Lehrbuch

der

Differential- und Integralrechnung

von

Louis Navier,

Mitglied der Academie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, ꝛc.

Mit Zusätzen von Liouville.

Deutsch herausgegeben, und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet

von

Dr. Theodor Wittstein,

Lehrer an der Königlichen Cadetten-Anstalt, der Königlichen Militair-Academie und der städtischen Handelsschule zu Hannover.

Zweiter Band.

Zweite vermehrte Auflage.

Hannover.
Hahn'sche Hofbuchhandlung.
1854.

Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorrede.

Aus einem ähnlichen Bedürfnisse, wie diese deutsche Bearbeitung des Navier'schen Lehrbuchs, ist auch die als Anhang diesem zweiten Bande beigefügte Abhandlung hervorgegangen, in welcher ich dem mir geäußerten Wunsche zu entsprechen gesucht habe, den Schülern der hiesigen polytechnischen Schule eine möglichst klare und einfache Einleitung in das Verständniß der Methode der kleinsten Quadrate darzubieten. Man findet hier im Wesentlichen eine elementare Reproduction der ursprünglichen Darstellung des berühmten Erfinders der Methode, welche in den Schriften enthalten ist:

Gauss, theoria motus corporum coelestium. 1809. Lib. II. Sect. III.,

Gauß, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (in der Zeitschrift für Astronomie, März und April 1816),

unter Zuziehung der Abhandlung von Encke in den Berliner astronomischen Jahrbüchern für 1834. 1835. 1836, und mit Ausschließung aller derjenigen rein theoretischen Speculationen von Gauß, Laplace u. A. über das Vorkommen der Beobachtungsfehler, welche die Gestalt der Function vollkommen unbestimmt lassen, durch deren Hülfe die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers in ihrer Abhängigkeit von diesem Beobachtungsfehler ausgedrückt wird. Nur in Beziehung auf die Grundlegung der Methode habe ich es vorgezogen, den Gang des Erfinders zu verlassen und mich an die Schrift zu halten:

Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1837,

was ich glaube hier mit einigen Worten rechtfertigen zu müssen.

So lange man den Satz vom arithmetischen Mittel als ein Axiom der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde legt, so hat man damit streng genommen nichts anderes ausgesagt, als daß in allen Gattungen von Beobachtungen, in denen man bei der Aufsuchung einer einzigen unbekannten Constante aus beobachteten Werthen derselben sich des arithmetischen Mittels zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes dieser Constante bedient, die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auch auf alle complicirteren Aufgaben gerechtfertigt ist, welche die Bestimmung beliebig vieler unbekannten Constanten aus den beobachteten Werthen von beliebigen Functionen dieser Constanten fordern. Die Zulässigkeit der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Werthe unbekannter Constanten wird also in jedem einzelnen Falle abhängig gemacht von der Zulässigkeit eines gewissen besonderen Falles dieser Methode, welcher Fall zwar der einfachste unter allen möglichen ist, für dessen Zulässigkeit selbst jedoch keinerlei Art von Kriterium gegeben wird, sondern lediglich dem Meinen und Dafürhalten die Entscheidung anheimgestellt bleibt. Man kann zugestehen, daß dem Erfinder der Methode eine solche Zurückführung ihrer Anwendbarkeit bei der ersten Darstellung seiner Erfindung vollkommen frei stand; wurde ja damit die Methode selbst wenigstens vorläufig sicher gestellt, nämlich auf eine Thatsache gestützt, der man im täglichen Leben, wenn auch ohne ein deutliches Bewußtsein des Grundes, die Anerkennung niemals versagt. Aber offenbar war hiedurch die Frage nach der Begründung des Satzes vom arithmetischen Mittel keineswegs erledigt, sondern nur erst vertagt; d. h. es blieb noch die Forderung offen, durch tieferes Eingehen auf die Natur und die Entstehung der (zufälligen) Beobachtungsfehler eine so allgemeine Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate zu Tage zu fördern, daß darin gleichmäßig die einfachsten wie die verwickeltsten Aufgaben, welche man dieser Methode unterlegen mag, die Sphäre ihrer Zulässigkeit gezeichnet finden. Solches scheint mir auf eine höchst einfache Weise der von Hagen eingeschlagene Weg zu leisten, welcher sich auf die Annahme stützt: „Der Beobachtungsfehler ist die algebraische Summe aus einer unendlich großen Anzahl elementarer Fehler, die alle gleich groß sind, und von denen jeder einzelne eben so leicht positiv, wie negativ sein kann.“ Mit anderen Worten die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur

Bestimmung unbekannter Constanten wird überall gerechtfertigt sein, wo die hier ausgesprochene Annahme über die Natur der Beobachtungsfehler als zulässig angesehen werden darf; oder vielmehr sie wird (da streng genommen dieser Annahme niemals Genüge geschehen kann) desto mehr gerechtfertigt sein, je näher in dem einzelnen Falle diese Annahme mit der Natur der vorhandenen Beobachtungsfehler zusammenstimmt. Hierin liegt mithin das Kennzeichen für die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate ausgedrückt, welches aller numerischen Rechnung voraufgehen muß, und welches, wie man leicht sieht, immer noch wenigstens die Möglichkeit offen läßt, daß auch der Satz vom arithmetischen Mittel vielleicht nicht in allen denkbaren Fällen zulässig sei, wie man sonst anzunehmen geneigt ist.

Es kann nicht in Abrede genommen werden, daß die Hagen'sche Hypothese, so wie sie hier benutzt worden ist, noch gegründete Bedenken zuläßt und daß ihre vorzüglichste Eigenschaft eben nur darin besteht, daß sie die einfachste ist, welche man machen kann, und die auf ihr beruhende Rechnung sich so außerordentlich einfach gestaltet. Eine tiefere und erschöpfendere Behandlung des fraglichen Gegenstandes hat übrigens, in gleicher Anerkennung der in der Theorie gebliebenen Lücke, Bessel in einer Abhandlung geliefert (Astronom. Nachrichten 1838, Band XV. Nr. 358. 359.), welche ebenfalls von der Voraussetzung ausgeht, daß eine große Anzahl von Ursachen zur Hervorbringung des Beobachtungsfehlers zusammenwirken, daneben aber die Gesetze, nach welchen die einzelnen Fehlerursachen wirken, vollkom=

men unbestimmt läßt und nur die Annahme macht, daß unter den aus den einzelnen Ursachen hervorgehenden mittleren Fehlern keiner die übrigen beträchtlich übertreffe. Als Ergebniß der Untersuchung findet sich hier wieder dasselbe Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, von welchem Gauß zuerst gezeigt hat, daß es das von der Vorschrift des arithmetischen Mittels geforderte ist. Man sieht leicht, in wie fern diese Bessel'sche Untersuchung einen Schritt tiefer auf das Wesen der Sache eingeht als diejenige Hagen's, indem nämlich der von Hagen sogenannte elementare Fehler hier nicht wie eine als gegeben vorauszusetzende Größe erscheint, sondern nur als mittlerer Fehler gedacht wird, hervorgehend aus einer Fehlerursache, deren Wirkungsgesetz vollkommen unbestimmt gelassen wird. Es muß indessen genügen, alle diejenigen Leser, deren theoretisches Bedürfniß über die Gränzen der hier gelieferten Abhandlung hinausgeht, auf die angezeigte Untersuchung Bessel's aufmerksam gemacht zu haben, da der Gang derselben sich nicht wohl zu einer elementaren Wiedergabe eignet.

Schließlich bemerke ich, daß ich in Bezug auf die Schärfe der Begriffsbestimmungen einer Abhandlung von Reuschle über die Methode der kleinsten Quadrate, in Crelle's Journal 1843. Band XXVI. Heft 4., wesentliche Dienste verdanke.

Hannover im Januar 1849.

Zur zweiten Auflage.

Gleichwie in dem ersten Bande, sind auch dem Texte des zweiten Bandes in dieser neuen Auflage hin und wieder kleine Anmerkungen und Zusätze eingeschoben worden, sowohl in dem Lehrbuche selbst, als auch in dem Anhange über die Methode der kleinsten Quadrate. Ich hoffe, daß dadurch überall das Verständniß gefördert sein möge. Dem Anhange eine größere Ausführlichkeit zu geben als bisher, namentlich in der Zahl der beizufügenden Beispiele, habe ich indessen Bedenken getragen, weil dadurch der Umfang desselben ohne Verhältniß würde angewachsen sein.

Hannover im October 1854.

Inhalt des zweiten Bandes.

Differential- und Integralrechnung.

XXX. Bestimmte Integrale. Differentiation und Integration unter dem Zeichen $\int$.

§. 342. Ein bestimmtes Integral hat die Gestalt

$$\int_a^b f(\alpha)\, d\alpha,$$

wo α die Veränderliche bezeichnet, $f(\alpha)$ irgend eine Function von α, und a und b zwei Constanten. Vermöge dessen, was im **XXVIII.** Abschnitte gesagt worden ist, hat dieser Ausdruck im allgemeinen einen bestimmten constanten Werth; und will man sich von demselben ein geometrisches Bild machen, so kann man ihn wie die Darstellung der Fläche einer Curve ansehen, deren Abscisse α und deren Ordinate $f(\alpha)$ ist, welche Fläche durch die Abscissenachse, die Curve und diejenigen beiden Ordinaten begränzt wird, denen die Abscissen $\alpha = a$ und $\alpha = b$ zugehören. Man kann den Werth jenes Ausdrucks immer entweder genau oder angenähert angeben, mit Ausnahme der Fälle, wo die Ordinate $f(\alpha)$ für einen oder mehrere Werthe von α innerhalb der Gränzen a und b unendlich groß wird; diese Fälle erfordern größtentheils eine eigene Untersuchung.

§. 343. Dieser Auffassung gegenüber kann man die Betrachtung des bestimmten Integrals unter einen allgemeineren Gesichtspunkt bringen, wenn man annimmt, daß die mit $f(\alpha)$ bezeichnete Function eine Veränderliche x in sich enthalte. Alsdann hört der obige Ausdruck auf, eine Constante zu bedeuten; er wird eine Function der Veränderlichen x, und der Werth dieser Function hängt ab von der Form der Function $f(\alpha)$ und von den Gränzen a und b. Denn wenn man die angezeigte bestimmte Integration in Bezug auf α ausgeführt hat, so ist die Größe α verschwunden, und es bleibt nur noch eine Function, welche die einzige Veränderliche x enthält.

Die Veränderliche x kann auch in dem Ausdrucke der Gränzen, welche mit a und b bezeichnet worden sind, enthalten sein. Der allgemeine Ausdruck eines bestimmten Integrals, welches eine Function von x darstellt, ist sodann

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

§. 344. Hieran schließt sich die Aufgabe, diese neue Art von Function zu differentiiren, d. h. die Zunahme dX zu finden, welche der unendlich kleinen Zunahme dx der Veränderlichen x entspricht. Nimmt man zuerst an, die Gränzen des bestimmten Integrals seien die Constanten a und b, so hat man

$$X + dX = \int_a^b d\alpha \left[f(x, \alpha) + \frac{d.f(x, \alpha)}{dx} dx \right]$$

und

$$\frac{dX}{dx} = \int_a^b d\alpha \,.\, \frac{d.f(x, \alpha)}{dx}.$$

Wenn man ferner die beiden Functionen φx und ψx als Gränzen ansieht, so erhält man

$\int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha = F(x,\alpha)$ — a b welche statt α zu setzen seien
seien Functionen von x.

$\int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha = F(x,b) - F(x,a)$

$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha = \frac{d.F(x,b)}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d.F(x,b)}{dx} - \frac{dF(x,a)}{da}\frac{da}{dx} - \frac{dF(x,a)}{dx}$

$$X + dX = \int_{\varphi x + \frac{d.\varphi x}{dx} dx}^{\psi x + \frac{d.\psi x}{dx} dx} d\alpha \left[f(x, \alpha) + \frac{d.f(x, \alpha)}{dx} dx \right]$$

d. h.

$$X + dX = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha \left[f(x,\alpha) + \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} dx \right]$$

$$- \left[f(x, \varphi x) + \frac{d.f(x,\varphi x)}{dx} dx \right] \frac{d.\varphi x}{dx} dx$$

$$+ \left[f(x, \psi x) + \frac{d.f(x,\psi x)}{dx} dx \right] \frac{d.\psi x}{dx} dx$$

und daraus durch Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung

$$dX = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x, \alpha)}{dx} dx - f(x, \varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx} dx$$

$$+ f(x, \psi x) . \frac{d.\psi x}{dx} dx$$

folglich

$$\frac{dX}{dx} = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x, \alpha)}{dx} - f(x, \varphi x) . \frac{d\, \varphi x}{dx} + f(x, \psi x) . \frac{d.\psi x}{dx} .$$

§. 345. Das vorstehende Resultat wird anschaulich, wenn man sich das bestimmte Integral

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} f(x, \alpha)\, d\alpha$$

wie den Ausdruck der Fläche *PMNQ*, Fig. 54, einer Curve *MN* denkt, deren Ordinate $f(x, \alpha)$ ist, indem diese Fläche zwischen den Abscissen $oP = \varphi x$ und $oQ = \psi x$ genommen

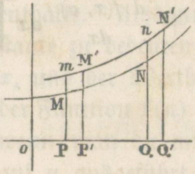
$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{dx}\, d\alpha + f(x,b) \frac{db}{dx} - f(x,a) \frac{da}{dx}$$

$$\frac{d.F(x,b)}{db} = f(x,b) \quad \frac{d.F(x,\alpha)}{d\alpha} = f(x,\alpha) \text{ weil } \frac{d.F(x,\alpha)}{d\alpha} = f(x,\alpha) \text{ ist}$$

$$\frac{d F(x,b)}{dx} - \frac{d F(x,\alpha)}{dx}$$ ist offenbar gleich dem partiellen Differentialquotienten von $\int_a^b f(x,\alpha)\, d\alpha$ nach x, wenn man a und b als unabhängig von x ansieht =

$$= \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{dx} d\alpha$$

Fig. 54.



wird. 1) Durch die alleinige Aenderung von x in $f(x, \alpha)$ wird die Curve nach mn verlegt, und die Fläche wächst um den Raum $MmnN$, der durch $\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d . f(x, \alpha)}{dx} dx$ ausgedrückt wird. 2) Durch die alleinige Aenderung von x in der unteren Gränze φx vermindert sich die Fläche um den Raum PMP', der durch $f(x, \varphi x) \frac{d . \varphi x}{dx} dx$ ausgedrückt wird. 3) Endlich durch die alleinige Aenderung von x in der oberen Gränze ψx vergrößert sich die Fläche um den Raum QNQ', der durch $f(x, \psi x) \frac{d . \psi x}{dx} dx$ ausgedrückt wird. Die gleichzeitige Aenderung von x in den drei Functionen $f(x, \alpha)$, φx und ψx verwandelt überdies die Fläche $PMNQ$ in $P'M'N'Q'$. Die vollständige Aenderung dieser Fläche wird also durch die drei Theile der obigen Formel ausgedrückt, wenn man die Räume MmM' und NnN' vernachläſſigt, welche unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung sind.

§. 346. Man erkennt aus dem Vorigen, daß man aus der Gleichung

$$X = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha,$$

wo die Gränzen a und b constant angenommen werden, das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von der Function X erhält, wenn man unter dem Zeichen $\int$ statt der Function $f(x, \alpha)$ das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von dieser Function, in Bezug auf x genommen, an die Stelle setzt. Es ist leicht hieraus zu schließen, daß, wenn man beide Seiten der nämlichen Gleichung mit dx multiplicirt und sodann integrirt, man erhalten wird

$$\int X dx = \int_a^b d\alpha \,.\, \int f(x,\,\alpha)\, dx.$$

Diese Differentiationen und Integrationen unter dem Integralzeichen des bestimmten Integrals geben ein Mittel ab, die Werthe gewisser Integrale herzuleiten, indem man von den Werthen anderer bereits bekannten Integrale ausgeht.

Herleitung einiger bestimmten Integrale.

§. 347. Die Herleitung der Werthe der bestimmten Integrale, und die Nachweisung der Beziehungen, welche unter diesen Werthen stattfinden, haben die Mathematiker vielfach beschäftigt. Hier können über diesen Gegenstand nur einige Einzelheiten mitgetheilt werden.

Zunächst bemerke man, daß schon die Gleichung des §. 304

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\, dx$$

häufig zur Vereinfachung und selbst zur Auffindung des bestimmten Integrals führen kann. Es sei nämlich x_1 das arithmetische Mittel von x_0 und x_ω, und die Function $f(x)$ sei von der Beschaffenheit, daß sie zu beiden Seiten dieses Mittels paarweise gleiche Werthe von gleichem Vorzeichen liefert, so werden die beiden Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\, dx$$

einander gleich sein, und man hat

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\, dx = 2\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Man hat also nur nöthig, das eine dieser beiden Integrale zu berechnen und seinen Werth zu verdoppeln. Z. B.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x^2\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2\, dx.$$

Wenn von dem Werthe $x = x_1$ aus die Function $f(x)$ gleiche absolute Werthe, aber entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, so sind die beiden Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\, dx$$

gleichfalls einander entgegengesetzt, und man hat folglich

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\, dx = 0.$$

Z. B.

$$\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx = 0.$$

§. 348. Am einfachsten findet man immer ein vorgelegtes bestimmtes Integral, wenn die unbestimmte Integration der Function, welche unter dem Zeichen $\int$ steht, ausgeführt werden kann. Einige Beispiele werden hierüber hinreichen.

Man hat, (mit Weglassung der Constante)

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

folglich, wenn der Exponent m positiv und größer als die Einheit vorausgesetzt wird,

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1},\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^m} = \infty.$$

Aus dem ersten dieser beiden Integrale folgt, vermöge des vorigen Paragraphen

$$\int_{-1}^1 x^m\,dx = \frac{2}{m+1} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem m gerade oder ungerade ist.

§. 349. Ferner hat man die Gleichungen

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a},$$

aus denen folgt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{ax}\,dx = \infty,\quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},$$

Die Integration durch Theile gibt

$$\int dx\,.\,x^{a-1}\,e^{-x} = -\,x^{a-1}\,e^{-x} + (a-1)\int dx\,.\,x^{a-2}\,e^{-x},$$

folglich wird, wenn a eine positive ganze Zahl ist

$$\int_0^\infty dx\,.\,x^{a-1}\,e^{-x} = 1.2.3.4\ldots(a-1).^{*})$$

---

*) Man sehe den Zusatz III. am Schlusse dieses Bandes, wo dieses Integral ausführlicher betrachtet wird.

§. 350. Die Gleichungen

$$\int dx \,.\, \sin ax = -\frac{\cos ax}{a}, \quad \int dx \,.\, \cos ax = \frac{\sin ax}{a}$$

geben

$$\int_0^\pi dx \,.\, \sin ax = \frac{1-\cos a\pi}{a}, \quad \int_0^\pi dx \,.\, \cos ax = \frac{\sin a\pi}{a}.$$

Also ist der Werth des ersten Integrals gleich $\frac{2}{a}$, wenn a eine ungerade ganze Zahl ist, dagegen gleich Null, wenn a eine gerade ganze Zahl ist. Das zweite Integral hat immer den Werth Null, wenn a eine ganze Zahl ist.

§. 351. Die Gleichungen

$$\int dx \,.\, x \sin ax = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$

$$\int dx \,.\, x \cos ax = \frac{x\sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2}$$

geben, wenn a eine ganze Zahl ist

$$\int_0^\pi dx \,.\, x \sin ax = -\frac{\pi\cos a\pi}{a}$$

$$\int_0^\pi dx \,.\, x \cos ax = \frac{\cos a\pi - 1}{a^2}.$$

Folglich wird das erste Integral, je nachdem a ungerade oder gerade ist, entweder $+\frac{\pi}{a}$ oder $-\frac{\pi}{a}$; und das zweite Integral entweder $-\frac{2}{a^2}$ oder 0.

§. 352. Aus den Gleichungen

$$\int dx \,.\, \sin x^2 = -\frac{\sin x\cos x}{2} + \tfrac{1}{2}x$$

$$\int dx \,.\, \cos x^2 = \frac{\sin x\cos x}{2} + \tfrac{1}{2}x$$

erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\,\sin x^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\cos x^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Allgemein geben die Reductionsformeln des §. 294

$$\int dx\,.\sin x^m = -\frac{\sin x^{m-1}\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx\,.\sin x_m^{m-2}$$

$$\int dx\,.\cos x^m = \frac{\sin x\cos x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx\,.\,\cos x^{m-2}$$

folgende Resultate: 1) Wenn m eine gerade ganze Zahl ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\sin x^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\cos x^m = \frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m}\,\frac{\pi}{2};$$

2) Wenn m eine ungerade ganze Zahl ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\sin x^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\cos x^m = \frac{2.4.6...(m-1)}{3.5.7...m}.$$

Es liegt in der Natur der Sache, daß die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\,\sin x^m \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\cos x^m$$

kleiner und kleiner werden, wenn die Zahl m zunimmt, mag diese Zahl übrigens gerade oder ungerade sein. Bezeichnet man also mit $2n$ eine gerade Zahl, so erhält man durch Vergleichung dreier auf einander folgenden Werthe jener Integrale die Relation

$$\frac{2.4.6...(2n-2)}{3.5.7...(2n-1)} > \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)},$$

woraus man schließt

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4.6.6...(2n-2)2n}{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)}$$

und

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2n}{1.3.3.5.5.7..(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)},$$

und da die Differenz dieser beiden letzten Werthe, mit wachsendem n, kleiner wird als jede angebbare Zahl, so hat man endlich, als Gränze,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}.$$

Diesen bemerkenswerthen Ausdruck für die Zahl π hat Wallis gegeben.

§. 353. Die Gleichungen

$$\int dx \,.\, e^{-ax} \sin bx = -e^{-ax}\,\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2+b^2}$$

$$\int dx \,.\, e^{-ax} \cos bx = -e^{-ax}\,\frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2+b^2}$$

welche aus §. 292 folgen, geben

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-ax} \sin bx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty dx \,.\, e^{-ax} \cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Je näher die Größe a dem Werthe Null gebracht wird, desto mehr nähern sich diese beiden Ausdrücke resp. den Gränzen $\frac{1}{b}$ und 0. Nichts desto weniger sind die Werthe der beiden Integrale

$$\int_0^\infty dx \,.\, \sin bx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty dx \,.\, \cos bx$$

nothwendig unbestimmt.

§. 354. Es würde überflüssig sein, diese Beispiele zu vermehren, weil in ähnlichen Fällen die Aufsuchung der in Rede stehenden Werthe niemals Schwierigkeiten haben kann. Aber man hat auch selbst in solchen Fällen, wo die Function unter dem Zeichen $\int$ nicht integrirt werden kann, die

Werthe von einer großen Anzahl bestimmter Integrale ermittelt. Die Methoden, welche zu diesem Ziele führen, bestehen hauptsächlich darin: 1) die Werthe der gesuchten Integrale aus andern schon bekannten Integralen herzuleiten, durch Differentiation oder Integration unter dem Zeichen $\int$; 2) zwischen der Function, welche das vorgelegte Integral darstellt, und ihren Differentialen Beziehungen aufzusuchen, aus denen man auf die Natur jener Function zurückschließen kann; 3) von reellen Ausdrücken zu imaginären Ausdrücken überzugehen. Die Betrachtung der doppelten Integrale hat gleichfalls zu der Auffindung mehrerer wichtigen Resultate geführt. Die nachfolgenden Beispiele mögen von den hier angezeigten Methoden einen Begriff geben.

§. 355. Wenn man in der Gleichung des §. 348

$$\int_0^1 x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m},$$

indem man m größer als Eins voraussetzt, auf beiden Seiten mit dm multiplicirt und sodann von $m=n$ anfangend integrirt, so erhält man, gemäß dem §. 346

$$\int_0^1 dx\,.\,\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{lx} = l\frac{m}{n}.$$

§. 356. Die Gleichungen des §. 353

$$\int_0^\infty dx\,.\,e^{-ax}\sin bx = \frac{b}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty dx\,.\,e^{-ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

geben, wenn man mit da multiplicirt und sodann in Bezug auf a, von $a=c$ anfangend, integrirt,

$$\int_0^\infty dx\,.\,\frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin bx = \text{arc tang}\,\frac{a}{b} - \text{arc tang}\,\frac{c}{b}$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{b(a-c)}{b^2+ac},$$

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx = \tfrac{1}{2} l \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

§. 357. Setzt man $c=0$ und $a=\infty$, so wird aus diesen letzten Gleichungen

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin bx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos bx}{x} = \infty.$$

Es ist bemerkenswerth, daß das erste dieser beiden Integrale unabhängig von der Zahl b wird. In der That, wenn man darin $x=\frac{z}{b}$ setzt, so verwandelt sich dasselbe in $\int_0^\infty dz \cdot \frac{\sin z}{z}$ wo b verschwunden ist.

§. 358. Es sei das Integral vorgelegt

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-x^2}.$$

Multiplicirt man dasselbe mit einem anderen gleichen Integral, in welchem y statt x geschrieben werden mag, so hat man

$$\int_0^\infty dy \cdot e^{-y^2} \cdot \int_0^\infty dx \cdot e^{-x^2} = \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx . e^{-(x^2+y^2)}.$$

Man setze $y=xt$, wo t eine neue Veränderliche bezeichnet. Für jeden Werth, welchen x innerhalb der Gränzen 0 und ∞ annehmen mag, werden den Werthen von 0 bis ∞ für y gleichfalls Werthe von 0 bis ∞ für t entsprechen; und überdies wird man haben $dy=xdt$. Der vorstehende Ausdruck verwandelt sich also in

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty dx \cdot x\, e^{-(1+t^2)x^2}.$$

Führt man zuerst die Integration in Bezug auf x aus, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2};$$

und da $\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc tang} t$, folglich $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, so erhält man schließlich für das Quadrat des Integrals $\int_0^\infty dx . e^{-x^2}$ den Werth $\frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\int_0^\infty dx . e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

welcher bemerkenswerthe Ausdruck vielfache Anwendung findet.

Man kann daraus wie im §. 347 schließen

$$\int_{-\infty}^\infty dx . e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

§. 359. Man betrachte das Integral

$$U = \int_0^\infty dx . \cos rx . e^{-a^2x^2}.$$

Differentiirt man in Bezug auf r, so findet man

$$\frac{dU}{dr} = -\int_0^\infty dx . x \sin rx . e^{-a^2x^2}.$$

Aber die Integration durch Theile gibt

$$\int dx . x \sin rx . e^{-a^2x^2} = -\frac{1}{2a^2} \sin rx . e^{-a^2x^2} + \frac{r}{2a^2} \int dx . \cos rx . e^{-a^2x^2}$$

und da das Glied außerhalb des Zeichens $\int$ für die beiden Gränzen 0 und ∞ zu Null wird, so erhält man

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{r}{2a^2} U.$$

Diese Gleichung läßt die Natur der Function U erkennen, welche nothwendig sein muß*)

---

*) Man vergleiche unten §. 385.

$$U = Ae^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

wo A eine Constante bezeichnet. Man hat also

$$\int_0^\infty dx . \cos rx . e^{-a^2x^2} = Ae^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Um die Constante A zu bestimmen, setze man $r=0$, welches gibt

$$\int_0^\infty dx . e^{-a^2x^2} = A.$$

Aber aus der Gleichung $\int_0^\infty dt . e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ des vorigen Paragraphen erhält man, wenn man $t = ax$ setzt,

$$\int_0^\infty dx . e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi};$$

mithin wird schließlich der Ausdruck des vorgelegten Integrals

$$\int_0^\infty dx . \cos rx . e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} . e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

§. 360. Es sei das Integral vorgelegt

$$\int_0^\infty dx . \frac{\cos ax}{1+x^2}.$$

Man nehme anfangs zur oberen Gränze $\frac{2k\pi}{a}$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, und setze

$$U = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx . \frac{\cos ax}{1+x^2}.$$

Differentiirt man zweimal nach einander in Bezug auf a nach Vorschrift des §. 344, so kommt

$$\frac{dU}{da} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \,.\, \frac{x \sin ax}{1+x^2} - \frac{2k\pi}{a^2 + 4k^2\pi^2}$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \,.\, \frac{x^2 \cos ax}{1+x^2} + \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}$$

und daraus erhält man

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \,.\, \cos ax - \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}$$

oder, da das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung den Werth Null hat,

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = -\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Nimmt man nun an, k sei unendlich groß, so wird der Betrag auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden. Bedeutet also jetzt U das gegebene Integral, so hat man

$$U = \frac{d^2U}{da^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Natur der Function U, deren allgemeinster Ausdruck ist*)

$$Ae^{-a} + Be^{a},$$

wo A und B zwei Constanten bedeuten. Man erkennt aber leicht, daß hier $B = 0$ sein muß, weil der Werth des vorgelegten Integrals nicht mit der Zahl a unbegränzt wachsen kann. Man hat also nur

$$\int_0^{\infty} dx \,.\, \frac{\cos ax}{1+x^2} = A\,e^{-a}.$$

---

*) Man sehe unten §. 435

Um die Constante A zu bestimmen, setze man $a=0$, und da man sodann hat $\int_0^\infty \frac{dx^2}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}=A$, so wird schließlich

$$\int_0^\infty dx \, . \, \frac{\cos ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

§. 361. Setzt man in dieser Gleichung $\frac{x}{m}$ statt x und zugleich ma statt a, so erhält man

$$\int_0^\infty dx \, . \, \frac{\cos ax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}e^{-ma}.$$

Daraus folgt weiter, durch Differentiation in Bezug auf a, das nicht minder bemerkenswerthe Resultat

$$\int_0^\infty dx \, . \, \frac{x \sin ax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ma}.$$

§. 362. Um an einem Beispiele die Anwendung des Imaginären zu zeigen, sei gegeben

$$\int_{-\infty}^\infty dx \, . \cos 2rx \, . \, e^{-x^2}.$$

Setzt man für $\cos 2rx$ seinen Ausdruck durch imaginäre Exponentialgrößen, so verwandelt sich dieses Integral in

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \, . \, e^{-x^2+2rx\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \, . \, e^{-x^2-2rx\sqrt{-1}},$$

oder, wenn man mit e^{-r^2} multiplicirt und dividirt, um die Exponenten von e unter dem Zeichen $\int$ in vollständige Quadrate zu verwandeln,

$$\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,.\,e^{-(x-r\sqrt{-1})^2}+\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,.\,e^{-(x+r\sqrt{-1})^2}$$

Aber nach §. 358 hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,.\,e^{-x^2}=\sqrt{\pi}.$$

folglich auch

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,.\,e^{-(x+b)^2}=\sqrt{\pi},$$

für jeden beliebigen Werth der Constante b. Setzt man also $b=\pm r\sqrt{-1}$, so wird der Ausdruck des vorgelegten Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,.\cos 2rx\,.\,e^{-x^2}=\sqrt{\pi}\,.\,e^{-r^2}.$$

Daraus folgt sogleich

$$\int_{0}^{\infty}dx\,.\cos 2rx\,.\,e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-r^2},$$

welches Resultat mit demjenigen des §. 359 übereinstimmt.

XXXI. Integration der Differentialfunctionen der ersten Ordnung von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Bedingungen der Integrabilität.

---

§. 363. Wenn eine Differentialfunction von einer einzigen Veränderlichen gegeben ist, so muß dieselbe unter die

Form Xdx fallen, wo X eine Function bezeichnet, welche die Veränderliche x nebst beliebigen Constanten in sich enthält. Die Function Xdx kann sodann immer wie das Differential einer gewissen Function von x angesehen werden. Denn entweder ist Xdx das Differential einer bekannten Function von x, und in diesem Falle läßt sich die Integration unmittelbar ausführen, oder man kann wenigstens diese Integration dadurch zu Stande bringen, daß man die Function X in eine nach ganzen Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe entwickelt und von jedem Gliede das Integral nimmt.

§. 364. Es sei dagegen eine Differentialfunction der ersten Ordnung von zwei Veränderlichen x und y gegeben, so wird dieselbe die Form haben $Pdx + Qdy$, wo P und Q zwei beliebige Functionen von x und y bedeuten. Eine solche Function kann nicht allgemein wie das Differential einer Function von x und y angesehen werden; dieses wird nur dann der Fall sein, wenn die beiden Größen P und Q einer gewissen Bedingung Genüge leisten. Denn es sei U irgend eine Function von x und y, so wird das vollständige Differential von U, d. h. diejenige Zunahme von U, welche den gleichzeitigen Zunahmen dx und dy von x und y entspricht, nach den Entwickelungen des IV. Abschnitts ausgedrückt durch

$$dU = \frac{dU}{dx}\,dx + \frac{dU}{dy}\,dy,$$

wo $\frac{dU}{dx}$ und $\frac{dU}{dy}$ resp. die Differentialverhältnisse der Function U in Bezug auf x allein, und in Bezug auf y allein, bedeuten. Soll also die gegebene Function $Pdx + Qdy$ aus der Differentiation irgend einer Function U hervorgegangen sein, so muß man setzen können

$$P = \frac{dU}{dx}, \quad Q = \frac{dU}{dy}.$$

Aber nach §. 69 ist stets $\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}$; mithin muß man gleichfalls haben

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

welche Gleichung die Relation ausdrückt, die unter der Function P und Q bestehen muß, wenn der Ausdruck $Pdx + Qdy$ das Differential einer Function von x und y sein soll.

§. 365. Die gegebene Function sei $Pdx + Qdy + Rdz$, wo P, Q, R irgend welche Functionen von den Veränderlichen x, y, z bedeuten. Versteht man unter U eine Function von x, y, z, so hat man

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz,$$

und überdies

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}, \quad \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d^2U}{dzdx}, \quad \frac{d^2U}{dydz} = \frac{d^2U}{dzdy}.$$

Mithin kann die gegebene Function nur dann das Differential einer gewissen Function von x, y, z sein, wenn die Größen P, Q, R den Bedingungen genügen

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Aehnliche Bedingungen findet man für eine größere Anzahl von Veränderlichen.

§. 366. Wenn die gegebenen Differentialfunctionen den hier aufgestellten Bedingungen der Integrabilität Genüge leisten, so erhält man ihr Integral auf folgende Weise.

Es sei gegeben

$$dU = Pdx + Qdy,$$

so muß das Integral U nothwendig von der Form sein

$$U = \int Pdx + Y,$$

wo Y eine Function bedeutet, welche allein von der Veränderlichen y abhängig ist. Um diese Function zu finden, zieht man aus der letzteren Gleichung

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy},$$

und da diese Größe gleich Q sein muß, so hat man

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx,$$

woraus

$$Y = C + \int dy \left(Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx \right).$$

Das gesuchte Integral ist also*)

$$U = C + \int P dx + \int dy \left(Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx \right).$$

§. 367. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Ausführbarkeit dieser Integration das Vorhandensein der im §. 364 angezeigten Bedingung voraussetzt. Denn damit die Größe $Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx$ eine Function von y allein sei, ist es nothwendig, daß das Differential derselben in Bezug auf x den Werth Null habe, d. h. daß

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0.$$

§. 368. Es sei z. B. die Differentialfunction gegeben

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Da man hat

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

so genügt die vorgelegte Function den Bedingungen der Integrabilität. Ferner gibt die angezeigte Methode

---

*) Wenn P nur Function von x, also auch Q nur Function von y ist, so wird einfach

$$U = C + \int P dx + \int Q dy.$$

$$U=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}+Y=\text{arc tang}\,\frac{x}{y}+Y$$

und

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{x}{y^2+x^2}+\frac{dY}{dy}.$$

Aber die Vergleichung mit der gegebenen Function lehrt, daß $\frac{dY}{dy}$ gleich Null sein muß. Folglich ist das gesuchte Integral nur

$$U=C+\text{arc tang}\,\frac{x}{y}.$$

§. 369. Es sei das Differential gegeben

$$dU=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right).$$

Die Bedingung der Integrabilität wird erfüllt; denn man hat

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Man setzt also

$$U=\int dx\,.\,\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)x}+Y$$

$$=\int dx\,.\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\right)+Y$$

$$=\text{arc tang}\,\frac{x}{y}+lx+Y.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy}$$

und durch Vergleichung mit dem gegebenen Differential

$$-\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy}$$

folglich

$$\frac{dY}{dy}=-\frac{1}{y},\quad Y=C-ly.$$

Mithin wird das gesuchte Integral

$$U = C + \text{arc tang}\,\frac{x}{y} + l\,\frac{x}{y}.$$

§. 370. Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf diejenigen Differentialfunctionen übertragen, welche drei oder mehr Veränderliche enthalten. Es sei

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz$$

ein gegebenes Differential, welches den Bedingungen der Integrabilität, §. 365, Genüge leiste. Das Integral U muß nothwendig die Form haben

$$U = \int Pdx + Y,$$

wo Y eine Function der beiden Veränderlichen y und z bedeutet. Diese Gleichung gibt, wie oben,

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy},$$

und da diese Größe gleich Q sein muß, so hat man

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy}dx, \quad Y = \int dy\left(Q - \int \frac{dP}{dy}dx\right) + Z,$$

wo Z eine Function der Veränderlichen z allein bedeutet. Man hat also jetzt

$$U = \int Pdx + \int dy\left(Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx\right) + Z.$$

Diese Gleichung gibt weiter

$$\frac{dU}{dz} = \int \frac{dP}{dz}\,dx + \int dy\left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz}dx\right) + \frac{dZ}{dz},$$

und da diese letzte Größe gleich R sein muß, so wird die Function Z bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{dZ}{dz} = R - \int \frac{dP}{dz}\,dx - \int dy\left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz}\,dx\right)$$

woraus

$$Z = C + \int dz\left[R - \int \frac{dP}{dz}\,dx - \int dy\left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz}\,dx\right)\right].$$

Mithin ist endlich das gesuchte Integral

$$U = C + \int P dx + \int dy \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) +$$
$$+ \int dz \left[R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx \right) \right].$$

§. 371. Man kann auch hier leicht nachweisen, daß diese Entwickelung des Integrals das Vorhandensein der im §. 365 angezeigten Bedingungen der Integrabilität voraussetzt. Damit nämlich die Größe

$$Q - \int \frac{dP}{dy} dx$$

eine Function von y und z allein sei, muß ihr Differential in Bezug auf x genommen den Werth Null haben, d. h.

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0.$$

Damit ferner die Größe

$$R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx \right)$$

eine Function von z allein sei, müssen ihre Differentiale in Bezug auf x und in Bezug auf y genommen, einzeln gleich Null sein, d. h.

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{d^2Q}{dxdz} - \frac{d^2P}{dydz} \right) = 0$$
$$\frac{dR}{dy} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx - \frac{dQ}{dz} + \int \frac{d^2P}{dydz} dx = 0$$

Diese beiden letzten Gleichungen reduciren sich, mit Zuziehung der obigen Gleichung

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0,$$

auf

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = 0, \quad \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = 0,$$

und in diesen drei Gleichungen sind die Bedingungen des §. 365 wieder enthalten.

§. 372. Es sei z. B. gegeben

$$dU = -\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy - \frac{2z}{x^2+z^2}dz.$$

Diese Function entspricht den Bedingungen der Integrabilität; denn man hat

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} = \frac{4xz}{(x^2+z^2)^2}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} = 0.$$

Man wird also setzen

$$\begin{aligned} U &= -\int dx \frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + Y \\ &= \int dx \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+z^2} \right) + Y \\ &= l(x^2+y^2) - l(x^2+z^2) + Y. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck gibt weiter

$$\frac{dU}{dy} = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{dY}{dy},$$

und aus der Vergleichung dieses Werths mit der gegebenen Function erkennt man, daß $\frac{dY}{dy}$ gleich Null sein muß. Also kann Y nur noch die Veränderliche z enthalten. Man hat aber

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{2z}{x^2+z^2} + \frac{dY}{dz},$$

und aus der Vergleichung dieses Werths mit der gegebenen Function sieht man, daß auch $\frac{dY}{dz}$ gleich Null sein muß. Das gesuchte Integral ist also

$$U = C + l\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}.$$

§. 373. Es sei ferner gegeben

$$dU = -\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x} + \frac{x^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dy}{z} + \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dz}{z}$$
$$-\frac{ydz}{z^2} + \frac{dz}{z^3}.$$

Den Bedingungen der Integrabilität geschieht Genüge, da man hat

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} = \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} = \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{1}{z^2}.$$

Man setzt also, gemäß der vorigen Methode,

$$U = -\int dx \frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + Y$$
$$= \int dx\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) + Y$$
$$= lx - l(x^2+y^2+z^2) + Y.$$

Daraus erhält man

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dY}{dy},$$

und die Vergleichung mit dem gegebenen Differential gibt

$$\frac{x^2+(y-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)z} = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dY}{dy},$$

woraus

$$\frac{dY}{dy} = \frac{1}{z}, \quad Y = \frac{y}{z} + Z$$

Man hat also jetzt

$$U = lx - l(x^2+y^2+z^2) + \frac{y}{z} + Z.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - \frac{y}{z^2} + \frac{dZ}{dz},$$

und durch Vergleichung mit dem gegebenen Differential

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{z^2}+\frac{dZ}{dz},$$

woraus

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}, \quad Z=C+lz-\frac{1}{2z^2}.$$

Das gesuchte Integral wird also

$$U=C+l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}.$$

§. 374. Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß man zu dem nämlichen Resultate gelangen muß, mit welcher von den Veränderlichen man auch die Integration beginnen mag. Wollte man in dem vorigen Beispiele mit der Veränderlichen z den Anfang machen, so würde man setzen

$$\begin{aligned}U&=\int dz\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X\\&=\int dz\left(-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X\\&=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+X,\end{aligned}$$

wo X eine Function von x und y bedeutet. Man erhält daraus

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx},$$

und die Vergleichung mit der gegebenen Function gibt

$$-\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx},$$

d. h.

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x}, \quad X=lx+Y,$$

wo Y eine Function von y allein bedeutet. Man hat also jetzt

$$U=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+lx+Y.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{z} + \frac{dY}{dy},$$

und durch Vergleichung mit der gegebenen Function findet man, daß $\frac{dY}{dy}$ den Werth Null hat, oder daß Y sich auf eine Constante reducirt. Der vollständige Werth von U wird also wie oben

$$U = C + l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2}.$$

§. 375. Wenn in der Gleichung

$$dU = Pdx + Qdy$$

die rechte Seite ein genaues Differential ist, so ist U eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. In der Geometrie betrachtet man diese Function wie die Ordinate einer Fläche, die rechtwinklig auf derjenigen Ebene errichtet wird, in welcher die beiden Abscissen x und y gezählt werden. Aber es verhält sich nicht mehr ebenso, wenn die Differentialfunction $Pdx + Qdy$ nicht den Bedingungen der Integrabilität Genüge leistet. In diesem Falle hat die obige Gleichung keinen Sinn mehr, weil man sie nicht mehr wie abgeleitet aus einer analytischen Relation ansehen kann, die unter den drei Größen U, x, y stattfindet. Will man der Gleichung in diesem Falle einen Sinn beilegen, so kann dies nur dadurch geschehen, daß man eine gewisse Relation zwischen den beiden Veränderlichen x und y feststellt, die alsdann aufhören beide unabhängig von einander zu sein. Setzt man z. B. $y = \varphi(x)$, wo φ eine vollkommen willkürliche Function bedeutet, so nimmt die vorgelegte Gleichung die Form an

$$dU = Mdx,$$

wo M eine Function von x allein ist, und die willkürliche

Function $\varphi(x)$ nebst dem Differentialverhältniß der ersten Ordnung von dieser Function in sich enthält. Diese Gleichung $dU = Mdx$ kann immer integrirt werden. Die Function U, welche man durch die Integration findet, stellt die Ordinate einer Curve dar, deren Projection auf die Ebene xy durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ gegeben ist; und es ist klar, daß bei der Unbestimmtheit der Function φ sich eine unendlich große Anzahl verschiedener Curven angeben läßt, denen sämmtlich die Ordinate U angehören kann.

Diese Betrachtungen sind leicht auf diejenigen Fälle zu übertragen, wo die gegebene Differentialfunction eine größere Anzahl von Veränderlichen enthält.

XXXII. Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.

---

§. 376. Unter der obigen Benennung begreift man überhaupt alle Gleichungen von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wo x wie die unabhängige Veränderliche angesehen wird, y wie eine Function von x, und $\frac{dy}{dx}$ das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von y, in Bezug auf x genommen, d. i. das Verhältniß der gleichzeitigen Zunahmen der beiden Veränderlichen x und y bezeichnet. Eine solche Gleichung stellt auf eigenthümliche Weise zwischen den beiden Veränder=

lichen eine Relation fest, von der man sich auf folgende Weise einen Begriff machen kann.

Man denke sich die gegebene Gleichung aufgelöst in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$, so daß man hat

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

wo das Zeichen φ eine Function anzeigt, welche im allgemeinen entweder einen oder mehrere Werthe besitzt. Es sei erstens diese Function von solcher Beschaffenheit, daß sie nur einen einzigen Werth hat, und zu größerer Veranschaulichung denke man sich x wie eine Abscisse und y wie die zugehörige Ordinate, so daß die gegebene Gleichung einer ebenen Curve angehören muß. Wenn man den Veränderlichen x und y resp. die beiden willkürlichen Werthe a und b beilegt, so gibt die vorstehende Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten Werth, mit dessen Hülfe man, sobald man x von dem Werthe a aus um eine sehr kleine Größe wachsen oder abnehmen läßt, die entsprechende Aenderung des y von dem Werthe b aus kennen lernen kann. Denn bezeichnet Δx eine sehr kleine Zunahme von x, so hat man sehr nahe $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$. Gibt man sodann den Veränderlichen x und y in der vorstehenden Gleichung resp. die beiden Werthe $a + \Delta x$ und $b + \frac{dy}{dx} \Delta x$, so liefert die Gleichung einen neuen Werth von $\frac{dy}{dx}$, welcher auf dieselbe Weise dazu dienen kann, ein neues Paar von Werthen der beiden Veränderlichen x und y herzustellen. Fährt man so fort, so erhält man einen aus sehr kleinen geraden Linien zusammengesetzten Zug, welcher desto mehr mit einer gewissen Curve zusammenfallen wird, je kleinere Werthe man den Zunahmen Δx beigelegt hat. Die wahre Bedeutung der gegebenen Gleichung ist also die, daß sie die Gestalt einer gewissen Curve festlegt, von welcher man irgend einen Punkt willkürlich annehmen kann.

Je nach der Wahl, welche man für den ersten Punkt derjenigen Curve trifft, die auf die angegebene Weise mit Hülfe der vorgelegten Gleichung construirt werden kann, wird nicht nur die Lage, sondern im allgemeinen auch die Gestalt der Curve eine andere werden. Nichts desto weniger haben alle diese Curven einen gemeinschaftlichen Charakter, dessen Natur durch die gegebene Differentialgleichung ausgesprochen wird. Oder auch, diese Differentialgleichung drückt eine Eigenschaft aus, welche einer unendlichen Anzahl von Curven, die man sich in einer Ebene gezeichnet denken kann, gemeinsam angehört. Diese Eigenschaft besteht in der Angabe der Neigung der Tangente irgend eines Punkts als Function der Coordinaten dieses Punkts; sie bietet das Mittel dar, die ganze Curve zu construiren, sobald irgend ein Punkt dieser Curve festgestellt worden ist.

Man kann übrigens bemerken, daß die Auswahl einer beliebigen aus der unendlich großen Anzahl von Curven, denen die gegebene Differentialgleichung angehört, nur von einer einzigen willkürlichen Constante abhängt. Es genügt z. B. den Werth von x festzustellen, welcher dem Werthe $y = 0$ zugehören soll. Denn man muß immer die nämliche Curve wiederfinden, welchen Punkt dieser Curve man auch als gegeben ansehen mag.

§. 377. Man nehme zweitens an, die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

liefere mehrere verschiedene Werthe für das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$. Man kann sodann jeden dieser Werthe für sich betrachten und darauf dasjenige anwenden, was im vorigen

Paragraphen gesagt worden ist. Die gegebene Differentialgleichung gehört also in diesem Falle, wie man leicht erkennt, mehreren Systemen von Curven an, die in einer Ebene liegen und einander mannichfach durchkreuzen. Diese Gleichung drückt Eigenschaften aus, welche resp. der unendlich großen Anzahl von Curven gemein sind, die jedem einzelnen dieser Systeme angehören; Eigenschaften, durch welche die Neigung der Tangente eines beliebigen Punkts dieser Curven als Function der Coordinaten dieses Punkts bestimmt ist, so daß diese Curven mit Hülfe der gegebenen Gleichung construirt werden können, sobald einer ihrer Punkte gegeben wird.

§. 378. Aus dem Vorstehenden ist leicht zu erkennen, was man unter der *primitiven Gleichung* oder dem *Integral* der gegebenen Differentialgleichung zu verstehen hat. Diese primitive Gleichung muß, wenn sie dieselbe Allgemeinheit wie die gegebene Differentialgleichung besitzen soll, jede der Curven in sich begreifen, welche mit Hülfe dieser Gleichung construirt werden können. Also 1) muß sie eine willkürliche Constante enthalten, verschieden von denjenigen Constanten, welche etwa schon in der gegebenen Differentialgleichung vorkommen. Die Unbestimmtheit dieser willkürlichen Constante wird dem Resultate die nöthige Allgemeinheit geben, damit dasselbe das ganze System der Curven darstelle, denen die gegebene Gleichung angehört. Aber auch 2) muß diese primitive Gleichung der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, d. h. es müssen die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$, welche aus der primitiven Gleichung und ihrer Differentialgleichung folgen, in die gegebene Gleichung substituirt, dieselbe entweder identisch machen, oder es muß die Elimination der willkürlichen Constante aus der primitiven Gleichung und ihrer Differentialgleichung die gegebene Gleichung wieder hervorgehen lassen.

§. 379. Jede Gleichung in endlichen Ausdrücken, welche einer gegebenen Differentialgleichung Genüge leistet und eine willkürliche Constante enthält, ist das **allgemeine Integral** dieser Differentialgleichung. Aus diesem allgemeinen Integrale gehen die **besonderen Integrale** hervor, wenn man darin der willkürlichen Constante verschiedene besondere Werthe beilegt.

Es gibt häufig primitive Gleichungen, welche einer gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, ohne jedoch eine willkürliche Constante zu enthalten. Zuweilen sind diese Gleichungen besondere Integrale, in denen die willkürliche Constante dadurch verschwunden ist, daß man ihr einen gewissen besonderen Werth, wie z. B. 0 oder ∞, beigelegt hat. In anderen Fällen dagegen können die in Rede stehenden primitiven Gleichungen durch keine Annahme besonderer Werthe für die willkürliche Constante aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden; sie besitzen einen eigenthümlichen Charakter, und erfordern eine Betrachtung für sich. Primitive Gleichungen dieser letzten Art werden **besondere Auflösungen** genannt, die man also nicht mit den besonderen Integralen verwechseln darf. Von den besonderen Auflösungen wird am Schlusse dieses Abschnitts die Rede sein.

§. 380. Zur Erläuterung der vorstehenden Betrachtungen möge die Differentialgleichung dienen

$$x\frac{dy}{dx} - y + b = 0.$$

Man erhält daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-b}{x},$$

und auf dem oben angezeigten Wege erkennt man leicht, daß diese Gleichung einer jeden geraden Linie angehört, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten sind $x = 0$ und $y = b$. Das allgemeine Integral ist

$x\,dy + (b-y)\,dx = 0$

$\frac{dy}{y-b} = \frac{a\,dx}{ax}$ a const

$l(y-b) = l\,ax$

$y - b = ax$

$y = ax + b$

$$y - ax - b = 0.$$

Denn diese primitive Gleichung leistet der gegebenen Differentialgleichung Genüge, weil die Werthe $y = ax + b$ und $\frac{dy}{dx} = a$, welche aus ihr hervorgehen, diese Differentialgleichung identisch machen; und überdies enthält sie die willkürliche Constante a, welche nicht in der gegebenen Gleichung vorkommt. Läßt man diese Constante sich ändern, so werden die dadurch hervorgehenden besonderen Integrale alle geraden Linien darstellen, welche, bei verschiedenen Neigungen gegen die Achse der x, einander in der Achse der y in einem Abstande b vom Anfangspunkte durchschneiden.

§. 381. Es sei ferner die Differentialgleichung gegeben

$$\frac{dy}{dx} - a - 2x = 0, \quad \text{oder} \quad dy - (a + 2x)\, dx = 0,$$

deren primitive Gleichung ist

$$y - ax - x^2 + b = 0,$$

wo b die willkürliche Constante bedeutet. Diese primitive Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Achse parallel zur Achse der y liegt, in einem Abstande $-\frac{a}{2}$ von dieser Achse. Die Curve schneidet die Achse der y in dem Abstande $-b$ vom Anfangspunkte. Um alle Curven zu erhalten, denen die gegebene Differentialgleichung angehört, genügt es also die Constante b in der primitiven Gleichung alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen zu lassen; oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Parabel parallel zur Achse der y zu verschieben, ohne die Lage ihrer Achse zu ändern.

So wie die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} - a - 2x = 0$ zu der primitiven Gleichung $y - ax - x^2 + b = 0$ führt, in welcher b die willkürliche Constante ist, so kann man auch eine andere Differentialgleichung angeben, welche zu der nämlichen primitiven Gleichung führt, so daß a als willkürliche Constante erscheint. Diese Differentialgleichung erhält man unmittelbar, wenn man die primitive Gleichung so einrichtet, daß die Constante a durch Differentiation verschwinden muß; d. h. wenn man sie für diese Constante auflöst, wodurch man erhält

$$\frac{y-x^2+b}{x}-a=0.$$

Differentiirt man und unterdrückt den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{x^2}$, so kommt

$$y-x\,\frac{dy}{dx}+x^2+b=0.$$

Man kann diese Differentialgleichung aber auch finden, ohne die primitive Gleichung in Bezug auf a aufzulösen, wenn man nämlich diese Constante aus der primitiven Gleichung und der Gleichung $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$, die durch Differentiation aus ihr hervorgeht, eliminirt. Die zuletzt gefundene Differentialgleichung, in welcher die Constante a verschwunden ist, gehört ebenso wie die primitive Gleichung, in welcher a wie die willkürliche Constante angesehen wird, allen Parabeln an, deren Achse parallel zur Achse der y liegt und die diese Achse in einem Abstande $-b$ vom Anfangspunkte der Coordinaten durchschneiden.

Wäre übrigens die Gleichung $y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0$ die gegebene gewesen, so hätte man daraus nicht unmittelbar die primitive Gleichung herleiten können, aus welcher sie entstanden ist; denn die linke Seite dieser Gleichung ist kein genaues Differential von einer Function der Veränderlichen x und y. Sie wird es aber, wenn man den Factor $\frac{1}{x^2}$ wieder herstellt.

§. 382. Wenn die gegebene Differentialgleichung ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \pm a.$$

Folglich gehört diese Gleichung zwei Systemen von geraden Linien an, welche mit der Achse der x Winkel einschließen, deren trigonometrische Tangenten resp. a und $-a$ sind. Ihr allgemeines Integral ist die Gleichung

$$y^2 - a^2x^2 - 2by + b^2 = 0,$$

welche aus der Multiplication der beiden Gleichungen $y + ax - b = 0$ und $y - ax - b = 0$ entsteht, die resp., wegen der willkürlichen Constante b, irgend einer unter den geraden Linien des einen oder des anderen Systems angehören. Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man

$$y\frac{dy}{dx} - a^2x - b\frac{dy}{dx} = 0,$$

und durch Elimination von b aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich wieder die gegebene Gleichung.

§. 383. Wenn allgemein eine primitive Gleichung gegeben ist, welche die beiden Veränderlichen x und y nebst mehreren Constanten a, b, c, ꝛc. enthält und welche man bezeichnen kann mit

$$F(x, y, a, b, c, \text{ꝛc.}) = 0,$$

so wird die Gleichung, welche man daraus unmittelbar durch Differentiation erhält, nämlich

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

zugleich mit jener primitiven Gleichung Gültigkeit haben. Man kann also diese beiden Gleichungen auf beliebige Weise mit einander combiniren; das Resultat wird immer gleich=

falls eine gültige Gleichung sein. Es ist möglich, daß schon die Differentiation eine der Constanten a, b, c, 2c. zum Verschwinden gebracht hat, welcher Fall eintritt, wenn diese Constante nur in einem Gliede vorkommt, welches weder x noch y enthält. Man kann aber auch eine beliebige Constante eliminiren, die sich zugleich in beiden Gleichungen vorfindet. Man kann gleichfalls eine gewisse Function von x und y eliminiren, die in einigen Gliedern enthalten ist. Endlich ist es möglich, daß alle Glieder der Differentialgleichung mit einer gewissen Function von x und y als Factor behaftet erscheinen, welche hinwegfällt, sobald man die Summe dieser Glieder gleich Null setzt.

Es ist hieraus leicht zu übersehen, daß man aus einer und derselben primitiven Gleichung im allgemeinen durch verschiedene Operationen mehrere Differentialgleichungen herleiten kann, die gänzlich von einander verschieden sind, und man begreift daraus die Schwierigkeit der umgekehrten Aufgabe, welche darin besteht, von einer beliebigen vorgelegten Differentialgleichung das Integral zu finden. Diese Aufgabe wird hier jetzt zunächst innerhalb der durch die Ueberschrift dieses Abschnitts angezeigten Gränzen behandelt werden.

Differentialgleichungen der ersten Ordnung, in denen das Differentialverhältniß nur in der ersten Potenz vorkommt. Trennung der Veränderlichen.

§. 384. Es möge eine gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung betrachtet werden, in welcher das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ nur in der ersten Potenz vorkommt und welche demnach die Form hat

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad Pdx + Qdy = 0,$$

wo P und Q irgend welche Functionen von x und y bedeuten.

Es ist sogleich klar, daß, wenn die Function $Pdx + Qdy$ ein genaues Differential von einer gewissen Function von x und y ist, d. h. wenn sie den im §. 364 angezeigten Bedingungen der Integrabilität Genüge leistet, man nur nöthig hat gemäß den im vorigen Abschnitte gegebenen Regeln ihr Integral zu nehmen. Dieses Integral wird, vervollständigt durch eine willkürliche Constante und darauf gleich Null gesetzt, das gesuchte Integral darstellen. Dieser besondere Fall kann indessen nur dann eintreten, wenn die gegebene Differentialgleichung das unmittelbare Resultat der Differentiation der primitiven Gleichung ist, welche letztere man zuvor auf eine solche Form gebracht hat, daß die willkürliche Constante in einem Gliede vorkommt, welches weder x noch y enthält, und mithin durch die Differentiation verschwinden kann.

§. 385. Die gegebene Differentialgleichung läßt sich immer integriren oder wenigstens auf die Integration von Differentialfunctionen von einer einzigen Veränderlichen zurückführen, wenn eine Trennung der Veränderlichen stattfindet, d. h. wenn die gegebene Gleichung die Form hat

$$Xdx + Ydy = 0,$$

wo X eine Function von x allein, und Y eine Function von y allein bedeutet. In diesem Falle wird nämlich das allgemeine Integral*)

$$\int Xdx + \int Ydy + C = 0,$$

wenn man mit C die willkürliche Constante bezeichnet.

Die Trennung der Veränderlichen ist augenscheinlich vorhanden, wenn die Auflösung der Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ gibt

$$\frac{dy}{dx} = X \,.\, Y;$$

denn man erhält sodann

*) Man sehe die Note S. 20.

$\frac{dy}{Y} - Xdx = 0$, woraus $\int \frac{dy}{Y} - \int Xdx + C = 0$.

§. 386. Zuweilen kann man die Trennung der Veränderlichen durch eine Umformung oder durch Einführung einer neuen Veränderlichen herbeiführen. Das bemerkenswertheste Beispiel dieser Art bietet die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0, \quad \text{oder} \quad dy + Pydx + Qdx = 0,$$

in welcher P und Q Functionen von x allein sind. Man nennt diese Gleichung eine lineäre Gleichung von der ersten Ordnung, oder eine Gleichung vom ersten Grade und von der ersten Ordnung, weil sie nur die ersten Potenzen von der Function y und ihrem Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$ der ersten Ordnung enthält. Setzt man darin

$$y = Xt, \quad \text{woraus} \quad dy = tdX + Xdt,$$

indem man mit X eine Function von x, und mit t eine neue Veränderliche bezeichnet, so gibt die Substitution in die gegebene Gleichung

$$tdX + Xdt + PXtdx + Qdx = 0.$$

Da die Function X vollkommen unbestimmt geblieben ist, so kann man sie durch die Bedingung bestimmen, daß die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden zerfallen soll

$$tdX + Qdx = 0, \quad \text{und} \quad dt + Ptdx = 0.$$

In der zweiten Gleichung sind die Veränderlichen getrennt, und man erhält daraus

$$\frac{dt}{t} = -Pdx, \quad lt = -\int Pdx, \quad t = e^{-\int Pdx}.$$

Dieser Werth von t gibt, in die erste Gleichung gesetzt,

$$dX = -dx \,.\, Qe^{\int Pdx}, \quad X = C - \int dx \,.\, Qe^{\int Pdx}.$$

Aus beiden Werthen für X und t folgt endlich, wegen $y = Xt$,

$$y = e^{-\int P dx} \left(C - \int dx \, . \, Q e^{\int P dx}\right)$$

als allgemeines Integral der gegebenen Gleichung, in welchem C die willkürliche Constante bedeutet.

§. 387. Auf dieselbe Weise kann man alle Gleichungen von der Form

$$y^{m-1}\, dy + P y^m\, dx + Q dx = 0$$

integriren, wo P und Q gleichfalls zwei beliebige Functionen von x bedeuten. Denn diese letzte Gleichung verwandelt sich wieder in die frühere, wenn man $y^m = z$ setzt.

§. 388. Die Trennung der Veränderlichen ist gleichfalls erreichbar in einer Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Denn man setze $\frac{y}{x} = t$, so wird $y = xt$ und $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; folglich verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$t + x\frac{dt}{dx} + f(t) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{t + f(t)} + \frac{dx}{x} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Vom integrirenden Factor.

§. 389. Soll eine Differentialgleichung

$$P dx + Q dy = 0$$

die Form eines genauen Differentials von einer Function der beiden Veränderlichen x und y besitzen, so ist zunächst nothwendig, daß diese Gleichung als unmittelbares Resultat aus der Differentiation der primitiven Gleichung hervorgegangen sei. Aber selbst wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat dennoch die Differentialgleichung nicht immer die Form eines genauen Differentials, weil die Differentiation zuweilen einen gemeinschaftlichen Factor in sämmtliche Glieder ein=

führt, der mithin durch das Nullsetzen des Differentials verschwindet. Es sei z. B. die primitive Gleichung

$$\frac{y}{x} = a,$$

so ist das Differential der linken Seite $\frac{xdy - ydx}{x^2}$, und wenn man diese Größe gleich Null setzt, so erhält man bloß

$$xdy - ydx = 0,$$

und die linke Seite dieser Gleichung ist kein genaues Differential mehr. Ein ähnlicher Fall kam am Schlusse des §. 381 vor.

§. 390. Wie aber auch eine gegebene Differentialgleichung entstanden sein mag, so läßt sich beweisen, daß es immer einen integrirenden Factor geben müsse, durch dessen Multiplication mit der gegebenen Gleichung ein genaues Differential zu Stande kommt. Man denke sich zu dem Ende die gegebene Gleichung auf die Form gebracht

$$\frac{dy}{dx} + V = 0,$$

wo V irgend eine Function von x und y bezeichnet. Das allgemeine Integral dieser Gleichung hat auf seiner linken Seite eine gewisse Function von x, y und einer willkürlichen Constante a, die in der Differentialgleichung nicht vorkommt. Denkt man sich also dieses allgemeine Integral in Bezug auf a aufgelöst und mithin auf die Form gebracht

$$U = a,$$

so wird U eine Function von x und y sein. Die Differentiation dieser Gleichung gibt

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}} = 0,$$

welche Gleichung die Constante a nicht mehr enthält, und mithin mit der gegebenen Differentialgleichung identisch sein muß. Man muß also haben

$$\frac{dy}{dx} + V = \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}},$$

und daraus

$$\left(\frac{dy}{dx} + V\right)\frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Nun ist die Größe $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}$ die vollständige dirivirte Function von U. Folglich wird dasselbe von der Größe $\frac{dy}{dx} + V$ gelten, sobald man diese mit dem Factor $\frac{dU}{dy}$ multiplicirt hat.

Durch das Vorstehende ist man von der Existenz eines integrirenden Factors versichert, mit welchem die gegebene Gleichung multiplicirt werden muß, um unmittelbar integrirt werden zu können. Ueberdies sieht man, daß dieser Factor bekannt sein wird, sobald die primitive Gleichung bekannt ist.

§. 391. Es sei z. B. die primitive Gleichung

$$y^2 - 2a(x + y) = 0.$$

Die Differentiation derselben gibt

$$ydy - a(dx + dy) = 0,$$

und wenn man aus beiden Gleichungen die Constante a eliminirt, so erhält man die Differentialgleichung

$$(2x + y)\,dy - ydx = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung genügt nicht den Bedingungen der Integrabilität. Bringt man deßhalb nach Vorschrift des vorigen Paragraphen, die primitive Gleichung auf die Form

$$\frac{y^2}{2(x+y)} = a,$$

so wird die derivirte Function der linken Seite, in Bezug auf y genommen, $\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}$. Bringt man ferner die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x+y} = 0,$$

und multiplicirt dieselbe mit dem Factor $\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}$, so findet man

$$\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{2(x+y)^2} = 0$$

oder

$$\frac{(y^2+2xy)\,dy - y^2dx}{2(x+y)^2} = 0.$$

In diesem Ausdrucke erkennt man aber sofort das vollständige Differential der Function $\frac{y^2}{2(x+y)}$, und leitet daraus mithin unmittelbar die primitive Gleichung wieder her.

§. 392. Aus der Gleichung des §. 390

$$\frac{dy}{dx} + V = \frac{\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}}{\frac{dU}{dy}}$$

läßt sich ferner schließen, daß außer dem Factor $\frac{dU}{dy}$ eine unendliche Menge anderer Factoren angegeben werden kann, welche sämmtlich die Eigenschaft besitzen, die Function $\frac{dy}{dx} + V$ zu einem genauen Differential zu machen. Wenn man nämlich unter $\varphi(U)$ eine beliebige Function von U versteht, so wird die Größe

$$\varphi(U) \cdot \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$

die vollständige derivirte Function von einer gewissen Function von U sein, die mit $\Phi(U)$ bezeichnet werden mag. Wenn man also die linke Seite der vorstehenden Gleichung mit dem Factor

$$\varphi(U) \cdot \frac{dU}{dy}$$

multiplicirt, so wird sie gleichfalls zu einer genauen derivirten Function von einer gewissen Function von x und y werden; d. h. der Ausdruck $\varphi(U)\dfrac{dU}{dy}$ wird einen integrirenden Factor der gegebenen Differentialgleichung abgeben, wie man auch die vollkommen willkürliche Function φ feststellen mag.

Das Integral dieser Function, nach Einführung des genannten Factors, ist aber identisch mit der so eben durch $\Phi(U)$ bezeichneten Function, so daß man als allgemeines Integral erhält

$$\Phi(U) = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Daraus folgt unmittelbar

$$U = C,$$

wo C wieder eine willkürliche Constante bedeutet. Diese letzte Gleichung ist aber das Integral der gegebenen Gleichung, und mithin führen alle Factoren, welche in dem Ausdrucke $\varphi(U)\dfrac{dU}{dy}$ enthalten sind, zuletzt zu dem nämlichen Integrale.

§. 393. Es ergab sich im §. 386 aus der Gleichung

$$dy + Pydx + Qdx = 0,$$

in welcher P und Q Functionen von x allein sind, das Integral

$$y = e^{-\int Pdx}\,(C - \int dx \,.\, Qe^{\int Pdx}),$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet. Nach dem Vorstehenden wird man dieses Integral auf die Form bringen

$$C = \int dx \,.\, Qe^{\int Pdx} + y\,e^{\int Pdx} = U,$$

und der Factor, mit welchem man die Differentialgleichung multipliciren muß, um sie integrirbar zu machen, wird also nach §. 390 sein $\frac{dU}{dy} = e^{\int Pdx}$.

Man kann dies auch direct nachweisen. Es sei nämlich μ der unbekannte integrirende Factor, der wie eine Function von x allein angesehen werden mag. Führt man denselben in die Differentialgleichung ein, so wird das Glied μQdx integrirbar für sich, und es handelt sich nur noch darum, μ durch die Bedingung zu bestimmen, daß die Größe

$$\mu dy + \mu\, Py\, dx$$

ein genaues Differential werde. Man muß also haben

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P, \quad \text{oder} \quad \frac{d\mu}{\mu} = Pdx, \quad \text{woraus} \quad \mu = e^{\int Pdx}.$$

§. 394. Wollte man dieses letzte Verfahren allgemein anwenden, so würde man als gegebene Gleichung anzusehen haben

$$Pdx + Qdy = 0,$$

wo P und Q irgend beliebige Functionen von x und y bedeuten. Bezeichnet man den integrirenden Factor dieser Gleichung mit μ, so muß die Function μ augenscheinlich der Bedingung genügen

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}$$

d. h.

$$P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Aber diese Gleichung ist beinahe immer schwieriger zu behandeln als die gegebene Gleichung selbst.

§. 395. Man kann noch bemerken, daß sich in allen Fällen, wo man durch eine Transformation der Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

eine Trennung der Veränderlichen herbeigeführt hat, auch unmittelbar der integrirende Factor angeben läßt, welcher die Größe $Pdx + Qdy$ zu einem genauen Differential macht.

Nimmt man nämlich an, es seien statt der Veränderlichen x und y die neuen Veränderlichen s und t eingeführt, so wird die gegebene Gleichung sich verwandelt haben in

$$Mds + Ndt = 0,$$

wo M und N Functionen von s und t sind. Der Voraussetzung gemäß muß es nun eine Function V von s und t geben, so beschaffen, daß die Division der letzten Gleichung durch diese Function eine Trennung der Veränderlichen herbeiführt, d. h. daß $\frac{M}{V}$ eine Function von s allein, und $\frac{N}{V}$ eine Function von t allein wird. Die Größe $\frac{M}{V}ds + \frac{N}{V}dt$ ist also dann ein genaues Differential geworden. Setzt man aber in dieser Größe für s und t ihre Ausdrücke durch x und y zurück, so fällt sie mit der Größe $\frac{P}{V}dx + \frac{Q}{V}dy$ zusammen, wo man in V gleichfalls für s und t ihre Ausdrücke durch x und y gesetzt denken muß. Folglich wird auch $\frac{P}{V}dx + \frac{Q}{V}dy$ nothwendig ein genaues Differential sein.

§. 396. Als Beispiel für die Trennung der Veränderlichen diente im §. 388 die Gleichung

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0,$$

welche durch die Substitution $y = xt$, woraus $dy = tdx + xdt$, sich verwandelt in

$$[t + f(t)]\,dx + xdt = 0,$$

und in welcher die Veränderlichen getrennt werden, wenn man durch $x[t+f(t)]$ dividirt. Nach dem vorigen Paragraphen muß also die gegebene Gleichung integrirt werden können, wenn man sie mit dem Factor $\frac{1}{x[t+f(t)]}$ multiplicirt, nachdem man in diesem Factor für t seinen Werth durch x und y an die Stelle gesetzt hat; d. h. der integrirende Factor der gegebenen Gleichung muß sein $\frac{1}{x\left[\frac{y}{x}+f\left(\frac{y}{x}\right)\right]}$.

Wirklich erhält man durch Multiplication mit diesem Factor

$$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy}{x\left[\frac{y}{x}+f\left(\frac{y}{x}\right)\right]}=0,$$

welches man leicht auf die Form bringt

$$\frac{dx}{x}+\frac{\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}}{\frac{y}{x}+f\left(\frac{y}{x}\right)}=0,$$

und diese Gleichung kann integrirt werden, da $\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}$ das Differential von $\frac{y}{x}$ ist.

Homogene Differentialgleichungen.

§. 397. Unter einer **homogenen Function** versteht man jede Function, welche aus Gliedern zusammengesetzt ist, in denen die Summe der Exponenten der Veränderlichen einen constanten Werth hat. Es sei U eine homogene Function von mehreren Veränderlichen x, y, ꝛc. Setzt man in derselben tx an die Stelle von x, ty an die Stelle von y, ꝛc., so verwandelt sich die Function in t^nU, wenn n die Summe der Exponenten der Veränderlichen in jedem Gliede bezeichnet. Die Zahl n heißt der Grad der homogenen Function.

Setzt man $t = 1 + g$, oder was auf dasselbe hinauskommt, $x + gx$ an die Stelle von x, $y + gy$ an die Stelle von y, ꝛc., so erhält man durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes (§. 138)

$$(1+g)^n U = U + g\left(\frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{g^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}y^2 + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.},$$

und wenn man die linke Seite nach der binomischen Reihe entwickelt, und die mit gleichen Potenzen der unbestimmten Größe g behafteten Glieder einander gleich setzt, so kommt

$$n\,U = \frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{ꝛc.}$$

$$n(n-1)\,U = \frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}y^2 + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Diese Beziehungen pflegt man unter dem Namen des Lehrsatzes von den homogenen Functionen zusammenzufassen.

§. 398. Die Betrachtung der vorstehenden Beziehungen erleichtert zuweilen die Integration der Differentialfunctionen von mehreren Veränderlichen. Wenn nämlich eine Function homogen ist, so wird diese Eigenschaft durch Differentiation der Function nicht aufgehoben. Folglich wenn umgekehrt eine homogene Differentialfunction

$$Pdx + Qdy + \text{ꝛc.}$$

gegeben ist, welche den Bedingungen der Integrabilität Genüge leistet, so hat man unmittelbar, wenn man mit U ihr Integral bezeichnet, so wie mit n den Grad dieses Integrals, der immer den gemeinschaftlichen Grad der Functionen P, Q, ꝛc. um eine Einheit übertrifft, nach dem vorigen Paragraphen

$$nU = Px + Qy + \text{ꝛc.} + C.$$

§. 399. Wenn in der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

die Functionen P und Q der Veränderlichen x und y homogen sind, so lassen sich diese Veränderlichen leicht trennen, und die Gleichung wird mithin unmittelbar integrirbar. Man setze nämlich $y = xt$, so nehmen die Functionen P und Q die Gestalten an px^n und qx^n, wo p und q Functionen von t allein sind, und n die Summe der Exponenten von x und y in den Gliedern der gegebenen Gleichung bedeutet. Diese Gleichung wird also

$$(p + qt)\, dx + qxdt = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x} + \frac{qdt}{p+qt} = 0,$$

wo die Veränderlichen getrennt sind. Die Integration gibt

$$lx + \int dt \,.\, \frac{q}{p+qt} = C,$$

in welcher Gleichung man, nach Ausführung der angezeigten Integration, für t seinen Werth $\frac{y}{x}$ zu setzen hat.

§. 400. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$(x - 2y)\, dx + ydy = 0,$$

in welcher $P = x - 2y$ und $Q = y$ homogene Functionen vom ersten Grade sind. Durch die Substitution $y = xt$ verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1 - 2t + t^2} = 0,$$

deren Integral ist

$$lx + l(1-t) + \frac{1}{1-t} = C,$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet. Setzt man für t seinen Werth $\frac{y}{x}$, so erhält man

$$l(x-y) + \frac{x}{x-y} = C,$$

wofür man auch schreiben kann

$$x - y = C \,.\, e^{-\frac{x}{x-y}},$$

indem C jetzt eine andere Constante bedeutet.

§. 401. Es sei ferner die Gleichung gegeben

$$(x^2 + xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0,$$

in welcher $P = x^2 + xy - 2y^2$ und $Q = y^2 - 3x^2$ homogene Functionen vom zweiten Grade sind. Die Substitution $y = xt$ gibt

$$\frac{dx}{x} + \frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1} = 0.$$

Der Bruch auf der linken Seite dieser Gleichung, welcher mit dt multiplicirt ist, läßt sich nach den Methoden des **XXIV.** Abschnitts in Partialbrüche zerlegen, wodurch man erhält

$$\frac{t^2-3}{t^3-2t^2-2t+1} = -\frac{2}{5(t+1)} + \frac{7-\sqrt{5}}{5(2t-3-\sqrt{5})} + \frac{7+\sqrt{5}}{5(2t-3+\sqrt{5})}.$$

Mithin wird die vorige Gleichung

$$\frac{dx}{x} - \frac{2}{5}\frac{dt}{t+1} + \frac{7-\sqrt{5}}{5}\,\frac{dt}{2t-3-\sqrt{5}} + \frac{7+\sqrt{5}}{5}\,\frac{dt}{2t-3+\sqrt{5}} = 0,$$

und ihr Integral wird

$$lx - \tfrac{2}{5}\,l(t+1) + \tfrac{7}{10}\,l(t^2-3t+1) + \frac{1}{2\sqrt{5}}\,l\,\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}} = lC.$$

Statt dieser Gleichung kann man endlich schreiben

$$(y+x)^{-\frac{2}{5}}(y^2-3xy+x^2)^{\frac{7}{10}}\left(\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x-x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=C.$$

§. 402. Die Differentialgleichung des §. 399

$$Pdx+Qdy=0,$$

welche als homogen vorausgesetzt wird, und in welcher n den gemeinschaftlichen Grad der Functionen P und Q bezeichnet, verwandelt sich durch die Annahme $y=xt$ in

$$(px^n+qx^nt)\,dx+qx^{n+1}\,dt=0,$$

und hierin werden die Veränderlichen getrennt, wenn man durch $x^{n+1}(p+qt)$ dividirt. Daraus aber folgt vermöge des §. 395, daß der Ausdruck $\frac{1}{x^{n+1}(p+qt)}$ ein integrirender Factor der gegebenen Gleichung sein muß, wenn man in demselben für t seinen Werth zurücksetzt; d. h. dieser integrirende Factor wird sein $\frac{1}{Px+Qy}$. Mithin ist die Function $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$ nothwendig ein genaues Differential.

Dies kann man auch direct nachweisen. Es sei μ der unbekannte integrirende Factor der Funktion $Pdx+Qdy$, welcher als eine homogene Function von x und y vorausgesetzt werden mag. Man kann sodann setzen

$$\mu Pdx+\mu Qdy=dU,$$

wo U eine Function von x und y bedeutet. Daraus folgt nach §. 398

$$\mu Px+\mu Qy=kU,$$

wenn man unter k den um eine Einheit vergrößerten gemeinschaftlichen Grad der Functionen μP und μQ versteht. Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so kommt

$$\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=\frac{dU}{kU}.$$

Nun ist $\frac{dU}{kU}$ ein genaues Differential; folglich gilt dasselbe von der linken Seite dieser Gleichung.

§. 403. So wird in dem Beispiele des §. 400 die Gleichung

$$(x-2y)\,dx+ydy=0$$

vermöge des Vorigen integrirbar werden durch Multiplication mit dem Factor $\frac{1}{(x-2y)x+y^2}$ d. i. $\frac{1}{(x-y)^2}$. Man erhält sodann nämlich die Gleichung

$$\frac{(x-2y)dx+ydy}{(x-y)^2}=0,$$

wofür man schreiben kann

$$\frac{dx-dy}{x-y}+\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}=0,$$

oder auch

$$d\,.\,l(x-y)+d\,.\left(\frac{x}{x-y}\right)=0,$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar das oben gefundene Integral.

Differentialgleichungen der ersten Ordnung, in denen die zweite Potenz oder höhere Potenzen des Differentialverhältnisses enthalten sind.

