazywamy linię krzywą, albo łamaną, lub téż w części krzywą a w części łamaną, z którą linia prosta przecina się tylko w dwóch punktach. Jeżeliby linia AMB miała wklęsłości, natenczas nie byłaby wypukłą; gdyż łatwo dostrzedz, że linia prosta mogłaby ją przeciąć więcéj jak w dwóch punktach. Łuki kół są wypukłe; lecz podanie obecne rozciąga się na linie jakiekolwiek, które czynią zadosyć wspomnionemu warunkowi.

To założywszy, jeżeliby linia AMB nie była mniejsza od każdéj ją otaczającéj linii, natenczas pomiędzy ostatniemi byłaby jedna krótsza od innych, i zarazem mniejsza od AMB, albo przynajmniéj jéj równa. Niech taką linią będzie ACDEB; pomiędzy liniami AMB i ACDEB poprowadźmy gdziekolwiek linię prostą PQ, która nie przecina linii AMB, lub jest do niéj styczną; linia prosta PQ jest mniejsza od PCDEQ, a zatém podstawiwszy zamiast części PCDEQ linię prostą PQ otrzymamy linię obejmującą APQB mniejszą od APDQB. Że zaś podług przypuszczenia linia APDQB miała być najkrótszą ze wszystkich linij otaczających, przeto to przypuszczenie nie może mieć miejsca i tém samém każda linia otaczająca jest dłuższa od AMB.

Uwaga. Zupełnie takim samym sposobem dowiedziemy, że wszelka linia wypukła i zamknięta AMB (fig. 168) jest krótsza od każdéj linii ze wszech stron ją otaczającéj, bądź to linia otaczająca FGH dotyka się linii AMB w jednym, lub kilku punktach, bądź téż nie dotykając się ją otacza.

PODANIE X.

Twierdzenie przybrane.

Mając dane dwa koła spółśrodkowe, zawsze można w większe wpisać wielokąt foremny, którego boki nie będą dotykały okręgu koła mniejszego, i na mniejszém można opisać wielokąt foremny, którego boki nie będą przecinały okręgu koła większego; to jest tak *w jednym jak w drugim przypadku, boki wielokąta będą zawarte między dwóma okręgami kół.*

Niech będą (fig. 169) CA i CB promienie danych kół spółśrodkowych. Przez punkt A poprowadźmy styczną, kończącą się w punktach D i E na okręgu większym. Wpiszmy w koło większe jeden z wielokątów, jakie poprzednio nauczyliśmy się wpisywać, podzielmy następnie wszystkie łuki podparte przez boki wielokąta wpisanego, na dwie części równe, i poprowadźmy cięciwy łuków wyniklych z podziału, a otrzymamy wielokąt foremny wpisany o dwa razy większéj liczbie boków od poprzedniego. Dzielenie łuków na dwie części równe posuwajmy, dopóki nie dojdziemy do łuku mniejszego od DBE. Niech takim łukiem będzie MBN (przypuszczamy że jego środkiem jest B), widocznie, że cięciwa MN jest bardziéj oddalona od środka jak DE, i że tém samém wielokąt, którego bokiem jest MN, nie może spotkać okręgu koła zakréslonego promieniem CA.

Toż samo założywszy, połączmy punkt C

z M i N liniami CM i CN, które przetną się ze styczną w punktach P i Q; PQ będzie bokiem wielokąta opisanego na mniejszym okręgu koła, i ten wielokąt będzie podobny wielokątowi wpisanemu w koło większe, którego bokiem jest MN. Ponieważ CP jest mniejsze od CM, przeto wielokąt opisany nigdzie bokami swémi nie spotka się z okręgiem większym.

A zatém za pomocą jednego wykreślenia, można dojść do wielokąta wpisanego w koło większe, i wielokąta opisanego na kole mniejszém, których obwody będą zawarte między okręgami dwóch kół spółśrodkowych.

Uwaga. Mając dwa wycinki spółśrodkowe FCG i JCH, można w większy z nich wpisać *część wielokąta foremnego*, albo też na mniejszym opisać *część wielokąta foremnego*, tak że obwody obu części będą zawarte między dwóma okręgami: dla tego dość będzie dzielić łuk na 2, 4, 8 i t. d. części równych, dopóki nie dojdziemy do części mniejszéj od DBE.

Częścią, albo *wycinkiem wielokąta foremnego* nazywamy figurę ograniczoną szeregiem cięciw równych, wpisanych w łuk FG od jednego końca jego do drugiego. Ta część ma główne własności wspólne z wielokątami foremnémi: kąty, a także i boki jéj są sobie równe, można ją wpisać i opisać na kole; wszakże ona w ścisłém znaczeniu wyrazu, nie stanowi pewnéj części wielokąta foremnego, wyjąwszy jeżeliby łuk przez jéj bok podparty, był jakąbądź częścią całego okręgu koła.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie, a powierzchnie jak kwadraty z tychże promieni.

Dla skrócenia, oznaczmy przez *okr.* CA (fig. 170), okrąg koła, którego promieniem jest CA; mówię, że będzie: *okr.* CA : *okr.* OB = CA : OB.

Jeżeliby bowiem ta proporcya nie miała miejsca, natenczas miałoby się CA do OB, jak się ma *okr.* CA do wyrazu czwartego, większego, lub mniejszego od *okr.* OB; przypuśćmy, że wyraz czwarty powinien być mniejszy, i dajmy na to że jest: CA : OB = *okr.* CA : *okr.* OD. Wpiszmy w koło opisane promieniem OB, wielokąt foremny EFGKLE, któregoby boki nie dotykały okręgu opisanego promieniem OD (pod. 10), a w koło, którego promieniem jest CA, wpiszmy wielokąt MNPSTM podobny tamtemu.

To założywszy, ponieważ wielokąty są podobne, przeto ich obwody mają się do siebie jak promienie CA i OB kół na nich opisanych (pod. 8), i będzie MNPSTM : EFGKLE = CA : OB; że zaś podług przypuszczenia jest CA : OB = *okr.* CA : *okr.* OD, więc MNPSTM : EFGKLE = *okr.* CA : *okr.* OD. Lecz ta proporcya nie może mieć miejsca, gdyż obwód MNPSTM jest mniejszy od *okr.* CA (pod. 9), a obwód EFGKLE jest większy od *okr.* DO; a zatém nie może być, aby się miało CA do OB, jak się ma *okr.* CA do okręgu mniejszego od *okr.* OB, czyli mówiąc ogólniéj, nie może być, aby się miał jeden promień do drugiego, jak się ma okrąg opisany pierwszym promieniem, do okręgu koła opisanego promieniem mniejszym od drugiego.

Ztąd wnoszę, że także nie może się mieć CA do OB, jak *okr.* CA do okręgu większego od *okr.* OB; gdyż jeżeliby taka proporcya miała miejsce, zmieniwszy porządek między wyrazami, otrzymalibyśmy że tak się ma OB do CA, jak okrąg koła większy od *okr.* OB do *okr.* CA; a zatém miałby się promień do drugiego promienia, jak okrąg koła opisany pierwszym promieniem do okręgu koła opisanego promieniem mniejszym od drugiego, co być nie może jak to wyżéj dowiedziono.

Ponieważ czwarty wyraz proporcyi CA : OB $=$ *okr.* CA : X, nie może być ani większy od *okr.* OB, ani mniejszy od niego, przeto okręgi kół mają się do siebie w stosunku swoich promieni.

Rozumowanie i wykréślenie zupełnie podobne posłużyłoby do okazania, że powierzchnie kół mają się do siebie, jak kwadraty z ich promieni.

Nie wejdziemy w dalsze szczegóły ostatniego twierdzenia, które jest wnioskiem z twierdzenia następującego.

Wniosek. Łuki podobne (fig. 171) AB i DE mają się do siebie, jak promienie AC i DO, a wycinki podobne ACB i DOE mają się do siebie, jak kwadraty z tych samych promieni.

Gdyż, dla podobieństwa łuków kąt C jest równy kątowi O (opis. 3, ks. III), a zatém tak się ma kąt C do cztérech kątów prostych, jak się ma łuk AB do całego okręgu koła, opisanego promieniem AC (pod. 17, ks. II), i tak się ma kąt O do cztérech kątów prostych, jak się ma łuk DE do całego okręgu koła, opisanego promieniem OD; ponieważ zaś łuki AB i DE mają się do siebie jak okręgi kół, których one są częściami, a okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie, przeto *łuk* AB : *łuk*. DE $=$ AC : DO.

Dla téj saméj przyczyny wycinki ACB i DOE mają się do siebie jak całe koła, a koła jak kwadraty z promieni, przeto *wyc.* ACB : *wyc.* DOE $= \overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

Powierzchnia koła jest równa iloczynowi z jego okręgu przez pół promienia.

Oznaczmy przez *pow.* CA (fig. 172) powierzchnię koła opisanego promieniem CA; mówię że *pow.* CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr.* CA.

Jeżeli bowiem $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr.* CA nie jest miarą powierzchni koła, którego promieniem jest CA, natenczas ta ilość będzie miarą koła większego, lub mniejszego. Przypuśćmy że jest miarą koła większego i niech będzie, jeżeli to być może, $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr.* CA $=$ *pow* CB.

Na kole którego promieniem jest CA, opiszmy wielokąt foremny DEFG..., któregoby boki nie przecinały okręgu koła opisanego promieniem CB (po. 10); powierzchnia wielokąta jest równa jego obwodowi DE$+$EF$+$FG$+$ i t. d., pomnożonemu przez $\frac{1}{2}$AC (po. 7), że zaś obwód wielokąta, jako linia otaczająca, jest większy od okręgu koła weń wpisanego, przeto miara powierzchni wielokąta

DEFG .. jest większa od iloczynu $\frac{1}{2}AC\times$ *okr.* AC, który podług przypuszczenia, jest miarą koła opisanego promieniem CB; więc wielokąt byłby większy od koła opisanego promieniem BC, gdy tymczasem przeciwnie on jest mniejszy, bo jest w niém zawarty. Więc być nie może, aby $\frac{1}{2}CA\times$*okr.*CA było większe od *pow.* CA, czyli inaczéj, nie może być, aby iloczyn z okręgu koła przez pół promienia był miarą powierzchni koła większego.

Powiadam daléj, że tenże iloczyn nie może być miarą powierzchni koła mniejszego: aby zas nie zmieniać figury, przypuszczam że mamy koło, którego promieniem jest CB, potrzeba okazać że $\frac{1}{2}CB\times$*okr.* CB nie może być miarą powierzchni koła mniejszego, np. koła o promieniu CA. W saméj rzeczy niech będzie, jeżeli to być może, $\frac{1}{2}CB\times$*okr.* CB $=$*pow.* CA.

Uskuteczniwszy takie same wykreślenie jak wyżéj, miarą powierzchni wielokąta DEFG... będzie (DE$+$EF$+$FG$+$ i t. d.)$\times$ $\frac{1}{2}$CA; ponieważ zaś obwód DE$+$EF$+$FG $+$ i t. d. jest mniejszy od *okr.* CB, przeto powierzchnia wielokąta jest mniejsza od $\frac{1}{2}CA \times okr. CB$. Że zaś ostatnia ilość podług przypuszczenia, jest miarą powierzchni koła o promieniu CA, przeto powierzchnia wielokąta byłaby mniejsza od koła weń wpisanego, co być nie może; nie może być przeto, aby iloczyn z okręgu koła przez pół jego promienia, służył za miarę powierzchni koła mniejszego.

Więc nakoniec iloczyn z okręgu koła przez pół promienia jest miarą powierzchni tegoż samego koła.

Wniosek I. Powierzchnia wycinka kołowego jest równa iloczynowi z łuku, służącego mu za podstawę przez pół promienia.

Gdyż wycinek (fig. 173) ACB ma się do całego koła, jak łuk AMB do okręgu ADBA (pod. 17, ks. II), lub jak $AMB \times \frac{1}{2}AC$ do $ABDA \times \frac{1}{2}AC$. Że zaś powierzchnia koła $= ABDA \times \frac{1}{2}AC$, przeto i miarą powierzchni wycinka ACB jest $AMB \times \frac{1}{2}C$.

II. Oznaczmy głoską π okrąg koła, którego średnica jest równa jedności; ponieważ okręgi kół mają się do siebie jak promienie, lub jak średnice, przeto można ułożyć proporcyę, tak się ma średnica 1 do okręgu koła π, jak średnica $2.CA$ do okręgu koła opisanego promieniem CA, t. j. $1:\pi = 2.CA : okr.CA$, zkąd $okr.CA = 2.\pi \times CA$. Pomnożywszy obie strony téj równości przez $\frac{1}{2}CA$, będzie $\frac{1}{2}CA \times okr.CA = \pi \times \overline{CA}^2$, czyli $pow.CA = \pi \times \overline{CA}^2$, a zatém *powierzchnia koła jest równa iloczynowi z kwadratu promienia przez liczbę stałą* π, *która oznacza okrąg koła w przypuszczeniu że średnica równa* 1, *czyli wyraża stosunek okręgu koła do średnicy.*

Podobnież powierzchnia koła, którego promieniem jest OB, będzie równa $\pi \times \overline{BO}^2$; więc $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{BO}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{BO}^2$, a zatém *powierzchnie kół mają się do siebie, jak kwadraty z ich promieni*, co się zgadza z twierdzeniem poprzedzającém.

Uwaga. Już wyżéj nadmieniono, że zagadnienie kwadratury koła ma za przedmiot wyszukanie kwadratu równego co do powierzchni z kołem, którego promień wiadomy; a ponieważ wyżéj okazano, że koło jest równoważne z prostokątem z okręgu koła i połowy promienia, a ten prostokąt można zamienić na kwadrat z nim równoważny, biorąc średnio geometrycznie proporcyonalną między dwóma jego wymiarami (pod. 6, ks. III); przeto zadanie kwadratury koła sprowadza się do znalezienia okręgu mając wiadomą średnicę, do czego dość jest mieć wiadomy stosunek okręgu koła do średnicy.

Dotąd oznaczono pomieniony stosunek sposobem przybliżonym, lecz przybliżenie posunięto do tego stopnia, że wynalezienie stosunku ścisłego nie stanowiłoby żadnéj korzyści. A nawet przedmiot ten, nad którym wiele pracowali geometrowie w czasach, kiedy sposoby wyszukania przybliżonych wartości były mniéj wiadome, dzisiaj pozostawiono w liczbie tych pytań, które mogą stanowić zatrudnienie ludzi, posiadających zaledwie początkowe wiadomości geometryi.

Archimedes okazał, że stosunek okręgu koła do średnicy mieści się między $3\frac{10}{70}$ i $3\frac{10}{71}$; takim sposobem $3\frac{1}{7}$, albo $\frac{22}{7}$ jest bardzo przybliżoną wartością liczby, którąśmy oznaczyli przez π; ta wartość dla swéj prostości używa się najczęściéj. *Metius* znalazł wartość π nierównie bardziéj przybliżoną $\frac{355}{113}$. Nakoniec wartość π, znaleziona przez innych uczonych w cyfrach dziesiętnych, jest 3,1415926535897932..., a nawet nie zabrakło cierpliwości niektórym na wyszukanie stu dwudziestu siedmiu i stu cztérdziestu cyfr dziesiętnych. Widoczną jest rzeczą, że podobne przybliżenie nie ustępuje zupełnéj dokładności, i że nie lepiéj nam są znane pierwiastki potęg niezupełnych.

W następujących zagadnieniach będą wyłożone dwa najprostsze sposoby elementarne, wyszukania przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy.

PODANIE XIII.

Zagadnienie.

Mając wiadomą powierzchnię wielokąta foremnego wpisanego i wielokąta foremnego, *podobnego tamtemu, opisanego na kole, znaleźć powierzchnię wielokąta foremnego wpisanego i opisanego o dwa razy większéj liczbie boków.*

Niech będzie (fig. 174) AB bokiem danego wielokąta foremnego wpisanego, bok EF równoległy do AB, bokiem wielokąta podobnego opisanego, i C środkiem koła; poprowadziwszy cięciwę AM i styczne AP i BQ, piérwsza będzie bokiem wielokąta foremnego wpisanego w koło o podwójnéj liczbie boków względem danego, a dwie drugie bokami wielokąta jemu podobnego opisanego (pod. 6). To założywszy ponieważ toż samo wykreślenie miałoby miejsce w innych kątach, równych kątowi ACM, przeto dość będzie uważać kąt ACM, a trójkąty w nim znajdujące się mieć się będą do siebie jak wielokąty których one są częściami. Niech będzie A powierzchnia wielokąta, którego bokiem jest AB; B powierzchnia wielokąta jemu podobnego opisanego: A′ powierzchnia wielokąta, którego bokiem jest AM; B′ powierzchnia wielokąta podobnego opisanego; A i B są wiadome, mamy oznaczyć A′ i B′.