§. 404. Wenn eine gegebene Differentialgleichung höhere Potenzen des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ in sich enthält, so kann man sich dieselbe in Bezug auf dieses Differentialverhältniß, als Unbekannte, aufgelöst denken. Setzt man sodann die Factoren, welche den Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, einzeln gleich Null, so erhält man eben so viele Differentialgleichungen, in denen $\frac{dy}{dx}$ nur in der ersten Potenz vorkommt; man kann also die Integrale dieser Gleichungen nehmen, wobei man jedem einzelnen eine willkürliche Constante beizufügen hat. Das Product dieser verschiedenen Integrale wird das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung geben.

Die Allgemeinheit dieses Integrals wird übrigens nicht vermindert, wenn man annimmt, daß die willkürliche Constante in allen Factoren dieselbe sei. Demnach hat jede Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche die $n$te Potenz des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ in sich enthält, zu ihrem Integral eine primitive Gleichung, in welcher die willkürliche Constante zur Potenz n erhoben vorkommt. Ein Beispiel gibt §. 382.

§. 405. Die algebraische Auflösung der gegebenen Gleichung ist indessen häufig nicht möglich, und mithin wird sodann das angezeigte Verfahren unausführbar. Man gelangt dagegen zuweilen zur Integration der in Rede stehenden Gleichungen, wenn man eine solche Gleichung zuvor auf die Form bringt

$$y = L,$$

wo L eine Function von x und $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. Zur Abkürzung setze man y' statt $\frac{dy}{dx}$. Die Differentiation dieser Gleichung gibt sodann

$$y' = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dy'}\,\frac{dy'}{dx},$$

welches eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen y' und x ist. Kann dieselbe integrirt werden, so erhält man eine Gleichung zwischen y' und x nebst einer willkürlichen Constante; und durch Elimination von y' aus dieser und der gegebenen Gleichung findet sich das gesuchte Integral.

§. 406. Die vorstehende Methode ist anwendbar auf die Gleichung

$$y = Mx + N,$$

wo M und N Functionen von $\frac{dy}{dx}$ oder y' bedeuten sollen. Diese Gleichung gibt nämlich, in Bezug auf x differentiirt,

$$y' = M + x \frac{dM}{dy'} \frac{dy'}{dx} + \frac{dN}{dy'} \frac{dy'}{dx}$$

oder

$$(M - y')\, dx + x \frac{dM}{dy'} dy' + \frac{dN}{dy'} dy' = 0$$

und fällt mithin unter die in den §§. 386 und 393 betrachtete Form. Sie wird also integrirbar, wenn man sie mit dem Factor $e^{\int \frac{dM}{M-y'}}$ multiplicirt, und ihr Integral wird

$$x + e^{-\int \frac{dM}{M-y'}} \left(C + \int \frac{Nd}{M-y'} . e^{\int \frac{dM}{M-y'}} \right) = 0$$

wo C die willkürliche Constante ist. Schließlich hat man sodann noch y' aus dieser und der gegebenen Gleichung zu eliminiren.

§. 407. Besondere Beachtung verdient noch der Fall, wo man in der vorigen Gleichung hat $M = y'$, also die Gleichung wird

$$y = y'\, x + N.$$

Man erhält sodann durch Differentiation

$$\left(x + \frac{dN}{dy'} \right) dy' = 0,$$

welche Gleichung in die beiden folgenden zerfällt

$$x + \frac{dN}{dy'} = 0, \quad \text{und} \quad dy' = 0.$$

Die Gleichung $x + \frac{dN}{dy'} = 0$ gibt einen Werth für y', welcher, in die gegebene Gleichung substituirt, zu einer primitiven Gleichung führt, die keine willkürliche Constante enthält; diese primitive Gleichung ist nach §. 379 eine besondere Auflösung der gegebenen Gleichung. Die Gleichung $dy' = 0$ dagegen gibt integrirt

$$y' = C,$$

wo C die willkürliche Constante ist; und dieser Werth liefert, wenn man ihn in der gegebenen Gleichung an die Stelle von y' setzt, das gesuchte allgemeine Integral. Dieses Integral ist die Gleichung einer geraden Linie, deren Neigung gegen die Achse der x durch den Werth der Constante C festgestellt wird.

Besondere Auflösungen der Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.

§. 408. Es ist im §. 379 bemerkt worden, daß es zuweilen primitive Gleichungen gibt, welche einer gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, ohne jedoch in dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung enthalten zu sein. Gleichungen dieser Art, welche besondere Auflösungen genannt werden, zeichnen sich hauptsächlich dadurch aus, daß sie keine willkürliche Constante enthalten, deren Gegenwart das wesentliche Kennzeichen des allgemeinen Integrals ist. Ueber die Natur dieser besonderen Auflösungen erhält man auf folgende Weise Auskunft.

Es sei

$$F(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Diese letzte Gleichung ist sodann das Resultat der Elimination der Constante a aus der Gleichung (1) und deren unmittelbarem Differential, nämlich

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

und überdies kann man, nach §. 376 ꝛc., die Gleichungen (1) und (2) wie die analytischen Ausdrücke eines Systems von einer unendlich großen Anzahl von Curven ansehen, welche sich nur in den verschiedenen Werthen der Constante a von einander unterscheiden.

Man nehme an, es sei in der Gleichung (1) der Constante a ein bestimmter Werth beigelegt worden, und man betrachte die Curve, welche diesem Werthe entspricht. Wenn sodann, von dem genannten Werthe ausgehend, a um die unendlich kleine Größe da zunimmt, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$F + \frac{dF}{da}da = 0.$$

Diese Gleichung gehört einer zweiten Curve an, welche der ersten unendlich nahe liegt; und die Werthe von x und y, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen Genüge leisten

$$F = 0 \quad \text{und} \quad F + \frac{dF}{da}da = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{da} = 0,$$

gehören folglich dem Durchschnittspunkte dieser beiden Curven an.

§. 409. Man eliminire die Constante a aus den beiden Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Das Resultat dieser Elimination wird eine primitive Gleichung zwischen x und y sein, welche der Linie angehört, die der geometrische Ort der Durchschnittspunkte aller in dem allgemeinen Integrale enthaltenen, und sich nur durch die verschiedenen Werthe der Constante a von einander unterscheidenden Curven ist. Diese Linie wird augenscheinlich von allen in Rede stehenden Curven berührt, und führt den Namen der einhüllenden Curve. Die gefundene Gleichung aber, welche keine willkürliche Constante enthält, ist die besondere Auflösung der Gleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, der sie offenbar Genüge leisten muß, weil der Werth von $\frac{dy}{dx}$ in jedem Punkte der einhüllenden Curve beiden Curven gemeinschaftlich angehört, nämlich dieser einhüllenden Curve und derjenigen in dem allgemeinen Integrale enthaltenen Curve, die sie in jenem Punkte berührt. Man sieht also, daß die Aufsuchung der besonderen Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung zusammenfällt mit dem geometrischen Problem, die einhüllende Curve anzugeben, welche dem durch jene Differentialgleichung, oder durch das allgemeine Integral derselben dargestellten Systeme von Curven entspricht.

Man muß übrigens bemerken, daß die in einer Differentialgleichung und dem allgemeinen Integrale derselben enthaltenen Curven, d. h. die Curven, welche den besonderen Integralen jener Differentialgleichung angehören, nicht immer eine einhüllende Curve besitzen; oder daß es nicht immer vorkommt, daß diese Curven eine gewisse Linie von einer von der ihrigen verschiedenen Beschaffenheit berühren. In diesem Falle gibt es auch keine besondere Auflösung. Man erkennt leicht, daß eine besondere Auflösung nicht existirt, wenn die Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ für die Constante a keinen Ausdruck durch x und y liefert; oder genauer, wenn man nicht aus den Gleichungen $F = 0$ und $\frac{dF}{da} = 0$ durch Elimination von a eine Gleichung zwischen x und y erhält, welche nicht schon in dem allgemeinen Integrale als besonderer Fall enthalten ist.

§. 410. Es läßt sich auch direct und ohne geometrische Hülfsbetrachtungen nachweisen, daß die Aufsuchung der besonderen Auflösung, d. h. einer Gleichung, welche, ohne die Constante a zu enthalten, der Differentialgleichung (2) Genüge leistet, durch Elimination von a aus den Gleichungen (1) und $\frac{dF}{da}=0$ zu Stande gebracht werden muß. Um nämlich die in Rede stehende Gleichung zu finden, kommt es allein darauf an, für a in der Gleichung (1) eine angemessen bestimmte Function von x und y an die Stelle zu setzen. Man nehme deßhalb an, diese Substitution sei ausgeführt, und betrachte demgemäß a wie eine Function von x und y. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus der Gleichung (1) durch unmittelbare Differentiation die Gleichung

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}=0.$$

Aber nach der anfänglichen Voraussetzung ist die Gleichung (2) durch Elimination der Größe a, welche als constant gedacht wurde, aus der Gleichung (1) und ihrer Differentialgleichung hervorgegangen, und diese Differentialgleichung war in diesem Falle

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

Soll also auch in dem Falle, wo a veränderlich und eine Function von x und y ist, dasselbe Resultat erscheinen, so reicht es hin, diese Function a durch die Bedingung zu bestimmen, daß das Glied $\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}$ verschwinden soll; denn alsdann werden die beiden Gleichungen, aus denen die Elimination vorzunehmen ist, in beiden Fällen dieselbe sein, und folglich auch dieselbe Gleichung (2) als Resultat ergeben.

Nun kann man das in Rede stehende Glied auf doppelte Weise zum Verschwinden bringen; nämlich entweder wenn man setzt $\frac{da}{dx} = 0$, wodurch man a gleich einer beliebigen Constante findet und mithin wieder zu dem Falle des allgemeinen Integrals zurückgeführt wird; oder wenn man setzt $\frac{dF}{da} = 0$, und im Fall sich hieraus für a eine Function von x und y ergibt, so wird deren Substitution in die Gleichung (1) oder $F=0$ zu einer primitiven Gleichung führen, welche, ohne eine willkürliche Constante zu enthalten, der Differentialgleichung Genüge leistet, und mithin die gesuchte besondere Auflösung sein wird.

§. 411. Nach dem Vorhergehenden kann man immer die besondere Auflösung finden, sobald man das allgemeine Integral kennt. Die besondere Auflösung kann aber auch aus der Differentialgleichung selbst abgeleitet werden.

Man betrachte nämlich eine von den Curven, welche in dem allgemeinen Integrale enthalten sind, entsprechend einem bestimmten Werthe a der Constante. Diese Curve wird zugleich geschnitten und berührt durch die unendlich nahe liegende Curve, welche dem Werthe $a + da$ der Constante zugehört, und der beiden gemeinschaftliche Punkt ist zugleich ein Punkt der einhüllenden Linie, deren Gleichung die besondere Auflösung ist. Aber die nämliche dem Werthe a der Constante entsprechende Curve wird nicht mehr berührt, sondern bloß geschnitten durch alle übrigen Curven, welche Werthen der Constante zugehören, die von a um eine endliche Größe verschieden sind. Daraus folgt, daß die Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wenn man sie für $\frac{dy}{dx}$ auflöst, im allgemeinen zwei oder mehrere verschiedene Werthe für dieses Differentialverhältniß liefern muß, sobald man für x und y vollkommen beliebige Werthe an die Stelle setzt. Wenn man aber für x und y solche Werthe annimmt, welche Punkten der einhüllenden Linie angehören, d. h. welche der besonderen Auflösung Genüge leisten, die die Gleichung dieser einhüllenden Linie ist, so muß es wenigstens zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ geben, welche einander gleich werden. Also muß die besondere Auflösung der doppelten Forderung entsprechen: 1) der gegebenen Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

(wo zur Abkürzung y' statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt worden ist) Genüge zu leisten, und 2) wenigstens zwei unter den Werthen von y', die dieser Gleichung Genüge leisten, einander gleich zu machen. Nun wird die Existenz zweier oder mehrerer gleichen Werthe von y', welche durch die vorstehende Gleichung gegeben werden, ausgedrückt durch die Bedingung

$$\frac{df}{dy'} = 0;$$

woraus folgt, daß die Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dy'} = 0$$

die gesuchten besonderen Auflösungen, falls es deren gibt, liefern muß.

§. 412. Man findet die besondere Auflösung auch auf folgende Weise.

Man denke sich die gegebene Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ aufgelöst in Bezug auf y', und unter die Form gebracht

$$y' + V = 0,$$

wo V eine Function von x und y ist. Da die Curven, welche durch die besonderen Integrale dargestellt werden, im allgemeinen einander schneiden, und nur in solchen Punkten einander zugleich berühren und schneiden, welche der einhüllenden Curve angehören, so muß die Function $-V$, welche den Werth von y' darstellt, im allgemeinen wenigstens zwei verschiedene Werthe für diese Größe geben; dagegen sobald man für x und y solche Werthe setzt, welche der einhüllenden Curve angehören, so werden zwei von den Werthen der Function $-V$ einander gleich werden. Nun kann man sich $-V$ wie die vertikale Ordinate einer krummen Fläche denken, deren horizontale Abscissen sind x und y; und diese Fläche muß nach dem Vorigen eine solche Gestalt haben, daß die vertikale Ordinate sie im allgemeinen wenigstens in zwei Punkten schneidet, und sie nur dann in einem einzigen Punkte trifft, wenn die Abscissen x und y der besonderen Auflösung angehören. Daraus folgt, daß die in Rede stehende Fläche (falls sie keine Unterbrechung der Continuität erleidet) durch den vertikalen Cylinder berührt wird, dessen Basis die einhüllende Curve ist, d. h. die Curve, welche die besondere Auflösung zu ihrer Gleichung hat; und hieraus läßt sich leicht schließen, daß für solche Werthe von x und y, die der besonderen Auflösung angehören, man zu gleicher Zeit haben muß

$$\frac{dV}{dx} = \infty, \quad \frac{dV}{dy} = \infty;$$

folglich auch

$$\frac{dy'}{dx} = \infty, \quad \frac{dy'}{dx} = \infty.$$

Diese Bedingungen liefern also die besondere Auflösung, falls eine solche existirt.

§. 413. Man kann überdies bemerken, daß man durch Differentiation der gegebenen Gleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

erhält

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0.$$

Da hier der Factor $\frac{df}{dy'}$ des letzten Gliedes, nach §. 411, für alle Werthe von x und y, welche der besonderen Auflösung angehören, den Werth Null besitzt, so wird man schließen, daß der Werth des Differentialverhältnisses der zweiten Ordnung $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, welchen diese Gleichung gibt, unbestimmt bleiben, d. h. daß die Gleichung für jeden Werth, den man für das in Rede stehende Differentialverhältniß setzen mag, Gültigkeit behalten muß. Ebenso wird es sich sodann mit den Differentialverhältnissen aller höheren Ordnungen verhalten. Dieser Umstand hat darin seinen Grund, daß jeder Punkt der einhüllenden Curve zu drei verschiedenen Curven gehört, die mit einander eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, oder für welche das Differentialverhältniß der ersten Ordnung $\frac{dy}{dx}$ einen gemeinschaftlichen Werth besitzt; nämlich den beiden Curven, welche durch die besonderen Integrale gegeben werden, die den Werthen a und $a + da$ der willkürlichen Constante entsprechen, und der einhüllenden Curve selbst, die gleichfalls in der Differentialgleichung enthalten ist. Aber die Werthe der Differentialverhältnisse der höheren Ordnungen sind im allgemeinen für diese verschiedenen Curven verschieden; und da die Gleichungen, von denen diese Differentialverhältnisse abhängen, nur einen einzigen Werth liefern können, so löst die Rechnung diesen Widerspruch dadurch, daß sie diesen Werth unbestimmt werden läßt. Wenn man also aus der gegebenen Differentialgleichung den Ausdruck für $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ entwickelt, und

Zähler und Nenner desselben einzeln gleich Null setzt, so erhält man zwei Gleichungen, welche zugleich mit der gegebenen Gleichung für diejenigen Werthe von x und y bestehen müssen, die der besonderen Auflösung angehören. Eliminirt man y' zwischen jeder dieser beiden Gleichungen und der gegebenen, so wird, wenn die Resultate dieser Eliminationen einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, dieser Factor die gesuchte besondere Auflösung sein. Wenn dagegen diese Resultate nicht mit einander bestehen können, so wird man daraus schließen, daß es keine besondere Auflösung gibt.

§. 414. Wenn man das Vorhergehende auf die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} - y + b = 0$$

anwendet, welche im §. 380 betrachtet wurde und deren allgemeines Integral ist

$$y - ax - b = 0,$$

wo a die willkürliche Constante bedeutet, so findet man als besondere Auflösung das System der Werthe $x = 0$ und $y = b$, welche dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aller geraden Linien angehören, die durch das allgemeine Integral dargestellt werden.

§. 415. Wenn man dagegen ebenso die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} - a - 2x = 0$$

behandelt, welche im §. 381 betrachtet wurde und deren allgemeines Integral ist

$$y - ax - x^2 + b = 0,$$

wo b die willkürliche Constante bedeutet, so findet man kein Resultat. Es kann hier nämlich keine besondere Auflösung geben, weil die Curven, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, keine einhüllende Curve besitzen. Ebenso verhält es sich mit der Gleichung des §. 382.

§. 416. Man betrachte die Gleichung

$$y = ax + b,$$

welche einer geraden Linie angehört, deren Lage durch die Werthe der Constanten a und b bestimmt ist. Der Abstand dieser Linie vom Anfangspunkte der Coordinaten hat den Ausdruck $\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$. Eliminirt man also b aus der vorigen Gleichung und der Gleichung

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} = r,$$

wo r eine Constante bedeutet, so wird die entstehende Gleichung

$$y = ax + r\sqrt{a^2+1}$$

einer geraden Linie angehören, welche einen Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, berührt und mit der Achse der x einen Winkel einschließt, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist.

Differentiirt man diese Gleichung, und eliminirt mit Hülfe der Differentialgleichung die Constante a, so erhält man, wenn man y' statt $\frac{dy}{dx}$ schreibt,

$$y = xy' + r\sqrt{y'^2 + 1}.$$

Aus der Entstehung dieser Gleichung wird man sodann schließen, daß das allgemeine Integral derselben die primitive Gleichung ist

$$y = ax + r\sqrt{a^2 + 1},$$

in welcher a die willkürliche Constante bedeutet, und welche gleich wie die Differentialgleichung dem Systeme aller geraden Linien angehört, die einen Abstand r vom Anfangspunkte der Coordinaten besitzen; so wie ferner, daß sie als besondere Auflösung die Gleichung hat

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

welche den Kreis darstellt, der durch alle diese geraden Linien berührt wird und der geometrische Ort ihrer unendlich nahe auf einander folgenden Durchschnittspunkte ist.

Wenn man nun aber die Differentialgleichung

$$y = xy' + r\sqrt{y'^2 + 1}$$

als gegeben ansehen und nach den vorhin entwickelten Methoden behandeln will, so wird man zunächst bemerken, daß sie unter den Fall des §. 407 fällt. Man findet also unmittelbar nach diesem Paragraphen $y = ax + r\sqrt{a^2 + 1}$ als allgemeines Integral, in welchem a die willkürliche Constante ist. Ferner wird der Factor $x + \frac{dN}{dy'}$ hier $x + \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}$. Setzt man denselben gleich Null, so erhält man $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, und dieser Werth, in die gegebene Differentialgleichung substituirt, gibt $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, welches die besondere Auflösung ist.

Will man nach §. 409 die besondere Auflösung aus dem allgemeinen Integrale

$$y = ax + r\sqrt{a^2 + 1}$$

herleiten, so hat man a zu eliminiren aus dieser Gleichung und ihrer derivirten in Bezug auf a, nämlich

$$0 = x + \frac{ra}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Das Resultat dieser Elimination ist aber augenscheinlich wieder das obige.

Will man die besondere Auflösung aus der gegebenen

Differentialgleichung herleiten, so hat man nach §. 411 y' zu eliminiren aus den beiden Gleichungen

$$y - xy' - r\sqrt{y'^2+1} = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}} = 0,$$

wodurch sich wieder dasselbe Resultat ergiebt.

Nach §. 413 hat man die gegebene Gleichung

$$y - xy' - r\sqrt{y'^2+1} = 0$$

zu differentiiren, um daraus den Werth von y'' oder $\frac{dy'}{dx}$ herzuleiten; dies gibt

$$xy'' + \frac{ry'y''}{\sqrt{y'^2+1}} = 0.$$

Die Gleichung liefert in dem hier vorliegenden Falle keinen allgemeinen Ausdruck von y'' durch x, y und y', welches darin seinen Grund hat, daß der Werth von y'' für die besonderen Integrale, welche gerade Linien darstellen, stets Null ist. Aber die Gleichung läßt sich in die beiden Factoren zerlegen

$$y'' = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}} = 0,$$

und da die in Rede stehende Methode fordert, daß der Werth von y'' vollkommen unbestimmt bleiben muß, so wird man schließen, daß die erste dieser beiden Gleichungen dem allgemeinen Integrale, die zweite dagegen der besonderen Auflösung angehört.

Endlich wenn man nach §. 412 die gegebene Differentialgleichung in Bezug auf y' auflöst, um sie auf die Form $y' + V = 0$ zu bringen, so findet man

$$y' + \frac{xy \pm r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r^2-x^2} = 0.$$

Man sieht, daß diese Gleichung im allgemeinen für y' zwei verschiedene Werthe gibt, entsprechend denjenigen beiden Tangenten des Kreises, welche sich in dem Punkte durchschneiden, den die willkürlich angenommenen Werthe von x und y feststellen. Aber die Werthe von y' werden einander gleich, wenn die Wurzelgröße in der vorstehenden Gleichung Null wird, d. h. wenn x und y der Gleichung genügen

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

und mithin ist dies die besondere Auflösung. Die Bedingung welche die beiden Werthe von y' einander gleich macht, ergab sich hier unmittelbar; indessen würde sich auch leicht nachweisen lassen, daß di.selbe Bedingung aus den Gleichungen $\frac{dy'}{dx} = \infty$ und $\frac{dy'}{dy} = \infty$ hervorgeht.

§. 417. Die hier betrachtete Differentialgleichung ist ein besonderer Fall der Gleichung des §. 407.

$$y = xy' + N,$$

in welcher N eine beliebige Function von y' bedeutet. Aus dem Vorigen ist klar, daß das allgemeine Integral dieser Gleichung einem Systeme von geraden Linien angehört, deren Gleichungen man aus der gegebenen Gleichung erhält, wenn man darin für y' eine willkürliche Constante an die Stelle setzt. Ferner werden alle diese geraden Linien diejenige Curve berühren, deren Gleichung man erhält, wenn man y' aus den beiden Gleichungen eliminirt

$$y = xy' + N \text{ und } x + \frac{dN}{dy'} = 0.$$

§. 418. Hinsichtlich der allgemeinen Gleichung des §. 406

$$y = Mx + N,$$

in welcher M und N Functionen von y' allein sind, ist das allgemeine Integral bereits in dem angezeigten Paragraphen angegeben. Die besondere Auflösung, d. h. die Gleichung derjenigen Curve, welche von allen Curven berührt wird, die den besonderen Integralen entsprechen, erhält man durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$y = Mx + N \quad \text{und} \quad e^{-\int \frac{dM}{M-y'}} = 0,$$

von denen die letztere einerlei ist mit $\int \frac{dM}{M-y'} = \infty$.

§. 419. Es liegt zuweilen die Aufgabe vor, ein System von Curven einer gegebenen Art so zu legen, daß dieselben sämmtlich Tangenten an einer anderen gleichfalls gegebenen Curve werden. Diese Aufgabe kommt darauf hinaus, eine primitive Gleichung, deren allgemeine Form gegeben ist, so zu bestimmen, daß ihrer derivirten Gleichung eine gegebene Gleichung als besondere Auflösung zugehört. Es sei allgemein

$$F(x, y, a, b, \text{ꝛc.}) = 0$$

eine Gleichung, in welcher a, b, ꝛc. Constanten sind. Man fordert, daß das System der Curven, welche in dieser Gleichung enthalten sein können, indem man die Constanten sich ändern läßt, eine andere durch die Gleichung

$$\Phi(x, y) = 0$$

dargestellte Curve berühre, oder was dasselbe sagt, zu ihrer einhüllenden Curve habe.

Durch Differentiation der beiden gegebenen Gleichungen findet man

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

und wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so wird die entstehende Gleichung, nämlich

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

die Bedingung ausdrücken, daß die durch die gegebenen Gleichungen dargestellten Curven eine Berührung der ersten Ordnung mit einander eingehen. Eliminirt man also x und y aus den drei Gleichungen

$$F(x, y, a, b, \text{2c.}) = 0, \quad \Phi(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

so wird das Resultat, welches nur noch die Constanten a, b, 2c. enthält, diejenige Beziehung aussprechen, welche zwischen a und den übrigen Constanten stattfinden muß, damit die in Rede stehende Bedingung erfüllt werde. Löst man mithin diese letzte Gleichung für eine der Constanten auf, z. B. für b, und setzt den gefundenen Werth in die gegebene Gleichung

$$F(x, y, a, b, \text{2c.}) = 0,$$

so wird das Ergebniß dieser Elimination die verlangte Eigenschaft haben.

§. 420. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$y^2 + ax + b = 0,$$

welche einer Parabel angehört, deren Achse mit der Achse der x zusammenfällt; so wie die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

welche einen Kreis vom Halbmesser r darstellt, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Es wird gefordert, die durch die erste Gleichung dargestellten Parabeln so zu bestimmen, daß sie sämmtlich Tangenten an diesem Kreise werden.

Die Differentiation der vorstehenden Gleichungen gibt

$$2yy' + a = 0, \quad 2x + 2yy' = 0,$$

woraus durch Elimination von y' folgt

$$2x - a = 0.$$

Eliminirt man nun x und y aus den drei Gleichungen

$$y^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad 2x - a = 0,$$
so erhält man die Relation
$$r^2 + \frac{a^2}{4} + b = 0, \quad \text{woraus } b = -\frac{a^2}{4} - r^2.$$
Wird dieser Werth in die Gleichung $y^2 + ax + b = 0$ substituirt, so verwandelt sich dieselbe in
$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0,$$
welche Gleichung die verlangte Eigenschaft hat.

Die Richtigkeit dieses Resultats läßt sich auch leicht wieder nach den früheren Regeln erkennen. Wenn man nämlich auf die gefundene Gleichung die Vorschrift des §. 409 anwendet, um die besondere Auflösung derjenigen derivirten Gleichung zu erhalten, deren allgemeines Integral sie ist, so hat man aus den beiden Gleichungen
$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0, \quad \text{und } 2x - a = 0$$
die willkürliche Constante a zu eliminiren, wodurch man als besondere Auflösung findet
$$y^2 + x^2 - r^2 = 0.$$
Die derivirte Gleichung von
$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0$$
erhält man übrigens durch Differentiation in Bezug auf x, welches gibt
$$2yy' + a = 0,$$
und durch Elimination der Constante a aus diesen beiden Gleichungen. Die derivirte Gleichung wird sodann
$$y^2 - 2xyy' - y^2y'^2 - r^2 = 0;$$
und auf diese kann man wieder die Regeln der §§. 411 ꝛc.

anwenden. Wenn man sie z. B. in Bezug auf y' auflöst, so kommt

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{y^2 + x^2 - r^2}}{y}.$$

Die Gleichung, welche die Gleichheit zweier Werthe von y' ausdrückt, d. h. die besondere Auflösung, wird also

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0.$$

§. 421. Man betrachte noch die Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - x^2 \frac{g}{2v^2 \cos\alpha^2},$$

welche die Bahn eines geworfenen Körpers im leeren Raume ausdrückt. Wenn man den Winkel α oder die Elevation des Wurfes sich ändern läßt, so erhält man verschiedene Curven; die einhüllende Linie aller dieser Curven findet man nach §. 409, indem man die vorstehende Gleichung in Bezug auf α differentiirt, welches gibt

$$0 = 1 - \frac{gx}{v^2} \operatorname{tang} \alpha,$$

und sodann zwischen beiden Gleichungen α eliminirt. Die hervorgehende Gleichung wird

$$x^2 = \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gy).$$

Die Curve, welche alle Wurfbahnen berührt, ist also eine Parabel, deren Achse vertikal und deren Scheitel in der Höhe $\frac{v^2}{2g}$ über dem Anfangspunkte liegt.

XXXIII. Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen von der zweiten und von höherer Ordnung.

---

§. 422. Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat allgemein die Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

wo x die unabhängige Veränderliche ist, und y eine andere Veränderliche, deren Werth von dem Werthe von x vermittelst derjenigen Beziehung abhängt, die in dieser Gleichung ausgesprochen liegt.

Von der Bedeutung einer solchen Gleichung kann man sich auf ähnliche Weise einen Begriff machen, wie es im §. 376 geschehen ist. Man betrachte x wie die Abscisse und y wie die Ordinate einer ebenen Curve. Will man die Curve, der die vorstehende Gleichung angehört, construiren, so denke man sich diese aufgelöst in Bezug auf $\frac{d^2y}{dx^2}$, wo man einen Ausdruck durch x, y, und $\frac{dy}{dx}$ finden wird. Man stelle sodann willkürlich zwei Werthe für x und y fest, d. h. einen beliebigen Punkt, durch welchen man die Curve hindurch führen will. Man nehme ferner willkürlich einen Werth für $\frac{dy}{dx}$ an, d. h. für die Neigung, welche die Curve in diesem Punkte besitzen soll. Die gegebene Gleichung liefert alsdann einen bestimmten Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$, mit dessen Hülfe die Construction der Curve wird vorgenommen werden können. Denn läßt man x sich um die sehr kleine Größe Δx ändern, so erhält man sehr nahe folgende Werthe der Coordinaten:

Abscissen.	Zugehörige Ordinaten.
x	y
$x + \Delta x$	$y + \frac{dy}{dx}\Delta x$
$x + \Delta x + \Delta x$	$y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x\right)\Delta x.$

Man kann also die Curve mit einer desto größeren Genauigkeit construiren, je kleiner die Aenderungen Δx angenommen werden.

Hieraus wird man schließen, daß die gegebene Differentialgleichung eine Eigenschaft ausdrückt, die einer unendlich großen Zahl von Curven gemeinschaftlich ist, welche man sich in einer Ebene gezeichnet denken kann. Sie bestimmt die Gestalt dieser Curven, sobald man einen Punkt, durch welchen dieselben geführt werden sollen, und die Richtung der Tangente in diesem Punkte als gegeben ansieht. Diese Gleichung hat also eine umfassendere Bedeutung als die Gleichung der ersten Ordnung; es reicht hier zur Bestimmung der Curve nicht hin, daß einer von ihren Punkten gegeben sei, sondern es bedarf dazu noch der Angabe der Richtung der Tangente in diesem Punkte. Mit anderen Worten, die Wahl irgend einer von den Curven, welche durch die gegebene Gleichung dargestellt werden können, hängt von zwei willkürlichen Constanten ab, von denen die eine y und die andere $\frac{dy}{dx}$ bestimmt, wenn x gegeben ist.

§. 423. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung muß nach dem Gesagten, wenn es dieselbe Allgemeinheit wie diese Differentialgleichung besitzen soll, zwei willkürliche Constanten enthalten. Außerdem aber muß es der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten. Diese Bedingungen sind hinreichend, damit beide, das Integral und sein Differential, das nämliche System von Curven darstellen.

§. 424. Es sei allgemein

$$F(x, y, a, b) = 0$$

eine primitive Gleichung, in welcher a und b zwei Constanten sind, und y wie eine Function von x angesehen wird. Zu ihrer derivirten Gleichung der zweiten Ordnung kann man auf mehrere verschiedene Arten gelangen: 1) Man differentiirt zweimal nach einander in Bezug auf x, und eliminirt darauf zwischen der Gleichung und ihren beiden Differentialen die Constanten a und b.*) 2) Man differentiirt einmal, und eliminirt sowohl a als b zwischen der primitiven Gleichung und ihrer Differentialgleichung der ersten Ordnung, wodurch man zwei verschiedene Differentialgleichungen der ersten Ordnung bekommt, von denen jede nur noch eine der beiden Constanten enthält. Differentiirt man darauf jede dieser beiden Gleichungen, und eliminirt die Constante, welche sie enthält, mit Hülfe des gefundenen Differentials, so gelangt man aus beiden zu der nämlichen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, die zugleich mit derjenigen übereinstimmen muß, welche man nach der ersten Methode findet.

Diese Uebereinstimmung liegt in der Natur der Sache begründet. Die primitive Gleichung $F(x, y, a, b) = 0$ muß angesehen werden wie die Darstellung eines doppelten Systems von Curven; nämlich der Curven, welche aus der Veränderlichkeit von a entstehen, während b constant bleibt, und der Curven, welche aus der Veränderlichkeit von b hervorgehen, während a constant bleibt. Jede der derivirten Gleichungen der ersten Ordnung, in welcher eine der Constanten verschwunden ist, entspricht einem dieser beiden Systeme insbesondere. Die

*) Soweit diese Constanten durch die Differentiation selbst schon wegfallen, wird, wie man leicht sieht, die Elimination derselben überflüssig.

Differentialgleichung der zweiten Ordnung also, welche keine der beiden Constanten mehr enthält, gehört beiden Systemen von Curven gleichmäßig an, und spricht eine Eigenschaft aus, die ihnen gemeinschaftlich ist.

§. 425. Man betrachte z. B. die primitive Gleichung

$$y^2 + ay + bx = 0, \qquad (1)$$

welche einer Parabel angehört, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und deren Achse parallel mit der Achse der x ist. Läßt man a sich ändern, während b constant bleibt, so ändert man nur die Lage der Achse der Parabel; läßt man b sich ändern, während a constant bleibt, so ändert man nur den Parameter. Schreibt man nun zur Abkürzung y' und y'' statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, so hat man zunächst die Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$2yy' + ay' + b = 0; \qquad (2)$$

und eliminirt man aus dieser Gleichung und der primitiven Gleichung sowohl a als b, so erhält man die beiden Gleichungen der ersten Ordnung

$$y^2y' + b(y - xy') = 0 \qquad (3)$$

$$y^2 - 2xyy' + a(y - xy') = 0, \qquad (4)$$

welche resp. den obigen beiden Systemen von Parabeln angehören. Die Differentiation der Gleichung (3) gibt

$$2yy'^2 + y^2y'' - bxy'' = 0,$$

und durch Elimination von b aus dieser Gleichung und der Gleichung (3) gelangt man zu der Gleichung der zweiten Ordnung

$$y^2y'' + 2yy'^2 - 2xy'^3 = 0. \qquad (5)$$

Durch Differentiation der Gleichung (4) erhält man

$$2y'^2 + 2yy'' + ay'' = 0,$$

und die Elimination von a aus dieser Gleichung und der Gleichung (4) führt wieder zu der Gleichung (5).

Nach der ersten Methode des vorigen Paragraphen würde man aus der primitiven Gleichung und ihren beiden auf einander folgenden Differentialen, nämlich

$$y^2 + ay + bx = 0$$
$$2yy' + ay' + b = 0$$
$$2y'^2 + 2yy'' + ay'' = 0,$$

durch gleichzeitige Elimination von a und b gleichfalls wieder zu der nämlichen Gleichung der zweiten Ordnung (5) gelangen.

Diese Gleichung (5), in welcher die beiden Constanten a und b verschwunden sind, drückt eine Relation aus, welche für jede der parabolischen Curven stattfindet, die in der Gleichung (1) enthalten sind, wenn man darin diesen Constanten alle möglichen Werthe beilegt. Die Gleichungen (3) und (4), von denen jede nur eine willkürliche Constante enthält, sind die beiden Integrale der ersten Ordnung, oder die **ersten Integrale** der Gleichung (5). Die Gleichung (1), welche zwei willkürliche Constanten enthält, ist das **zweite Integral** der nämlichen Gleichung. Eliminirt man y' aus den beiden Gleichungen (3) und (4), so erhält man wieder die Gleichung (1).

§. 426. Allgemein, wenn man auf irgend eine Weise zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung gefunden hat, welche einer gegebenen Differentialgleichung der zweiten Ordnung Genüge leisten, und von denen jede eine Constante enthält, die nicht in dieser letzten Gleichung vorkommt, so erhält man durch Elimination von y' oder $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden in Rede stehenden Gleichungen eine primitive Gleichung, welche zwei willkürliche Constanten enthält, und welche nothwendig der gegebenen Gleichung Genüge leistet, mithin das allgemeine Integral derselben darstellt.

§. 427. Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich sofort auf Differentialgleichungen von jeder beliebigen Ordnung übertragen. Eine Differentialgleichung von der Ordnung n hat immer n Integrale von der unmittelbar niedrigern Ordnung, von denen jede eine andere willkürliche Constante enthält. Alle diese Constanten müssen sich in dem allgemeinen Integrale wiederfinden, sobald man will, daß letzteres dieselbe Allgemeinheit besitze wie die gegebene Differentialgleichung. Denn umgekehrt, eine primitive Gleichung und ihre auf einander folgenden Differentiale bis zur Ordnung n geben $n+1$ Gleichungen, aus den n willkürliche Constanten eliminirt werden können. Kennte man jene n ersten Integrale der gegebenen Gleichung, so könnte man daraus das allgemeine $n$te Integral oder die primitive Gleichung herleiten, indem man aus den n Integralen die $n-1$ Differentialverhältnisse $y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)}$, eliminirte.

Das Gesagte wird noch klarer werden durch Betrachtung der Maclaurin'schen Reihe

$$y = y_0 + x\frac{dy_0}{dx} + \frac{x^2}{2}\,\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\,\frac{d^3y_0}{dx^3} + \text{rc.},$$

welche die Entwickelung der Function y in eine nach ganzen Potenzen der Veränderlichen x geordnete Reihe liefert, ausgedrückt durch solche Werthe dieser Function und ihre Differentialverhältnisse, welche dem Werthe $x = 0$ entsprechen. Es sei eine Differentialgleichung der Ordnung n gegeben

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

von welcher hier die Function y als abhängig gedacht wird. Man kann aus dieser Gleichung den Ausdruck von $\frac{d^ny}{dx^n}$

durch $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ herleiten, und folglich auch die Ausdrücke der Differentialverhältnisse aller höheren Ordnungen. Mithin werden auch die Werthe von $\frac{d^ny_0}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_0}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_0}{dx^{n+2}}$, ꝛc. bekannt sein als Functionen der Werthe von $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \frac{d^3y_0}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$. Substituirt man also jene Werthe in den obigen allgemeinen Ausdruck von y, so erhält man eine Relation zwischen x und y, welche die Entwickelung des allgemeinen Integrals der gegebenen Differentialgleichung in eine unendliche Reihe darstellt, und in welcher die zuletzt genannten Größen, deren Anzahl n ist, vollkommen willkürlich bleiben.

§. 248. Man bemerke ferner, daß die Taylor'sche Reihe liefert, wenn man in ihr $h = -x$ setzt,

$$y_0 = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

und daß man ebenso durch Anwendung derselben auf die Functionen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. erhält

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^5y}{dx^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^2}{2}\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^6y}{dx^6} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Wenn nun die gegebene Differentialgleichung von der Ordnung n ist, so liefert sie $\frac{d^ny}{dx^n}$ und folglich auch alle Differentialverhältnisse von höheren Ordnungen ausgedrückt durch $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Substituirt man diese Ausdrücke in die n ersten der vorstehenden Gleichungen, so erhält man, in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, n Differentialgleichungen von der Ordnung $n-1$, von denen jede eine von den Größen y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, . . . $\frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$ als willkürliche Constante enthalten wird.

Integration der einfachsten Differentialgleichungen von der zweiten und von höherer Ordnung.

§. 429. Die Integration kann nur in einer kleinen Anzahl besonderer Fälle ausgeführt werden.

Es sei zuerst die Gleichung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X,$$

wo X eine Function von x allein bezeichnet. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem constanten Factor dx, und integrirt, so kommt

$$d \cdot \frac{dy}{dx} = Xdx, \quad \frac{dy}{dx} = A + \int Xdx.$$

Multiplicirt man diese Gleichung wieder mit dx und integrirt abermals, so hat man

$$dy = Adx + dx \int Xdx, \quad y = B + Ax + \int dx \int Xdx.$$

Die letzte Gleichung ist das gesuchte Integral, und darin sind A und B die beiden willkürlichen Constanten.

Wenn man an dem Ausdrucke $\int dx \int Xdx$ die Integration durch Theile ausführt, so kann man statt des gefundenen Ausdrucks für y auch schreiben

$$y = B + Ax + x \int Xdx - \int Xxdx.$$

Es sei ferner die Gleichung gegeben

$$\frac{d^3y}{dx^3} = X,$$

so findet man auf dieselbe Weise

$$y = C + Bx + \tfrac{1}{2} Ax^2 + \int dx \int dx \int X dx$$

oder wenn man wieder auf das letzte Integral die Integration durch Theile anwendet

$$y = C + Bx + \tfrac{1}{2} Ax^2 + \tfrac{1}{2} x^2 \int X dx - x \int X x dx + \tfrac{1}{2} \int X x^2 dx,$$

wo A, B, C die willkürlichen Constanten sind. Ebenso kann man fortfahren, und es ist leicht das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke zu erkennen.

§. 430. Es sei die Gleichung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P,$$

in welcher P eine Function des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ allein bezeichnet, welches zur Abkürzung mit y' bezeichnet werden mag. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{dy'}{dx} = P,$$

und man erhält daraus zunächst

$$dx = \frac{dy'}{P}, \quad x = A + \int \frac{dy'}{P}.$$

Ferner hat man

$$dy = y' dx = \frac{y' dy'}{P}, \quad y = B + \int \frac{y' dy'}{P}.$$

Eliminirt man nun y' aus diesen beiden Gleichungen, nachdem man die angezeigten Integrationen ausgeführt hat, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche das gesuchte Integral ist und in welcher A und B die willkürlichen Constanten sind.

Man kann bemerken, daß wenn die Function P der vorstehenden Gleichung auch x neben y' enthielte, die Auflösung sich auf die Integration der Gleichung $P dx - dy' = 0$ zwischen den beiden Veränderlichen x und y' reduciren würde; und wenn die Function P noch y neben y' enthielte, so würde man die Gleichung $Pdy - y'dy' = 0$ zwischen den beiden Veränderlichen y und y' zu integriren haben.

§. 431. Wenn die Gleichung der dritten Ordnung gegeben ist

$$\frac{d^3y}{dx^3} = Q,$$

wo Q eine Function des Differentialverhältnisses der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder y'' allein bezeichnet, so kann man auf ähnliche Weise schreiben

$$\frac{dy''}{dx} = Q,$$

woraus

$$dx = \frac{dy''}{Q}, \quad x = A + \int \frac{dy''}{Q},$$

Ferner hat man

$$dy' = y''dx = \frac{y''dy''}{Q}, \quad y' = B + \int \frac{y''dy''}{Q},$$

und daraus

$$dy = y'dx = Bdx + \frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}, \quad y = C + Bx + \int\frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}.$$

Die Elimination von y'' aus dieser Gleichung und der Gleichung $x = A + \int\frac{dy''}{Q}$ gibt sodann das gesuchte Integral, in welchem $A, B, C,$ die drei willkürlichen Constanten sind.

Ebenso kann man mit den Gleichungen von höheren Ordnungen verfahren, welche einen ähnlichen Bau haben.

§. 432. Es sei die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y,$$

in welcher Y eine Function von y allein bedeutet. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dy, so kommt

$$\frac{dy\, d^2y}{dx^2} = Ydy, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} d \,.\, \frac{dy}{dx} = Ydy,$$

woraus durch Integration

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = A + 2 \int Ydy.$$

Mithin wird

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{A + 2\int Ydy}}, \quad x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A + 2\int Ydy}}$$

das gesuchte Integral, in welchem A und B die beiden willkürlichen Constanten sind.

§. 433. Wenn die gegebene Gleichung ist

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P,$$

wo P eine Function von $\frac{dy}{dx}$ oder y' allein bezeichnet, so kann man statt dieser Gleichung auch schreiben

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = P,$$

und daraus erhält man wie im vorigen Paragraphen

$$dx = \frac{dy'}{\sqrt{A + 2\int Pdy'}}, \quad x = B + \int \frac{dy'}{\sqrt{A + 2\int Pdy'}}.$$

Aber man hat ferner

$$dy = y'\, dx = \frac{y'\, dy'}{\sqrt{A + 2\int Pdy'}}, \quad y = C + \int \frac{y'\, dy'}{\sqrt{A + 2\int Pdy'}}.$$

Eliminirt man y' aus diesen beiden Gleichungen, so findet man das gesuchte Integral, welches die drei willkürlichen Constanten A, B, C enthält.

§. 434. Dieses Verfahren läßt sich leicht auf alle Gleichungen von höherer Ordnung ausdehnen, in denen das Differentialverhältniß bloß als Function desjenigen Differentialverhältnisses gegeben wird, dessen Ordnung um zwei Einheiten niedriger ist. Es sei gegeben

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Q,$$

wo Q eine Function von $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder y'' allein bedeutet. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{d^2y''}{dx^2} = Q,$$

woraus man erhält

$$dx = \frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}, \quad x = B + \int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}},$$

Ferner hat man

$$dy' = y'' dx = \frac{y''\,dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}, \quad y' = C + \int\frac{y''\,dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

und daraus

$$dy = y'\,dx = Cdx + \frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}\int\frac{y''\,dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

$$y = D + Cx + \int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}\int\frac{y''\,dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

Die Elimination von y'' aus den beiden gefundenen Gleichungen gibt das gesuchte Integral. Man kann bemerken, daß selbst in dem Falle, wo etwa diese Elimination nicht ausführbar ist, die beiden Gleichungen dennoch je zwei zusammengehörige Werthe für x und y geben, wenn man willkürlich Werthe für y'' annimmt.

§. 435. Es sei noch als ein einfaches Beispiel die Gleichung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y,$$

wo k^2 eine positive Constante bezeichnet. Das Integral wird nach §. 432

$$x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A+k^2y^2}} = B + \frac{1}{k}\, l\,(ky + \sqrt{A+k^2y^2}),$$

woraus man leicht findet (indem man die willkürlichen Constanten ändert)

$$y = Ae^{-kx} + Be^{kx}.$$

Wenn dagegen gegeben ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y,$$

so kommt

$$x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A-k^2y^2}} = B + \frac{1}{k} \operatorname{arc\,sin} \frac{ky}{\sqrt{A}}$$

woraus man erhält

$$y = \frac{\sqrt{A}}{k} \sin k\,(x - B)$$

oder auch (indem man die willkürlichen Constanten ändert)

$$y = A \sin kx + B \cos kx.$$

Diese beiden Integrale können übrigens auch aus einander hergeleitet werden, wobei man auf die Beziehungen unter den Exponentialfunctionen und den trigonometrischen Functionen (XII. Abschnitt) Rücksicht zu nehmen hat. *)

---

*) Nach dem obigen Beispiele läßt sich auch noch die folgende Gleichung, welche x enthält, integriren

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay + bx + c.$$

Denn wenn man statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ schreibt y'', so hat man

$$y'' = ay + bx + c$$

und durch zweimaliges Differentiiren

$$\frac{d^2y''}{dx^2} = ay'',$$

Von den integrirenden Factoren einer Differentialgleichung von beliebiger Ordnung.

§. 436. Eine Differentialgleichung von beliebiger Ordnung kann man sich immer auf die Form gebracht denken

$$\frac{d^ny}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

Denn wie auch die Gleichung von der Ordnung $n-1$ beschaffen sein mag, deren dirivirte Gleichung hier vorliegt, so kann man in derselben immer die Constante, welche man will verschwinden lassen, auf eine Seite allein setzen, und folglich unmittelbar durch Differentiation eine Gleichung von der Ordnung n erhalten, in welcher das Differentialverhältniß der höchsten Ordnung nur in der ersten Potenz vorkommt. Sobald aber die Gleichung die vorstehende Form besitzt, so läßt sich nachweisen, daß es immer eine unendliche Menge von Factoren von solcher Beschaffenheit geben müsse, daß die linke Seite dieser Gleichung durch Multiplication mit einem dieser Factoren in ein genaues Differential der Veränderlichen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ verwandelt wird.

Es sei z. B. die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$y'' + f(x, y, y') = 0,$$

wo zur Abkürzung y' und y'' statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt worden sind; und man bezeichne mit

$$F(x, y, y', a) = 0$$

---

welche Gleichung wie oben zu integriren ist. Der daraus hervorgehende Ausdruck für y'' liefert sodann, in die gegebene Gleichung gesetzt, unmittelbar den gesuchten Ausdruck für y.

Wenn aber statt der linearen Function $bx + c$ eine beliebige Function von x gesetzt worden wäre, so würde das allgemeinere Verfahren der §§. 445 und 446 zur Anwendung kommen.

die Gleichung der ersten Ordnung, deren derivirte sie ist, indem a die Constante bezeichnet, welche man hat verschwinden lassen. Die gegebene Gleichung ist also das Resultat der Elimination von a aus der Gleichung $F=0$ und derjenigen Gleichung, welche aus dieser letzteren durch unmittelbare Differentiation hervorgeht, nämlich

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''=0.$$

Bringt man mithin diese Gleichung auf die Form

$$y''+\frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'}{\frac{dF}{dy'}}=0,$$

und setzt hierin für a seinen Ausdruck durch x, y und y' aus der Gleichung $F=0$, so muß sie mit der gegebenen Gleichung identisch werden. Man hat demnach die identische Gleichung

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{dF}{dy'}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y'';$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, so muß es auch die linke Seite sein. Also wird die gegebene Gleichung unmittelbar integrirbar, wenn man sie mit $\frac{dF}{dy'}$ multiplicirt, nachdem man in diesem Factor für a seinen Werth aus der Gleichung $F=0$ an die Stelle gesetzt hat.

Wenn man ferner a in der Gleichung $F=0$ als veränderlich ansieht, so gibt die Differentiation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''+\frac{dF}{da}a'=0$$

wo a' statt $\frac{da}{dx}$ geschrieben ist; und daraus

$$\frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''}{\frac{dF}{da}}=-a'.$$

Vermöge des Vorhergehenden hat man also

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}=-a',$$

und diese Gleichung zeigt, daß durch Multiplication der gegebenen Gleichung mit dem Factor $\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$ die linke Seite derselben ein genaues Differential wird, dessen Integral gleich $-a$ ist, wo a durch die Gleichung $F=0$ gegeben wird.

Ueberdies wird die gegebene Gleichung gleichfalls ein genaues Differential, wenn man sie mit $\frac{\varphi(a)\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$ multiplicirt, wo $\varphi(a)$ eine beliebige Function von a bedeutet; denn sie wird dadurch identisch mit der Größe $-\varphi(a).a'$. Bezeichnet man mit $\Phi(a)$ die Function, deren derivirte Function $-\varphi(a).a'$ ist, so wird also das Integral der gegebenen Gleichung werden $\Phi(a)=\text{Const.}$, welches gibt $a=\text{Const.}$ Und da man für a seinen Werth aus der Gleichung $F=0$ an die Stelle gesetzt denken muß, so sieht man, daß die Gleichung $a=\text{Const.}$ nicht verschieden ist von der Gleichung $F=0$, wenn man in dieser a wie eine willkürliche Constante ansieht.

§. 437. Es ist oben nachgewiesen worden, daß eine

Differentialgleichung der zweiten Ordnung immer zwei primitive Gleichungen oder zwei Integrale der ersten Ordnung besitzt, von denen jede eine andere willkürliche Constante enthält. Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß jede dieser beiden Gleichungen andere integrirende Factoren liefern wird, welche in gleicher Weise geeignet sind, die vorgelegte Gleichung der zweiten Ordnung in ein genaues Differential zu verwandeln. Man kann indessen alle diese Factoren auch in eine allgemeine Formel zusammenfassen.

Es seien nämlich

$$F(x, y, y', a) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(x, y, y', b) = 0$$

die beiden primitiven Gleichungen der ersten Ordnung von der gegebenen Gleichung, in denen a und b die beiden willkürlichen Constanten bedeuten. Man hat sodann in Folge der vorigen Entwickelung

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}} = - a',$$

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{\frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}} = - b'.$$

Es sei nun $\Phi(a, b)$ eine beliebige Function von a und b. Multiplicirt man die beiden vorstehenden Gleichungen resp. mit $\frac{d\Phi}{da}$ und $\frac{d\Phi}{db}$, und addirt, so erhält man

$$[y'' + f(x, y, y')] \left(\frac{\frac{d\Phi}{da} \frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}} + \frac{\frac{d\Phi}{db} \frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}} \right) = - \left(\frac{d\Phi}{da} a' + \frac{d\Phi}{db} b' \right);$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung die vollständige derivirte Function von $- \Phi(a, b)$ ist, so folgt, daß die

Multiplication der gegebenen Gleichung mit dem Factor
$\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}} + \frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}}$ dieselbe gleichfalls zu einer vollständigen derivirten Function machen muß, deren primitive Function ist $-\Phi(a, b) = \text{Const.}$

Da man ebenso eine andere beliebige Function $\Psi(a, b)$ hätte wählen können, welche zu dem Integrale $-\Psi(a, b) = \text{Const.}$ geführt haben würde, so erhält man $a = \text{Const.}$ und $b = \text{Const.}$ für die beiden Integrale der gegebenen Gleichung, wo a und b resp. durch die Gleichungen $F = 0$ und $F_1 = 0$ bestimmt werden.

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf Differentialgleichungen von jeder beliebigen Ordnung ausdehnen.

Integration der linearen Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen und von beliebiger Ordnung.

§. 438. Unter linearen Differentialgleichungen versteht man solche Gleichungen, in denen die Function y und die Differentialverhältnisse derselben nur in der ersten Potenz vorkommen. Sie sind allgemein von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + Uy = V, \quad (1)$$

wo $P, Q, \ldots U, V$ beliebige Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sein können.

Man betrachte zuerst die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + Uy = 0, \quad (2)$$

in welcher überdies die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ als constant, d. h. als unabhängig von x und y, vorausgesetzt werden. Man sucht das Integral dieser Gleichung, oder denjenigen Ausdruck von y durch x, welcher ihr Genüge leistet und außerdem n willkürliche Constanten enthält, die nicht in der gegebenen Differentialgleichung vorkommen.

Setzt man $y = e^{px}$, so folgt allgemein $\frac{d^n y}{dx^n} = p^n e^{px}$, und durch Substitution dieser Werthe in die gegebene Gleichung erhält man

$$p^n + Pp^{n-1} + Qp^{n-2} + \ldots + U = 0. \tag{3}$$

Nimmt man also für p eine der Wurzeln der Gleichung (3), so wird der Werth $y = e^{px}$ der Gleichung (2) Genüge leisten und mithin ein besonderer Werth der Function y sein. Da nun die Gleichung (3) immer n Wurzeln besitzt, die hier vorläufig als verschieden von einander vorausgesetzt und mit $p', p'', p''', \ldots p^{(n)}$ bezeichnet werden mögen, so erhält man auf diese Weise n besondere Werthe von der Form e^{px}, welche sämmtlich der Gleichung (2) Genüge leisten.

Multiplicirt man jeden dieser Werthe mit einem constanten Coefficienten, so werden sie gleichfalls noch der Gleichung (2) genügen. Ebenso geschieht dieser Gleichung noch Genüge durch die Summe zweier oder einer größeren Anzahl der in Rede stehenden Werthe. Wenn man demnach aus den n besonderen Werthen, welche den Wurzeln p', p'', $p''', \ldots p^{(n)}$ entsprechen, den Ausdruck bildet

$$y = A' e^{p'x} + A'' e^{p''x} + A''' e^{p'''x} + \ldots + A^{(n)} e^{p^{(n)}x},$$

so wird derselbe nicht nur der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, sondern auch, da er die n willkürlichen Constanten $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ enthält, das allgemeine Integral dieser Gleichung darstellen.

§. 439. Wenn die Gleichung (3) imaginäre Wurzeln besitzt, so bleibt die vorstehende Methode gleichfalls anwendbar, indem man die imaginären Exponentialgrößen durch die Sinus und Cosinus reeller Bögen ersetzen kann. Sind nämlich $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ zwei imaginäre Wurzeln der Gleichung (3), so geben die entsprechenden besonderen Werthe die Summe

$$A' e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + A'' e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$$

oder

$$e^{\alpha x}(A' e^{\beta x\sqrt{-1}} + A'' e^{-\beta x\sqrt{-1}})$$

oder

$$e^{\alpha x}\left[(A' + A'')\cos\beta x + (A' - A'')\sqrt{-1}\,.\sin\beta x\right]$$

oder, wenn man B' und B'' an die Stelle von $A' + A''$ und $(A' - A'')\sqrt{-1}$ setzt,

$$e^{\alpha x}(B'\cos\beta x + B''\sin\beta x),$$

wo B' und B'' zwei neue willkürliche Constanten bedeuten.

§. 440. Wenn die Gleichung (3) zwei oder mehrere gleiche Wurzeln besitzt, so bedarf die angegebene Methode einer Modification. Das Integral nimmt sodann eine eigenthümliche Gestalt an, zu der man auf folgende Weise gelangt.

Es werde zuerst vorausgesetzt, die beiden Wurzeln p' und p'' seien sehr wenig von einander verschieden, so daß man setzen kann $p'' = p' + \omega$, wo ω eine sehr kleine Größe bedeutet. Die Summe der beiden entsprechenden besonderen Werthe wird alsdann

$$A' e^{p'x} + A'' e^{(p'+\omega)x} = e^{p'x}(A' + A'' e^{\omega x}),$$

oder wenn man die Exponentialfunction $e^{\omega x}$ entwickelt,

$$e^{p'x}\left(A' + A'' + A''\omega x + A''\frac{\omega^2 x^2}{2} + \text{rc.}\right).$$

Nimmt man jetzt ω als unendlich klein an, so hindert nichts, die Werthe von A' und A'' so zu wählen, daß $A''\omega$ einen endlichen und willkürlichen Werth behält, wodurch A'' unendlich groß wird; und daß $A'+A''$ gleichfalls einen endlichen und willkürlichen Werth behält, wodurch auch A' unendlich groß und dem A'' entgegengesetzt wird. Die Glieder, welche die höheren Potenzen von ω enthalten, werden dagegen verschwinden. Die Summe der beiden in Rede stehenden besonderen Werthe wird also für den Fall, wo man zwei Wurzeln gleich p' hat,

$$e^{p'x}(B'+B''x),$$

wo B' und B'' zwei willkürliche Constanten sind.

Dieselbe Schlußweise läßt sich auf den Fall anwenden, wo drei Wurzeln p', p'', p''' einander gleich sind. Setzt man nämlich $p'''=p'+\omega$, so wird die Summe der drei entsprechenden besonderen Werthe

$$e^{p'x}(A'+A''x)+A'''e^{(p'+\omega)x}$$

oder

$$e^{p'x}\left(A'+A''x+A'''+A'''\omega x+A'''\,\frac{\omega^2x^2}{2}+A'''\,\frac{\omega^3x^3}{2.3}+\text{ꝛc.}\right).$$

Wird sodann ω als unendlich klein angenommen, so kann man A', A'', A''' so wählen, daß die drei Größen $A'+A'''$, $A''+A'''\omega$, $\frac{1}{2}A'''\omega^2$ endliche und willkürliche Werthe behalten. Unterdrückt man also die mit ω^3 und den höheren Potenzen von ω behafteten Glieder, so bleibt für die Summe der drei in Rede stehenden Werthe

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2).$$

Ebenso kann man für jede größere Anzahl von gleichen Wurzeln fortgehen; und man erkennt daraus, daß allgemein die Anwesenheit von r gleichen Wurzeln der Gleichung (3), welche gleich p' sind, eben so viele besondere Werthe zu Stande bringt, deren Summe ausgedrückt wird durch

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2+\ldots B^{(r)}x^{r-1}).$$

§. 441. Hiernach möge die Gleichung (1) wieder aufgenommen werden, in welcher die Größen $P, Q, \ldots U, V$ im allgemeinen beliebige Functionen von x sein können. Man kann zuerst bemerken, daß wenn die Größe V gleich Null ist, d. h. wenn man bloß hat

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + Uy = 0, \qquad (4)$$

diese Gleichung alsdann gleichwie die Gleichung (2) die Eigenschaft besitzt, daß ihr durch die Summe mehrerer besonderen Werthe, von denen jeder mit einer willkürlichen Constante multiplicirt werden darf, Genüge geschieht, wie leicht zu beweisen ist. Die Kenntniß von n besonderen Werthen ist also hinreichend, um daraus unmittelbar das allgemeine Integral herzustellen.

§. 442. Wenn die Größe V in der Gleichung (1) nicht den Werth Null hat, so findet auch die genannte Eigenschaft nicht mehr statt. Man kann indessen in diesem Falle das allgemeine Integral auf folgendem Wege finden, sobald man n besondere Werthe kennt, welche der Gleichung (4) Genüge leisten.

Es seien $Y', Y'', Y''', \ldots Y^{(n)}$ die in Rede stehenden n besonderen Werthe. Man bilde daraus den allgemeinen Ausdruck

$$y = A'Y' + A''Y'' + A'''Y''' + \ldots + A^{(n)}Y^{(n)},$$

in welchem jetzt die Größen $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ unbestimmte Functionen von x bedeuten. Nimmt man von diesem Ausdrucke die auf einander folgenden Differentialverhältnisse, so hat man zuerst

$$\frac{dy}{dx} = A'\frac{dY'}{dx} + A''\frac{dY''}{dx} + A'''\frac{dY'''}{dx} + \ldots + A^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}$$

$$+ \frac{dA'}{dx}Y' + \frac{dA''}{dx}Y'' + \frac{dA'''}{dx}Y''' + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)},$$

und wenn man hierin die zweite Reihe gleich Null setzt, so unterwirft man damit die Functionen A', A'', A''', ... $A^{(n)}$ der Bedingung, dieser Gleichung Genüge zu leisten. Sodann erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A'\frac{d^2Y'}{dx^2}+A''\frac{d^2Y''}{dx^2}+A'''\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots+A^{(n)}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx}+\frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx}+\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Setzt man hier wieder die zweite Reihe gleich Null, so folgt weiter

$$\frac{d^3y}{dx^3}=A'\frac{d^3Y'}{dx^3}+A''\frac{d^3Y''}{dx^3}+A'''\frac{d^3Y'''}{dx^3}+\ldots+A^{(n)}\frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}.$$

wo wieder die zweite Reihe gleich Null gesetzt wird; und so fort. Man gelangt auf diese Weise zu

$$\frac{d^ny}{dx^n}=A'\frac{d^nY'}{dx^n}+A''\frac{d^nY''}{dx^n}+A'''\frac{d^nY'''}{dx_n}+\ldots+A^{(n)}\frac{d^nY^{(n)}}{dx^n}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}}.$$

wo die zweite Reihe gleich V gesetzt wird.

In Folge dieser Entwickelung ist nun klar, daß wenn die Werthe $y=Y'$, $y=Y''$, $y=Y'''$, ... $y=Y^{(n)}$ einzeln der Gleichung (4) Genüge leisten, sodann der allgemeine Ausdruck

$$y=A'Y'+A''Y''+A'''Y'''+\ldots+A^{(n)}Y^{(n)}$$

in gleicher Weise der Gleichung (1) Genüge leisten wird, vorausgesetzt, daß man die Functionen A', A'', A''', ... $A^{(n)}$ wie den n Bedingungen unterworfen ansieht

$$\frac{dA'}{dx}Y' + \frac{dA''}{dx}Y'' + \frac{dA'''}{dx}Y''' + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)} = 0$$

$$\frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx} + \frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx} + \frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx} + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx} = 0$$

$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2} + \frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2} + \frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2} = 0$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}} + \frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}} + \frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}} = V.$$

Diese Gleichungen geben, da sie lineär sind, für die Functionen $\frac{dA'}{dx}, \frac{dA''}{dx}, \frac{dA'''}{dx}, \ldots \frac{dA^{(n)}}{dx}$ immer bestimmte Werthe, die mit $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots \Phi^{(n)}$ bezeichnet werden mögen. Der Ausdruck für das gesuchte allgemeine Integral wird also

$$y = Y'(a' + \int \Phi' dx) + Y''(a'' + \int \Phi'' dx) + Y'''(a''' + \int \Phi''' dx) + \ldots$$
$$\ldots + Y^{(n)}(a^{(n)} + \int \Phi^{(n)} dx),$$

und enthält die n willkürlichen Constanten $a', a'', a''', \ldots a^{(n)}$.

§. 443. Wenn man nur eine Anzahl von besonderen Werthen kennt, die kleiner ist als die Zahl n, welche die Ordnung der gegebenen Differentialgleichung bezeichnet, so ist die vorstehende Methode nicht mehr auf gleiche Weise anwendbar. Die Functionen $\frac{dA'}{dx}, \frac{dA''}{dx}, \frac{dA'''}{dx}$ 2c. sind sodann nicht mehr in hinreichender Anzahl vorhanden, damit man alle Gleichungen aufstellen könne, welche nöthig sind, um die zweiten Reihen in den Ausdrücken der Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, 2c. zum Verschwinden zu bringen, und man wird deshalb genöthigt sein, in diesen Ausdrücken die höheren Differentialverhältnisse einiger der unbestimmten Functionen A', A'', A''', 2c. stehen zu lassen. Die Auf=

suchung der Werthe dieser Functionen fordert also die Integration einer oder mehrerer Differentialgleichungen. Wenn die Anzahl der bekannten, besonderen Werthe $n-1$ beträgt, so kann das allgemeine Integral immer gefunden werden, weil die Bestimmung der Functionen A', A'', A''', ꝛc. dann nur die Integration einer linearen Differentialgleichung der ersten Ordnung erforderlich macht, welche Integration nach §. 386 stets geleistet werden kann.

§. 444. In dem besonderen Falle, wo die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ der Gleichung (1) constante Zahlen sind und nur das Glied V eine Function von x ist, kennt man unmittelbar aus §. 438 die besonderen Werthe Y', Y'', Y''', $\ldots Y^{(n)}$, welche ausgedrückt werden durch $e^{p'x}$, $e^{p''x}$, $e^{p'''x}$, $\ldots e^{p(n)x}$, wo p', p'', p''', $\ldots p^{(n)}$ die Wurzeln der Gleichung (3) sind. Die vorstehende Methode gibt also leicht den Ausdruck des gesuchten Integrals.

§. 445. Es sei z. B. die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V.$$

Bezeichnet man mit p' und p'' die Wurzeln der Gleichung

$$p^2 + Pp + Q = 0,$$

so wird der allgemeine Ausdruck für y

$$y = A'e^{p'x} + A''e^{p''x},$$

und die Functionen A' und A'' müssen den Gleichungen genügen

$$\frac{dA'}{dx}e^{p'x} + \frac{dA''}{dx}e^{p''x} = 0$$

$$\frac{dA'}{dx}p'e^{p'x} + \frac{dA''}{dx}p''e^{p''x} = V.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{dA'}{dx} = \frac{Ve^{-p'x}}{p'-p''}, \quad A' = \frac{a' + \int dx.\,Ve^{-p'x}}{p'-p''},$$

$$\frac{dA''}{dx} = \frac{Ve^{-p''x}}{p''-p'}, \quad A'' = \frac{a'' + \int dx.\,Ve^{-p''x}}{p''-p'},$$

wo a' und a'' die beiden willkürlichen Constanten sind. Das gesuchte Integral ist also

$$y = \frac{(a' + \int dx.\,Ve^{-p'x})e^{p'x} - (a'' + \int dx.\,Ve^{-p''x})e^{p''x}}{p'-p''}.$$

§. 446. Wenn die Wurzeln der Gleichung $p^2 + Pp + Q = 0$ imaginär sind und mit $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ bezeichnet werden, so setzt man nach §. 439 als allgemeinen Ausdruck für y

$$y = A'e^{\alpha x}\cos\beta x + A''e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Die Functionen A' und A'' sind hier den Gleichungen unterworfen

$$\frac{dA'}{dx}\,e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{dA''}{dx}\,e^{\alpha x}\sin\beta x = 0$$

$$\frac{dA'}{dx}(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x) + \frac{dA''}{dx}(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) = V,$$

aus denen folgt

$$\frac{dA'}{dx} = -\frac{Ve^{-\alpha x}\sin\beta x}{\beta}, \quad A' = \frac{a' - \int dx.\,Ve^{-\alpha x}\sin\beta x}{\beta}$$

$$\frac{dA''}{dx} = \frac{Ve^{\overset{-\alpha x}{\cancel{\alpha+x}}}\cos\beta x}{\beta}, \quad A'' = \frac{a'' + \int dx.\,Ve^{-\alpha x}\cos\beta x}{\beta}.$$

Der Ausdruck des allgemeinen Integrals wird also

$$y = e^{\alpha x}\frac{(a' - \int dx.\,Ve^{-\alpha x}\sin\beta x)\cos\beta x + (a'' + \int dx.\,Ve^{-\alpha x}\cos\beta x)\sin\beta x}{\beta}.$$

§. 447. Wenn die Wurzeln der Gleichung $p^2 + Pp + Q = 0$ einander gleich werden, so verwandelt sich der Ausdruck des §. 445 für y in $\frac{0}{0}$. Man findet also seinen wahren Werth, wenn man Zähler und Nenner in Bezug auf p'' differentiirt, und sodann $p'' = p'$ setzt, wodurch man erhält

$$y = -(\int dx\,.\,xVe^{-p'x})\,e^{p'x} + (a'' + \int dx\,.\,Ve^{-p'x})\,xe^{p'x}.$$

Da die unteren Gränzen der Integrale willkürlich bleiben, so kann man in dem ersten Gliede die Constante a' wieder herstellen, und schreiben

$$y = (a' - \int dx\,.\,xVe^{-p'x})\,e^{p'x} + (a'' + \int dx\,.\,Ve^{-p'x})\,xe^{p'x}.$$

Diese Formel reducirt sich in dem Falle, wo $V = 0$ ist, auf

$$y = (a' + a''x)\,e^{p'x},$$

wie es auch sein muß, vermöge des §. 440.

§. 448. Die Integration der lineären Gleichungen der zweiten Ordnung liefert unmittelbar das Gesetz der Vertheilung der beharrlichen Temperaturen in einem Stabe oder einem Ringe, dessen Querschnitt constant und sehr klein ist.

Man denke sich einen cylindrischen oder prismatischen Stab von unbegränzter Länge, dessen eines Ende mit einer Wärmequelle (foyer) in Berührung gebracht sei, welche beständig auf der Temperatur U erhalten wird. Der Stab befinde sich überdies in Luft von der Temperatur 0. Die von der Wärmequelle dem Stabe mitgetheilte Wärme pflanzt sich in ihm fort, erhitzt ihn allmälig, und entweicht zum Theil in das umgebende Mittel. Nach einer hinreichenden Zeit werden sich in der ganzen Ausdehnung des Prisma beharrliche Temperaturen hergestellt haben, deren Gesetz man ausmitteln will, und die offenbar durch die Bedingung bestimmt werden, daß jedes Theilchen durch einen seiner Endpunkte eine Quantität Wärme von der Wärmequelle empfängt, welche gleich derjenigen ist, die es den nachfolgenden Theilchen zuführt und die diese Theilchen durch ihre Außenfläche verlieren.

Da die Querschnitte des Stabes sehr klein vorausgesetzt werden, so kann man die Temperaturen in allen Punkten eines und desselben Querschnitts wie gleich groß ansehen. Es sei nun

Ω der Flächeninhalt von einem Querschnitte des Stabes;

γ der Umfang dieses Querschnitts;

x der Abstand eines beliebigen Querschnitts von der Wärmequelle;

v die Temperatur in diesem Querschnitte;

k und h die innere und die äußere Leitungsfähigkeit der Substanz des Stabes.

Man betrachte das Längen-Element des Stabes, welches zwischen zwei Querschnitten in den Abständen x und $x + dx$ enthalten ist. Die Oberfläche dieses Elements ist γdx; folglich die Quantität Wärme, welche durch seine Außenfläche in der Einheit der Zeit verloren geht, gleich $h\gamma v dx$; und daraus erhält man die Menge Wärme, welche in derselben Zeit durch den ganzen nachfolgenden Theil des Stabes verloren geht, ausgedrückt durch das Integral $h\gamma \int_x^\infty v dx$. Aber in Folge der Voraussetzung, daß die Temperatur in allen Punkten des nämlichen Querschnitts dieselbe sei, wird die Wärme das in Rede stehende Element ebenso durchschreiten, wie es in einem von zwei parallelen Ebenen eingeschlossenen unbegränzten Körper der Fall sein würde. Die Dicke des Körpers ist hier dx, und die Temperaturen an den beiden Gränzen sind v und $v + dv$; folglich ist die Quantität Wärme, welche ihn in der Einheit der Zeit durchschreitet, gleich $-k\Omega \frac{dv}{dx}$. Also erhält man als Ausdruck für die oben ausgesprochene Bedingung die Gleichung

$$-k\Omega \frac{dv}{dx} = h\gamma \int_x^\infty v dx,$$

aus deren Differentiation folgt

$$k\Omega \frac{d^2v}{dx^2} = h\gamma v.$$

Man gelangt auch unmittelbar zu dieser letzten Gleichung auf folgende Weise. Da $-k\Omega \frac{dv}{dx}$ die Quantität Wärme bezeichnet, welche den Querschnitt des Stabes, dessen Abstand von der Wärmequelle gleich x ist, in der Einheit der Zeit durchläuft, so hat man $-k\Omega\left(\frac{dv}{dx} + d.\frac{dv}{dx}\right)$ als Ausdruck für diejenige Quantität Wärme, welche in derselben Zeit den Querschnitt in dem Abstande $x + dx$ durchschreitet. Nun muß die Differenz dieser beiden Größen, nämlich $k\Omega \frac{d^2v}{dx^2}dx$, nothwendig gleich der Wärmemenge $h\gamma vdx$ sein, welche in demjenigen Theile der Oberfläche entweicht, der dem Intervalle dx entspricht. Man hat also wie vorhin

$$k\Omega \frac{d^2v}{dx^2}dx = h\gamma vdx, \text{ oder } \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h\gamma}{k\Omega}v.$$

§. 449. Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist, nach §. 435,

$$v = A.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{k\Omega}}} + B.e^{x\sqrt{\frac{h\gamma}{k\Omega}}},$$

wo e die Basis der Neper'schen Logarithmen bezeichnet, und A und B die beiden willkürlichen Constanten sind. Aber es ist klar, daß die Constante B hier den Werth Null haben muß, weil der Werth von v nicht zugleich mit x ohne Gränzen zunehmen kann. Ferner muß man haben $v = U$ für $x = 0$, folglich muß die Constante A gleich U sein. Der gesuchte Ausdruck für die Vertheilung der beharrlichen Temperaturen ist also

$$v = U \,.\, e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{k\Omega}}}\,.$$

Wenn man demnach die Temperaturen der verschiedenen Punkte des Prisma durch Zahlen darstellt, so werden die Abstände dieser Punkte von der Wärmequelle durch die zugehörigen Logarithmen ausgedrückt. In zwei Stäben von derselben Substanz sind die Abstände von der Wärmequelle, in denen einerlei Temperatur stattfindet, proportional der Größe $\sqrt{\frac{\Omega}{\gamma}}$, oder, wenn die Querschnitte ähnlich sind, proportional der Quadratwurzel aus homologen Dimensionen der Querschnitte. In zwei Stäben von verschiedenen Substanzen sind diese Abstände proportional der Größe $\sqrt{\frac{h\Omega}{k\gamma}}$. Man kann also durch Beobachtung der stattfindenden Temperaturen die relativen Werthe des Verhältnisses $\frac{k}{h}$ der beiden Leitungsfähigkeiten für verschiedene Körper ausmitteln. Man hat selbst gesucht, durch eben solche Beobachtungen die relativen Werthe der inneren Leitungsfähigkeit k zu bestimmen, indem man jedes Prisma mit einer Schicht von Firniß überzog, in der Absicht, beiden Körpern eine gleiche äußere Leitungsfähigkeit zu geben; doch bietet dieses Verfahren wol schwerlich die nöthige Genauigkeit.

§. 450. Aus der vorstehenden Gleichung kann man leicht alles, was die Bewegung der Wärme in den verschiedenen Theilen des Prisma betrifft, herleiten. Die Quantität Wärme, welche den Querschnitt in dem Abstande x von der Wärmequelle in der Einheit der Zeit durchläuft, ist

$$-k\Omega\frac{dv}{dx} = U\sqrt{hk\gamma\Omega}\,.\, e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{k\Omega}}}\,;$$

und folglich die Quantität Wärme, welche, von der Wärmequelle ausgehend, in derselben Zeit durch die ganze Oberfläche des Stabes in die Luft entweicht,

$$U\sqrt{hk\gamma\Omega}.$$

Diese Quantität ist also, bei Stäben von einerlei Substanz und ähnlichen Querschnitten, der Potenz $\frac{3}{2}$ von homologen Dimensionen dieser Querschnitte proportional.

§. 451. Man denke sich jetzt einen prismatischen Stab von einer bestimmten Länge a, dessen beide Enden resp. in den constanten Temperaturen U und V erhalten werden. Das Gesetz der Vertheilung der beharrlichen Temperaturen wird auch hier durch die Differentialgleichung des §. 448 gegeben; aber in dem allgemeinen Integrale des §. 449 welches man schreiben kann

$$v = A \,.\, e^{-\lambda x} + B \,.\, e^{\lambda x},$$

indem man zur Abkürzung $\sqrt{\frac{h\gamma}{k\Omega}} = \lambda$ setzt, muß man die willkürlichen Constanten A und B so bestimmen, daß man hat $v = U$ für $x = 0$, und $v = V$ für $x = a$. Dieses Integral wird sodann

$$v = \frac{U\left(e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)}\right) + V\left(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}\right)}{e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}},$$

welcher Ausdruck die Temperatur eines jeden Punktes angibt, der zwischen den beiden Enden des Stabes enthalten ist.

§. 452. Die vorstehenden Resultate setzen nicht nothwendig voraus, daß die Achse des Stabes geradlinig sei. So lange die Demensionen der Querschnitte sehr klein angenommen werden, kann man dem Stabe eine beliebige Gestalt geben, und sogar annehmen, daß er durch Vereinigung seiner beiden Enden zu einem geschlossenen Ringe werde. Die Formel des vorigen Paragraphen gibt noch in allen diesen Fällen das Gesetz der Vertheilung der beharrlichen Temperaturen in einem Stabe, dessen Länge, in dem Sinne der Achse des Stabes gemessen, gleich a ist, und dessen beide Enden resp. in den Temperaturen U und V erhalten werden.

Wenn der Stab einen Ring bildet, und nur eine einzige Wärmequelle von der Temperatur U vorhanden ist, so hat man augenscheinlich in der ganzen Ausdehnung des Ringes

$$v = U \frac{e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)} + e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}}{e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}}$$

oder

$$v = U \frac{e^{\lambda(a-x)} + e^{\lambda x}}{e^{\lambda a} + 1},$$

wo a den Umfang des Ringes bedeutet. Will man die x von dem Punkte des Ringes aus rechnen, welcher der Wärmequelle gegenüber liegt und den Umfang in zwei gleiche Theile zerlegt, so hat man

$$v = U \frac{e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda a} + e^{\frac{1}{2}\lambda a}}.$$

In der ersten von diesen beiden Formeln darf man für x nur Werthe zwischen 0 und a, in der zweiten dagegen nur Werthe zwischen $-\frac{a}{2}$ und $+\frac{a}{2}$ setzen.

§. 453. Man betrachte drei Punkte eines zwischen zwei Wärmequellen enthaltenen Intervalles, in den Abständen x, $x + \alpha$, $x + 2\alpha$ von dem Anfangspunkte der x. Bezeichnet man resp. mit v_0, v_1, v_2 ihre Temperaturen, so hat man nach der allgemeinen Gleichung des §. 451.

$$v_0 = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$$
$$v_1 = Ae^{-\lambda(x+\alpha)} + Be^{\lambda(x+\alpha)}$$
$$v_2 = Ae^{-\lambda(x+2\alpha)} + Be^{\lambda(x+2\alpha)}.$$

Folglich wird

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1} = \frac{Ae^{-\lambda x}(1 + e^{-2\lambda\alpha}) + Be^{\lambda x}(1 + e^{2\lambda\alpha})}{Ae^{-\lambda(x+\alpha)} + Be^{\lambda(x+\alpha)}}$$

oder

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1} = e^{-\lambda\alpha} + e^{\lambda\alpha}.$$

Man sieht hieraus, daß der Beharrungszustand der Temperaturen in einem Stabe oder einem Ringe immer von der Beschaffenheit ist, daß, wenn man zwischen zwei Wärmequellen mehrere gleich weit aus einander liegende Punkte annimmt und von diesen Punkten je drei auf einander folgende betrachtet, die Summe der Temperaturen der beiden äußeren Punkte zu der Temperatur des mittleren Punkts stets in dem nämlichen Verhältnisse steht, und daß dieses Verhältniß nur von dem Abstande der in Rede stehenden Punkte abhängt. Dieses bemerkenswerthe Resultat hat sich durch Versuche bestätigt.

XXXIV. Elimination der Veränderlichen aus gleichzeitigen Differentialgleichungen. Integration der gleichzeitigen lineären Gleichungen.

§. 454. Man betrachte mehrere Veränderliche x, y, z, 2c., die als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen v angesehen werden, und nehme an, es seien mehrere Gleichungen zwischen den Veränderlichen x, y, z, 2c. und ihren Differentialverhältnissen $\frac{dx}{dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$, 2c., $\frac{dy}{dv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, 2c., $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$ 2c. gegeben. Wenn diese Gleichungen in derselben Anzahl vorhanden sind wie die Veränderlichen x, y, z, 2c., so kann man stets aus dem Systeme derselben neue Differentialgleichungen herleiten, welche nur eine einzige dieser Veränderlichen nebst der unabhängigen Veränderlichen v enthalten. Die Integration der gegebenen Gleichungen, d. h. die Aufsuchung der allgemeinen Ausdrücke von x, y, z, ꝛc. als Functionen der unabhängigen Veränderlichen wird also damit auf den Fall einer einzigen Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen zurückgeführt.

Um dies nachzuweisen, seien zunächst nur zwei Gleichungen zwischen den beiden Veränderlichen x, y und ihren Differentialverhältnissen in Bezug auf v gegeben. Es sei m die Ordnung der ersten Gleichung in Bezug auf y, und n die Ordnung der zweiten Gleichung in Bezug auf dieselbe Veränderliche. Differentiirt man n mal die erste Gleichung, und m mal die zweite, so erhält man mit Einschluß der gegebenen Gleichungen, $m+n+2$ Gleichungen, aus denen man die Veränderliche y und ihre Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, $\frac{d^3y}{dv^3}$, ꝛc. bis zur Ordnung $m+n$ eliminiren kann. Es bleibt sodann eine Gleichung übrig, welche nur noch die Veränderliche x und ihre Differentialverhältnisse in Bezug auf v enthält. Auf dieselbe Weise gelangt man zu einer Gleichung für y.

Dieses Verfahren läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Anzahl der Veränderlichen und der gegebenen Gleichungen beträchtlicher ist. Auch erkennt man leicht, daß, wenn die gegebenen Differentialgleichungen lineär sind, die angezeigte Elimination gleichfalls zu einer lineären Endgleichung führen wird.

§. 455. Man kann in einigen Fällen, insbesondere wenn die gleichzeitigen Differentialgleichungen lineär sind und constante Coefficienten besitzen, unmittelbar zu primitiven Gleichungen gelangen, aus denen sich die allgemeinen

Werthe der Veränderlichen herleiten lassen. Es seien zunächst zwei Gleichungen der ersten Ordnung gegeben, deren allgemeine Form ist

$$P\frac{dx}{dv}+Q\frac{dy}{dv}+Sx+Ty=U$$

$$P'\frac{dx}{dv}+Q'\frac{dy}{dv}+S'x+T'y=U'.$$

Durch eine leichte Elimination kann man dieselben auf die einfachere Form bringen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dv}+Sx+Ty&=U\\ \frac{dy}{dv}+S'x+T'y&=U'.\end{aligned}\qquad(1)$$

Hierin sind S, T, U, S', T', U' im allgemeinen als Functionen von v anzusehen. Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß die beiden Veränderlichen x und y zugleich in beiden vorgelegten Gleichungen vorkommen, und mithin handelt es sich darum, statt dieser beiden Gleichungen zwei andere herzustellen, von denen jede nur eine einzige Veränderliche nebst der unabhängigen Veränderlichen v enthält. Um dahin zu gelangen, multiplicire man die zweite Gleichung mit einem Factor Φ, der eine unbestimmte Function von v bedeutet, und addire sie zu der ersteren, wodurch man erhält

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+(S+S'\Phi)x+(T+T'\Phi)y=U+U'\Phi.$$

Ferner setze man $x+\Phi y=u$, wo u eine neue Veränderliche bedeutet. Sodann wird

$$x=u-\Phi y\ ,\ \frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y,$$

und durch Substitution dieser Werthe in die vorige Gleichung verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi)\,u-y\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi)\,\Phi-(T+T'\Phi)\right]$$
$$=U+U'\Phi.$$

Bestimmt man nun die Function Φ so, daß sie der Gleichung Genüge leistet

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi)\,\Phi-(T+T'\Phi)=0, \qquad (2)$$

so bleibt nur noch die Gleichung zu integriren

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi)\,u=U+U'\Phi. \qquad (3)$$

Die Gleichung (2) enthält nur die Veränderlichen Φ und v. Kann man einen Werth von Φ finden, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, so substituirt man denselben in die Gleichung (3), die alsdann nur noch die Veränderlichen u und v enthalten wird und mithin nach Vorschrift der §§. 438 rc. behandelt werden kann.

§. 456. Wenn die Coefficienten S, T, S', T' der Gleichungen (1) constant sind, so kann man der Gleichung (2) dadurch Genüge leisten, daß man für Φ eine constante Zahl annimmt, wodurch $\frac{d\Phi}{dv}=0$ wird. Der Werth dieser Zahl wird durch die Gleichung des zweiten Grades gegeben

$$(S+S'\Phi)\,\Phi-(T+T'\Phi)=0. \qquad (4)$$

Wendet man sodann auf die Gleichung (3) die Methode des §. 386 an, so erhält man als Integral dieser Gleichung

$$u=e^{-(S+S'\Phi)v}\left[C+\int dv\,.\,(U+U'\Phi)\,e^{(S+S'\Phi)v}\right], \qquad (5)$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet. In diesem Ausdrucke hat man für Φ die beiden Werthe zu setzen, welche der Gleichung (4) genügen; und wenn man dieselben mit Φ_1 und Φ_2 bezeichnet, und für u seinen Ausdruck durch x und y zurücksetzt, so hat man die beiden primitiven Gleichungen

$$x+\Phi_1 y=e^{-(S+S'\Phi_1)v}\left[C_1+\int dv\,.\,(U+U'\Phi_1)\,e^{(S+S'\Phi_1)v}\right]$$
$$x+\Phi_2 y=e^{-(S+S'\Phi_2)v}\left[C_2+\int dv\,.\,(U+U'\Phi_2)\,e^{(S+S'\Phi_2)v}\right],$$

aus denen man die Ausdrücke der beiden Veränderlichen x und y als Functionen von v herleiten kann.

§. 457. Wenn die Wurzeln der Gleichung (4) imaginär sind und mit $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ bezeichnet werden, so kann man das Imaginäre vermeiden, wenn man die Forderung fallen läßt, daß Φ unabhängig von v sein soll. Es wird nämlich in diesem Falle die Gleichung (2), der die Größe Φ Genüge leisten muß, die Form annehmen

$$\frac{d\Phi}{dv} + S' [(\Phi - \alpha)^2 + \beta^2] = 0$$

oder durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{d\Phi}{(\Phi - \alpha)^2 + \beta^2} + S'\, dv = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tang} \frac{\Phi - \alpha}{\beta} = c - S'v,$$

wo c eine willkürliche Constante bezeichnet; und daraus wird

$$\Phi = \alpha + \beta \operatorname{tang} \beta (c - S'\, v).$$

Gibt man nun der Constante c irgend zwei besondere Werthe, z. B. $\beta c = 0$ und $\beta c = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die beiden Werthe

$$\Phi = \alpha - \beta \operatorname{tang} \beta S'v \quad , \quad \Phi = \alpha + \beta \cot \beta S'v,$$

deren Substitution in die Gleichung (3) zwei Gleichungen hervorgehen läßt, welche gleichfalls nach der Methode des §. 386 integrirt werden können und wie vorhin zur Bestimmung von x und y als Functionen von v führen.

Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (4) einander gleich sind und mit ϱ bezeichnet werden, (in welchem Falle die Methode des vorigen Paragraphen nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung von x und y liefern würde) so kann man die Gleichung (2) auf die Form bringen

$$\frac{d\Phi}{dv} + S'(\Phi - \varrho)^2 = 0$$

oder durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{d\Phi}{(\Phi - \varrho)^2} + S'dv = 0.$$

Das Integral derselben ist

$$\frac{1}{\Phi - \varrho} = c + S'v,$$

wo c eine willkürliche Constante bezeichnet; und daraus hat man

$$\Phi = \varrho + \frac{1}{c + S'v}.$$

Gibt man der Constante c irgend zwei besondere Werthe, z. B. $c = \infty$ und $c = 0$, so erhält man

$$\Phi = \varrho \quad , \quad \Phi = \varrho + \frac{1}{S'v},$$

welche beiden Werthe wie oben in die Gleichung (3) zu substituiren sind.

§. 458. Man nehme jetzt an, es seien drei Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen den Veränderlichen x, y, z und der unabhängigen Veränderlichen v gegeben, die man sich wie im §. 455 immer auf die Form gebracht denken kann

$$\frac{dx}{dv} + Sx + Ty + Uz = V$$

$$\frac{dy}{dv} + S'x + T'y + U'z = V'$$

$$\frac{dz}{dv} + S''x + T''y + U''z = V''.$$

Multiplicirt man resp. die zweite und die dritte Gleichung mit den unbestimmten Factoren Φ und Ψ, und addirt sie zu der ersten Gleichung, so erhält man

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)x+(T+T'\Phi+T''\Psi)y$$
$$+(U+U'\Phi+U''\Psi)z=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

Setzt man sodann $x+\Phi y+\Psi z=u$, wo u eine neue Veränderliche bedeutet, so wird

$$x=u-\Phi y-\Psi z$$
$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y-\frac{d\Psi}{dv}z,$$

und durch Substitution dieser Werthe in die vorige Gleichung verwandelt sich dieselbe in

$$\left.\begin{array}{l}\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u \\ -y\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)\right] \\ -z\left[\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U'\Psi)\right]\end{array}\right\}=V+V\Phi'+V''\Psi.$$

Wenn man nun die Functionen Φ und Ψ so bestimmt, daß sie den beiden Gleichungen Genüge leisten

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T'\Psi)=0$$
$$\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U'\Psi)=0,$$

so bleibt nur noch die Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen u und v zu integriren

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

Die gegebenen Gleichungen werden also aufgelöst sein, wenn man Werthe von Φ und Ψ finden kann, welche jenen beiden Gleichungen entsprechen.

§. 459. Nimmt man an wie im §. 456, daß die Coefficienten S, T, U, S', T', U', S'', T'', U'' auf den linken Seiten der gegebenen Gleichungen constante Zahlen sind, so kann man für Φ und Ψ gleichfalls constante Werthe annehmen, welche durch die Gleichungen bestimmt werden

$$(S + S'\Phi + S''\Psi)\Phi - (T + T'\Phi + T''\Psi) = 0$$

$$(S + S'\Phi + S''\Psi)\Psi - (U + U'\Phi + U''\Psi) = 0,$$

und da die Endgleichungen, welche die Werthe von Φ und Ψ geben, den dritten Grad erreichen, so erhält man drei Systeme von Werthen, die resp. mit Φ_1 und Ψ_1, Φ_2, und Ψ_2, Φ_3 und Ψ_3 bezeichnet werden mögen.

Das Integral der Gleichung zwischen u und v wird

$$u = e^{-(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\left[C + \int dv(U + U'\Phi + U''\Psi)e^{(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\right]$$

folglich hat man die drei primitiven Gleichungen

V za U

$$x + \Phi_1 y + \Psi_1 z =$$
$$e^{-(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\left[C_1 + \int dv(U + U'\Phi_1 + U''\Psi_1)e^{(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\right]$$

$$x + \Phi_2 y + \Psi_2 z =$$
$$e^{-(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\left[C_2 + \int dv(U + U'\Phi_2 + U''\Psi_2)e^{(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\right]$$

$$x + \Phi_3 y + \Psi_3 z =$$
$$e^{-(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\left[C_3 + \int dv(U + U'\Phi_3 + U''\Psi_3)e^{(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\right]$$

welche die Werthe von x, y, z als Functionen von v bestimmen.

Dieselbe Methode läßt sich auf die Fälle anwenden, wo man eine größere Anzahl von Veränderlichen und von Differentialgleichungen hat, und man übersieht leicht, daß diese Gleichungen immer integrirt werden können, so lange die Coefficienten auf ihrer linken Seite constant sind.

§. 460. Bis hieher wurde die Voraussetzung gemacht, daß die gegebenen Differentialgleichungen von der ersten Ordnung seien. Wenn die Gleichungen von der zweiten Ordnung oder von höheren Ordnungen sind so kann man diesen Fall immer auf folgende Weise auf den vorigen zurückführen.

Es seien z. B. die beiden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2x}{dv^2} + A\frac{dx}{dv} + B\frac{dy}{dv} + Cx + Dy = E$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + A'\frac{dx}{dv} + B'\frac{dy}{dv} + C'x + D'y = E'.$$

Man setze $\frac{dx}{dv} = p$ und $\frac{dy}{dv} = q$, wo p und q neue Veränderliche bezeichnen; sodann hat man die Gleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{dp}{dv} + Ap + Bq + Cx + Dy = E$$

$$\frac{dq}{dv} + A'p + B'q + C'x + D'y = E'$$

$$\frac{dx}{dv} - p = 0$$

$$\frac{dy}{dv} - q = 0$$

zwischen den vier Veränderlichen x, y, p, q und der unabhängigen Veränderlichen v. Diese Gleichungen können nach der obigen Methode behandelt werden, und führen also zu den gesuchten Ausdrücken für x und y.

XXXV. Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

---

§. 461. Wenn es nicht möglich ist, durch die bekannten Methoden einen Ausdruck derjenigen Funktion, welche durch eine Differentialgleichung gegeben wird, in endlicher Form zu erhalten, so kann man diesen Ausdruck in der Form einer unendlichen Reihe darzustellen suchen. So lange diese Reihe convergirt, eignet sich dieser Ausdruck eben so gut wie jeder andere zur Berechnung der numerischen Werthe der gesuchten Function.

Die Function y sei durch die Differentialgleichung gegeben

$$f\left(x, y\,\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0;$$

die Entwickelung dieser Function in eine Reihe kann man sodann im allgemeinen auf dem Wege erhalten, welcher im §. 427 angezeigt worden ist. Wenn man nämlich diese Gleichung für $\frac{d^ny}{dx^n}$ auflöst, so liefert sie die Werthe dieses Differentialverhältnisses und der Differentialverhältnisse aller höheren Ordnungen, welche dem Werthe $x = 0$ entsprechen; und substituirt man diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck

$$y = y_0 + \frac{dy_0}{dx}x + \frac{d^2y_0}{dx^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^3y_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3} + \text{rc.},$$

so erhält man die verlangte Entwickelung der Function y, in welcher die n willkürlichen Coefficienten stehen bleiben $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

In den besonderen Fällen, wo die Annahme $x = 0$ die Werthe von $\frac{d^ny}{dx^n}$ und den höheren Differentialverhältnissen unendlich groß werden läßt, kann man von einem beliebigen anderen Werthe $x = a$ ausgehen, der diesen Erfolg nicht herbeiführt. Man wird sodann nach der Taylor'schen Reihe setzen

$$y = y_a + \frac{dy_a}{dx}(x-a) + \frac{d^2y_a}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{d^3y_a}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{2.3} + \text{rc.},$$

wo mit $y_a, \frac{dy_a}{dx}, \frac{d^2y_a}{dx^2}$, rc. die besonderen Werthe bezeichnet sind, welche y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ꝛc. annehmen, wenn man darin für x den Werth a setzt. In diesen Ausdruck hat man also jetzt die Werthe von $\frac{d^n y_a}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1} y_a}{dx^{n+1}}$, $\frac{d^{n+2} y_a}{dx^{n+2}}$, ꝛc. zu substituiren, welche sich aus der vorgelegten Differentialgleichung ergeben.

§. 462. Man gelangt häufig einfacher zum Ziele, wenn man statt des angezeigten Verfahrens die Methode der unbestimmten Coefficienten anwendet. Es sei z. B. die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0.$$

Um dieser Gleichung Genüge zu leisten, setze man

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + A_3 x^{\alpha+3} + A_4 x^{\alpha+4} + \text{ꝛc.},$$

wo A_0, A_1, A_2, ꝛc. unbestimmte constante Coefficienten bedeuten und α gleichfalls ein unbestimmter Exponent ist. Substituirt man diesen Ausdruck für y in die gegebene Gleichung, so kommt

$$0 = A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha$$
$$+ \left.\begin{matrix} A_3(\alpha+3)(\alpha+2) \\ + A_0 \end{matrix}\right| x^{\alpha+1} + \left.\begin{matrix} A_4(\alpha+4)(\alpha+3) \\ + A_1 \end{matrix}\right| x^{\alpha+2} + \text{ꝛc.}$$

welcher Gleichung dadurch Genüge geschehen muß, daß man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x zu Null werden läßt. Die beiden ersten Glieder werden verschwinden, wenn man $\alpha = 0$ annimmt, wobei die Constanten A_0 und A_1 unbestimmt bleiben. Das dritte Glied verschwindet, wenn man $A_2 = 0$ setzt. Die folgenden Glieder aber liefern, damit sie gleichfalls verschwinden, zur Bestimmung der Constanten A_3, A_4, A_5,, ꝛc. die Beziehungen

$$A_3 \,.\, 3 \,.\, 2 = -A_0, \text{ woraus } A_3 = -\frac{A_0}{2\,.\,3}$$

$$A_4 \,.\, 4 \,.\, 3 = -A_1 \qquad A_4 = -\frac{A_1}{3\,.\,4}$$

$$A_5 \,.\, 5 \,.\, 4 = -A_2 \qquad A_5 = 0$$

$$A_6 \,.\, 6 \,.\, 5 = -A_3 \qquad A_6 = \frac{A_0}{2\,.\,3\,.\,5\,.\,6}$$

$$A_7 \,.\, 7 \,.\, 6 = -A_4 \qquad A_7 = \frac{A_1}{3\,.\,4\,.\,6\,.\,7}$$

$$A_8 \,.\, 8 \,.\, 7 = -A_5 \qquad A_8 = 0$$

$$A_9 \,.\, 9 \,.\, 8 = -A_6 \qquad A_9 = -\frac{A_0}{2\,.\,3\,.\,5\,.\,6\,.\,8\,.\,9}$$

$$A_{10} \,.\, 10 \,.\, 9 = -A_7 \qquad A_{10} = -\frac{A_1}{3\,.\,4\,.\,6\,.\,7\,.\,9\,.\,10}$$

$$\text{2c.} \qquad\qquad \text{2c.}$$

Die Reihe, welche den gesuchten Ausdruck für y darstellt, ist also

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{x^6}{2\,.\,3\,.\,5\,.\,6} - \frac{x^9}{2\,.\,3\,.\,5\,.\,6\,.\,8\,.\,9} + \text{2c.}\right)$$
$$+ A_1\left(x - \frac{x^4}{3\,.\,4} + \frac{x^7}{3\,.\,4\,.\,6\,.\,7} - \frac{x^{10}}{3\,.\,4\,.\,6\,.\,7\,.\,9\,.\,10} + \text{2c.}\right).$$

Darin sind A_0 und A_1 die beiden willkürlichen Constanten.

§. 463. Wenn die Gleichung gegeben ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

so führt auf dieselbe Weise die Substitution des Ausdrucks

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + A_3 x^{\alpha+3} + A_4 x^{\alpha+4} \text{ 2c.}$$

zu der Bedingungsgleichung

$$0 = A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \left.\begin{array}{r} A_1(\alpha+1)\alpha \\ + A_0 \end{array}\right| x^{\alpha-1} + \left.\begin{array}{r} A_2(\alpha+2)(\alpha+1) \\ + A_1 \end{array}\right| x^\alpha$$
$$+ \left.\begin{array}{r} A_3(\alpha+3)(\alpha+2) \\ + A_2 \end{array}\right| x^{\alpha+1} + \text{2c.}$$

Hier kann man das erste Glied zum Verschwinden bringen, wenn man $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ setzt; aber die erste Annahme ist unzulässig, weil alsdann das zweite Glied nur dadurch verschwinden könnte, daß man $A_0 = 0$ setzte. Nimmt man also $\alpha = 1$, so werden die folgenden Coefficienten durch die Gleichungen bestimmt

$$A_1 \,.\, 2 \,.\, 1 = - A_0, \text{ woraus } A_1 = -\frac{A_0}{1 \,.\, 2}$$

$$A_2 \,.\, 3 \,.\, 2 = - A_1 \qquad A_2 = \frac{A_0}{1 \,.\, 2^2 \,.\, 3}$$

$$A_3 \,.\, 4 \,.\, 3 = - A_2 \qquad A_3 = -\frac{A_0}{1 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 4}$$

$$A_4 \,.\, 5 \,.\, 4 = - A_3 \qquad A_4 = \frac{A_0}{1 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^2 \,.\, 5}$$

$$\text{rc.} \qquad \text{rc.}$$

Folglich geschieht der gegebenen Differentialgleichung Genüge durch den Werth

$$y = A_0 \left(x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} - \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5} - \text{rc.} \right).$$

Da indessen dieser Ausdruck nur eine einzige willkürliche Constante enthält, so liefert er zwar eine unendliche Menge von besonderen Werthen der Function y, aber er ist nicht das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung. Man erkennt übrigens leicht, daß dieser Gleichung nicht durch eine Reihe Genüge geleistet werden kann, welche nach absteigenden Potenzen von x geordnet ist.

§. 464. Es sei noch die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Setzt man wie oben

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + A_3 x^{\alpha+3} + A_4 x^{\alpha+4} + \text{rc.}$$

und substituirt diesen Ausdruck in die gegebene Gleichung, so kommt

$$0 = \left.\begin{array}{r} A_0\alpha(\alpha-1) \\ +A_0\alpha \end{array}\right| x^{\alpha-2} + \left.\begin{array}{r} A_1(\alpha+1)\alpha \\ +A_1(\alpha+1) \end{array}\right| x^{\alpha-1} + \left.\begin{array}{r} A_2(\alpha+2)(\alpha+1) \\ +A_2(\alpha+2) \\ +A_0 \end{array}\right| x^{\alpha}$$

$$+ \left.\begin{array}{r} A_3(\alpha+3)(\alpha+2) \\ +A_3(\alpha+3) \\ +A_1 \end{array}\right| x^{\alpha+1} + \left.\begin{array}{r} A_4(\alpha+4)(\alpha+3) \\ +A_4(\alpha+4) \\ +A_2 \end{array}\right| x^{\alpha+2} + \text{ꝛc.}$$

Man kann nun das erste Glied dadurch verschwinden lassen, daß man $\alpha = 0$ setzt, wobei A_0 unbestimmt bleibt; aber alsdann verschwindet das zweite Glied nicht, wenn man nicht $A_1 = 0$ setzt. Ebenso kann man das zweite Glied dadurch verschwinden lassen, daß man $\alpha = -1$ setzt, wobei der Coefficient A_1 unbestimmt bleibt; aber alsdann verschwindet das erste Glied nicht, wenn man nicht $A_0 = 0$ setzt. Bleibt man bei der ersten dieser beiden Annahmen stehen, nämlich $\alpha = 0$, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten A_2, A_3, A_4, ꝛc. folgende Beziehungen

$$\begin{array}{ll} A_2 \,.\, 2 \,.\, (1+1) = -A_0; \text{ woraus} & A_2 = -\dfrac{A_0}{2^2} \\ A_3 \,.\, 3 \,.\, (2+1) = -A_1 & A_3 = 0 \\ A_4 \,.\, 4 \,.\, (3+1) = -A_2 & A_4 = \dfrac{A_0}{2^2 \,.\, 4^2} \\ A_5 \,.\, 5 \,.\, (4+1) = -A_3 & A_5 = 0 \\ A_6 \,.\, 6 \,.\, (5+1) = -A_4 & A_6 = -\dfrac{A_0}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2} \\ \text{ꝛc.} & \text{ꝛc.} \end{array}$$

Der gegebenen Gleichung leistet also die Reihe Genüge

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \,.\, 4^2} - \frac{x^{\cancel{2}6}}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2} + \text{ꝛc.}\right).$$

Was die Annahme $\alpha = -1$ betrifft, so ist leicht zu erkennen, daß sie zu der nämlichen Reihe geführt haben würde. Man erhält übrigens auch hier nur eine Formel, welche besondere Integrale der gegebenen Gleichung zu liefern im Stande ist, aber nicht das allgemeine Integral dieser Gleichung.

§. 465. Wenn die Substitution einer nach steigenden Potenzen der Veränderlichen x geordneten Reihe in die gegebene Differentialgleichung nur einen besonderen Werth liefert, so beruhet dies im allgemeinen darin, daß das vollständige Integral Glieder enthalten muß, in denen der Logarithmus der Veränderlichen vorkommt. So hat man z. B. für die vorige Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

den besonderen Werth

$$Y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\,.\,4^2}-\frac{x^6}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}+\text{etc.}$$

Will man daraus das vollständige Integral erhalten, so setze man gemäß demjenigen, was in den §§. 442 und 443 gesagt worden ist, $y=AY$, wo A eine Function von x bedeutet. Man erhält sodann

$$\frac{dy}{dx}=A\frac{dY}{dx}+\frac{dA}{dx}Y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\frac{d^2Y}{dx^2}+2\frac{dA}{dx}\frac{dY}{dx}+\frac{d^2A}{dx^2}Y,$$

und wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, und die mit dem Factor A behafteten Glieder, deren Summe Null ist, wegläßt, so bleibt zur Bestimmung von A die Gleichung

$$Y\frac{d^2A}{dx^2}+\left(2\frac{dY}{dx}+\frac{Y}{x}\right)\frac{dA}{dx}=0,$$

oder wenn man $\frac{dA}{dx} = t$ setzt,

$$Y\frac{dt}{dx} + \left(2\frac{dY}{dx} + \frac{Y}{x}\right)t = 0, \text{ oder } \frac{dt}{t} + 2\frac{dY}{Y} + \frac{dx}{x} = 0,$$

woraus $t = \frac{b}{xY^2}$, folglich $A = a + b\int\frac{dx}{xY^2}$, indem a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten.

Man hat also für das vollständige Integral den Ausdruck

$$y = Y\left(a + b\int\frac{dx}{xY^2}\right).$$

Nun ist

$$\int\frac{dx}{xY^2} = \int\frac{dx}{x}(1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \text{ꝛc.}) = lx + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} + \text{ꝛc.},$$

wo α, β, ꝛc. leicht zu bestimmende numerische Coefficienten sind. Mithin wird endlich der Ausdruck für das vollständige Integral der gegebenen Gleichung

$$y = \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \text{ꝛc.}\right)\left[a + b\left(lx + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{2} + \text{ꝛc.}\right)\right].$$

XXXVI. Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drei Veränderlichen.

---

§. 466. Es sei die Differentialgleichung gegeben

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

in welcher P, Q, R beliebige Functionen der drei Veränderlichen x, y, z bedeuten. Wenn diese Gleichung das unmittelbare Resultat der Differentiation einer primitiven Glei=

chung $F(x, y, z) = 0$ ist, so genügt ihre linke Seite den Integrabilitäts-Bedingungen der Differentialfunctionen der ersten Ordnung von drei Veränderlichen, und man kann ihr Integral nach den Vorschriften des §. 370 finden, welches sodann noch durch eine willkürliche Constante vervollständigt werden muß.

Wenn dagegen die gegebene Gleichung durch die Elimination einer Constante aus der primitiven Gleichung $F(x, y, z) = 0$ und der unmittelbar daraus hervorgegangenen Differentialgleichung entstanden ist, oder wenn man nach der Differentiation einen Factor unterdrückt hat, der allen Gliedern gemeinschaftlich war, so genügt sie im allgemeinen nicht mehr den Bedingungen der Integrabilität. Da jedoch in diesen Fällen die Gleichung aus einer gegebenen Relation zwischen den drei Veränderlichen x, y, z hergeleitet worden ist, von denen man zwei, z. B. x und y, wie unabhängige und die dritte z wie die Function derselben ansehen kann, so folgt, daß der Werth von dz, welchen die obige Gleichung gibt, nämlich

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy,$$

der allgemeinen Bedingung für den Ausdruck des Differentials einer Function von zwei unabhängigen Veränderlichen Genüge leisten muß. Man muß also haben

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right);$$

oder wenn man ausführt, und dabei beachtet, daß noch z in den Functionen P, Q, R enthalten ist,

$$R\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$= R\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\right) - Q\left(\frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right),$$

und wenn man hierin für $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ihre Werthe $-\frac{P}{R}$ und $-\frac{Q}{R}$ setzt,

$$P\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+Q\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)+R\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)=0.$$

Diese Gleichung drückt also diejenige Bedingung aus, welche nothwendig erfüllt werden muß, damit man in der gegebenen Differentialgleichung zwei beliebige Veränderliche als unabhängige und die dritte als eine Function derselben ansehen kann. Als geometrisches Bild der in Rede stehenden Gleichung kann man sodann eine Fläche im Raum betrachten.

§. 467. Wenn der so eben nachgewiesenen Bedingungsgleichung Genüge geschieht, so hängt die Integration der gegebenen Differentialgleichung nur noch von der Integration einer Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen ab. Betrachtet man nämlich die Veränderliche z wie constant, und setzt also $dz=0$, so reducirt sich die gegebene Gleichung auf

$$Pdx+Qdy=0,$$

und gehört in dieser Form einer Schnittlinie an, welche in der Fläche durch eine mit der Ebene xy parallele Ebene zu Stande kommt, indem der constante Werth, den man der Coordinate z in den Functionen P und Q beigelegt hat, den Abstand der schneidenden Ebene von der Ebene xy bezeichnet. Hat man das Integral dieser Gleichung gefunden, so muß man die Constante, welche dasselbe vervollständigt, wie eine Function von z ansehen. Man kann also dieses Integral ausdrücken durch

$$\varphi(x, y, z)=Z,$$

wo Z eine Function von z allein bedeutet. Differentiirt man diese letzte Gleichung, indem man x, y, z als veränderlich betrachtet, so kommt

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz=dZ,$$

und da hier die rechte Seite eine Function von z allein ist, so muß dasselbe auch von der linken Seite gelten. Wenn man also aus den beiden vorstehenden Gleichungen eine der beiden Veränderlichen x, y eliminirt, so muß die andere von selbst wegfallen, so daß nur eine Differentialgleichung zwischen z und Z übrig bleibt. Diese Gleichung gibt integrirt den Ausdruck von Z durch z, nebst einer willkürlichen Constante, und die Substitution desselben für Z in die Gleichung $\varphi(x, y, z)=Z$ liefert das gesuchte Integral.

§. 468. Es sei z. B. die Differentialgleichung gegeben

$$(2xz+z^3)\,dx+2yz\,dy-2\,(x^2+y^2+b)\,dz=0,$$

welche der Bedingungsgleichung des §. 466 Genüge leistet. Betrachtet man z wie constant, so reducirt sich dieselbe auf

$$(2x+z^2)\,dx+2y\,dy=0,$$

und das Integral dieser Gleichung, in welchem die Veränderlichen schon getrennt sind, wird

$$x^2+y^2+xz^2=Z,$$

wo Z die willkürliche Constante ist, die hier wie eine Function von z angesehen werden muß. Um diese Function zu bestimmen, betrachtet man jetzt auch z als veränderlich und differentiirt die gefundene Gleichung, wodurch man erhält

$$(2x+z^2)\,dx+2y\,dy+2xz\,dz=dZ$$

oder mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung

$$2\,\frac{x^2+y^2+b}{z}\,dz+2xz\,dz=dZ.$$

Setzt man in dieser Gleichung für y seinen Werth aus der Gleichung $x^2+y^2+xz^2=Z$, so wird auch x wegfallen, und man erhält bloß

$$2\,\frac{Z+b}{z}\,dz = dZ, \text{ oder } \frac{2dz}{z} = \frac{dZ}{Z+b},$$

wovon das Integral ist

$$az^2 = Z + b,$$

indem a die willkürliche Constante bedeutet. Mit Hülfe des Werthes von Z, der aus dieser Gleichung hervorgeht, ergibt sich nun endlich für das gesuchte Integral der Ausdruck

$$x^2 + y^2 + (x - a)\,z^2 + b = 0.$$

§. 469. Wenn die gegebene Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

der Bedingungsgleichung des §. 466 nicht Genüge leistet, wenn es also nicht möglich ist, in ihr zwei von den Veränderlichen als unabhängige und die dritte als eine Function dieser beiden anzusehen, so kann man dieser Gleichung nur dadurch eine analytische Bedeutung beilegen, daß man annimmt, daß zwei von den Veränderlichen durch eine zwar unbekannte, aber dennoch vorhandene Relation mit einander verbunden sind. Man muß also z. B. die Voraussetzung machen, daß zwischen x und y eine Gleichung von der Form $\varphi(x, y) = 0$ besteht, vermöge deren sodann die gegebene Gleichung sich auf eine Gleichung zwischen nur zwei Veränderlichen reducirt, und mithin nach der Bestimmung der Function φ integrirt werden kann. Als geometrisches Bild der gegebenen Gleichung kann in diesem Falle nicht mehr eine Fläche im Raume angesehen werden; vielmehr stellt die Function z die Ordinate von unzählig vielen Curven dar, welche man einzeln erhält, nachdem man willkürlich in der Ebene xy die Projectionen dieser Curven, denen die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zugehört, vorgezeichnet hat.

XXXVII. Partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 470. Wenn zwei unabhängige Veränderliche x und y nebst einer dritten Veränderlichen z vorliegen, welche wie eine Function der beiden ersteren angesehen wird, so bedeuten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die partiellen Differentialverhältnisse der Function z, resp. in Bezug auf x und auf y genommen; d. h. die Zunahme von z, welche der Zunahme dx von x entspricht, beträgt $\frac{dz}{dx}\,dx$; und die Zunahme von z, welche der Zunahme dy von y entspricht, beträgt $\frac{dz}{dy}\,dy$. Unter einer Gleichung mit partiellen Differentialen, oder kürzer, einer partiellen Differentialgleichung von der ersten Ordnung und zwischen den Veränderlichen x, y, z versteht man überhaupt eine Relation zwischen den Größen $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, und man kann demnach eine solche allgemein darstellen durch

$$f\left(x, y, z\,\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Es handelt sich nun darum, die Bedeutung einer solchen Gleichung auszumitteln, und zu untersuchen, wie die primitive Gleichung beschaffen sein könne, der sie entsprechen muß.

Man kann die unabhängigen Veränderlichen x und y wie zwei horizontale rechtwinklige Abscissen und die Veränderliche z wie eine vertikale Ordinate ansehen. Wenn man also z wie eine Function von x und y betrachtet, so ist das geometrische Bild einer Relation zwischen diesen drei Veränderlichen eine Fläche im Raume. Gestützt hierauf kann man nun versuchen, die in der obigen Gleichung enthaltene

Fläche zu construiren. Da diese Gleichung den Werth einer jeden der Größen $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ liefert, sobald die vier anderen bekannt sind, so läßt sich diese Construction auf folgende Weise vornehmen.

In der Ebene xz zeichne man eine beliebige Curve, welche wie die Durchschnittslinie der gesuchten Fläche mit dieser Ebene angesehen werden soll. Für jeden Punkt dieser Curve kennt man x, y (dessen Werth Null ist), z und $\frac{dz}{dx}$; die gegebene Gleichung liefert also $\frac{dz}{dy}$; und damit ist die berührende Ebene der gesuchten Fläche, ihrer Lage nach, in der ganzen Ausdehnung der in Rede stehenden Curve festgestellt. Wenn man sich nun eine Ebene parallel zu der Ebene xz und in einem sehr kleinen Abstande Δy von derselben gelegt denkt, so kennt man die Durchschnittslinie der Fläche mit dieser Ebene mit einer desto größeren Genauigkeit, je kleiner Δy angenommen worden ist. Dieser Durchschnittslinie kann man sich wieder bedienen, um auf dieselbe Weise eine neue Durchschnittslinie mit einer zweiten Ebene zu construiren, die in dem Abstande Δy von der ersteren gelegt wird; und so fort. Auf diese Weise ist im allgemeinen die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung durch die gegebene Differentialgleichung bestimmt, sobald man die Durchschnittslinie dieser Fläche mit irgend einer mit der Ebene xz parallelen Ebene willkürlich angenommen hat. Es ist übrigens sogleich klar, daß dasselbe eintreten würde, wenn man die Durchschnittslinie der Fläche mit einer mit der Ebene yz parallelen Ebene willkürlich annehmen wollte.

Hieraus erkennt man, daß die gegebene Differentialgleichung einer unendlich großen Menge verschiedener Flächen angehört, welche sämmtlich eine durch diese Gleichung ausgesprochene gemeinsame Eigenschaft besitzen. Die Gestalt einer jeden Fläche hängt von derjenigen der willkürlichen Curve ab, durch welche man jene hat durchgehen lassen. Will man, daß das Integral der gegebenen Gleichung eine eben so ausgedehnte Bedeutung habe wie diese Gleichung selbst, so muß es alle die in Rede stehenden Curven zugleich darstellen. Dieses Integral muß also nicht nur der Bedingung entsprechen, der gegebenen Differentialgleichung Genüge zu leisten, sondern auch überdies eine willkürliche Function in sich enthalten.

§. 471. Die Richtigkeit dieser letzten Folgerung wird man bestätigt finden, wenn man bemerkt, daß aus einer gegebenen primitiven Gleichung, die eine unbestimmte Function enthält, immer eine Gleichung der ersten Ordnung hergeleitet werden kann, in welcher diese Function völlig verschwunden ist. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

in welcher u eine gewisse Function von x, y, z bedeutet, und $\varphi(u)$ eine unbestimmte Function von u ist. Durch Differentiation dieser Gleichung, sowol in Bezug auf x als auch in Bezug auf y, erhält man

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{d\varphi(u)}\frac{d\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d\varphi(u)}\frac{d\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Eliminirt man nun $\varphi(u)$ und $\frac{d\varphi(u)}{du}$ aus diesen beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung, so bleibt eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, in welcher die Function φ nicht mehr vorkommt. Diese Gleichung drückt mithin eine Relation aus, die immer erfüllt wird, welche Form man auch der Function φ in der primitiven Gleichung beilegen mag.

§. 472. Man betrachte nun überhaupt eine primitive Gleichung

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

in welcher a und b zwei Constanten bezeichnen. Differentiirt man einzeln in Bezug auf x und auf y, so kommt

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0. \tag{2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der primitiven Gleichung kann man die Constanten a und b eliminiren. Man erhält dadurch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, in welcher diese Constanten verschwunden sind, und welche mithin eine Eigenschaft ausspricht, die von den besonderen Werthen der Constanten völlig unabhängig ist. Diese Gleichung werde bezeichnet mit

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0. \tag{3}$$

Man sieht hieraus zunächst, daß wenn die Gleichung (3) gegeben ist, das Integral derselben oder diejenige primitive Gleichung, von welcher sie abhängt, zwei willkürliche Constanten enthalten muß.

Aber wenn man in der Gleichung (1) wie eine Veränderliche a ansieht, und b wie eine Function von a, so werden die beiden aus ihr hervorgehenden Differentialgleichungen sein

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Nun werden diese beiden Gleichungen identisch mit den Gleichungen (2), wenn die Bedingung erfüllt wird

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0.$$

Mithin führt die Gleichung (1) noch immer zu der nämlichen partiellen Differentialgleichung (3), wenn man in ihr a wie Veränderliche und b wie irgend eine Function von a ansieht, vorausgesetzt, daß a so gewählt wird, daß der Gleichung $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$ Genüge geschieht.

Wenn also eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung als gegeben vorliegt, und man eine primitive Gleichung $F=0$ mit zwei willkürlichen Constanten a und b gefunden hat, welche jener Gleichung Genüge leistet, so erhält man eine viel allgemeinere Auflösung, indem man $b=\varphi(a)$ annimmt, wo a durch die Gleichung $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$ zu bestimmen ist. Diese Function φ ist sodann die willkürliche Function, welche der Auflösung die nöthige Allgemeinheit gibt.

§. 473. Es ist nicht überflüssig zu bemerken, daß man in der primitiven Gleichung (1) auch hätte a und b wie zwei von einander unabhängige veränderliche Größen ansehen können, in welchem Falle die beiden derivirten Gleichungen geworden sein würden

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dx}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0$$
$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

welche in die Gleichungen (2) übergehen, wenn man setzt

$$\frac{dF}{da}=0, \text{ und } \frac{dF}{db}=0.$$

Wenn also die primitive Gleichung $F=0$, welche die beiden willkürlichen Constanten a und b enthält, einer gegebenen partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, so wird dieser Gleichung auch dann noch Genüge geschehen, wenn man statt der Constanten a und b die beiden durch x, y, z

ausgedrückten Werthe dieser Größen an die Stelle setzt, welche aus den Gleichungen $\frac{dF}{da}=0$ und $\frac{dF}{db}=0$ hervorgehen. Da jedoch das auf diesem Wege erhaltene Resultat keine willkürliche Function enthält, so stellt es nur eine besondere Auflösung der gegebenen Gleichung dar.

§. 474. In der Geometrie stellt die Gleichung (1), mit zwei willkürlichen Constanten, eine unendliche Menge von Flächen dar, welche allen Werthen entsprechen, die man diesen Constanten beilegen kann, und welche zugleich sämmtlich in der partiellen Differentialgleichung (3) enthalten sind. Wenn man $b=\varphi(a)$ setzt, wo φ das Zeichen für eine beliebige Function ist, so betrachtet man diejenige Reihe von Flächen, welche aus der Function φ hervorgeht, indem man für a nach und nach alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Wenn man ferner für a in der Gleichung $F[x, y, z, a, \varphi(a)]=0$ den Werth $a+da$ an die Stelle setzt, so wird das Resultat, welches mit $F+\frac{dF}{da}da=0$ bezeichnet werden kann, einer in dieser Reihe enthaltenen Fläche angehören, die derjenigen Fläche unendlich nahe liegt, welche durch die Gleichung $F=0$ dargestellt wird. Mithin wird das System der beiden Gleichungen

$$F=0 \quad \text{und} \quad F+\frac{dF}{da}da=0,$$

oder, einfacher, der beiden Gleichungen

$$F=0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{da}=0,$$

der Durchschnittslinie der beiden auf einander folgenden Flächen angehören, welche Linie, nach Monge, mit dem Namen der charakteristischen Linie belegt wird. Und wenn man aus den beiden in Rede stehenden Gleichungen die Größe a eliminirt, so wird das Resultat, welches eine

Gleichung zwischen x, y, z ist, einer Fläche angehören, die den geometrischen Ort dieser Durchschnittslinien bildet; d. h. der einhüllenden Fläche derjenigen Flächen, welche aus der Gleichung $F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$ hervorgehen, indem man darin für a alle möglichen Werthe setzt.

Nun muß offenbar die gegebene Differentialgleichung auch dieser einhüllenden Fläche angehören, weil die berührende Ebene immer den eingehüllten Flächen und der einhüllenden Fläche gemeinschaftlich ist und folglich auch die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, welche die Lage dieser Ebene bestimmen, beiden gemeinschaftlich zukommen. Setzt man aber $\varphi(a)$ an die Stelle von b, so wird die Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ identisch mit der Gleichung $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0$ des §. 472. Man erkennt also, daß die allgemeine Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ausgedrückt wird durch das System der beiden Gleichungen

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0,$$

wenn man hierin statt b eine beliebige Function $\varphi(a)$ an die Stelle setzt und darauf a aus beiden Gleichungen eliminirt.

§. 475. Wenn man ferner in der Gleichung $F(x, y, z, a, b) = 0$ die Größe a allein sich ändern läßt, wodurch man erhält $F + \frac{dF}{da}da = 0$, und wenn man sodann die Größe b allein sich ändern läßt, wodurch man erhält $F + \frac{dF}{db}db = 0$, so stellt das System der Gleichungen

$$F = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} = 0$$

eine charakteristische Linie dar, welche einer gewissen einhül=

lenden Fläche angehört; und ebenso stellt das System der Gleichungen

$$F = 0 \text{ und } \frac{dF}{db} = 0$$

eine andere charakteristische Linie dar, welche einer andern einhüllenden Fläche angehört, die der ersteren unendlich nahe liegt. Das System der drei Gleichungen

$$F = 0, \frac{dF}{da} = 0, \frac{dF}{db} = 0$$

gehört mithin den Durchschnittspunkten dieser beiden charakteristischen Linien an. Folglich wenn man a und b aus diesen drei Gleichungen eliminirt, so wird die daraus hervorgehende Gleichung, die noch x, y, z enthält, eine Fläche darstellen, welche der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist, d. h. eine Fläche, welche alle die oben genannten einhüllenden Flächen berührt und wiederum einhüllt, und zugleich von allen charakteristischen Linien berührt wird. Dieser Fläche muß die gegebene Differentialgleichung gleichfalls noch angehören; aber sie entspricht augenscheinlich nur einer besonderen Auflösung dieser Gleichung.

Es mag noch bemerkt werden, daß sich immer mehrere von einander verschiedene Gleichungen, analog der Gleichung (1) des §. 472 und mit zwei willkürlichen Constanten versehen, angeben lassen, welche sämmtlich zu der nämlichen Differentialgleichung (3) führen, und die nämlichen einhüllenden Flächen hervorbringen, denen sowol das allgemeine Integral als auch die so eben nachgewiesene besondere Auflösung dieser Gleichung entsprechen.

Integration der linearen Gleichungen von der ersten Ordnung.

§. 476. Eine partielle Differentialgleichung ist linear, sobald die Differentialverhältnisse nur in der ersten Potenz in ihr vorkommen. Der einfachste Fall ist derjenige, wo diese Differentialverhältnisse mit Constanten multiplicirt sind. Gleichungen dieser Art haben die Eigenschaft, daß ihnen durch die Summe einer beliebigen Anzahl von besonderen Werthen Genüge geschieht, aus welcher Eigenschaft unmittelbar ihr Integral gefunden werden kann.

Es sei nämlich die Gleichung gegeben

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = 0,$$

wo P und Q constante Zahlen bedeuten. Man nehme als besondern Werth, indem man mit m und n zwei Constanten bezeichnet,

$$z = e^{mx+ny},$$

so erhält man

$$\frac{dz}{dx} = m \,.\, e^{mx+ny}, \quad \frac{dz}{dy} = n \,.\, e^{mx+ny}$$

folglich durch Substitution dieser Ausdrücke in die gegebene Gleichung

$$mP + nQ = 0, \quad \text{woraus } n = -\frac{mP}{Q}.$$

Der Werth $z = e^{m\left(x - \frac{Py}{Q}\right)}$, oder auch $z = e^{m(Qx-Py)}$, in welchem m unbestimmt bleibt, leistet also der gegebenen Gleichung Genüge. Man kann mithin auch als Ausdruck für die Function z eine Reihe annehmen, welche aus einer beliebigen Anzahl von Gliedern gebildet ist, von der Form

$$z = A_1 e^{m_1(Qx-Py)} + A_2 e^{m_2(Qx-Py)} + A_3 e^{m_3(Qx-Py)} + \text{rc.},$$

worin m_1, m_2, m_3, rc., A_1, A_2, A_3, rc. vollkommen willkürliche Constanten bedeuten. Nun ist klar, daß eine solche Reihe gleichbedeutend ist mit einer willkürlichen Function der Größe $Qx - Py$, welche in allen ihren Gliedern vorkommt. Man kann also statt der vorigen Formel schreiben

$$z = \varphi(Qx - Py)$$

indem φ das Zeichen für eine willkürliche Function ist; und dieser Ausdruck enthält demnach das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung. Es ist übrigens leicht, sich davon zu überzeugen, daß dieser Ausdruck für z in der That der vorgelegten Gleichung Genüge leistet.

§. 477. Die Gleichung

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=z,$$

in welcher P und Q noch immer constante Zahlen bedeuten, kann auf dieselbe Weise integrirt werden. Die Substitution des besonderen Werthes $z=e^{mx+ny}$ liefert die Bedingungsgleichung

$$mP+nQ=1, \text{ woraus } m=\frac{1-nQ}{P}, \text{ oder } n=\frac{1-mP}{Q}.$$

Folglich werden die Ausdrücke

$$z=e^{\frac{y}{Q}+m\left(\overset{x}{\cancel{y}}-\frac{Py}{Q}\right)}, \text{ und } z=e^{\frac{x}{P}+n\left(y-\frac{Qx}{P}\right)},$$

in denen die Constanten m oder n willkürlich bleiben, der gegebenen Gleichung Genüge leisten. Dieser Gleichung geschieht aber auch noch Genüge durch die Werthe

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.e^{m(Qx-Py)}, \text{ und } z=e^{\frac{x}{P}}.e^{n(Py-Qx)},$$

mithin auch durch die beiden Reihen

$$z=e^{\frac{y}{Q}}[A_1e^{m_1(Qx-Py)}+A_2e^{m_2(Qx-Py)}+A_3e^{m_3(Qx-Py)}+ \text{ꝛc.}]$$

$$z=e^{\frac{x}{P}}[B_1e^{n_1(Py-Qx)}+B_2e^{n_2(Py-Qx)}+B_3e^{n_3(Py-Qx)}+ \text{ꝛc.}],$$

in denen A_1, A_2, ꝛc., m_1, m_2, ꝛc., B_1, B_2, ꝛc., n_1, n_2, ꝛc., willkürliche Constanten bedeuten. Diese Reihen endlich sind gleichbedeutend mit den Ausdrücken

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.\varphi(Qx-Py), \quad z=e^{\frac{x}{P}}.\psi(Py-Qx),$$

wo φ und ψ die Zeichen für willkürliche Functionen sind. Es ist leicht zu erkennen, daß durch diese beiden Ausdrücke übereinstimmend die nämliche Fläche dargestellt werden kann. Der eine wie der andere Ausdruck ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

§. 478. Man betrachte jetzt die Gleichung

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R,$$

in welcher P, Q, R beliebige Functionen der Veränderlichen x, y, z vorstellen. Bezeichnet man mit

$$f(x, y, z) = 0$$

das allgemeine Integral dieser Gleichung, welche eine willkürliche Function dieser Veränderlichen in sich enthalten muß, so liefert die Differentiation desselben in Bezug auf x und auf y

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{woraus } \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \quad \text{woraus } \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}.$$

Diese Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ müssen der gegebenen Gleichung Genüge leisten, und man findet durch Substitution derselben die Gleichung

$$P\frac{df}{dx} + Q\frac{df}{dy} + R\frac{df}{dz} = 0.$$

Ueberdies aber ist das vollständige Differential der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ folgendes

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

Nimmt man hieraus den Werth von $\frac{df}{dx}$ und setzt denselben in die vorige Gleichung, so kommt

$$(Pdy - Qdx)\,\frac{df}{dy} + (Pdz - Rdx)\,\frac{df}{dz} = 0.$$

Da nun die Function $f(x, y, z)$ eine willkürliche Function der Veränderlichen x, y, z in sich enthalten muß, so ist es nothwendig, daß dieser letzten Gleichung Genüge geschehe, wie auch die Werthe der Functionen $\frac{df}{d\cancel{z}y}$ und $\frac{df}{dz}$ beschaffen sein mögen; woraus folgt, daß man einzeln die beiden Gleichungen haben muß

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Pdz - Rdx = 0,$$

welche überdies durch Elimination von dx geben

$$Qdz - Rdy = 0.$$

Diese drei Gleichungen, welche keine partiellen Differentiale enthalten, und von denen je zwei die dritte zur Folge haben, ergeben sich mit Nothwendigkeit aus der vorgelegten partiellen Differentialgleichung und bestehen immer zugleich mit ihr.

Man nehme nun an, daß man aus diesen drei Gleichungen, oder aus einer beliebigen Combination derselben, durch Integration zwei primitive Gleichungen herleiten könne, von denen jede eine willkürliche Constante enthält, und die mit

$$M = a, \quad N = b$$

bezeichnet werden mögen, wo a und b die beiden willkürlichen Constanten und M und N zwei Functionen von x, y, z bedeuten. Aus den beiden Gleichungen $M = a$ und $N = b$ kann man sodann die Werthe von x und y durch z ausdrücken, und dieselben in die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ sub=

stituiren, welche in Folge dessen nur noch die Veränderliche z nebst den willkürlichen Constanten a und b und anderen nicht willkürlichen Constanten enthalten wird. Oder vielmehr, da man haben muß $df = 0$, so kann auch die Veränderliche z nach der Substitution der Werthe für x und y nicht mehr in dieser Gleichung vorkommen. Mithin wird die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ sich einzig und allein auf eine Relation zwischen den Größen a und b reduciren, die man bezeichnen kann mit

$$\Phi(a, b) = 0,$$

wo Φ eine vollkommen willkürliche Function bedeutet. Und da man für a und b ihre Werthe M und N als Functionen von x, y, z an die Stelle setzen kann, so sieht man, daß das gesuchte Integral sein wird

$$\Phi(M, N) = 0,$$

oder auch, wenn man mit φ gleichfalls eine willkürliche Function bezeichnet

$$N = \varphi(M).$$

§. 479. Die geometrischen Betrachtungen des §. 474 führen zu demselben Resultate. Man bemerke nämlich, daß sich der gegebenen Gleichung

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R$$

immer die allgemeine Gleichung zur Seite stellen läßt

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Eliminirt man $\frac{dz}{dx}$ oder $\frac{dz}{dy}$, so findet man die beiden von einander verschiedenen Gleichungen

$$(Pdy - Qdx)\frac{dz}{dx} = Rdy - Qdz$$

$$(Pdy - Qdx)\frac{dz}{dy} = Pdz - Rdx,$$

denen immer nothwendig von selbst Genüge geschehen muß. Denn im entgegengesetzten Falle würde man aus ihnen bestimmte Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ausgedrückt durch x, y, z erhalten, und dies ist unmöglich, weil die gegebene Gleichung nicht die Lage der berührenden Ebene in einem beliebigen gegebenen Punkte bestimmen kann, da sich durch diesen Punkt eine unendlich große Anzahl von Flächen legen läßt, welche sämmtlich in der gegebenen Gleichung enthalten sind. Man hat also einzeln die drei Gleichungen

$$Pdy - Qdx = 0$$
$$Pdz - Rdx = 0$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

von denen je zwei die dritte zur Folge haben.

Da die in diesen Gleichungen ausgesprochenen Relationen aus der gegebenen Differentialgleichung hervorgegangen sind, so muß die Curve, welcher sie angehören, aus dem Durchschnitte zweier von denjenigen Flächen entstehen, die die gegebene Gleichung selbst darstellt; folglich ist diese Curve nichts anderes als die im §. 474 so genannte charakteristische Linie. Leitet man aus den vorstehenden Differentialgleichungen ihre primitiven Gleichungen her, unter der Form

$$M = a, \qquad N = b,$$

so werden diese alle möglichen charakteristischen Linien darstellen, wenn man in ihnen die Constanten a und b nach Gefallen sich ändern läßt. Betrachtet man aber b wie eine beliebige Function φ von a, so werden die beiden Gleichungen

$$M = a, \qquad N = \varphi(a)$$

nur noch diejenige Reihe von charakteristischen Linien darstellen, welche durch die Natur der Function φ gegeben ist, sobald man a alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. Eliminirt man endlich a aus diesen beiden letzten Gleichungen, so wird das Resultat der Elimination, nämlich

$$N = \varphi(M),$$

derjenigen Fläche angehören, welche der geometrische Ort dieser Reihe von charakteristischen Linien ist, oder, in Betracht der Unbestimmtheit der Function φ, einer jeden der einhüllenden Flächen, denen die gegebene Differentialgleichung entspricht und deren Ausdruck in dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung enthalten ist.

§. 480. Bis hieher wurde die Voraussetzung gemacht, daß man zwei von den Gleichungen der charakteristischen Linie oder irgend zwei aus der Combination derselben hervorgegangene Gleichungen integriren könne. Diese Integration ist jedoch nicht immer möglich, weil die drei Veränderlichen x, y, z sich zugleich in den in Rede stehenden Gleichungen vorfinden, während diese Gleichungen nur die Differentiale von zweien derselben enthalten. Aber man kann sich dennoch immer das allgemeine Integral aus diesen Gleichungen unter derjenigen Form hergeleitet denken, welche in den vorigen §§. aufgestellt worden ist. Betrachtet man nämlich z. B. die beiden Gleichungen

$$Pdz - Rdx = 0$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

so kann man in denselben, da sie eine Curve darstellen, nur eine von den Veränderlichen als unabhängige ansehen. Es sei diese z. B. die Veränderliche z, so werden die beiden Gleichungen, außer den Veränderlichen x, y, z, resp. die Differentialverhältnisse $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ enthalten. Differentiirt man die erstere, so ergibt sich eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, in welcher die Differentialverhältnisse $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{d^2x}{dz^2}$ vorkommen. Man hat also jetzt drei

Gleichungen, aus denen man y und $\frac{dy}{dz}$ eliminiren kann; das Resultat der Elimination wird eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen den Veränderlichen x und z sein, deren Behandlung unter die früheren Methoden fällt.

Nun hat, gemäß dem §. 424, diese Gleichung nothwendig zwei Integrale der ersten Ordnung, von denen jedes eine willkürliche Constante enthält. Hat man diese Integrale gefunden, und eliminirt man aus ihnen die Function $\frac{dx}{dz}$, welche sie beide enthalten, mit Hülfe der Gleichung $P - R\frac{dx}{dz} = 0$, so bleiben zwei Gleichungen, von denen jede eine Relation zwischen den Veränderlichen x, y, z und einer willkürlichen Constante darstellt. Diese Gleichungen kann man unter die Form bringen

$$M = a, \quad N = \varphi(a),$$

und sie geben, wie oben, für das gesuchte Integral

$$N = \varphi(M).$$

Die Integration einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung kann demnach, wenn diese Gleichung lineär ist, immer auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen zurückgeführt werden.

§. 481. Die Methode des §. 478 läßt sich sofort auch auf die Fälle übertragen, wo die gegebene partielle Differentialgleichung eine größere Anzahl von Veränderlichen enthält. Wenn z. B. die Gleichung gegeben ist

$$P\frac{dv}{dx} + Q\frac{dv}{dy} + R\frac{dv}{dz} = T,$$

so stelle man das allgemeine Integral derselben dar durch

$$f(v, x, y, z) = 0.$$

Differentiirt man dasselbe einzeln in Bezug auf die Veränderlichen x, y, z, so erhält man

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dv}}, \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dv}}, \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dv}},$$

und durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$T\frac{df}{dv} + P\frac{df}{dx} + Q\frac{df}{dy} + R\frac{df}{dz} = 0.$$

Ferner hat man, indem man v, x, y, z zugleich sich ändern läßt,

$$\frac{df}{dv}dv + \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

Die Elimination von $\frac{df}{dv}$ aus diesen beiden Gleichungen gibt

$$(Tdx - Pdv)\frac{df}{dx} + (Tdy - Qdv)\frac{df}{dy} + (Tdz - Rdv)\frac{df}{dz} = 0,$$

und dieser Gleichung geschieht Genüge, ohne die Function f zu bestimmen, wenn man setzt

$$Tdx - Pdv = 0$$
$$Tdy - Qdv = 0$$
$$Tdz - Rdv = 0,$$

woraus außerdem noch die drei andern Gleichungen folgen

$$Pdy - Qdx = 0$$
$$Pdz - Rdx = 0$$
$$Qdz - Rdy = 0.$$

Diese sechs Differentialgleichungen, in denen keine partiellen Differentiale mehr vorkommen, stellen also diejenigen Bedingungen dar, welche die Veränderlichen v, x, y, z erfüllen müssen, damit die primitive Function $f(v, x, y, z)$

das Differential Null habe, d. h. nur noch Constanten enthalten könne. Wenn man mithin für irgend drei von jenen Gleichungen die drei Integrale findet

$$L = a, \quad M = b, \quad N = c,$$

wo a, b, c die willkürlichen Constanten bedeuten, so wird die Substitution der Werthe dreier Veränderlichen, welche sich aus diesem Integrale ergeben, in $f(v, x, y, z)$ nothwendig auch die vierte Veränderliche zum Verschwinden bringen, so daß diese Function sich in eine Function von a, b, c verwandelt, welche bezeichnet werden mag mit

$$\Phi(a, b, c).$$

Setzt man hierin für a, b, c ihre Werthe, ausgedrückt durch v, x, y, z, so erhält man als gesuchtes Integral die Gleichung

$$\Phi(L, M, N) = 0, \quad \text{oder} \quad N = \varphi(L, M).$$

Auf ähnliche Weise wird man bei einer noch größeren Anzahl von Veränderlichen zu Werke gehen.

§. 482. Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo in der partiellen Differentialgleichung

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R$$

eines der Glieder fehlt, weil alsdann die Integration nur noch von derjenigen einer gewöhnlichen Differentialgleichung der ersten Ordnung abhängt.

Es sei z. B. das erste Glied nicht vorhanden, oder $P = 0$. Die Gleichungen der charakteristischen Linie, §§. 478 und 479, verwandeln sich sodann in

$$dx = 0$$

$$Qdz - Rdy = 0.$$

Die erste Gleichung gibt

$$x = a,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet; und diese Glei=

chung sagt aus, daß die charakteristische Linie sich beständig in einer Ebene befindet, welche rechtwinklig zu der Achse der x liegt. Da x constant ist, so hat man in der zweiten Gleichung nur noch y und z als Veränderliche anzusehen. Das Integral dieser Gleichung sei

$$N = b,$$

wo b die willkürliche Constante ist. Setzt man jetzt $\varphi(a)$ statt b, und eliminirt a aus den beiden Gleichungen $x = a$ und $N = \varphi(a)$, so erhält man als gesuchtes Integral

$$N = \varphi(x).$$

§. 483. Man kann das vorstehende Verfahren auch auf die einfachen Fälle anwenden, welche in den §§. 476 und 477 behandelt worden sind. In dem Falle des §. 476 sind P und Q constant, und $R = 0$. Die Gleichungen der charakteristischen Linie werden also

$$Pdy - Qdx = 0$$
$$dz = 0.$$

Ihre Integrale sind

$$Py - Qx = a$$
$$z = b.$$

Setzt man also $b = \varphi(a)$, so erhält man nach §. 478 als allgemeines Integral

$$z = \varphi(Py - Qx),$$

übereinstimmend mit §. 476.

§. 484. In dem Falle des §. 477, wo die gegebene Gleichung war

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = z,$$

sind P und Q constant, und $R = z$. Die Gleichungen der charakteristischen Linie werden

$$Pdy - Qdx = 0$$
$$Pdz - zdx = 0$$
$$Qdz - zdy = 0.$$

Sie lassen sich unmittelbar integriren, und geben als Integrale

$$Py - Qx = a$$

$$P \cdot lz - x = \text{Const} \quad \text{oder} \quad z \cdot e^{-\frac{x}{P}} = b$$

$$Q \cdot lz - y = \text{Const} \quad \text{oder} \quad z \cdot e^{-\frac{y}{Q}} = c,$$

wo a, b, c drei willkürliche Constanten sind. Man kann also nach §. 478 als das gesuchte Integral ansehen

$$z \cdot e^{-\frac{x}{P}} = \varphi(Py - Qx), \quad \text{oder} \quad z \cdot e^{-\frac{y}{Q}} = \psi(Py - Qx),$$

wo φ und ψ willkürliche Functionen anzeigen; und dieses stimmt mit demjenigen Resultate überein, welches auf anderem Wege im §. 477 gefunden wurde. Außerdem kann man noch durch Combinirung der zweiten und dritten Gleichung der charakteristischen Linie ein drittes Integral aufstellen, nämlich

$$z \cdot e^{-\frac{y}{Q}} = \chi\left(z \cdot e^{-\frac{x}{P}}\right),$$

wo χ das Zeichen einer willkürlichen Function ist; jedoch ist dieses Integral schon in den beiden andern enthalten, und liefert nichts Neues. Denn da die letzteren anzeigen, daß $z \cdot e^{-\frac{x}{P}}$ und $z \cdot e^{-\frac{y}{Q}}$ Functionen von der nämlichen Größe $Py - Qx$ sind, so müssen beide Größen nothwendig auch Functionen von einander sein. Es wurde übrigens schon früher bemerkt, daß die beiden zuerst gefundenen Gleichungen ein und dasselbe ausdrücken und mit einander gleichbedeutend sind.

§. 485. Als Beispiel diene die sehr einfache Gleichung

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0.$$

Die Gleichungen der charakteristischen Linie reduciren sich auf

$$ydy + xdx = 0, \quad \text{woraus} \quad y^2 + x^2 = a$$
$$dz = 0, \qquad\qquad z = b.$$

Das Integral der gegebenen Gleichung wird also

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

wo φ eine willkürliche Function anzeigt. Dieses Resultat läßt sich auf geometrischem Wege leicht bestätigen. Die Gleichung $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$ sagt nämlich aus, daß die Projection der Normale derjenigen Fläche, der diese Gleichung angehört, auf die Ebene xy, immer durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht; oder, wenn man will, daß die Normale immer die Achse der z trifft. Diese Eigenschaft kommt jeder Rotationsfläche zu, deren Achse mit der Achse der z zusammenfällt, dagegen keiner anderen Fläche. Nun ist klar, daß die primitive Gleichung $z = \varphi(x^2 + y^2)$ ausdrückt, daß die Ordinate z sich nicht ändert, so lange die Größe $x^2 + y^2$ unverändert bleibt; oder daß der Durchschnitt der Fläche mit einer Ebene, welche rechtwinklig zu der Achse der z liegt, ein Kreis ist. Mithin gehört diese Gleichung gleichfalls jeder Rotationsfläche an, welche um die Achse der z durch eine beliebige Linie beschrieben wird, und besitzt demnach denselben Grad von Allgemeinheit wie die gegebene Differentialgleichung.

Eine der Gleichung $F(x, y, z, a, b) = 0$ des §. 472 analoge Gleichung ist hier

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = b^2,$$

welche Gleichung irgend eine Kugelfläche darstellt, deren Mittelpunkt in der Achse der z liegt. Wenn man nämlich von dieser Gleichung die beiden partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung nimmt, welche sind

$$x + (z - a)\frac{dz}{dx} = 0, \qquad y + (z - a)\frac{dz}{dy} = 0,$$

so verschwindet unmittelbar die Constante b; und wenn man aus beiden sodann die Constante a eliminirt, so gelangt man wieder zu der gegebenen Gleichung $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$. Aber diese letzte Gleichung gehört nicht bloß jeder Kugelfläche an, deren Mittelpunkt in der Achse der z liegt. Sie entspricht gleichfalls jeder einhüllenden Fläche der auf einander folgenden Lagen einer Kugel, deren Mittelpunkt seinen Ort in der Achse der z verändert durch Aenderung der Constante a, und deren Halbmesser b zu gleicher Zeit sich nach einem gewissen Gesetze verändert, welches durch die Relation $b = \varphi(a)$ ausgedrückt wird. Diese einhüllende Fläche, deren Gleichung durch die Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = \varphi(a), \qquad -2(z - a) = \frac{d \cdot \varphi(a)}{da}$$

nach Feststellung der Function φ gefunden werden kann, ist augenscheinlich nichts anderes als eine Rotationsfläche, deren Achse mit der Achse der z zusammenfällt. Ferner muß offenbar die zweite der beiden vorstehenden Gleichungen a als Function von z geben, oder $a = F(z)$; und wenn man diesen Werth für a in die erste Gleichung setzt, so erhält man wie oben $z = \Phi(x^2 + y^2)$.

Man kann aber auch wie ein besonderes Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung die Gleichung ansehen

$$x^2 + y^2 - a^2(z - b)^2 = 0,$$

welche die Fläche eines geraden Kegels darstellt, dessen Achse mit der Achse der z zusammenfällt. Die Constante b ist die

Ordinate der Spitze des Kegels, und die Constante a bedeutet die Tangente des Winkels, welcher zwischen der Achse der z und der Seitenlinie des Kegels enthalten ist. Differentiirt man in Bezug auf x und auf y, so kommt

$$x - a^2(z - b)\frac{dz}{dx} = 0, \quad y - a^2(z - b)\frac{dz}{dy} = 0,$$

und diese Gleichungen geben, durch Elimination der Constanten a und b,

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0.$$

Die einhüllende Fläche der auf einander folgenden Lagen des Kegels, wenn man a in der Gleichung $x^2 + y^2 - a^2[z - \varphi(a)]^2 = 0$ sich ändern läßt, ist augenscheinlich eine Rotationsfläche um die Achse der z, deren Gestalt von der Function φ abhängt, und der gleichfalls die gegebene Differentialgleichung angehört. Die Gleichung dieser Rotationsfläche findet sich durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - a^2[z - \varphi(a)]^2 = 0, \quad z - \varphi(a) - a\frac{d \cdot \varphi(a)}{da} = 0.$$

Aber die zweite Gleichung zeigt an, daß z irgend eine Function von a ist, folglich auch a irgend eine Function von z; und daraus ergibt sich mit Zuziehung der ersten Gleichung, daß z irgend eine Function von $x^2 + y^2$ sein muß, wie oben gefunden wurde.

§. 486. Man betrachte ferner die Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = z.$$

Die Gleichungen der charakteristischen Linie werden

$$xdy - ydx = 0$$
$$xdz - zdx = 0$$
$$ydz - zdy = 0.$$

Dieselben sind unmittelbar zu integriren, und man findet als Integrale

$$\frac{y}{x} = a, \ \frac{z}{x} = b, \ \frac{z}{y} = c,$$

wo a, b, c willkürliche Constanten sind. Man kann also als Integral der gegebenen Gleichung jede von den drei Gleichungen ansehen

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{z}{y} = \psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{z}{y} = \chi\left(\frac{z}{x}\right),$$

von denen die dritte in den beiden ersten enthalten ist. Das allgemeine Integral besteht also hier aus einem von den beiden Ausdrücken

$$z = x \,.\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = y \,.\, \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die geometrische Bedeutung der gegebenen Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dx} - z = 0$$

besteht darin, daß die berührenden Ebenen der Fläche, welcher diese Gleichung angehört, sämmtlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen sollen; diese Eigenschaft findet sich bei jeder Kegelfläche, deren Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und bei keiner anderen Fläche. Aber es ist leicht zu erkennen, daß die Gleichungen $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ und $\frac{z}{y} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ gleichfalls die in Rede stehenden Flächen charakterisiren, weil sie aussagen, daß die Verhältnisse $\frac{z}{x}$ und $\frac{z}{y}$ zugleich mit dem Verhältnisse $\frac{y}{x}$ constant bleiben; oder, wenn man will, daß jede durch die Achse der z gelegte Ebene die Fläche in einer geraden Linie schneidet.

Die der Gleichung $F(x, y, z, a, b) = 0$ des §. 472 analoge Gleichung ist hier

$$ax + by - z = 0,$$

und diese Gleichung gehört einer beliebigen durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene an, sobald man in ihr a und b wie zwei willkürliche Constanten ansieht. Ihre beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung sind

$$a - \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad b - \frac{dz}{dy} = 0,$$

und liefern durch Elimination von a und b wieder die gegebene Gleichung. Diese Gleichung gehört nicht allein der genannten Ebene an, sondern auch jeder einhüllenden Fläche, welche allen Lagen dieser Ebene entspricht, wenn man dieselbe durch Veränderung der Constanten a und b sich bewegen läßt, ohne daß sie aufhört durch den Anfangspunkt der Coordinaten zu gehen; welche Fläche augenscheinlich eine Kegelfläche ist, deren Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Man erhält ihre Gleichung, wenn man $b = \varphi(a)$ setzt und sodann a aus den beiden Gleichungen eliminirt

$$ax + \varphi(a) \cdot y - z = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{d \cdot \varphi(a)}{da} \cdot y = 0.$$

Die zweite Gleichung gibt $\frac{x}{y}$ gleich einer Function von a, oder a gleich einer Function von $\frac{x}{y}$. Mithin erhält man aus der ersten Gleichung $\frac{z}{y}$ gleich einer Function von $\frac{x}{y}$, übereinstimmend mit dem Obigen.

XXXVIII. Partielle Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung, vom ersten Grade und mit constanten Coefficienten.

§. 487. Diese Gleichungen verdienen eine besondere Aufmerksamkeit, weil man mit ihrer Hülfe im Stande gewesen ist, in den einfachsten Fällen, die man als Normalfälle ansehen kann, die allgemeinen Gesetze der hauptsächlichsten Phänomene auszudrücken, deren Erforschung den Gegenstand der Naturwissenschaften bildet. Sie sind von der eigenthümlichen Beschaffenheit, daß ihnen immer durch eine unendliche Menge besonderer Auflösungen Genüge geleistet werden kann, welche in einer einzigen Formel enthalten sind; diese Formel kann also gewisser Maßen wie das analytische Bild derjenigen Eigenschaft angesehen werden, von welcher die Differentialgleichung der Ausdruck ist. Der Inbegriff dieser Auflösungen liefert sofort ein allgemeines Integral, in welchem willkürliche Größen vorkommen, deren Bestimmung von den einem jeden Falle angehörenden besonderen Bedingungen abhängt.

Man betrachte z. B. die Gleichung der zweiten Ordnung zwischen den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y und der Veränderlichen z, welche als Function der beiden anderen betrachtet wird:

$$P\frac{d^2z}{dx^2}+Q\frac{d^2z}{dxdy}+R\frac{d^2z}{dy^2}+S\frac{dz}{dx}+T\frac{dz}{dy}+z=0,$$

wo P, Q, R, S, T beliebige constante Größen bedeuten. Als besonderen Werth, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, hat man

$$z=e^{mx+ny},$$

wo m und n Constanten bezeichnen, vorausgesetzt, daß diese Constanten selbst der Bedingungsgleichung genügen

$$Pm^2 + Qmn + Rn^2 + Sm + Tn + 1 = 0.$$

Da aber diese Gleichung eine von den beiden Größen m und n unbestimmt läßt, so gibt es eine unendliche Menge von Systemen reeller oder imaginärer Werthe, welche diesen beiden Größen beigelegt werden können und immer die Forderung erfüllen, daß der Ausdruck $z = e^{mx+ny}$ der gegebenen Gleichung Genüge leistet.

Dieser Gleichung geschieht gleichfalls Genüge durch die Summe einer beliebigen Anzahl von Werthen, welche dem vorigen ähnlich sind und von denen jeder mit einem beliebigen constanten Coefficienten behaftet ist. Man kann also schreiben

$$z = Ae^{mx+ny} + A_1 e^{m_1x+n_1y} + A_2 e^{m_2x+n_2y} + \text{rc.},$$

und dieser Ausdruck wird das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung sein, wenn die Reihe alle Systeme der Werthe von m und n umfaßt, welche gleichzeitig der obigen Bedingungsgleichung Genüge thun. Die constanten Coefficienten A, A_1, A_2, rc. bleiben vollkommen unbestimmt. Dieser Ausdruck von z muß angesehen werden wie denselben Grad von Allgemeinheit besitzend, welchen die Differentialgleichung selbst hat.

Man kann diese Betrachtungen leicht auf alle Differentialgleichungen von derselben Gattung ausdehnen, wie groß auch die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen oder die Ordnung der Gleichung sein mag.

§. 488. Die Aufgaben, welche bis jetzt durch die Integration partieller Differentialgleichungen behandelt worden sind, gehören hauptsächlich der Theorie der Bewegung der Wärme, oder der Mechanik an. In den Aufgaben der ersten Art betrachtet man die Temperatur in einem gegebenen Punkte eines Körpers wie eine Function der Zeit und der drei Coordinaten dieses Punkts. Die Differentialgleichung drückt gewisse Beziehungen aus, welche zwischen den partiellen Differentialverhältnissen dieser Function stattfinden müssen; Beziehungen, welche unmittelbar aus dem Gesetze der Mittheilung der Wärme hervorgehen, und allen Aufgaben gemeinschaftlich sind. Das Integral muß diesen Beziehungen Genüge leisten, außerdem aber auch gewissen besonderen Bedingungen, welche abhängig sind von der Gestalt des Körpers, von der Art der Erwärmung oder Erkältung, und endlich von dem anfänglichen Stande der Temperatur in den verschiedenen Punkten. In den Aufgaben der Mechanik, wo man die Bewegung eines Systems von Körpern betrachtet, werden die veränderlichen Coordinaten der Punkte, welche ihren Ort verlassen, wie Functionen der Zeit und der anfänglichen Coordinaten dieser Punkte angesehen. Die Differentialgleichungen drücken die allgemeinen Gesetze der Bewegung aus. Die Integrale müssen diesen Gleichungen Genüge leisten, ferner den besonderen Bedingungen des Systems, und endlich müssen sie, wenn man darin die Zeit gleich Null setzt, den anfänglichen Zustand der Ruhe oder Bewegung darstellen, in welchem das System sich in dem Augenblicke befunden hat, von welchem die Zeit gerechnet wird. Die nachfolgenden Aufgaben mögen dazu dienen, von der Art, wie in den einfachsten Fällen diese Integrale sich gestalten, einen Begriff zu geben.

§. 489. Man denke sich wie im §. 448 einen cylindrischen oder prismatischen Stab, dessen Dicke sehr gering ist. Dieser Stab, welcher eine bestimmte Länge besitzt, sei anfänglich auf irgend eine Weise erwärmt worden, und werde darauf in ein Mittel versetzt, dessen constante Temperatur Null ist, und in welchem die beiden Endpunkte des Stabes gleichfalls beständig durch irgend eine Ursache auf der Temperatur Null erhalten werden. Es wird gefordert, während der Stand der anfänglichen Temperatur des Stabes gegeben ist, die Veränderungen auszumitteln, welche die Temperaturen der verschiedenen Punkte mit dem Ablauf der Zeit erleiden, bis dahin, wo der Ueberschuß von Wärme, welchen der Stab enthält, in das umgebende Mittel entwichen ist und mithin jene Temperaturen sich sämmtlich auf die Temperatur des Mittels selbst reducirt haben. Man nenne

Ω den Querschnitt des Stabes;

γ den Umfang dieses Querschnitts;

x den Abstand eines beliebigen Querschnitts von dem einen Ende des Stabes;

v die Temperatur in diesem Querschnitte nach Ablauf der Zeit t;

a die Länge des Stabes;

K und H die innere und die äußere Leitungsfähigkeit;

C die specifische Wärme;

D das Gewicht der Einheit des Volumen.