1. Trójkąty ACD i ACM mając wspólny wierzchołek A, mają się do siebie jak ich podstawy CD i CM; prócz tego te trójkąty mają się do siebie jak wielokąty, których one są częściami, a zatém $A : A' = CD : CM$. Trójkąty CAM i CME mając wspólny wierzchołek M, mają się do siebie w stosunku swoich podstaw CA i CE, że zaś trójkąty CMA i CME mają się do siebie jak wielokąty A′ i B, których one są częściami, przeto $A' : B = CA : CE$. Że zaś dla równoległości linij AD i ME, jest $CD : CM = CA : CE$, więc $A : A' = A' : B$; a zatém A′, to jest jeden z wielokątów szukanych, jest średnio geometrycznie proporcyonalny między wielokątami danémi A i B, a tém samém mamy:

$$A' = \sqrt{A \times B}.$$

2. Trójkąty CPM i CPE mając wspólną wysokość CM, mają się do siebie jak podstawy PM i PE; że zaś linia CP dzieli kąt MCE na dwie części równe, przeto (pod. 17, ks. III) $PM : PE = CM : CE = CD : CA = A : A'$;

więc CPM : CPE $=$ A : A$'$. i następnie CPM : CPM $+$ CPE albo CME $=$ A : A $+$ A$'$. Że zaś CMPA, czyli 2.CMP i CME mają się do siebie jak wielokąty B$'$ i B, których one są częściami, przeto B$'$: B $=$ 2A : A $+$ A$'$. Poprzednio już znaleźliśmy A$'$, a z ostatniéj proporcyi znajdziemy: $B' = \dfrac{2.A \times B}{A + A'}$; więc za pomocą wielokątów A i B, łatwo jest oznaczyć wielokąty A$'$ i B$'$, mające dwa razy więcéj boków od tamtych.

PODANIE XIV.

Zagadnienie.

Oznaczyć przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy.

Niech będzie promień koła $= 1$, bok kwadratu w nie wpisanego będzie $= \sqrt{2}$ (pod. 3), a bok kwadratu opisanego będzie równy średnicy 2; a zatém powierzchnia kwadratu wpisanego $= 2$, a powierzchnia kwadratu opisanego $= 4$. Wiedząc, że

$A = 2$ i $B = 4$, podług zagadnienia poprzedzającego znajdziemy, że powierzchnia ośmiokąta wpisanego $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$ i powierzchnia ośmiokąta opisanego $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$. Znając ośmiokąt wpisany i opisany, znajdziemy powierzchnie wielokątów o dwa razy większéj liczbie boków: dla tego uczyńmy znowu $A = 2,8284271$ i $B = 3,3137085$, a znajdziemy $A' = \sqrt{A \times B}$ $= 3,0614674$, i $B' = \frac{2.A \times B}{A + A'} = 3,1825979$. Następnie wielokąty o 16 bokach posłużą do obliczenia wielokątów o 32 bokach, i tak daléj postępujmy, dopóki nie otrzymamy dla wielokąta wpisanego i opisanego wartości nie różniących się pomiędzy sobą w tylu cyfrach dziesiętnych, w ilu rachunek uskuteczniono, a w przykładzie obecnym w siedmiu cyfrach. Doszedłszy do tego wniesiemy, że powierzchnia koła jest równa ostatniemu wypadkowi; gdyż koło zawsze jest większe od wielokąta w nie wpisanego a mniejsze od wielokąta na niém opisanego;

jeżeli więc wielokąty nie różnią się od siebie w pewnéj liczbie cyfr dziesiętnych, tém bardziéj powierzchnia koła nie będzie się różnić od powierzchni którego kolwiek wielokąta, w téj saméj liczbie cyfr dziesiętnych wyrażonéj.

Oto są wypadki z obliczenia wielokątów doprowadzone do takich, które nie różnią się od siebie w siedmiu cyfrach dziesiętnych.

Licz: boków.	Wiel. wpisany.	Wiel. opisany.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Ztąd wnoszę, że powierzchnia koła, którego promień $=1$, jest $=3{,}1415926$. Dla błędu, który mógł powstać od opuszczonych cyfr dziesiętnych, możnaby być w niejakiéj wątpliwości co do ostatniéj cyfry dziesiętnéj; lecz rachunek wykonano z 8 cyframi dziesiętnemi, aby być pewnym dokładności wszystkich cyfr dziesiętnych w wartościach przywiedzionych.

Ponieważ powierzchnia koła jest równa iloczynowi z półowy okręgu przez promień, a promień jest 1, przeto półokrąg $=3{,}14159\text{-}6$; jeżeli zaś średnica równa 1, okrąg koła $=3{,}1415926$; a zatém stosunek okręgu koła do średnicy, który oznaczyliśmy wyżéj przez $\pi=3{,}1415926$.

PODANIE XV.

Twierdzenie przybrane.

Trójkąt (fig. 175) CAB *jest równoważny trójkątowi równoramiennemu* DCE, *mającemu z nim kąt* C *wspólny i którego bok* CE *ró-*

wny CD, *jest średnio geometrycznie proporcyonalny między* CA *i* CB. *Nadto jeżeli kąt* CAB *jest prosty, prostopadła* CF *spuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego, będzie średnio geometrycznie proporcyonalna między bokiem* CA *i połową summy boków* CA *i* CB.

1. Gdyż dla kąta wspólnego C, trójkąt ABC tak się ma do trójkąta równoramiennego DCE, jak $AC \times CB$ do $DC \times CE$, czyli do $\overline{DC}^2$; przeto te trójkąty są z sobą równoważne, jeżeli $\overline{DC}^2 = AC \times BC$, czyli jeżeli bok DC jest średnio geometrycznie proporcyonalny między AC i BC.

2. Ponieważ prostopadła CGF dzieli kąt ACB na dwie części równe, przeto $AG:GB = AC:CB$, zkąd $AG:AG+GB = AC:AC+CB$; że zaś AG tak się ma do AB, jak trójkąt ACG do trójkąta ACB, albo do $2.CDF$; jeżeli nadto kąt A jest prosty, trójkąty prostokątne ACG i CDF będą podobne i dadzą $ACG:CDF = \overline{AC}^2:\overline{CF}^2$, więc $\overline{AC}^2 : 2.\overline{CF}^2 = AC:AC+CB$. Pomnożywszy wy-

razy stosunku drugiego przez AC, poprzedniki będą sobie równe, a tém samém $2.\overline{CF}^2 = AC \times (AC + CB)$, czyli $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; więc 2 jeżeli kąt A jest prosty, prostopadła CF będzie średnio geometrycznie proporcyonalna między AC i połową summy boków AC i CB.

PODANIE XVI.

Zagadnienie.

Znaleść koło, któreby od wielokąta danego różniło się tak mało, jak się podoba.

Niech będzie np. kwadrat BMNP (fig. 176); ze środka C spuśćmy prostopadłą CA na bok MB i połączmy punkta C i B linią prostą CB. Koło zakreślone promieniem CA będzie wpisane w kwadrat, a koło zakreślone promieniem CB będzie opisane na tym samym kwadracie; pierwsze mniejsze, a drugie większe od kwadratu, idzie zaś o to, aby je zbliżyć do siebie.

Weźmy CD i CE równe średnio geometrycznie proporcyonalnéj między CA i CB, i poprowadźmy ED; trójkąt równoramienny CDE będzie równoważny z trójkątem CAB (pod. 15); uskuteczniwszy toż samo dla każdego z ośmiu trojkątów składających kwadrat, utworzy się ośmiokąt foremny, równoważny z kwadratem BMNP. Koło zakreślone promieniem CF, który jest średnio geometrycznie proporcyonalny między CA i $\frac{CA+CB}{2}$, będzie wpisane w ośmiokąt, a koło zakreślone promieniem CD będzie na nim opisane. A zatém koło pierwsze będzie mniejsze a drugie większe od kwadratu danego.