Die Wärme geht von den erwärmteren Theilen des Stabes über zu den minder erwärmten, während sie zugleich entweicht, zum Theil durch die Oberfläche des Stabes in das umgebende Mittel, zum Theil durch die beiden Enden des Stabes, welche beständig auf der Temperatur Null erhalten werden. Betrachtet man das prismatische Element, dessen Länge dx und dessen Volumen Ωdx ist, so muß die Temperatur dieses Elements sich in der Zeit dt erhöhen um $\frac{dv}{dt}\,dt$; mithin wird der Ueberschuß der empfangenen Wärme über die verlorene Wärme, in derselben Zeit, betragen $CD.\Omega dx.\frac{dv}{dt}\,dt$. Aber von anderer Seite beträgt die Wärme, welche das Element in der Zeit dt durch sein eines Ende aufnimmt, $-K.\Omega\frac{dv}{dx}\,dt$; ferner diejenige, welche es durch sein anderes Ende entläßt, $-K.\Omega\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d^2v}{dx^2}\,dx\right)dt$; und diejenige, welche es durch seine Oberfläche verliert, $H.\gamma dx.vdt$; folglich muß die Wärme, welche in dem Elemente zurückbleibt, betragen $\left(K\Omega\frac{d^2v}{dx^2} - H\gamma v\right)dx\,dt$. Setzt man diese Wärmemenge derjenigen gleich, welche nöthig ist, um die in dem Elemente stattfindende Erhöhung der Temperatur hervorzubringen, so kommt

$$CD\Omega\frac{dv}{dt} = K\Omega\frac{d^2v}{dx^2} - H\gamma v,$$

oder wenn man zur Abkürzung $\frac{K}{CD}$ mit k und $\frac{H}{CD}$ mit h bezeichnet,

$$\frac{dv}{dt} = k\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{h\gamma}{\Omega}v,$$

welche partielle Differentialgleichung mithin das Gesetz der Bewegung der Wärme in dem Stabe ausspricht.*)

Diese Gleichung nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man setzt $v = u\,e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}$, wo u eine neue Veränderliche bedeutet; sie verwandelt sich sodann in

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Gemäß den §. 487 geschieht dieser Gleichung durch den besonderen Werth $u = e^{mx+nt}$ Genüge, vorausgesetzt daß die Constanten m und n der Gleichung entsprechen $n = km^2$. Das allgemeine Integral wird also

---

*) Will man die Vertheilung der Wärme in dem Stabe für den Fall kennen lernen, wo der Beharrungszustand der Temperaturen eingetreten sein wird, so hat man $\frac{dv}{dt} = 0$ zu setzen, wodurch wieder die Gleichung des §. 448 entsteht. Die hier vorkommenden Größen k und h sind, wie man leicht erkennt, den gleichbezeichneten Größen des §. 448 proportionirt.

$$u = Ae^{mx+km^2t} + A_1 e^{m_1x+km_1^2t} + A_2 e^{m_2x+km_2^2t} + \text{2c.},$$

wo die Constanten m, m_1, m_2, 2c. und A, A_1, A_2, 2c. vollkommen unbestimmt sind.

§. 490. Dieses Integral gehört, gleichwie die Differentialgleichung, zu allen Aufgaben, welche die Bewegung der Wärme in einem prismatischen Stabe von sehr geringer Dicke betreffen, wenn dieser Stab sich in einem Mittel von constanter Temperatur befindet. In dem vorliegenden Falle muß überdies noch den beiden Bedingungen Genüge geschehen: 1) daß der Werth von v, und folglich auch der von u, in den beiden Endpunkten des Stabes d. h. für $x = 0$ und $x = a$ zu Null werde; 2) daß für $t = 0$ der Ausdruck von v mit dem anfänglichen Stande der Temperaturen übereinstimme, den man sich unter einer Form wie $v = \varphi(x)$ gegeben denken muß, wo φ eine vollkommen willkürliche Function bedeutet.

Der vorstehnde Ausdruck entspricht nicht der Bedingung daß $u=0$ werde für $x=0$ und $x=a$, so lange man für die Zahlen m, m_1, m_2, 2c. reelle Werthe annimmt. Wenn man diesen Zahlen aber die imaginären Werthe $m\sqrt{-1}$, $m_1\sqrt{-1}$, $m_2\sqrt{-1}$, 2c. beilegt, und für die imaginären Exponentialgrößen ihre Ausdrücke durch Sinus und Cosinus reeller Bögen an die Stelle setzt, so erhält man die Formel

$$u = (A\sin mx + B\cos mx)\,e^{-km^2t} + (A_1\sin m_1x + B_1\cos m_1x)\,e^{-km_1^2t}$$
$$+ (A_2\sin m_2x + B_2\cos m_2x)\,e^{-km_2^2t} + \text{2c.},$$

in welcher man, um ihr jede zulässige Allgemeinheit zu bewahren, den Gliedern $\sin mx \,.\, e^{-km^2t}$ und $\cos mx \,.\, e^{-km^2t}$, und ebenso allen folgenden, gesonderte Coefficienten geben muß, weil diese Glieder einzeln genommen, wovon man sich leicht überzeugen kann, der Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = k\,\frac{d^2u}{dx^2}$ Genüge thun. Aber in dem besonderen Falle, welcher hier vorliegt, muß man nothwendig alle Coefficienten B, B_1, B_2, 2c, gleich Null annehmen; denn die Glieder, welche mit diesen Coefficienten behaftet sind, können nicht zu Null werden, wenn man $x=0$ setzt. Es bleibt also nur derjenige Theil des Integrals übrig, welcher mit dieser Bedingung bestehen kann, nämlich

$$u=A\sin mx.e^{-km^2t}+A_1\sin m_1x.e^{-km_1^2t}+A_2\sin m_2x.e^{-km_2^2t}+\text{2c.}$$

Soll nun auch der anderen Bedingung Genüge geschehen, daß $u=0$ werde für $x=a$, so hat man nur nöthig, für die Zahlen m, m_1, m_2, 2c. genaue Vielfache der halben Kreisperipherie, dividirt durch a, anzunehmen. Man wird also schreiben

$$u=A_1\sin\frac{\pi x}{a}.e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}+A_2\sin\frac{2\pi x}{a}.e^{-\frac{4k\pi^2}{a^2}t}+$$
$$+A_3\sin\frac{3\pi x}{a}.e^{-\frac{9k\pi^2}{a^2}t}+\text{2c.},$$

und wenn man sich diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt denkt, so bietet das Resultat alle mögliche Allgemeinheit dar, mit Einschluß der Bedingungen, daß der Ausdruck für u der Differentialgleichung Genüge leiste, und für $x=0$ und $x=a$ den Werth $u=0$ liefere.

§. 491. Es muß jetzt noch der zweiten Bedingung Genüge geschehen, daß nämlich, wenn man $t=0$ setzt, woraus sich ergibt $v=u$ und

$$u=A_1\sin\frac{\pi x}{a}+A_2\sin\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin\frac{3\pi x}{a}+\text{2c.},$$

die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung, ins Unendliche fortgesetzt, den Werth der gegebenen und willkürlichen Function $\varphi(x)$ wieder hervorbringe, durch welche der anfängliche Stand der Temperaturen dargestellt wird. Mit anderen Worten, es müssen die Coefficienten A_1, A_2, A_3, 2c., welche bis jetzt willkürlich bleiben, durch die Bedingung bestimmt werden, daß die Gleichung

$$\varphi(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{ꝛc.} \quad \text{(A)}$$

für jeden Werth der Veränderlichen x innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = a$ Gültigkeit behalte.

Man denke sich die Länge a des Stabes in $n + 1$ gleiche Theile getheilt, wo n eine ganze Zahl bedeutet, welche unbegränzt wachsen soll, und bezeichne mit $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Abscissen der Theilpunkte. Bildet man die Gleichungen

$$\varphi(x_1) = A_1 \sin \frac{\pi x_1}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x_1}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x_1}{a} + \ldots\ldots + A_n \sin \frac{n\pi x_1}{a},$$

$$\varphi(x_2) = A_1 \sin \frac{\pi x_2}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x_2}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x_2}{a} + \ldots\ldots + A_n \sin \frac{n\pi x_2}{a},$$

$$\varphi(x_3) = A_1 \sin \frac{\pi x_3}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x_3}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x_3}{a} + \ldots\ldots + A_n \sin \frac{n\pi x_3}{a},$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(x_n) = A_1 \sin \frac{\pi x_n}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x_n}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x_n}{a} + \ldots\ldots + A_n \sin \frac{n\pi x_n}{a},$$

so müssen alle diese Gleichungen bestehen, und man kann aus ihnen die Werthe der Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ herleiten. Um die Elimination auszuführen, welche den Werth des Coefficienten A_μ gibt, der zu dem Gliede $A_\mu \sin \frac{\mu\pi x}{a}$ gehört, multiplicire man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\frac{a}{n+1} \sin \frac{\mu\pi x_1}{a}$, die zweite mit $\frac{a}{n+1} \sin \frac{\mu\pi x_2}{a}$, die dritte mit $\frac{a}{n+1} \sin \frac{\mu\pi x_3}{a}$, u. s. f., endlich die letzte mit $\frac{a}{n+1} \sin \frac{\mu\pi x_n}{a}$, und addire sämmtliche Gleichungen. Nimmt man sodann die Zahl n unendlich groß an, so wird das Intervall $\frac{a}{n+1}$ einerlei mit dem unendlich kleinen Element dx. Ferner:

1) Die Summe aller Glieder auf der linken Seite dieser Gleichungen fällt zusammen mit dem bestimmten Integral $\int_0^a dx . \sin\frac{\mu\pi x}{a} . \varphi(x)$.

2) Bezeichnet man mit $A_\nu \sin\frac{\nu\pi x}{a}$ ein beliebiges Glied auf der rechten Seite der Gleichung (A), so wird die Summe aller correspondirenden Glieder in den vorstehenden Gleichungen einerlei mit $A_\nu \int_0^a dx . \sin\frac{\mu\pi x}{a} . \sin\frac{\nu\pi x}{a}$.

3) Endlich beträgt die Summe aller Glieder, welche den Coefficienten A_μ enthalten, $A_\mu \int_0^a dx\left(\sin\frac{\mu\pi x}{a}\right)^2$.

Man bemerke nun, daß das bestimmte Integral

$$\int_0^a dx . \sin\frac{\mu\pi x}{a} . \sin\frac{\nu\pi x}{a}$$

den Werth Null hat, so lange μ und ν zwei von einander verschiedene ganze Zahlen bedeuten, weil es nämlich einerlei ist mit

$$\tfrac{1}{2}\int_0^a dx\left[\cos\frac{(\mu-\nu)\pi x}{a} - \cos\frac{(\mu+\nu)\pi x}{a}\right].$$

Wenn dagegen die Zahlen μ und ν einander gleich sind, oder das Integral vorliegt

$$\int_0^a dx\left(\sin\frac{\mu\pi x}{a}\right)^2,$$

ſo findet man den Werth desſelben gleich $\frac{a}{2}$. Mithin hat die angezeigte Operation alle Glieder auf der rechten Seite, mit Ausnahme eines einzigen, zum Verſchwinden gebracht, und es bleibt zur Beſtimmung des geſuchten Coefficienten nur die Gleichung

$$\int_0^a dx . \sin \frac{\mu\pi x}{a} . \varphi(x) = A_\mu . \frac{a}{2},$$

woraus folgt

$$A_\mu = \frac{2}{a} \int_0^a dx . \sin \frac{\mu\pi x}{a} . \varphi(x)$$

als allgemeiner Ausdruck für die Coefficienten auf der rechten Seite der Gleichung (A). Jeder dieſer Coefficienten wird alſo durch ein beſtimmtes Integral gegeben, unter deſſen Zeichen die willkürliche Function $\varphi(x)$ vorkommt. Dieſes Integral ſtellt die Fläche einer Curve dar, welche man erhält, indem man in dem Intervalle zwiſchen $x = 0$ und $x = a$ die correſpondirenden Ordinaten zweier Curven mit einander multiplicirt, deren Gleichungen ſind $y = \varphi(x)$ und $y = \sin \frac{\mu\pi x}{a}$. Der Werth dieſes Integrals kann immer berechnet werden, vorausgeſetzt, daß nicht innerhalb des angezeigten Intervalls die Ordinate unendlich große Werthe annimmt, welcher Umſtand jedoch bei den phyſikaliſchen Aufgaben niemals eintritt, bei denen dieſe Rechnungen Anwendung finden.

Die Gleichung (A) wird jetzt (wenn man zu größerer Deutlichkeit unter die Zeichen der beſtimmten Integrale eine neue Veränderliche α an die Stelle von x ſetzt)

$$\varphi(x) = \frac{2}{a}\Big[\sin\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\,.\sin\frac{\pi\alpha}{a}\,.\,\varphi(\alpha) + \sin\frac{2\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\,\sin\frac{2\pi\alpha}{a}\,.\,\varphi(\alpha)$$
$$+ \sin\frac{3\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\,.\sin\frac{3\pi\alpha}{a}\,.\,\varphi(\alpha) + \text{rc.}\Big],$$

oder auch, abgekürzt,

$$\varphi(x) = \frac{2}{a}\mathop{\mathbf{S}}_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sin\frac{\mu\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\,.\sin\frac{\mu\pi\alpha}{a}\,.\,\varphi(\alpha),$$

wo μ das Zeichen für irgend eine ganze Zahl ist. Man kann übrigens beweisen, daß eine solche Reihe, wie auf der rechten Seite dieser Gleichung dargestellt ist, immer convergiren muß, wie auch die willkürliche Function $\varphi(x)$ beschaffen sein mag; d. h. die Summe der Glieder wird, je größer man die Anzahl derselben annimmt, desto mehr sich einer bestimmten Gränze nähern, welche mit dem Werthe auf der linken Seite dieser Gleichung übereinstimmt, vorausgesetzt daß man der Veränderlichen x nur solche Werthe beilegt, die zwischen 0 und a enthalten sind.*) Außerhalb dieses Intervalles nimmt die rechte Seite der Gleichung periodische Werthe an, welche im allgemeinen nicht mehr mit den Werthen der willkürlichen Function $\varphi(x)$ übereinstimmen.

Es mag nicht überflüssig sein zu bemerken, daß man sich nicht gestatten darf, auf der rechten Seite der Gleichung (A) irgend eines von den Gliedern aus der Reihe der Sinus wegzulassen; denn diese Weglassung würde dem gesuchten Integrale die nöthige Allgemeinheit nehmen, da das Integral immer, ohne irgend eine Ausnahme, alle analytischen Ausdrücke umfassen muß, welche sowohl der Differentialgleichung als den besonderen Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

---

*) Dieser Beweis findet sich am Schlusse dieses Abschnitts, Seite 165.

Wollte man z. B. das Glied $A_3 \sin\frac{3\pi x}{a}$ weglassen, so würde man durch Multiplication der beiden Seiten der Gleichung (A) mit $dx.\sin\frac{3\pi x}{a}$ und Integration von $x=0$ bis $x=a$ das Resultat erhalten $\int_0^a dx.\sin\frac{3\pi x}{a}.\varphi(x)=0$, welches augenscheinlich nicht allgemein bestehen kann, sondern nur für gewisse besondere Formen der Function $\varphi(x)$.

§. 492. In Folge der vorstehenden Entwickelung findet sich die veränderliche Temperatur v der verschiedenen Punkte des Stabes ausgedrückt durch die Formel

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}.\underset{\mu=1}{\overset{\mu=\infty}{\mathbf{S}}}\sin\frac{\mu\pi x}{a}.e^{-\frac{\mu^2k\pi^2}{a^2}t}\int_0^a d\alpha.\sin\frac{\mu\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha),$$

welche die gegebene Aufgabe vollständig auflöst. Sie zeigt also an, auf welche Weise die Wärme fortschreitet und sich in dem Stabe vertheilt. Die auf einander folgenden Glieder der Reihe sind mit den Factoren $e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{4k\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{9k\pi^2}{a^2}t}$, 2c. behaftet, welche sich sämmtlich für $t=0$ auf die Einheit reduciren, dagegen, sobald t zunimmt, sehr ungleiche Werthe erhalten, und vom ersten Gliede an gerechnet desto schneller abnehmen, je größer die Zeit t geworden ist. Daraus geht hervor, daß mit dem Ablauf der Zeit die letzten Glieder der Reihe nach und nach verschwinden, und daß mithin bald die Reihe auf ihre beiden ersten Glieder, oder selbst auch auf ihr erstes Glied allein reducirt werden kann, so daß man bloß hat

$$v = \frac{2}{a} \cdot e^{-\left(\frac{h\gamma}{\Omega} + \frac{k\pi^2}{a^2}\right)t} \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \int_0^a d\alpha \cdot \sin\frac{\pi\alpha}{a} \cdot \varphi(\alpha).$$

Wie willkürlich und regellos also auch der anfängliche Stand der Temperaturen gewesen sein mag, so tritt doch sehr bald ein Streben nach derjenigen Vertheilung der Wärme ein, welche durch diese Formel ausgesprochen wird; d. h. nach einer solchen Vertheilung, wo die Temperaturen der verschiedenen Punkte proportional sind den Sinus der Bögen, welche der Halbkreis in sich enthält. Diese Proportionalität ändert sich dann nicht weiter. Die Temperaturen aller Punkte sinken zugleich, unter Beibehaltung der nämlichen Verhältnisse; und in aller Strenge wird erst nach einer unendlichen Zeit jeder Ueberschuß von Wärme, der in dem Stabe gegeben war, entwichen sein, und jeder Punkt die Temperatur Null des Mittels erlangt haben, in welchem sich der Stab befindet.

§. 493. Man erkennt übrigens leicht, daß die vorstehende Auflösung, insofern sie sowol die anfänglichen Temperaturen darstellt als auch der Differentialgleichung Genüge leistet, die einzige mögliche ist, oder daß jede andere Auflösung nicht von ihr verschieden sein kann. Sobald nämlich der anfängliche Stand $v_0 = \varphi(x)$ der Temperaturen gegeben ist, so bestimmt die Differentialgleichung, aus welcher man den Werth des Differentialverhältnisses $\frac{dv}{dt}$ erhält, die Temperatur $v_0 + \frac{dv_0}{dt}\Delta t = v_1$, welche nach Ablauf der Zeit Δt in jedem Punkte stattfindet, mit einer desto größeren Genauigkeit, je kleiner Δt ist. Sie bestimmt ebenso die Temperaturen $v_2 = v_1 + \frac{dv_1}{dt}\Delta t$, $v_3 = v_2 + \frac{dv_2}{dt}\Delta t$, rc., welche nach den Zeiten $2\Delta t$, $3\Delta t$, rc. eintreten. Nun gibt der obige Ausdruck, da er $v = v_0$ für $t = 0$ liefert und der Differential=

gleichung Genüge leistet, augenscheinlich für $t = \Delta t$, oder $= 2\Delta t$, oder $= 3\Delta t$, 2c. die nämlichen Werthe v_1, v_2, v_3, 2c., wo das Intervall Δt unendlich klein vorauszusetzen ist. Mithin ist die Auflösung nur auf eine Weise möglich, und nothwendig durch die obige Formel ausgedrückt.

§. 494. Als zweites Beispiel diene die Aufgabe, die Schwingungen eines gespannten Fadens zu bestimmen, welcher in seinen beiden Endpunkten befestigt ist. Man denke sich den Faden auf irgend eine Weise aus seiner natürlichen geradlinigen Lage gebracht, und allen seinen Punkten irgend welche Geschwindigkeiten beigelegt; es handelt sich sodann um die Bestimmung derjenigen Bewegungen, welche diese Punkte annehmen. Um größerer Einfachheit willen soll festgesetzt werden, daß alle Bewegungen in einer Ebene vorgehen, und daß die Ausweichungen aller Punkte von der geraden Verbindungslinie der beiden festen Endpunkte sehr klein ausfallen, so daß man die höheren Potenzen der Zahlen, welche dieselben darstellen, vernachlässigen darf. Man bezeichne mit

x die Abscisse irgend eines Punkts der Curve, welche durch den Faden gebildet wird, nach Ablauf der Zeit t;

y die Ordinate dieses Punkts;

a die Länge des Fadens zwischen seinen beiden festen Endpunkten;

p das Gewicht der Längeneinheit des Fadens;

P ein Gewicht, gleich derjenigen Kraft, mit welcher der Faden gespannt wird;

g die Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper in der Zeiteinheit erlangt.

Die Bewegung eines jeden Längenelements des Fadens, dessen Gewicht durch pdx und dessen Masse durch $\frac{p}{g}dx$ ausgedrückt werden kann, läßt sich bestimmen, indem man dieses

Element wie einen freien materiellen Punkt ansieht, auf welchen diejenigen Kräfte einwirken, welche aus seiner Verbindung mit den übrigen Theilen des Fadens sich ergeben. Will man also die Bewegung des Elements im Sinne der y bestimmen, so wird man beachten, daß vermöge dieser Verbindung, nach Ablauf der Zeit t, das Element an seinem einen Ende durch die Seitenkraft $P\frac{dy}{dx}$ der Spannung P des Fadens, parallel zu der Achse der y nach der Achse der x hin bewegt wird; an seinem anderen Ende dagegen durch dieselbe Seitenkraft, um ihr Differential vermehrt, d. h. durch die Kraft $P\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx}\right)$ von der Achse der x entfernt wird. Das Element steht also, im Sinne der Ordinate y, unter der Einwirkung der Differenz dieser beiden Kräfte, nämlich $P\frac{d^2y}{dx}$, und folglich wird das Gesetz seiner Bewegung ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{pdx}{g}\,\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{d^2y}{dx}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{gP}{p}\,\frac{d^2y}{dx^2},$$

welche für alle Punkte des Fadens Gültigkeit haben muß.

§. 495. Damit dieser Differentialgleichung, nach §. 487, durch den besonderen Werth $y=e^{mx+nt}$ Genüge geschehe, müssen die Größen m und n die Bedingung erfüllen

$$n^2=k^2m^2, \quad \text{woraus} \quad n=\pm km,$$

wo zur Abkürzung k statt $\sqrt{\frac{gP}{p}}$ gesetzt worden ist. Man kann also eben sowol $y=e^{m(x+kt)}$ als $y=e^{m(x-kt)}$ nehmen, wo der Werth von m noch willkürlich bleibt. Daraus aber folgt, daß das allgemeine Integral der vorstehenden Gleichung ausgedrückt wird durch

$$y=Ae^{m(x+kt)}+A_1e^{m_1(x+kt)}+A_2e^{m_2(x+kt)}+\text{rc.}$$
$$+Be^{n(x-kt)}+B_1e^{n_1(x-kt)}+B_2e^{n_2(x-kt)}+\text{rc.},$$

wo die Constanten m, m_1, m_2, 2c. und n, n_1, n_2, 2c. vollkommen willkürlich sind, gleich wie A, A_1, A_2, 2c. und B, B_1, B_2, 2c.

Um nun diese Constanten auf eine Weise zu bestimmen, welche den Bedingungen der gegebenen Aufgabe gemäß ist, muß zuerst die Ordinate y in den beiden festen Endpunkten des Fadens, d. h. für $x=0$ und $x=a$, den Werth Null annehmen. Damit dies aber geschehen könne, muß man den Constanten m, m_1, m_2, 2c. und n, n_1, n_2, 2c. imaginäre Werthe beilegen, oder man muß statt $e^{m(x+kt)}$ setzen

$$\cos m(x+kt)+\sqrt{-1}\,.\sin m(x+kt)$$

d. h.

$$\cos mx \cos mkt - \sin mx \sin mkt + \sqrt{-1}\,.(\sin mx \cos mkt + \cos mx \sin mkt),$$

und statt $e^{n(x-kt)}$ muß man setzen

$$\cos nx \cos nkt + \sin nx \sin nkt + \sqrt{-1}\,.(\sin nx \cos nkt - \cos nx \sin nkt),$$

und ebenso in den übrigen Gliedern. Sodann muß man die Glieder weglassen, welche $\cos mx$ oder $\cos nx$ enthalten, weil diese für $x=0$ nicht Null werden; und in Betreff der Glieder, welche $\sin mx$ oder $\sin nx$ enthalten, muß man für die Constanten m oder n Vielfache der halben Kreisperipherie, dividirt durch a, annehmen, damit diese Glieder für $x=a$ verschwinden. Man erhält also als gesuchtes Integral, indem man den Gliedern, welche für sich der Differentialgleichung Genüge leisten, besondere Coefficienten gibt,

$$y = A_1 \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi kt}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi kt}{a} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{3\pi kt}{a} + \text{2c.}$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi kt}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi kt}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi kt}{a} + \text{2c.},$$

und hierin bleiben nur noch, durch Betrachtung des anfänglichen Zustandes, die Coefficienten A_1, A_2, A_3, 2c. und B_1, B_2, B_3, 2c. zu bestimmen.

§. 496. Man nehme zu dem Ende an, daß in dem Augenblicke, in welchem man die Zeit zu zählen anfängt, 1) die Gestalt des Fadens ausgedrückt werde durch die Gleichung $y = \varphi(x)$, und 2) die Geschwindigkeit in jedem seiner Punkte ausgedrückt werde durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \psi(x)$, wo φ und ψ vollkommen willkürliche Functionen bedeuten. Damit der obige Ausdruck sich diesen Bedingungen anschließe, muß man haben

$$\varphi(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \text{rc.}$$

$$\psi(x) = B_1 \frac{\pi k}{a} \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \frac{2\pi k}{a} \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \frac{3\pi k}{a} \sin\frac{3\pi x}{a} + \text{rc.}$$

aus welchen Gleichungen die in Rede stehenden Coefficienten auf ähnliche Weise, wie im §. 491, sich bestimmen lassen. Der vollständige Ausdruck der Ordinate y wird

$$y = \frac{2}{a} \mathop{\mathbf{S}}_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sin\frac{\mu\pi x}{a} \cos\frac{\mu\pi k t}{a} \int_0^a d\alpha \,.\, \sin\frac{\mu\pi\alpha}{a} \,.\, \varphi(\alpha)$$

$$+ \frac{2}{\pi k} \mathop{\mathbf{S}}_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} \sin\frac{\mu\pi x}{a} \sin\frac{\mu\pi k t}{a} \int_0^a d\alpha \,.\, \sin\frac{\mu\pi\alpha}{a} \,.\, \psi(\alpha).$$

Dieser Ausdruck lehrt, daß die Bewegung des Fadens, wie auch der anfängliche Zustand desselben beschaffen sein mag, immer angesehen werden kann wie der Inbegriff einer unendlich großen Anzahl von einfachen schwingenden Bewegungen, die sich summiren, und von denen jede durch ein Glied der beiden Reihen ausgedrückt wird. Jede dieser einfachen schwingenden Bewegungen liefert stets wieder die nämlichen Werthe von y, mit abwechselnden Vorzeichen, wenn die Zeit t um $\frac{a}{\mu k}$ oder ein Vielfaches von $\frac{a}{\mu k}$ zunimmt; mithin ist die Schwingungsdauer der einfachen Bewegung umgekehrt proportional der Zahl μ, oder sie nimmt ab wie die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, rc. Die wirkliche Schwingungsdauer aber, nach deren Ablauf der ganze Faden wieder in seinen anfänglichen Zustand zurückkehrt, jedoch auf entgegengesetzter Seite von der geraden Verbindungslinie der beiden festen Endpunkte, ist gleich $\frac{a}{k}$ oder $a\sqrt{\frac{p}{gP}}$; sie ist also proportional der Länge des Fadens zwischen seinen festen Endpunkten, und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Verhältniß des Gewichts der Längeneinheit des Fadens zu dem Gewichte, welches die Spannung des Fadens mißt. Diese Resultate stimmen mit der Erfahrung vollkommen überein.

Durch ähnliche Betrachtungen wie im §. 493 kann man überdies beweisen, daß nur eine Auflösung möglich ist, und daß dieselbe nothwendig durch den vorhergehenden Ausdruck gegeben wird, welcher sowol dem anfänglichen Zustande als der Differentialgleichung Genüge leistet.

Beweis der Convergenz der Reihen, welche nach den Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten und den Werth einer willkürlichen Function innerhalb gegebener Gränzen ausdrücken.

Die Convergenz dieser Reihen, welche im §. 491 zur Sprache gekommen sind, läßt sich für jede mögliche Beschaffenheit der Function $\varphi(x)$ auf folgende Art nachweisen.

Zu größerer Einfachheit nehme man $a = \pi$; das allgemeine Glied der Reihe wird sodann

$$\sin \mu x \int_0^\pi d\alpha \,.\, \sin \mu\alpha \,.\, \varphi(\alpha).$$

Es sei zuerst μ eine gerade Zahl. Das Integral $\int_0^\pi d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, \varphi(\alpha)$ läßt sich sodann in eine Anzahl von Theilen zerlegen, welche Intervallen gleich $\frac{2\pi}{\mu}$ entsprechen, die auf der Achse der α zwischen 0 und π enthalten sind. Man betrachte die Glieder der Reihe, welche von dem ersten fern genug liegen und in denen die Zahl μ groß genug ist, damit in jedem dieser Intervalle die Linie, deren Ordinate $\varphi(\alpha)$ ist, wie eine gerade Linie angesehen werden kann. Die Ordinate dieser geraden Linie sei $m+n\alpha$. Nun hat man

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\mu}} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, (m+n\alpha) = -n\frac{2\pi}{\mu^2};$$

oder wenn man mit α_1 und α_2 die Abscissen bezeichnet, welche den beiden Gränzen dieses Integrals entsprechen, so daß man hat $n = \dfrac{\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)}{\frac{2\pi}{\mu}}$,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, (m+n\alpha) = \frac{1}{\mu}\,[\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)].$$

Folglich hat man unmittelbar für die in Rede stehenden Glieder

$$\int_0^{\pi} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, \varphi(\alpha) = \frac{1}{\mu}\,[\varphi(0)-\varphi(\pi)].$$

Es sei zweitens μ eine ungerade Zahl. Das gesuchte Integral besteht sodann zuerst aus einer Anzahl von Theilen, welche Intervallen gleich $\frac{2\pi}{\mu}$ entsprechen und deren Summe vermöge des Vorigen gleich $\frac{1}{\mu}\left[\varphi(0)-\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{\mu}\right)\right]$ ist; und ferner aus einem Theile, welcher einem Intervalle gleich $\frac{\pi}{\mu}$ zugehört. Nun hat man

$$\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, (m+n\alpha) = \frac{2m}{\mu} + \frac{n\pi}{\mu^2},$$

und überdies ist für diesen letztern Theil

$$m = \varphi\left(\pi - \frac{\pi}{\mu}\right),\ n = \frac{\varphi(\pi) - \varphi\left(\pi - \frac{\pi}{\mu}\right)}{\frac{\pi}{\mu}},$$

folglich

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{\mu}}^{\pi} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, (m + n\alpha) = \frac{1}{\mu}\left[\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{\mu}\right) + \varphi(\pi)\right].$$

Also wird, wenn μ ungerade und sehr groß ist,

$$\int_0^{\pi} d\alpha \,.\, \sin\mu\alpha \,.\, \varphi(\alpha) = \frac{1}{\mu}[\varphi(0) + \varphi(\pi)].$$

Aus dieser Entwickelung ergibt sich: 1) Wenn die Linie, deren Ordinate $\varphi(x)$ ist, sich auf eine gerade Linie reducirt, so hat man vollkommen genau (s. §. 491.)

$$\varphi(0) + \frac{\varphi(\pi) - \varphi(0)}{\pi} x =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\left[\begin{array}{l} [\varphi(0) + \varphi(\pi)]\,(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \text{etc.}) \\ + [\varphi(0) - \varphi(\pi)]\,(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 8x + \text{etc.}) \end{array}\right];$$

2) wenn diese Linie von einer geraden Linie verschieden ist, so wird das erhaltene Resultat mehr und mehr mit dem vorstehenden Resultat zusammenfallen, je weiter die Glieder, welche man betrachtet, sich von dem Anfangsgliede entfernen. Daraus folgt, daß man nur nöthig hat die Richtigkeit dieser Gleichung nachzuweisen, damit die Convergenz der Reihen in allen möglichen Fällen bewiesen sei.

Man betrachte zuerst die Reihe

$$U = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \text{etc.},$$

und nehme anfangs nur die Summe von einer begränzten Anzahl von Gliedern, nämlich

$$U_n = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx,$$

wo n eine ungerade Zahl bedeutet. Differentiirt man in Bezug auf x, so kommt

$$\frac{dU_n}{dx} = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \ldots + \cos nx$$

oder nach einer Formel, die weiter unten (im **XL.** Abschnitte) entwickelt werden wird

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{\sin(n+1)x}{2\sin x}.$$

Folglich erhält man, wenn man mit dx multiplicirt und integrirt,

$$U_n = C - \frac{\cos(n+1)x}{2(n+1)\sin x} + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos(n+1)\,x\,.\,d\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

wo C die Constante bedeutet. Zur Bestimmung der Constante setze man zu gleicher Zeit $x = \frac{\pi}{2}$ und n unendlich groß. Die linke Seite der Gleichung verwandelt sich sodann in $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$, und daraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = C, \quad \text{mithin } U = \frac{\pi}{4}.$$

Man betrachte sodann die Reihe

$$V = \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x + \tfrac{1}{8}\sin 8x + \text{etc.},$$

und nehme wie oben

$$V_n = \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x + \tfrac{1}{8}\sin 8x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx,$$

wo n eine gerade Zahl bedeutet. Die Differentiation gibt

$$\frac{dV_n}{dx} = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \ldots + \cos nx$$

oder, ähnlich wie vorhin,

$$\frac{dV_n}{dx} = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+1)x}{2\sin x};$$

und daraus wird durch Integration

$$V_n = C - \frac{x}{2} - \frac{\cos(n+1)x}{2(n+1)\sin x} + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos(n+1)x \,.\, d\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

wo C die Constante bezeichnet. Man bestimmt die Constante, wenn man $x = \frac{\pi}{4}$ und n unendlich groß werden läßt. Die linke Seite wird sodann $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}) = \frac{\pi}{8}$; also wird

$$\frac{\pi}{8} = C - \frac{\pi}{8}, \text{ und daraus } C = \frac{\pi}{4} \text{ und } V = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Man hat also jetzt die beiden Ausdrücke

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \tfrac{1}{7}\sin 7x + \text{etc.}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x + \tfrac{1}{8}\sin 8x + \text{etc.},$$

durch deren Substitution die oben erhaltene Gleichung offenbar identisch wird.

XXXIX. Variationsrechnung.

§. 497. Die Variationsrechnung hat ihre Entstehung in den Aufgaben über Maxima und Minima gefunden, wenn diese unter dem allgemeinsten Gesichtspunkte betrachtet werden; ihr hauptsächlichster Nutzen besteht in den Anwendungen auf Mechanik. Hier können nur die ersten Elemente und die einfachsten Anwendungen dieser Rechnung abgehandelt werden.

Vor allen Dingen muß man beachten, worin die Auf=

gaben über Maxima und Minima, welche von der Variationsrechnung abhängen, sich von den gewöhnlichen Aufgaben dieser Art unterscheiden. In diesen letzteren Aufgaben ist immer eine Größe U als Function von einer oder von mehreren unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. gegeben, so daß aus jedem System von Werthen, die man diesen Veränderlichen beilegt, ein bestimmter Werth für U hervorgeht. Man fordert diejenigen Werthe von x, y, z, ꝛc festzustellen, welche U so groß wie möglich, oder so klein wie möglich machen. Vermöge des XIV. Abschnitts wird diese Aufgabe dadurch gelöst, daß man die Gleichungen aufstellt

$$\frac{dU}{dx}=0, \quad \frac{dU}{dy}=0, \quad \frac{dU}{dz}=0, \quad \text{ꝛc.}$$

denen die gesuchten Werthe der Veränderlichen x, y, z, ꝛc. Genüge leisten müssen. Die Unterscheidung der Fälle, wo die Werthe, welche diesen Gleichungen Genüge leisten, entweder einem Maximum oder einem Minimum zugehören, stützt sich sodann, wie gleichfalls in dem angezeigten Abschnitte auseinander gesetzt worden ist, auf die Betrachtung der Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung von der Function U.

In den Aufgaben, welche von der Variationsrechnung abhängen, denkt man sich eine zwischen mehreren veränderlichen Größen bestehende, jedoch unbestimmte Relation, und fordert, daß diese Relation so bestimmt werden soll, daß der Werth einer gewissen Function, welcher von der in Rede stehenden Relation abhängt, so groß oder so klein wie möglich werde.

Man nehme z. B. eine zwischen zwei festen Punkten gezeichnete Curve, so ist die Größe der Fläche bestimmt, welche zwischen der Curve, der Abscissenachse und den Ordinaten der beiden Endpunkte enthalten ist, und ihr Werth hängt von der Relation $y=f(x)$ ab, welche die Gleichung jener

Curve darstellt. Denkt man sich ferner zwischen den beiden festen Punkten mehrere Curven, welche gleiche Längen haben, so wird die Gleichung $y = f(x)$ für jede eine andere sein, und die Fläche, deren Ausdruck ist $\int_{x_0}^{x_\omega} y\,dx$, hat gleichfalls verschiedene Werthe. Die Länge der Curve wird, wie bekannt ist, ausgedrückt durch

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Man kann nun die Aufgabe stellen, während diese Länge dieselbe bleibt, die Gestalt der Curve, d. h. die Form der Function $f(x)$, so zu bestimmen, daß die Fläche $\int_{x_0}^{x_\omega} y\,dx$ so groß oder so klein wie möglich wird.

Man nehme ferner eine zwischen zwei festen Punkten gezeichnete Curve, und betrachte einen Körper, welcher längs dieser Curve hinabfällt, indem er ohne Widerstand dem Einflusse der Schwere folgt. Die Zeit, welche der Körper gebraucht, um von dem einen Punkte zu dem anderen zu kommen, hängt von der Gestalt der in Rede stehenden Curve ab, und ihr Werth wird, wenn man die Achse der x als vertikal annimmt, ausgedrückt durch

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{2g(x - x_0)}}.$$

Man kann nun fordern, daß die Relation $y = f(x)$, welche die Gestalt der Curve feststellt, so bestimmt werden soll, daß diese Zeit so klein wie möglich werde. Die also erhaltene Curve führt den Namen **Brachistochrone** oder **Curve des schnellsten Falles**. Die Aufgabe kann verallgemeinert werden, wenn man die Brachistochrone nicht zwischen zwei festen Punkten, sondern zwischen zwei gegebenen krummen Linien oder zwischen zwei gegebenen krummen Flächen sucht. Die Gränzen x_0 und x_ω des Integrals werden alsdann veränderlich, gleichwie die Abscisse x_0 des ersten Punkts der Curve, welche unter dem Integralzeichen steht.

Eine Aufgabe von ähnlicher Natur ist die Aufsuchung der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei festen Punkten oder zwischen zwei gegebenen Linien, die auf der Fläche liegen, gezeichnet werden kann.

§. 498. Diese Beispiele werden hinreichen, um einen Begriff davon zu geben, welcher Art die in Rede stehenden Aufgaben sind, und welche analytischen Hülfsmittel man zur Auflösung derselben in Anwendung zu bringen hat. Der Ausdruck derjenigen Größe, die zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, kommt nach den bekannten Regeln vermittelst der Differentialbeziehungen der gesuchten Curve zu Stande. Dieser Ausdruck ist immer ein bestimmtes Integral, zwischen gegebenen Gränzen genommen, die entweder fest sind, oder veränderlich mit gewissen Bedingungen. Man soll den Werth dieses Integrals so groß oder so klein wie möglich machen, indem man demgemäß die analytische Relation bestimmt, von welcher die unter dem Integralzeichen stehenden Differentialverhältnisse abhängen. Die Auflösung beruhet übrigens völlig auf den nämlichen Grundlagen, welche bei den gewöhnlichen Aufgaben über Maxima und Minima Anwendung finden. Man läßt alle veränderlichen Größen, von denen der Werth der vorgelegten Functionen abhängig ist, um willkürliche Größen zunehmen, die man so klein voraussetzen kann, als man will; und in der Entwickelung des Werths, welchen dadurch diese Function annimmt, setzt man dasjenige Glied gleich Null, welches die ersten Potenzen dieser Zunahmen enthält; oder, wenn man will, man setzt das vollständige Differential der vorgelegten Function, in Bezug auf alle in ihm enthaltenen Veränderlichen genommen, gleich Null. Die hervorgehende Gleichung muß für alle Werthe Gültigkeit haben, welche den unendlich kleinen Zunahmen dieser veränderlichen Größen beigelegt werden können, und drückt somit die nothwendige Bedingung eines Maximum oder Minimum aus. Was die Unterscheidung der Fälle betrifft, wo ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder wo, obgleich dieser Bedingung Genüge geschieht, weder ein Maximum noch ein Minimum existirt, so hängt dieselbe von der Betrachtung desjenigen Gliedes ab, welches die zweiten Potenzen der Zunahmen enthält. Es wird nämlich ein Maximum oder ein Minimum eintreten, je nachdem dieses Glied resp. beständig negativ oder beständig positiv ist, welche Werthe man auch den Zunahmen beilegen mag.

Nach diesen allgemeinen Andeutungen bleibt jetzt nur noch übrig, auf die Einzelheiten der Rechnung in den besonderen Fällen einzugehen.

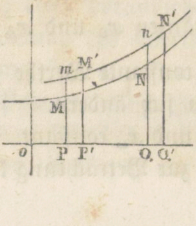
§. 499. Man betrachte zuerst den Fall, wo man nur eine unabhängige Veränderliche x hat, und eine Function y deren Werth von x abhängt, so daß y wie die Ordinate einer Curve angesehen werden kann, deren Abscisse x ist. Die Gestalt dieser Curve soll sodann so bestimmt werden, daß das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$$

ein Maximum oder Minimum werde. Hier bedeutet V irgend eine Function von einer bestimmten Anzahl der Größen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3},$ 2c.; die Gränzen x_0 und x_ω des Integrals können entweder gegebene constante Werthe sein, oder auch nach gewissen Bedingungen sich ändern.

Es seien zunächst die Gränzen x_0 und x_ω constant. In diesem Falle müssen die Endpunkte des zur Betrachtung kommenden Theils der Curve sich immer auf zwei Perpendikeln befinden, welche man auf der Achse der Abscissen in den Abständen x_0 und x_ω vom Anfangspunkte errichtet; und man wird die vorgelegte Function $\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$ auf eine so allgemeine Weise wie möglich sich verändern lassen, wenn man annimmt, die gesuchte Curve gehe in eine andere ihr unendlich nahe liegende Curve über, welche der nämlichen Bedingung unterworfen ist. Nun aber ist es zum Behufe eines solchen Ueberganges nicht nothwendig, daß in der Function V sich x verändere; es reicht vielmehr hin, in dieser Function den Größen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. beliebige und von einander unabhängige Veränderungen beizulegen, welche man mit δy, $\delta \frac{dy}{dx}$, $\delta \frac{d^2y}{dx^2}$, $\delta \frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. bezeichnen kann. Der Buchstabe δ bedeutet hier, eben sowol wie der Buchstabe d, eine unendlich kleine Zunahme, welche derjenigen veränderlichen Größe ertheilt worden ist, der der Buchstabe vorsteht; aber mit dem Unterschiede, daß das Zeichen d eine Zunahme anzeigt, welche durch den Uebergang von einem Punkte der gesuchten Curve zu dem folgenden Punkte der nämlichen Curve zu Stande kommt, das Zeichen δ dagegen eine Zunahme, welche durch den Uebergang von einem Punkte der gesuchten Curve zu dem correspondirenden Punkte der unendlich nahe liegenden Curve entsteht. *) Die mit δ bezeich-

Fig. 54.



*) Zur Erläuterung kann Fig. 54 dienen. Es sei MN die gesuchte Curve und MN' eine ihr unendlich nahe liegende Curve; dem Punkte M gehören die Coordinaten $oP = x$ und $PM = y$. Alsdann entsprechen dem Uebergange von M zu dem unendlich nahe liegenden Punkte N in der nämlichen Curve

neten Zunahmen nennt man Variationen (daher der Name Variationsrechnung), während die Benennung Differentiale für die mit d bezeichneten Zunahmen beibehalten bleibt. Die Variation der Function V, welche aus den Variationen der in ihr enthaltenen Größen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. hervorgeht, wird durch δV angezeigt; und man hat, genau nach den nämlichen Regeln, welche bei der Bildung des Differentials einer Function von mehreren Veränderlichen befolgt werden,

$$\delta V = N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ꝛc.},$$

wo mit N, P, Q, R, ꝛc. die Differentialverhältnisse der Function V resp. in Bezug auf die Veränderlichen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. bezeichnet worden sind.

Die Bedingung des Maximum oder Minimum fordert, daß die Variation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\delta V$$

des vorgelegten bestimmten Integrals gleich Null sei. Diese Bedingung wird also jetzt durch die Gleichung ausgesprochen

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ꝛc.}\right).$$

---

die Zunahmen $PQ = dx$ und $QN - PM = dy$; dagegen dem Uebergange von M zu dem correspondirenden Punkte M' der zweiten Curve die Zunahmen $PP' = \delta x$ und $P'M' - PM = \delta y$.

In dem besonderen Falle, welchen der obige Paragraph behandelt, ist $\delta x = 0$ für alle correspondirenden Punkte der beiden Curven, d. h. es fällt M' in m.

§. 500. Es läßt sich leicht beweisen, daß in den Ausdrücken $\frac{\delta dy}{dx}$, $\frac{\delta d^2y}{dx^2}$, $\frac{\delta d^3y}{dx^3}$, rc. die Ordnung der Zeichen d und δ willkürlich geändert werden darf. Denn es sei y die Ordinate irgend eines Punkts der gesuchten Curve, so ist die Ordinate des folgenden Punkts in der nämlichen Curve $y + dy$, die Ordinate des correspondirenden Punkts der benachbarten Curve dagegen $y + \delta y$. Demnach ist die Ordinate des folgenden Punkts in dieser letzteren Curve eben sowol $y + dy + \delta(y + dy)$, als auch $y + \delta y + d(y + \delta y)$; und daraus geht hervor $\delta dy = d\delta y$. *)

---

*) In Fig. 54 kann man die Ordinate $Q'N'$ des Punkts N' eben sowol durch Variation aus QN, als auch durch Differentiation aus $P'M'$ hervorgegangen ansehn. Im ersten Falle hat man für $Q'N'$ den Ausdruck $QN + \delta \,.\, QN$, d. i. $y + dy + \delta(y + dy)$, und im zweiten Falle den Ausdruck $P'M' + d \,.\, P'M'$, d. i. $y + \delta y + d(y + \delta y)$; woraus wie oben folgt $\delta dy = d\delta y$.

Aus dieser Gleichung ergibt sich weiter die Gleichung $\delta\int Vdx = \int\delta(Vdx)$; d. h. die Ordnung der Zeichen $\int$ und δ darf ebenfalls willkürlich geändert werden. Denn wenn man $\int Vdx = U$ setzt, so wird $dU = Vdx$, folglich $\delta dU = d\delta U = \delta(Vdx)$, und daraus $\delta U = \int\delta(Vdx)$.

Ferner ist nach den Regeln der Differentiation, welche auch für die Variation gültig bleiben, $\delta(Vdx) = V \,.\, \delta dx + dx \,.\, \delta V = V \,.\, d\delta x + dx \,.\, \delta V$, folglich $\delta\int Vdx = \int V \,.\, d\delta x + \int dx \,.\, \delta V$. Und da überdies die Integration durch Theile gibt $\int V \,.\, d\delta x = V\delta x - \int\delta x \,.\, dV$, so hat man endlich

$$\delta\int Vdx = V\delta x + \int dx\left(\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x\right).$$

Setzt man hierin $\delta x = 0$, wodurch der erste Theil auf der rechten Seite der Gleichung und der zweite Theil unter dem Integralzeichen verschwinden, so hat man die Rechtfertigung des am Schlusse des §. 499 gebrauchten Ausdrucks $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V$ für $\delta\int_{x_0}^{x_\omega} Vdx$.

Dieselbe Bemerkung kann auf die Function $\frac{d^2y}{dx^2}$ und die folgenden Functionen übertragen werden, so daß man erhält $\frac{\delta d^2y}{dx^2} = \frac{d\delta dy}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$, u. s. f. Man kann also statt der vorigen Gleichung schreiben

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

Wenn man jedes Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung für sich betrachtet, so erkennt man leicht, daß diese Glieder sich vermittelst der Integration durch Theile so umgestalten lassen, daß unter dem Integralzeichen keine Differentiale von Variationen mehr vorkommen. Man erhält

$$\int dx \, . \, P\frac{d\delta y}{dx} = \text{Const} + P\delta y - \int dx \, . \, \frac{dP}{dx}\delta y;$$

folglich wenn man für die in dieser Gleichung enthaltenen Größen die Werthe setzt, welche den beiden Gränzen x_0 und x_ω des Integrals entsprechen,

$$0 = \text{Const} + P_0\delta y_0$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \, . \, P\frac{d\delta y}{dx} = \text{Const} + P_\omega\delta y_\omega - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \, . \, \frac{dP}{dx}\delta y;$$

und wenn man die erste Gleichung von der zweiten subtrahirt

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \, . \, P\frac{d\delta y}{dx} = \left[\begin{array}{l} -P_0\delta y_0 - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \, . \, \frac{dP}{dx}\delta y \\ + P_\omega\delta y_\omega \end{array} \right]$$

Man findet ebenso für das folgende Glied

$$\int dx \,.\, Q \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \text{Const} + Q\delta \frac{dy}{dx} - \int dx \,.\, \frac{dQ}{dx} \frac{\delta dy}{dx}$$

$$= \text{Const} + Q\delta \frac{dy}{dx} - \frac{dQ}{dx} \delta y + \int dx \,.\, \frac{d^2Q}{dx^2} \delta y \,;$$

folglich

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, Q \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \left[\begin{array}{l} - Q_0 \delta \frac{dy_0}{dx} + \frac{dQ_0}{dx} \delta y_0 + \int_{x_0}^{x_\omega} dx . \frac{d^2Q}{dx^2} \delta y \\ + Q_\omega \delta \frac{dy_\omega}{dx} - \frac{dQ_\omega}{dx} \delta y_\omega \end{array}\right].$$

Das nächstfolgende Glied gibt

$$\int dx \,.\, R \frac{d^3\delta y}{dx^3} = \text{Const} + R\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \int dx \,.\, \frac{dR}{dx} \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$= \text{Const} + R\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dR}{dx} \delta \frac{dy}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} \delta y - \int dx \,.\, \frac{d^3R}{dx^3} \delta y \,;$$

folglich

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, R \frac{d^3\delta y}{dx^3} =$$

$$\left[\begin{array}{l} - R_0 \delta \frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{dR_0}{dx} \delta \frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2R_0}{dx^2} \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{d^3R}{dx^3} \delta y \\ + R_\omega \delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} - \frac{dR_\omega}{dx} \delta \frac{dy_\omega}{dx} + \frac{d^2R_\omega}{dx^2} \delta y_\omega \end{array}\right];$$

u. s. f. für die übrigen Glieder.

Durch diese Umformungen verwandelt sich die vorige Gleichung, welche die Bedingung des Maximum oder Minimum ausspricht, in

$$0 = \left[\begin{array}{l} -\left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{ꝛc.}\right)\delta y_0 - \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{ꝛc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \qquad\qquad -(R_0 - \text{ꝛc.})\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} - \text{ꝛc.} \\ +\left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{ꝛc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{ꝛc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad\qquad +(R_\omega - \text{ꝛc.})\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{ꝛc.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ꝛc.}\right)\delta y \end{array}\right].$$

Diese Gleichung muß gültig bleiben, wenn die Bedingung eines Maximum oder Minimum des vorgelegten bestimmten Integrals erfüllt sein soll, wie auch die Variationen, welche das Zeichen δ anzeigt, gewählt werden mögen. Die beiden ersten Reihen enthalten die Variationen der Größen y_0 $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, ꝛc. und y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, ꝛc., welche die Werthe der Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ꝛc. darstellen, sobald man in diesen der Abscisse x die Werthe x_0 und x_ω beilegt, welche den Gränzen des bestimmten Integrals entsprechen. Die dritte Reihe enthält unter dem Integralzeichen die Variation δy irgend einer beliebigen Ordinate der Curve, welche Variation vollkommen willkürlich ist. Diese dritte Reihe muß deßhalb für sich allein gleich Null gesetzt werden; und dasselbe gilt demnach auch von den beiden ersten.

§. 501. Man hat also erstens die unbestimmte Gleichung

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ꝛc.},$$

welche allen Punkten der Curve angehört, und welcher vor allen Dingen der Ausdruck von y durch x, der die Aufgabe löst, Genüge leisten muß. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung zwischen den Veränderlichen x und y, von der man mithin das allgemeine Integral zu suchen hat.

Man hat ferner, wenn die Variationen in Bezug auf die untere Gränze des Integrals unabhängig sind von den Variationen in Bezug auf die obere Gränze, die bestimmten Gleichungen

$$0 = -\left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{rc.}\right)\delta y_0 - \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{rc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} - (R_0 - \text{rc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} - \text{rc.},$$

$$0 = +\left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{rc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{rc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} + (R_\omega - \text{rc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{rc.};$$

welche den beiden Gränzen des Integrals angehören, und denen gleichfalls der Ausdruck von y durch x, welcher die Aufgabe löst, Genüge leisten muß, wenn man für x die beiden Werthe x_0 und x_ω an die Stelle setzt.

Wenn die Endpunkte der Curve der Lage nach gegeben, d. h. wenn die Werthe der Ordinaten y_0 und y_ω gleich wie x_0 und x_ω constant sind, so hat man $\delta y_0 = 0$ und $\delta y_\omega = 0$, und die ersten Glieder der beiden betreffenden Gleichungen fallen aus. Um diesen Gleichungen Genüge zu leisten, reicht es also in diesem Falle hin, die folgenden Glieder für sich gleich Null zu setzen. Ebenso wenn die Werthe einiger von den Differentialverhältnissen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ rc. für den einen oder den andern Endpunkt durch die Natur der Aufgabe gegeben sind, so hat man $\delta\frac{dy_0}{dx} = 0$, $\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} = 0$, rc. für den einen dieser Punkte, oder $\delta\frac{dy_\omega}{dx} = 0$, $\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} = 0$, rc. für den andern; und die mit diesen Variationen behafteten Glieder fallen von selbst aus. Die Glieder, welche auf diese Weise in Folge der bestimmten Werthe nicht von selbst verschwinden, die die Ordinate y oder einige ihrer Differentialverhältnisse in den Endpunkten der Curve beibehalten sollen, müssen für sich gleich Null gesetzt werden. Die auf solche Weise erhaltenen Gleichungen dienen im allgemeinen zur Bestimmung der willkürlichen Constanten, welche die Integration der oben gedachten unbestimmten Gleichung herbeiführt.

§. 502. Bevor man weiter geht, kann man bemerken, daß das Nullsetzen desjenigen Gliedes in dem Ausdrucke von $\int dx.\delta V$, welches mit dem Integralzeichen behaftet bleibt, die nothwendige Bedingung ausdrückt, welche erfüllt werden muß, damit die angezeigte Integration ausgeführt werden kann, d. h. damit die Function $dx.\delta V$ ein genaues Differential ist. Dies wird aber eine Folge davon sein, daß die Function Vdx selbst ein genaues Differential ist; denn nimmt man $Vdx = dU$, so ergibt sich $\delta(Vdx) = \delta dU = d\delta U$. Ferner wenn man y', y'', y''', ꝛc. statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. an die Stelle setzt, so kann die in Rede stehende Bedingungsgleichung

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ꝛc.};$$

geschrieben werden

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right) + \text{ꝛc.};$$

und wenn dieser Gleichung Genüge geschieht, so ist die Function Vdx, in welcher V die Größen x, y, y', y'' ꝛc. enthält, ein genaues Differential von einer Function von der nächst niedrigen Ordnung.

Dieser Satz kann für Functionen der ersten Ordnung auf folgende Art unmittelbar bewiesen werden. Die Bedingungsgleichung reducirt sich in diesem Falle auf

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right).$$

Da diese Gleichung identisch sein soll, so müssen die beiden Glieder auf der rechten Seite derselben von einerlei Ordnung sein. Weil nun $\frac{dV}{dy}$ nur y' enthalten kann, so folgt, daß $\frac{dV}{dy'}$ nicht y' enthalten darf, weil sonst $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ auch y'' enthalten würde; woraus sich weiter ergibt, daß die in Rede stehende Differentialfunction der ersten Ordnung, welche ein genaues Differential sein soll, nothwendig die Form haben muß

$$(A + By')dx, \quad \text{d. i. } Adx + Bdy,$$

wo A und B Functionen von x und y allein sind. Diese Function liefert

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx'}, \quad \frac{dV}{dy'} = B;$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichung kommt

$$0 = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx},$$

übereinstimmend mit §. 364.

§. 503. Es wurde im §. 499, um zuerst den einfachsten Fall zu betrachten, die Annahme gemacht, daß in dem vorgelegten Integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} Vdx,$$

welches zu einem Maximum oder Minimum werden soll, die beiden Gränzen x_0 und x_ω constant sein, oder mit anderen Worten, daß bei allen Veränderungen, die man mit der Curve vornehmen kann, welche die Beziehung zwischen y und x räumlich darstellt, die Endpunkte dieser Curve beständig auf den nämlichen Parallelen zur Achse der y bleiben sollten. Jetzt mögen jene Gränzen als veränderlich angesehen werden. In diesem Falle wird man die Function $\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$ auf eine so allgemeine Weise wie möglich sich ändern lassen, wenn man annimmt, daß alle Abscissen x um die willkürliche Größe δx zunehmen, während zugleich die Ordinate y und ihre Differentialverhältnisse, wie vorhin, zunehmen um die Größen δy, $\delta \frac{dy}{dx}$, $\delta \frac{d^2y}{dx^2}$, 2c. Die Curve, welche die Beziehung zwischen y und x ausdrückt, verwandelt sich damit in eine unendlich nahe liegende Curve. Die Variation des Integrals $\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$, welche auf die angegebene Weise zu Stande kommt, wird ausgedrückt werden durch

$$- V_0 \, \delta x_0 + V_\omega \, \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \, . \, \delta V.$$

Man muß indessen bemerken*), daß in Folge der Voraus=

*) Die Richtigkeit dieser Gleichung mit Rücksicht auf die hier folgende Bemerkung wird man leicht geometrisch, mit Hülfe von Fig. 54, erkennen. Es läßt sich jedoch diese Gleichung auch unmittelbar aus der in der Anmerkung zu §. 500 gegebenen Gleichung

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left(\delta V - \frac{dV}{dx} \delta x \right)$$

herleiten, wo jetzt nicht mehr $\delta x = 0$ zu setzen ist. Denn nimmt man das Integral von x_0 bis x_ω, so kommt

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} V dx = - V_0 \, \delta x_0 + V_\omega \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\delta V - \frac{dV}{dx} \delta x \right),$$

welcher Ausdruck mit dem obigen völlig übereinstimmt, wenn man das Folgende beachtet.

setzung jeder Punkt der ersten Curve jetzt dadurch in die zweite Curve übertragen wird, daß sowohl x in $x + \delta x$ als auch y in $y + \delta y$ übergeht. Folglich hat die Ordinate, welche der Abscisse x in der geänderten Curve entspricht, zu ihrem Ausdrucke $y + \delta y - \left(\frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx}\right)\delta x$, oder wenn man die Größen der zweiten Ordnung vernachlässigt, $y + \delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$. Will man also den Werth von δV in dem vorhergehenden Ausdrucke entwickeln, so muß man die Sache so ansehen, als ob y nicht um δy, sondern um $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ zugenommen habe. Dasselbe gilt von den derivirten Functionen von y. Als Zunahme von $\frac{dy}{dx}$ darf man nur angesehen $\delta \frac{dy}{dx} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta x$, oder $\delta \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta y$; ebenso als Zunahme von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nur $\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x$; u. s. f. Wenn man also jetzt, wie im §. 499, mit N, P, Q, ꝛc. die partiellen Differentialverhältnisse der Function V resp. in Bezug auf die Veränderlichen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ꝛc. bezeichnet, so muß man hier schreiben

$$\delta V = N\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + P\left(\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x\right) + Q\left(\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x\right) + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun ferner

$$\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta u,$$

so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x - \frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d\delta u}{dx};$$

und wenn man dazu die identische Gleichung addirt

$$\delta\frac{dy}{dx}=\frac{\delta dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{\delta dx}{dx},$$

so kommt, da die Ordnung der Zeichen d und δ nach Willkür vertauscht werden darf,

$$\delta\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\delta x=\frac{d\delta u}{dx}.$$

Differentiirt man wieder diese Gleichung, wodurch man erhält

$$\frac{d\delta\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\delta x}{dx}=\frac{d^2\delta u}{dx^2},$$

und addirt dazu die identische Gleichung

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2}=\delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\delta d\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\delta dx}{dx},$$

so findet man ebenso

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x=\frac{d^2\delta u}{dx^2}.$$

Auf diese Weise erhält man

$$\delta\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^4y}{dx^4}\delta x=\frac{d^3\delta u}{dx^3};$$

und so fort. Folglich kann der vorstehende Ausdruck für δV geschrieben werden

$$\delta V=N\delta u+P\frac{d\delta u}{dx}+Q\frac{d^2\delta u}{dx^2}+R\frac{d^3\delta u}{dx^3}+\text{etc.}$$

Die Bedingungsgleichung für das Maximum oder Minimum wird also jetzt

$$0=\left[\begin{array}{l}-V_0\delta x_0+V_\omega\delta x_\omega\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left(N\delta u+P\frac{d\delta u}{dx}+Q\frac{d^2\delta u}{dx^2}+R\frac{d^3\delta u}{dx^3}+\text{etc.}\right)\end{array}\right];$$

und wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung dieselben Umformungen vornimmt wie im §. 500, so verwandelt sich die Gleichung in

$$0=\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0-\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}+\frac{d^2R_0}{dx^2}-\text{rc.}\right)\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) \\ -\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{rc.}\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0\right)-\text{rc.} \\ +V_\omega dx_\omega+\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}+\frac{d^2R_\omega}{dx^2}-\text{rc.}\right)\left(\delta y_\omega-\frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{rc.}\right)\left(\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega\right)+\text{rc.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left[N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{rc.}\right]\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right) \end{array}\right]$$

Vergleicht man dieses Resultat mit demjenigen des §. 500, so sieht man zunächst, daß man hier zu der nämlichen unbestimmten Gleichung gelangt

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{rc.},$$

welche für alle Punkte der Curve erfüllt werden muß. Die bestimmten Gleichungen dagegen weichen von denen des §. 501 ab, sowol durch Einführung der Glieder $-V_0\delta x_0$ und $V_\omega\delta x_\omega$, als auch dadurch, daß statt der Größen δy_0 und δy_ω gesetzt sind $\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ und $\delta y_\omega-\frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega$; statt der Größen $\delta\frac{dy_0}{dx}$ und $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ gesetzt $\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ und $\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$; u. s. f. So lange die Variationen δx_0, δy_0, $\delta\frac{dy_0}{dx}$, rc. und δx_ω, δy_ω, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$, rc. willkürlich sind, hat man den Coefficienten einer jeden dieser Variationen für sich gleich Null zu setzen, wodurch man eben so viele verschiedene Gleichungen erhält, denen der gesuchte Ausdruck von y durch x Genüge leisten muß, wenn man darin für x die Werthe x_0 und x_ω an die Stelle setzt. Wenn einige von den Größen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, 2c. für den einen oder andern Endpunkt der Curve bestimmte Werthe besitzen, so fallen die Glieder, welche die Variationen dieser Größen enthalten, von selbst aus, und man hat nur die mit den übrigen Variationen behafteten Glieder gleich Null zu setzen. Auch ist zu bemerken, daß, wenn die Lage der Endpunkte vollkommen willkürlich bleibt, ein jeder dieser Punkte in der Ebene der Curve angenommen werden kann, wo man will, ohne das er aufhört der Bedingung das Maximum oder Minimum des vorgelegten bestimmten Integrals Genüge zu leisten. Folglich darf man in diesem Falle $\delta x_0 = 0$ und $\delta y_0 = 0$ setzen, und mithin diejenigen beiden Gleichungen weglassen, welche durch das Nullsetzen der Coefficienten, mit denen diese beiden Variationen behaftet sind, zu Stande gekommen sein würden; der in Rede stehende Fall liefert also zwei Gleichungen weniger zur Bestimmung der Constanten.

§. 504. Es kann der Fall eintreten, daß die Function V in dem bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V dx,$$

welches zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, eine oder mehrere von den Größen x_0, y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, 2c. oder x_ω, y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, 2c. in sich enthält, welche sich auf die Endpunkte der Curve beziehen. Ein Beispiel dieser Art liefert die Aufgabe der Brachistochrone, §. 497, wo die Function unter dem Integralzeichen die Abscisse des ersten dieser beiden Punkte enthält. Man muß in diesem

Falle bei der Bildung der Variation δV auch die in Rede stehenden Größen variiren lassen, falls nicht etwa ihre Werthe vermöge der Natur der Aufgabe constant sind.

Wenn z. B. V die Größe x_0 enthält, so wird, wenn man die Variation von V in Bezug auf x_0 mit $\mu\delta x_0$ bezeichnet, der Ausdruck von δV im §. 503 um das Glied $\mu\delta x_0$ vermehrt werden müssen. Folglich muß das Glied, welches in der Bedingungsgleichung für das Maximum oder Minimum mit dem Integralzeichen behaftet ist, vermehrt werden um die Größe $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mu\delta x_0$, od. $\delta x_0\int_{x_0}^{x_\omega}\mu dx$. Daraus ergiebt sich, daß man diese Größe auf der rechten Seite derjenigen unter den bestimmten Gleichungen hinzufügen muß, welche sich auf die untere Gränze bezieht, so daß das mit δx_0 behaftete Glied in dieser Gleichung wird

$$\left(-V_0+\int_{x_0}^{x_\omega}\mu dx\right)\delta x_0.$$

Auf dieselbe Weise würde man auf die Variation der übrigen in Rede stehenden Functionen Rücksicht zu nehmen haben, wenn dieselben in der Function V vorkommen sollten.

§. 505. Bis hieher wurde der Fall betrachtet, wo eine einzige unabhängige Veränderliche x vorliegt, nebst einer Function y, welche von dieser Veränderlichen abhängig ist, wie es in allen Aufgaben stattfindet, die sich auf eine ebene Curve beziehen. In den Aufgaben dagegen, welche eine Curve von doppelter Krümmung betrachten, hat man eine unabhängige Veränderliche x und zwei Functionen y und z, welche von dieser Veränderlichen abhängen. Bezeichnet man wie früher das bestimmte Integral, welches zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, mit

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V\delta x,$$

so enthält hier die Function V im allgemeinen, außer der Veränderlichen x, die Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, 2c. und z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, 2c.

Man nehme zuerst wie in §. 499 die Gränzen x_0 und x_ω des Integrals als constant an. Die Variation dieses Integrals ist sodann

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V.$$

Wenn man ferner die Function V in Bezug auf die Größen y, z und deren derivirte Functionen differentiirt, und die Differentiale mit δ bezeichnet, so hat man

$$\delta V = \left[\begin{array}{l} N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{2c.} \\ + n\delta z + p\delta\frac{dz}{dx} + q\delta\frac{d^2z}{dx^2} + r\delta\frac{d^3z}{dx^3} + \text{2c.} \end{array}\right];$$

und die Gleichung, welche die Bedingung des Maximum oder Minimum des vorgelegten bestimmten Integrals ausdrückt, wird

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\begin{array}{l} N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{2c.} \\ + n\delta z + p\delta\frac{dz}{dx} + q\delta\frac{d^2z}{dx^2} + r\delta\frac{d^3z}{dx^3} + \text{2c.} \end{array}\right].$$

Wendet man auf diese Gleichung die Entwickelung von §. 500 an, so ergibt sich wie im §. 501: 1) daß für alle Punkte der Curve die unbestimmte Gleichung bestehen muß

$$0 = \left[\begin{array}{l} \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{2c.}\right)\delta y \\ + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{2c.}\right)\delta z \end{array}\right],$$

welche, wenn die Variationen δy und δz völlig unabhängig von einander sind, in die beiden getrennten Gleichungen zerfällt

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.};$$

und 2) daß man ebenso für die beiden Endpunkte der Curve folgende bestimmte Gleichungen haben muß: für den ersten Punkt

$$0 = \left[\begin{array}{l} \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta y_0 + \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \qquad + (R - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} + \text{etc.} \\ + \left(p_0 - \frac{dq_0}{dx} + \frac{d^2r_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta z_0 + \left(q_0 - \frac{dr_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dz_0}{dx} \\ \qquad + (r_0 - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_0}{dx^2} + \text{etc.} \end{array}\right];$$

und für den zweiten Punkt

$$0 = \left[\begin{array}{l} \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad + (R - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \\ + \left(p_\omega - \frac{dq_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta z_\omega + \left(q_\omega - \frac{dr_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dz_\omega}{dx} \\ \qquad + (r_\omega - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \end{array}\right].$$

Für diese beiden Gleichungen gelten übrigens dieselben Bemerkungen, wie im §. 501, in Betreff der Bedingungen, welche für die Endpunkte der Curve gegeben sein können. Ebenso wird man auf den vorliegenden Fall die Bemerkungen des §. 504 übertragen, rücksichtlich der Nothwendigkeit, in dem Ausdrucke von δV die Variationen derjenigen Größen in Betracht zu ziehen, welche den Gränzen entsprechen, falls diese Größen veränderlich sind und in dem Ausdrucke der Function V vorkommen.

Es kann keine Schwierigkeit haben, diese Entwickelung auf solche Fälle auszudehnen, wo eine größere Anzahl von Functionen vorliegt, welche von der Veränderlichen x abhängig sind.

§. 506. Man kann hier wie im §. 502 bemerken, daß die Gleichungen

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.},$$

wofür man auch schreiben kann

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right) + \text{etc.}$$

$$0 = \frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dz''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dz'''}\right) + \text{etc.},$$

indem man y', y'', y''', etc. an die Stelle von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., und z', z'', z''', etc. an die Stelle von $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, etc. setzt, die nothwendigen Bedingungen ausdrücken, damit die Function Vdx ein genaues Differential ist.

In dem Falle, wo diese Function nur die erste Ordnung erreicht, reduciren sich diese Gleichungen auf

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right), \quad 0 = \frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right).$$

Man schließt hier zunächst wie in dem angeführten Paragraphen, daß die in Rede stehende Function, um ein genaues Differential zu sein, die Form haben muß

$$(A + By' + Cz')dx, \qquad \text{d. i.} \quad Adx + Bdy + Cdz,$$

wo A, B, C Functionen bezeichnen, welche x, y, z enthalten. Diese Function gibt sodann

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z', \quad \frac{dV}{dz}=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z',$$

$$\frac{dV}{dy'}=B, \qquad \frac{dV}{dz'}=C,$$

und wenn man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen substituirt, so kommt

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z'-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dB}{dz}z'\right),$$

$$0=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'-\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dC}{dy}y'+\frac{dC}{dz}z'\right),$$

oder

$$0=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}-\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)z',$$

$$0=\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)y',$$

Da diese Gleichungen nicht zur Bestimmung von y' und z' dienen können, da y und z beliebige Functionen von x sein dürfen, so erhält man daraus die drei verschiedenen Gleichungen

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0, \quad \frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}=0, \quad \frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}=0,$$

übereinstimmend mit §. 365.

§. 507. Wenn man jetzt annimmt wie im §. 503, daß die Gränzen x_0 und x_ω des vorgelegten bestimmten Integrals sich ändern können, so muß man auch die Abscisse x variiren lassen. Man erkennt leicht, daß die Variationen derjenigen Ordinaten, welche dieser Abscisse entsprechen, alsdann nicht mehr δy und δz sind, sondern $\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$ und $\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x$. Folglich wird die unbestimmte Gleichung, welche für alle Punkte der Curve bestehen muß,

$$0=\left[\begin{array}{l}\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)\\+\left(n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right)\end{array}\right];$$

und wenn die Variationen δx, δy, δz völlig unabhängig von einander sind, so hat man wie oben die beiden Gleichungen

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}$$

Rücksichtlich der bestimmten Gleichungen wird man ebenso finden, daß man auf der rechten Seite derjenigen Gleichung, welche sich auf die erste Gränze bezieht, das Glied $-V_0\,\delta x_0$ hinzuzufügen hat, so wie statt δy_0 und δz_0 zu setzen $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ und $\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0$; statt $\delta\frac{dy_0}{dx}$ und $\delta\frac{dz_0}{dx}$ zu setzen $\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ und $\delta\frac{dz_0}{dx} - \frac{d^2z_0}{dx^2}\delta x_0$; u. s. f. Dagegen auf der rechten Seite derjenigen Gleichung, welche sich auf die zweite Gränze bezieht, hat man das Glied $V_\omega\,\delta x_\omega$ hinzuzufügen, und statt δy_ω und δz_ω zu setzen $\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega$ und $\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega$; statt $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ und $\delta\frac{dz_\omega}{dx}$ zu setzen $\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$ und $\delta\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{d^2z_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$; u. s. f.

§. 508. In den Aufgaben, welche sich auf Flächen beziehen, — z. B. bei der Aufsuchung derjenigen Fläche, welche, von einem gegebenen Umrisse begränzt, den kleinsten möglichen Inhalt besitzt, — hat man zwei unabhängige Veränderliche x und y zu betrachten, nebst einer Function z, welche von diesen Veränderlichen abhängt. Es handelt sich sodann darum, die Bedingungen des Maximum oder Minimum eines doppelten bestimmten Integrals auszudrücken, welches die Form besitzt

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} V dy,$$

und in welchem V im allgemeinen die unabhängigen Veränderlichen x und y nebst der Function z und ihren dirivirten Functionen $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ꝛc. enthalten kann.

Es möge hier nur der Fall betrachtet werden, wo die Projection des Umrisses, welcher die gesuchte Fläche begränzt, auf der Ebene xy ein Rechteck bildet, dessen Seiten resp. den Achsen der x und y parallel sind. Die Gränzen x_0 und x_ω bezeichnen die äußersten Abscissen, und ebenso die Gränzen y_0 und y_ω die äußersten Ordinaten. Ferner sollen diese Gränzen gegebene und unveränderliche Werthe haben, so daß der Umriß des in Rede stehenden Flächentheils immer zu seiner Projection die Seiten jenes Rechtecks behält. Alsdann ist es nicht nöthig, die Abscissen x und y variiren zu lassen. Die Variation des vorgelegten bestimmten Integrals wird also

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \delta V,$$

und wenn man setzt

$$\delta V = L\delta z + M\delta\frac{dz}{dx} + N\delta\frac{dz}{dy} + P\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\delta\frac{d^2z}{dy^2} + \text{ꝛc.}$$

so erhält man als Ausdruck für die Bedingung des Maximum oder Minimum des vorgelegten Integrals die Gleichung

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \Big[L\delta z + M\delta\frac{dz}{dx} + N\delta\frac{dz}{dy} + P\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\delta\frac{d^2z}{dy^2} + \text{ꝛc.} \Big].$$

§. 509. Wendet man hierauf die Regeln der Variationsrechnung an, wie im §. 500, indem man in allen

Gliedern, welche unter dem doppelten Integralzeichen enthalten sind, das Zeichen d vor δ setzt, und sodann nach der Integration durch Theile verfährt, so lassen sich diese Glieder auf folgende Weise umwandeln.

1) $\int\int dx dy\, M\frac{d\delta z}{dx} = \int dy\,.\,M\delta z - \int\int dx dy \frac{dM}{dx}\delta z + \text{Const};$

und folglich

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy.M\frac{d\delta z}{dx} = -\int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_\omega)}$$
$$-\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\,\frac{dM}{dx}\delta z.$$

Die Zeichen (x_0) und (x_ω), unten an die Klammern gesetzt, sollen aussagen, daß in den in diesen Klammern enthaltenen Größen für x resp. die Werthe $x = x_0$ und $x = x_\omega$ gesetzt seien, d. h. daß diese Größen diejenigen Werthe besitzen, welche den Gränzen der Fläche parallel mit der Ebene yz entsprechen.

Dieselbe Umformung gibt

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy.N\frac{d\delta z}{dy} = -\int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_0)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_\omega)}$$
$$-\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\,\frac{dN}{dy}\delta z.$$

Die Zeichen (y_0) und (y_ω) bedeuten, daß die in den Klammern enthaltenen Größen diejenigen Werthe angenommen haben, welche den Gränzen der Fläche parallel mit der Ebene xz zugehören.

2) $$\int\int dx dy\, P\frac{d^2\delta z}{dx^2} = \int dy P\delta\,\frac{dz}{dx} - \int dy\frac{dP}{dx}\delta z$$
$$+\int\int dx dy\,\frac{d^2P}{dx^2}\delta z + \text{Const},$$

woraus

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy P \frac{d^2\delta z}{dx^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(P\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dP}{dx}\delta z\right)_{(x_0)} \\ + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(P\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dP}{dx}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2P}{dx^2}\delta z \end{array}\right].$$

3) $\iint dxdyQ\frac{d^2\delta z}{dxdy} = \int dx.Q\frac{d\delta z}{dx} - \iint dxdy\frac{dQ}{dy}\frac{d\delta z}{dx} + \text{Const}$

$= \int dx.Q\frac{d\delta z}{dx} - \int dy\frac{dQ}{dy}\delta z + \iint dxdy\frac{d^2Q}{dxdy}\delta z + \text{Const};$

und folglich

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy Q \frac{d^2\delta z}{dxdy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(Q\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(Q\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2Q}{dxdy}\delta z \end{array}\right].$$

Aber man hat

$$\int dxQ\frac{d\delta z}{dx} = Q\delta z - \int dx\frac{dQ}{dx}\delta z + \text{Const},$$

und dadurch verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy Q \frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} (Q\delta z)_{(x_0, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_0)} \\ + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ - (Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_\omega)} \\ - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2Q}{dx dy}\delta z \end{array}\right].$$

Das folgende Glied, welches R enthält, erfährt dieselbe Umwandlung wie das mit P behaftete Glied; man hat also in 2) nur nöthig x und y zu vertauschen.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung, welche die Bedingung des Maximum oder Minimum darstellt, so wird dieselbe

$$0 = \left[\begin{array}{l} (Q\delta z)_{(x_0, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} \\ - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (P - \text{2c.})\delta \frac{dz}{dx} + \text{2c.}\right]_{(x_0)} \\ + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (P - \text{2c.})\delta \frac{dz}{dx} + \text{2c.}\right]_{(x_\omega)} \\ - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (R - \text{2c.})\delta \frac{dz}{dy} + \text{2c.}\right]_{(y_0)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (R - \text{2c.})\delta \frac{dz}{dy} + \text{2c.}\right]_{(y_\omega)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx dy} + \frac{d^2R}{dy^2} - \text{2c.}\right)\delta z \end{array}\right].$$

Diese Gleichung muß für alle Werthe Gültigkeit haben, welche man den Variationen der Ordinaten der Punkte, die im Innern oder auf den Gränzen der Fläche liegen, ertheilen mag.

§. 510. Man hat also erstens die unbestimmte Gleichung

$$0 = L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dxdy} + \frac{d^2R}{dy^2} - \text{2c.},$$

der für alle Werthe der Coordinaten, welche zwischen den Gränzen liegen, Genüge geschehen muß.

§. 511. Man hat ferner zu setzen

$$0 = (Q\delta z)_{(x_0, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)};$$

und wenn also die Variationen δz der Ordinaten in den vier Eckpunkten des Rechtecks, welches die Projection der Fläche darstellt, willkürlich sind, so muß für die Werthe der Coordinaten, welche diesen Punkten angehören, Q den Werth Null haben.

Sodann hat man die Gleichung

$$0 = \left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (P - \text{2c.})\delta\frac{dz}{dx} + \text{2c.},$$

die für alle Werthe der Coordinaten bestehen muß, welche Punkten auf denjenigen Gränzen der Fläche angehören, die mit yz parallel sind; und endlich die Gleichung

$$0 = \left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{2c.}\right)\delta z + (R - \text{2c.})\delta\frac{dz}{dy} + \text{2c.},$$

die für alle Werthe bestehen muß, welche Punkten auf denjenigen Gränzen angehören, die mit xz parallel sind. Wenn die Variationen δz, $\delta\frac{dz}{dx}$, $\delta\frac{dz}{dy}$, 2c. an diesen Gränzen willkürlich sind, so hat man jedes Glied dieser Gleichungen für sich gleich Null zu setzen.