Podobnież zamieniwszy trójkąt prostokątny CDF na trójkąt równoramienny z nim równoważny, otrzymamy szesnastokąt foremny równoważny z kwadratem danym. Koło wpisane w ten wielokąt będzie mniejsze, a koło na nim opisane będzie większe od kwadratu danego.

I tak daléj można postępować, dopóki stosunek między promieniem koła wpisanego i promieniem koła opisanego nie będzie różnił się tak mało od równości, ile się podoba. Natenczas jedno lub drugie koło, będzie można uważać jako równoważne z danym kwadratem.

Uwaga. Oto jest sposób obliczania promieni po sobie idących. Niech będzie a promień koła wpisanego w jeden z wielokątów znalezionych, b promień koła opisanego na tymże wielokącie; niech będą a' i b' promienie koła wpisanego i opisanego na wielokącie o podwójnéj liczbie boków względem tamtego. Podlug tego co okazano, b' jest średnio geometrycznie proporcyonalne między a i b, a a' jest średnio geometrycznie proporcyonalne między a i $\frac{a+b}{2}$, tak że mamy

$b'=\sqrt{a\times b}$, i $a'=\sqrt{a\times\left(\frac{a+b}{2}\right)}$; przeto mając wiadome promienie a i b dla jednego wielokąta, łatwo znaleść promienie a' i b' dla wielokąta następującego, i tak będziemy postępowali, dopóki różnica między témi promieniami nie stanie się dostatecznie małą, a wtedy jeden lub drugi będzie promieniem koła równoważnego z kwadratem, lub jakimkolwiek danym wielokątem foremnym.

Sposób ten jest łatwy w użyciu na liniach, gdyż sprowadza się do wynalezienia następnych średnio geometrycznie proporcyonalnych między liniami wiadomemi, lecz jeszcze łatwiéj może być zastosowany do liczb; ten sposób jest jednym z najdogodniejszych, jakie geometrya elementarna może podać na szybkie obliczenie przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy. Niech będzie bok kwadratu $=2$, promień pierwszy CA koła wpisanego będzie 1, a pierwszy promień CB koła opisanego będzie $\sqrt{2}$, czyli 1,4142136. Uczyniwszy zatém $a=1$, i $b=1,4142136$, znajdziemy: $b'=$ 1,1892071 i $a'=1,0986841$. Te liczby posłużą do obliczenia następujących promieni.

Oto wypadek rachunku z siedmioma, lub ośmioma cyframi dziesiętnemi, uskutecznionego za pomocą tablic logarytmów zwyczajnych.

Promienie kół opis.	Promienie kół wpis.
1,4142136 . .	1,0000000
1,1892071 . .	1,0986841
1,1430500 . .	1,1210863
1,1320149 . .	1,1365639
1,1292862 . .	1,1279257
1,1286063 . .	1,1282657

Ponieważ piérwsza połowa cyfr w wartościach obu promieni jest jednakowa, przeto zamiast średnio geometrycznie proporcyonalnych można wziąść średnio arytmetycznie proporcyonalne, które różnią się od tamtych tylko cyframi następującemi. Takim sposobem rachunek bardzo się skróci i otrzymamy wypadki:

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792

Przeto 1,1283792 jest przybliżoną wartością promienia koła równoważnego z kwadratem, którego bok $=2$. Ztąd łatwo oznaczyć przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy: gdyż okazano, że powierzchnia koła jest równa kwadratowi z promienia pomnożonemu przez liczbę π; jeżeli więc podzielimy powierzchnię 4, przez kwadrat z 1,1283792, otrzymamy π; wykonawszy działanie znajdziemy $\pi = 3,1415926...$, co już otrzymaliśmy poprzednio.

DODATEK DO KSIĘGI IV.

O NAJWIĘKSZYCH I NAJMNIEJSZYCH ILOŚCIACH.

Opis.

Figurami *równoobwodowemi* nazywają się figury, których obwody są sobie równe.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wszystkich trójkątów, mających równe obwody i wspólną podstawę, ten jest największym, którego dwa inne boki są sobie równe.

Niech będzie (fig. 177) $AC = CB$ i $AM + MB = AC + CB$, powiadam, że trójkąt równoramienny ACB jest większy od trójkąta

AMB, mającego jednakowy z nim obwód i wspólną podstawę.

Z punktu C jako ze środka, promieniem $AC = BC$ opiszmy okrąg koła, który przetnie się z przedłużeniem AC w punkcie D, połączmy punkt D z punktem B, a kąt DBA wpisany w półkole będzie prosty (pod. 15, ks. II). Przedłużmy linię DB ku N, uczyńmy $MN = MB$, i poprowadźmy AN, nakoniec z punktów M i C spuśćmy prostopadłe MP i CG na DN. Ponieważ $CB = CD$ i $MN = MB$, przeto $AC + CB = AD$, i $AM + MB = AM + MN$. Że zaś $AC + CB = AM + MB$, więc $AD = AM + MN$ i tém samém $AD > AN$; ponieważ pochyła AD jest dłuższa od AN, przeto $BD > BN$ (pod. 12, ks. I), więc BG jako połowa linii DB, będzie większa od BP połowy linii BN. Trójkąty ABC i ABM mające wspólną podstawę AB, mają się do siebie jak ich wysokości BG i BP, że zaś $BG > BP$, więc trójkąt równoramienny ABC jest większy od trójkąta nierównoramiennego AMB, mającego takiż sam obwód i wspólną z nim podstawę.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wielokąt równoboczny jest największy z pomiędzy wielokątów równoobwodowych.

Gdyż niech będzie (fig. 178) wielokąt największy ABCDEF; jeżeli bok jego BC nie jest równy CD, wystawmy na BD trójkąt równoramienny BOD równoobwodowy z BCD: trójkąt BOD będzie większy od BCD (pod. I), a następnie wielokąt ABODEF większy od ABCDEF; przeto ostatni nie byłby największy ze wszystkich, mających jednakowy z nim obwód i jednakową liczbę boków, co się sprzeciwia założeniu. Powinno więc być BC=CD, dla téj saméj przyczyny będzie: CD=DE, DE=EF i t. d.; więc wszystkie boki wielokąta największego są sobie równe.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wszystkich trójkątów, w których dwa dane boki tworzą kąt upodobany, *największy jest ten, w którym te dwa boki czynią kąt prosty.*

Niech będą trójkąty BAC i BAD (fig. 179) mające bok AB wspólny i bok AC=AD; mówię że jeżeli kąt BAC jest prosty, trójkąt BAC będzie większy od trójkąta BAD, w którym kąt A jest ostry, lub rozwarty.

Ponieważ podstawa AB jest wspólna przeto trójkąty BAC i BAD mają się do siebie w stosunku swoich wysokości AC i DE; że zaś prostopadła DE jest krótsza od pochyłéj AD, czyli jéj równéj AC, przeto trójkąt BAD jest mniejszy od trójkąta BAC.

PODANIE IV.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wszystkich wielokątów ograniczonych przez boki dane i ostatni dowolny, ten jest największy, którego wszystkie wierzchołki są na półokręgu koła mającego za średnicę bok nieoznaczony.

Niech będzie wielokąt ABCDEF (fig. 180)

największy z pomiędzy wielokątów utworzonych przez boki dane AB, BC, CD, DE i EF, i ostatni dowolny AF; przeciągnijmy przekątne AD i DF. Jeżeliby kąt ADF nie był prosty, natenczas uczyniwszy kąt ADF prostym możnaby było podług twierdzenia poprzedzającego, powiększyć trójkąt ADF, przez co powiększyłby się i wielokąt ABCDEF; że zaś założono, że wielokąt ABCDEF doszedł do swojéj największości i że tém samém powiększyć się nie może, przeto kąt ADF jest prosty, a jego wierzchołek D znajduje się na półokręgu, którego średnicą jest AF. Toż samo rozumiéć o kątach ABF, ACF i AEF; więc wszystkie wierzchołki A, B, C, D, E i F wielokąta największego, znajdują się na półokręgu koła, którego średnicą jest bok nieoznaczony AF.