Relative Maxima und Minima.

§. 512. In dem Bisherigen wurde stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß keine im Voraus gegebenen Beziehungen unter denjenigen Größen stattfinden sollten, welche in den Ausdruck der Function V eingehen. Indessen liefert die Natur der hier in Rede stehenden Aufgaben in der Regel gewisse Bedingungen, auf welche Rücksicht genommen werden muß, während zu gleicher Zeit der Bedingung des Maximum oder Minimum des vorgelegten Integrals Genüge geleistet wird. Der Einfluß solcher Bedingungen äußert sich darin, daß sie die Wahl der Werthe beschränken, welche den mit δ bezeichneten Variationen beigelegt werden können.

Wenn z. B. der Werth des vorgelegten bestimmten Integrals von der Gestalt einer Curve abhängig ist, so kann es geschehen, daß die Endpunkte dieser Curve der Bedingung unterworfen sind, in zwei gegebenen Linien enthalten zu sein, deren Gleichungen sind $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$. Die Variationen δx_0 und δy_0 der Coordinaten des ersten Punkts, so wie die Variationen δx_ω und δy_ω der Coordinaten des letzten Punkts, müssen alsdann in den entsprechenden Verhältnissen zu einander stehen, so daß sie resp. diesen Gleichungen Genüge leisten. Man muß also in diesem Falle haben

$$\delta y_0 = \frac{d \cdot \varphi(x_0)}{dx} \delta x_0, \qquad \delta y_\omega = \frac{d \cdot \psi(x_\omega)}{dx} \delta x_\omega,$$

welche beiden Gleichungen gleichzeitig mit den bestimmten Gleichungen bestehen müssen, die man durch die Entwicklungen der §§. 501 und 503 gefunden hat.

Wenn ferner die Richtung der Tangente in den Endpunkten der gesuchten Curve gleichfalls mit der Richtung der Tangente derjenigen Curven übereinstimmen soll, deren

Gleichungen sind $y=\varphi(x)$ und $y=\psi(x)$, so hat man noch die Gleichungen

$$\delta\frac{dy_0}{dx}=\frac{d^2.\varphi(x_0)}{dx^2}\,\delta x_0,\qquad \delta\frac{dy_\omega}{dx}=\frac{d^2.\psi(x_\omega)}{dx^2}\,\delta x_\omega;$$

u. s. f. für die übrigen Differentialverhältnisse. Mit Hülfe dieser Bedingungsgleichungen kann man einen Theil der Variationen, welche sich in den Bedingungsgleichungen vorfinden, eliminiren; nach dieser Elimination werden die übrig bleibenden Variationen vollkommen willkürliche Größen sein, und man wird mithin den Coefficienten einer jeden einzeln gleich Null setzen.

§. 513. Es kann indessen auch Bedingungsgleichungen geben, die für alle Werthe der Veränderlichen Gültigkeit behalten sollen, welche innerhalb der Gränzen des vorgelegten bestimmten Integrals enthalten sind. Sucht man z. B. die kürzeste Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei in ihr angenommenen Punkten gezogen werden kann, so muß augenscheinlich, wenn man die Gleichung der Fläche mit $F(x,y,z)=0$ bezeichnet, die Ordinate der gesuchten Linie immer dieser Gleichung Genüge leisten. In einem solchen Falle werden also die Variationen der Größen, welche in der Function V enthalten sind, durch die Bedingung beschränkt, daß die Werthe dieser Größen stets die gegebene Gleichung erfüllen müssen; und mithin muß diese Gleichung auch noch bestehen, wenn man in ihr, statt dieser Größen, die um die Variationen vermehrten Werthe derselben an die Stelle setzt. Man kann demgemäß die gegebene Gleichung in Bezug auf die in Rede stehenden Größen differentiiren, indem man die Differentiale mit δ bezeichnet. Es sei nun allgemein

$$L=0$$

eine Bedingungsgleichung, in welcher L irgend eine Function von den unabhängigen Veränderlichen, den abhängigen Ver=

änderlichen und den derivirten Functionen der letzteren bedeutet, so bilde man die Gleichung

$$\delta L = 0,$$

wo δ eine Differentiation anzeigt, welche in Bezug auf alle diese veränderlichen Größen ausgeführt wird. Diese Gleichung kann man sodann zur Elimination einer der Variationen anwenden, welche in der unbestimmten Gleichung vorkommen, die durch das Nullsetzen desjenigen Gliedes entstanden ist, welches in der allgemeinen Gleichung, die die Bedingung des Maximum oder Minimum ausdrückt, unter dem Integralzeichen steht.

Ebenso wird man verfahren, wenn mehrere der vorigen analoge Gleichungen

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \text{2c.}$$

gegeben sind. Man bildet gleichfalls die Gleichungen

$$\delta M = 0, \qquad \delta N = 0, \qquad \text{2c.},$$

welche man mit der genannten unbestimmten Gleichung verbindet, um so viel Variationen wie möglich zu eliminiren. Die Coefficienten der übrig bleibenden Variationen werden sodann einzeln gleich Null gesetzt.

§. 514. In anderen Aufgaben wird das gesuchte Maximum oder Minimum an die Bedingung gebunden, daß gleichzeitig ein gegebenes bestimmtes Integral einen bestimmten Werth beibehalten soll. Diese Fälle sind es vorzugsweise, welche man mit dem Namen der relativen Maxima und Minima bezeichnet. Es gehört hierher z. B. die Aufsuchung derjenigen Curve, welche, bei gegebenem Umfang, einen so großen oder so kleinen Inhalt wie möglich einschließt. Man hat ein Integral wie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, während zugleich die Gleichung bestehen soll

$$\int_{x_0}^{x_\omega} U dx = \text{Const},$$

wo U gleich wie V eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, rc. bedeutet. Die Bedingungen der Aufgabe liefern die beiden Gleichungen

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} V dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_\omega} U dx = 0,$$

Der Ausdruck dieser Bedingungen wird aber nicht geändert, wenn man die zweite Gleichung zu der ersten addirt, nachdem man sie mit einer willkürlichen Constante a multiplicirt hat. Man kann also schreiben

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} V dx + a\delta \int_{x_0}^{x_\omega} U dx = 0, \text{ oder } \delta \int_{x_0}^{x_\omega} (V + aU) dx = 0.$$

Diese letzte Gleichung hat man nun nach den früheren Regeln ebenso zu behandeln, als ob man die Function

$$\int_{x_0}^{x_\omega} (V + aU)\, dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum machen will. Offenbar muß nämlich diejenige Relation zwischen y und x, welche diese Function zu einem absoluten Maximum oder Minimum macht, auch der Forderung Genüge leisten, daß $\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$ ein Maximum oder Minimum werde für alle Fälle, wo $\int_{x_0}^{x_\omega} U dx$ einen gegebenen Werth annimmt. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde es für die Summe der beiden Functionen Werthe geben, welche größer oder kleiner wären als die durch das absolute Maximum oder Minimum gegebenen Werthe; was unmöglich ist. Die Constante a ist so zu bestimmen, daß das Integral $\int_{x_0}^{x_\omega} U dx$ den Werth annimmt, welchen man in jedem besonderen Falle festgestellt hat.

Beispiele zur Variationsrechnung.

§. 515. Es werde zuerst gefordert, die kürzeste Linie zu bestimmen, welche zwischen zwei gegebenen Curven im Raume gezogen werden kann. Bezeichnet man die Coordinaten der gesuchten Linie mit x, y, z, so hat man die Function

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

wo die Gränzen x_0 und x_ω veränderlich sind, zu einem Minimum zu machen. Nach §. 507 erhält man hier zunächst die beiden unbestimmten Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

aus denen folgt

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\text{Const}$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\text{Const.}$$

Man schließt hieraus, daß die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ constante Werthe haben müssen, welche Eigenschaft nur die gerade Linie besitzt. Setzt man also

$$\frac{dy}{dx} = b, \qquad \frac{dz}{dx} = c,$$

so hat man

$$y = bx + m, \qquad z = cx + n$$

als Gleichungen der gesuchten Linie; worin b, c, m, n willkürliche Constanten sind.

Was die Bedingungen betrifft, welche sich auf die Gränzen des Integrals beziehen, so erhält man für den ersten Punkt der gesuchten Linie die bestimmte Gleichung

$$0 = -\sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2} \, . \, \delta x_0$$
$$- \frac{\frac{dy_0}{dx}\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) + \frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}},$$

welche sich vereinfacht in

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_0}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

In dieser Gleichung bedeuten δx_0, δy_0, δz_0 resp. die Projectionen der Ortsveränderung, welche man dem ersten Punkte der Linie ertheilt hat, auf die Achsen der x, der y und der z. Nach der Voraussetzung muß aber dieser Punkt sich beständig auf der ersten von den beiden Curven befinden, zwischen denen die Linie des kürzesten Abstandes gezogen werden soll. Folglich können die Variationen δx_0, δy_0, δz_0 angesehen werden wie die Projectionen des Elements dieser Curve, welches dem in Rede stehenden ersten Punkte anliegt, auf die drei Achsen. Daraus ergibt sich, daß die vorstehende Gleichung die Bedingung ausspricht, daß die Linie des kürzesten Abstandes mit diesem Elemente einen rechten Winkel einschließen muß.

Eine ähnliche Gleichung erhält man für den andern Endpunkt der gesuchten Linie. Die kürzeste Linie ist also eine gerade Linie, welche rechtwinklig auf den beiden Curven steht, zwischen denen sie gezogen ist.

Man gelangt zu einem ähnlichen Resultate, wenn man die Linie des kürzesten Abstandes zwischen zwei gegebenen krummen Flächen sucht. Die Variationen δx_0, δy_0, δz_0 der vorigen Gleichung müssen alsdann angesehen werden wie die Projectionen irgend eines Linien-Elements, welches man auf der krummen Fläche von dem ersten Punkte der gesuchten Linie ausgehend angenommen hat, auf die drei Achsen. Diese Gleichung drückt also aus, daß die Linie des kürzesten Abstandes rechtwinklig auf der Fläche stehen muß.

Ebenso würde es noch sein, wenn die Linie des kürzesten Abstandes zwischen einer Curve und einer krummen Fläche dargestellt werden sollte. Sie muß immer beide unter rechten Winkeln treffen.

§. 516. Es werde gefordert, die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche zu ziehen. Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist wie vorhin

$$\int_{x_0}^{x_\omega} . \, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=V$$

setzt, so hat man nach §. 507 zunächst die unbestimmte Gleichung

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right).$$

Die Variationen δx, δy, δz sind hier der Bedingung unterworfen, daß sie der Gleichung der gegebenen Fläche Genüge leisten müssen. Bezeichnet man also diese Gleichung mit

$$z = F(x, y),$$

so hat man für die Werthe der Variationen die Bedingungsgleichung

$$\delta z = \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y.$$

Substituirt man nun diesen Werth von δz in die vorige Gleichung, und setzt darauf die Coefficienten von δy und δx, welche unbestimmt bleiben, einzeln gleich Null, so kommt

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)$$
$$0 = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dx}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right).$$

Da die gesuchte Linie auf der Fläche liegen soll, deren Gleichung ist $z = F(x, y)$, so müssen die Elemente dx, dy, dz der Coordinaten der einzelnen Punkte dieser Linie gleichfalls dieser Gleichung Genüge leisten, so daß man hat

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diesen Werth in die zweite der beiden vorigen Gleichungen, so wird dieselbe identisch mit der ersten, wie es auch sein muß.

Diese erste Gleichung stellt die Natur der Linie des kürzesten Abstandes fest, welche Gegenstand der Aufgabe ist; sie drückt nämlich eine geometrische Eigenschaft derselben aus, welche darin besteht, daß ihre Krümmungsebene beständig rechtwinklig auf derjenigen Fläche steht, auf welcher die Linie gezogen ist. Um dies zu beweisen, hat man nach §. 232 als Gleichung der Krümmungsebene der gesuchten Linie

$$z = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)x + \frac{d^2z}{dx^2}y}{\frac{d^2y}{dx^2}} + C,$$

und nach §. 217 als Gleichung der berührenden Ebene der Fläche, deren Gleichung $z = F(x, y)$ ist,

$$z = \frac{dF}{dx}x + \frac{dF}{dy}y + K,$$

wo C und K Constanten bedeuten. Die Bedingung, daß diese beiden Ebenen rechtwinklig auf einander stehen sollen, wird nach §. 215 ausgedrückt durch

$$\frac{\frac{dF}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 1 = 0,$$

oder wenn man $\frac{dF}{dx}$ mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$$

eliminirt,

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+ \frac{dF}{dy}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

welches Resultat identisch ist mit der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

wie sich leicht nachweisen läßt, sobald man nur in dieser letzten Gleichung die angezeigten Differentiationen ausführt.

Die Bedingungen in Bezug auf die Gränzen ergeben sich wie im §. 515, wenn man zuerst den ersten Punkt der Curve betrachtet, aus der bestimmten Gleichung

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_0}{dx} \delta y_0 + \frac{dz_0}{dx} \delta z_0.$$

Wenn dieser erste Punkt seiner Lage nach in der Fläche gegeben ist, so geschieht dieser Gleichung von selbst Genüge, weil man dann hat $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $\delta z_0 = 0$. Wenn dagegen die Linie des kürzesten Abstandes von einer in der Fläche gegebenen Curve ausgehen soll, so bedeuten die Größen δx_0, δy_0, δz_0 die Projectionen des Elements dieser Curve auf die Achsen der x, der y und der z; und folglich lehrt die vorstehende Gleichung, daß die Linie des kürzesten Abstandes rechtwinklig auf diesem Elemente stehen muß.

Ein ähnliches Resultat erhält man für den andern Endpunkt. Mithin muß die kürzeste Linie die beiden Curven, zwischen denen sie gezogen werden soll, unter rechten Winkeln schneiden.

§. 517. Die Aufsuchung derjenigen Fläche, deren Inhalt ein Minimum sein soll, ist eine der vorigen ähnliche Aufgabe. Es werde angenommen, daß diese Fläche durch einen Umriß begränzt sein soll, dessen Projection auf die Ebene xy gegeben ist. Das Integral, welches ein Minimum werden soll, wird sodann

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

und man hat hierauf die Betrachtungen der §§. 508 rc. anzuwenden. Man erhält nach §. 510 die unbestimmte Gleichung

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}\right)$$

oder wenn man die angezeigten Differentiationen ausführt

$$0 = \left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1\right]\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy} + \left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1\right]\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung gehört der gesuchten Fläche an. Die willkürlichen Functionen, welche in ihr Integral eingehen, müssen so bestimmt werden, daß die Fläche durch den gegebenen Umriß hindurchgeht. Wenn dieser Umriß festgestellt ist, so sind die bestimmten Gleichungen, welche sich auf die Gränzen des Integrals beziehen, von selbst erfüllt, und geben zu keiner besonderen Bedingung Anlaß.

Ueber die Bedeutung dieser Gleichung sehe man §. 579.

§. 518. Man betrachte noch den einfachsten Fall der sogenannten isoperimetrischen Aufgaben, deren Gegenstand darin besteht, die Gestalt der Curve bestimmen, welche bei gegebenem Umfange den größten möglichen Inhalt einschließt. Es soll der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{x_0}^{x_\omega} y\,dx$$

ein Maximum werden, während das Integral

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

einen bestimmten Werth beibehält. Diese Aufgabe wird nach §. 514 aufgelöst, indem man die Bedingungen des absoluten Maximum der Function

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y + a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]$$

aufsucht, wo a eine unbestimmte Constante bedeutet. Die Gränzen x_0 und x_ω mögen als unveränderlich vorausgesetzt werden. Mit Anwendung der Betrachtungen der §§. 499 2c. erhält man für die unbestimmte Gleichung des §. 501

$$0 = 1 - a\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right),$$

woraus man durch einmalige Integration erhält

$$x - \alpha - a\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0, \text{ oder } dy = \frac{(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}},$$

wo α eine willkürliche Constante bedeutet. Integrirt man zum zweiten Male, so kommt

$y - \beta = -\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$, oder $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$, wo β die zweite willkürliche Constante ist. Mithin löst im allgemeinen der Kreis die vorgelegte Aufgabe. Die Lage des Mittelpunkts und der Halbmesser können so bestimmt werden, daß die Peripherie durch zwei gegebene Punkte geht und der zwischen diesen Punkten enthaltene Bogen eine bestimmte Länge erhält.

§. 519. Es möge endlich noch die Aufgabe der Brachistochrone oder der Curve des schnellsten Falls behandelt werden. Man nehme an, die Anfangsgeschwindigkeit des der Einwirkung der Schwere unterworfenen Körpers sei Null, und dieser Körper solle in der geringsten möglichen Zeit von irgend einem Punkte einer gegebenen Curve bis zu irgend einem Punkte einer andern gleichfalls gegebenen Curve gelangen. Wird die Achse der x vertikal angenommen, so ist die Function, welche ein Minimum werden soll,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

wo x_0 und x_ω die Abscissen der beiden Endpunkte der beschriebenen Curve bedeuten. Diese Abscissen sind veränderlich, und mithin muß man hier nach Vorschrift des §. 507

verfahren. Ferner muß man beachten, daß die Größe x_0 in der Function vorkommt, welche sich unter dem Integralzeichen befindet.

Die Vergleichung mit den Formeln des §. 507 gibt

$$V = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

$$N=0, \quad P=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$n=0, \quad p=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Die unbestimmten Gleichungen, welche für alle Punkte der Curve gelten müssen, werden sodann

$$\frac{dP}{dx}=0, \quad \frac{dp}{dx}=0;$$

und daraus folgt

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=B,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=C,$$

wo B und C Constanten bedeuten. Diese Gleichungen geben unmittelbar

$$\frac{dz}{dy}=\frac{C}{B},$$

woraus sich sofort erkennen läßt, daß die Projection der gesuchten Curve auf die horizontale Ebene yz eine gerade Linie ist, oder mit andern Worten, daß diese Curve in einer Vertikalebene enthalten ist.

Um weiter die Natur der in Rede stehenden Curve auszumitteln, kann man die Annahme machen, daß die vertikale Ebene xy mit derjenigen Curve zusammenfalle, welche die Curve in sich enthält. Die Differentialgleichung derselben vereinfacht sich sodann in

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=B,$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-x_0}{\sqrt{\frac{1}{B^2}-(x-x_0)}},$$

und diese Gleichung gehört einer Cycloide an, deren Basis eine horizontale Linie ist, welche durch den Ausgangspunkt des fallenden Körpers gelegt wird. Der Durchmesser des erzeugenden Kreises wird durch die Constante $\frac{1}{B^2}$ dargestellt. Man erkennt zugleich, daß das erste Element der Curve des schnellsten Falls immer vertikal ist.

Rücksichtlich der Bedingungen, welche sich auf die Gränzen des bestimmten Integrals beziehen, erhält man die bestimmte Gleichung

$$0=\left[\begin{array}{l} -V_0\,\delta x_0-P_0\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)-p_0\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)\\ +V_\omega\,\delta x_\omega+P_\omega\left(\delta y_\omega-\frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right)+p_\omega\left(\delta z_\omega-\frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right)\\ +\delta x_0\int_{x_0}^{x_\omega}\mu dx \end{array}\right]$$

wo nach §. 504 ist

$$\mu = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{2(x - x_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man findet den Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_\omega} \mu dx$, indem man bemerkt, daß das vollständige Differerential der Function V ist

$$dV = -\mu dx + Pd\left(\frac{dy}{dx}\right) + pd\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

Nun hat sich oben gezeigt, daß die Functionen P und p für die ganze Ausdehnung der Curve constant sein müssen. Man kann deßhalb P_ω und p_ω an die Stelle von P und p setzen, und mithin schreiben

$$dV = -\mu dx + P_\omega d\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_\omega d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

woraus man durch Integration erhält

$$\int_{x_0}^{x_\omega} \mu dx = V_0 - V_\omega + P_\omega\left(\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{dy_0}{dx}\right) + p_\omega\left(\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{dz_0}{dx}\right).$$

Substituirt man diesen Werth in die obige bestimmte Gleichung, und bemerkt, daß $P_0 = P_\omega$ und $p_0 = p_\omega$ ist, so kommt

$$0 = \left[\begin{array}{l} -V_\omega \delta x_0 - P_\omega\left(\delta y_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_0\right) - p_\omega\left(\delta z_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega \delta x_\omega + P_\omega\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega\left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \end{array}\right]$$

oder wenn man für V_ω, P_ω und p_ω ihre Werthe setzt,

$$0 = \left[\begin{array}{l} -\delta x_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 \\ +\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega \end{array}\right].$$

Da die Variationen der Coordinaten der beiden Endpunkte der Curve resp. von einander unabhängig sind, so zerlegt sich diese Gleichung in die beiden folgenden

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0$$

$$0 = \delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega,$$

und diese Gleichungen haben augenscheinlich die Bedeutung, daß das letzte Element der gesuchten Curve zugleich auf den beiden Tangenten rechtwinklig stehen muß, welche man in den beiden Punkten, die den Anfang und das Ende der Bahn des fallenden Körpers bezeichnen, an die beiden gegebenen Curven legen kann. Es müssen also, wenn diese beiden gegebenen Curven in einerlei Vertikalebene liegen, ihre in den Endpunkten der Brachistochrone construirten Tangenten mit einander parallel sein.

Die gesuchte Curve ist also ein Theil einer Cycloide, deren Basis horizontal und deren Anfangspunkt in dem Ausgangspunkte des fallenden Körpers liegt. Sie schneidet die Curve, in welcher der Körper ankommt, unter rechtem Winkel; und der Anfangspunkt hat in der Curve, von welcher der Körper ausgeht, eine solche Lage, daß die Tangente, welche man im Anfangspunkte an diese Curve legen kann, rechtwinklig steht auf der Tangente am unteren Ende des cycloidalischen Bogens.

XL. Differenzenrechnung.

§. 520. Die erste und wesentlichste Eigenthümlichkeit der Differential- und Integralrechnung, durch welche sich diese

Rechnung von der gewöhnlichen Arithmetik oder der Algebra unterscheidet, besteht darin, daß man dort die Größen wie veränderlich ansieht und in einem Inbegriffe die unendliche Reihefolge der Werthe ins Auge faßt, welchen denselben beigelegt werden können; während in der Algebra die Größen immer nur so betrachtet werden, daß sie bestimmte, entweder bekannte oder unbekannte Werthe besitzen müssen. Man denkt sich die auf einander folgenden Werthe der Größen in einem continuirlichen Zusammenhange; oder durch Intervalle von einander getrennt, welche unendlich klein sind d. h. kleiner als jede angebbare Größe; und der Hauptzweck der Rechnung besteht in der Aufsuchung der Verhältnisse zwischen den gleichzeitigen Aenderungen der unabhängigen Veränderlichen und der davon abhängigen Functionen, welche Verhältnisse sodann zu der Entstehung von neuen Functionen führen, deren Betrachtung in den physikalischen und technischen Anwendungen der Mathematik nothwendig wird. Wenn man nun aber annimmt, daß die Größen, welche man betrachtet, zwar gleichfalls noch als veränderlich angesehen werden sollen, aber in Intervallen fortschreiten, welche eine bestimmte und endliche Größe besitzen, so hat man damit den Gegenstand der Differenzenrechnung, die übrigens gleichwie die Differentialrechnung die Beziehungen aufzusuchen hat, welche unter den gleichzeitigen Aenderungen der unabhängigen Veränderlichen und der davon abhängigen Functionen stattfinden.

§. 521. Die Differenzenrechnung stützt sich auf eine Bezeichnungsweise, die hier zunächst angezeigt werden muß. Es sei u irgend eine Function von einer oder von mehreren unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. Der Bau der Function u ist gegeben, und es wird angenommen, daß die unabhängigen Veränderlichen der Reihe nach die bestimmten Werthe x_0, y_0, z_0, ꝛc.; x_1, y_1, z_1, ꝛc.; x_2, y_2, z_2, ꝛc.;

x_3, y_3, z_3, ꝛc. und so fort, erhalten. Das Gesetz dieser Werthänderungen muß gegeben sein; am gewöhnlichsten setzt man fest, daß die Veränderlichen um constante Differenzen zunehmen, und zuweilen um Intervalle, welche gleich der Einheit sind. In Folge dieser Aenderungen wird die Function u gleichfalls eine Reihe von bestimmten Werthen annehmen, die man bezeichnen kann mit

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ .\ .\ .\ .\ u_{n-1},\ u_n;$$

und man schreibt wie im VI. Abschnitte

u_0			
u_1	$u_1 - u_0 = \Delta u_0$		
u_2	$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$	
u_3	$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	ꝛc.
u_4	$u_4 - u_3 = \Delta u_3$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$	
		$\Delta u_4 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_3$	
.	. . . .	. . . .	
.	. . . .	. . . .	
u_{n-1}	. . . .	. . . .	
u_n	$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$	. . . .	
		$\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}$	

Das Zeichen Δ bedeutet hier die Differenz zwischen dem augenblicklichen Werthe derjenigen Größe, welche mit diesem Zeichen behaftet ist, und demjenigen Werthe, welchen diese Größe in Folge einer endlichen Aenderung annimmt, die man den unabhängigen Veränderlichen ertheilt hat. Man nennt Δu_0 die Differenz der Function u_0. Ferner bezeichnet man mit $\Delta\Delta u_0$ oder $\Delta^2 u_0$ die Differenz von Δu_0, oder die zweite Differenz der Function u_0. Ebenso bezeichnet man mit $\Delta\Delta^2 u_0$ oder $\Delta^3 u_0$ die Differenz von $\Delta^2 u_0$, oder die dritte Differenz der Function u_0; und so weiter. Zwischen den auf einander folgenden Werthen einer Function und ihren Differenzen von den verschiedenen Ordnungen lassen sich Beziehungen nachweisen, welche von der Beschaffenheit dieser Function und dem Gesetze ihrer Aenderung völlig unabhängig sind.

§. 522. Zunächst erhält man durch einfache Substitutionen, wie schon im X. Abschnitte gezeigt wurde,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$
$$u_4 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0$$

. . . .

. . . .

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0,$$

welche Formel man abgekürzt schreiben kann

$$u_n = (1 + \Delta u_0)^n,$$

indem man beachten muß, daß nach der Entwickelung der angezeigten Potenz überall $(\Delta u_0)^r$ in $\Delta^r u_0$ zu verwandeln ist; oder auch

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0,$$

wo nach der Entwickelung nichts mehr zu ändern sein wird.

§. 523. Man findet gleichfalls durch allmälige Substitutionen

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0$$
$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$$
$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$
$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u_0 = u_n - n.u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \ldots \pm u_0.$$

Diese Formel kann man schreiben

$$\Delta^n u_0 = (u - 1)^n,$$

wo man nach der Entwickelung u^r in u_r zu verwandeln hat. Sie kann dazu gebraucht werden, um unmittelbar die Differenzen beliebiger Ordnung von einer gegebenen Function zu finden, nämlich mit Hülfe einer gewissen Anzahl auf einander folgender Werthe dieser Function. Die Anzahl der Werthe, welche man kennen muß, ist gleich der Ordnung der gesuchten Differenz.

§. 524. Mit dem Buchstaben Σ bezeichnet man die Umkehrung derjenigen Operation, welche durch den Buchstaben Δ angezeigt wird. Also stellt Σu_0 die Größe dar, deren Differenz u_0 ist. Man erhält demnach, wenn man die vorige Tafel (§. 521) nach der linken Seite hin fortsetzt,

ꝛc.,	$\Sigma^2 u_1 - \Sigma^2 u_0 = \Sigma u_0$	
	$\Sigma^2 u_2 - \Sigma^2 u_1 = \Sigma u_1$	$\Sigma u_1 - \Sigma u_0 = u_0$
	$\Sigma^2 u_3 - \Sigma^2 u_2 = \Sigma u_2$	$\Sigma u_2 - \Sigma u_1 = u_1$
	$\Sigma^2 u_4 - \Sigma^2 u_3 = \Sigma u_3$	$\Sigma u_3 - \Sigma u_2 = u_2$
	. . . .	$\Sigma u_4 - \Sigma u_3 = u_3$
	. . . .	. . . .
	. . . .	. . . .
	$\Sigma^2 u_{n+1} - \Sigma^2 u_n = \Sigma u_n$	. . . .
		$\Sigma u_{n+1} - \Sigma u_n = u_n$;

und daraus wird

$$\Sigma u_1 = \Sigma u_0 + u_0$$
$$\Sigma u_2 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1$$
$$\Sigma u_3 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2$$
$$\Sigma u_4 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}.$$

Man erkennt hieraus, daß Σu_n oder das **endliche Integral** von u_n, d. h. die Größe, deren Differenz u_n ist, durch die Addition der n Werthe der Function u, welche dem Werthe u_n vorhergehen, und einer Größe Σu_0 gebildet wird, die hier im allgemeinen wie eine willkürliche Constante angesehen werden muß. Denn wenn man u als gegeben ansieht, und folglich auch u_0, u_1, u_2, u_3, 2c., so hat man durch Aufstellung der vorstehenden Gleichungen die Größen Σu_1, Σu_2, Σu_3, 2c. nur der einzigen Bedingung unterworfen, daß sie mit Σu_0 gegebene Differenzen hervorbringen sollen. Folglich ist eine von diesen Größen eine willkürliche Constante.

Man erhält gleichfalls aus den vorstehenden Gleichungen

$$\Sigma^2 u_1 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0$$
$$\Sigma^2 u_2 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1$$
$$\Sigma^2 u_3 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2$$
$$\Sigma^2 u_4 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^2 u_n = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3 + \ldots\ldots + \Sigma u_{n-1};$$

ferner

$$\Sigma^3 u_1 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0$$
$$\Sigma^3 u_2 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1$$
$$\Sigma^3 u_3 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2$$
$$\Sigma^3 u_4 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^3 u_n = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3 + \ldots + \Sigma^2 u_{n-1};$$

und so fort. Allgemein hat man

$$\Sigma^\mu u_n = \Sigma^\mu u_0 + \Sigma^{\mu-1} u_0 + \Sigma^{\mu-1} u_1 + \Sigma^{\mu-1} u_2 + \ldots + \Sigma^{\mu-1} u_{n-1}.$$

Es zeigt sich hier, daß in dem Werthe von $\Sigma^2 u_n$ zwei willkürliche Constanten vorkommen, nämlich $\Sigma^2 u_0$ und Σu_0. In dem Werthe von $\Sigma^3 u_n$ hat man zunächst die beiden willkürlichen Größen $\Sigma^3 u_0$ und $\Sigma^2 u_0$, überdies aber auch die willkürliche Größe Σu_0, welche in $\Sigma^2 u_1$, $\Sigma^2 u_2$, 2c. enthalten ist; u. s. w. Endlich in dem Werthe von $\Sigma^\mu u_n$ hat man zunächst die beiden willkürlichen Größen $\Sigma^\mu u_0$ und $\Sigma^{\mu-1} u_0$, und sodann die $\mu - 2$ willkürlichen Größen $\Sigma^{\mu-2} u_0$, $\Sigma^{\mu-3} u_0$, $\Sigma^{\mu-4} u_0$, 2c., welche in $\Sigma^{\mu-1} u_1$, $\Sigma^{\mu-1} u_2$, $\Sigma^{\mu-1} u_3$, 2c. enthalten sind, so daß das Integral $\Sigma^\mu u_n$ immer μ willkürliche Constanten in sich faßt.

§. 525. Man muß übrigens bemerken, daß es nicht immer unumgänglich gefordert wird, daß in dem Integral

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

die mit Σu_0 bezeichnete Größe, welche sie vervollständigt, eine Constante sei. Man kann für diese Größe auch irgend eine Function der Veränderlichen wählen, welche in der Function u vorkommen, vorausgesetzt daß jene Function die Eigenschaft besitzt, ihren Werth nicht zu ändern, wenn diese Veränderlichen ihre auf einander folgenden Werthe annehmen. Es ist bekannt, daß es mehrere trigonometrische Functionen von der angezeigten Eigenschaft gibt sobald man die Veränderlichen in constanten Intervallen wachsen läßt.

Differentiation der Functionen.

§. 526. Eine Function u, welche eine einzige Veränderliche x enthält, sei gegeben. Die Function u differentiiren heißt hier, den Werth der Zunahme Δu aufsuchen, welche diese Function annimmt, sobald die Veränderliche x übergeht in $x + \Delta x$. Aus der Gleichung

$$u = f(x)$$

wird man also allgemein schließen

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wenn die Function u mehrere unabhängige Veränderliche x, y, z, 2c. enthält, so kann diese Function in Bezug auf jede dieser Veränderlichen für sich differentiirt werden. Setzt man

$$u = f(x, y, z, \text{2c.}),$$

so werden diese Differenzen einzeln ausgedrückt durch

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta x = f(x + \Delta x, y, z, \text{2c.}) - f(x, y, z, \text{2c.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y}\,\Delta y = f(x, y + \Delta y, z, \text{2c.}) - f(x, y, z, \text{2c.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}\,\Delta z = f(x, y, z + \Delta z, \text{2c.}) - f(x, y, z, \text{2c.}).$$

Die vollständige Differenz ist

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \text{2c.}) - f(x, y, z, \text{2c.}).$$

Diese vollständige Differenz ist im allgemeinen nicht gleich der Summe der partiellen Differenzen (m. s. §. 534). Es wird der Fall sein, wenn die Function $f(x, y, z, \text{2c.})$ eine rationale und ganze Function ist, in welcher überdies die Veränderlichen x, y, z, 2c. nicht mit einander multiplicirt vorkommen.

§. 527. Man betrachte als Beispiel zuerst die rationalen und ganzen Functionen von einer Veränderlichen x. Diese Functionen sind aus Gliedern von der Form Ax^k zusammengesetzt, wo A und k Constanten bedeuten; die Aufsuchung ihrer Differenzen reducirt sich auf die Aufsuchung der Differenzen von x^k.

Man hat allgemein

$$\Delta \,.\, x^k = (x + \Delta x)^k - x^k$$

und durch weitere Entwickelung

$$\Delta . x^k = kx^{k-1}\Delta x + \frac{k(k-1)}{1.2}x^{k-2}(\Delta x)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}x^{k-3}(\Delta x)^3 + \ldots + (\Delta x)^k.$$

Wenn die Differenz Δx constant angenommen wird, so erhält man leicht den allgemeinen Ausdruck für die Differenz einer beliebigen Ordnung von der gegebenen Function. Denn man hat sodann

$$u_0 = x^k$$
$$u_1 = (x + \Delta x)^k$$
$$u_2 = (x + 2\Delta x)^k$$
$$u_3 = (x + 3\Delta x)^k$$
$$\text{rc.},$$

und die Formel des §. 523 gibt

$$\Delta^n . x^k = (x + n\Delta x)^k - n[x + (n-1)\Delta x]^k + \frac{n(n-1)}{1.2}[x + (n-2)\Delta x] - \text{rc.}$$

folglich wenn man entwickelt und nach den Potenzen von Δx ordnet

$$\Delta^n . x^k = \left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \text{rc.}\right] x^k$$
$$+ k\left[n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \text{rc.}\right] x^{k-1}\Delta x$$
$$+ \frac{k(k-1)}{1.2}\left[n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \text{rc.}\right] x^{k-2}(\Delta x)^2$$
$$+ \text{rc.}$$

worin das Gesetz leicht zu erkennen ist.

Es ist jedoch weiter zu beachten: 1) daß das Glied, welches den Factor x^k enthält, für jeden Werth der ganzen Zahl n gleich Null ist, wie sich leicht beweisen läßt; 2) daß die Größe

$$n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^\mu - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^\mu + \text{rc.}$$

ebenfalls Null wird, so lange μ kleiner als n ist, wie sich gleichfalls beweisen läßt und welches ohnehin stattfinden muß, da der Ausdruck für $\Delta^n . x^k$ keine niedrigeren Potenzen von Δx als die $n$te Potenz enthalten kann; endlich 3) daß man immer hat

$$1.2.3 \ldots . n = n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{rc.},$$

wovon man sich leicht überzeugen kann. Man erhält also nur statt des obigen Ausdrucks

$$\Delta^n . x^k = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)\, x^{k-n}\, \Delta x^n$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} \Big[n^{n+1} - n(n-1)^{n+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} - \text{ꝛc.} \Big] x^{k-n-1}\, \Delta x^{n+1}$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n-1)}{1.2.3\ldots(n+2)} \Big[n^{n+2} - n(n-1)^{n+2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} - \text{ꝛc.} \Big] x^{k-n-2}\, \Delta x^{n+2}$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n-2)}{1.2.3\ldots(n+3)} \Big[n^{n+3} - n(n-1)^{n+3}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3} - \text{ꝛc.} \Big] x^{k-n-3}\, \Delta x^{n+3}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Man kann bemerken, daß in dem Falle, wo der Exponent k eine positive ganze Zahl ist, 1) der Werth der Differenz der Ordnung k von der Function x^k sich auf eine Constante reducirt, deren Ausdruck ist

$$\Delta^k . x^k = k(k-1)(k-2)\ldots 3 . 2 . 1 . \Delta x^k;$$

und 2) der vorige Ausdruck für $\Delta^n . x^k$ sich alsdann mit einem letzten Gliede schließt, welches heißt

$$\Big[n^k - n(n-1)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^k - \text{ꝛc.} \Big] \Delta x^k.$$

Diese Resultate geben die Mittel zur Bildung der Differenzen beliebiger Ordnungen von allen Functionen von der Form

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{ꝛc.}$$

§. 528. Unter den rationalen Functionen kann man, in Bezug auf die Einfachheit des Ausdrucks für ihre Differenzen, die Producte aus Factoren hervorheben, welche wie die

Glieder einer arithmetischen Progression gebildet sind, wie z. B. die Function

$$u = (a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots.[a+x+(k-1)\Delta x].$$

Man findet leicht

$$\Delta^n u = [a+x+n\Delta x][a+x+(n+1)\Delta x]\ldots.[a+x+(k-1)\Delta x]$$
$$\times k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)\Delta x^n.$$

§. 529. Für die gebrochenen Functionen erhält man leicht die Differenzen, wenn man sie nach den bekannten Regeln in ihre Partialbrüche zerlegt. Der Ausdruck der Differenz vereinfacht sich, wenn der Zähler eine Constante und der Nenner ein Product aus Factoren ist, die eine arithmetische Progression bilden. Es sei gegeben

$$u = \frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots.[a+x+(k-1)\Delta x]},$$

so hat man

$$\Delta^n u = \frac{\pm A\, k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)\Delta x^n}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(k+n-1)\Delta x]},$$

wo das Vorzeichen + oder — gilt, je nachdem n eine gerade und ungerade Zahl ist.

§. 530. Es sind noch die transcendenten Functionen zu betrachten übrig. Es sei

$$u = \log x,$$

wo die Logarithmen sich auf eine beliebige Basis beziehen mögen, so wird

$$\Delta u = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

und wenn man entwickelt

$$\Delta u = M\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \text{rc.}\right].$$

Hier bedeutet M den logarithmischen Modulus, d. h. diejenige Zahl, mit welcher die Neper'schen Logarithmen multi=

plicirt werden müssen, um in Logarithmen für die gegebene Basis verwandelt zu werden.

Wird die Differenz Δx constant angenommen, so hat man

$$u_1 = \log(x + \Delta x) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) + \log x$$

$$u_2 = \log(x + 2\Delta x) = \log\left(1 + \frac{2\Delta x}{x}\right) + \log x$$

$$u_3 = \log(x + 3\Delta x) = \log\left(1 + \frac{3\Delta x}{x}\right) + \log x$$

2c.

Entwickelt man diese Ausdrücke und substituirt sie in die Formeln des §. 523, so findet man

$$\Delta \log x = M\left[\frac{\Delta x}{x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - 2c.\right]$$

$$\Delta^2 \log x = M\left[- \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - 2c.\right]$$

$$\Delta^3 \log x = M\left[2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - 2c.\right]$$

2c.

§. 531. Die Exponentialfunction a^x gibt, wenn die Differenz Δx fortwährend als constant angesehen wird,

$$\Delta \,.\, a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

$$\Delta^2 .\, a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2$$

$$\Delta^3 .\, a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n .\, a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n$$

§. 532. Hinsichtlich der trigonometrischen Functionen erhält man, gestützt auf die bekannten Formeln

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi),$$

zunächst

$$\Delta \sin x = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \cos\tfrac{1}{2}(2x+\Delta x)$$

$$\Delta \cos x = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin\tfrac{1}{2}(2x+\Delta x).$$

Ferner

$$\Delta^2 \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x\,[\cos\tfrac{1}{2}(2x+3\Delta x) - \cos\tfrac{1}{2}(2x+\Delta x)]$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}\Delta x^2 \,.\, \sin(x+\Delta x).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zu den allgemeinen Formeln

$$\Delta^{2n}\sin x = \pm\, 2^{2n}\sin\tfrac{1}{2}\Delta x^{2n} \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(2x+2n\Delta x),$$
$$\Delta^{2n+1}\sin x = \pm\, 2^{2n+1}\sin\tfrac{1}{2}\Delta x^{2n+1} \,.\cos\tfrac{1}{2}[2x+(2n+1)\Delta x],$$

wo das Vorzeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist.

Die Differenz der Ordnung n von der Function $\sin x$ läßt sich auf eine noch einfachere Weise mit Hülfe der Differenzen der Ordnungen $n-1$ und $n-2$ ausdrücken, nämlich

$$\Delta^n \sin x = -4\sin\tfrac{1}{2}\Delta x^2\,(\Delta^{n-1}\sin x + \Delta^{n-2}\sin x),$$

wie man unmittelbar aus den vorigen Formeln findet.

§. 533. Man kann aus dem Vorigen immer, in Verbindung mit §. 526, die partiellen so wie die vollständigen Differenzen der Functionen von mehreren Veränderlichen finden. Es sei z. B. die Function gegeben

$$u = xy,$$

so erhält man, Δx als constant vorausgesetzt,

$$\Delta u = (x+\Delta x)\,\Delta y + \Delta x\,.\,y$$
$$\Delta^2 u = (x+2\Delta x)\,\Delta^2 y + 2\,\Delta x\,\Delta y$$
$$\Delta^3 u = (x+3\Delta x)\,\Delta^3 y + 3\,\Delta x\,\Delta^2 y$$

, 2c.

Es sei ferner die gegebene Function

$$u = \frac{x}{y},$$

so hat man

$$\Delta u = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}\left[1 - \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \text{rc.}\right].$$

§. 534. Die vollständigen Differenzen der Functionen von mehreren Veränderlichen lassen sich durch bemerkenswerthe Formeln mit Hülfe ihrer partiellen Differenzen ausdrücken. Es sei u eine Function der beiden Veränderlichen x und y, deren Differenzen Δx und Δy als constant angesehen werden mögen. Man hat

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2 u}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x\Delta y,$$

welche Gleichung man symbolisch ausdrücken kann durch

$$\Delta u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right] u.$$

Sodann erhält man

$$\Delta^2 u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^2 u$$

$$\Delta^3 u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^3 u$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^n u.$$

Aehnliche Formeln kann man aufstellen, wenn die vorgelegte Function eine größere Anzahl von Veränderlichen enthält. So hat man für eine Function u von drei Veränderlichen x, y, z

$$\Delta^n u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta z}\Delta z\right) - 1\right]^n u;$$

und so fort.

Integration der Functionen.

§. 535. Man betrachte zuerst die Function x^m. Setzt man $m+1$ statt k in der Gleichung des §. 527, so wird

$$\Delta . x^{m+1} = \frac{m+1}{1} x^m (\Delta x) + \frac{m+1}{1}\frac{m}{2} x^{m-1} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^{m+1},$$

und wenn man auf jeder Seite dieser Gleichung das Integral nimmt,

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1} \Sigma x^m (\Delta x) + \frac{m+1}{1}\frac{m}{2} \Sigma x^{m-1} (\Delta x)^2 + \ldots + \Sigma x^0 (\Delta x)^{m+1},$$

und daraus erhält man

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{m+1} \Big[\frac{m+1}{1}\frac{m}{2} (\Delta x) \Sigma x^{m-1}$$

$$+ \frac{m+1}{1}\frac{m}{2}\frac{m-1}{3} (\Delta x)^2 \Sigma x^{m-2} + \ldots\ldots + (\Delta x)^m \Sigma x^0 \Big].$$

Setzt man in dieser Formel nach und nach $m = 0, = 1, = 2$, 2c. so erhält man

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} - \tfrac{1}{2} x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{6} x \Delta x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \tfrac{1}{2} x^3 + \tfrac{1}{4} x^2 \Delta x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3 \Delta x - \tfrac{1}{30} x (\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \tfrac{1}{2} x^5 + \tfrac{5}{12} x^4 \Delta x - \tfrac{1}{12} x^2 (\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \tfrac{1}{2} x^6 + \tfrac{1}{2} x^5 \Delta x - \tfrac{1}{6} x^3 (\Delta x)^3 + \tfrac{1}{42} x (\Delta x)^5$$

2c.

Allgemein wird

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \tfrac{1}{2}\, x^m + \tfrac{1}{6}\, \frac{m}{2}\, x^{m-1}\, \Delta x$$

$$- \tfrac{1}{30}\, \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}\, x^{m-3}\, (\Delta x)^3$$

$$+ \tfrac{1}{42}\, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6}\, x^{m-5} (\Delta x)^5$$

$$- \tfrac{1}{30}\, \frac{m(m-1)\ldots.(m-6)}{2.3\ldots 8}\, x^{m-7}\, (\Delta x)^7$$

$$+ \tfrac{5}{66}\, \frac{m(m-1)\ldots.(m-8)}{2.3\ldots.10}\, x^{m-9}\, (\Delta x)^9$$

$$- \tfrac{691}{2730}\, \frac{m(m-1)\ldots.(m-10)}{2.3\ldots.12}\, x^{m-11}\, (\Delta x)^{11}$$

$$+ \text{rc.}$$

wo die numerischen Coefficienten der auf einander folgenden positiven Potenzen von Δx, nämlich

$$\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{1}{42},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{5}{66},\ \tfrac{691}{2730},\ \text{rc.},$$

welche eigenthümlichen Gesetzen folgen, nach ihrem ersten Berechner, Jacob Bernoulli, die Bernoullischen Zahlen genannt werden.

Jedes dieser Integrale muß noch durch eine willkürliche Constante vervollständigt werden. Diese Constante wird dadurch bestimmt, daß man zu gleicher Zeit das erste Glied in der Reihe der Größen x_0, x_1, x_2, rc. oder x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, rc. und das erste Glied in der Reihe der Größen Σx_0, Σx_1, Σx_2, rc. feststellt.

Diese Formeln geben die Integrale aller algebraischen rationalen und ganzen Functionen, wo die Zunahme Δx als constant angenommen ist. *)

§. 536. Man hat nach §. 528, wenn man m statt $k-1$ schreibt

$$\Delta\left\{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$
$$(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x).(m+1)\Delta x;$$

---

*) Wenn man beachtet, daß eine gegebene Function $f(x)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze sich im Allgemeinen immer in eine Reihe von Gliedern von der Form Mx^m entwickeln läßt, auf deren jedes die obige Formel für Σx^m angewandt werden kann, so erhält man die allgemeinere Formel

$$\Sigma f(x) = \frac{1}{\Delta x}\int f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{6}\frac{\Delta x}{2}\frac{df(x)}{dx}$$
$$- \tfrac{1}{30}\frac{(\Delta x)^3}{2.3.4}\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \text{rc.}$$

in welcher das Fortschreitungsgesetz wie oben von den Bernoulli'schen Zahlen abhängt. Diese Formel wird nach ihrem Urheber die Maclaurin'sche Summationsformel genannt.

Einen strengen Beweis dieser Formel findet man in allen größeren Werken über Integralrechnung.

Aus der Maclaurin'schen Summationsformel erhält man unmittelbar wieder die Näherungsformel zur Berechnung der Werthe bestimmter Integrale, welche im I. Bande S. 395 ff. gegeben worden ist. Denn die vorige Gleichung giebt

$$\int f(x)\,dx = \Delta x\,.\,\Sigma f(x) + \tfrac{1}{2}\Delta x\,.\,f(x) - \tfrac{1}{6}\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{df(x)}{dx}$$
$$+ \tfrac{1}{30}\frac{(\Delta x)^4}{2.3.4}\frac{d^3f(x)}{dx^3} - \text{rc.}$$

und wenn man dieses Integral von $x=a$ bis $x=b$ nimmt, so entsteht die Formel S. 403 des I. Bandes.

folglich wenn man auf beiden Seiten integrirt

$$\Sigma\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\}=$$

$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)+C,$$

wo C die willkürliche Constante ist.

§. 537. Man hat ebenso nach §. 529

$$\Delta\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(m-1)\Delta x]}=$$

$$\frac{-Am\Delta x}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)};$$

folglich

$$\Sigma\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}=$$

$$\frac{1}{m\Delta x}\,\frac{-A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m-1)\Delta x]}+C,$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet.

§. 538. Die Gleichung des §. 531

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$$

gibt

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C,$$

wo C die willkürliche Constante ist. Daraus folgt weiter

$$\Sigma^2 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2}+\Sigma C$$

$$\Sigma^3 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3}+\Sigma^2 C$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma^n a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^n}+\Sigma^{n-1}C.$$

In Betreff der Ausdrücke ΣC, $\Sigma^2 C$, ... $\Sigma^{n-1} C$, ist zu bemerken, daß man nach §. 535 hat $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x}$; folglich ist $\Sigma C = \frac{Cx}{\Delta x} + C'$, wo C' eine neue willkürliche Constante bedeutet. Die Formeln desselben Paragraphen geben ebenso die Ausdrücke $\Sigma^2 C$, $\Sigma^3 C$, 2c., und man übersieht leicht, daß das Integral $\Sigma^n a^x$ wird n willkürliche Constanten enthalten, übereinstimmend mit §. 524.

§. 539. Für die trigonometrischen Functionen erhält man aus der Gleichung des §. 532.

$$\Delta \cos x = -2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta x \sin (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$$

folgende

$$\sin (x + \tfrac{1}{2} \Delta x) = -\frac{\Delta \cos x}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x}, \text{ oder } \sin x = -\frac{\Delta \cos (x - \frac{1}{2} \Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x},$$

und daraus durch Integration

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos (x - \frac{1}{2} \Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x} + \text{Const.}$$

Ebenso aus der Gleichung desselben Paragraphen

$$\Delta \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta x \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$$

erhält man

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin (x - \frac{1}{2} \Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x} + \text{Const.}$$

Vermittelst dieser Formeln kann man alle Functionen integriren, welche aus Gliedern von der Form $\sin x^m \cos x^n$ zusammengesetzt sind, wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten. Denn diese Functionen können immer in eine Reihe von Gliedern umgewandelt werden, welche die Sinus und Cosinus der Vielfachen des Bogens x enthalten; und man hat stets

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x}$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

§. 540. Wenn man auf die endlichen Integrale die Methode der Integration durch Theile übertragen will, so setze man, indem P und Q irgend zwei Functionen der Veränderlichen x bedeuten,

$$\Sigma PQ = Q\,.\,\Sigma P + Z,$$

wo Z eine noch zu bestimmende Function von der nämlichen Veränderlichen ist. Differentiirt man beide Seiten der Gleichung, so kommt

$$PQ = (Q+\Delta Q)\,.\,\Sigma(P+\Delta P) - Q\,.\,\Sigma P + \Delta Z,$$

oder, da $\Sigma\Delta P = P$ ist,

$0 = \Delta Q\,.\,\Sigma(P+\Delta P) + \Delta Z$, woraus $Z = -\Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)]$.

Man hat also

$$\Sigma PQ = Q\,.\,\Sigma P - \Sigma\,[\Delta Q\,.\,\Sigma(P+\Delta P)]$$

oder einfacher

$$\Sigma PQ = Q\,.\,\Sigma P - \Sigma(\Delta Q\,.\,\Sigma P_1).$$

Daraus wird folglich durch weitere Entwickelung

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q.\Sigma^2 P_2)$$

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q.\Sigma^3 P_3)$$

. . . .

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q.\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q.\Sigma^5 P_4 - \text{rc.}$$

Man kann dieser Formel auch die Gestalt geben

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q.(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q.(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{rc.}$$

Die Reihe der Glieder bricht ab, wenn die Differenzen irgend einer Ordnung der Function Q constant werden.

Summation der Reihen.

§. 541. Man hat nach §. 524 die allgemeine Gleichung

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_{n-1},$$

in welcher Σu_0 eine willkürliche Constante bedeutet. Setzt man nun

$$S u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \ldots + u_n,$$

d. h. bezeichnet man allgemein mit Su_n die Summe der auf einander folgenden Werthe der Function u bis zu dem Werthe u_n, diesen letztern eingeschlossen, so hat man die Beziehung

$$S u_n = \Sigma u_n + u_n + \text{Const.}$$

Man sieht also, daß zwischen dem Integral, welches durch Σ bezeichnet wird, und der Summe, welche durch S angedeutet wird, unterschieden werden muß. Beide Größen weichen darin von einander ab, daß die letztere die Summe der Glieder der Reihe u_0, u_1, u_2, 2c. bis zu dem Gliede u_n einschließlich ausdrückt, während dieses Glied in dem Integrale nicht enthalten ist. Man kann übrigens auch den Index n weglassen und bloß schreiben

$$S u = \Sigma u + u + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmt sich durch die Kenntniß desjenigen Gliedes, mit welchem die Reihe der mit u bezeichneten Functionen, deren Summe Su darstellt, anfangen soll.

§. 542. Es werde z. B. die Summe der Potenzen der ganzen Zahlen gesucht. Man setze in den Formeln des §. 535 $\Delta x = 1$, und bestimme die Constante so, daß die Reihen mit der Einheit anfangen, in welchem Falle ihr Werth Null ist, so hat man

$Sx = 1+2+3+4+\ldots\ldots+x = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

$Sx^2 = 1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+x^2 = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$

$Sx^3 = 1+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+x^3 = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$

$Sx^4 = 1+2^4+3^4+4^4+\ldots\ldots+x^4 = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$

$Sx^5 = 1+2^5+3^5+4^5+\ldots\ldots+x^5 = \frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2$

$Sx^6 = 1+2^6+3^6+4^6+\ldots\ldots+x^6 = \frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x$

2c.

Den allgemeinen Ausdruck für Sx^m wird man aus dem Ausdrucke des §. 535 für Σx^m erhalten, indem man $\Delta x = 1$ setzt und überdies das Glied $-\frac{1}{2}x^m$ in $+\frac{1}{2}x^m$ verwandelt.

§. 543. Die Formel des §. 536 gibt

$$S\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$

$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m+1)\Delta x]+\text{Const}$$

welcher Ausdruck dazu dienen kann, die Summen der Reihen der figurirten Zahlen zu bestimmen. Das allgemeine Glied dieser Reihen ist

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m},$$

und man hat, wenn man in der vorigen Formel $a = 0$ und $\Delta x = 1$ setzt

$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots m} = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}+\text{Const}.$$

Also liefert ein beliebiges Glied jeder Reihe die Summe der Glieder der vorhergehenden Reihe. Man erhält, wenn nach und nach $m = 1, = 2, = 3,$ 2c. setzt

$$S\frac{x+1}{1}=1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x+1}{1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$

$$S\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}=1+3+6+10+\ldots\ldots\ldots+\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$

$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}=1+4+10+20+\ldots+\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4}$$

2c.

Die Constante ist Null, wenn die Reihen mit der Einheit anfangen sollen.

§. 544. Die Formel des §. 537 gibt ebenso

$$S\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}=$$

$$-\frac{1}{m\Delta x}\cdot\frac{1}{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}+\text{Const},$$

und diese Formel kann zur Summirung der Reihen dienen, deren Glieder die Einheit zum Zähler und die figurirten Zahlen zu Nennern haben. Das allgemeine Glied dieser Reihen ist

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m)};$$

und die vorige Formel gibt

$$S\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m)}$$
$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}+\text{Const}.$$

Diese Formel ist unbrauchbar für $m=1$. Setzt man $m=2$, $=3$, $=4$, ꝛc. und bestimmt die Constante so, daß die Reihen mit der Einheit anfangen, so hat man

$$S\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=\tfrac{2}{1}-\frac{1.2}{(x+2)}$$

$$S\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}.\frac{1.2.3}{(x+2)(x+3)}$$

$$S\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\tfrac{4}{3}-\tfrac{1}{3}.\frac{1.2.3.4}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

ꝛc.

Die Werthe $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ꝛc. der Constante geben die Summen der Reihen, wenn man sich diese ins Unendliche fortgesetzt denkt.

§. 545. In Betreff der transcendenten Functionen*) liefert zunächst der Ausdruck für Σa^x in §. 538

$$Sa^x=\frac{a^{x+\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}+\text{Const.}$$

§. 546. Die Ausdrücke für $\Sigma\sin x$ und $\Sigma\cos x$ in §. 539 geben

$$S\sin x=-\frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\text{Const,}$$

$$S\cos x=\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\text{Const.}$$

Diese Formeln liefern die Summe einer jeden Reihe, deren Glieder aus den Sinus oder Cosinus von Bögen bestehen, welche eine arithmetische Progression bilden. Man erhält nämlich, wenn man $p+qx$ statt x, und $q\Delta x$ statt Δx schreibt,

*) Ueber Slx, wofür auf diesem Wege kein Ausdruck gefunden werden kann, vergleiche man den Zusatz IV. am Schlusse dieses Bandes.

$$S \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x},$$

$$S \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x} - \frac{\sin(p-\frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x},$$

wo die Constanten so bestimmt sind, daß die Reihen resp. mit den Gliedern $\sin p$ und $\cos p$ anfangen.

Integration der linearen Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten.

§. 547. Man betrachte wie bisher eine unabhängige Veränderliche x und eine Function y dieser Veränderlichen, und es wachse x um die Constante Δx, welche immer als bekannt angesehen wird. Eine Differenzengleichung drückt sodann überhaupt eine Relation aus, welche zwischen der Veränderlichen x, der Function y, und einer gewissen Anzahl von Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ꝛc. dieser Function stattfindet.

Man erkennt aber sogleich, daß wenn man für Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ꝛc. die allgemeinen Ausdrücke des §. 523 an die Stelle setzt, die in Rede stehende Relation dargestellt sein wird durch die Größen x, y_0, y_1, y_2, y_3, ꝛc., wo die Stellenzahl des äußersten Gliedes in der Reihe der Werthe von y gleich ist der höchsten Ordnung der Differenzen, welche in der gegebenen Gleichung enthalten sind. Daraus folgt, daß eine Differenzengleichung nichts anderes ist als eine Relation zwischen einer gewissen Anzahl auf einander folgender Glieder einer Reihe, durch deren Hülfe man alle Glieder dieser Reihe bestimmen kann, sobald man eine gewisse Anzahl derselben, gleich der Ordnung der Gleichung, willkürlich angenommen hat.

Eine Differenzengleichung integriren heißt den Ausdruck des allgemeinen Gliedes der so eben bezeichneten Reihe auffinden. Aus dem Gesagten geht hervor, daß dieser Ausdruck nothwendig eine Anzahl willkürlicher Constanten enthalten muß, welche gleich ist der höchsten Ordnung der Differenzen, die in der gegebenen Gleichung vorkommen, oder der höchsten Stellenzahl der auf einander folgenden Werthe der Function y, welche darin enthalten sind.

§. 548. Der einfachste Fall ist derjenige, wo die gegebene Gleichung sich reducirt auf

$$\Delta^n y = 0,$$

statt deren man vermöge des §. 523 auch schreiben kann

$$y_n - n.y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} + \ldots \pm y_0 = 0.$$

Man erhält hieraus

$$y_n = n\,.\,y_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} - \ldots \mp y_0,$$

und dieser Ausdruck liefert das Glied der Reihe, welches die Stellenzahl n enthält, ausgedrückt durch die Summe der n vorhergehenden Glieder, von denen jedes mit einem numerischem Coefficienten multiplicirt ist, der von dieser Stellenzahl abhängt.

Die Integration der Gleichung $\Delta^n y = 0$ ist übrigens leicht nach den Regeln des §. 535 auszuführen. Man erhält

$$\Delta^{n-1} y = \Sigma 0 = A_1$$

$$\Delta^{n-2} y = \Sigma^2 0 = \frac{A_1 x}{\Delta x} + A_2$$

$$\Delta^{n-3} y = \Sigma^3 0 = \frac{A_1 x^2}{2(\Delta x^2)} - \frac{(A_1 - 2A_2)x}{2\Delta x} + A_3$$

ꝛc.

wo A_1, A_2, A_3, ꝛc. willkürliche Constanten sind. Das Integral der Ordnung n hat demnach die Form

$$y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1},$$

wo α, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} willkürliche constante Coeffi=

cienten sind, deren Anzahl gleich der Ordnung der Gleichung ist.

Die Reihen, deren allgemeines Glied durch den vorstehenden Ausdruck gegeben wird oder deren Differenz von der Ordnung n den Werth Null hat, sind auch unter dem Namen der arithmetischen Reihen von höheren Ordnungen bekannt.

§. 549. Man betrachte ferner die Gleichung

$$y_{x+n}+Py_{x+n-1}+Qy_{x+n-2}+Ry_{x+n-3}+\ldots+Uy_x=0, \quad (1)$$

in welcher $P, Q, R, \ldots U$ constante Zahlen bedeuten. Setzt man $y=\varrho^x$, wo ϱ eine Constante bezeichnet, so werden nach der Substitution dieses Werthes alle Glieder durch ϱ^x theilbar sein, und es bleibt

$$\varrho^n+P\varrho^{n-1}+Q\varrho^{n-2}+R\varrho^{n-3}+\ldots+U=0, \quad (2)$$

so daß der Ausdruck $y=\varrho^x$ der gegebenen Gleichung (1) Genüge leistet, sobald ϱ eine Wurzel der Gleichung (2) ist.

Bezeichnet man demnach mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_n$ die n Wurzeln der Gleichung (2), welche zunächst sämmtlich reell und ungleich sein mögen, so hat man für y die n besonderen Werthe $y=\varrho_1^x$, $y=\varrho_2^x$, $y=\varrho_3^x$, $\ldots y=\varrho_n^x$; und da der Gleichung (1) auch durch die Summe von zwei oder mehreren dieser Werthe Genüge geschieht, von denen jeder einen beliebigen constanten Coefficienten beigefügt enthalten darf, so hat man

$$y=A_1\varrho_1^x+A_2\varrho_2^x+A_3\varrho_3^x+\ldots+A_n\varrho_n^x$$

als Ausdruck des allgemeinen Integrals der gegebenen Gleichung, in welchem $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ die n willkürlichen Constanten bedeuten, die dieses Integral enthalten muß.

§. 550. In dem Falle, wo die Gleichung (2) imaginäre Wurzeln besitzt, seien

$$\varrho^2-2k\varrho\cos\varphi+k^2 \text{ und } \varrho=k(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\,.\sin\varphi)$$

einer ihrer reellen Factoren des zweiten Grades, und die beiden entsprechenden imaginären Wurzeln. Nach §. 117 ist zu erkennen, daß der Gleichung (1) durch die beiden besonderen Werthe Genüge geschieht

$$y=k^x(\cos\varphi x+\sqrt{-1}.\sin\varphi x) \text{ und } y=k^x(\cos\varphi x-\sqrt{-1}.\sin\varphi x),$$

und folglich auch durch die Summe dieser Werthe, von denen jeder mit einem beliebigen constanten Coefficienten multiplicirt werden darf. Daraus ergibt sich, daß der Theil des allgemeinen Ausdrucks der Function y, welcher den beiden in Rede stehenden imaginären Wurzeln entspricht, in reeller Form dargestellt werden kann durch

$$B_1k^x \cos\varphi x + B_2k^x \sin\varphi x,$$

wo B_1 und B_2 willkürliche Constanten sind.

§. 551. Der Fall, wo die Gleichung (2) gleiche Wurzeln besitzt, läßt sich auf ähnliche Weise erledigen wie es im §. 440 geschehen ist. Es seien nämlich ϱ_1 und $\varrho_1+\omega$ zwei Wurzeln dieser Gleichung, so wird die Summe der entsprechenden besonderen Werthe sein

$$A_1\varrho_1^{\,x} + A_2(\varrho_1+\omega)^x,$$

oder wenn man die angezeigte Potenz entwickelt

$$(A_1+A_2)\varrho_1^{\,x} + A_2\omega x\varrho_1^{\,x-1} + A_2\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\varrho_2^{\,x-2} + \text{etc.}$$

Läßt man nun ω unendlich klein werden, so kann man den Constanten A_1 und A_2 solche Werthe beilegen, daß die Größen A_1+A_2 und $A_2\omega$ beliebige endliche Werthe annehmen, und dadurch verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$B_1\varrho_1^{\,x} + B_2x\varrho_1^{\,x-1}.$$

Wenn man drei gleiche Wurzeln hat, so ist die Summe der drei entsprechenden besonderen Werthe

$$A_1\varrho_1^{\,x} + A_2x\varrho_1^{\,x-1} + A_3(\varrho_1+\omega)^x$$

oder

$$(A_1+A_3)\varrho_1{}^x+(A_2+A_3\omega)x\varrho_1{}^{x-1}+A_3\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\varrho_1{}^{x-2}+ \text{2c.};$$

und da man, wenn ω unendlich klein wird, den Constanten A_1, A_2, A_3 solche Werthe geben kann, daß die Größen A_1+A_3, $A_2+A_3\omega$, $A_3\omega^2$ beliebige endliche Werthe annehmen, so verwandelt sich die Summe der drei in Rede stehenden besonderen Werthe in

$$B_1\varrho_1{}^x+B_2x\varrho_1{}^{x-1}+B_3\frac{x(x-1)}{2}\varrho_1{}^{x-2}.$$

Man übersieht leicht, wie dies für eine größere Anzahl gleicher Wurzeln fortzusetzen ist.

§. 552. Die willkürlichen Constanten, welche in dem allgemeinen Integrale enthalten sind, werden immer durch die Bedingung bestimmt, daß dieses Integral n gegebene Werthe der Function y liefern muß, welche n gleichfalls gegebenen Werthen der Veränderlichen x zugehören.

XLI. Interpolation der Reihen. Angenäherte Berechnung der Werthe bestimmter Integrale.

---

§. 553. Die Operation, welche mit dem Namen Interpolation bezeichnet wird, ist eine der hauptsächlichsten Anwendungen der Differenzenrechnung. Ihr liegt der Gedanken zum Grunde, daß man in Ermangelung des analytischen Ausdrucks einer Function, welcher die Natur derselben vollständig bestimmen und die Mittel bieten würde, entweder genau oder so nahe als man will jeden Werth zu berechnen, der einem gegebenen Werthe der unabhängigen

Veränderlichen entspricht, dennoch mit einem für die Anwendungen ausreichenden Grade von Genauigkeit alle Werthe der in Rede stehenden Function anzugeben im Stande ist, sobald man eine begränzte Anzahl von gegebenen Werthen dieser Function kennt. Es verhält sich hier ebenso, wie wenn man bei graphischen Constructionen die Gestalt einer Curve als bestimmt ansieht, sobald eine gewisse Anzahl von Punkten festgelegt worden ist, die dieser Curve angehören.

Man kehre zu der Formel des §. 522 zurück

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0.$$

Diese Formel liefert bloß eine Beziehung zwischen dem Werthe u_n, dem Werthe u_0, und den Differenzen Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... $\Delta^n u_0$, oder was dasselbe sagt, zwischen den Werthen u_0, u_1, u_2, u_3, ... u_n, welche als bekannt angesehen werden. Man kann, streng genommen, nichts daraus herleiten, was nicht schon gegeben wäre.

Es sei nun u eine Function von einer Veränderlichen x, und man lasse diese Veränderliche um die constante Differenz Δx wachsen. Schreibt man u_x, um den Werth der Function u anzuzeigen, welcher dem Werthe x der unabhängigen Veränderlichen entspricht, so muß, wenn man in der vorigen Formel u_x für u_n an die Stelle setzt, gleichzeitig statt n geschrieben werden $\frac{x}{\Delta x}$. Man hat sodann

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$

$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \ldots + \Delta^{\frac{x}{\Delta x}} u_0,$$

welche Formel u_x in seiner Abhängigkeit von x darstellt.

§. 554. Wenn die Function u eine ganze rationale Function von x von der Ordnung r ist, so wird (nach

§. 527) die Differenz $\Delta^r u_0$ constant, und die Differenzen aller folgenden Ordnungen erhalten mithin den Werth Null. Der vorstehende Ausdruck besitzt sodann eine bestimmte Anzahl von Gliedern, und man erkennt leicht, daß die Kenntniß der $r+1$ ersten Werthe von u hinreicht, um mit Hülfe dieses Ausdrucks die Reihe dieser Werthe beliebig fortzusetzen und immer genaue Resultate zu erhalten. Zu diesem Schlusse gelangt man auch, wenn man in der Gleichung des §. 523 die Annahme macht $\Delta^n u_0 = 0$, wodurch man erhält

$$u_n = n \,.\, u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} - \ldots \mp u_0,$$

welche Formel jedes beliebige Glied der Reihe u_0, u_1. u_2, u_3, 2c. vermittelst der n vorhergehenden Glieder ausdrückt. Nun tritt zwar dieser Umstand, daß die späteren Differenzen verschwinden, nicht allgemein ein; da aber in denjenigen Fällen, auf welche die hier angestellten Betrachtungen Anwendungen finden, die auf einander folgenden Differenzen Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, 2c. abnehmende Werthe haben, so kann man in Berücksichtigung der Genauigkeit, mit welcher die Rechnung geführt wird, diejenigen Glieder weglassen, welche wegen ihrer Kleinheit keinen Einfluß mehr auf den Werth der Resultate haben können. Die vorstehende Formel kann mithin unter dieser Voraussetzung in allen Fällen dazu dienen, die Reihe der vorgelegten Werthe beliebig fortzusetzen, wobei man allerdings, je mehr man sich von den gegebenen Zahlen entfernt, desto mehr der Gefahr ausgesetzt sein wird, größere und größere Fehler zu begehen.

Die Berechnung der Glieder der Reihe u_0, u_1, u_2, 2c., welche über das Glied u_r hinausliegen, reducirt sich übrigens, wie man leicht bemerkt, unter der Voraussetzung, daß die Differenzen einer gewissen Ordnung r constant sind oder wie constant angesehen werden können, auf bloße Additionen. Es sei z. B. die Function gegeben

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

und man nehme $\Delta x = 1$. Berechnet man die vier ersten Glieder, entsprechend den Werthen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, so kann man folgende Tabelle herstellen:

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
0	-1			
1	$+1$	$+2$		
2	-1	-2	-4	
3	-1	0	$+2$	$+6$

Da in Folge der Beschaffenheit der gegebenen Function die dritten Differenzen constant sein müssen, so kann man die Reihe der Werthe von u_x vermöge des vorigen Paragraphen nach der Formel fortsetzen

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + x(x-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3},$$

in welcher man $u_0 = -1$, $\Delta u_0 = 2$, $\Delta^2 u_0 = -4$, $\Delta^3 u_0 = 6$ zu setzen hat. Aber es ist viel einfacher, die Tabelle dadurch fortzuführen, daß man die constante Differenz 6 in der letzten Vertikalreihe wiederholt setzt, und die übrigen Vertikalreihen von der Rechten nach der Linken durch Addition ausfüllt.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	-1	0	2	6
4	$+7$	8	8	6
5	29	22	14	6
6	71	42	20	6
2c.				

Die also erhaltenen Resultate sind vollkommen genau. Dies würde nicht der Fall sein, wenn die Differenzen der letzten Ordnung, welche man in Betracht zieht, nicht in aller Strenge constant wären. In einem solchen Falle müßte man im voraus einige entfernt liegende Glieder der Reihe berechnen, und sich versichern, daß die Werthe dieser Glieder mit den durch die vorige Methode gefundenen zusammenfallen.

§. 555. Der Zweck der Interpolation besteht nicht darin, eine Reihe von Gliedern, von denen eine gewisse Anzahl gegeben ist, beliebig fortzusetzen, sondern vielmehr zwischenliegende Glieder in einer Reihe zu berechnen, von welcher eine gewisse Anzahl von Gliedern in gegebenen Abständen von einander bekannt ist. Hier findet die Formel des §. 553 ihre eigentliche Anwendung. Diese Formel, welche streng genommen nur eine Relation zwischen solchen Werthen von u ausdrückt, die den bestimmten Werth 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, ꝛc. der Veränderlichen x entsprechen, betrachtet man jetzt wie den allgemeinen Ausdruck der Größe u als Function von x, auch selbst für diejenigen Werthe dieser Veränderlichen, welche zwischen den vorigen enthalten sind. Setzt man für x einen Werth kleiner als Δx, so wird der Ausdruck für u_x in den meisten Fällen stark convergiren und mithin leicht einen sehr angenäherten Werth für diese Größe liefern.

Gestützt auf diese Betrachtung reducirt sich die Berechnung aller Tafeln, wie z. B. der logarithmischen oder der astronomischen Tafeln darauf, daß man zuerst genau, mit Hülfe des analytischen Ausdrucks der Functionen, eine mäßige Anzahl von Gliedern berechnet, die in größeren Intervallen aus einander liegen; hinterher kann man sodann die zwischenliegenden Glieder durch bloße Additionen herstellen. Man denke sich wie bisher die Zunahme Δx als constant, und man nehme an, es solle zwischen zwei beliebigen von den bekannten Gliedern u_0, u_1, u_2, u_3, rc., welche den Werthen 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, rc. der Veränderlichen x entsprechen, eine Anzahl von $m-1$ Gliedern interpolirt werden, die unter sich wieder gleiche Intervalle bilden. Die neue Zunahme von x sei $\delta x = \frac{\Delta x}{m}$. In Folge des vorigen Paragraphen ist klar, daß man die gesuchten zwischenliegenden Glieder leicht herstellen wird, wenn man erstens die Werthe von u_0, δu_0, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0$, rc. kennt, und wenn man zweitens die Differenzen von einer gewissen Ordnung, welche mit $\delta^\mu u_0$ bezeichnet werden mögen, als constant ansehen darf; denn alsdann hat man die letzte Vertikalreihe einer Tabelle, ähnlich der obigen, und die Anfangsglieder aller übrigen Vertikalreihen. Betrachtet man nun, vermöge des vorhin Gesagten, die Formel des §. 553 auch zur Berechnung derjenigen Werthe von u als gültig, welche den zwischenliegenden Werthen von x entsprechen, so gibt diese Formel zunächst, indem man $m\delta x$ statt Δx schreibt,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{m\delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{m\delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{rc.}$$

In diesem Ausdrucke sind u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, rc. wie constante Größen anzusehen, die immer in Folge der vorausgegangenen Rechnung bekannt sind, welche in Betreff der Glieder der Reihe, die den Werthen 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, rc. entsprechen, angestellt werden mußte. Differentiirt man sodann in Bezug auf das Zeichen δ, und beachtet, daß die Producte

$$\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{m\delta x} - 2\right)\ldots$$

ganze und rationale Functionen von x darstellen, mithin ihre Differenzen von solchen Ordnungen, welche die Anzahl ihrer Factoren übertreffen, Null sind, so findet man

$$\delta^r u_x =$$

$$\left[\begin{array}{l}
\delta^r \left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r-1)\right)\right\}.\frac{\Delta^r u_0}{1.2.3\ldots r} \\
+\delta^r \left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-r\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+1} u_0}{1.2.3\ldots(r+1)} \\
+\delta^r \left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r+1)\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+2} u_0}{1.2.3\ldots(r+2)} \\
+ \text{ic.}
\end{array}\right]$$

Dieser Ausdruck liefert die gesuchten Differenzen δu_0, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0$, ꝛc., wenn man darin nach Ausführung der angezeigten Differentiationen $x=0$ setzt. Da diese Formeln häufig mit Nutzen gebraucht werden können, so sollen die Ausdrücke für die Differenzen der ersten Ordnungen hier vollständig entwickelt werden.

Durch Vollziehung der angezeigten Multiplicationen findet man zunächst

$$\delta u_x = \left[\begin{array}{l}
\delta \frac{x}{m\delta x} \Delta u_0 \\
+\delta\left(\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}-\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\
+\delta\left(\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}-3\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}+2\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\
+\delta\left(\frac{x^4}{m^4(\delta x)^4}-6\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}+11\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}-6\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\
+ \text{ic.}
\end{array}\right]$$

$$\delta^2 u_x = \left[\begin{array}{l}
\delta^2 \frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\
+\delta^2\left(\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}-3\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\
+\delta^2\left(\frac{x^4}{m^4(\delta x)^4}-6\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}+11\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\
+ \text{ic.}
\end{array}\right]$$

$$\delta^3 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^3 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} \dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ + \delta^3 \left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} \right) \dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\ + \text{etc.} \end{array}\right]$$

$$\delta^4 u_x = \delta^4 \frac{x^4}{m^4(\delta x)^4} \frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

etc.

Wendet man sodann den Ausdruck für $\Delta^n x^k$ aus §. 527 an, in welchem man $x = 0$ setzen muß, wodurch er sich auf sein letztes Glied reducirt, so verwandeln sich diese Formeln in

$$\delta u_0 = \frac{1}{m} \left[\Delta u_0 + \frac{1-m}{2.m} \Delta^2 u_0 + \frac{1-3m+2m^2}{2.3.m^2} \Delta^3 u_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1-6m+11m^2-6m^3}{2.3.4.m^3} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{m^2} \left[\Delta^2 u_0 + \frac{1-m}{m} \Delta^3 u_0 + \frac{7-18m+11m^2}{3.4.m^2} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{m^3} \left[\Delta^3 u_0 + \frac{3-3m}{2.m} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^4 u_0 = \frac{1}{m^4} \left[\Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

etc.

Man wird selten in den Fall kommen, daß man Differenzen von höherer Ordnung als der vierten anzuwenden nöthig hat. Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß wenn man allgemein bei den Differenzen der Ordnung r von den Zahlen u_0, u_1, u_2, u_3, etc. der vorgelegten Reihe stehen bleibt, d. h. wenn man die Differenz $\Delta^r u_x$ wie constant an=

sieht, sodann die Differenz der nämlichen Ordnung $\delta^r u_x$ der zu interpolirenden Zahlen gleichfalls constant ist und den Werth $\frac{\Delta^r u_x}{m^r}$ hat, wo $m-1$ die Anzahl der zwischen je zwei benachbarten Gliedern der gegebenen Reihe einzuschaltenden Glieder bedeutet. Die vorstehenden Resultate liefern immer die nöthigen Mittel, um eine Reihe von Zahlen, die unter einander gleiche Intervalle besitzen, zwischen die Glieder einer gegebenen Reihe zu interpoliren, welche ebenfalls um gleiche Intervalle von einander entfernt sind.

§. 556. Um in einem Beispiele den Gebrauch der vorigen Formeln zu zeigen, nehme man die Function

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

aus §. 554, und suche diejenigen Werthe derselben zu bestimmen, welche Werthen von x entsprechen, die um Zehntel der Einheit zunehmen. Man hat

$$u_0 = -1,\quad \Delta u_0 = 2,\quad \Delta^2 u_0 = -4,\quad \Delta^3 u_0 = 6,$$

und die Differenzen der höheren Ordnungen sind Null. Ferner ist $m = 10$; und substituirt man diese Werthe in die obigen Formeln, so kommt

$$\delta u_0 = \tfrac{1}{10}\left[2 + \frac{-9}{20}(-4) + \frac{1-30+200}{600}6\right] = 0{,}551$$

$$\delta^2 u_0 = \tfrac{1}{100}\left[-4 + \frac{-9}{10}6\right] = -0{,}094$$

$$\delta^3 u_0 = \tfrac{1}{1000}6 = 0{,}006.$$

Also gestaltet sich die Berechnung der gesuchten zwischenliegenden Werthe wie folgt:

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$
0,0	—1,000			
0,1	—0,449	0,551		
0,2	+0,008	0,457	—0,094	
0,3	0,377	0,369	—0,088	0,006
0,4	0,664	0,287	—0,082	6
0,5	0,875	0,211	—0,076	6
0,6	1,016	0,141	—0,070	6
0,7	1,093	0,077	—0,064	6
0,8	1,112	0,019	—0,058	6
0,9	1,079	—0,033	—0,052	6
1,0	1,000	—0,079	—0,046	6
1,1	0,881	—0,119	—0,040	6
ꝛc.				