Uwaga. To twierdzenie nastręcza pytanie: czyli mając dane wszystkie boki prócz ostatniego, który jest niewiadomy, można z nich kilkoma sposobami utworzyć wielokąt taki, aby ostatni bok był średnicą półkola, w któreby inne boki były wpisane. Wprzód nim rozwiążemy to pytanie uważmy, że jeżeli jedna i ta sama cięciwa AB (fig. 181) podpiéra łuki opisane różnémi promieniami AC i AD, natenczas z pomiędzy kątów opartych ramionami o tę cięciwę, a mających wierzchołki w środkach kół, ten będzie mniejszy, który się znajduje w kole opisaném promieniem większym, t. j. ACB<ADB. W saméj rzeczy kąt ADO=ACD+CAD (pod. 32, ks. I), przeto ACD<ADO, pomnożywszy obie ilości przez 2, będzie ACB<ADB.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Mając dane boki wielokąta i ostatni niewiadomy, mający być średnicą półkola, w któreby inne boki były wpisane, tylko jednym sposobem można z nich utworzyć wielokąt ABCDEF.

Przypuśćmy (fi. 180) albowiem, że znaleźliśmy koło, które odpowiada na zagadnienie; jeżeliby wzięto koło większe, cięciwy AB, BC, CD i t. d. odpowiadałyby kątom środkowym mniejszym; a zatém summa kątów środkowych byłaby mniejsza od dwóch kątów prostych, i tém samém końce boków danych nie schodziłyby się z końcami średnicy. Przeciwna niedorzeczność miałaby miejsce, gdyby wzięto koło mniejsze; a zatém w mowie będący wielokąt może być tylko w jedno koło wpisany.

Uwaga. Można podług upodobania zmieniać porządek między bokami AB, BC, CD i t. d., lecz średnica koła i powierzchnia wielokąta zawsze pozostaną też same; gdyż jakikolwiek będzie porządek łuków AB, BC i t. d., jeżeli tylko ich summa stanowi pół okręgu, wielokąt mieć będzie jednakową powierzchnię, która jest równa półkolu zmniejszonemu odcinkami AB, BC i t. d., których powierzchnia zawsze będzie jednakowa.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wielokątów utworzonych przez *boki dane, ten jest największy, który może być wpisany w koło.*

Niech będą wielokąty ABCDEF (fig. 182) i *abcdef* utworzone przez boki dane, z których pierwszy może, a drugi nie może być wpisany w koło; mówię, że wielokąt pierwszy jest większy od drugiego.

Poprowadźmy średnicę EM, połączmy punkt M z A i B liniami AM i MB, na $ab =$ AB nakreślmy trójkąt *abm* równy ABM i poprowadźmy *em*.

Na zasadzie podania IV, wielokąt EFGAM jest większy od *efgam*, jeżeli ten ostatni nie może być wpisany w półkole, którego średnicą jest bok *em*, w przypadku zaś przeciwnym dwa wielokąty podług pod. V, byłyby sobie równe. Dla podobnéj przyczyny wielokąt EDCBM jest większy od *edcbm*, z warunkiem podobnym poprzedniemu, w braku którego dwa wielokąty byłyby sobie równe. A zatém cały wielokąt EFGAMBCDE jeżeli nie jest równy, musi być większy od *efgambcde*; że zaś wielokąty EFGAMBCDE i *efgambcde* nie są sobie równe, gdyż jeden z nich jest wpisany w koło, a drugi podług założenia nie może być wpisany; a zatém wielokąt pierwszy jest większy od drugiego. Odjąwszy z obu stron trójkąty równe ABM i *abm*, pozostanie wielokąt wpisany ABCDEFG większy od wielokąta *abcdefg*, którego wpisać nie można.

Uwaga. Podobnie jak w pod. V można okazać, że jedno jest tylko koło, i tém samém jeden wielokąt największy, który czyni zadosyć pytaniu; powierzchnia zaś tego wielokąta pozostałaby zawsze jednakowa, jakikolwiek zachowanoby porządek między jego bokami.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wielokątów równoobwodowych, mających jednakową liczbę boków, wielokąt foremny jest największy.

Gdyż podług twierdzenia II, boki wielokąta największego są sobie równe, a podług twierdzenia poprzedzającego on może być wpisany w koło, przeto wielokąt foremny jest największy.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Dwa kąty, mające wierzchołki w środkach kół różnych, mają się do siebie, jak łuki zawarte między ich ramionami, podzielone przez promienie tychże kół.

To jest: tak się ma kąt C (fig. 183) do kąta O jak stosunek $\frac{AB}{AC}$ do stosunku $\frac{DE}{DO}$. Z punktu O promieniem OF równym AC, opiszmy łuk FG, zawarty między przedłużonemi ramionami OD i OE; ponieważ promienie AC i OF są sobie równe, będzie $C:O = AB:FG$ (pod. 17, ks. II), czyli $= \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Że zaś łuki FG i DE są sobie podobne, przeto (pod. II) $FG:DE = FO:DO$; więc stosunek $\frac{FG}{FO}$

jest równy stosunkowi $\frac{DE}{DO}$, a tém samém mamy: $C:O=\frac{AB}{AC}:\frac{DE}{DO}$.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Z dwóch wielokątów równoobwodowych foremnych ten jest większy, który ma większą liczbę boków.

Niech będzie DE (fig. 184) połową boku jednego z dwóch wielokątów, a O jego środkiem i OE promieniem koła weń wpisanego; niech będzie AB połową boku drugiego wielokąta, C jego środkiem i CB promieniem koła weń wpisanego. Zakładamy że środki O i C są w dowolnéj odległości od siebie, a promienie kół wpisanych OE i CB leżą w linii prostéj OC, tak że kąty DOE i ACB są połowami kątów środkowych wielokątów; ponieważ zaś te kąty nie są sobie równe, linie CA i OD będąc przedłużone, przetną się z sobą gdziekolwiek, np. w punkcie F; z tego punktu spuśćmy prostopadłą FG na OC, z punktów O i C jako ze środków, opiszmy łuki GJ i GH, kończące się na bokach OF i CF.

To założywszy podług twierdzenia poprzedzającego będzie $O:C=\frac{GJ}{OG}:\frac{GH}{CG}$; że zaś DE tak się ma do obwodu pierwszego wielokata, jak kąt O do cztérech kątów prostych, przeto dla równości obwodów wielokątów, będzie $DE:AB=O:C$, czyli $DE:AB=\frac{GJ}{OG}:\frac{GH}{CG}$; pomnożywszy poprzedniki przez OG a następniki przez CG, będzie: $DE\times OG:AB\times CG=GJ:GH$. Lecz trójkąty podobne ODE i OFG dają $OE:OG=DE:FG$, zkąd $DE\times OG=OE\times FG$; podobnie znajdziemy $AB\times CG=CB\times FG$; a zatém $OE\times FG:CB\times FG=GJ:GH$, czyli $OE:CB=GJ:GH$. Jeżeli więc okażemy, że łuk GJ jest większy od GH, to ztąd wypadnie że OE jest większe od CB.

Z drugiéj strony boku CF nakréślmy figurę CKx równą figurze CGx, gdzie $CK = CG$, kąt $HCK = HCG$, i łuk $Kx = xG$; linia krzywa KxG otoczy łuk KHG i zatém będzie większa od niego (pod. 9); więc połowa téj krzywéj, to jest: Gx, jest większa od GH połowy łuku GHK, i tém bardziéj GJ jest większe od GH.

Ztąd wynika że OE jest większe od CB, że zaś dwa wielokąty, mające równe obwody, mają się do siebie jak promienie kół wpisanych (pod. 7), przeto wielokąt, którego połową boku jest DE, jest większy od wielokąta, którego połową boku jest AB; że zaś piérwszy ma więcéj boków, gdyż jego kąt środkowy jest mniejszy, przeto nakoniec z dwóch wielokątów równoobwodowych foremnych ten jest większy, który ma większą liczbę boków.

Koło jest większe od wszelkiego wielokąta z niém równoobwodowego.

Już dowiedziono, że z pomiędzy wielokątów równoobwodowych o iednakowéj liczbie boków, wielokąt foremny jest największy, a zatém idzie już tylko o porównanie koła z jakimbądź wielokątem foremnym z niém równoobwodowym. Niech będzie (fig. 185) AJ połowa boku tego wielokąta, a C jego środek. Niech będzie w kole równoobwodowém kąt DOE $=$ ACJ, a tém samém łuk DE równy AJ. Wielokąt P tak się ma do koła C jak trójkąt ACJ do wycinka ODE; a zatém będzie $P : C = \frac{1}{2} AJ \times CJ : \frac{1}{2} DE \times OE$ $= CJ : OE$. Przez punkt L poprowadźmy styczną EG, która przetnie się z przedłużeniem OD w punkcie G; trójkąty podobne ACJ i GOE dadzą proporcyę: $CJ : OE = AJ$, czyli $DE : GE$, więc $P : C = DE : GE$, albo jak się ma $DE \times \frac{1}{2} OE$, które jest miarą wycinka DOE, do $GE \times \frac{1}{2} OE$, które jest miarą trójkąta GOE; że zaś wycinek jest mniejszy od trójkąta, przeto P jest mniejsze od C: więc koło jest większe od wszelkiego wielokąta z niém równoobwodowego.