Man findet in den logarithmischen Tafeln von Callet, Seite 64 der Einleitung, nähere Nachweisungen über die Vorsicht, welche bei Rechnungen dieser Art anzuwenden ist, und über die Hülfsmittel zur Verbesserung kleiner Fehler, zu denen die nur angenäherten Werthe der Differenzen Anlaß geben können. *)

---

*) Folgende von da entlehnte interessante Bemerkung möge hier Raum finden.

Wenn man eine beliebige Reihe mit Hülfe der angenäherten Differenzen der Glieder dieser Reihe berechnet, so muß man in den ersten Differenzen wenigstens eine Decimalstelle mehr nehmen als in den Gliedern der Reihe selbst; ebenso in den zweiten Differenzen eine mehr als in den ersten Differenzen; in den dritten Differenzen eine mehr als in den zweiten Differenzen; u. s. f. Will man dagegen nur eben so viel Stellen in den Differenzen benutzen, wie in den Gliedern der Reihe selbst, so werden die durch die vernachlässigten Ziffern der Differenzen der letzten Ordnung her=

§. 557. Der Gebrauch der logarithmischen und anderer Tafeln dieser Art gibt Anlaß zu einer fortwährenden Anwendung des Interpolirens. Die Benutzung der Propor-

---

beigeführten Fehler sich in den Differenzen der vorhergehenden Ordnungen bemerklich machen, wo sie nach dem Gesetze der figurirten Zahlen zunehmen. Nämlich, wenn eine von den Differenzen der Ordnung n um eine Einheit der letzten Stelle fehlerhaft ist, so wird dieser Fehler sich bei allen daraus gebildeten Differenzen der Ordnung $n-1$ vorfinden; er schreitet also daselbst fort wie die constanten Zahlen 1, 1, 1, 1, ꝛc. Jeder dieser Fehler macht sich auf gleiche Weise bemerklich bei den daraus hervorgegangenen Differenzen der Ordnung $n-2$; die Fehler wachsen also hier wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. Jeder dieser Fehler hat wieder ebenso auf die Differenzen der Ordnung $n-3$ Einfluß; die Fehler wachsen also hier wie die Polygonalzahlen 1, 3, 6, 10, ꝛc. Sie wachsen wie die Pyramidalzahlen in der Reihe der Differenzen der Ordnung $n-4$, u. s. f., also allgemein nach dem Gesetze der figurirten Zahlen.

Es ist also von Wichtigkeit, dem Zunehmen dieser Fehler Einhalt zu thun, wenn man sie nicht etwa dadurch gänzlich vermeiden will, daß man durch Benutzung einer größeren Anzahl von Decimalstellen in den höheren Differenzen als in den niedrigeren sich des Vortheils begibt, die letzten Differenzen leicht berechnen zu können. Um dahin zu gelangen, berechne man direct und von Intervall zu Intervall die Werthe einiger Glieder der in Rede stehenden Reihe, und vergleiche dieselben mit den durch Hülfe der Differenzen entstandenen Werthen derselben Glieder. Die Differenz zweier also einander entsprechenden Werthe eines Gliedes wird entweder selbst eine figurirte Zahl von der Ordnung derjenigen sein, nach welchen die Fehler wachsen, oder sich als die Summe oder Differenz mehrerer figurirten Zahlen von dieser Ordnung darstellen lassen. Die Seiten oder Wurzeln dieser figurirten Zahlen zeigen sodann unter den Differenzen der letzten Ordnung diejenigen an, welche um eine Einheit vermehrt oder vermindert werden müssen.

Beispiele findet man daselbst S. 65.

tionaltheile stützt sich unmittelbar auf das angezeigte Verfahren, indem man die Differenzen der zweiten Ordnung gleich Null annimmt und mithin den Ausdruck für u_x im §. 553 reducirt auf

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0.$$

Wenn die Differenzen der zweiten Ordnung nicht Null sind, so erhält man ein genaueres Resultat, indem man von jenem Ausdruck die drei ersten Glieder beibehält

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0 + \frac{x(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 u_0}{2}.$$

Der Gebrauch solcher Tafeln gibt auch zu der Umkehrung des Interpolationsproblems Anlaß, d. h. zu der Aufsuchung des Werthes von x, welcher einem gegebenen Werthe u_x der Function u zugehört. So lange man die Differenzen der höheren Ordnungen gleich Null annehmen kann, hat man unmittelbar aus der ersten der vorstehenden Gleichungen

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}.$$

Wenn aber diese Formel nicht die nöthige Genauigkeit gibt, so muß man schreiben

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) \frac{\Delta^2 u_0}{2 \Delta u_0} + \text{rc.}}.$$

Hat man nämlich einen ersten angenäherten Werth von x mit Hülfe des Ausdrucks $\Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}$ berechnet, so substituirt man denselben auf der rechten Seite dieser Gleichung, um ein noch genaueres Resultat zu erhalten. Dieser zweite Werth von x kann nochmals substituirt werden, um wieder ein genaueres Resultat zu geben.

§. 558. In den §§. 553 rc. wurde die Voraussetzung gemacht, die Veränderliche x wachse mit constanten Differenzen, oder die Zahlen der gegebenen Reihe seien durch gleiche Intervalle von einander getrennt. Man kann indessen auch in denjenigen Fällen, wo diese Bedingung nicht erfüllt wird, eine Interpolationsformel aufstellen, welche dem Ausdrucke für u_x im §. 553 ähnlich ist. Setzt man nämlich in diesen Ausdruck für Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ꝛc. die Werthe aus §. 523, so wird

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}(u_1 - u_0) + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0}{1.2.3} + \text{ꝛc.};$$

oder auch

$$u_x =$$
$$\left[\begin{array}{ll}
u_0 & \left\{1 - \frac{x}{\Delta x} + \frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) - \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) + \text{ꝛc.}\right\} \\
+u_1 & \left\{\frac{x}{\Delta x} - \frac{2}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) + \frac{3}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) - \text{ꝛc.}\right\} \\
+u_2 & \left\{\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) - \frac{3}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) + \text{ꝛc.}\right\} \\
+u_3 & \left\{\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) - \text{ꝛc.}\right\} \\
+\text{ꝛc.} &
\end{array}\right]$$

Diese Gleichung verwandelt sich für $x = 0$ in $u_x = u_0$; für $x = \Delta x$ in $u_x = u_1$; für $x = 2\Delta x$ in $u_x = u_2$; für $x = 3\Delta x$ in $u_x = u_3$; und so fort. Der Ausdruck besteht aus den auf einander folgenden Gliedern u_0, u_1, u_2, u_3, ꝛc., von denen jedes eine ganze rationale Function der Veränderlichen x zum Coefficienten hat, und diese Functionen besitzen die Eigenschaft, daß sie sich auf die Einheit reduciren, wenn man für x denjenigen Werth setzt, welcher dem entsprechenden Gliede zugehört; dagegen zu Null werden, wenn man für x einen Werth setzt, der irgend einem anderen Gliede zugehört.

Will man nun unter der Voraussetzung, daß die Werthe von x nicht mehr in gleichen Intervallen, sondern vollkommen willkürlich wachsen, einen Ausdruck für u_x bilden, so denke man sich unter x_0, x_1, x_2, x_3, 2c. die Werthe von x, welche, in die Function u substituirt, resp. geben u_0, u_1, u_2, u_3, 2c. Man erhält sodann augenscheinlich einen Ausdruck, welcher dieselbe Eigenschaft besitzt wie vorhin, wenn man schreibt:

$$u_x = \left[\begin{array}{l} u_0 \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\ldots\ldots} \\ + u_1 \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots\ldots} \\ + u_2 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots\ldots} \\ + u_3 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots\ldots}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots\ldots} \\ + \text{2c.} \end{array}\right]$$

Diese Formel, welche Lagrange gegeben hat, kann zur Berechnung beliebiger zwischenliegenden Werthe der Function u dienen, wenn eine gewisse Anzahl von Werthen dieser Function gegeben ist, die bestimmten Werthen von x entsprechen. Es läßt sich übrigens beweisen, daß, wenn die Werthe x_0, x_1, x_2, x_3, 2c. eine arithmetische Progression bilden, diese Formel wieder mit der vorigen identisch wird.

§. 559. Eine der hauptsächlichsten Anwendungen der Interpolationsmethoden besteht in der Herstellung von Formeln, welche, aus den Resultaten einer gewissen Anzahl von Beobachtungen oder Versuchen hervorgegangen, wie der angenäherte Ausdruck des Gesetzes einer Erscheinung angesehen werden können. Solche Formeln dürfen in der Regel nicht über diejenigen Gränzen ausgedehnt werden, zwischen denen die erhaltenen Resultate eingeschlossen liegen. Wenn man die Zahlen, welche die Beobachtung liefert, wie vollkommen genau ansehen darf, und eine Formel herstellen will, die die=

sen Zahlen Genüge leistet, so gelangt man dazu unmittelbar durch das bisher aus einander gesetzte Verfahren. Man kann auch versuchen, diesen Zahlen durch andere Ausdrücke Genüge zu leisten, welche sich mehr der Natur der beobachteten Erscheinung anschließen. Aber in der Regel sind die numerischen Resultate mit Fehlern behaftet, und es würde nutzlos sein, wollte man Formeln construiren, welche mit allen Zahlen genau zusammenstimmten. Man sucht vielmehr in solchen Fällen diese Resultate zuvor durch eine regelmäßigere Reihe zu ersetzen, was entweder durch eine graphische Construction geschehen kann, oder auch dadurch, daß man mit allen Zahlen Aenderungen vornimmt, welche ihre Differenzen von den verschiedenen Ordnungen unter ein einfaches Gesetz bringen. Aenderungen dieser Art bleiben immer mehr oder weniger willkürlich, und müssen Regeln befolgen, welche aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgehen. *)

Angenäherte Quadraturen.

§. 560. Die numerischen Rechnungen zur Ausführung der Rectificationen, der Quadraturen, der Cubaturen, zur Bestimmung der Schwerpunkte, der Trägheitsmomente ꝛc. können immer auf die Werthbestimmung bestimmter Integrale wie

$$\int_a^b u dx$$

zurückgeführt werden, wo u eine Function von x bedeutet, und a und b die Gränzen des Integrals sind. Wenn diese Werthbestimmung nicht direct ausgeführt werden kann, so bedient man sich verschiedener Näherungsmethoden, welche im Wesentlichen darauf ausgehen, den Werth des Integrals aus der bloßen Kenntniß einer gewissen Anzahl von Werthen der Function u herzuleiten. Man denke sich x wie die Abscisse und u wie die davon abhängige Ordinate einer

*) Die Methode der kleinsten Quadrate gibt hierüber weiteren Aufschluß.

ebenen Curve; die in Rede stehenden Näherungsmethoden können sodann angesehen werden wie Methoden zur angenäherten Ausführung von Quadraturen.

Die obigen Interpolationsformeln führen unmittelbar zu einer Näherungsmethode von der angezeigten Art. Man nehme wieder an, die Veränderliche x wachse um die constante Differenz Δx, und kehre zu dem Ausdrucke für u_x im §. 553 zurück

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

Vermöge der Auffassungsweise, welche dem Interpoliren zum Grunde liegt, betrachtet man diese Formel wie die Darstellung aller Werthe der Function u, nicht allein für die Werthe 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, ꝛc. von x, sondern für jeden beliebigen Werth dieser Veränderlichen. Multiplicirt man also mit dx und integrirt zwischen den Gränzen a und b, so erhält man den Werth des vorgelegten Integrals.

Der vorstehende Ausdruck ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} u_x = u_0 &+ \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 \\ &+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ &+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ &+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 6\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\ &+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 + 35\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 50\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 24\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^5 u_0}{1.2.3.4.5} \\ &+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^6 - 15\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 + 85\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 225\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 274\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 120\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^6 u_0}{1.2.3.4.5.6} \\ &+ \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Multiplicirt man mit dx, und integrirt von $x=0$ bis $x=\Delta x$, so kommt

$$\int_0^{\Delta x} u dx = \Delta x \left[u_0 + \tfrac{1}{2}\Delta u_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 u_0 + \tfrac{1}{24}\Delta^3 u_0 - \tfrac{19}{720}\Delta^4 u_0 + \tfrac{3}{160}\Delta^5 u_0 - \tfrac{863}{60480}\Delta^6 u_0 + \text{ꝛc.}\right]$$

als Ausdruck für den Werth des ersten Theils des gegebenen Integrals, welcher zwischen den Gränzen 0 und Δx enthalten ist. Dieselbe Formel gibt die Ausdrücke der folgenden Theile dieses Integrals, wenn man u_1, u_2, u_3, ꝛc. an die Stelle von u_0 setzt. Man erhält also

$$\int_0^{n\Delta x} u dx = \Delta x \left[\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1} \\ + \tfrac{1}{2}(\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots + \Delta u_{n-1}) \\ - \tfrac{1}{12}(\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1}) \\ + \tfrac{1}{24}(\Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1}) \\ - \text{ꝛc.} \end{array}\right];$$

und wenn man beachtet, daß

$$\begin{aligned} \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} &= u_n - u_0, \\ \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} &= \Delta u_n - \Delta u_0, \\ \Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1} &= \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0, \end{aligned}$$

ꝛc.

so verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$\int_0^{n\Delta x} u dx =$$

$$\Delta x \left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1} + \tfrac{1}{2}u_n \\ - \tfrac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u_0) + \tfrac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0) - \tfrac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_0) \\ + \tfrac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \tfrac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u_0) + \text{ꝛc.} \end{array}\right]$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man den Werth des Integrals $\int u dx$ zwischen gegebenen Gränzen berechnen, indem man das Intervall dieser Gränzen in n gleiche Theile theilt, von denen jeder gleich Δx ist, und die Werthe u_0, u_1, u_2, u_3, ... u_n der Function u bestimmt, welche den Theilungspunkten entsprechen. Ein erster Näherungswerth wird durch das erste Glied der Entwickelung dargestellt

$$\Delta x \left(\tfrac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \tfrac{1}{2} u_n\right).$$

Dasselbe bedeutet den Inhalt einer Fläche, welche statt der Curve, deren Ordinate u ist, ein System von geraden Linien zur Begränzung hat, die die Endpunkte je zweier benachbarten unter den Ordinaten u_0, u_1, u_2, u_3, ꝛc. verbinden. Die folgenden Glieder bilden die Correction dieses Werths. Jenes Resultat wird also desto genauer sein, je größer die Zahl n angenommen wird, d. h. je kleiner die Differenzen werden, welche in dem Correctionsgliede enthalten sind.

§. 561. Die vorige Formel kann nur dann mit Nutzen angewandt werden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Ordnungen rasch genug abnehmen. Es läßt sich jedoch eine andere Formel herstellen, welche eine noch schnellere Annäherung liefert. Wenn man nämlich den vorigen Ausdruck für u_x wieder mit dx multiplicirt, und sodann von $x = 0$ bis $x = 2\Delta x$ integrirt, so kommt

$$\int_0^{2\Delta x} u dx = \Delta x \left[2u_0 + 2\Delta u_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^2 u_0 - \tfrac{1}{90}\Delta^4 u_0 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{90}\Delta^5 u_0 - \tfrac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{ꝛc.}\right],$$

oder weil $\Delta u_0 = u_1 - u_0$ und $\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$ ist,

$$\int_0^{2\Delta x} u dx = \Delta x \left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} u_0 + \tfrac{4}{3} u_1 + \tfrac{1}{3} u_2 \\ -\tfrac{1}{90}\Delta^4 u_0 + \tfrac{1}{90}\Delta^5 u_0 - \tfrac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{ꝛc.} \end{array}\right]$$

als Ausdruck für den ersten Theil des Integrals zwischen den Gränzen 0 und $2\Delta x$. Durch Vereinigung der ähnlichen Ausdrücke für die folgenden Theile des Integrals zwischen $2\Delta x$ und $4\Delta x$, $4\Delta x$ und $6\Delta x$, ꝛc. erhält man, wenn n als gerade Zahl vorausgesetzt wird,

$$\int_0^{n\Delta x} u dx =$$

$$\frac{\Delta x}{3}\left[\begin{array}{l} u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 4u_5 + \ldots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n \\ - \frac{1}{30}(\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_2 + \Delta^4 u_4 + \ldots + \Delta^4 u_{n-6} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-2}) \\ + \frac{1}{30}(\Delta^5 u_0 + \Delta^5 u_2 + \Delta^5 u_4 + \ldots + \Delta^5 u_{n-6} + \Delta^5 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-2}) \\ - \frac{37}{1260}(\Delta^6 u_0 + \Delta^6 u_2 + \Delta^6 u_4 + \ldots + \Delta^6 u_{n-6} + \Delta^6 u_{n-4} + \Delta^6 u_{n-2}) \\ + \text{2c.} \end{array}\right]$$

Die erste Reihe in diesem Ausdrucke, nämlich

$$\frac{\Delta x}{3}(u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + \ldots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n),$$

stellt den Inhalt derjenigen Fläche dar, welche man erhält, wenn man in dem Intervalle zwischen 0 und $2\Delta x$ statt der Curve, deren Ordinate u ist, den Bogen einer Parabel an die Stelle setzt, welcher durch die Endpunkte der drei Ordinaten u_0, u_1, u_2 geht; und ebenso in den übrigen Intervallen.*) Die folgenden Glieder bilden die Correction dieses Werthes, der schon sehr angenähert ist.

Man wird bemerken, daß der Gebrauch der vorstehenden Formeln die Kenntniß der Werthe u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, 2c. der Function u fordert, welche außerhalb der Gränzen des bestimmten Integrals liegen. Wenn die Function u in ihrer ganzen Ausdehnung gegeben ist, so hat dieser Umstand keine weiteren Schwierigkeiten zur Folge. Aber es verhält sich nicht mehr so, wenn, wie es zuweilen vorkommt, diese Function nur innerhalb der Gränzen des bestimmten Integrals gegeben ist. In einem solchen Falle hat man zu beachten, daß das Wesen der Interpolationsmethoden darin besteht,

*) Dies ist die bekannte Simpson'sche Formel zur angenäherten Flächenberechnung. Man gebraucht dieselbe überall, wo die Näherungsformel des vorigen Paragraphen, welche eine Verbindung der Endpunkte der einzelnen Ordinaten durch gerade Linien voraussetzt, keine hinreichende Genauigkeit gibt.

daß man die vorgelegte Function durch die gegebenen besonderen Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots . u_n$ wie vollkommen bestimmt ansehen muß. Nun ist die höchste Differenz, welche man vermittelst dieser Werthe berechnen kann, die Differenz $\Delta^n u_0$; man wird also diese Differenz als constant betrachten und daraus die folgenden Glieder, deren man für die in Rede stehenden Formeln bedarf, bestimmen.

XLII. Linien von gleichem Niveau und Linien des stärksten Abfalls auf gegebenen Flächen.

§. 562. Man denke sich die Punkte einer Fläche auf drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z bezogen. Die Abscissen x, y seien horizontal, die Ordinate z vertikal. Die Gestalt der Fläche wird sodann durch die Gleichung gegeben

$$z = f(x, y).$$

Wenn man den Abscissen x und y die unendlich kleinen Zunahmen dx und dy ertheilt, so wird die Ordinate z gleichfalls eine unendlich kleine Zunahme erhalten, welche ausgedrückt wird durch

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

wo $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ resp. die partiellen Differentialverhältnisse der Function $f(x, y)$ in Bezug auf x und y bedeuten.

Der Werth von dz hängt von dem Verhältnisse ab, welches man zwischen den willkürlichen Aenderungen dx und dy festgestellt hat. Wenn dieses Verhältniß von der Art ist, daß man hat $dz = 0$, d. h. wenn man hat

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = 0, \quad \text{woraus} \; \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

so gelangt man auf der gegebenen Fläche von einem Punkte zu einem anderen, ohne daß die Ordinate z ihren Werth ändert. Die vorstehende Gleichung ist also die Differentialgleichung der Horizontalprojection einer Linie von gleichem Niveau, welche durch einen Punkt der Fläche gelegt ist, dessen Coordinaten x, y, z sind.

Man erhält die Gleichung dieser Projection in endlicher Form, wenn man für z in der Gleichung $z = f(x, y)$ einen constanten Werth setzt, gleich der Ordinate desjenigen Punkts, durch welchen man die Linie von gleichem Niveau legen will.

§. 563. Wenn man von einem Punkte der gegebenen Fläche, dessen Coordinaten sind x, y, z, zu einem andern Punkte derselben übergeht, dessen Coordinaten sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, so durchläuft man in der Horizontalebene xy einen Weg $dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, und steigt in vertikalem Sinne um den Weg dz. Der Abfall der auf der Fläche durchlaufenen Linie, d. h. der Unterschied im Niveau ihrer beiden Endpunkte dividirt durch die Länge ihrer Horizontalprojection, wird also ausgedrückt durch

$$\frac{\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Die Größe dieses Abfalls ändert sich mit dem willkürlichen Verhältniß $\frac{dy}{dx}$. Will man die Richtung des stärksten Abfalls kennen lernen, so hat man das Differentialverhältniß des vorstehenden Ausdrucks, in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ als Veränderliche genommen, gleich Null zu setzen. Man erhält dadurch

$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{woraus} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx}}$$

als Differentialgleichung der Horizontalprojection einer Linie des stärksten Abfalls oder, was dasselbe sagen würde, der stärksten Ansteigung. Diese Linie stellt den Weg dar, welchen ein fallender Körper, sich selbst überlassen, auf der gegebenen Fläche zurücklegt. Auch erkennt man leicht in Verbindung mit dem vorigen Paragraphen, daß für jeden Punkt der gegebenen Fläche die Horizontalprojectionen der Linie von gleichem Niveau und der Linie des stärksten Abfalls, welche sich in diesem Punkte durchschneiden, und mithin auch diese Linien selbst, immer auf einander rechtwinklig stehen, wie sich übrigens auch direct zeigen läßt.

§. 564. Die Betrachtung der Linien von gleichem Niveau und der Linien des stärksten Abfalls findet Anwendung bei der graphischen Darstellung der Erdoberfläche *), so wie bei der Anlegung der Straßen und der Kanäle. Die Oberfläche der Erde zeigt abwechselnd Abfälle nach entgegengesetzten Seiten, auf denen sich Systeme von Linien des stärksten Abfalls angeben lassen, welche durch Linien von geringem Abfall von einander getrennt werden. Diese letzteren sind entweder Bergrücken oder Bergthäler, und bilden die Asymptoten der gewöhnlichen Linien des stärksten Abfalls. Wenn man eine bestimmte Linie von gleichem Niveau durchläuft, so haben alle Punkte, in denen sie von den Linien der Bergrücken und der Bergthäler geschnitten wird, die

*) Die bekannten Methoden des Bergzeichnens bei topographischen Aufnahmen beruhen allein auf der graphischen Darstellung dieser beiden Arten von Linien.

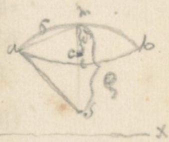
Eigenschaft, daß daselbst der Abfall ein Minimum ist. Außerdem gibt es bemerkenswerthe Punkte, in denen die Linien der Bergrücken und der Bergthäler sich unter rechten Winkeln schneiden, und zugleich die vertikale Ordinate der Fläche ein absolutes oder ein relatives Maximum oder Minimum ist. Die letzteren von diesen Punkten, wo der Gebirgszug einen Sattel bildet, zeigen die Stellen an, nach denen man den Lauf der Straßen oder Kanäle richten muß, wenn es sich darum handelt eine Bergkette zu durchschneiden.

XLIII. Von der Krümmung der Flächen.

---

§. 565. Die Krümmung einer Curve ist bekannt, sobald man den Halbmesser des Krümmungskreises bestimmt hat, d. h. desjenigen Kreises, welcher mit der Curve eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Krümmung einer Fläche ist gleichfalls bekannt, wenn man den Halbmesser des Krümmungskreises in jedem der Normalschnitte angeben kann, welche durch einen Punkt der Fläche gelegt werden können.

Wenn man durch die Normale eines Punkts m einer Fläche eine Ebene legt, so erhält man eine Schnittlinie, welche ein **Normalschnitt** der Fläche genannt werden kann. Denkt man sich ferner auf der Normale einen zweiten Punkt angenommen, welche von dem Punkte m den unendlich kleinen Abstand δ besitzt, und legt durch denselben eine Ebene rechtwinklig zur Normale, so erhält man eine neue Schnittlinie, welche nach Dupin den Namen der **indicatorischen Linie** führt, weil die Beschaffenheit dieser Linie, wie sich sogleich zeigen wird, auf die Gestalt der Fläche in der Nähe des Punktes m schließen läßt. Bezeichnet man überdies mit σ den unendlich kleinen Bogen, welcher zwischen dem Punkte m und demjenigen Punkte enthalten ist, wo der Normalschnitt die indicatorische Linie trifft, und nennt ϱ den Krümmungshalbmesser dieses Normalschnitts, so hat man



$$\sigma = \varrho \text{ arc cos}\left(1 - \frac{\delta}{\varrho}\right) = \varrho\sqrt{\frac{2\delta}{\varrho}},$$

und daraus

$$\varrho = \frac{\sigma^2}{2\delta}. \qquad \text{(a)}$$

$\sigma^2 = 2\varrho\delta$

$\varrho = \frac{\sigma^2}{2\delta}$

Die Krümmungshalbmesser der verschiedenen Normalschnitte sind also proportional den Quadraten der Bögen σ dieser Schnitte, vom Punkte m bis an die indicatorische Linie gerechnet; oder wenn man will, den Quadraten der halben Diameter der indicatorischen Linie, welche von den correspondirenden Bögen nur um eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung verschieden sind.

§. 566. Die Lage des Punktes m werde durch die Coordinaten x, y, z auf drei rechtwinklige Achsen bezogen, und es sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Man bezeichne ferner mit $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ die Coordinaten des Punkts, in welchem der Normalschnitt und die indicatorische Linie einander treffen. Da α und β sehr klein sind, so kann man ihre Potenzen und Producte im Vergleich mit den Potenzen und Producten von einer niedrigern Ordnung vernachlässigen. Ueberdies hat man nach der Formel des §. 138

$$\gamma = \frac{dz}{dx}\alpha + \frac{dz}{dy}\beta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2z}{dy^2}\beta^2\right),$$

wofür man einfacher schreiben kann

$$\gamma = p\alpha + q\beta + \tfrac{1}{2}(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2), \qquad \text{(b)}$$

indem man zur Abkürzung mit p und q die Differentialverhältnisse der ersten Ordnung $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, und mit r, s, t die Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ bezeichnet. Man kann α, β, γ wie Coordinaten ansehen, welche vom Punkte m aus auf Achsen gezählt werden, die den Achsen der x, der y und der z parallel sind. Die Gleichung (b) muß, in einer sehr geringen Ausdehnung um diesen Punkt, wie die Darstellung der gegebenen Fläche selbst angesehen werden.

Die Gleichung der berührenden Ebene im Punkte m der gegebenen Fläche ist nach §. 217

$$\gamma = p\alpha + q\beta. \tag{c}$$

Folglich muß die Ebene der indicatorischen Linie, welche parallel mit der berührenden Ebene in dem Abstande δ, in der Richtung der Normale gemessen, oder in dem Abstande $\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$, in der Richtung der Achse der z gemessen, gelegt worden ist, zur Gleichung haben

$$\gamma - \delta\sqrt{p^2+q^2+1} = p\alpha + q\beta. \tag{d}$$

Eliminirt man endlich γ aus den Gleichungen (b) und (d), so ist das Resultat dieser Elimination, nämlich

$$2\delta\sqrt{p^2+q^2+1} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \tag{e}$$

augenscheinlich die Gleichung der Projection der indicatorischen Linie auf die Ebene $\alpha\beta$. Man sieht daraus, daß der Abstand δ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, während α und β unendlich klein von der ersten Ordnung sind.

§. 567. Man hat ferner

$$\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \tag{f}$$

oder wenn man für γ seinen Werth aus der Gleichung (b) setzt und nur Größen der zweiten Ordnung im Vergleich mit α und β beibehält,

$$\sigma^2 = (1 + p^2)\,\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1 + q^2)\,\beta^2.$$

Also verwandelt sich der Ausdruck (a) für den Krümmungshalbmesser, indem man für σ^2 diesen Werth, und für 2δ den Werth aus der Gleichung (e) an die Stelle setzt, in

$$\varrho = \sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,\frac{(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2} \qquad \text{(g)}$$

Diese Formel gibt den Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnitts, sobald man das Verhältniß $\frac{\beta}{\alpha}$ festgestellt hat, d. h. die Projection der Tangente, welche im Punkte m an diesen Normalschnitt gelegt werden kann, auf die Ebene xy.

§. 568. Von einem Normalschnitte zum andern ändert sich der Krümmungshalbmesser proportional den Quadraten der halben Diameter der indicatorischen Linie. Diese Linie, deren Projection auf die Ebene xy durch die Gleichung (e) vom zweiten Grade gegeben wird, liegt immer symmetrisch in Bezug auf den Punkt m, und die Maximum- und Minimumwerthe des Krümmungshalbmessers*) entsprechen augenscheinlich ihren rechtwinkligen Diametern. Um dieselben auf möglichst einfache Weise zu finden, bemerke man, daß man durch Differentiation der Gleichungen (d) und (e), denen die Coordinaten der Punkte der indicatorischen Linie immer Genüge leisten müssen, erhält

$$d\gamma = pd\alpha + qd\beta,$$
$$0 = (r\alpha + s\beta)\,d\alpha + (s\alpha + t\beta)\,d\beta.$$

---

*) In dem besonderen Falle, wo die indicatorische Linie ein Kreis wird, wie z. B. in jedem Punkte einer Kugelfläche, findet offenbar ein Maximum oder Minimum des Krümmungshalbmessers nicht statt (m. s. §. 578).

Ferner wenn ϱ und folglich auch σ ein Maximum oder ein Minimum werden soll, so hat man vermöge der Gleichung (f)

$$0 = \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma,$$

oder wegen des vorstehenden Werthes von $d\gamma$

$$0 = (\alpha + p\gamma)\, d\alpha + (\beta + q\gamma)\, d\beta.$$

Mithin wird

$$\frac{\alpha+p\gamma}{r\alpha+s\beta} = \frac{\beta+q\gamma}{s\alpha+t\beta} = \frac{\alpha(\alpha+p\gamma)+\beta(\beta+q\gamma)}{\alpha(r\alpha+s\beta)+\beta(s\alpha+t\beta)}.$$

Nun ist die letzte von diesen drei Größen genau der zweite Factor des Ausdrucks (g) für den Krümmungshalbmesser ϱ. Bezeichnet man also mit R den Maximum- oder Minimumwerth des Krümmungshalbmessers, und setzt zur Abkürzung

$$Z = \frac{R}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

so kann man schreiben

$$Z = \frac{\alpha+p\gamma}{r\alpha+s\beta} \quad \text{und} \quad Z = \frac{\beta+q\gamma}{s\alpha+t\beta},$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} Z\,(r\alpha + s\beta) &= (1+p^2)\,\alpha + pq\beta \\ Z\,(s\alpha + t\beta) &= pq\alpha + (1+q^2)\,\beta \end{aligned}\right\}. \tag{h}$$

Man erhält daraus erstens durch Elimination von Z

$$-[(1+p^2)s - pqr]\alpha^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\alpha\beta + [(1+q^2)s - pqt]\beta^2 = 0,$$

und die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-[(1+q^2)r-(1+p^2)t] \pm \sqrt{N}}{2[(1+q^2)s-pqt]}, \tag{i}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$N = [(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2 + 4\,[(1+p^2)s - pqr][(1+q^2)s - pqt]$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$N=[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)$$

wie sich leicht nachweisen läßt.

Man erhält zweitens aus den Gleichungen (h) durch Elimination von α und β

$$(rt-s^2)Z^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]Z+p^2+q^2+1=0,$$

und daraus mit Rücksicht auf $R=Z\sqrt{p^2+q^2+1}$,

$$R=\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\pm\sqrt{N}}{2(rt-s^2)}, \quad \text{(k)}$$

wenn $rt-s^2>0$
~~$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t$~~ >0
so haben beide Krümmungshalbmesser einerlei Zeichen
wenn $rt-s^2<0$
so sind ihre Zeichen verschieden
§ 575. § 576
wenn $rt-s^2=0$
so ist ein Krümmungshalbmesser unendlich der andere endlich

wo N die vorige Bedeutung hat.

Die beiden in der Formel (i) enthaltenen Werthe bedeuten die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der rechtwinkligen Diameter der indicatorischen Linie, oder auch die Projectionen der Durchschnittslinien der berührenden Ebene der Fläche mit denjenigen Normalebenen, welche den größten und den kleinsten Krümmungshalbmesser in sich enthalten, auf die Ebene xy mit der Achse der x einschließen. Die beiden durch die Formel (k) gegebenen Werthe gehören diesen Krümmungshalbmessern selbst an, und werden die **Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers** genannt.

Man kann noch bemerken, daß die Formeln (i) und (k) immer reelle Werthe geben; denn man hat identisch

$$\begin{aligned}(1+p^2)^2\{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)\}=\\ \{(1+p^2)[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+2pq[pqr-(1+p^2)s]\}^2\\ +4(p^2+q^2+1)[pqr-(1+p^2)s]^2;\end{aligned}$$

folglich ist die vorhin mit N bezeichnete Größe stets positiv.

§. 569. Der Werth des Krümmungshalbmessers eines beliebigen Normalschnitts läßt sich sehr einfach durch die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers ausdrücken. Man denke sich nämlich die Lage der Coordinatenebenen so geändert, daß die Ebene xy parallel mit der berührenden

Ebene wird, welche man im Punkte m an die gegebene Fläche gelegt hat. Sodann wird für diesen Punkt $p=0$ und $q=0$, und die Gleichung (e), welche der indicatorischen Linie angehört, verwandelt sich in

$$2\delta = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

* braucht nicht der Transformation der Coordinaten

Wenn man ferner die Achsen der x und der y so legt, daß sie mit den rechtwinkligen Diametern der indicatorischen Linie zusammenfallen, so folgt aus dieser Gleichung, daß man haben wird $s=0$. Setzt man also $p=0$, $q=0$ und $s=0$, so hat man die nöthigen Bedingungen aufgestellt, damit die Ebenen xz und yz mit den Ebenen der Normalschnitte zusammenfallen, denen die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers angehören. In diesem Falle verwandelt sich der Ausdruck (g) für den Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnitts in

$$\varrho = \frac{\alpha^2+\beta^2}{r\alpha^2+t\beta^2};$$

und wenn man mit φ den Winkel bezeichnet, den die Ebene dieses Normalschnitts mit der Ebene xz einschließt, so nimmt er die Gestalt an

$$\varrho = \frac{1}{r\cos\varphi^2 + t\sin\varphi^2}.$$

$\alpha^2 = r^2\cos\varphi^2$
$\beta^2 = r^2\sin\varphi^2$

$\varrho = \frac{r^2}{r^2(r\cos\varphi^2 + t\sin\varphi^2)} =$

Man bemerke nun zunächst, daß dieser Ausdruck gibt

$$\frac{1}{\varrho} = r\cos\varphi^2 + t\sin\varphi^2,$$

und wenn man mit ϱ_1 den Krümmungshalbmesser für denjenigen Normalschnitt bezeichnet, dessen Ebene rechtwinklig auf der Ebene des Normalschnitts steht, auf welchen sich der Krümmungshalbmesser ϱ bezieht, so hat man

$$\frac{1}{\varrho_1} = r\sin\varphi^2 + t\cos\varphi^2.$$

Daraus folgt die bemerkenswerthe Beziehung

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}=r+t,$$

d. h. die Summe der umgekehrten Werthe der Krümmungshalbmesser, welche zwei auf einander rechtwinkligen Normalschnitten angehören, ist constant. Man hat also immer

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1},$$

wenn R und R_1 die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers bezeichnen.

Ferner ergibt sich aus der Gleichung des §. 568, welche den Ausdruck (k) für die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers geliefert hat, daß man immer haben muß

$$R+R_1=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}$$

$$RR_1=\frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2},$$

und folglich

$$\frac{R+R_1}{RR_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

§. 570. Wenn man jetzt in dem Ausdrucke des vorigen Paragraphen

$$\varrho=\frac{1}{r\cos\varphi^2+t\sin\varphi^2}$$

sowol $\varphi=0$ als $\varphi=\frac{\pi}{2}$ setzt, so erhält man

$$R=\frac{1}{r},\qquad R_1=\frac{1}{t}$$

als die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers, welche den beiden Normalschnitten angehören, die mit den Ebenen xz und yz zusammenfallen. Daraus folgt, daß man statt des vorigen Ausdrucks für ϱ schreiben kann

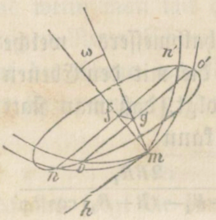
$$\varrho=\frac{RR_1}{R_1\cos\varphi^2+R\sin\varphi^2},\quad \text{oder}\quad \varrho=\frac{2RR_1}{R+R_1-(R-R_1)\cos 2\varphi}.$$

Man kennt also den Werth des Krümmungshalbmessers in jedem Normalschnitte, als Function der beiden Hauptwerthe R und R_1 des Krümmungshalbmessers, und des Winkels φ, welchen dieser Normalschnitt mit dem den Halbmesser R enthaltenden Normalschnitte einschließt.

Es folgt hieraus, daß wenn zwei Flächen in einem gegebenen Punkte einander berühren und zugleich einerlei Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers besitzen, diese Flächen sodann in dem angezeigten Punkte in jedem Sinne eine Berührung der zweiten Ordnung mit einander eingehen, d. h. daß allen Normalschnitten der beiden Flächen resp. gleiche Krümmungshalbmesser angehören. Ferner zeigt sich, daß in einer unendlich kleinen Ausdehnung um einen beliebigen Punkt m einer Fläche, man sich diese Fläche auf doppelte Weise durch die Rotation eines Kreisbogens beschrieben denken kann, nämlich 1) durch Rotation des größten Krümmungskreises um eine Achse, welche in seiner Ebene rechtwinklig zu der Normale liegt und durch den Mittelpunkt des kleinsten Krümmungskreises geht; 2) durch Rotation des kleinsten Krümmungskreises um eine Achse, welche in seiner Ebene rechtwinklig zu der Normale liegt und durch den Mittelpunkt des größten Krümmungskreises geht. Die beiden also beschriebenen Flächen haben augenscheinlich dieselben beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers wie die gegebene Fläche.

§. 571. Man betrachte jetzt, Fig. 55, einen Schnitt, welcher schief durch die gegebene Fläche geführt wird, nämlich vermittelst einer durch die Tangente mh des Normalschnitts nmn', dem der Krümmungshalbmesser ϱ angehört, gelegten Ebene. Es sei omo' der Durchschnitt dieser schiefen Ebene mit der Fläche, und oo' der Durchschnitt der nämlichen Ebene mit

Fig. 55.



der Ebene der indicatorischen Linie. Mit ω werde der Winkel bezeichnet, den die Normale mf mit dem Perpendikel mg einschließt, welches man in der schiefen Ebene auf der Tangente mh errichtet hat. Sucht man den Werth des Krümmungshalbmessers in dem schiefen Schnitte omo', so bemerke man, daß der Unterschied der Linien nf und og, oder der Bögen mn und mo, von derselben Ordnung ist wie der Abstand mf, d. h. unendlich klein im Vergleich mit diesen Bögen selbst. Man kann also mn für die Länge des Bogens mo nehmen; und mithin kann der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnitts omo', für welchen man nach §. 565 findet

$$\frac{\overline{mo}^2}{2.mg},$$

auch ausgedrückt werden durch

$$\frac{\overline{mn}^2}{2.\frac{mf}{\cos\omega}} = \varrho\cos\omega = \frac{RR_1\cos\omega}{R_1\cos\varphi^2 + R\sin\varphi^2}.$$

Diese Formel gibt auf eine sehr einfache Weise den Krümmungshalbmesser eines beliebigen schiefen Schnitts, den man in einer Fläche hervorbringen kann, ausgedrückt durch die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers, durch den Winkel φ, welchen die Tangente des schiefen Schnitts mit der Schnittebene einschließt, die den Halbmesser R in sich enthält, und endlich durch den Winkel ω, welcher zwischen der Ebene des schiefen Schnitts und der Normale der Fläche enthalten ist. Man sieht daraus sogleich, indem man den Winkel ω sich ändern läßt, daß der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Schnitte, welche man durch die gegebene Tangente einer Fläche legen kann, ein Kreis ist, welcher den Krümmungshalbmesser des Normalschnitts zum Durchmesser hat und dessen Ebene auf der gegebenen Tangente rechtwinklig steht. Die Kugelfläche bietet hiezu ein anschauliches Beispiel.

Von den Krümmungslinien.

§. 572. Die den rechtwinkligen Diametern der indicatorischen Linie entsprechenden Normalschnitte, denen die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers zugehören, haben eine besonders merkwürdige Eigenschaft. Es sei, Fig. 56, *nono* die indicatorische Linie, *m* der Mittelpunkt dieser Curve, und *nn* die Durchschnittslinie einer beliebigen Normalebene. Wollte man im Punkte *n* eine Normale an die Fläche legen, so müßte dieselbe zu gleicher Zeit auf der Tangente des in *nn* projicirten Normalschnitts, und auf der Tangente *nl* der indicatorischen Linie rechtwinklig stehen. Die Projection dieser Normale auf die Ebene der indicatorischen Linie würde also die Linie *nk* sein, welche auf *nl* rechtwinklig steht, und mithin könnte die in Rede stehende Normale im allgemeinen nicht mit derjenigen Normale der Fläche zusammentreffen, welche durch den Punkt *m* geht. Aber die beiden Normalen werden einander in dem besonderen Falle treffen, wenn die Projection *nn* des Normalschnitts mit einem der beiden rechtwinkligen Diameter *NN* und *N'N'* der indicatorischen Linie zusammenfällt. Mithin haben in jedem Punkte einer Fläche die beiden Normalschnitte, denen die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers angehören, vor allen übrigen Normalschnitten, die characteristische Eigenschaft, daß die Normale der Fläche in diesem Punkte die Normale in einem unendlich nahe liegenden Punkte schneidet, wenn man letzteren in einem jener beiden Normalschnitte angenommen hat. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen ist augenscheinlich der Krümmungsmittelpunkt des Schnitts.

Fig. 56.

Man kann zu dieser Eigenschaft auch auf folgendem Wege unmittelbar gelangen. In dem Punkte *m* der Fläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, denke man sich die Nor=

male construirt, und es seien x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Punkts dieser Normale. Die Gleichungen derselben sind sodann nach §. 217

$$x - x' + p(z - z') = 0$$
$$y - y' + q(z - z') = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichungen in Bezug auf x, y, z, indem man x', y', z' wie Constanten ansieht, so werden die erhaltenen Gleichungen einer unendlich nahe liegenden Linie angehören, die den beiden Bedingungen Genüge leistet, daß sie eine Normale der Fläche ist und mit der ersten Normale einen Punkt gemein hat. Diese Differentiation gibt

$$dx + dp(z - z') + pdz = 0$$
$$dy + dq(z - z') + qdz = 0;$$

oder wenn man beachtet, daß $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$,

$$(1 + p^2)dx + pqdy + (rdx + sdy)(z - z') = 0$$
$$pqdx + (1 + q^2)dy + (sdx + tdy)(z - z') = 0.$$

Eliminirt man jetzt $z - z'$ aus diesen beiden letzten Gleichungen, so erhält man

$$\left[(1+q^2)s - pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[(1+q^2)r - (1+p^2)t\right]\frac{dy}{dx} - \left[(1+p^2)s - pqr\right] = 0,$$

und dieser Gleichung muß mithin der Werth von $\frac{dy}{dx}$ Genüge leisten, welcher der Horizontalprojection derjenigen Curve angehört, in der man sich auf der Fläche fortbewegen muß, wenn der Bedingung Genüge geschehen soll, daß zwei unendliche nahe auf einander folgende Normalen in einerlei Ebene enthalten sind. Nun ist aber diese Gleichung genau übereinstimmend mit derjenigen des §. 568, welche die beiden Werthe des Verhältnisses $\frac{\beta}{\alpha}$ gibt, denen die Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers entsprechen. Auch ist unmittelbar zu erkennen, daß die beiden durch diese Gleichung gegebenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ zu zwei Linien gehören, die sich unter rechten Winkeln schneiden, sobald man nämlich wie im §. 569 die Lage der Coordinatenebenen so ändert, daß die Ebene xy parallel mit derjenigen Ebene wird, welche die Fläche im Punkte m berührt. Man hat alsdann $p=0$ und $q=0$, und die vorstehende Gleichung reducirt sich auf

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0;$$

denn zufolge der Theorie der Gleichungen ist, wenn $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\varphi$ gesetzt wird
$\mathrm{tg}\,\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_2 = -1$
$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi_1}$
am Krümmungs... daß die Projectionen der Normalschnitte ⊥ auf einander stehen.

die beiden Wurzeln derselben geben also die trigonometrischen Tangenten zweier Winkel, die um einen rechten Winkel von einander verschieden sind, d. h. die Richtungen der Curven, denen sie angehören, stehen auf einander rechtwinklig.

Eliminirt man ferner $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden oben gefundenen Gleichungen, so erhält man

$$(rt-s^2)(z-z')^2 + [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2,t](z-z') \\ + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert, in Verbindung mit den beiden Gleichungen der Normale, die Coordinaten x', y', z' des Durchschnittspunkts der beiden auf einander folgenden Normalen, oder mit anderen Worten des Krümmungsmittelpunkts. Da sie vom zweiten Grade ist, so hat jede dieser Coordinaten im allgemeinen zwei Werthe, so daß es auf der nämlichen Normale zwei Krümmungsmittelpunkte gibt, welche resp. den durch die vorige Gleichung bestimmten rechtwinkligen Normalschnitten angehören. In Betreff der Größe des Krümmungshalbmessers hat man offenbar, wenn man denselben wie oben mit R bezeichnet,

$$z' - z = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Mithin stimmt die so eben gefundene Gleichung mit derjenigen des §. 568 überein, aus welcher der Ausdruck (k) für die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers hergeleitet worden ist.

§. 573. Aus dem Bisherigen ergibt sich, daß man von jedem beliebigen Punkte einer Fläche aus in zwei Richtungen, die einen rechten Winkel mit einander einschließen, zu einem benachbarten Punkte der Fläche übergehen kann, welcher der Bedingung genügt, daß die Normalen dieser beiden Punkte in einerlei Ebene enthalten sind und einander schneiden. Ebenso kann man von diesem zweiten Punkte zu einem dritten Punkte übergehen, darauf zu einem vierten u. s. f., indem man immer dieselbe Bedingung festhält. Man erhält auf diese Weise auf der gegebenen Fläche eine zusammenhängende Linie, welche man Krümmungslinie genannt hat und deren Betrachtung von Wichtigkeit ist. Für jeden Punkt einer Fläche gibt es im allgemeinen zwei Krümmungslinien, die sich in diesem Punkte unter rechten Winkeln schneiden; entsprechend den beiden Normalschnitten der größten und der kleinsten Krümmung in diesem Punkte. Denkt man sich alle Krümmungslinien auf der Fläche gezeichnet, so zertheilen sie dieselbe in zwei Systeme von Zonen, deren Durchkreuzung rechtwinklige Figuren bildet.

Die vorhin gefundene Gleichung

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$-[(1+p^2)s-pqr]=0$$

ist die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die Ebene xy. Da dieselbe in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom zweiten Grade ist, so erhält ihr Integral nach §. 404 eine willkürliche Constante zum Quadrat erhoben; und wenn man diese Constante so bestimmen will, daß die Krümmungs=

linie durch einen gegebenen Punkt der Fläche geht, so findet man zwei Werthe, welche resp. den Krümmungslinien der beiden Systeme angehören.

Eliminirt man r und t mit Hülfe der Gleichungen $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, und mit Rücksicht auf $dz = pdx + qdy$, so nimmt die vorstehende Gleichung die Gestalt an

$$dp\,(dy + qdz) = dq\,(dx + pdz),$$

wie man übrigens auch unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen nachweisen kann.

§. 574. Die Untersuchung der verschiedenen Gestalten, welche die Curve annehmen kann, die den Namen der indicatorischen Linie führt, ist sehr geeignet, ein anschauliches Bild der verschiedenen Fälle zu geben, welche die Krümmung der Flächen darbietet. Die Gleichung (b) des §. 566, in welcher man nur die Glieder der zweiten Ordnung in Bezug auf α und β beibehalten hat, nämlich

$$\gamma = p\alpha + q\beta + \tfrac{1}{2}(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2),$$

stellt eine Fläche der zweiten Ordnung dar; es zeigt sich mithin, daß eine solche Fläche im allgemeinen nach allen Richtungen um einen gegebenen Punkt eine Berührung der zweiten Ordnung mit einer gegebenen Fläche eingehen kann. Die gegebene Fläche und die osculatorische Fläche der zweiten Ordnung müssen in einer unendlich kleinen Ausdehnung um den Punkt m als zusammenfallend angesehen werden, so daß die indicatorische Linie beiden gemeinschaftlich angehört. Die Gleichung der Projection der indicatorischen Linie auf eine Ebene, parallel mit der Ebene xy, ist in (e) §. 566 gegeben. Man kann sie einfacher schreiben

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

indem man zur Abkürzung $D = 2\delta\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ setzt; sie gibt, in Bezug auf β aufgelös't,

$$\beta = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt - (rt - s^2)\,\alpha^2}}{t}.$$

B = 2s A = r C = t

B² − 4AC = 4s² − 4rt

§. 575. Wenn die Function $rt - s^2$ positiv ist, so ist die indicatorische Linie eine Ellipse, und die osculatorische Fläche der zweiten Ordnung ein Ellipsoid. Alle Diameter der Ellipse sind reell, folglich die Quadrate dieser Diameter, denen die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte proportional sind, sämmtlich positiv. Die Krümmungen aller Normalschnitte sind nach einerlei Seite gerichtet. Dasselbe findet man auch aus dem Ausdrucke (k) des §. 568.

§. 576. Wenn die Function $rt - s^2$ negativ ist, so ist die indicatorische Linie eine Hyperbel, und die osculatorische Fläche der zweiten Ordnung ein Hyperboloid. Die reellen Diameter der Hyperbel haben positive Quadrate, dagegen die imaginären Diameter negative Quadrate, folglich sind die beiden Hauptkrümmungen der Fläche nach verschiedenen Seiten gerichtet; und überhaupt wenden unter den verschiedenen Normalschnitten die einen ihre Krümmung nach der einen Seite, die anderen nach der entgegengesetzten Seite. Die Asymptoten der Hyperbel, in deren Richtung die Krümmung gleich Null ist, trennen die Normalschnitte von einander, welche ihre Krümmung resp. nach der einen oder der anderen Seite wenden.

Man erhält die Richtung dieser Asymptoten, wenn man den Nenner des Ausdrucks (g) im §. 567 gleich Null setzt. Dies gibt

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Mithin gehört die Differentialgleichung

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

der Projection aller derjenigen Curven auf die Ebene xy an, die in der gegebenen Fläche enthalten und mit der Eigenschaft begabt sind, daß in ihrer Richtung die Krümmung gleich Null oder der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist.

Die Differentialgleichung

$$dz = pdx + qdy$$

gehört gleichmäßig der berührenden Ebene der Fläche im Punkte m und der Fläche selbst an; man erhält daraus

$$d^2z = dpdx + dqdy, \quad \text{oder} \quad d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2.$$

Da man nun für die berührende Ebene hat $d^2z = 0$, so wird man mithin durch Aufstellung der Gleichung

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$$

eine Beziehung zwischen dx und dy festsetzen, welche der Durchschnittslinie der gegebenen Fläche und ihrer berührenden Ebene angehört. Folglich haben alle Flächen von der in Rede stehenden Art, d. h. deren beide Hauptkrümmungen nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, in dem betreffenden Punkte die Eigenschaft, daß sie durch ihre berührende Ebene längs zwei Linien geschnitten werden, deren Richtungen mit den Asymptoten der indicatorischen Linie zusammenfallen.

z. B. hiperboloid à une nappe

$Mz^2 + Ny^2 - Px^2 - R = 0$

$x = 0$ $Mz^2 + Ny^2 = R$

$z = \pm\sqrt{\frac{R}{M}}$ $y = \pm\sqrt{\frac{R}{N}}$

$y = 0$ $Mz^2 - Px^2 = R$

$z =$ $a = \pm\sqrt{-\frac{R}{P}}$

Krüm. halbm. des Schnitts durch c u. b $\rho = \frac{b^2}{c}$

der des durch c u. a gelegten Schnitts $= \frac{a^2}{c}$

Der Winkel zwischen diesen Asymptoten gibt zugleich ein Urtheil über das Verhältniß der beiden Krümmungen. Denn da das Verhältniß der beiden Achsen der Hyperbel ausgedrückt wird durch die trigonometrische Tangente der Hälfte dieses Winkels, so wird das Verhältniß der beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers ausgedrückt werden durch das Quadrat dieser trigonometrischen Tangente.

§. 577. Wenn die Function $rt - s^2$ den Werth Null hat, so reducirt sich der Werth von β im §. 574 auf

$$\beta = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt}}{t},$$

daher ihr Verhältniß $= \frac{\frac{b^2}{c}}{\frac{a^2}{c}} = \frac{b^2}{a^2} = tg^2 \frac{\varphi}{2}$ wenn φ der Winkel zwischen den Asymptoten ~~der durch~~ in denen die Berührungsebene die Fläche schneidet.

und stellt ein System zweier geraden Linien dar, die mit der Achse der x einen Winkel einschließen, dessen trigonometrische Tangente $-\frac{s}{t}$ ist. Die indicatorische Linie wird also hier von zwei parallelen geraden Linien gebildet, und die osculatorische Fläche der zweiten Ordnung ist eine Cylinderfläche. Alle Diameter der indicatorischen Linie sind reell, folglich wendet die Fläche alle ihre Krümmungen nach derselben Seite; nur in der Richtung der in Rede stehenden geraden Linien hat die Krümmung den Werth Null. Denn wenn man in dem Ausdrucke (k) des §. 568, welcher die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers darstellt, $rt - s^2 = 0$ setzt, so wird eine Wurzel dieser Gleichung endlich und die andere unendlich, und beide haben gleiche Vorzeichen.

Die Eigenschaft, mit einer Cylinderfläche eine Berührung der zweiten Ordnung einzugehen, kommt allen Flächen zu, welche den Namen abwickelbare Flächen führen, und drückt ihren Charakter vollständig aus. Die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$rt - s^2 = 0,$$

welche diese Eigenschaft darstellt, entspricht allen Flächen dieser Art.

§. 578. Die beiden Werthe von R, welche der Ausdruck (k) des §. 568 gibt, sind einander gleich und von gleichem Vorzeichen, wenn man hat

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0.$$

Diese Gleichung drückt also die Bedingung aus, welche erfüllt sein muß, damit die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers einander gleich sind und einerlei Richtung haben. Der Ausdruck für ϱ im §. 570 zeigt, daß in diesem Falle die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte unter einander gleich sind. Die Punkte einer Fläche, in denen diese Eigenthümlichkeit eintritt, oder in denen die indicatorische Linie ein Kreis ist, sind gewöhnlich besonders merkwürdig; man hat ihnen den Namen **Nabelpunkte** (ombilics) gegeben.

Nach der Bemerkung am Schlusse des §. 568 kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn man nicht einzeln die beiden Gleichungen hat

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=0,$$
$$(1+p^2)s-pqr=0,$$

aus denen überdies folgt

$$(1+q^2)s-pqt=0.$$

Man kann sich übrigens auch außerdem leicht überzeugen, daß die Gleichheit der beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers immer die Existenz der Doppelgleichung

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}$$

zur Folge hat. Denn da die Formel des §. 570 zeigt, daß alsdann die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte unter einander gleich sind, so muß nothwendig das Verhältniß $\frac{\beta}{\alpha}$ aus dem Ausdrucke (g) des §. 567 verschwinden, was nur unter der angezeigten Voraussetzung möglich ist.

Diese Doppelgleichung macht die Gleichung des §. 568 identisch, von welcher der Ausdruck für $\frac{\beta}{\alpha}$ abhängt, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung des §. 572, von welcher der Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ abhängt, der die Richtungen der Krümmungslinien feststellt; man kann mithin daraus in Bezug auf diese Richtungen nichts schließen. Es gibt Nabelpunkte, durch welche nur eine einzige Krümmungs=

linie geht; andere, durch welche eine begränzte Anzahl von Krümmungslinien geht, die größer als zwei ist; endlich noch andere, in welchen unendlich viele Krümmungslinien sich in allen Richtungen durchkreuzen. Die Scheitel oder Pole der Rotationsflächen gehören unter diesen letzten Fall. Die Unterscheidung der verschiedenen Fälle, welche sich einstellen, kann aus der in Rede stehenden Gleichung selbst, nämlich

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$-[(1+p^2)s-pqr]=0,$$

abgeleitet werden, indem man sie wiederholt in Bezug auf x und y differentiirt und dabei $\frac{dy}{dx}$ als constant ansieht. Man erhält also Gleichungen des dritten, vierten 2c. Grades in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$, welche die Werthe liefern, aus denen die wahren Richtungen der Krümmungslinien erkannt werden können.

Die Kugelfläche ist die einzige Fläche, für deren sämmtliche Punkte man die Relation hat

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

§. 579. Die beiden Werthe von R, welche die Formel (k) des §. 568 gibt, sind einander gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen, wenn man hat

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

In diesem Falle sind die beiden Hauptkrümmungen einander gleich und nach entgegengesetzten Seiten gewandt. Die indicatorische Linie ist eine gleichseitige Hyperbel. Alle Normalschnitte, welche symmetrisch in Bezug auf die Achsen oder die Asymtoten dieser Hyperbel liegen, haben gleiche Krümmungen. Die Linien, in deren Richtung die Krümmung

Null ist, schneiden sich unter rechten Winkeln, gleichwie die Krümmungslinien.

Die vorstehende Gleichung fällt zusammen mit derjenigen, welche im §. 517 als Ausdruck der Bedingung gefunden wurde, daß der Inhalt der in einem beliebigen gegebenen Umrisse enthaltenen Fläche im Minimum sein soll. Alle Flächen, welche dieser Bedingung Genüge leisten, haben also die Eigenschaft, daß in allen ihren Punkten die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers einander gleich sind und entgegengesetzte Lage haben. Dies kann nicht direct bewiesen werden.

Von der Fläche, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte darstellt.

§. 580. In einer gegebenen Fläche werde ein Punkt *m* angenommen, und man denke sich die beiden Krümmungslinien, welche sich in diesem Punkte durchschneiden, und die Normalebene, welche in die Richtung der einen von diesen Krümmungslinien fällt. Wenn diese Ebene sich im Raume bewegt, ohne daß sie aufhört, normal auf der gegebenen Fläche zu sein und die betreffende Krümmungslinie zu berühren, so wird der von ihr beschriebene Raum von einer abwickelbaren Fläche eingehüllt werden, welche die gegebene Fläche unter rechten Winkeln schneidet. Diese abwickelbare Fläche ist der Ort aller Normalen der gegebenen Fläche, welche durch die Krümmungslinie gehen, und diese Normalen sind ihre charakteristischen Linien. Die Durchschnitte der auf einander folgenden Normalen bestimmen auf der abwickelbaren Fläche eine von den bemerkenswerthen Linien, welche den Namen der Rückkehrkanten führen.*) Die Rück-

*) Die Rückkehrkante hat in Bezug auf Flächen eine ähnliche Bedeutung wie der Rückkehrpunkt (§. 206 und 208) in Bezug auf Curven.

kehrkante ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte, welche den verschiedenen Punkten der Krümmungslinie zugehören, die als Leitlinie für die Bewegung der Normalebene gedient hat.

Denkt man sich ebenso die Normalebene der Fläche im Punkte *m*, welche in die Richtung der zweiten Krümmungslinie fällt, und läßt dieselbe sich bewegen, ohne daß sie aufhört, normal auf der Fläche zu sein und diese Krümmungslinie zu berühren, so erhält man eine andere abwickelbare Fläche, die der Ort der Normalen der gegebenen Fläche ist, welche durch die Punkte der zweiten Krümmungslinie gehen, und deren Rückkehrkante der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist, welche diesen Punkten zugehören.

Auf die angegebene Weise kann man sich im Raume alle abwickelbaren Flächen construirt denken, welche dem ersten Systeme der Krümmungslinien der gegebenen Fläche angehören, und ebenso alle abwickelbaren Flächen, welche dem zweiten Systeme dieser Krümmungslinien angehören. Die abwickelbaren Flächen des ersten Systems schneiden überall die des zweiten Systems unter rechten Winkeln. Die beiden Systeme der in Rede stehenden Flächen zerlegen den Raum in rechteckige Streifen, deren Länge in der Richtung der Normalen der gegebenen Fläche unendlich ist. Die Reihefolge der Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen, welche dem ersten Systeme angehören, bildet selbst eine neue Fläche, auf welcher sich alle Krümmungsmittelpunkte der einen Krümmung befinden. Die Reihefolge der Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen, welche dem zweiten Systeme der Krümmungslinien angehören, bildet gleichfalls eine neue Fläche, welche den Ort aller Krümmungsmittelpunkte der anderen Krümmung darstellt. Diese Flächen haben, als Ort der Krümmungsmittelpunkte, in Bezug auf die gegebene

Fläche dieselbe Bedeutung, wie die Evolute einer ebenen Curve in Bezug auf diese Curve.

§. 581. Die Gleichungen der genannten Flächen kann man auf folgende Weise erhalten. Man nehme die Gleichungen der Normale aus §. 572

$$\left.\begin{array}{l} x - x' + p(z - z') = 0 \\ y - y' + q(z - z') = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

und die ebendaselbst gefundenen Gleichungen

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0 \qquad (2)$$

$$(rt - s^2)(z - z')^2 + [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t](z - z') + 1 + p^2 + q^2 = 0. \qquad (3)$$

Die Differentialgleichung (2) zwischen den Veränderlichen x und y gehört den Projectionen der Krümmungslinien der gegebenen Fläche auf die Ebene xy an. Diese Gleichung ist in Bezug auf das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ von der ersten Ordnung und vom zweiten Grade, und ihr Integral wird mithin eine willkürliche Constante enthalten, die zur zweiten Potenz erhoben ist. Bestimmt man also diese Constante so, daß man die Krümmungslinie durch einen gegebenen Punkte gehen läßt, so findet man zwei Werthe, welche resp. den beiden Krümmungslinien entsprechen, die sich in jedem Punkte der Fläche schneiden.

Man bezeichne zur Abkürzung mit (2′) das allgemeine Integral der in Rede stehenden Gleichung (2). Sodann ist klar, daß die Elimination der Coordinaten x, y, z aus der Gleichung der gegebenen Fläche, den Gleichungen (1) und der Gleichung (2′) eine Gleichung liefert, welche die Coordinaten x', y', z' enthält und den abwickelbaren Flächen angehört, die die gegebene Fläche unter rechten Winkeln und längs ihren Krümmungslinien schneiden. Jede einzelne von diesen abwickelbaren Flächen wird dadurch erhalten, daß man die in ihr vorkommende willkürliche Constante angemessen bestimmt.

§. 582. Die Gleichung (3) ist eine primitive Gleichung zwischen x, y, z und z'. Sie muß den Werth von z' geben, welcher dem Durchschnittspunkte zweier auf einander folgenden Normalen angehört, d. h. dem Krümmungsmittelpunkte. Eliminirt man x, y, z aus der Gleichung der gegebenen Fläche, den Gleichungen (1) und der Gleichung (3), so erhält man mithin zwischen x', y', z' die Gleichung derjenigen Fläche, welche der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist. Diese Gleichung erhebt sich in Bezug auf z' bis zum zweiten Grade. Kann man sie in zwei Factoren zerlegen, so erhält man, indem man diese einzeln gleich Null setzt, die Gleichungen zweier Flächen, welche resp. die Mitttelpunkte der einen und der andern Krümmung der gegebenen Fläche in sich enthalten. Ist diese Zerlegung aber nicht möglich, so befinden sich die Mittelpunkte der beiden Krümmungen auf zwei Flächentheilen, welche einer einzigen Fläche angehören.

Jede Normale der gegebenen Fläche berührt zu gleicher Zeit die beiden Flächentheile, welche resp. die Mittelpunkte der einen und der anderen Krümmung in sich enthalten, und wenn man durch diese Normale zwei berührende Ebenen an diese beiden Flächentheile legt, so werden sich diese Ebenen unter rechten Winkeln schneiden. Mithin sind die beiden Flächentheile der Fläche, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte darstellt, immer von der Beschaffenheit daß, wenn man sie aus einem beliebigen Punkte betrachtet ihre scheinbaren Umrisse einander unter rechten Winkeln durchschneiden. Deßhalb ist nicht jede beliebige Fläche geeignet, den Ort der Krümmungsmittelpunkte einer anderen

Fläche abzugeben. Man kann den Ort der Mittelpunkte der einen Krümmung willkürlich annehmen; dagegen die Fläche, welche die Mittelpunkte der anderen Krümmung enthalten soll, muß so gewählt werden, daß ihr scheinbarer Umriß immer den scheinbaren Umriß der ersteren unter rechten Winkeln schneidet.

§. 583. Wenn die Fläche, welche die Mittelpunkte der einen Krümmung enthält, diejenige Fläche schneidet, welche die Mittelpunkte der anderen Krümmung in sich faßt, so werden die Durchschnittspunkte, die beiden Krümmungen gemeinschaftlich angehören, denjenigen Punkten der gegebenen Fläche entsprechen, in welchen die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers einander gleich sind. Diese Punkte werden nach §. 578 durch die Gleichung bestimmt

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0,$$

welche Gleichung die Projection der Linie der sphärischen Krümmungen der gegebenen Fläche auf die Ebene xy liefert.

§. 584. Jede von den Rückkehrkanten der abwickelbaren Normalflächen, deren Inbegriff die beiden Flächentheile derjenigen Fläche bildet, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte darstellt, ist auf dieser letztern Fläche eine Linie des kürzesten Abstandes. Denn die durch zwei auf einander folgende Normalen gelegte Ebene, welche einer von diesen abwickelbaren Normalflächen angehört, ist zu gleicher Zeit die Krümmungsebene der Rückkehrkante im Durchschnittspunkte dieser beiden Normalen, und steht in eben diesem Punkte rechtwinklig auf demjenigen Theile der den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildenden Fläche, in welchem diese Rückkehrkante liegt. Nun besteht aber das Kennzeichen der Linie des kürzesten Abstandes auf einer beliebigen Fläche eben darin, daß die Krümmungsebene dieser Linie zugleich normal auf der Fläche steht (s. §. 516).

Man denke sich einen Faden, dessen einer Endpunkt in einem Punkte der Durchschnittslinie der beiden Flächentheile befestigt ist, welche resp. die Mittelpunkte der einen und der anderen Krümmung in sich enthalten. Wenn man diesen Faden spannt, und ihn so bewegt, daß ein Theil desselben mit dieser Durchschnittslinie zusammenfällt und der freie Theil die Richtung ihrer Tangente hat, so wird der entgegengesetzte Endpunkt die Linie der sphärischen Krümmungen auf der gegebenen Fläche beschreiben. Wenn man ferner denselben Faden so bewegt, daß er zum Theil mit der Durchschnittslinie der beiden genannten Flächentheile zusammenfällt, und zum Theil in einen dieser beiden Flächentheile selbst, so läßt sich sein Endpunkt in alle Punkte der gegebenen Fläche bringen, welche mithin auf zwei verschiedene Weisen durch die Bewegung eines Fadens, den man über die den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildende Fläche spannt, beschrieben werden kann, gleichwie eine Curve durch die Bewegung eines über ihre Evolute gespannten Fadens beschrieben wird.

Beispiel zur Bestimmung der Krümmungslinien und Krümmungshalbmesser.

§. 585. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

wo a und b zwei positive Constanten bedeuten, und $a > b$ sein soll. Diese Fläche ist ein Paraboloid, dessen Hauptachse mit der Achse der z zusammenfällt. Alle Schnitte parallel mit der Ebene xy sind Ellipsen, deren beide Achsen in die Richtung der x und der y fallen. Die Länge der Halbachsen dieser Schnitte in der Richtung der x ist $\sqrt{2az}$, und die Länge der Halbachsen in der Richtung der y ist $\sqrt{2bz}$.

Man erhält

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{x}{a}, \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{y}{b},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = \frac{1}{a}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s = 0, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t = \frac{1}{b},$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung der Krümmungslinien substituirt, welche nach §. 572 ist

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0,$$

so erhält man

$$-\frac{xy}{ab^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a} - \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{b}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{a^2b} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $A = \frac{a}{b}$ und $B = a(a-b)$, so hat man einfacher

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 + B)\frac{dy}{dx} - xy = 0 \qquad \text{(m)}$$

als Gleichung der Projection der Krümmungslinien der gegebenen Fläche auf die Ebene xy.

Um diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie zuvor, wodurch man erhält

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 + B\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

und eliminire zwischen dieser Gleichung der zweiten Ordnung und der Gleichung (m) die Constante B. Dabei wird die Constante A gleichfalls wegfallen, und man erhält

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Factor $\frac{dx}{x^2}$ so kommt

$$\frac{xd.y\frac{dy}{dx} - y\frac{dy}{dx}d.x}{x^2} = 0,$$

wo die linke Seite ein genaues Differential von $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$ geworden ist. Integrirt man also zum ersten Male, so hat man

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\alpha, \quad \text{oder} \quad ydy=\alpha x dx,$$

und wenn man zum zweiten Male integrirt,

$$y^2=\alpha x^2+\beta,$$

wo α und β zwei Constanten sind.

Die Gleichung $y^2=\alpha x^2+\beta$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (m). Da aber die letztere Gleichung nur von der ersten Ordnung ist, so kann ihr Integral nur eine einzige willkürliche Constante enthalten, und eine der Constanten α und β wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Gleichung $y^2=\alpha x^2+\beta$ der Gleichung (m) Genüge leisten muß. Substituirt man also in diese Gleichung die Werthe

$$y=\pm\sqrt{\alpha x^2+\beta}, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}},$$

so erhält man die Bedingungsgleichung

$$A\alpha\beta-B\alpha+\beta=0,$$

woraus

$$\beta=\frac{B\alpha}{A\alpha+1}, \quad \text{d. h.} \quad \beta=\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}.$$

Die Gleichung der Krümmungslinien unter endlicher Form wird also

$$y^2=\alpha x^2+\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}, \tag{n}$$

worin α die willkürliche Constante ist.

§. 586. Will man die Constante α so bestimmen, daß die Gleichung (n) einer Krümmungslinie angehört, welche durch einen gegebenen Punkt der vorgelegten Fläche geht, dessen

19 *

Abscissen sind x' und y', so setze man in dieser Gleichung $x = x'$ und $y = y'$, und löse sie auf in Bezug auf α. Man erhält auf diese Weise

$$\alpha = -\frac{c}{2ax'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2ax'^2}\right)^2 + \frac{b}{a}\frac{y'^2}{x'^2}},$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$c = bx'^2 - ay'^2 + ab(a-b).$$

Demnach findet man immer für die Constante α zwei reelle Werthe, von denen der eine positiv und der andere negativ ist; und diese Werthe geben, wenn man sie in die Gleichung (n) substituirt, resp. die Gleichungen der Projectionen der beiden Krümmungslinien, welche sich in dem Punkte durchschneiden, dem die Abscissen x' und y' angehören.

Der positive Werth von α liefert, als Projectionen des ersten Systems der Krümmungslinien, Hyperbeln, deren reelle Achse in die Richtung der Achse der y fällt, und deren Gleichungen sind

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}.$$

Die Größe der Halbachse beträgt $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}}$. Der kleinste Werth, den diese Halbachse annehmen kann ist 0, und dies entspricht dem Falle, wo man x' sehr groß und y' sehr klein voraussetzt; die beiden Arme der Hyperbel fallen sodann mit der Achse der x zusammen. Der größte Werth, den diese Halbachse annehmen kann, ist $\sqrt{b(a-b)}$, welches dem Falle entspricht, wo der positive Werth von α unendlich groß wird, indem man x' sehr klein und y' sehr groß voraussetzt. Die Hyperbel fällt sodann in die Achse der y. Wenn man also auf der Achse der y zu beiden Seiten vom Anfangspunkte eine Strecke gleich $\sqrt{b(a-b)}$ abträgt, so erhält man zwei Punkte, über welche hinaus die Scheitel der Hyperbeln, die das erste System der Krümmungslinien geben, nicht liegen können.

Der negative Werth von α liefert, als Projectionen des zweiten Systems der Krümmungslinien, Ellipsen, deren beide Achsen in die Richtungen der Achsen der x und y fallen, und deren Gleichungen sind

$$y^2 = -\alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha - b}.$$

Die Größe der Halbachse, welche in die Achse der x fällt, beträgt $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a\alpha-b}}$, und die Größe der Halbachse, welche in die Achse der y fällt, beträgt $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}}$, so daß das Verhältniß dieser beiden Achsen gleich $\sqrt{\alpha}$ ist. Nimmt man x' sehr groß an, so wird der negative Werth von α sehr nahe gleich $\frac{b}{a}$, und dies ist der kleinste absolute Werth, den man dieser Größe beilegen kann. Je mehr x' abnimmt, desto mehr wächst der absolute Werth von α, vorausgesetzt daß die Größe c positiv bleibt; und unter derselben Voraussetzung wird α unendlich groß, wenn x' unendlich klein angenommen wird. Alsdann wird die Achse der Ellipse, welche in die Achse der x fällt, unendlich klein, und die Hälfte der Achse, welche in die Achse der y fällt, gleich $\sqrt{b(a-b)}$. Es ist übrigens nicht möglich, zu gleicher Zeit x' so klein und y' so groß anzunehmen, daß die Größe c negativ und folglich der Werth von α so klein werden kann als man will; denn die Gleichung der Krümmungslinien liefert nur imaginäre Werthe, wenn α negativ ist und zugleich einen absoluten Werth kleiner als $\frac{b}{a}$ besitzt. Die Punkte in der Achse der y, welche den Abstand $\sqrt{b(a-b)}$ vom Anfangspunkte haben, bilden hier eine gemeinschaftliche Gränze, die die Scheitel der beiden Systeme von Krümmungslinien in dem einen wie in dem andern Sinne nicht überschreiten können.

Die Achsen der x und der y gehören selbst zu der Zahl der Linien, welche die Projectionen der beiden Systeme der Krümmungslinien des Paraboloids bilden.

§. 587. Die allgemeine Gleichung der Projection der indicatorischen Linie

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$$

wird hier

$$D = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b};$$

diese Projection gehört immer einer Ellipse an, wie es auch die Natur der gegebenen Fläche mit sich bringt, deren beide Krümmungen in ihrer ganzen Ausdehnung nach einerlei Seite gewendet sind.

Was die Relation betrifft

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t},$$

welche nach §. 578 in den Nabelpunkten stattfinden muß, d. h. in denjenigen Punkten der Fläche, wo alle Krümmungshalbmesser einander gleich sind, so wird dieselbe

$$\frac{a^2+x^2}{a} = \frac{xy}{0} = \frac{b^2+y^2}{b}.$$

Dieser Relation kann nur Genüge geschehen, wenn man setzt $x=0$ und $y=\sqrt{b(a-b)}$, d. h. in denjenigen Punkten der Fläche, welche die Scheitel der Ellipsen und der Hyperbeln von einander trennen, die resp. den beiden Systemen der Krümmungslinien angehören. Die beiden in Rede stehenden Punkte sind die einzigen Nabelpunkte, welche die gegebene Fläche besitzt. Die indicatorische Linie muß daselbst ein Kreis sein; und in der That ist in diesen beiden Punkten die berührende Ebene parallel den beiden Systemen von Ebenen, welche das Paraboloid in Kreislinien schneiden.

§. 588. Für die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers erhält man durch Substitution der Werthe der Differentialverhältnisse p, q, r, s, t aus §. 585 in den Ausdruck (k) des §. 568

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\,.\left[\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right)^2-4ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)}\right].$$

§. 589. Wenn die Fläche in ein Rotations-Paraboloid übergeht, so werden die beiden mit a und b bezeichneten Größen einander gleich. Der Ausdruck für α im §. 586 reducirt sich also auf

$$\alpha = -\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2}\right)^2+\frac{y'^2}{x'^2}}$$

oder

$$\alpha = -\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2} \pm \frac{x'^2+y'^2}{2x'^2}.$$

Der positive Werth von α ist hier $\frac{y'^2}{x'^2}$. Die Gleichung der hyperbolischen Projectionen des ersten Systems der Krümmungslinien reducirt sich demnach auf

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2}x^2,$$

und gehört dem Systeme zweier geraden Linien an, die sich im Anfangspunkte der Coordinaten schneiden.

Der negative Werth von α wird -1. Mithin verwandelt sich die Gleichung der elliptischen Projectionen des zweiten Systems der Krümmungslinien in

$$y^2 = -x^2 + \tfrac{0}{0}, \quad \text{oder} \quad y^2 + x^2 = \tfrac{0}{0},$$

welche Gleichung einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt und dessen Halbmesser willkürlich angenommen werden kann. Diese Resultate durfte man im Voraus erwarten, da die Krümmungslinien in jeder Rotationsfläche augenscheinlich mit den Meridianen und den Parallelkreisen derselben zusammenfallen müssen.

Der Abstand des Nabelpunkts vom Mittelpunkte, dessen Projection oben durch $\sqrt{b(a-b)}$ ausgedrückt worden ist, wird Null; die beiden Nabelpunkte fallen also in einen einzigen zusammen, welcher mit dem Pole der Rotationsfläche identisch ist.

Setzt man $a=b$ in dem Ausdrucke für R im §. 588, so wird derselbe

$$R=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+x^2+y^2}{a^2}}\cdot\left(\frac{2a^2+x^2+y^2}{a}\pm\frac{x^2+y^2}{a}\right).$$

Die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers im Rotations-Paraboloid werden also ausgedrückt durch

$$\frac{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \quad \text{und} \quad (a^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Gleichung der Parabel, deren Umdrehung um die Achse der z die Fläche hervorgebracht hat, ist

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a},$$

so erkennt man, daß der erste Ausdruck den Krümmungshalbmesser eines Meridians gibt, der zweite dagegen den Halbmesser der Krümmung im Sinne eines Parallel-Kreises. *)

---

*) Man darf diesen Halbmesser nicht verwechseln mit dem Krümmungshalbmesser des Parallelkreises selbst, welcher mit dem Halbmesser dieses Kreises identisch und also gleich $\sqrt{x^2+y^2}$ sein würde. Der Krümmungshalbmesser einer Fläche, welcher in einem gegebenen

Dieser letzte Ausdruck stellt den Werth der Normale einer Meridiancurve dar, wie es auch sein muß, da alle im Sinne der Parallelkreise geführten Schnitte ihre Krümmungsmittelpunkte in der Achse in der Rotationsfläche haben.

XLIV. Die einfachsten Flächen, deren partielle Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist.

§. 590. Man gehe zu den Betrachtungen der §§. 472 ꝛc. zurück. Jede Fläche kann allgemein wie die einhüllende Fläche des Raums angesehen werden, den eine andere Fläche durchläuft, welche sich entweder ohne Veränderung ihrer Gestalt nach einem gegebenen Gesetze bewegt, oder welche gleichfalls nach gegebenen Gesetzen zugleich ihre Lage und ihre Gestalt ändert. Die Gleichung der eingehüllten Fläche, in endlicher Form, werde ausgedrückt durch

$$F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ꝛc.}) = 0,$$

Punkte dieser Fläche die Krümmung im Sinne einer bestimmten Krümmungslinie mißt, ist im allgemeinen nicht einerlei mit dem Krümmungshalbmesser, den die Krümmungslinie selbst in dem gegebenen Punkte besitzt. Sollen beide Krümmungshalbmesser zusammenfallen, so muß die Normalebene der Fläche in dem gegebenen Punkte, welche in die Richtung der Tangente der Krümmungslinie fällt, eine Berührung der zweiten Ordnung mit dieser Krümmungslinie eingehen oder, was dasselbe sagt, mit der Krümmungsebene derselben identisch sein, wofür man nach §. 516 auch sagen kann, die Krümmungslinie muß eine Linie des kürzesten Abstandes auf der gegebenen Fläche sein. Diese Bedingung wird von den Meridiancurven der Rotationsflächen immer erfüllt, von den Parallelkreisen derselben dagegen im allgemeinen nicht.

wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punkts der Fläche bedeuten, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c. mehrere willkürliche Constanten, deren Werthe nach den verschiedenen Lagen oder den verschiedenen Gestalten, die die eingehüllte Fläche annehmen kann, sich verändern. Wenn man nun die Fläche, welche eine bestimmte Reihefolge von Lagen der eingehüllten Fläche einhüllt, betrachten will, um die Eigenschaften derselben zu untersuchen, so kann man in der vorstehenden Gleichung die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c. nicht mehr wie vollkommen willkürlich und unabhängig von einander ansehen; vielmehr muß man annehmen, daß diese Größen durch Relationen an einander gebunden sind, welche die in Rede stehende Reihefolge von Lagen vor allen übrigen hervorheben. Indem man also nur einen Parameter α unbestimmt läßt, wird man alle übrigen willkürlichen Größen β, γ, δ, 2c. wie gegebene Functionen $\varphi(\alpha), \chi(\alpha), \psi(\alpha)$, 2c. dieses Parameters ansehen, und mithin statt der obigen Gleichung als Darstellung der eingehüllten Fläche schreiben

$$F[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \chi(\alpha), \psi(\alpha), \text{2c.}] = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung für α alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man eine bestimmte Reihefolge von eingehüllten Flächen, welche von der Form der Functionen φ, χ, ψ, 2c. abhängig ist; und wenn diese Functionen willkürlich bleiben, so sind die also erhaltenen Resultate allgemein und gehören allen möglichen Flächen an, welche durch die Bewegung einer jeden eingehüllten Fläche beschrieben werden können, die in der Gleichung $F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{2c.}) = 0$ enthalten ist.

§. 591. Differentiirt man die Gleichung $F = 0$ in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen x und y einzeln genommen, so erhält man zwei neue Gleichungen, die der eingehüllten und der einhüllenden Fläche angehören, und mit deren Hülfe man zwei von den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c.

eliminiren kann. Wenn mithin die Gleichung $F=0$ nur zwei von diesen Constanten enthält, so bleibt eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche von den willkürlichen Constanten vollkommen frei ist, und folglich nicht nur allen in der Gleichung $F=0$ enthaltenen eingehüllten Flächen, sondern auch allen durch diese eingehüllten Flächen hervorzubringenden einhüllenden Flächen angehört, indem sie eine geometrische Eigenschaft ausspricht, die diesen Flächen ausschließlich zukommt und sie von allen anderen Flächen unterscheidet.

Wenn die Gleichung $F=0$ der eingehüllten Fläche drei willkürliche Constanten α, β, γ enthält, so reichen die Differentialgleichungen der ersten Ordnung im allgemeinen zur Elimination derselben nicht mehr aus; man muß alsdann zu den Gleichungen der zweiten Ordnung übergehen, und erhält eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung, die von den willkürlichen Constanten oder Functionen völlig frei ist und die geometrische Eigenschaft ausdrückt, welche allen einhüllenden Curven angehört und dieselben vor anderen auszeichnet.

Wenn die Gleichung $F=0$ vier willkürliche Constanten α, β, γ, δ enthält, so ist man zur Elimination derselben im allgemeinen genöthigt, zu den Differentialgleichungen der dritten Ordnung überzugehen; u. s. f. in den Fällen, wo eine größere Anzahl von willkürlichen Constanten vorliegt.

§. 592. Wenn die Gleichung der eingehüllten Fläche

$$F[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \chi(\alpha), \psi(\alpha), \text{2c.}] = 0$$

gegeben ist, so läßt sich daraus unmittelbar die allgemeine Gleichung der einhüllenden Fläche in endlicher Form herleiten. Der unendlich nahe liegenden eingehüllten Fläche gehört nämlich die Gleichung an $F + \frac{dF}{d\alpha}\, d\alpha = 0$, welche man ver=

möge der gegebenen Gleichung abkürzen kann in $\frac{dF}{d\alpha} = 0$; mithin stellt das System der Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0$$

die Durchschnittslinie dieser beiden eingehüllten Flächen dar, welche den Namen der charakteristischen Linie führt. Diese beiden Gleichungen liefern mithin alle möglichen charakteristischen Linien, welche der Reihefolge der Lagen der durch die Functionen φ, χ, ψ, 2c. bestimmten eingehüllten Fläche angehören, sobald man darin α alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. Da nun die einhüllende Fläche offenbar der Ort der charakteristischen Linien sein muß, so ist die Gleichung der einhüllenden Fläche das Resultat der Elimination von α aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

welche Elimination übrigens nur erst nach Feststellung der Functionen φ, χ, ψ, 2c. ausgeführt werden kann.

§. 593. Es gibt allgemein auf jeder einhüllenden Fläche, und folglich auch auf jeder beliebigen Fläche (da alle Flächen als einhüllende Flächen betrachtet werden können), verschiedene bemerkenswerthe Linien, deren geometrischer Charakter aus der bloßen Angabe der eingehüllten Fläche hervorgeht, und, gleichwie der geometrische Charakter der einhüllenden Fläche selbst, unabhängig von den willkürlichen Gesetzen bestehen bleibt, welche die Art der Bewegung dieser eingehüllten Fläche bestimmen. Die Differentialgleichungen dieser Linien können, wie man es in den §§. 478 2c. für die charakteristische Linie gesehen hat, aus der partiellen Differentialgleichung der Fläche hergeleitet werden, zu deren Integration sie dienen; auch kann man ihre Gleichungen in endlicher Form vermittelst derjenigen der eingehüllten Fläche erhalten.

Zunächst wird die charakteristische Linie durch das System der beiden Gleichungen dargestellt

$$F = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

welche nach der Bestimmung der Functionen φ, χ, ψ, 2c. alle charakteristischen Linien liefern, die irgend einer beliebigen einhüllenden Fläche angehören, indem man den Werth von α angemessen wählt.

§. 594. Man betrachte sodann die beiden auf einander folgenden charakteristischen Linien, welche aus dem Durchschneiden dreier auf einander folgenden eingehüllten Flächen, nämlich der ersten mit der zweiten, und der zweiten mit der dritten entstehen. Die Gleichungen dieser drei eingehüllten Flächen sind $F = 0$, $F + \frac{dF}{d\alpha}\, d\alpha = 0$, $F + 2\frac{dF}{d\alpha}\, d\alpha + \frac{d^2F}{d\alpha^2}\, d\alpha^2 = 0$, mithin wird die erste charakteristische Linie gegeben durch die beiden Gleichungen $F = 0$ und $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, und die zweite charakteristische Linie durch die beiden Gleichungen $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ und $\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0$. Diese beiden krummen Linien werden sich also im allgemeinen zu gleicher Zeit schneiden und berühren, und zwar in einem Punkte, welcher durch die Werthe von x, y, z bestimmt ist, die gleichzeitig den drei Gleichungen Genüge leisten

$$F = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0.$$

Setzt man nach und nach für α alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so werden die aus diesen drei Gleichungen hervorgehenden Werthe für x, y, z der Reihe von Punkten angehören, in denen jede charakteristische Linie von der benachbarten charakteristischen Linie geschnitten und berührt wird.

Die Reihefolge dieser Punkte bildet immer auf der einhüllenden Fläche eine bemerkenswerthe Linie, welche den Namen der Rückkehrkante führt. Die Rückkehrkanten zerlegen die Flächen in getrennte Flächentheile; sie werden von allen charakteristischen Linien berührt und sind, in Bezug auf diese, als einhüllende Linien anzusehen.

Da die Rückkehrkante den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen charakteristischen Linie, welche einem bestimmten Werthe von α entspricht, und der benachbarten charakteristischen Linie darstellt, so erhält man augenscheinlich die Gleichungen dieser Curve für eine bestimmte einhüllende Fläche, wenn man α aus den drei Gleichungen eliminirt

$$F=0, \frac{dF}{d\alpha}=0, \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0,$$

welche Elimination nur ausgeführt werden kann, nachdem man die Functionen φ, χ, ψ, ꝛc. festgestellt hat, welche die einhüllende Fläche bestimmen. Die beiden Gleichungen zwischen x, y, z, welche aus dieser Elimination hervorgehen, sind die Gleichungen der Rückkehrkante.

§. 595. Man betrachte ferner drei auf einander folgende charakteristische Linien, welche aus dem Durchschneiden von vier auf einander folgenden eingehüllten Flächen hervorgehen, deren Gleichungen sind

$$F=0,\ F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0,\ F+2\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2=0,$$

$$F+3\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+3\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2+\frac{d^3F}{d\alpha^3}d\alpha^3=0.$$

Wenn diese drei charakteristischen Linien sich in einem einzigen Punkte schneiden, was nur in ganz besonderen Fällen eintreten kann, so werden die Werthe von x, y, z, welche diesem Punkte angehören, zu gleicher Zeit den vorstehenden vier Gleichungen Genüge leisten. Eliminirt man also x, y, z, aus den vier Gleichungen

$$F=0,\quad \frac{dF}{d\alpha}=0,\quad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0,\quad \frac{d^3F}{d\alpha^3}=0,$$

so wird die Gleichung für α, welche nach dieser Elimination übrig bleibt, den Werth dieses Parameter geben, dem die charakteristische Linie entspricht, auf welcher sich der in Rede stehende Punkt befindet. Er wird also da liegen, wo diese charakteristische Linie die Rückkehrkante berührt. Punkte dieser Art sind immer besonders bemerkbar auf der Rückkehrkante, und in Bezug auf dieselbe entweder Beugungspunkte oder Rückkehrpunkte.

§. 596. Es geschieht zuweilen, daß die charakteristischen Linien einer einhüllenden Fläche sich nicht schneiden, und mithin die Fläche keine Rückkehrkante besitzt. Aber alsdann gibt es im allgemeinen einen Punkt in jeder charakteristischen Linie, in welchem sich dieselbe der benachbarten charakteristischen Linie mehr nähert als in jedem andern Punkte. Die Reihefolge dieser Punkte bildet auf der Fläche eine leicht unterscheidbare Linie (ligne de striction).

Cylinderflächen.

§. 597. Eine Cylinderfläche, unter dem allgemeinsten Gesichtspunkte betrachtet, kann wie die einhüllende Fläche des durch eine Ebene beschriebenen Raums angesehen werden, wenn diese Ebene sich so bewegt, daß sie beständig einer als Leitlinie gegebenen geraden Linie parallel bleibt. Es seien die Gleichungen der Leitlinie

$$x=az,\quad y=bz,$$

und die Gleichung einer Ebene sei

$$z=Ax+By+C,$$

so wird diese Ebene jener geraden Linie parallel sein, wenn die Relation besteht

$$1=Aa+Bb,$$

mit deren Hülfe man eine der Constanten A und B eliminiren kann. Eliminirt man z. B. A, so kommt

$$z = \frac{1 - Bb}{a} x + By + C$$

als Gleichung einer jeden Ebene, die der gegebenen geraden Linie parallel ist. Diese Gleichung ist hier die der eingehüllten Fläche, und B und C sind die beiden willkürlichen Constanten, welche die Lage derselben feststellen. Eliminirt man also diese beiden Constanten aus der gefundenen Gleichung und ihren beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - Bb}{a} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = B,$$

so erhält man die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

welche eben sowol der eingehüllten wie der einhüllenden Fläche angehört, d. h. sowol der beweglichen Ebene, als auch einer jeden durch diese Ebene beschriebenen Cylinderfläche.

Es läßt sich übrigens auch unmittelbar leicht erkennen, daß die zuletzt gefundene Gleichung einer jeden Cylinderfläche angehört, deren Seitenlinien parallel mit derjenigen geraden Linie sind, welche die Gleichungen hat $x = az$ und $y = bz$; wenn man nämlich beachtet, daß jede berührende Ebene dieser Fläche mit der in Rede stehenden geraden Linie parallel sein muß.

§. 598. Um die vorstehende Gleichung zu integriren, hat man gemäß den Auseinandersetzungen der §§. 478 rc. die Differentialgleichungen der charakteristischen Linie zu bilden, welche hier werden

$$\begin{aligned} ady - bdx &= 0 \\ adz - \ dx &= 0 \\ bdz - \ dy &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gehören augenscheinlich einer geraden Linie an, welche mit der Leitlinie parallel ist, und man hätte sie auch unmittelbar hinschreiben können, wenn man die einfache Bemerkung machte, daß die charakteristische Linie durch den Durchschnitt zweier mit jener Linie parallelen Ebenen zu Stande kommt. Integrirt man die beiden letzteren Gleichungen, so kommt

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta,$$

wo α und β die beiden willkürlichen Constanten sind. Das allgemeine Integral ist also

$$y - bz = \varphi\,(x - az),$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet. Diese Gleichung gehört einer jeden Cylinderfläche an, deren erzeugende Linie parallel mit der gegebenen Leitlinie ist. Sie besitzt denselben Grad von Allgemeinheit wie die partielle Differentialgleichung $a\dfrac{dz}{dx} + b\dfrac{dz}{dy} = 1$. Man kann sie unmittelbar finden, wenn man bemerkt, daß die Gleichungen einer beliebigen erzeugenden Linie dargestellt werden können durch

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta,$$

wo α und β zwei unbestimmte Constanten sind. Wenn nun ein Punkt sich auf der Cylinderfläche bewegt, ohne diese erzeugende Linie zu verlassen, so werden seine Coordinaten fortwährend diesen beiden Gleichungen Genüge leisten. Wenn aber der Punkt bei seiner Bewegung zu den benachbarten erzeugenden Linien übergeht, so können seine Coordinaten nicht mehr diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, wenn man nicht zugleich auch α und β sich ändern läßt. Folglich bleiben diese Größen constant, oder sie ändern sich gleichzei=

tig; sie sind also Functionen von einander, und man kann schreiben $\beta = \varphi(\alpha)$, oder

$$y - bz = \varphi\,(x - az).$$

§. 599. Die Gleichung

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1, \text{ oder } ap + bq = 1$$

gibt, wenn man sie in Bezug auf x und auf y differentiirt,

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + b\frac{d^2z}{dxdy} = 0, \text{ oder } ar + bs = 0$$

$$a\frac{d^2z}{dxdy} + b\frac{d^2z}{dy^2} = 0, \text{ oder } as + bt = 0.$$

Man hat also $rt - s^2 = 0$, welches die allgemeine Gleichung der abwickelbaren Flächen ist. Die Cylinderflächen besitzen also in Betreff ihrer Krümmung die im §. 577 angezeigten Eigenschaften.

§. 600. Die Function φ in der allgemeinen Gleichung der Cylinderflächen

$$y - bz = \varphi\,(x - az)$$

kann durch verschiedene Bedingungen bestimmt werden. Wenn die Fläche durch eine gegebene krumme Linie gehen soll, deren Gleichungen sind $\chi\,(x, y, z) = 0$ und $\psi\,(x, y, z) = 0$, so ist klar, daß diese Gleichungen und die beiden Gleichungen der erzeugenden Linie $x = az + \alpha$ und $y = bz + \varphi(\alpha)$ müssen durch die nämlichen Werthe von x, y, z befriedigt werden können, wie auch die Constanten α und $\varphi(\alpha)$ beschaffen sein mögen. Eliminirt man also x, y, z aus den vier Gleichungen

$$\chi\,(x, y, z) = 0$$
$$\psi\,(x, y, z) = 0$$
$$x - az = \alpha$$
$$y - bz = \varphi(\alpha),$$

so erhält man eine Gleichung zwischen α und $\varphi(\alpha)$, welche die Function φ bestimmt. Es sei $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$ diese Gleichung, so wird die gesuchte Gleichung der Cylinderfläche

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

§. 601. Wenn die Cylinderfläche mit einer gegebenen krummen Fläche, deren Gleichung ist $\chi(x, y, z) = 0$, eine Berührung eingehen soll, so bemerke man, daß die beiden Flächen in allen Punkten der Berührungslinie einerlei berührende Ebene besitzen. Folglich müssen die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, welche sich aus der Gleichung $\chi(x, y, z) = 0$ ergeben, für alle in Rede stehenden Punkte der Differentialgleichung der Cylinderfläche Genüge leisten. Man findet also eine Gleichung $\Psi(x, y, z) = 0$ der Berührungslinie, indem man die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus der gegebenen Gleichung $\chi(x, y, z) = 0$ nimmt und dieselben in die partielle Differentialgleichung $a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$ substituirt. Damit hat man zwei Gleichungen $\chi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$, die einer Curve angehören, durch welche die gesuchte Cylinderfläche gehen soll; man wird also jetzt verfahren, wie im vorigen Paragraphen.

Kegelflächen.

§. 602. Eine Kegelfläche ist die einhüllende Fläche des durch eine Ebene beschriebenen Raums, wenn diese Ebene beständig durch einen gegebenen Punkt geht. Dieser Punkt ist die Spitze oder der Mittelpunkt der Fläche. Es seien a, b, c seine Coordinaten; die Gleichung der beweglichen Ebene oder der eingehüllten Fläche wird sodann

$$z - c = A(x - a) + B(y - b),$$

wo A und B zwei willkürliche Constanten sind. Man erhält aus dieser Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dy} = B,$$

und folglich gibt die Elimination dieser beiden Constanten als partielle Differentialgleichung der Kegelflächen, wenn diese unter dem allgemeinsten Gesichtspunkte betrachtet werden,

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c.$$

Man hätte diese Gleichung auch unmittelbar durch die einfache Bemerkung finden können, daß jede berührende Ebene der Kegelfläche durch den Mittelpunkt gehen muß, dessen Coordinaten sind a, b, c.

§. 603. Die Gleichungen der charakteristischen Linie werden hier

$$(x-a)\,dy-(y-b)\,dx=0$$
$$(x-a)\,dz-(z-c)\,dx=0$$
$$(y-b)\,dz-(z-c)\,dy=0;$$

sie gehören augenscheinlich den Projectionen einer geraden Linie an, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten a, b, c sind. Man erhält aus den beiden letzteren

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha$$

$$\frac{y-b}{z-c}=\beta,$$

wo α und β zwei willkürliche Constanten bedeuten; und folglich wird das allgemeine Integral der Gleichung des vorigen §., oder die Gleichung einer jeden Kegelfläche

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

worin φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Man kann diese Gleichung auch unmittelbar herleiten. Man bemerke nämlich, daß wenn ein Punkt sich auf einer Kegelfläche bewegt, die beiden Verhältnisse $\frac{x-a}{z-c}$ und $\frac{y-b}{z-c}$ constant bleiben, so lange dieser Punkt eine gewisse Seitenlinie nicht verläßt, daß sie dagegen beide sich verändern, wenn der in Rede stehende Punkt von einer Seitenlinie zu einer andern übergeht. Diese Verhältnisse bleiben also constant oder verändern sich gleichzeitig, und sind mithin Functionen von einander für alle Werthe von x, y, z, welche der Gleichung einer Kegelfläche Genüge leisten.

§. 604. Die Gleichung

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c, \text{ oder } (x-a)p+(y-b)q=z-c$$

gibt durch Differentiation in Bezug auf x und y

$$(x-a)\frac{d^2z}{dx^2}+(y-b)\frac{d^2z}{dxdy}=0, \text{ oder } (x-a)r+(y-b)s=0$$

$$(x-a)\frac{d^2z}{dxdy}+(y-b)\frac{d^2z}{dy^2}=0, \qquad (x-a)s+(y-b)t=0,$$

woraus folgt $rt-s^2=0$, welche Relation allen abwickelbaren Flächen angehört. Man kann hier dieselbe Bemerkung machen wie im §. 599.

§. 605. Wenn in der allgemeinen Gleichung

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

die Function φ durch die Bedingung bestimmt werden soll, daß die Kegelfläche durch eine gegebene Curve gehe, deren Gleichungen sind $\chi(x, y, z)=0$ und $\psi(x, y, z)=0$, so müssen die Gleichungen der erzeugenden Linie zugleich mit diesen beiden Gleichungen bestehen. Wenn man also die vier Gleichungen aufstellt

$$\chi(x, y, z)=0$$
$$\psi(x, y, z)=0$$
$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha$$
$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi(\alpha),$$

und daraus die Größen x, y, z eliminirt, so bleibt ein

Gleichung, die man mit $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$ bezeichnen kann. Die Gleichung der gesuchten Kegelfläche wird mithin

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

§. 606. Wenn die Function φ durch die Bedingung bestimmt werden soll, daß die Kegelfläche eine gegebene Fläche berühre, deren Gleichung ist $\chi(x, y z) = 0$, so erkennt man wie im §. 601, daß man eine zweite Gleichung $\psi(x, y, z) = 0$ der Berührungslinie erhält, wenn man die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus der gegebenen Gleichung $\chi(x, y, z) = 0$ nimmt und dieselben in die Differentialgleichung $(x-a)\frac{dz}{dx} + (y-b)\frac{dz}{dy} = z - c$ substituirt. Die Aufgabe wird damit auf den Fall des vorigen Paragraphen zurückgeführt.

Rotationsflächen.

§. 607. Eine Rotationsfläche ist die einhüllende Fläche des durch eine Kugel beschriebenen Raums, wenn der Mittelpunkt derselben sich auf einer geraden Linie bewegt, welche die Achse der Fläche ist, und ihr Halbmesser sich nach irgend einem Gesetze verändert. Die gegebenen Gleichungen der Achse der Fläche seien

$$x' = Az' + a$$
$$y' = Bz' + b.$$

Die Gleichung einer Kugel vom Halbmesser r, deren Mittelpunkt auf dieser Achse liegt, wird sodann

$$(x - Az' - a)^2 + (y - Bz' - b)^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Kugel bedeuten. Diese Gleichung gehört also hier der eingehüllten Fläche an, und z' und r sind die beiden willkürlichen Constanten, welche so bestimmt werden können, daß man irgend eine beliebige eingehüllte Fläche erhält. Diffe=

rentiirt man die genannte Gleichung in Bezug auf x und auf y, so kommt

$$x - Az' - a + (z - z')\frac{dz}{dx} = 0$$

$$y - Bz' - b + (z - z')\frac{dz}{dy} = 0,$$

und daraus hat man durch Elimination von z'

$$(y - b - Bz)\frac{dz}{dx} - (x - a - Az)\frac{dz}{dy} = B(x - a) - A(y - b)$$

als partielle Differentialgleichung aller Rotationsflächen.

Man kann diese Gleichung auch durch die Bemerkung erhalten, daß in jedem Punkte einer Rotationsfläche die berührende Ebene rechtwinklig steht auf der Meridianebene, d. h. auf der Ebene, welche durch die Achse der Fläche und den in Rede stehenden Punkt gelegt worden ist. Die Gleichung einer Meridianebene, welche durch den Punkt der Fläche geht, dessen Coordinaten sind x, y, z, kann dargestellt werden durch

$$z' - z = M(x' - x) + N(y' - y),$$

wo die Constanten M und N so zu bestimmen sind, daß die Ebene gleichfalls durch die Achse der Fläche geht. Diese Bedingung liefert die zweite Gleichung

$$z' - z = M(Az' + a - x) + N(Bz' + b - y),$$

welche für jeden Werth von z' Gültigkeit behalten muß. Sie zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$1 = MA + NB \quad \text{und} \quad -z = M(a - x) + N(b - y),$$

aus denen folgt

$$M = \frac{y - b - Bz}{B(a - x) - A(b - y)}$$

$$N = -\frac{x - a - Az}{B(a - x) - A(b - y)}.$$

Aber die Gleichung der berührenden Ebene ist

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y).$$

und dieselbe wird rechtwinklig auf der Meridianebene stehen, wenn man die Beziehung hat

$$M\frac{dz}{dx} + N\frac{dz}{dy} + 1 = 0;$$

setzt man aber hierin für M und N die gefundenen Werthe, so hat man wieder die obige Gleichung.

Man kann dieselbe Gleichung auch aus der allgemeinen Eigenschaft der Rotationsflächen herleiten, welche darin besteht, daß die Normale eines beliebigen Punkts der Fläche immer die Achse trifft. Die Gleichungen der Normale sind allgemein

$$x' - x + \frac{dz}{dx}(z' - z) = 0$$

$$y' - y + \frac{dz}{dy}(z' - z) = 0;$$

es müssen also die nämlichen Werthe von x', y', z', zugleich diesen Gleichungen und denen der Achse Genüge leisten. Wenn man nun x', y', z' aus diesen vier Gleichungen eliminirt, so erhält man wieder die in Rede stehende partielle Differentialgleichung.

§. 608. Die Integration der Gleichung

$$(y - b - Bz)\frac{dz}{dx} - (x - a - Az)\frac{dz}{dy} = B(x - a) - A(y - b)$$

ist vermöge der §§. 478 rc. abhängig von den Gleichungen

$$(y - b - Bz)\,dy + (x - a - Az)\,dx = 0$$

$$(y - b - Bz)\,dz - [B(x - a) - A(y - b)]\,dx = 0$$

$$-(x - a - Az)\,dz - [B(x - a) - A(y - b)]\,dy = 0,$$

welche der charakteristischen Linie angehören. Diese Gleichungen können nicht unmittelbar integrirt werden. Wenn man aber die beiden letzteren addirt, nachdem man die erste mit A und die zweite mit B multiplicirt hat, und wenn man sie nochmals addirt, nachdem man die erste mit $x-a$ und die zweite $y-b$ multiplicirt hat, so erhält man

$$Adx + Bdy + dz = 0$$
$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + zdz = 0,$$

und daraus durch Integration

$$Ax + By + z = \alpha$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \beta,$$

wo α und β zwei willkürliche Constanten sind. Die eine von diesen Gleichungen gehört einer beliebigen Ebene an, welche auf der gegebenen Achse der Rotationsfläche rechtwinklig steht; die andere einer Kugel von beliebigem Halbmesser, deren Mittelpunkt die Coordinaten a, b, 0 hat d. h. mit demjenigen Punkte zusammenfällt, wo diese Achse die Ebene xy trifft. Man erkennt also, daß die charakteristische Linie immer ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt und dessen Ebene rechtwinklig auf dieser Achse steht. Ueberdies erhält man als allgemeine Gleichung der Rotationsflächen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi\,(Ax + By + z).$$

wo φ wie bisher eine willkürliche Function bezeichnet.

Man findet diese Gleichung unmittelbar durch die Bemerkung, daß wenn ein Punkt auf der Fläche sich bewegt, ohne eine bestimmte charakteristische Linie zu verlassen, d. h. ohne aus einem bestimmten Schnitte, der rechtwinklig zur Achse liegt, oder einem bestimmten Parallelkreise herauszugehen, die beiden Größen $Ax + By + z$ und $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2$ constante Werthe behalten, während diese Größen sich beide ändern, wenn der Punkt von einer charakteristischen Linie zu einer anderen übergeht; woraus folgt, daß die eine von diesen Größen nothwendig eine Function der anderen ist.

§. 609. Die willkürliche Function φ in der vorstehenden Gleichung kann durch die Bedingung bestimmt werden, daß die Fläche durch eine gegebene Curve gehen soll, deren Gleichungen sind $\chi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$, d. h. daß die Fläche soll beschrieben gedacht werden durch Umdrehung dieser Curve um die Achse. Da hier alle charakteristischen Linien die gegebene Curve treffen müssen, so muß es Werthe von x, y, z geben, welche gleichzeitig den vier Gleichungen Genüge leisten

$$\chi(x, y, z) = 0$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$
$$Ax + By + z = \alpha$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi(\alpha).$$

Eliminirt man aber x, y, z aus diesen Gleichungen, so bleibt eine Relation zwischen α und $\varphi(\alpha)$, die man mit $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$ bezeichnen kann und durch welche die Function φ bestimmt ist. Die Gleichung der gesuchten Fläche wird sodann

$$f[Ax + By + z, (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2] = 0.$$

§. 610. Die willkürliche Function in der Gleichung des §. 608 kann auch durch die Bedingung bestimmt werden, daß die Rotationsfläche eine gegebene Fläche einhüllen soll, deren Gleichung ist $\chi(x, y, z) = 0$, d. h. daß sie durch Umdrehung dieser Fläche um die Achse soll beschrieben gedacht werden. Es ist klar, daß die gesuchte Rotationsfläche die gegebene Fläche berühren muß, und daß man eine zweite Gleichung der Berührungslinie erhalten wird, wenn man die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus der Gleichung $\chi(x, y, z) = 0$ nimmt und dieselben in die Differentialgleichung

$$(y-b-Bz)\frac{dz}{dx}-(x-a-Az)\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b)$$

substituirt. Es sei $\psi(x, y, z)=0$ das Resultat dieser Substitution; der weitere Verlauf der Rechnung wird sodann wie in dem vorigen Paragraphen.

Windschiefe Fläche, beschrieben durch eine horizontale gerade Linie, welche immer durch dieselbe Vertikale geht.

§. 611. Man denke sich die Ebene xy horizontal und die Achse der z vertikal, und betrachte die Fläche, welche durch eine gerade Linie beschrieben wird, die beständig der Ebene xy parallel bleibt und durch die Achse der z geht. Diese Fläche wird im allgemeinen zu der Gattung der windschiefen Flächen gehören, indem sie das allgemeine Kennzeichen derselben trägt, daß je zwei auf einander folgende Lagen der erzeugenden geraden Linie nicht in derselben Ebene enthalten sind, oder, was dasselbe sagt, einander nicht schneiden.

Man betrachte zuerst die einhüllende Fläche des durch einen Cylinder vom Halbmesser r beschriebenen Raums, indem die Achse dieses Cylinders beständig der Ebene xy parallel bleibt, und durch die Achse der z geht. Die Gleichung dieses Cylinders oder der eingehüllten Fläche ist

$$\frac{(y-ax)^2}{a^2+1}+(z-c)^2=r^2,$$

wo a und c die beiden willkürlichen Constanten sind, von denen die erste die Tangente des Winkels bezeichnet, den die Achse des Cylinders mit der Ebene xz einschließt, und die zweite den Abstand dieser Achse von der Ebene xy. Bildet man die beiden Differentialgleichungen, so kommt

$$-\frac{(y-ax)a}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{y-ax}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dy}=0,$$

und daraus erhält man unmittelbar

$$(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+a\,\frac{dz}{dy}\right)=0$$

oder

$$\frac{dz}{dx}+a\,\frac{dz}{dy}=0, \quad \text{woraus} \quad a=-\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

welcher Werth in die Gleichung der eingehüllten Fläche substituirt werden muß. Aber wenn man den Halbmesser r unendlich klein annimmt, in welchem Falle die einhüllende Fläche des durch den Cylinder beschriebenen Raumes mit der gesuchten windschiefen Fläche zusammenfällt, so darf man in dieser Gleichung die Glieder $(z-c)^2$ und r^2 vernachlässigen; dieselbe verwandelt sich also, wenn man darin für a den vorstehenden Werth setzt, in

$$x\,\frac{dz}{dx}+y\,\frac{dz}{dy}=0,$$

welches die partielle Differentialgleichung der in Rede stehenden windschiefen Fläche ist.

Man kann zu demselben Resultate auch direct gelangen, wenn man von einer allgemeinen Eigenschaft der windschiefen Flächen ausgeht, welche darin besteht, daß die berührende Ebene in jedem Punkte einer solchen Fläche die erzeugende gerade Linie in sich enthält, welche durch diesen Punkt geht. Die allgemeine Gleichung der berührenden Ebene ist

$$z'-z=(x'-x)\,\frac{dz}{dx}+(y'-y)\,\frac{dz}{dy};$$

man erhält also

$$(x'-x)\,\frac{dz}{dx}+(y'-y)\,\frac{dz}{dy}=0$$

als Gleichung des Durchschnitts dieser Ebene mit einer durch den Berührungspunkt gelegten Horizontalebene. Da aber dieser Durchschnitt nichts anderes ist als die erzeugende Linie selbst, welche die Achse der z treffen soll, so muß ihrer Gleichung auch durch die Werthe $x' = 0$ und $y' = 0$ Genüge geschehen, und dies gibt wie oben

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0.$$

§. 612. Das allgemeine Integral dieser Gleichung erhält man durch Hülfe der beiden Gleichungen

$$xdy - ydx = 0, \quad \text{woraus} \quad \frac{y}{x} = \alpha$$

$$dz = 0, \qquad z = \beta,$$

wo α und β zwei willkürliche Constanten sind; und dies gibt für das gesuchte Integral

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo φ das Zeichen für eine willkürliche Function ist. Zu derselben Gleichung führt auch die unmittelbare Betrachtung der charakteristischen Linie, welche immer eine horizontale gerade Linie ist, deren Gleichungen sind $\frac{y}{x} = \alpha$ und $z = \beta$.

§. 613. Wenn die willkürliche Function so bestimmt werden soll, daß die windschiefe Fläche durch eine gegebene Curve gehe, deren Gleichungen sind $\chi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$, so läßt sich wie oben erkennen, daß man x, y, z aus den vier Gleichungen eliminiren muß

$$\chi(x, y, z) = 0$$

$$\psi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

$$z = \beta,$$

und daß, wenn man mit $f(\alpha, \beta) = 0$ das Resultat der Elimination bezeichnet, die Gleichung der gesuchten Fläche sein wird

$$f\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0.$$

§. 614. Wenn endlich die willkürliche Function so bestimmt werden soll, daß die in Rede stehende windschiefe Fläche eine gegebene Fläche berühre, deren Gleichung ist $\chi(x, y, z) = 0$, so wird man die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus dieser Gleichung nehmen und dieselben in die Differentialgleichung $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$ substituiren. Man erhält dadurch eine zweite primitive Gleichung $\psi(x, y, z) = 0$, welche der Berührungslinie angehört, und die Aufgabe ist damit auf die des vorigen Paragraphen zurückgeführt.

Zusätze.

III. Die Euler'schen Integrale.

1. Legendre hat mit der Benennung Euler'sche Integrale der ersten und der zweiten Art, die beiden folgenden Integrale bezeichnet

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx,$$

welche häufig in den Anwendungen vorkommen und mit denen Euler sich viel beschäftigt hat; p, q, n bedeuten beliebige positive Exponenten. Man bezeichnet gewöhnlich das zweite von diesen Integralen mit $\Gamma(n)$, so daß man hat

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx.$$

Setzt man $e^{-x} = z$, oder $x = y^2$, so hat man auch

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(l.\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}\,dy.$$

Durch Anwendung der Integration durch Theile findet man

$$\int e^{-x}x^{n-1}\,dx = \frac{e^{-x}x^n}{n} + \frac{1}{n}\int e^{-x}x^n\,dx,$$

folglich wird innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = \infty$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}\,x^n\,dx$$

d. h.

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, \quad \text{oder} \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Vermittelst dieser Formel kann man die Werthe der Function $\Gamma(n)$ für beliebige Werthe von n berechnen, sobald diese Werthe für $n < 1$ bekannt sind. So erhält man nach und nach

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1) \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1) \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma(n) &= (n-1)\,.\,(n-2)\ldots.3,2.1.\Gamma(1);
\end{aligned}$$

aber es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

folglich

$$\Gamma(n) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots.(n-1),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Ebenso findet man

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{3}{2}) &= \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(\tfrac{5}{2}) &= \tfrac{3}{2}\,\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2}\,.\,\frac{2n-3}{2}\ldots.\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\Gamma(\tfrac{1}{2});
\end{aligned}$$

aber man hat

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

(m. s. §. 358); folglich allgemein

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

2. Das Euler'sche Integral der ersten Art läßt sich immer mit Hülfe der folgenden Formel durch die Function Γ ausdrücken

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Diese von Euler gefundene Formel kann man nach Poisson durch die Betrachtung doppelter Integrale auf folgende Art beweisen. Man multiplicire mit einander die beiden Gleichungen

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-y^2}\,y^{2p-1}\,dy$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,x^{2q-1}\,dx$$

und beachte, daß das Product auf der rechten Seite gleich ist dem Vierfachen des doppelten Integrals von

$$e^{-(y^2+x^2)}\,y^{2p-1}\,x^{2q-1}\,dy\,dx,$$

wo die Gränzen der Integration für beide Veränderliche 0 und ∞ sind. Man hat also

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)}\,y^{2p-1}\,x^{2q-1}\,dy\,dx.$$

Wenn man nun x und y wie rechtwinklige Coordinaten ansieht und denselben eine dritte Coordinate z, rechtwinklig auf den beiden ersteren, hinzufügt, so bedeutet das vorstehende doppelte Integral ein innerhalb des Winkels der positiven Coordinaten enthaltenes Volumen, welches begränzt wird durch die Ebenen xy, xz, yz, und die Fläche, deren Gleichung ist

$$z = e^{-(y^2+x^2)}\, y^{2p-1}\, x^{2q-1}.$$

Der Ausdruck für dieses Volumen ändert seine Gestalt, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten x und y die Polarcoordinaten r und ω einführt, indem man setzt

$$x = r\cos\omega,\quad y = r\sin\omega.$$

Das Element des Volumen wird sodann $z.rdr\,d\omega$, und man muß integriren zwischen den Gränzen

$$\omega = 0 \text{ und } \omega = \frac{\pi}{2},\quad r = 0 \text{ und } r = \infty.$$

Man hat also jetzt

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} z.rdr\,d\omega,$$

oder wenn man für z und sodann auch für y und x ihre Werthe setzt

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \sin\omega^{2p-1} \cos\omega^{2q-1} dr d\omega.$$

Das doppelte Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ein Product zweier einfachen Integrale, von denen das eine, nämlich

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\, r^{2(p+q)-1}\, dr$$

den Werth $\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$ hat, und das andere, nämlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega^{2p-1} \cos\omega^{2q-1}\, d\omega$$

sich verwandelt, wenn man $\sin\omega = \sqrt{x}$ setzt, in

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Es folgt daraus, daß

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx,$$

mithin hat man

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

welches die obige Euler'sche Formel ist. Man erkennt aus dieser Formel, daß das Euler'sche Integral der ersten Art eine symmetrische Function der beiden Parameter p und q ist, von denen es abhängt.

3. Durch Verallgemeinerung der Euler'schen Formel hat Dirichlet neue Resultate gewonnen. Er betrachtet das Integral

$$V = \int\int \ldots . \int x^{a-1}\,y^{b-1}\;\ldots .\;z^{c-1}\,dx\,dy\ldots .\,dz,$$

in welchem die Veränderlichen $x, y, \ldots . z$ alle positiven Werthe annehmen sollen, die der Ungleichung Genüge leisten

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots . + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1,$$

wo $a, b, \ldots c, \alpha, \beta, \ldots \gamma, p, q, \ldots r$ positive Constanten sind. Für dieses Integral findet Dirichlet folgenden bemerkenswerthen Ausdruck

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots . \gamma^c}{pq \ldots . r}\;\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots .\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\ldots .+\frac{c}{r}\right)}, \qquad (1)$$

welchen man nach seiner Angabe auf mehreren Wegen erhalten kann, und welcher eine große Menge von Resultaten in Bezug auf die Bestimmung der Volumina, der Schwerpunkte, der Trägheitsmomente ꝛc. in sich schließt. Man kann diese Formel beweisen wie folgt.

4. Man setze zuerst für $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p, \left(\frac{y}{\beta}\right)^q, \ldots \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r$ an die Stelle resp. $x, y, \ldots z$; und folglich für $dx, dy, \ldots dz$ an die Stelle resp. $\frac{\alpha}{p} x^{\frac{1}{p}-1} dx, \frac{\beta}{q} y^{\frac{1}{q}-1} dy, \ldots \frac{\gamma}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz.$ Sodann hat man

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} U$$

worin

$$U = \int\int \ldots \int x^{\frac{a}{p}-1} y^{\frac{b}{q}-1} \ldots z^{\frac{c}{r}-1} dx\, dy \ldots dz,$$

so daß U ein Integral von derselben Form bedeutet wie V, in welchem aber $x, y, \ldots z$ alle positiven Werthe annehmen müssen, die der Ungleichung genügen

$$x + y + \ldots + z < 1.$$

Setzt man nun zur Vereinfachung

$$\frac{a}{p} = k, \quad \frac{b}{q} = l, \quad \frac{c}{r} = m,$$

so kommt

$$U = \int\int \ldots \int x^{k-1} y^{l-1} \ldots z^{m-1} dx\, dy \ldots dz,$$

und es bleibt zu beweisen, daß man hat

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l) \ldots \Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)}. \tag{2}$$

5. Die Formel (2) ist richtig, wenn man nur eine Veränderliche x hat; denn alsdann wird

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k)}.$$

Ebenso bleibt die Formel (2) richtig für zwei Veränderliche x und y. Denn in diesem Falle kann man schreiben

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^{1-x} y^{l-1} dy = \frac{1}{l}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^l\,dx,$$

und da man nach der Euler'schen Formel hat

$$\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^l\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

so wird

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{l\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)}.$$

6. Man nehme jetzt an, U sei ein dreifaches Integral, so daß man schreiben kann

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{z_1} z^{m-1}\,dz,$$

wo y_1 und z_1 resp. die Differenzen $1-x$ und $1-x-y$ bezeichnen, so daß man hat

$$1 - x = y_1,\quad y_1 - y = z_1.$$

Führt man die neuen Veränderlichen u und v ein, und setzt

$$y = uy_1,\quad z = vz_1,$$

so werden die gemeinschaftlichen Gränzen von u und v gleichfalls 0 und 1 werden, und man hat

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^1 u^{l-1}\,y_1{}^l\,du \int_0^1 v^{m-1}\,z_1{}^m\,dv,$$

oder weil

$$y_1 = 1 - x,\quad z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u),$$

so wird auch

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{l+m}\,dx \int_0^1 u^{l-1}\,(1-u)^m\,du \int_0^1 v^{m-1} dv.$$

Die Integrationen in Bezug auf die verschiedenen Veränderlichen können jetzt unabhängig von einander ausgeführt werden; und da man hat

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)}$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m\,du = \frac{\Gamma(l)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}$$

$$\int_0^1 v^{m-1}\,dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

so wird endlich

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

übereinstimmend mit der Formel (2).

Wenn in dem Integrale U vier unabhängige Veränderliche x, y, z, t vorkommen, so kann der Werth dieses Integrals noch auf demselben Wege erhalten werden. Man denkt sich nämlich die Integrationen nach einander in Bezug auf t, z, y, x ausgeführt, und setzt

$$1-x=y_1,\quad y_1-y=z_1,\quad z_1-z=t_1,$$

so daß die Gränzen für die Veränderlichen t, z, y, x resp. sind 0 und t_1, 0 und z_1, 0 und y_1, 0 und 1. Führt man nun statt t, z, y neue Veränderliche ein, welche an die vorigen durch die Bedingungen gebunden sind

$$y=uy_1,\quad z=vz_1,\quad t=wt_1,$$

so werden die gemeinschaftlichen Gränzen für diese neuen Veränderlichen 0 und 1 sein. Ferner hat man

$y_1=1-x,\ z_1=(1-x)(1-u),\ t_1=(1-x)(1-u)(1-v)$; folglich können die Veränderlichen x, u, v, w getrennt werden, oder mit anderen Worten, das vierfache Integral U

zerfällt in ein Product von vier einfachen Integralen, die sich sämmtlich mit Hülfe der Euler'schen Formel durch die Function Γ ausdrücken lassen. Dieses Verfahren gilt allgemein und führt bei jeder beliebigen Anzahl der Veränderlichen x, y, rc. zu der Formel (2), die mithin bewiesen ist.

IV. Angenäherte Berechnung des Products $1.2.3.4\ldots.x$, wenn x sehr groß ist.

1. Die Methode, welche hier befolgt werden soll, um die zu dieser Berechnung dienende Stirling'sche Formel abzuleiten, hat viel Aehnlichkeit mit dem Verfahren, welches Lacroix angewandt hat (m. s. dessen **Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral** §. 435). Dieses Verfahren geht darauf hinaus, den Logarithmus des Products $1.2.3.4\ldots.x$ zu suchen und beruhet auf der bekannten Formel von Wallis, §. 352,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdot\frac{2x}{2x-1}\,\frac{2x}{2x+1}\cdots$$

vermöge deren die Größe

$$2l2+2l4+\ldots+2l(2x-2)+l(2x)$$
$$-2l1-2l3-\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1)$$

sich auf $l\pi-l2$ reducirt, wenn $x=\infty$ genommen wird. Hier soll aber dieses Verfahren vervollständigt werden, indem sich zugleich eine obere Gränze des Fehlers ergeben wird, den man bei der angenäherten Berechnung von $l(1.2.3.4....x)$ begeht.

2. Für jeden positiven Werth von z hat man

$$\frac{1}{z}=\int_0^\infty e^{-\alpha z}\,d\alpha, \tag{1}$$

folglich wenn man mit dz multiplicirt und darauf integrirt

$$lz=\int_0^\infty \frac{(e^{-\alpha}-e^{-\alpha z})d\alpha}{\alpha}. \tag{2}$$

Setzt man hierin nach und nach $z=1$, $z=2$, $z=3$, ... $z=x$, und addirt die Resultate, so kommt

$$l(1.2.3.4....x)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x-\frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right). \tag{3}$$

Mithin ist die vorgelegte Aufgabe darauf zurückgeführt, den Werth des bestimmten Integrals zu finden, welches die rechte Seite der Gleichung (3) enthält. Man bezeichne dieses Integral mit u und betrachte x wie eine continuirliche Veränderliche. Die Differentiation gibt sodann

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{\alpha}-1}\right). \tag{4}$$

3. Die Function $\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$, welche den Coefficienten von $e^{-\alpha x}$ bildet und zur Abkürzung mit $f(\alpha)$ bezeichnet werden mag, läßt sich in eine nach steigenden Potenzen von α geordnete Reihe entwickeln. Differentiirt man nämlich mehrere Male nach einander die Gleichung

$$(e^{\alpha}-1)\,f(\alpha)=\alpha,$$

so erhält man

$$(e^\alpha - 1)\ f'(\alpha) + \ e^\alpha\ f(\alpha) = 1$$
$$(e^\alpha - 1)\ f''(\alpha) + 2e^\alpha\ f'(\alpha) + \ e^\alpha\ f(\alpha) = 0$$
$$(e^\alpha - 1) f'''(\alpha) + 3e^\alpha f''(\alpha) + 3e^\alpha f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) = 0$$
ꝛc.

woraus, wenn man $\alpha = 0$ setzt, ohne Schwierigkeit folgt
$$f(0) = 1,\ f'(0) = -\tfrac{1}{2},\ f''(0) = \tfrac{1}{6},\ \text{ꝛc.}$$
Die beiden ersten Glieder der Entwickelung von $f(\alpha)$ nach der Maclaurin'schen Reihe sind also $1 - \frac{\alpha}{2}$; und die folgenden Glieder können nur gerade Potenzen von α enthalten, denn die Differenz
$$f(\alpha) - 1 + \frac{\alpha}{2}$$
ist gleich der Hälfte von
$$\frac{\alpha(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}})}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} - 2,$$
und folglich, da diese Function durch die Aenderung des Vorzeichens von α keine Aenderung erleidet, eine gerade Function von α.

Die allgemeinen Werthe von $f''(\alpha)$ und $f'''(\alpha)$ sind
$$f''(\alpha) = \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^3}\,[(\alpha - 2)\, e^\alpha + \alpha + 2]$$
$$f'''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^4}\,[(\alpha - 3)\, e^{2\alpha} + 4\alpha e^\alpha + \alpha + 3].$$
Da nun die Veränderliche α hier > 0 vorausgesetzt wird, so läßt sich beweisen, daß die erste von diesen beiden derivirten Functionen beständig positiv und die zweite beständig negativ ist.

Man setze nämlich erstens
$$P = (\alpha - 2)\, e^\alpha + \alpha + 2,$$

so wird

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - 1)\, e^{\alpha} + 1, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = \alpha e^{\alpha}.$$

Für jeden Werth von $\alpha > 0$ hat man hiernach $\frac{d^2P}{d\alpha^2} > 0$; mithin auch $\frac{dP}{d\alpha} > 0$ und $P > 0$, da $\frac{dP}{d\alpha}$ und P zugleich für $\alpha = 0$ verschwinden und sodann das Vorzeichen ihrer derivirten Functionen annehmen. Daraus folgt, daß auch $f'(\alpha)$ eine positive Größe sein muß.

Man setze zweitens

$$P = (\alpha - 3)\, e^{2\alpha} + 4\alpha e^{\alpha} + \alpha + 3,$$

so wird

$$\frac{dP}{d\alpha} = (2\alpha - 5)\, e^{2\alpha} + (4\alpha + 4)\, e^{\alpha} + 1$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = (4\alpha - 8)\, e^{2\alpha} + (4\alpha + 8)\, e^{\alpha};$$

oder wenn man setzt

$$Q = (\alpha - 2)\, e^{\alpha} + \alpha + 2,$$

so hat man

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = 4e^{\alpha}\, Q,$$

so daß die beiden Functionen Q und $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$ einerlei Vorzeichen besitzen. Nun sind Q und $\frac{dQ}{d\alpha}$ Null für $\alpha = 0$, und $\frac{d^2Q}{d\alpha^2}$ wird > 0, sobald α den Werth Null übertrifft; folglich verhält es sich ebenso mit Q und mit $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$, und mithin findet sich dieselbe Eigenschaft auch bei der Function P, weil man hat $P = 0$ und $\frac{dP}{d\alpha} = 0$ für $\alpha = 0$. Es ist also $f''(\alpha)$ eine negative Größe.

Man sieht daraus zugleich, daß $f''(\alpha)$ eine mit den wachsenden Werthen von α abnehmende Function sein muß, deren größter Werth gleich $f''(0)$, d. h. gleich $\frac{1}{6}$ ist.

4. Nach dieser Nebenbetrachtung kehre man zu der Entwicklung von $f(\alpha)$ zurück. Man kann schreiben

$$\frac{\alpha}{e^\alpha-1}=1-\frac{\alpha}{2}+R,$$

und darin bedeutet R, je nachdem man die Entwickelung mehr oder weniger weit treiben will, vermöge des bekannten Ergänzungsgliedes der Maclaurin'schen Reihe entweder

$$\frac{\alpha^2}{1.2}f''(\theta\alpha),$$

oder

$$\frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^{2n}f^{2n}(0)}{1.2\ldots.2n}+\frac{\alpha^{2n+2}f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots.(2n+1)},$$

indem man zu beachten hat, daß R eine gerade Function von α sein muß. Das Zeichen θ bedeutet hier, wie bekannt, ganz allgemein irgend eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl. Setzt man diesen Werth in (4), so kommt

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-e^{-\alpha x}+\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x}-Re^{-\alpha x}\right)$$

oder vermöge der Formeln (1) und (2)

$$\frac{du}{dx}=lx+\frac{1}{2x}-\int_0^\infty\frac{Re^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha}.$$

Daraus wird durch Integration

$$u=C+(x+\tfrac{1}{2})\,lx-x+\int_0^\infty\frac{Re^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}$$

und dieser Werth von u ist zugleich der von $l(1.2.3.4\ldots.x)$. Es wird unten gezeigt werden, daß die Constante C gleich $l(\sqrt{2\pi})$ ist.

5. Man findet leicht die Gränzen des Fehlers, den man durch Vernachlässigung des Gliedes

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}$$

auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung begeht. Denn da man hat

$$R = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

so verwandelt sich dieses Glied in

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)d\alpha.$$

Es ist also positiv gleichwie die Function $f''(\theta\alpha)$. Und da man hat $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$, so ist es kleiner als

$$\tfrac{1}{12}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{1}{12x}.$$

Wenn man also mit μ irgend eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bezeichnet, so kann man schreiben

$$l(1.2.3.4....x) = C + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Wenn man setzt

$$R = \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2...2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2....(2n+2)},$$

so wird das Glied

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}$$

die Gestalt annehmen

$$\frac{f''(0)}{2x} + \ldots + \frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1)x^{2n-1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\alpha^{2n} f^{2n+2}(\theta\alpha)d\alpha}{1.2....(2n+2)};$$

und will man hier eine obere Gränze für den absoluten Werth des Integrals haben, von welchem es abhängt, so reicht es hin, für $f^{2n+2}(\theta\alpha)$ das absolute Maximum M von $f^{2n+2}(\alpha)$ an die Stelle zu setzen, worauf die Integration ausführbar wird.

7. Zur Bestimmung der Constante C bringe man die Gleichung

$$l(1.2.3.4....x) = C + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{\mu}{12x}$$

auf die Form

$$l1 + l2 + l3 + ... + lx = C + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \text{ꝛc.},$$

wo das Zeichen ꝛc. ein Glied anzeigt, welches für $x = \infty$ verschwindet. Man erhält daraus leicht

$$l1 + l2 + l3 + ... + l(2x) = C + (2x+\tfrac{1}{2})\,l(2x) - 2x + \text{ꝛc.}$$

Weil aber

$$l2 + l4 + l6 + ... + l(2x) = xl2 + l1 + l2 + l3 + ... + lx,$$

so hat man auch

$$l2 + l4 + l6 + ... + l(2x) = C + (x+\tfrac{1}{2})\,lx + xl2 - x + \text{ꝛc.}$$

Subtrahirt man diese Gleichung von derjenigen, welche die Summe der Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis $2x$ gibt, so erhält man

$$l1 + l3 + l5 + ... + l(2x-1) = xlx + (x+\tfrac{1}{2})\,l2 - x + \text{ꝛc.}$$

Subtrahirt man aber das Doppelte dieser neuen Gleichung von dem Doppelten der vorigen, so kommt

$$\begin{aligned} &2l2 + 2l4 + 2l6 + ... + 2l(2x-2) + l(2x) \\ &- 2l1 - 2l3 - 2l5 - .... - 2l(2x-3) - 2l(2x-1) \\ &= 2C - 2l2 + \text{ꝛc.}, \end{aligned}$$

so daß man endlich mit Hülfe der oben angeführten Formel von Wallis findet, indem man x unendlich groß werden läßt,

$$l\pi - l2 = 2C - 2l2,$$

woraus

$$C = \tfrac{1}{2}\,(l\pi + l2) = l\sqrt{2\pi}.$$

Zum Schluß möge noch erwähnt werden, daß Binet diese Aufgabe und mehrere andere von derselben Art in einem für das **Journal de l'école polytechnique** bestimmten Artikel abgehandelt hat.

V. Anwendung der Theorie der doppelten Integrale auf den Beweis eines Lehrsatzes der Algebra.

1. Wenn man mit ϱ und ω die Polarcoordinaten eines Punkts in einer festen Horizontalebene bezeichnet, und mit z eine reelle und bestimmte Function von ϱ und ω, welche zwischen den Gränzen 0 und R für ϱ, und 0 und 2π für ω nicht unendlich wird, so müssen die beiden doppelten Integrale

$$\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} z d\omega \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\varrho$$

nothwendig einander gleich sein, weil sie beide dasselbe Volumen darstellen; dieses Volumen wird nämlich begränzt von der festen Ebene, von der Oberfläche eines geraden Cylinders, der einen Kreis vom Halbmesser R zur Basis hat, welcher in jener Ebene aus dem Anfangspunkte der Coordinaten als Mittelpunkte construirt worden ist, und endlich von einer Fläche, deren vertikale Ordinate für jedes System der Werthe der beiden Größen ϱ und ω durch z dargestellt wird. Hierauf gestützt, hat Gauß den Beweis geführt, *) daß die linke Seite in jeder algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Lx + M = 0$$

theilbar ist entweder durch einen reellen Factor des ersten

*) Es ist dies der dritte Beweis dieses Satzes von Gauß. Man sehe die **Commentationes societatis scientiarum Gottingensis recentiores, Tom. III.**

Grades $x \mp \varrho$ oder durch einen reellen Factor des zweiten Grades $x^2 - 2x\varrho \cos\omega + \varrho^2$, so daß diese Gleichung immer wenigstens eine reelle oder imaginäre Wurzel besitzt, nämlich $\pm\varrho$ oder $\varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\,.\sin\omega)$.

Mit anderen Worten, es läßt sich beweisen, daß es immer reelle Werthe der beiden Größen ϱ und ω gibt, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen Genüge leisten

$$\varrho^m \cos m\omega + A\varrho^{m-1} \cos(m-1)\omega + \ldots + L\varrho\cos\omega + M = 0$$
$$\varrho^m \sin m\omega + A\varrho^{m-1} \sin(m-1)\omega + \ldots + L\varrho\sin\omega = 0.$$

2. Es seien vorläufig ϱ und ω unbestimmt und man setze

$$t = \varrho^m \cos m\omega + A\varrho^{m-1}\cos(m-1)\omega + \ldots + L\varrho\cos\omega + M$$
$$u = \varrho^m \sin m\omega + A\varrho^{m-1}\sin(m-1)\omega + \ldots + L\varrho\sin\omega,$$

so wie ferner

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \varrho\frac{dt}{d\varrho}, \quad u' = -\frac{dt}{d\omega} = \varrho\frac{du}{d\varrho}$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \varrho\frac{dt'}{d\varrho}, \quad u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \varrho\frac{du}{d\varrho}$$

Unter R werde eine beliebige positive Größe verstanden, die jedoch größer ist als die größte von den Größen

$$mA'\sqrt{2}, \ \sqrt{mB'\sqrt{2}}, \ \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}}, \ \ldots \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}},$$

wo $A', B', C', \ldots M'$ die absoluten Werthe der Coefficienten $A, B, C, \ldots M$ bedeuten. Sodann läßt sich zeigen, daß wenn man $\varrho = R$ setzt, während der Werth von ω willkürlich bleibt, die Summe $tt' + uu'$ einen positiven Werth annehmen wird.

Um dies zu beweisen, betrachte man die vier Größen

$$R^m \cos\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + M\cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right)$$
$$R^m \sin\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + M\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right)$$

$$mR^m \cos\frac{\pi}{4}+(m-1)AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)+\ldots+LR\cos\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right)$$

$$mR^m \sin\frac{\pi}{4}+(m-1)AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)+\ldots+LR\sin\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right),$$

welche resp. mit T, U, T', U' bezeichnet werden mögen. Diese Größen sind sämmtlich > 0, was man z. B. für die erstere beweist, indem man T auf die Form bringt

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R+mA\sqrt{2}\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2+mB\sqrt{2}\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3+mC\sqrt{2}\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$
$$+\text{ꝛc.}$$

und dabei festhält, was oben über die Größe von R festgesetzt worden ist. Ebenso wird man in Bezug auf die übrigen Summen U, T', U' zu Werke gehen.

Nun hat man, wenn man $\varrho = R$ setzt,

$$t = T\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u = T\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$t' = T'\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U'\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u' = T'\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U'\cos\left(\frac{n}{4}+m\omega\right),$$

woraus folgt $tt'+uu' = TT'+UU'$, folglich ist $tt'+uu' > 0$. Auch kann man bemerken, daß dieselben Gleichungen geben $t^2+u^2=T^2+U^2$, folglich ist für $\varrho=R$ auch $t^2+u^2>0$.

3. Mit Hülfe dieser Vorbereitung kann man jetzt den in Rede stehenden Satz beweisen, nämlich, daß es innerhalb der Gränzen $\varrho=0$ und $\varrho=R$, so wie $\omega=0$ und $\omega=2\pi$,

nothwendig gewisse Werthe von ϱ und ω geben muß, für welche man gleichzeitig hat $t = 0$ und $u = 0$.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde man schließen müssen, daß der Bruch *)

$$z = \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'')+(tu'-t'u)^2-(tt'+uu')^2}{\varrho(t^2+u^2)^2}$$

innerhalb der angegebenen Gränzen nicht unendlich werden könnte, **) und daß man folglich haben müßte

$$\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\varrho.$$

Nun ist

$$\int z d\omega = \frac{tu'-t'u}{\varrho(t^2+u^2)},$$

wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann; ferner nehmen t, u, t', u' für die beiden Gränzen 0 und 2π einerlei Werthe an; folglich hat man

$$\int_0^{2\pi} z d\omega = 0,$$

so daß mithin auch das erste der beiden obigen doppelten Integrale sich auf Null reducirt. Aber das zweite dieser Integrale wird nicht Null. Denn man hat

$$\int z d\varrho = \frac{tt'+uu'}{t^2+u^2}$$

---

*) Dieser Bruch ist das zweite Differentialverhältniß der Function $\operatorname{arc\,tang} \frac{u}{t}$, in Bezug auf die beiden Veränderlichen ϱ und ω nach einander genommen. Man sehe Grunert's Archiv der Mathematik, Band VII. S. 415.

**) Die Annahme $\varrho = 0$ macht diesen Bruch nicht unendlich, weil, wie man leicht erkennt, der Factor ϱ auch im Zähler enthalten ist und mithin sich aufhebt.

folglich

$$\int_0^R z d\varrho = \frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2}$$

woraus weiter

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\varrho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2 + U^2};$$

und da vermöge des Obigen das Element

$$\frac{(TT' + UU')\,d\omega}{T^2 + U^2}$$

einen positiven Werth hat, so ist auch dieses letzte Integral nothwendig >0. Also ist die Gleichung

$$\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\varrho$$

unmöglich, folglich wird auch der Bruch z innerhalb der angegebenen Gränzen ein oder mehrere Mal unendlich, und da dies nur geschehen kann, indem t und u zugleich innerhalb jener Gränzen für gewisse Werthe von ϱ und ω verschwinden, so ist damit der vorliegende Satz bewiesen.

4. Setzt man $l\varrho = \theta$ oder $\varrho = e^\theta$, so erkennt man sogleich, daß t und u die beiden derivirten Functionen, resp. in Bezug auf ω und θ genommen, von dem nämlichen Integral

$$\varphi = \frac{e^{m\theta} \sin m\omega}{m} + \frac{Ae^{(m-1)\theta} \sin(m-1)\omega}{m-1} + \dots + Le^\theta \sin\omega + M\omega$$

der Gleichung $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0$ sind; folglich wird, nach einem von Lamé im **Journal de l'école polytechnique** bewiesenen Satze, dieser Gleichung auch Genüge geschehen durch den Werth $\varphi = l\sqrt{t^2 + u^2}$. Mithin sind die beiden Größen

$$\frac{d^2 l\sqrt{t^2+u^2}}{d\theta^2} \text{ und } -\frac{d^2 l\sqrt{t^2+u^2}}{d\omega^2}$$

einander gleich; und ihr gemeinschaftlicher Werth ist derjenige des Products ϱz.

VI. Integration einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen.

Es sei

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

eine Differentialgleichung von der Ordnung n, indem $y', y'', \ldots y^{(n)}$ die auf einander folgenden derivirten Functionen von y bedeuten. Das vollständige Integral dieser Gleichung, welches hier als bekannt vorausgesetzt wird, wird n willkürliche Constanten $a, b, \ldots c$ enthalten, und die Form besitzen $y = F(x, a, b, \ldots c)$ oder auch $\Pi(x, y, a, b \ldots c) = 0$. Man differentiire nun die beiden Seiten der Gleichung (1) in Bezug auf a, und bezeichne das Differentialverhältniß $\frac{dy}{da}$ mit u. Sodann kommt

$$\frac{df}{dy}u + \frac{df}{dy'}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dy''}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}}\frac{d^nu}{dx^n} = 0. \tag{2}$$

Man würde dieselbe Gleichung erhalten haben, wenn man statt $\frac{dy}{da} = u$ gesetzt hätte $\frac{dy}{db} = u$ oder $\frac{dy}{dc} = u$ ꝛc. Folglich müssen die derivirten Functionen von y, in Bezug auf die n Constanten $a, b, \ldots c$ genommen, eben so viele besondere Integrale der linearen Gleichung (2) darstellen, und mithin wird das vollständige Integral der Gleichung (2) sein

$$u = A\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + \dots + C\frac{dy}{dc},$$

wo $A, B, \dots C$ willkürliche Constanten sind.

Diesen eben so einfachen wie merkwürdigen Satz hat Jacobi gegeben. Es erstreckt sich von selbst auf jedes beliebige System gleichzeitiger Differentialgleichungen. Um ihn auf ein Beispiel anzuwenden, betrachte man den besonderen Fall, wo die Gleichung (1) die Form hat

$$y'' - \varphi(y) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich integriren. Denn multiplicirt man sie mit $2dy$, so erhält man

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\varphi(y)dy = 0,$$

woraus folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a + 2\int\varphi(y)dy$$

und mithin

$$x = b + \int\frac{dy}{\sqrt{a + 2\int\varphi(y)\,dy}}.$$

Vermöge dieser letzten Gleichung ist y eine Function von x, a, b. Nun folgt aus dem Satze von Jacobi, daß die lineäre Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u\,\varphi'(y) = 0,$$

wo $\varphi'(y)$ die derivirte Function von $\varphi(y)$ bedeutet, ein vollständiges Integral besitzt von der Form

$$u = A\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db},$$

wie auch die Function φ beschaffen sein mag.

Anhang.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

I. Entwickelung des Gesetzes, welches die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler als Function dieser Fehler darstellt.

§. 1. Die Algebra lehrt, daß aus gegebenen und völlig von einander unabhängigen Gleichungen jederzeit eben so viele Unbekannte bestimmt werden können, als Gleichungen vorhanden sind. Wenn ferner die Anzahl der Unbekannten größer ist, als die Anzahl der gegebenen Gleichungen, so bleibt ein Theil der Unbekannten unbestimmt oder man kann für dieselben willkürliche Werthe setzen; und wie im Eingange dieses Lehrbuchs (§. 2) gezeigt worden ist, so führt dieser Fall, allgemein betrachtet, auf die Begriffe der Veränderlichen und der Function. Wenn aber endlich die Anzahl der gegebenen Gleichungen größer ist als die Anzahl der Unbekannten, so liegt derjenige Fall vor, auf welchen die nachfolgenden Betrachtungen sich beziehen. Zwar kann man gleichfalls aus den Lehren der Algebra leicht schließen, daß, wenn man in diesem letzten Falle aus so vielen von den gegebenen Gleichungen, wie nöthig sind, die gesuchten Unbekannten bestimmt, und die gefundenen Werthe derselben in die übrigen Gleichungen setzt, diese Gleichungen sodann entweder identisch werden müssen oder nicht, d. h. daß sie entweder zur Bestimmung der Unbekannten überflüssig gewesen sind, oder daß sie derselben widersprechen. Indessen bei dem hier in Rede stehenden Gegenstande kommen noch Beziehungen eigener Art zur Sprache, welche nicht eine so einfache Erledigung der Auflösung zulassen. Der Gegenstand selbst ist folgender.

§. 2. Es sei

$$F(a, b, c, \ldots . u, v, w, \ldots .)$$

eine Function, welche ihrer analytischen Form nach gegeben ist; u, v, w, rc. bedeuten die unabhängigen Veränderlichen, von denen die Function F abhängig ist, und a, b, c, rc. sind die in dem Ausdrucke der Function vorkommenden Constanten. Ferner betreffe diese Function irgend einen Fall aus dem Gebiete der Anwendungen der Mathematik, z. B. einen Fall der Geodäsie, der Mechanik, der Physik rc. von solcher Natur, daß die Werthe von F, welche irgend welchen Werthen der unabhängigen Veränderlichen u, v, w, rc. zugehören, einer Beobachtung fähig sind, etwa durch Messen, Wägen rc. Man sucht unter dieser Voraussetzung die Werthe der unbekannten Constanten a, b, c, rc., deren Anzahl n sei.

Offenbar werden diese Constanten bestimmt sein, sobald man n durch Beobachtung gefundene Werthe von F kennt, welche beliebigen Werthen von u, v, w, rc. entsprechen. Bedeuten nämlich $M_1, M_2, \ldots . M_n$ die beobachteten n Werthe der Function F, welche resp. den Werthen $u_1, v_1\ w_1$, rc. u_2, v_2, w_2, rc. bis u_n, v_n, w_n, rc. der unabhängigen Veränderlichen u, v, w, rc. zugehören, so wird man die n Gleichungen bilden

$$M_1 = F(a, b, c, \ldots . u_1, v_1, w_1, \ldots .)$$
$$M_2 = F(a, b, c, \ldots . u_2, v_2, w_2, \ldots .)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_n = F(a, b, c, \ldots . u_n, v_n, w_n, \ldots .)$$

und aus diesen die n unbekannten Constanten a, b, c, 2c. vollständig bestimmen können. So weit die Algebra. Wenn man nun aber die Ueberlegung macht, daß jede empirische Beobachtung mit unvermeidlichen Fehlern behaftet ist, welche aus der Unvollkommenheit der Sinne, aus der Ungenauigkeit der angewandten Instrumente, und anderen Quellen entspringen und, so gering sie vielleicht an sich sein mögen, das Resultat der Beobachtung jedenfalls mehr oder weniger unsicher machen, so wird man auch die auf die angegebene Weise ermittelten Werthe der Constanten a, b, c, 2c. nicht als zusammenfallend mit den wahren Werthen dieser Constanten, sondern nur als mehr oder weniger zuverlässige Näherungswerthe derselben ansehen dürfen. Und wenn man überdies, gleichsam zur Prüfung, die Reihe jener Beobachtungen fortsetzt und unter M_{n+1}, M_{n+2}, 2c. die beobachteten Werthe der Function F versteht, welche resp. den Werthen u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, 2c. u_{n+2}, v_{n+2}, w_{n+2}, 2c. 2c. der unabhängigen Veränderlichen u, v, w, 2c. entsprechen, so werden die Gleichungen

$$M_{n+1} = F(a, b, c, \ldots . u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, \ldots .)$$
$$M_{n+2} = F(a, b, c, \ldots . u_{n+2}, v_{n+2}, w_{n+2}, \ldots .)$$
2c.

wegen der genannten unvermeidlichen Beobachtungsfehler im allgemeinen nicht zu identischen Gleichungen werden, wenn man darin für die Constanten a, b, c, 2c. die vorhin gefundenen Werthe derselben an die Stelle setzt. Wollte man aber etwa aus dem Inbegriffe sämmtlicher hier aufgestellten Gleichungen, deren jede einer Beobachtung entspricht und deren Anzahl diejenige der unbekannten Constanten übertrifft, eine andere Gruppe von n Gleichungen herausheben und aus dieser die Werthe der n Constanten a, b, c, ꝛc. bestimmen, so würden diese Werthe im allgemeinen, und wiederum in Folge der Beobachtungsfehler, von den vorhin bestimmten Werthen derselben Constanten abweichen. Ebenso würden diese Werthe, wenn man sie in die bei ihrer Herleitung nicht benutzten Gleichungen hineinsetzt, dieselben im allgemeinen nicht zu identischen Gleichungen machen. Indessen man übersieht ohne Mühe, daß sich ein (von dem gewöhnlichen Verfahren der Algebra freilich sehr verschiedener) Weg muß denken lassen, welcher mit gleichmäßiger Benutzung *sämmtlicher* Beobachtungen, deren Anzahl diejenige der gesuchten Constanten übertrifft, unter angemessener Combinirung dieser Beobachtungen solche Werthe der Constanten hervorbringt, die den unbekannten wahren Werthen derselben möglichst nahe kommen, d. h. wenigstens näher, als wenn man zur Aufsuchung dieser Werthe nur n beliebig ausgewählte Beobachtungen benutzt und die übrigen völlig unberücksichtigt gelassen hätte. Diesen Weg aufzusuchen und festzustellen ist der Zweck des Nachfolgenden, und der so eben gebrauchte unbestimmte Ausdruck, daß man den wahren Werthen möglichst nahe kommen solle, wird im Laufe der Untersuchung selbst seine exacte Feststellung erhalten.

§. 3. Zu näherer Betrachtung der in Rede stehenden Frage ist es erforderlich, das Problem selbst für den Augenblick fallen zu lassen, und zunächst und vorzugsweise auf die Natur der *Beobachtungsfehler* die Aufmerksamkeit zu richten.

Wenn wie vorhin die Function F eine zu beobachtende Größe bedeutet, und M einen durch Beobachtung erhaltenen

Werth derselben, welcher gewissen Werthen der unabhängigen Veränderlichen u, v, w, 2c. entspricht, so würde man für diese Werthe der unabhängigen Veränderlichen mit voller Zuverlässigkeit

$$F = M$$

setzen dürfen, wenn man sicher wäre, bei der Beobachtung keinen Fehler begangen zu haben. Da diese Voraussetzung aber bei empirischen Beobachtungen niemals zu rechtfertigen ist, so wird man vielmehr zu setzen haben

$$F - M = x,$$

wo x den Beobachtungsfehler bedeutet, welcher der Differenz zwischen dem wahren Werthe F und dem beobachteten Werthe M der in Rede stehenden Größe gleich ist. Nun wird man zwar immer leicht zugeben, daß dieser Beobachtungsfehler x im allgemeinen desto kleiner ausfallen wird, je größer die Genauigkeit der Instrumente und die Sorgfalt des Beobachters gewesen sind. Und bei wiederholten Beobachtungen mit einerlei Instrumenten und einerlei Sorgfalt wird man kleinere Werthe des Beobachtungsfehlers x leichter, und darum auch öfter erwarten dürfen als größere. Einen vollständigen Aufschluß über die Natur des Beobachtungsfehlers erhält man jedoch erst durch folgende Betrachtung.

Der Beobachtungsfehler ist niemals das Ergebniß eines einzigen Acts, sondern er entsteht aus dem Zusammenfluß einer Menge von einzelnen Fehlern, welche je bei den einzelnen Manipulationen eintreten, aus denen die vollständige Beobachtung zusammengesetzt ist. Man kann deßhalb jeden wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler wie die Summe einer unbestimmt großen Anzahl von Elementarfehlern, die von einander unabhängig sind, ansehen; und zu größerer Einfachheit kann man die Annahme machen, diese Elementarfehler seien, absolut genommen, sämmtlich von gleicher Größe. Denn dieser Annahme kommt die Wirklichkeit um so näher, je mehr der schon aus anderen Gründen nöthigen Forderung einer **gleichmäßigen** Genauigkeit in der Ausführung der einzelnen Theile einer Beobachtung Genüge geschieht. Ferner liegt es in der Natur der hier in Betracht kommenden Fehler, daß jeder einzelne gleich leicht im positiven wie im negativen Sinne muß auf das Resultat der Beobachtung einfließen können; denn da der Zweck der Beobachtung auf den wahren Werth der beobachteten Größe gerichtet ist, so wird man von selbst schon alle solche Einflüsse (z. B. des Collimationsfehlers) von dem Resultate der Beobachtung fernhalten, welche einen überwiegend positiven oder einen überwiegend negativen Fehler in diesem Resultate befürchten lassen. Ueberträgt man diese Bemerkung auch auf die vorhin genannten Elementarfehler, so gelangt man zu dem Schlusse: Daß bei jeder Beobachtung einer gewissen Art eine gewisse unbestimmt große Anzahl von einander unabhängiger Elementarfehler vorausgesetzt werden müsse, welche absolut genommen sämmtlich von gleicher Größe sind und von denen jeder eben so leicht positiv wie negativ ausfallen kann. Die algebraische Summe dieser Elementarfehler, also mit Rücksicht auf die Vorzeichen derselben genommen, macht in jedem einzelnen Falle den wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler aus *).

§. 4. Gestützt auf diese Voraussetzungen ist es nun leicht, sowol über die Größe aller möglichen Fehler, welche bei Beobachtungen einer gewissen Art vorkommen können, als auch über die Häufigkeit ihres Vorkommens, d. i. die

---

*) Ausführlicher bespricht und rechtfertigt die hier aufgestellte Hypothese **Hagen** in seinen Grundzügen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837.

relative Möglichkeit derselben, allgemeine Bestimmungen zu treffen. Es sei Δx der als constant angesehene Elementarfehler, welcher eben so leicht positiv wie negativ sein kann, und m die Anzahl der Elementarfehler, welche den in Rede stehenden Beobachtungen zukommt. Will man alle möglichen Beobachtungsfehler aufzählen, so hat man aus den m Elementarfehlern alle möglichen Summen zu bilden, mit der Rücksicht, daß darin jeder Elementarfehler sowol unter der Form $+\Delta x$, als unter der Form $-\Delta x$ auftreten kann. Nach den bekannten combinatorischen Gesetzen wird man finden:

$m\Delta x$ d. i. m mal $+\Delta x$	kommt vor:	1 mal
$(m-2)\Delta x$ d. i. $(m-1)$ mal $+\Delta x$ und 1 mal $-\Delta x$	" "	m
$(m-4)\Delta x$ d. i. $(m-2)$ mal $+\Delta x$ und 2 mal $-\Delta x$	" "	$\frac{m(m-1)}{2}$
$(m-6)\Delta x$ d. i. $(m-3)$ mal $+\Delta x$ und 3 mal $-\Delta x$	" "	$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$
. . . .	. . .	. . .
. . . .	. . .	. . .
$-m\Delta x$ d. i. m mal $-\Delta x$	" "	1.

Es dient zur Erleichterung, wenn man bemerkt, daß diejenigen Zahlen, welche die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Beobachtungsfehler $m\Delta x$, $(m-2)\ \Delta x$, $(m-4)\ \Delta x$, ꝛc. oder die relative Möglichkeit dieser Fehler ausdrücken, mit den Coefficienten der Entwickelung der $m$ten Potenz eines beliebigen Binoms identisch sind. Aus der bekannten Gesetzmäßigkeit unter diesen Coefficienten ergibt sich: Daß die beiden äußersten Beobachtungsfehler $\pm m\Delta x$, zu deren Entstehung sämmtliche Elementarfehler in einerlei Sinne beigetragen haben, am wenigsten häufig erwartet werden dürfen, da ihre relative Möglichkeit, oder die Leichtigkeit, mit welcher sie eintreten können, nur $=1$ ist; daß die relative Möglichkeit der Beobachtungsfehler desto größer wird, je mehr man sich der Mitte der obigen Entwickelung nähert, d. h. je kleiner die absolute Größe des Beobachtungsfehlers ist; endlich daß je zwei Beobachtungsfehler, welche gleich weit von der Mitte der Entwickelung abliegen, d. h. von gleicher absoluten Größe sind, eine gleiche relative Möglichkeit besitzen. Dies stimmt mit demjenigen überein, was man dem vorigen Paragraphen zufolge schon allgemein erwarten durfte.

§. 5. Die Allgemeinheit der Untersuchung wird nicht beeinträchtigt werden, wenn man annimmt, m sei eine gerade Zahl. Die Entwickelung der binomischen Potenz hat sodann ein mittleres Glied. Setzt man also in den vorigen Formeln $2m$ statt m, und zugleich zur Vereinfachung Δx statt $2\Delta x$, und ordnet von der Mitte aus, so erhält man folgende Uebersicht über die Größe der Beobachtungsfehler x, und die einem jeden derselben zukommende relative Möglichkeit, welche mit y bezeichnet werden mag:

Beobachtungsfehler $= x$	Relative Möglichkeit desselben $= y$
0	$\frac{2m(2m-1)\ (2m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m+1)}{2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ m}$
$\pm\ \Delta x$	$\frac{2m(2m-1)\ (2m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m+2)}{2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ (m-1)}$
$\pm\ 2\Delta x$	$\frac{2m(2m-1)\ (2m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m+3)}{2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ (m-2)}$
. . .	. . . .
$\pm\ m\Delta x$	1

Diese Uebersicht gibt deutlich zu erkennen, in welchem Verhältnisse die relative Möglichkeit y, oder die Leichtigkeit, mit welcher ein Beobachtungsfehler x eintreten kann, abnimmt, wenn dieser Beobachtungsfehler absolut genommen um die Größe Δx, welche das Doppelte des vorausgesetzten Elementarfehlers ist, zunimmt.