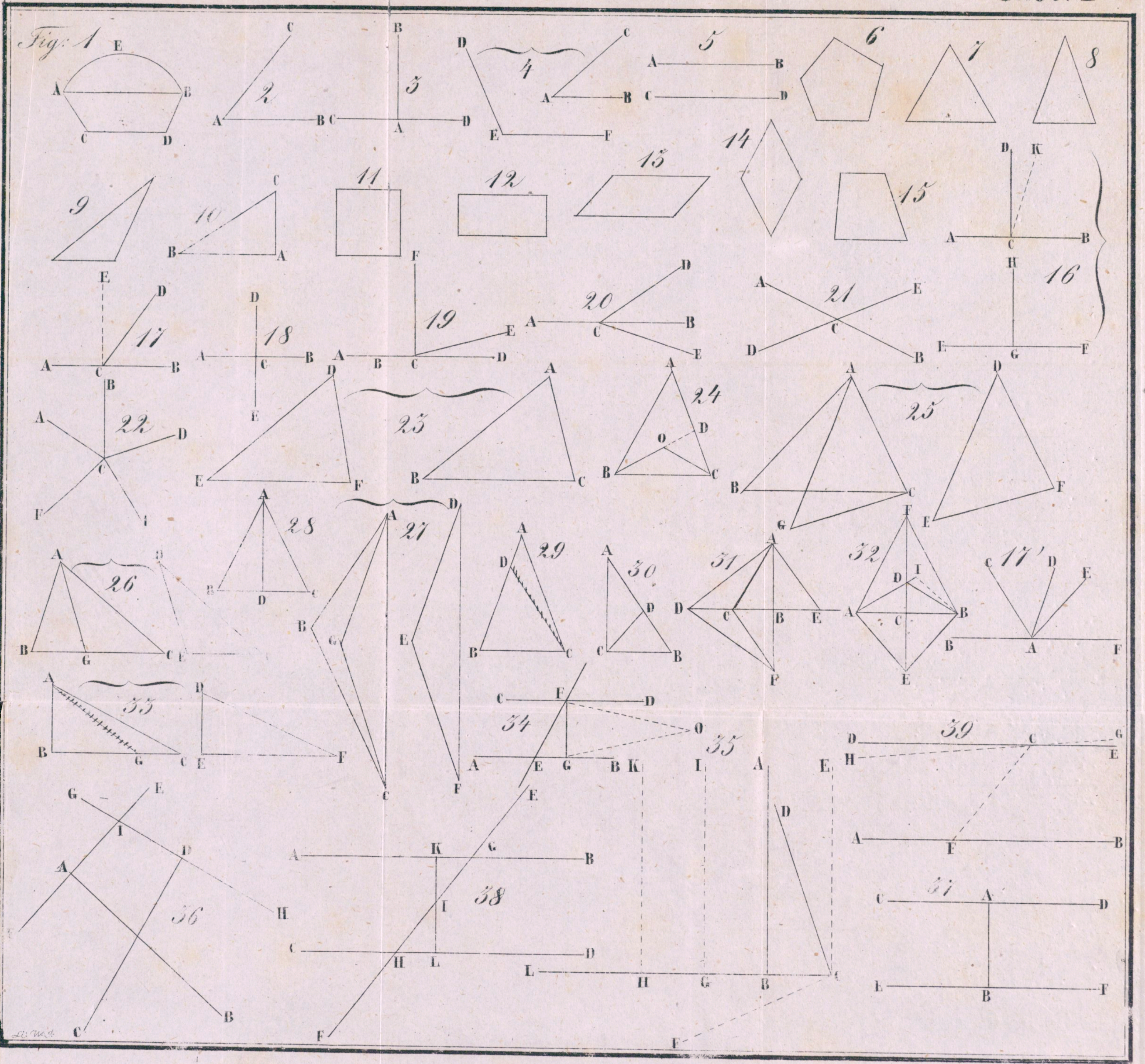
KONIEC.

SPIS RZECZY.

BŁĘDY DOSTRZEŻONE.

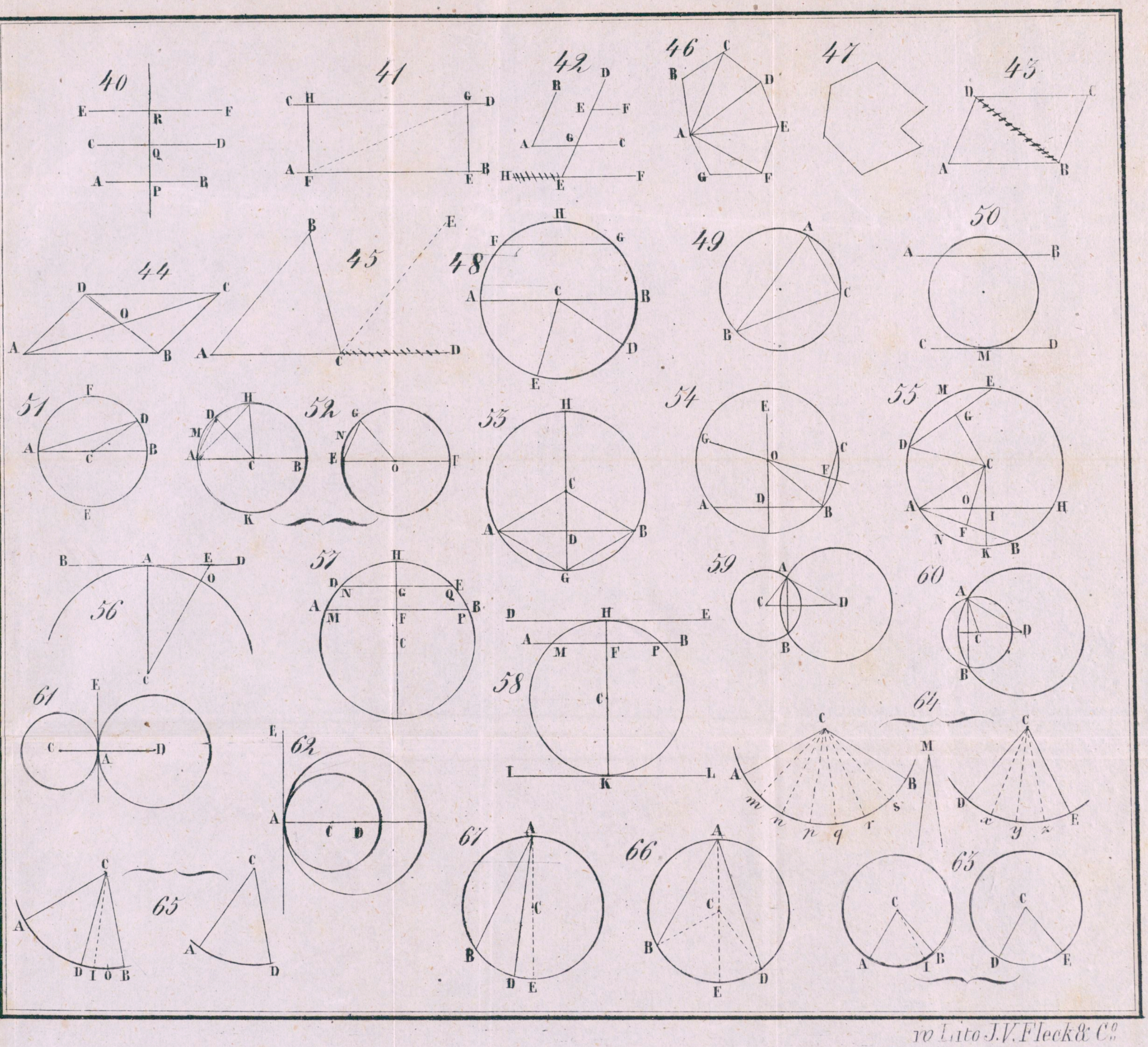
stron:	wiersz	zamiast	poprawić
5	11	42	46
11	6	wszzstkie	wszystkie
12	11	34	17
50	8	katów	kątów
74	7	luk	łuk
—	18	po wyrazie: *zawartemi,* dodać: między 0 i 1, a kąty rozwarte liczbami zawartemi między	
80	8	prez	przez
91	7	prostopadła	prostopadłe
101	4	;	,
104	17	*ednakową*	*jednakową*
105	17	AD	AE
128	5	inie	linie
130	4	po wyrazie *równe* położyć przecinek	
133	20	G	F
151	19	Podanie I.	Podanie XXIX.
156	10	fig. 139	fig. 140
164	15	sposób	rodzaj
169	4 i 5	fig. 150	fig. 152
192	w przypisku wiersz 9, po wyrazie *w ogólności o,* powinno być $2^n + 1$; toż samo w wierszu ostatnim po wyrazie *byleby.*		

Tabl: I



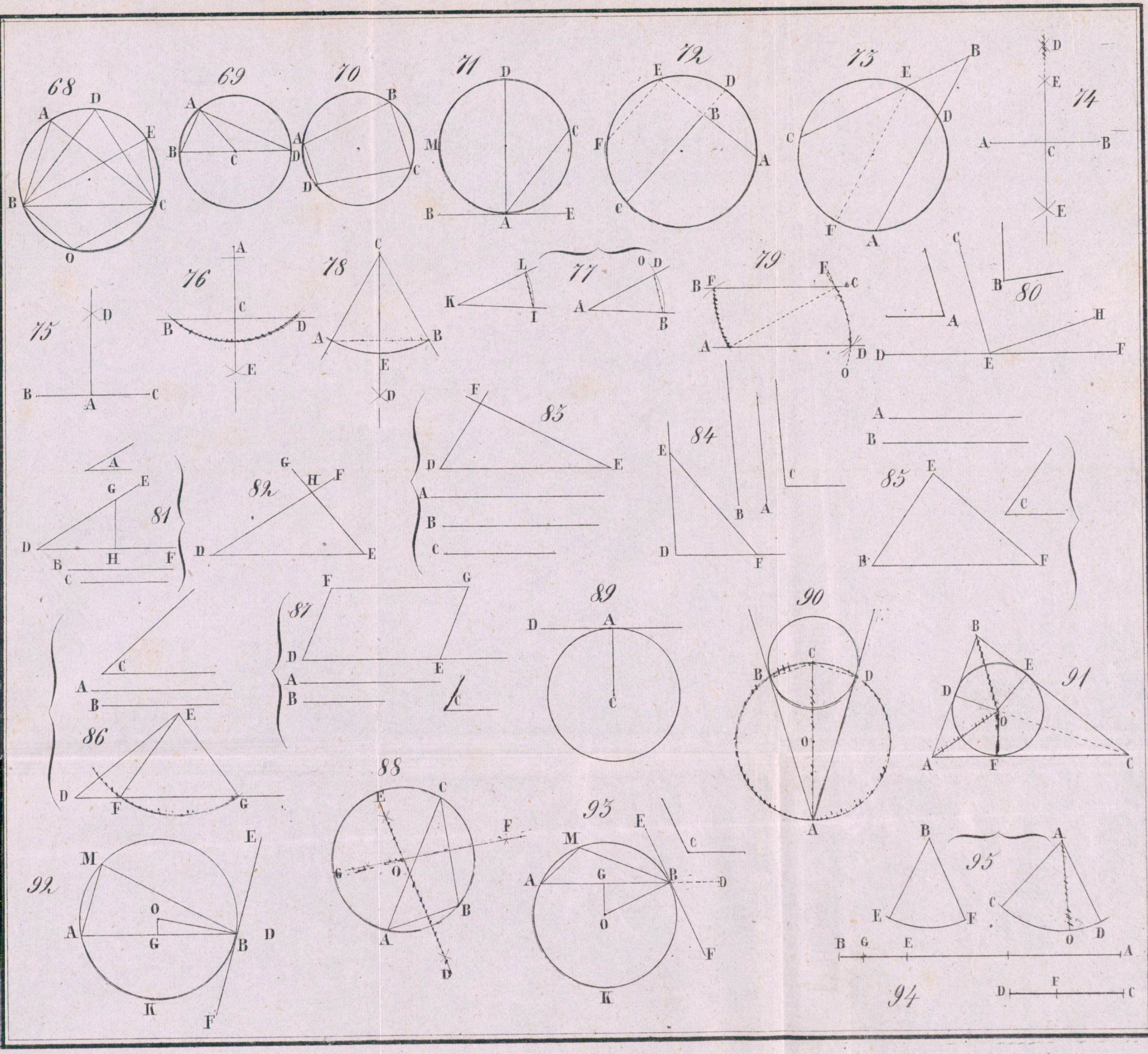
w Lito: J.V. Fleck & Co.

Tabl. 2

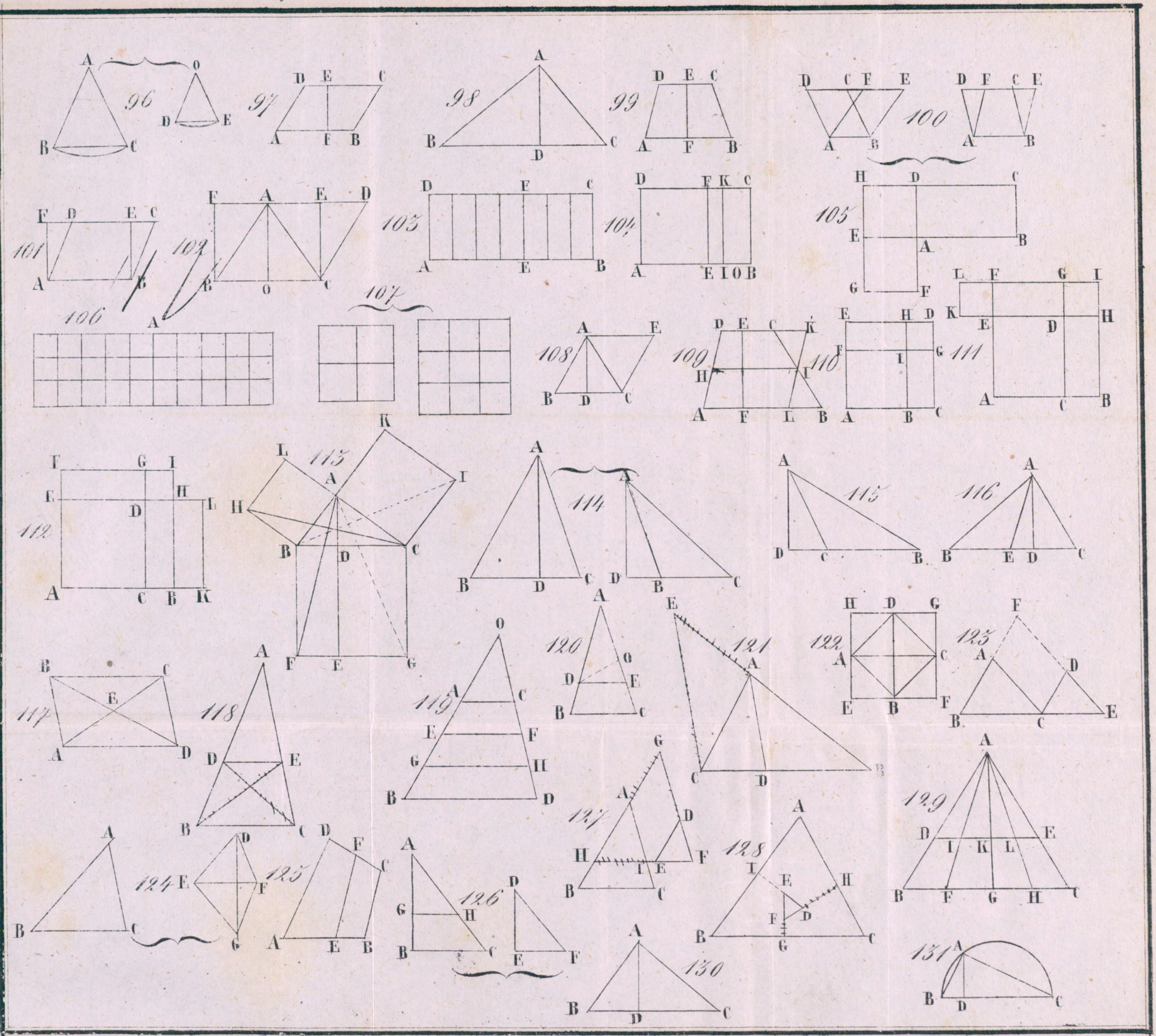


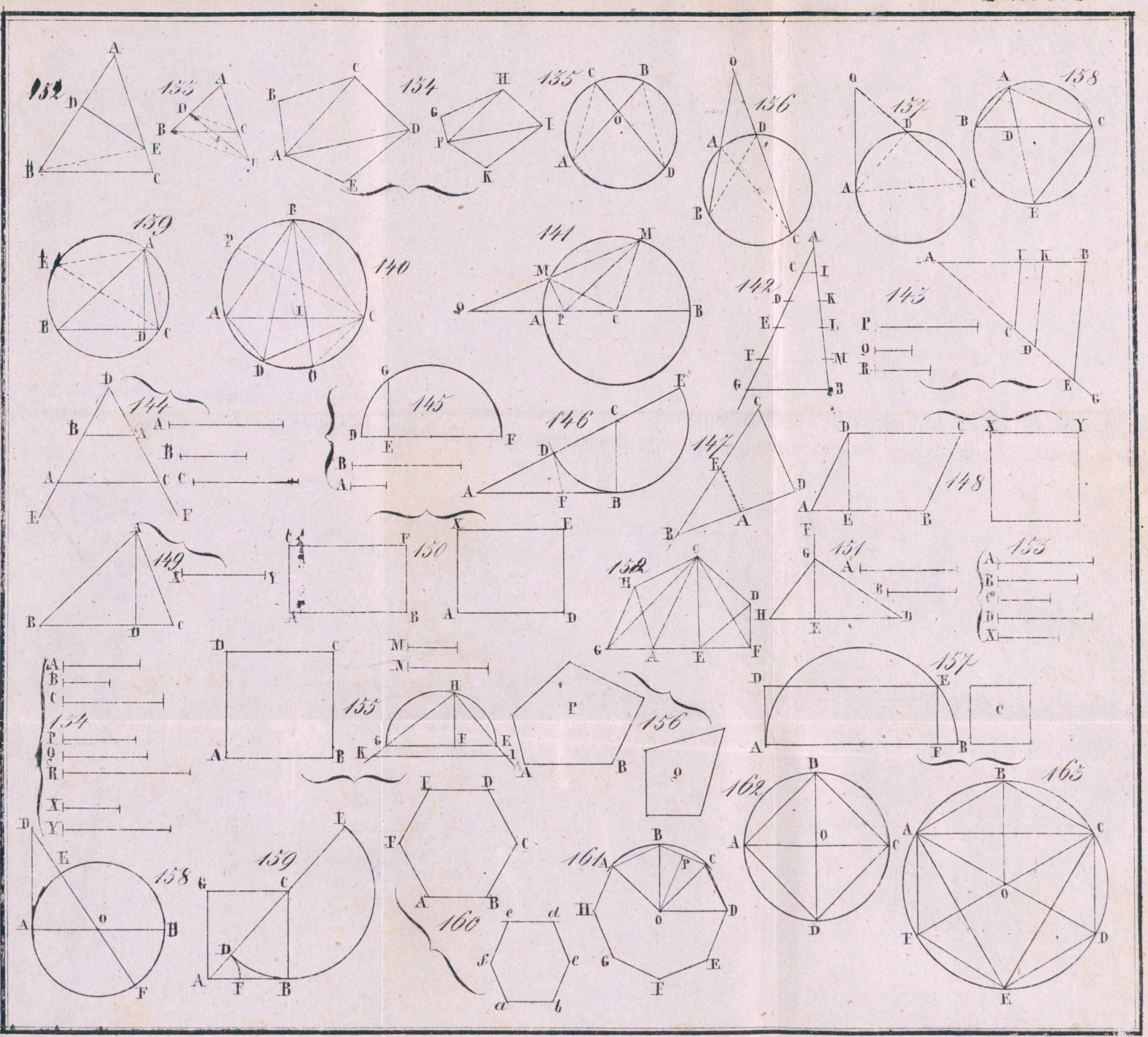
w Lito J.V. Fleck & C.o

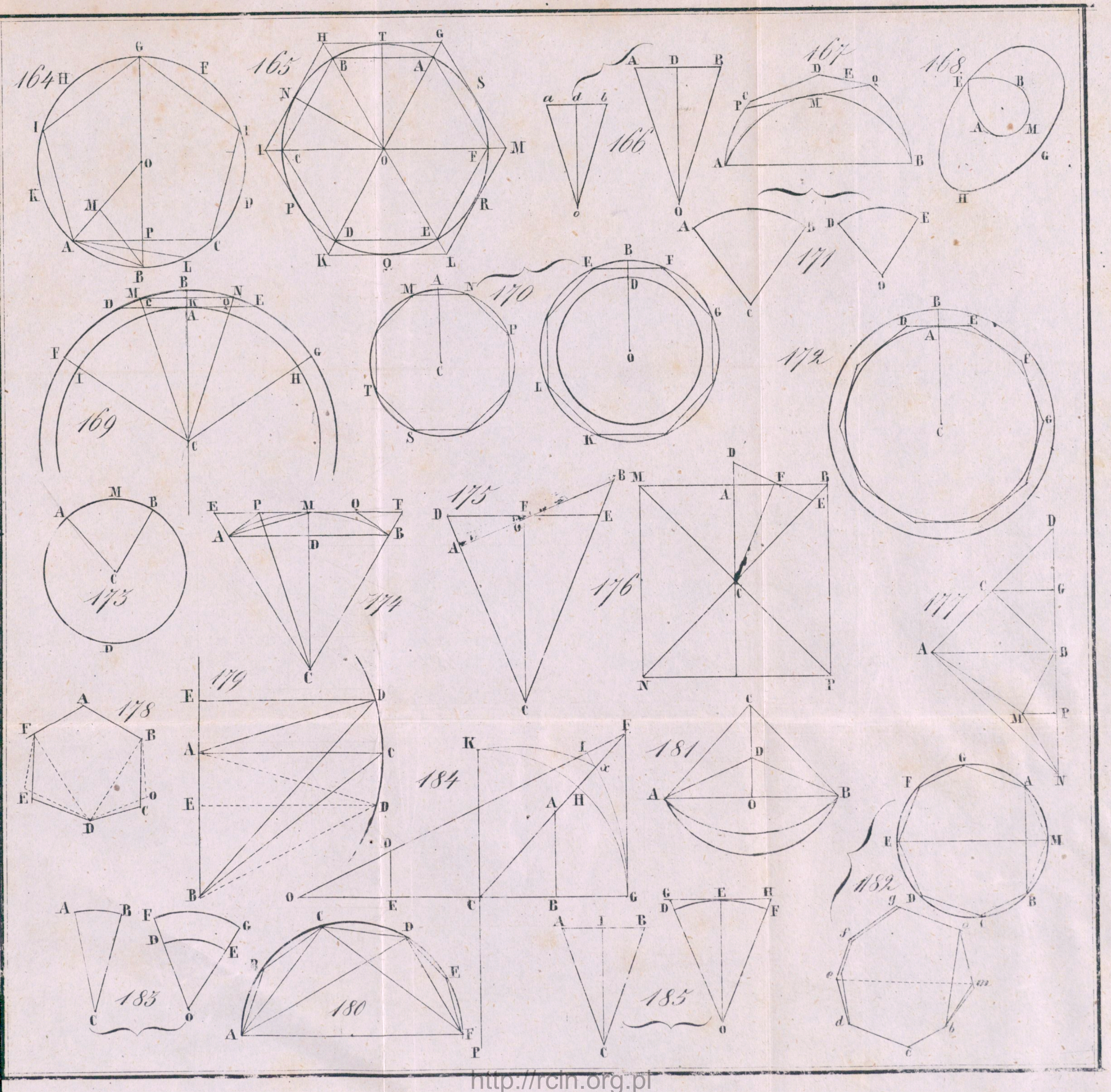
Tabl. 3


68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95

Tabl. 4


96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131




164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185