§. 6. Ueber die Größe des Elementarfehlers und folglich auch die Größe von Δx läßt sich im allgemeinen nur das festsetzen, daß man sich dieselbe sehr klein zu denken habe im Vergleich mit den wirklich vorkommenden Beobachtungsfehlern. Denn da in der vorstehenden Uebersicht Δx diejenige Größe bedeutet, um welche der Beobachtungsfehler successiv zunimmt, in der Ausübung aber kein Grund dagegen streitet, daß man sich zwei Fehler ihrer absoluten Größe nach so nahe beisammen liegend denke als man nur will, so kann man auch Δx beliebig klein annehmen. Es wird also noch immer der Wirklichkeit angemessen sein, wenn man Δx unendlich klein werden läßt d. h. kleiner als jede beliebige Zahl; wobei zugleich, damit die Werthe der Beobachtungsfehler selbst endlich bleiben, m unendlich groß werden muß d. h. größer als jede beliebige Zahl. Sodann werden die Werthe von x continuirlich in einander übergehen, die Werthe von y aber als besondere und in unendlich kleinen Intervallen auf einander folgende Werthe einer gewissen Function von x sich darstellen, deren Aufsuchung jetzt in Frage kommt.

Man denke sich zu größerer Anschaulichkeit die Werthe von x und y als Coordinaten einer ebenen Curve, deren Gleichung zu suchen ist. Die Werthe von x und y im vorigen Paragraphen kann man sodann ansehen wie die Coordinaten der Eckpunkte eines Polygons, dessen Gränze, indem man die Seiten desselben kleiner und kleiner werden läßt, mit der gesuchten Curve identisch ist. Es seien nun

x und y diejenigen beiden Coordinaten, welche dem μten Eckpunkte des Polygons zugehören, so wie x' und y' die Coordinaten des nächstfolgenden $(\mu+1)$ten Eckpunkts, so hat man

$$x = \mu\Delta x, \quad y = \frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\,.\,.\,.\,(m+\mu+1)}{2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(m-\mu)}$$

$$x' = (\mu+1)\,\Delta x, y' = \frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m+\mu+2)}{2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(m-\mu-1)}.$$

Nun ist $x' - x = \Delta x$, und setzt man ebenso $y' - y = \Delta y$, so wird

$$\Delta y = y\left(\frac{m-\mu}{m+\mu+1} - 1\right)$$

$$= - y\,.\,\frac{2\mu+1}{m+\mu+1}$$

oder wenn man μ durch x ausdrückt

$$\Delta y = - y\,.\,\frac{2x+\Delta x}{m\Delta x + x + \Delta x}$$

und daraus wird endlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - y\,.\,\frac{2x+\Delta x}{m\Delta x^2 + x\Delta x + \Delta x^2}.$$

Läßt man hierin Δx und folglich auch Δy kleiner und kleiner werden, so erhält man als Gränze auf der linken Seite dieser Gleichung das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ der gesuchten Curve. Auf der rechten Seite reducirt sich der Zähler $2x+\Delta x$ auf $2x$; im Nenner werden die beiden Theile $x\Delta x$ und Δx^2 zu Null; der erste Theil $m\Delta x^2$ des Nenners erfordert aber noch eine besondere Ueberlegung.

Nach dem vorigen Paragraphen bedeutet $m\Delta x$ absolut genommen den größten Beobachtungsfehler, welcher bei Beobachtungen einer gewissen Art überhaupt eintreten kann. Dieser größte Beobachtungsfehler entsteht aber aus der Addition sämmtlicher in einerlei Sinn genommenen Elementarfehler, von denen jeder unendlich klein und deren Anzahl unendlich groß ist. Nun wird man zwar in jedem concreten Falle ohne Mühe eine Gränze anzugeben im Stande sein, über welche der größte mögliche Beobachtungsfehler zuverlässig nicht hinausgeht; z. B. bei sorgfältigen Messungen mit einem gut construirten Theodoliten wird man vollkommen sicher sein, nicht um die Größe eines Grades zu fehlen. Indessen diese äußerste Gränze für die Größe des Beobachtungsfehlers wird man sich jedenfalls im allgemeinen und ohne Rücksichtnahme auf den besonderen Fall so groß zu denken haben, daß dagegen der einzelne Beobachtungsfehler x als verschwindend anzusehen ist; d. h. das Product $m\Delta x$ muß in dieser allgemeinen Untersuchung als unendlich groß angenommen werden. Das Product $m\Delta x^2$ also, oder das Product aus der unendlich großen Zahl $m\Delta x$ mit der unendlich kleinen Zahl Δx, ist einer positiven Constante gleich zu setzen, deren Werth vorläufig unbestimmt bleibt.

Bezeichnet man diese positive Constante mit $\frac{1}{h^2}$, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -y \,.\, h^2 \,.\, 2x$$

oder durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{y} = -h^2 \,.\, 2xdx$$

woraus durch Integration wird

$$ly = lC - h^2x^2$$

wenn man mit lC die willkürliche Constante der Integration bezeichnet. Hieraus endlich wird

$$y = C \,.\, e^{-h^2x^2}.$$

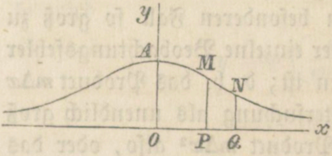
Zur Bestimmung von C bezeichne man mit y_0 denjenigen Werth von y, welcher dem Werthe $x = 0$ entspricht. Man hat sodann vermöge der letzten Gleichung

$$y_0 = C,$$

mithin

$$y = y_0 . e^{-h^2x^2}$$

als den Ausdruck für die gesuchte Function, welche allgemein die relative Möglichkeit y des Beobachtungsfehlers x in ihrer Abhängigkeit von diesem Fehler darstellt. Die Curve,



welche diese Function zur Anschauung bringt, besteht aus zwei congruenten Armen, welche sich im Punkte A der Achse der y vereinigen, und von denen jeder die Achse der x zur Asymptote hat. Jede Abscisse OP oder x stellt einen Beobachtungsfehler dar, dessen relative Möglichkeit durch die zugehörige Ordinate PM oder y ausgedrückt wird.

§. 7. Was den Werth der Ordinate y_0 oder OA betrifft, so ist derselbe hier offenbar vollkommen willkürlich. Denn da der Begriff der relativen Möglichkeit der Beobachtungsfehler nur eine Vergleichung der Werthe von y oder der Ordinaten unter einander in sich schließt, so kann von einer absoluten Werthbestimmung dieser Ordinaten nicht die Rede sein. Wollte man für y_0 andere Werthe annehmen, so würden gleichzeitig sämmtliche Ordinaten proportionale Aenderungen erfahren und mithin die relativen Werthe derselben ungeändert bleiben.

Die Constante h dagegen gibt ein Mittel ab, um die einem bestimmten einzelnen Falle entsprechenden Beobachtungen in Bezug auf ihre Güte zu charakterisiren. Es ist nämlich aus der Beschaffenheit der entwickelten Function klar, daß, wenn man alles Uebrige gleich setzt, die Werthe von y für wachsende Werthe von x desto rascher abnehmen werden, je größer h ist; d. h. daß gleichen Beobachtungsfehlern eine desto geringere relative Möglichkeit ihres Eintreffens, im Vergleich mit der relativen Möglichkeit von $x=0$, zugeschrieben werden muß, je größer man h voraussetzen darf. Die Größe h wird deßhalb als das Maß der Präcision gegebener Beobachtungen angesehen, und unterliegt in jedem einzelnen Falle einer besonderen Bestimmung; worüber unten mehr.

§. 8. Unter der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches durch das Zusammentreffen mehrerer Elementar-Ereignisse herbeigeführt wird, die an sich unter verschiedenen gleich möglichen Formen auftreten können, versteht man das Verhältniß der Anzahl derjenigen Fälle, in welchen das Zusammentreffen dieser Elementar-Ereignisse das verlangte Ereigniß wirklich hervorgehen läßt, zu der Anzahl derjenigen Fälle, in welchen überhaupt ein Zusammentreffen dieser Elementar-Ereignisse stattfinden kann.

Wenn man mit diesem Begriffe in die Entwickelung der §§. 4 und 5 eingeht, und unter dem Ereignisse, dessen Wahrscheinlichkeit man angeben will, das Eintreten eines bestimmten Beobachtungsfehlers x, unter den Elementar-Ereignissen aber die dortigen Elementarfehler versteht, so hat man allgemein

$$\omega = \frac{y}{\Sigma(y)}$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit ω des Beobachtungsfehlers x. Dieser Ausdruck ist mithin gleich der relativen Möglichkeit y dieses Beobachtungsfehlers, dividirt durch die Summe $\Sigma(y)$ der relativen Möglichkeiten aller Beobachtungsfehler, welche bei Beobachtungen von derselben Art vorkommen können.

Nach §. 5 ist die letztere Summe oder $\Sigma(y)$ offenbar gleich der Summe aller Binomial-Coefficienten der $2m$ten Potenz, wenn $2m$ wie früher die Anzahl aller Elementarfehler bedeutet, von denen jeder eben so leicht positiv wie negativ sein kann. Diese Summe ist aber gleich $(1+1)^{2m} = 2^{2m}$. Wenn man demnach in der Tabelle des §. 5 statt der relativen Möglichkeit der Beobachtungsfehler, oder y, die Wahrscheinlichkeit derselben, oder ω, an die Stelle setzen will, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

Beobachtungsfehler $= x$	Wahrscheinlichkeit desselben $= \omega$
0	$\frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\,\ldots\,(m+1)}{2\,.\,3\,\ldots\,.\,m}\;\frac{1}{2^{2m}}$
$\pm\,\Delta x$	$\frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\,\ldots\,(m+2)}{2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}\;\frac{1}{2^{2m}}$
$\pm\,2\Delta x$	$\frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\,\ldots\,(m+3)}{2\,.\,3\,\ldots\,(m-2)}\;\frac{1}{2^{2m}}$
. . .	. . . .
$\pm\,m\Delta x$	$\frac{1}{2^{2m}}$

Will man aus dieser Tabelle die Wahrscheinlichkeit irgend eines Beobachtungsfehlers nehmen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen dieses Beobachtungsfehlers, so hat man die angezeigte Wahrscheinlichkeit desselben zu verdoppeln. Die Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß ein Beobachtungsfehler zwischen den beiden gegebenen Gränzen $x = x_0$ und $x = x_1$ enthalten sei, ist gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten, welche den zwischen diesen beiden Gränzen enthaltenen Werthen von x entsprechen. Umfassen diese beiden Gränzen das ganze Intervall von $-m\Delta x$ bis $+m\Delta x$, so hat die betreffende Wahrscheinlichkeit den Werth 1, d. h. sie ist Gewißheit.

§. 9. Um den Begriff der Wahrscheinlichkeit auch auf den Fall des §. 6 zu übertragen, wo die Elementarfehler unendlich klein vorausgesetzt worden sind, verwandele man den Ausdruck des vorigen Paragraphen

$$\omega = \frac{y}{\Sigma(y)},$$

indem man Zähler und Nenner des Bruchs mit Δx multiplicirt, in

$$\omega = \frac{y\Delta x}{\Sigma(y\Delta x)}.$$

Läßt man hier Δx unendlich klein werden, so verwandelt sich $y\Delta x$ in ydx, wo y jetzt die im §. 6 gefundene Function $y = y_0 \cdot e^{-h^2x^2}$ bedeutet; und aus der Summe $\Sigma(y\Delta x)$ wird das Integral $\int ydx$, zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen. Man hat also

$$\omega = \frac{ydx}{\int_{-\infty}^{\infty} ydx} = \frac{e^{-h^2x^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx}.$$

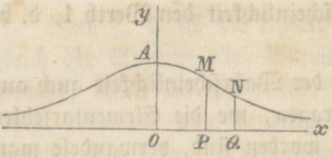
Die im Nenner dieses Ausdrucks angezeigte Integration kann nach §. 358 dieses Lehrbuchs ausgeführt werden. Es wird nämlich, wenn man für den Augenblick $hx = t$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Mithin erhält man für die Wahrscheinlichkeit ω eines bestimmten Beobachtungsfehlers x den Ausdruck

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}\, dx.$$

In der Curve des §. 6, deren Abscisse OP oder x den Beobachtungsfehler und deren Ordinate PM oder y die re=



lative Möglichkeit dieses Fehlers darstellt, läßt sich die geometrische Bedeutung des gefundenen Ausdrucks für ω ohne Mühe erkennen. Wenn man nämlich in dieser Curve der bis dahin willkürlichen Constante y_0 oder OA den Werth $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ beilegt, so wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Beobachtungsfehlers x oder OP ausgedrückt durch das Flächenelement $PMNQ$ dieser Curve, welches zwischen zwei unendlich nahe auf einander folgenden Ordinaten PM und QN enthalten ist, die den Abscissen OP oder x, und OQ oder $x + dx$ entsprechen.

§. 10. Es liegt in der Natur der Sache, daß der Werth von ω, welcher hier den Factor dx in sich enthält, unendlich klein werden mußte. Denn da unter den hier geltenden Voraussetzungen die Anzahl der möglichen Beobachtungsfehler unendlich groß ist, so wird die relative Möglichkeit eines einzelnen unter ihnen verschwinden im Vergleich mit der Summe der relativen Möglichkeiten aller, folglich die Wahrscheinlichkeit desselben unendlich klein werden.

Will man einen endlichen Werth der Wahrscheinlichkeit haben, so darf man nur die Wahrscheinlichkeit für den Fall fordern, daß der Beobachtungsfehler zwischen zwei bestimmten Gränzen $x = x_0$ und $x = x_1$ von endlicher Differenz enthalten sei. Denn diese Wahrscheinlichkeit ist gleich der Summe der unendlich kleinen Werthe des Differentialausdrucks für ω, ausgedehnt von $x = x_0$ bis $x = x_1$, und wird mithin im Geiste der Integralrechnung ausgedrückt durch das bestimmte Integral

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} e^{-h^2 x^2} \, dx.$$

Dieses Integral stellt denjenigen Theil des Flächeninhalts der obigen Curve dar, welcher zwischen zwei Ordinaten enthalten ist, die den Werthen x_0 und x_1 der Abscisse x entsprechen.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler absolut genommen nicht den Werth x überschreite, gleich dem bestimmten Integrale

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx, \quad \text{oder} \quad \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Nimmt man hierin den Gränzwerth $x=\infty$, so erhält man für diese Wahrscheinlichkeit den Werth 1, d. h. Gewißheit, wie man auch erwarten durfte. Die Fläche der obigen Curve von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen, in welcher für die Constante OA oder die Ordinate im Anfangspunkte der Werth $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ gesetzt wurde, ist demnach der Einheit gleich.

§. 11. Das bestimmte Integral

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx,$$

welches die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß der Beobachtungsfehler absolut genommen den Werth x nicht überschreite, kann unter endlicher Form nicht dargestellt werden, und man hat deßhalb zu seiner Werthbestimmung für gegebene Gränzen Näherungsmethoden anzuwenden, worüber man z. B. Bd. I. S. 395 ff. oder Bd. II. S. 256 ff. dieses Lehrbuchs nachsehen kann. Zur Vereinfachung der Rechnung kann man sich übrigens von der Constante h, welche in verschiedenen Fällen verschiedene Werthe annimmt, unabhängig machen, indem man $hx = t$ setzt, wodurch das vorstehende bestimmte Integral übergeht in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt;$$

und wenn man nun eine Tafel entwirft, welche für fortschreitende Werthe von t die zugehörigen Werthe dieses letzten Integrals enthält, so hat man für jeden bestimmten Fall der Anwendungen nur nöthig, die sämmtlichen Werthe von t durch den besonderen Werth der Constante h zu dividiren, um die Werthe des obigen Integrals durch die fortschreitenden Werthe von x ausgedrückt zu erhalten. Eine solche Tafel ist die folgende.

t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$		t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$	
0,0	0,000	112	1,2	0,910	24
0,1	0,112	111	1,3	0,934	18
0,2	0,223	106	1,4	0,952	14
0,3	0,329	99	1,5	0,966	10
0,4	0,428	92	1,6	0,976	8
0,5	0,520	84	1,7	0,984	5
0,6	0,604	74	1,8	0,989	4
0,7	0,678	64	1,9	0,993	2
0,8	0,742	55	2,0	0,995	2
0,9	0,797	46	2,1	0,997	1
1,0	0,843	37	2,2	0,998	1
1,1	0,880	30	2,3	0,999	0
1,2	0,910		2,4	0,999	

Für $t = 2{,}5$ erscheint hier der Werth 1,000, welcher streng genommen erst für $t = \infty$ gültig ist; das hat offenbar darin seinen Grund, daß die Werthe des bestimmten Integrals nur mit drei Decimalstellen aufgeführt worden sind.

Diese Tafel gilt unmittelbar für den Fall, wo das Maß der Präcision gegebener Beobachtungen, d. h. h, den Werth 1 besitzt; und sie liefert z. B. für die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler absolut genommen den Werth 0,1 nicht überschreite, die Zahl 0,112; für die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler ebenso den Werth 0,2 nicht überschreite, die Zahl 0,223 2c. Mit anderen Worten, man darf erwarten, daß bei Beobachtungen, denen das Maß der Präcision $h = 1$ entspricht, unter je 1000 Beobachtungsfehlern 112 zwischen $-0,1$ und 0,1 fallen; 223 zwischen $-0,2$ und 0,2 2c. Oder auch, nach einer anderen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebräuchlichen Ausdrucksweise, man kann 112 gegen 888 wetten, daß der Fehler einer Beobachtung von der angegebenen Präcision weniger als 0,1 betrage; oder 223 gegen 777, daß der Fehler weniger als 0,2 betrage 2c.

Wenn h nicht den Werth 1 hat, so ist hier überall an die Stelle von 0,1, 0,2, 2c. resp. zu setzen $\frac{0,1}{h}$, $\frac{0,2}{h}$, 2c.

§. 12. Von besonderer praktischen Wichtigkeit für gegebene Beobachtungen ist die Bestimmung eines Werthes von x von solcher Beschaffenheit, daß die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Werth absolut genommen nicht überschritten werde, genau den Werth $\frac{1}{2}$ erhält, d. h. gleich derjenigen Wahrscheinlichkeit wird, daß dieser Werth wirklich überschritten werde. Man nennt diesen Werth den **wahrscheinlichen Fehler** der in Rede stehenden Beobachtungen. Mithin kann man von dem wahrscheinlichen Fehler aussagen, daß er derjenige Fehler sei, welcher bei gegebenen Beobachtungen eben so leicht überschritten, wie nicht erreicht wird. Oder auch, man kann 1 gegen 1 wetten, daß der Fehler einer Beobachtung absolut genommen sowol unter, als über dem wahrscheinlichen Fehler bleibt.

Bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler von Beobachtungen, deren Präcision h ist, mit r, so hat man r aus der Bedingung zu bestimmen, daß

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_o^r e^{-h^2x^2}\,dx = \tfrac{1}{2};$$

oder wenn man wieder $hx = t$ setzt, und dem Werthe $x = r$ der Werth $t = \varrho$ entspricht, so kann man statt dieser Gleichung auch schreiben

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^\varrho e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}.$$

Aus der Tafel des vorigen Paragraphen erkennt man aber sogleich, daß der gesuchte Werth von ϱ zwischen 0,4 und 0,5 enthalten ist. Eine genauere Interpolirung gibt

$$\varrho = 0{,}4769360$$

als Werth des wahrscheinlichen Fehlers, welcher einer Präcision $h = 1$ der Beobachtungen entspricht. Und daraus folgt allgemein

$$r = \frac{\varrho}{h} = \frac{0{,}4769360}{h}$$

als Werth des wahrscheinlichen Fehlers für eine Präcision $h = h$ der Beobachtungen, d. h. als Werth desjenigen Fehlers, welcher absolut genommen bei diesen Beobachtungen eben so leicht überschritten, wie nicht erreicht wird.

In der obigen Curve bedeutet der wahrscheinliche Fehler augenscheinlich diejenige positive oder negative Absciſſe, deren zugehörige Ordinate resp. die von $x = 0$ bis $x = +\infty$, oder von $x = 0$ bis $x = -\infty$ sich erstreckende Fläche der Curve in zwei gleiche Theile zerlegt.

§. 13. Der wahrscheinliche Fehler r gegebener Beobachtungen, welcher vermöge des Vorigen mit der Präcision h dieser Beobachtungen durch die Gleichung $hr = \varrho$ zusammenhängt, in welcher ϱ die Zahl 0,4769360 bedeutet, ist der Größe h umgekehrt proportional, und bietet sich mithin gleichfalls als ein Maßstab dar, um daran die Güte der Beobachtungen zu messen. Je kleiner der Werth des wahrscheinlichen Fehlers ausfällt, d. h. desjenigen Fehlers, welcher bei Beobachtungen der vorliegenden Art absolut genommen eben so leicht überschritten wie nicht erreicht wird, desto rascher wird die Curve des §. 6 mit wachsenden absoluten Werthen von x sich der Achse der x zu nähern suchen, und desto seltener wird man mithin Beobachtungsfehler von beträchtlicher Größe erwarten dürfen. Ueberdies kann man immer, sobald eine Anzahl von Beobachtungsfehlern gegeben vorliegt, zu einer angenäherten Kenntniß des wahrscheinlichen Fehlers auf folgende sehr einfache Weise gelangen. Man ordnet sämmtliche Fehler nach ihrer absoluten Größe, und sucht denjenigen unter ihnen heraus, welcher eben so oft überschritten wie nicht erreicht wird; dieser ist sodann der wahrscheinliche Fehler. Eine solche Bestimmung bleibt zwar immer mehr oder weniger schwankend, hauptsächlich deßhalb, weil die gegebenen Beobachtungsfehler in endlichen Intervallen auf einander folgen, und daher eine Unsicherheit innerhalb eines solchen Intervalles übrig bleiben muß. Indessen übersieht man leicht, daß dieses Verfahren der Wahrheit desto näher führen wird, je größer die Anzahl der gegebenen Beobachtungsfehler war.

Die Bedeutung, welche hiernach der wahrscheinliche Fehler für die Anwendungen erhält, macht es wünschenswerth, der Tafel des §. 11 eine solche Anordnung zu geben, daß die Größe t nach Theilen und Vielfachen von ϱ fortschreitet. Eine solche Tafel ist die folgende. Da man übrigens aus dem Obigen hat $\frac{t}{\varrho} = \frac{x}{r}$, so wird die Tafel durch diese neue Anordnung unabhängig von der Güte der Beobachtungen, und man kann also aus ihr allgemein die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler bei Beobachtungen irgend welcher Art absolut genommen einen gewissen Werth nicht überschreite, entnehmen, vorausgesetzt, daß dieser Werth durch Theile und Vielfache des wahrscheinlichen Fehlers derselben Beobachtungen ausgedrückt gegeben ist.

Nach dieser Tafel ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler absolut genommen 0,1 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite, gleich 0,054; ebenso die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler 0,2 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite, gleich 0,107 ꝛc. Oder man darf bei Beobachtungen jeder Art erwarten, daß von je 1000 Beobachtungsfehlern 54 absolut genommen unter 0,1 des wahrscheinlichen Fehlers betragen werden; ebenso 107 unter 0,2 des wahrscheinlichen Fehlers ꝛc. Oder endlich man kann bei Beobachtungen jeder Art 54 gegen 946 wetten, daß ein zu erwartender Beobachtungsfehler weniger als 0,1 des wahrscheinlichen Fehlers betragen werde; ebenso 107 gegen 893, daß derselbe weniger als 0,2 des wahrscheinlichen Fehlers betragen werde; u. s. f.

$\frac{t}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$		$\frac{t}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$	
0,0	0,000	54	2,5	0,908	13
0,1	0,054	53	2,6	0,921	10
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0,3	0,160	53	2,8	0,941	9
0,4	0,213	51	2,9	0,950	7
0,5	0,264	50	3,0	0,957	6
0,6	0,314	49	3,1	0,963	6
0,7	0,363	48	3,2	0,969	5
0,8	0,411	45	3,3	0,974	4
0,9	0,456	44	3,4	0,978	4
1,0	0,500	42	3,5	0,982	3
1,1	0,542	40	3,6	0,985	2
1,2	0,582	37	3,7	0,987	3
1,3	0,619	36	3,8	0,990	1
1,4	0,655	33	3,9	0,991	2
1,5	0,688	31	4,0	0,993	1
1,6	0,719	29	4,1	0,994	1
1,7	0,748	27	4,2	0,995	1
1,8	0,775	25	4,3	0,996	1
1,9	0,800	23	4,4	0,997	1
2,0	0,823	20	4,5	0,998	0
2,1	0,843	19	4,6	0,998	0
2,2	0,862	17	4,7	0,998	1
2,3	0,879	16	4,8	0,999	0
2,4	0,895	13	4,9	0,999	0
2,5	0,908		5,0	0,999	

Die beiden hier aufgeführten Tafeln finden sich ausführlicher in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1834.

II. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe unbekannter Größen aus gegebenen Beobachtungen.

---

§. 14. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Natur der Beobachtungsfehler und die Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens möge jetzt das allgemeine Problem des §. 2 wieder aufgenommen werden, welches den eigentlichen Zweck dieser Untersuchungen ausmachen soll. Es wurde dort eine beliebige Function F, welche von den n unbekannten Constanten a, b, c, ꝛc. und den Veränderlichen u, v, w, ꝛc. abhängig ist, ihrer analytischen Form nach als gegeben vorausgesetzt, und ferner wurde die Annahme gemacht, man kenne durch Beobachtungen eine Reihe von Werthen dieser Function F, nämlich

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ \text{ꝛc.},$$

welche gegebenen Werthen der Veränderlichen u, v, w, ꝛc. entsprechen, und deren Anzahl m größer als n sei. Die Aufgabe war sodann, aus diesen Beobachtungen diejenigen Werthe der Constanten a, b, c, ꝛc. zu bestimmen, welche den unbekannten wahren Werthen derselben so nahe wie möglich kommen.

So lange man die wahren Werthe der Constanten a, b, c, ꝛc. und folglich auch die wahren Werthe, welche in den einzelnen Beobachtungen die Function F annehmen muß, als bekannt voraussetzt, so kann man jeder Abweichung eines beobachteten Werthes M von dem entsprechenden wahren Werthe F, d. h. jedem Beobachtungsfehler $F - M = x$, vermöge der Entwickelungen des vorigen Abschnitts eine bestimmte Wahrscheinlichkeit beilegen, welche schon vor der Beobachtung die Leichtigkeit seines Eintreffens im Vergleich mit der Leichtigkeit des Eintreffens aller möglichen Beobachtungsfehler ausdrückt. Diese Wahrscheinlichkeit ist sowol von der Größe dieses Fehlers, oder x, als auch von dem Maße der Präcision der in Rede stehenden Beobachtung, oder h, abhängig, und ihr allgemeiner Ausdruck ist nach §. 9

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

Nun ist unter den vorliegenden Voraussetzungen eine Reihe von Beobachtungen gegeben, und dieser entspricht eine Reihe von Beobachtungsfehlern

$$F_1 - M_1 = x_1,\ F_2 - M_2 = x_2,\ F_3 - M_3 = x_3,\ \text{rc.};$$

und wenn man die Annahme macht, daß alle diese Beobachtungen unter gleich günstigen Umständen angestellt worden sind, so daß allen derselbe Werth von h zugehört, so werden die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man vor der Beobachtung diese Fehler einzeln erwarten darf, resp. ausgedrückt werden durch

$$\omega_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x_1^2} dx,\ \omega_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x_2^2} dx,\ \omega_3 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x_3^2} dx, \text{rc.}$$

§. 15. Hierauf gestützt muß nun zunächst die Frage erhoben werden nach derjenigen Wahrscheinlichkeit Ω, welche vor der Beobachtung dem gleichzeitigen Vorkommen aller dieser von einander unabhängigen Beobachtungsfehler zugeschrieben werden muß.

Da der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit stets ein ächter Bruch ist, so sei für einen Augenblick $\frac{p}{q}$ der ächte Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x_1, und $\frac{r}{s}$ der ächte Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x_2 ausspricht. Das heißt, unter je q möglichen Fällen gibt es p Fälle, in denen der Fehler x_1 eintritt; folglich unter je qs möglichen Fällen gibt es ps Fälle, in denen derselbe Fehler x_1 eintritt. Aber unter je s möglichen Fällen gibt es r Fälle, in denen der Fehler x_2 eintritt; folglich unter je ps möglichen Fällen gibt es pr Fälle, in denen derselbe Fehler x_2 eintritt. Mithin werden unter je qs möglichen Fällen pr Fälle vorkommen, in denen die Fehler x_1 und x_2 zugleich eintreten. Oder mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Vorkommen der Fehler x_1 und x_2 ist gleich dem Producte $\frac{pr}{qs}$ ihrer Wahrscheinlichkeiten $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ einzeln genommen. Dehnt man diese Schlußweise weiter auf drei, vier, ꝛc. Fehler aus, so wird man allgemein als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Vorkommen dieser Fehler das Product derjenigen Wahrscheinlichkeiten erhalten, welche diesen Fehlern einzeln genommen entsprechen *).

---

*) Um diesen Satz und den am Schlusse des §. 8 zur Anwendung gekommenen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehörig aus einander zu halten, bemerke man:

Wenn die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse A, B, C, ꝛc. einzeln gegeben sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eins von diesen Ereignissen eintrete, gleich ihrer Summe; dagegen die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Ereignisse zugleich eintreten, gleich ihrem Product.

Demnach erhält man für die Wahrscheinlichkeit Ω, daß in dem Inbegriffe von m von einander unabhängigen Beobachtungen die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3, ... x_m eintreten werden, denen einzeln genommen die Wahrscheinlichkeiten ω_1, ω_2, ω_3, ... ω_m zugehören, den Ausdruck

$$\Omega = \omega_1 \,.\, \omega_2 \,.\, \omega_3 \,.\,.\,.\,.\, \omega_m$$

oder vermöge des vorigen Paragraphen

$$\Omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_1^2} dx \,.\, \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_2^2} dx \,.\,.\,.\,. \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_m^2} dx$$

oder endlich

$$\Omega = \left(\frac{h dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_m^2)}.$$

§. 16. Der vorstehende Ausdruck für Ω ist unter der Voraussetzung entstanden, daß man die wahren Werthe der Constanten a, b, c, ꝛc. kenne, und er spricht unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit aus, daß bei der Beobachtung der verschiedenen Werthe der Function F die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3, ꝛc. eintreten werden. Nun aber liegt die Aufgabe des §. 2 umgekehrt. Man kennt lediglich die Werthe M_1, M_2, M_3, ꝛc. welche sich statt der wahren Functionswerthe in den einzelnen Beobachtungen ergeben haben. Dagegen sind jene Constanten a, b, c, ꝛc. unbekannt, ebenso wie die wahren Werthe der Function F, welche den einzelnen Beobachtungen entsprechen; folglich auch die wahren Werthe der Beobachtungsfehler, und endlich auch der von diesen abhängige Werth von Ω. Wollte man für a, b, c, ꝛc. willkürliche Annahmen treffen, so würden damit sofort alle diese Größen, und folglich auch Ω, bestimmt sein; andere Annahmen für a, b, c, ꝛc. werden im allgemeinen andere Werthe dieser Größen hervorgehen lassen; die Größe Ω erscheint also hier als eine Function der Constanten a, b, c, ꝛc., und die vorliegende Aufgabe kommt mithin jetzt auf die Frage hinaus, welcher Auswahl von Werthen für diese Constanten man werde den Vorzug zu geben haben.

Ein leitendes Princip für diese Auswahl ergibt sich wieder durch Zuziehung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit. Es ist an sich klar, daß auf Grund der bekannten Beobachtungswerthe M_1, M_2, M_3, 2c., nicht jede beliebige Complexion von Werthen für die Constanten a, b, c, 2c., deren Anzahl von derjenigen der Beobachtungen übertroffen wird, gleich zulässig sein kann, daß man vielmehr unter diesen Complexionen nach der größeren oder geringeren Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden hat, welche ihnen auf Grund der bekannten Beobachtungswerthe beigelegt werden muß. Ist das Gesetz dieser Wahrscheinlichkeiten bekannt, so wird diejenige Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, 2c., welcher das Maximum der Wahrscheinlichkeit entspricht, die gesuchte sein.

§. 17. Zur Ausmittelung des Ausdrucks für die Wahrscheinlichkeit, welche den einzelnen Complexionen von Werthen der Constanten a, b, c, 2c. auf Grund der gegebenen Beobachtungen zuzuschreiben ist, gelangt man auf folgende Weise.

Es seien allgemein U, U', U'', 2c. diejenigen Ursachen, welche einen verlangten Erfolg E hervorbringen. Diese Ursachen werden an sich, d. h. bevor ein Erfolg eingetreten ist, als gleich möglich vorausgesetzt, und es wird angenommen, daß jede die andere ausschließt. Die Ursache U habe q unter sich gleich mögliche Erfolge, unter denen p mal der Erfolg E vorkomme. Ebenso mögen die Ursachen U', U'' 2c. resp. q', q'', 2c. sowol unter sich als mit den vorigen gleich mögliche Erfolge haben, unter denen resp. p', p'', 2c. mal der Erfolg E vorkomme. So lange nun noch kein Erfolg eingetreten ist, so hat man für die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs E unter der Voraussetzung der Ursache U, oder U', oder U'', resp. die Ausdrücke

$$\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \text{ꝛc.}$$

Sobald aber der Erfolg E wirklich eintritt, so werden die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen U, U', U'', ꝛc. resp.

$$\frac{p}{p+p'+p''+\text{ꝛc.}}, \frac{p'}{p+p'+p''+\text{ꝛc.}}, \frac{p''}{p+p'+p''+\text{ꝛc.}}, \text{ꝛc.}$$

Da nun die Ursachen, bevor ein Erfolg da war, für gleich möglich gelten, so hat man überdies

$$q = q' = q'' \text{ ꝛc.}$$

Mithin sind 1) die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen, denen ein gegebener Erfolg zugeschrieben werden kann, proportional denjenigen Wahrscheinlichkeiten, mit welchen dieser Erfolg unter Voraussetzung jener Ursachen einzeln genommen erwartet werden durfte.

Ferner kann man statt der vorigen Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen U, U', U'', ꝛc. resp. auch schreiben

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}+\frac{p''}{q''}+\text{ꝛc.}}, \frac{\frac{p'}{q'}}{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}+\frac{p''}{q''}+\text{ꝛc.}}, \frac{\frac{p''}{q''}}{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}+\frac{p''}{q''}+\text{ꝛc.}}, \text{ꝛc.}$$

Mithin ist 2) die Wahrscheinlichkeit einer jeden Ursache, der ein gegebener Erfolg zugeschrieben werden kann, gleich derjenigen Wahrscheinlichkeit, mit welcher dieser Erfolg unter Voraussetzung jener Ursache erwartet werden durfte, dividirt durch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, welche demselben Erfolge unter Voraussetzung aller möglichen Ursachen, die ihn herbeiführen können, entsprechen.

In der vorliegenden Aufgabe ist jede Ursache, oder U, einerlei mit irgend einer Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc.; der Erfolg, oder E, ist gleichbedeutend mit der Complexion der beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3, ꝛc. der Function F; und endlich die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges unter Voraussetzung jener Ursache wird nach §. 15 ausgedrückt durch die Größe

$$\Omega = \left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_m^2)},$$

welche eine Function von a, b, c, ꝛc. ist. Vermöge des so eben bewiesenen Satzes erhält man also für die Wahrscheinlichkeit, daß dem Eintreten der beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3, ꝛc. der Function F irgend eine beliebige Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc. zum Grunde gelegen habe, den Ausdruck

$$\frac{\Omega}{\Sigma(\Omega)},$$

wo in Zähler für die Constanten a, b, c, ꝛc. die in Rede stehenden Werthe, für welche man die Wahrscheinlichkeit sucht, im Nenner dagegen für dieselben Constanten nach und nach alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen sind. Dieser Nenner kann aber nur unter der Form eines bestimmten Integrals vollständig ausgedrückt werden, und man hat also statt des vorstehenden Bruches zu schreiben

$$\frac{\Omega\, da\, db\, dc \ldots}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \Omega\, da\, db\, dc \ldots}.$$

Bezeichnet man den Nenner dieses letzten Bruchs zur Abkürzung mit $\frac{1}{k}$, so daß k eine Constante bedeutet, welche durch die Bedingung bestimmt wird

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots . k\Omega\, da\, db\, dc \ldots . = 1,$$

so erhält man endlich als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit irgend einer Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc.

$$k\Omega\, da\, db\, dc \ldots .,$$

welcher eine Function der in Rede stehenden Werthe von a, b, c, ꝛc. ist.

Man bemerkt noch leicht, daß die Größe Ω selbst hier wie der Ausdruck für die relative Möglichkeit der nämlichen Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc. angesehen werden kann.

§. 18. Mit Hülfe dieser letzten Entwickelung ergibt sich nun zur Lösung der Aufgabe des §. 2 der gesuchte Weg, um auf Grundlage der gegebenen Beobachtungswerthe M_1, M_2, M_3, ꝛc. der Function F Werthe für die Constanten a, b, c, ꝛc. zu ermitteln, welche den unbekannten wahren Werthen dieser Constanten so nahe wie möglich kommen. Man wird nämlich unter allen denkbaren Complexionen von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc. diejenige zu wählen haben, für welche der Ausdruck ihrer Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k\Omega\, da\, db\, dc \ldots .$$

zu einem Maximum wird. Dieser Ausdruck kann aber nur dadurch zu einem Maximum werden, daß der Ausdruck der entsprechenden relativen Möglichkeit, oder

$$\Omega = \left(\frac{h dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \ldots . + x_m{}^2)}$$

für dieselbe Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, ꝛc. gleichfalls zu einem Maximum wird. Und damit dieses letztere eintrete, ist aus dem Bau dieses Ausdrucks sofort klar, daß der im Exponenten enthaltene Factor

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_m^2 = \Sigma(x^2)$$

für dieselbe Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, 2c. zu einem Minimum werden muß. Man hat also den Satz:

Unter allen Annahmen für die Werthe der Constanten a, b, c, 2c. ist diejenige die wahrscheinlichste, welche die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler oder $\Sigma(x^2)$ zu einem Minimum macht.

Dieser Satz bildet den Mittelpunkt der Methode der kleinsten Quadrate, welche eben daher ihren Namen erhalten hat.

§. 19. Das vorstehende Resultat erhält eine geringe Modification, wenn man nicht mehr wie im §. 14 die Annahme machen darf, daß alle Beobachtungen unter gleich günstigen Umständen angestellt worden seien, d. h. wenn nicht mehr allen Beobachtungen derselbe Grad der Präcision oder h entspricht. Es seien h_1, h_2, h_3, 2c. die verschiedenen Werthe von h, welche den beobachteten Werthen M_1, M_2, M_3, 2c. zugehören. Sodann verwandeln sich die Ausdrücke des §. 14 für ω_1, ω_2, ω_3, 2c. in

$$\omega_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x_1^2} dx, \quad \omega_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x_2^2} dx, \quad \omega_3 = \frac{h_3}{\sqrt{\pi}} e^{-h_3^2 x_3^2} dx, \text{ 2c.}$$

und der Ausdruck für Ω im §. 15 wird

$$\Omega = h_1 h_2 h_3 \ldots \left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + h_3^2 x_3^2 + \ldots)}.$$

Soll nun vermöge des vorigen Paragraphen dieser Ausdruck zu einem Maximum werden, so ist klar, daß die Summe

$$h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + h_3^2 x_3^2 + \ldots = \Sigma(h^2 x^2)$$

zu einem Minimum werden muß. Oder die wahrscheinlichste Annahme für die Werthe der Constanten a, b, c, 2c. wird jetzt diejenige sein, welche die Summe der Quadrate aller Producte, von denen jedes aus einem Beobachtungsfehler und dem zugehörigen Grade der Präcision gebildet ist, zu einem Minimum macht.

Es ist jedoch leicht, die Betrachtung dieses Falles immer auf die des vorigen Paragraphen zurückzuführen. Man denke sich nämlich unter h eine Größe von der Beschaffenheit, daß die Quotienten

$$\frac{h_1^2}{h^2}, \quad \frac{h_2^2}{h^2}, \quad \frac{h_3^2}{h^2}, \text{ ꝛc.}$$

sämmtlich ganze Zahlen werden, welche der Reihe nach mit

$$g_1, \; g_2, \; g_3, \text{ ꝛc.}$$

bezeichnet werden mögen. Durch Einführung dieser Zahlen verwandelt sich der vorige Ausdruck für Ω in

$$\Omega = g_1^{\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} g_3^{\frac{1}{2}} \ldots \left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(g_1x_1^2 + g_2x_2^2 + g_3x_3^2 + \ldots)};$$

und damit dieser Ausdruck zu einem Maximum werde, muß der im Exponenten enthaltene Factor

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + \ldots = \Sigma(gx^2)$$

zu einem Minimum werden. Diese Forderung kommt aber auf diejenige des vorigen Paragraphen zurück. Man hat nämlich nur nöthig die Sache so anzusehen, als ob die Anzahl der gegebenen Beobachtungen $g_1 + g_2 + g_3 +$ ꝛc. betrage, denen sämmtlich derselbe Werth der Präcision h zugehört, und unter denen g_1 den Beobachtungsfehler x_1, g_2 den Beobachtungsfehler x_2, g_3 den Beobachtungsfehler x_3, ꝛc. geliefert haben. Die numerischen Coefficienten g_1, g_2, g_3, ꝛc., welche hiernach die relative Güte der einzelnen Beobachtungen charakterisiren, werden die Gewichte dieser Beobachtungen genannt. Man kann also auch sagen, daß m Beobachtungen, welche für die Function F resp. die Werthe M_1 mit dem Gewicht g_1, M_2 mit dem Gewicht g_2, M_3 mit dem Gewicht g_3, ꝛc. geliefert haben, für den Zweck der Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a, b, c, ꝛc. gleichbedeutend sind mit $g_1 + g_2 + g_3 +$ ꝛc. Beobachtungen, unter denen g_1 dem Werthe M_1, g_2 dem Werthe M_2, g_3 dem Werthe M_3, ꝛc. sämmtlich mit dem Gewicht 1 genommen, zugehören.

Aus der Definition des Gewichts kann man überdies schließen, daß die Gewichte zweier Beobachtungen sich zu einander verhalten wie die Quadrate der Präcisionen dieser Beobachtungen.

Anmerkung. Die Bestimmung der Gewichte, welche, wie man leicht erkennt, überall wo Beobachtungen von verschiedener Güte in dieselbe Rechnung eingehen sollen, vor jeder weiteren Rechnung vorgenommen werden muß, ist in der Regel mit einer größeren oder geringeren Unsicherheit verbunden, und erfordert eine große Unbefangenheit des Urtheils, damit alle die verschiedenartigen Beobachtungen begleitenden Umstände zur numerischen Abschätzung der relativen Güte dieser Beobachtungen gehörig in Betracht gezogen werden. Der leitende Gedanken für diese Bestimmung ist folgender.

Gesetzt man habe bei zwei Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit die Ueberzeugung gewonnen, daß ein gewisser Fehler x in der einen Beobachtung, deren Präcision mit h bezeichnet werden mag, eben so leicht möglich sei im Vergleich mit dem Beobachtungsfehler 0, wie der Fehler x' in der anderen Beobachtung, deren Präcision gleich h' sei. Sodann hat man aus dem Begriffe der relativen Möglichkeit, §. 6,

$$e^{-h^2x^2} = e^{-h'^2x'^2},$$

folglich

$$h^2x^2 = h'^2x'^2, \quad \text{d. i. } h^2 : h'^2 = x'^2 : x^2,$$

worin das Verhältniß der Gewichte beider Beobachtungen ausgesprochen liegt.

Es seien z. B. zu Winkelmessungen, welche in dieselbe Rechnung eingehen sollen, zwei verschiedene Theodoliten benutzt, von denen der eine Ablesungen von 20 Secunden zuläßt, der andere aber mit derselben Zuverlässigkeit nur Ablesungen von 1 Minute. Die Grade der Präcision, welche den Messungen mit diesen beiden Theodoliten entsprechen, seien resp. h und h'. Sodann hat man

$$x : x' = 1 : 3,$$

also vermöge des Vorigen

$$h^2 : h'^2 = 9 : 1,$$

d. h. die Gewichte dieser beiden Gattungen von Beobachtungen sind resp. 9 und 1, wenn man der Rechnung denjenigen Grad der Präcision zum Grunde legt, welche den Beobachtungen der zweiten Art entspricht. Mit anderen Worten, jede Messung mit dem ersten Theodoliten ist 9 Messungen mit dem zweiten Theodoliten gleich zu achten, und so in die Rechnung einzuführen.

Oder es seien verschiedene Längen, welche in dieselbe Rechnung eingehen sollen, durch unmittelbare Anlegung eines Maßstabes (z. B. durch die Meßkette) bestimmt, und man verstehe unter α einen gewissen charakteristischen Fehler der einzelnen Anlegung des Maßstabes, etwa den wahrscheinlichen Fehler derselben, oder auch einen äußersten Fehler, der bei der jedesmaligen Anlegung des Maßstabes nicht leicht überschritten wird. Wenn nun die eine Länge n und die andere n' Anlegungen des Maßstabes erfordert, so ist in der ersten Länge der Fehler $x = n\alpha$ eben so leicht möglich, wie in der zweiten Länge der Fehler $x' = n'\alpha$, oder man hat

$$x : x' = n : n',$$

woraus wie oben folgt

$$h^2 : h'^2 = n'^2 : n^2,$$

d. h. die Gewichte der beiden Längenmessungen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Längen, und werden unmittelbar durch die umgekehrten Werthe dieser Quadrate selbst ausgedrückt, wenn man der Rechnung denjenigen Grad der Präcision zum Grunde legt, welcher der einmaligen Anlegung des Maßstabes entspricht.

§. 20. Die weitere Rechnung zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten a, b, c, 2c. stützt sich, vermöge des im §. 18 aufgestellten Fundamentalsatzes, auf die Lehre von den Maximis und Minimis, welche in der Differentialrechnung erörtert wird. Man hat nämlich die Differentialverhältnisse oder derivirten Functionen von der Function

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \Sigma(x^2),$$

welche zu einem Minimum werden soll, in Bezug auf jede der zu bestimmenden Größen a, b, c, 2c. einzeln gleich Null zu setzen. Dadurch erhält man Gleichungen, deren Anzahl genau derjenigen der zu bestimmenden Größen gleichkommt; also können daraus diese letzteren durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren hergeleitet werden.

Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn die Function F lineär ist in Bezug auf die gesuchten Constanten a, b, c, 2c. Es sei diese Function von der Form

$$F = au + bv + cw + \text{2c.},$$

wo u, v, w, 2c. die unabhängigen Veränderlichen bezeichnen. Diese Veränderlichen nehmen in den einzelnen Beobachtungen die besonderen Werthe u_1, v_1, w_1, 2c.; u_2, v_2, w_2, 2c.; u_3, v_3, w_3, 2c. 2c. an, und diesen entsprechen resp. die beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3, 2c. der Function F. Die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3, 2c. sind die Differenzen zwischen diesen beobachteten Werthen und den wahren Werthen der Function F. Die Anzahl der Beobachtungen ist m und größer als die Anzahl n der unbekannten Constanten a, b, c, 2c.

Nun hat man als Ausdruck der Bedingung, daß die Function $\Sigma(x^2)$ ein Minimum werden soll, die n Gleichungen

$$\frac{d\Sigma(x^2)}{da} = 0, \quad \frac{d\Sigma(x^2)}{db} = 0, \quad \frac{d\Sigma(x^2)}{dc} = 0, \text{ ꝛc.}$$

oder wenn man ausführt

$$x_1 \frac{dx_1}{da} + x_2 \frac{dx_2}{da} + x_3 \frac{dx_3}{da} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x_1 \frac{dx_1}{db} + x_2 \frac{dx_2}{db} + x_3 \frac{dx_3}{db} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x_1 \frac{dx_1}{dc} + x_2 \frac{dx_2}{dc} + x_3 \frac{dx_3}{dc} + \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

Außerdem liefern die Ausdrücke für die Beobachtungsfehler $x_1, x_2, x_3,$ ꝛc. mit Rücksicht auf die gegebene Form der Function F folgende m Gleichungen

$$x_1 = -M_1 + au_1 + bv_1 + cw_1 + \text{ꝛc.}$$

$$x_2 = -M_2 + au_2 + lv_2 + cw_2 + \text{ꝛc.}$$

$$x_3 = -M_3 + au_3 + bv_3 + cw_3 + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

und wenn man dieselben in Bezug auf $a, b, c,$ ꝛc. differentiirt, so folgt

$$\frac{dx_1}{da} = u_1, \quad \frac{dx_1}{db} = v_1, \quad \frac{dx_1}{dc} = w_1, \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{dx_2}{da} = u_2, \quad \frac{dx_2}{db} = v_2, \quad \frac{dx_2}{dc} = w_2, \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{dx_3}{da} = u_3, \quad \frac{dx_3}{db} = v_3, \quad \frac{dx_3}{dc} = w_3, \text{ ꝛc.}$$

ꝛc.

Durch Substitution aller dieser Werthe verwandeln sich die obigen n Bedingungsgleichungen für das Eintreten des Minimum von $\Sigma(x^2)$ in folgende

$$a\Sigma(u^2) + b\Sigma(uv) + c\Sigma(uw) + \text{rc.} = \Sigma(uM)$$
$$a\Sigma(uv) + b\Sigma(v^2) + c\Sigma(vw) + \text{rc.} = \Sigma(vM)$$
$$a\Sigma(uw) + b\Sigma(vw) + c\Sigma(w^2) + \text{rc.} = \Sigma(wM)$$
$$\text{rc.}$$

deren Auflösung für a, b, c, rc. unmittelbar die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe dieser Constanten kennen lehrt.

Die Bedeutung der Summen $\Sigma(u^2)$, $\Sigma(uv)$, rc. ist hier sofort klar. Jede dieser Summen enthält so viel Glieder als Beobachtungen gegeben sind, und diese Glieder selbst sind resp. durch die Data der einzelnen Beobachtungen gegeben.

§. 21. Um die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Constanten in einigen besonderen Fällen zum Abschluß zu bringen, möge zuerst der Fall betrachtet werden, wo nur eine einzige Constante, a, zu bestimmen ist, also die Function F die Gestalt hat

$$F = au.$$

Man hat sodann in der Rechnung des vorigen Paragraphen alle besonderen Werthe von v, w, rc. gleich Null zu setzen, und erhält mithin zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes von a die einzige Gleichung

$$a\Sigma(u^2) = \Sigma(uM),$$

aus welcher folgt

$$a = \frac{\Sigma(uM)}{\Sigma(u^2)}.$$

Es sei z. B. die unbekannte Constante a ein Winkel, den man aus mehreren unter gleich günstigen Umständen angestellten Messungen zu bestimmen sucht. Man habe gefunden

1) durch 6 malige Repetition $308^\circ\ 43'\ 10''$
2) „ 7 „ „ $360^\circ\ 10'\ 20''$
3) „ 10 „ „ $514^\circ\ 31'\ 40''$

und betrachte nun diese drei Werthe wie die beobachteten Werthe M der Function $F = au$, wo u resp. die Werthe 6, 7, 10 hat. Sodann wird

$$\Sigma(uM) = 6 . 308^\circ 43'\ 10'' + 7 . 360^\circ 10'\ 20'' + 10 . 514^\circ 31' 40''$$
$$= 9518^\circ\ 48'\ 0'',$$

$$\Sigma(u^2) = 36 + 49 + 100 = 185,$$

folglich der wahrscheinlichste Werth des gesuchten Winkels

$$a = \frac{9518^\circ 48'\ 0''}{185} = 51^\circ 27' 10,'' 7.^{*)}$$

Berechnet man mit Hülfe dieses Werths von a die einzelnen Werthe der Function $F = au$ und subtrahirt davon die entsprechenden beobachteten Werthe, oder M, so erhält man für die Beobachtungsfehler

$$x_1 = -5,''8 \quad \text{folglich} \quad x_1{}^2 = 33,64$$
$$x_2 = -5,''1 \qquad\qquad x_2{}^2 = 26,01$$
$$x_3 = +7,''0 \qquad\qquad x_3{}^2 = 49,00$$

und man hat kraft der eingeschlagenen Methode die Gewißheit, daß die hier entstehende Summe der Quadrate

---

*) Die drei Beobachtungen einzeln genommen geben für a resp. die Werthe

$51^\circ\ 27'\ 11,''7$
$51^\circ\ 27'\ 11,''4$
$51^\circ\ 27'\ 10,''0.$

Will man diese Zahlen als Beobachtungswerthe der obigen Rechnung zum Grunde legen, so muß man denselben resp. die Quadrate 36, 49, 100 als Gewichte beifügen, und hat so mit Rücksicht auf §. 19 ein Beispiel zu dem nächstfolgenden §. 22, welches denselben wahrscheinlichsten Werth für a liefert wie oben. Man sehe jedoch hierüber die Anmerkung zu dem folgenden §.

der Beobachtungsfehler oder $\Sigma(x^2) = 108,65$ kleiner ausgefallen ist, als sie unter jeder anderen Annahme für a geworden sein würde.

§. 22. Ein besonderer Fall des vorigen Paragraphen ist der, wo alle Werthe von u gleich 1 gesetzt werden, mithin sämmtliche Beobachtungen sich unmittelbar auf eine unbekannte Constante beziehen, welche durch die Gleichung

$$F = a$$

bestimmt wird. Man erhält in diesem Falle zur Auffindung des wahrscheinlichsten Werths von a aus dem Vorigen die Gleichung

$$a\Sigma(1) = \Sigma(M)$$

woraus, da $\Sigma(1) = m$ ist,

$$a = \frac{\Sigma(M)}{m} \text{ d. i.} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \text{2c.}}{m}.$$

Wenn man also den Werth einer unbekannten Größe a durch wiederholte unmittelbare Messungen zu bestimmen sucht, deren Ergebnisse M_1, M_2, M_3, 2c. wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht völlig zusammenfallen, so ist unter der Voraussetzung, daß sämmtlichen Messungen gleiche Zuverlässigkeit zuzuschreiben sei, der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Größe gleich dem arithmetischen Mittel aus sämmtlichen beobachteten Werthen.

Dieser Satz von arithmetischen Mittel, dem man im täglichen Gebrauche eine Art von unmittelbarer Evidenz beizulegen gewohnt ist, ergibt sich hier als eine nothwendige Folgerung aus den vorangestellten Principien. Der auf Grundlage desselben ermittelte Werth der unbekannten Größe leistet der Forderung Genüge, daß die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler oder $\Sigma(x^2)$ kleiner wird, als wenn man der unbekannten Größe irgend einen andern

Werth beigelegt hätte. Als historische Thatsache kann man bemerken, daß der in Rede stehende Satz, als ein Axiom betrachtet, ursprünglich zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gedient hat.

Sind die Beobachtungen nicht von gleicher Zuverlässigkeit, sondern ist der Werth M_1 mit dem Gewicht g_1, der Werth M_2 mit dem Gewicht g_2, 2c. behaftet, so wird man leicht aus §. 19 schließen, daß das arithmetische Mittel zur Bestimmung von a hier die Gestalt annimmt

$$a = \frac{\Sigma(gM)}{\Sigma(g)}.$$

Es sei z. B. wie im §. 21 die unbekannte Constante a ein Winkel, dessen Werth man aus mehreren Repetitionsmessungen zu bestimmen sucht. Man habe gefunden

1) durch 6malige Repetition den Werth $51^\circ\,27'\,11,''7$
2) „ 7 „ „ „ „ $51^\circ\,27'\,11,''4$
3) „ 10 „ „ „ „ $51^\circ\,27'\,10,''0$

und betrachte die Repetitionszahlen 6, 7, 10 wie die Gewichte dieser drei Beobachtungen. Es wird

$$\Sigma(gM) = 6.51^\circ 27' 11,''7 + 7.51^\circ 27' 11,''4 + 10.51^\circ 27' 10,''0$$
$$= 1183^\circ 25' 10'',$$
$$\Sigma(g) = 6 + 7 + 10 = 23,$$

folglich der wahrscheinlichste Werth des gesuchten Winkels

$$a = \frac{1183^\circ 25' 10''}{23} = 51^\circ 27' 10,''9.$$

Mit Hülfe dieses Werthes von a erhält man für die Beobachtungsfehler

$$x_1 = -0,''8 \quad \text{folglich} \quad x_1{}^2 = 0,64$$
$$x_2 = -0,''5 \quad\quad x_2{}^2 = 0,25$$
$$x_3 = +0,''9 \quad\quad x_3{}^2 = 0,81$$

und die Summe, welche zu einem Minimum wird, ist $\Sigma(gx^2) = 13,69$.

Anmerkung. Man wird bemerken, daß dieses Zahlenbeispiel völlig dasselbe ist wie im vorigen §. 21, während sowol der Gang der Rechnung als auch das Endresultat an beiden Stellen verschieden ausfallen. Der Grund dieser Verschiedenheit ist in der Art und Weise zu suchen, wie beide Aufgaben hier der Rechnung dargeboten worden sind, und es dürfte zweckmäßig sein darüber noch Folgendes hinzuzufügen.

Gesetzt es sei bei Repetitionsmessungen mit dem Theodoliten die Voraussetzung zulässig, daß der Fehler, welcher im Visiren auf gegebene Objecte begangen wird, gleich Null gesetzt werden darf. Alsdann werden die einzelnen Winkelmessungen, welche zusammen genommen eine vollständige Repetitionsmessung ausmachen, fehlerfrei an einander schließen und sich zu einer Summe vereinigen, welche nur noch mit den Ablesungsfehlern im Anfange und Ende der ganzen Messung behaftet ist. Bezeichnet man also mit a den unbekannten Winkel und mit n die Repetitionszahl, so kann man in diesem Falle die Sache so ansehen, als ob durch die Repetitionsmessung die Größe na in Einem Acte der Messung unterworfen worden sei. Diese Voraussetzung liegt der Rechnung des §. 21 zum Grunde. Und in der Note zu §. 21 hat sich überdies gezeigt, daß, wenn man die aus den einzelnen Repetitionsmessungen sich ergebenden Werthe des gesuchten Winkels selbst in die Rechnung einführen will, man diesen Werthen als Gewichte die Quadrate der Repetitionszahlen beifügen muß.

Gesetzt ferner es sei bei Repetitionsmessungen mit dem Theodoliten die Voraussetzung zulässig, daß der Fehler, welcher im Ablesen auf dem Limbus (mit Einschluß der Theilungsfehler des Instruments) begangen wird, gleich Null gesetzt werden darf. In diesem Falle ist es gleich=

gültig, ob auf den Stufen, welche die einzelnen Winkelmessungen einer vollständigen Repetitionsmessung von einander trennen, jedesmal eine Ablesung gemacht werde oder nicht, und man darf mithin hier die Sache so ansehen, als ob die Repetitionsmessung nichts anderes als einen Inbegriff von n Einzel-Messungen des Winkels a darbiete, von denen jede noch mit den Visirfehlern in ihrem Anfange und Ende behaftet ist. Diese Voraussetzung liegt der Rechnung des §. 22 zum Grunde, und ist daselbst in der Form zur Anwendung gekommen, daß, wenn man die aus den einzelnen Repetitionsmessungen sich ergebenden Werthe des unbekannten Winkels selbst in die Rechnung einführen will, man diesen Werthen als Gewichte die Repetitionszahlen selbst beifügen muß.

In der Wirklichkeit wird nun keine dieser beiden Voraussetzungen jemals in aller Strenge erfüllt sein, und die obigen Beispiele dürfen demnach hier nur wie Rechnungsbeispiele angesehen werden, welche nur unter den angegebenen besonderen Voraussetzungen Gültigkeit haben. Um der Wirklichkeit vollständig zu genügen, müßte man eine Formel construiren, welche den Visirfehlern und den Ablesungsfehlern zugleich Rechnung trüge. Man kann aber bemerken, daß bei den so vervollkommneten Meßinstrumenten, welche die heutigen Werkstätten liefern, die Ablesungsfehler immer sehr klein bleiben im Vergleich mit den Visirfehlern, und man wird deshalb von der Wirklichkeit sich nicht merklich entfernen, wenn man auf die mit solchen Instrumenten gewonnenen Beobachtungswerthe die zweite der obigen Voraussetzungen ohne Beschränkung anwendet. So hat Gauß bei der im Königreich Hannover von ihm ausgeführten Triangulation immer die Repetitionszahlen selbst als Gewichte der einzelnen Winkelmessungen in Rechnung gebracht.

§. 23. Es werde zweitens der Fall betrachtet, wo zwei Constanten a und b zu bestimmen sind. Die Function F hat sodann die Gestalt

$$F = au + bv,$$

und man wird mithin in den Gleichungen des §. 20 alle besonderen Werthe von w ꝛc. gleich Null zu setzen haben. Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von a und b bleiben also die beiden Gleichungen

$$a\Sigma(u^2) + b\Sigma(uv) = \Sigma(uM)$$
$$a\Sigma(uv) + b\Sigma(v^2) = \Sigma(vM),$$

aus denen folgt

$$a = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uM) - \Sigma(uv)\Sigma(vM)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}$$

$$b = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vM) - \Sigma(uv)\Sigma(uM)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}.$$

Wenn man annimmt, daß alle besonderen Werthe von u gleich 1 sind, so hat die gegebene Function die Gestalt

$$F = a + bv,$$

und die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a und b werden

$$a = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(M) - \Sigma(v)\Sigma(vM)}{m\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}$$

$$b = \frac{m\Sigma(vM) - \Sigma(v)\Sigma(M)}{m\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}.$$

Ein numerisches Beispiel zur Anwendung dieser Formeln wird am Schlusse dieser Abhandlung §. 44 gegeben werden.

§. 24. Es seien drittens drei Constanten a, b, c zu bestimmen, so hat die gegebene Function F die Gestalt

$$F = au + bv + cw,$$

und zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a, b, c hat man die drei Gleichungen

$$a\Sigma(u^2) + b\Sigma(uv) + c\Sigma(uw) = \Sigma(uM)$$
$$a\Sigma(uv) + b\Sigma(v^2) + c\Sigma(vw) = \Sigma(vM)$$
$$a\Sigma(uw) + b\Sigma(vw) + c\Sigma(w^2) = \Sigma(wM),$$

aus denen folgt

$$a = \frac{1}{N} \cdot \left[\begin{array}{l} \{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2) - [\Sigma(vw)]^2\} \Sigma(uM) \\ + \{\Sigma(uw)\Sigma(vw) - \Sigma(uv)\Sigma(w^2)\} \Sigma(vM) \\ + \{\Sigma(uv)\Sigma(vw) - \Sigma(uw)\Sigma(v^2)\} \Sigma(wM) \end{array} \right]$$

$$b = \frac{1}{N} \cdot \left[\begin{array}{l} \{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2) - [\Sigma(uw)]^2\} \Sigma(vM) \\ + \{\Sigma(uw)\Sigma(vw) - \Sigma(uv)\Sigma(w^2)\} \Sigma(uM) \\ + \{\Sigma(uv)\Sigma(uw) - \Sigma(vw)\Sigma(u^2)\} \Sigma(wM) \end{array} \right]$$

$$c = \frac{1}{N} \cdot \left[\begin{array}{l} \{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2\} \Sigma(wM) \\ + \{\Sigma(uv)\Sigma(vw) - \Sigma(uw)\Sigma(v^2)\} \Sigma(uM) \\ + \{\Sigma(uv)\Sigma(uw) - \Sigma(vw)\Sigma(u^2)\} \Sigma(vM) \end{array} \right]$$

wo der gemeinschaftliche Nenner N den Werth hat

$$N = \Sigma(u^2)\Sigma(v^2)\Sigma(w^2) - \Sigma(u^2)[\Sigma(vw)]^2 - \Sigma(v^2)[\Sigma(uw)]^2$$
$$- \Sigma(w^2)[\Sigma(uv)]^2 + 2\Sigma(uv)\Sigma(uw)\Sigma(vw).$$

Wenn die vorgelegte Function sich reducirt auf

$$F = a + bv + cw,$$

so hat man zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der drei Constanten a, b, c in den vorstehenden Ausdrücken überall $u = 1$ und $\Sigma(u^2) = m$ zu setzen.

Ebenso kann man allgemeine Ausdrücke zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von vier oder mehr unbekannten Constanten aufstellen, wenn diese Constanten einer linearen Function angehören, von welcher eine Reihe

25*

von beobachteten Werthen, größer als die Anzahl der unbekannten Constanten, gegeben ist. Man gelangt zu diesen Ausdrücken immer auf dem Wege der gewöhnlichen Elimination.

§. 25. Die vorstehende Herleitung bleibt wesentlich dieselbe für alle Fälle, wo die Function F lineär ist in Bezug auf die unbekannten Constanten a, b, c, ꝛc., wie sie auch sonst von den Veränderlichen u, v, w, ꝛc. abhängen mag. Wäre z. B. F eine algebraische ganze Function von der Veränderlichen v, d. h. von der Form

$$F = a + bv + cv^2 + \ldots + kv^{n-1},$$

so würde man in den Gleichungen des §. 20 überall $u = 1$, $w = v^2$ ꝛc. zu setzen haben, und mithin zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a, b, c, ꝛc. die n Gleichungen erhalten

$$\begin{aligned} am + b\Sigma(v) + c\Sigma(v^2) + \text{ꝛc.} &= \Sigma(M) \\ a\Sigma(v) + b\Sigma(v^2) + c\Sigma(v^3) + \text{ꝛc.} &= \Sigma(vM) \\ a\Sigma(v^2) + b\Sigma(v^3) + c\Sigma(v^4) + \text{ꝛc.} &= \Sigma(v^2M) \\ \text{ꝛc.} & \end{aligned}$$

Aehnlich würde man verfahren, wenn die Function F von der Form wäre

$$F = a + bv + c \log v + \text{ꝛc.}$$

oder von der Form

$$F = a + bv + c \sin v + \text{ꝛc.}$$

und dergleichen.

§. 26. Wenn die Function F nicht lineär ist in Bezug auf die unbekannten Constanten a, b, c, ꝛc., so kann man durch folgende Betrachtung wieder auf die obige Form der Rechnung zurückkommen. Man wähle aus den gegebenen Beobachtungen, deren Anzahl m größer vorausgesetzt wird als die Anzahl n der unbekannten Constanten a, b, c, ꝛc., eine beliebige Gruppe von n Beobachtungen, und berechne aus derselben, indem man sie für den Augenblick als fehlerfrei ansieht, angenäherte Werthe dieser Constanten, die mit A, B, C, 2c. bezeichnet werden mögen. Sodann kann man setzen

$$a = A + \alpha,\ b = B + \beta,\ c = C + \gamma, \text{ 2c.}$$

und die ursprüngliche Aufgabe ist mithin darauf zurückgeführt, diejenigen Werthe der Correctionen α, β, γ, 2c. zu ermitteln, welche zu den gefundenen angenäherten Werthen der unbekannten Constanten hinzugefügt die wahrscheinlichsten Werthe dieser Constanten ergeben.

Zu dem Ende hat man zunächst wieder die Function $\Sigma(x^2)$ zu einem Minimum zu machen, welcher Forderung jetzt durch die n Gleichungen genügt wird

$$x_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + x_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + x_3 \frac{dx_3}{d\alpha} + \text{2c.} = 0$$

$$x_1 \frac{dx_1}{d\beta} + x_2 \frac{dx_2}{d\beta} + x_3 \frac{dx_3}{d\beta} + \text{2c.} = 0$$

$$x_1 \frac{dx_1}{d\gamma} + x_2 \frac{dx_2}{d\gamma} + x_3 \frac{dx_3}{d\gamma} + \text{2c.} = 0$$

2c.

Ferner bezeichne man mit Φ dasjenige, was aus F wird, wenn man statt der Constanten a, b, c, 2c. die angenäherten Werthe A, B, C, 2c. derselben an die Stelle setzt. Alsdann erhält man durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen von mehreren Veränderlichen, und mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der Correctionen α, β, γ, 2c. die Function F unter der Form

$$F = \Phi + \alpha \frac{d\Phi}{dA} + \beta \frac{d\Phi}{dB} + \gamma \frac{d\Phi}{dC} + \text{2c.},$$

welche lineär ist in Bezug auf die unbekannten Correctionen α, β, γ, 2c. Die Ausdrücke für die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3, 2c. liefern also mit Rücksicht auf diese Form der Function F folgende m Gleichungen

$$x_1 = -M_1 + \Phi_1 + \alpha \frac{d\Phi_1}{dA} + \beta \frac{d\Phi_1}{dB} + \gamma \frac{d\Phi_1}{dC} + \text{rc.}$$

$$x_2 = -M_2 + \Phi_2 + \alpha \frac{d\Phi_2}{dA} + \beta \frac{d\Phi_2}{dB} + \gamma \frac{d\Phi_2}{dC} + \text{rc.}$$

$$x_3 = -M_3 + \Phi_3 + \alpha \frac{d\Phi_3}{dA} + \beta \frac{d\Phi_3}{dB} + \gamma \frac{d\Phi_3}{dC} + \text{rc.}$$

rc.

und von hieraus gestaltet sich die weitere Rechnung zur Aufsuchung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Correctionen α, β, γ, rc. genau wie im §. 20. Man setzt nämlich diese Ausdrücke für x_1, x_2, x_3, rc., so wie die daraus abgeleiteten Werthe für die Differentialverhältnisse dieser Größen in Bezug auf α, β, γ, rc. in die obigen Bedingungsgleichungen für das Eintreten des Minimum von $\Sigma(x^2)$; man erhält dadurch Gleichungen, welche mit den Endgleichungen des §. 20 völlig übereinstimmen, sobald man nur die Größen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \text{rc.}\ \frac{d\Phi}{dA},\ \frac{d\Phi}{dB},\ \frac{d\Phi}{dC},\ \text{rc.}\ M - \Phi$$

resp. mit dem obigen

$$a,\ b,\ c,\ \text{rc.}\quad u,\quad v,\quad w,\quad \text{rc.}\quad M$$

für identisch nimmt. Die Endgleichungen des §. 20 enthalten mithin in allen Fällen die Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Sollten die gefundenen Werthe der Correctionen α, β, γ, rc. so beträchtlich ausfallen, daß man die Potenzen derselben nicht ohne Nachtheil glaubt vernachlässigen zu können, so hat man die erhaltenen Werthe der Constanten a, b, c, rc. wie neue Näherungswerthe anzusehen, mit denen man die Rechnung wiederholt.

Es liegt übrigens auf der Hand, daß man das hier angegebene Verfahren auch selbst in dem Falle anwenden kann, wo die Function F lineär ist in Bezug auf die unbekannten Constanten a, b, c, 2c. Da nämlich, nach Feststellung der angenäherten Werthe A, B, C, 2c. dieser Constanten, die Correctionen derselben oder die Größen α, β, γ, 2c. im allgemeinen sich nur noch auf Decimalstellen von niedrigeren Ordnungen beschränken werden, so erreicht man damit, zumal bei verwickelteren Aufgaben, eine nicht unbeträchtliche Erleichterung der numerischen Rechnung.

§. 27. Bis hieher wurde fortwährend die Voraussetzung des §. 2 festgehalten, daß die unbekannten Constanten a, b, c, 2c., deren wahrscheinlichste Werthe gesucht werden, einer und derselben Function F angehören sollen, für welche man durch Beobachtung die Werthe gefunden hat

$$M_1, M_2, M_3, \ldots M_m.$$

Diese Voraussetzung wurde jedoch weniger aus Nothwendigkeit, als vielmehr um der Bequemlichkeit willen gemacht, und man übersieht sehr leicht, daß diese beobachteten Werthe eben sowol auch mehreren von einander verschiedenen Functionen angehören können, welche von den nämlichen unbekannten Constanten a, b, c, 2c. abhängig sind. Denn wenn man in dem Systeme von Gleichungen, welches der §. 2 darstellt, das Zeichen F allmälig, indem man von Gleichung zu Gleichung fortschreitet, je andere und andere Functionen bedeuten läßt, so daß jede Beobachtung einer Function von eigener Art entspricht, so erleiden alle nachfolgenden Schlüsse keinerlei wesentliche Modificationen. Die Methode der kleinsten Quadrate löst mithin bis hieher die Aufgabe: Aus gegebenen Beobachtungen irgend welcher Functionen, deren Werthe von den unbekannten Constanten a, b, c, 2c. abhängen, die wahrscheinlichsten Werthe dieser Constanten zu finden. Die Anzahl der gegebenen Beobachtungen wird dabei stets größer als die Anzahl dieser Constanten vorausgesetzt.

Ein Fall, der hierauf leicht zurückgeführt werden kann, ist derjenige, wo die Werthe

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots .\ M_m$$

unmittelbar beobachtete Werthe der Constanten

$$a,\ b,\ c,\ \ldots .\ k$$

bedeuten, und außerdem gewisse Bedingungsgleichungen

$$L = 0,\ L' = 0,\ \text{rc.}$$

gegeben sind, denen diese Constanten genügen sollen. Es sei nämlich m die Anzahl der gegebenen Beobachtungen und l die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen, wo $l < m$ sein muß, so kann man mit Hülfe dieser Bedingungsgleichungen l Constanten durch die übrigen ausdrücken. Es bleiben mithin $m - l = n$ Constanten durch die Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen, während die gegebenen Beobachtungen die mit Fehlern behafteten Werthe von m verschiedenen Functionen dieser Constanten darstellen. Man hat also wieder einen Fall der angezeigten allgemeinen Aufgabe.

§. 28. Um den zuletzt erörterten Fall durch ein Beispiel zu erläutern, seien die unbekannten Constanten a, b, c die drei Winkel eines ebenen Dreiecks, welche mithin der Bedingung genügen müssen

$$a + b + c = 180^o.$$

Man habe durch Messungen von gleicher Zuverlässigkeit für diese drei Winkel resp. die Werthe gefunden

$$M_1,\ M_2,\ M_3,$$

deren Summe verschieden von 180^o ausgefallen ist; man fragt nach den wahrscheinlichsten Werthen jener Winkel.

Da vermöge der gegebenen Bedingungsgleichung $c = 180^o - a - b$ ist, so hat man nur die wahrscheinlichsten Werthe von zwei Winkeln a und b zu bestimmen. Man kann mithin die drei Functionen aufstellen

$$F = a,\ F = b,\ F = 180^0 - a - b,$$

denen resp. die drei beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3 zugehören; daraus erhält man für die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3 die Ausdrücke

$$x_1 = a - M_1,\ \ x_2 = b - M_2,\ \ x_3 = 180^0 - a - b - M_3,$$

und nun kann man mit Zuziehung der Forderung, daß $\Sigma(x^2)$ ein Minimum werden soll, unmittelbar wie im §. 20 zum Resultate gelangen.

Besser verfährt man jedoch in einem solchen Falle nach der Methode des §. 154 dieses Lehrbuchs, welche eine gleichmäßige Berücksichtigung aller drei Constanten zuläßt. Die Forderung, daß $\Sigma(x^2)$ ein Minimum werden soll, gibt nämlich

$$\frac{d\Sigma(x^2)}{da}\,da + \frac{d\Sigma(x^2)}{db}\,db + \frac{d\Sigma(x^2)}{dc}\,dc = 0$$

oder wenn man für x_1, x_2, x_3 ihre Werthe $a - M_1$, $b - M_2$, $c - M_3$ an die Stelle setzt

$$(a - M_1)\,da + (b - M_2)\,db + (c - M_3)\,dc = 0.$$

Aus der Bedingungsgleichung $a + b + c = 180^0$ folgt überdies

$$da + db + dc = 0.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit dem unbestimmten Factor λ, und addirt sie so zu der ersten, so kommt

$$(a - M_1 + \lambda)\,da + (b - M_2 + \lambda)\,db + (c - M_3 + \lambda)\,dc = 0,$$

woraus

$$a - M_1 + \lambda = 0,\ \ b - M_2 + \lambda = 0,\ \ c - M_3 + \lambda = 0,$$

und wenn man λ eliminirt

$$a - M_1 = b - M_2 = c - M_3.$$

Mit Zuziehung der gegebenen Gleichung $a + b + c = 180^0$ erhält man hieraus endlich

$$a = M_1 + \frac{180^0 - M_1 - M_2 - M_3}{3}$$

$$b = M_2 + \frac{180^0 - M_1 - M_2 - M_3}{3}$$

$$c = M_3 + \frac{180^0 - M_1 - M_2 - M_3}{3}$$

d. h. die Abweichung der Summe der beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3 von 180^0 muß auf alle drei Winkel zu gleichen Theilen vertheilt werden.

Aufgaben dieser Art liefert die Geodäsie in größerer Zahl, und es mögen deren noch einige hier aufgeführt werden:

1) Man habe alle Winkel a, b, c, . . . eines Polygons von n Seiten gemessen, welche mithin an die Bedingungsgleichung gebunden sind

$$a + b + c + \ldots = (n - 2) \,.\, 180^0.$$

Man sucht die wahrscheinlichsten Werthe dieser Winkel.

2) Man habe alle Winkel a, b, c, . . . gemessen, welche um Einen Punkt liegen und mithin an die Bedingungsgleichung gebunden sind

$$a + b + c + \ldots = 360^0.$$

3) Man habe zur Bestimmung zweier Winkel a und b nicht nur diese Winkel einzeln, sondern auch ihre Summe

$$a + b = c$$

gemessen.

4) Man habe zur Bestimmung dreier Winkel a, b, c sowol diese Winkel einzeln, als auch die Summen

$$a + b = d, \quad b + c = e, \quad a + b + c = f,$$

gemessen. Und so fort.

III. Ueber die Genauigkeit der Resultate, welche durch die Methode der kleinsten Quadrate gefunden werden.

§. 29. Wenn die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten a, b, c, ꝛc., deren Ermittelung aus gegebenen Beobachtungen der Zweck des vorigen Abschnitts gewesen ist, mit den wahren Werthen dieser Größen identisch wären, so würde man jetzt ohne Schwierigkeit im Stande sein, durch Hülfe dieser Werthe für alle einzelnen Fälle, denen die beobachteten Werthe

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \text{ꝛc.}$$

der Function F entsprechen, die wahren Werthe dieser Function zu berechnen. Die Differenzen zwischen der Rechnung und der Beobachtung würden sodann die wahren Werthe der Beobachtungsfehler

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \text{ꝛc.}$$

ergeben, und da diese Beobachtungsfehler außerdem in Bezug auf die Häufigkeit ihres Vorkommens dem im I. Abschnitte entwickelten Gesetze gehorchen müssen, so könnte man daraus endlich zur Bestimmung der Präcision h der gegebenen Beobachtungen, oder auch, wenn man lieber will, des wahrscheinlichen Fehlers r dieser Beobachtungen gelangen.

Indessen die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Constanten, so wie die davon abgeleiteten Werthe der beobachteten Function und der Beobachtungsfehler, können von den wahren Werthen dieser Größen noch immer um gewisse endliche Differenzen unterschieden sein, und da man über den Betrag der wahren Werthe keinerlei Art von Kriterium hat, so bleiben auch diese Differenzen vollkommen unbestimmt. Man kann aber auf diesen Gegenstand wieder die Untersuchungen des I. Abschnitts übertragen, nämlich die Frage aufwerfen nach derjenigen Wahrscheinlichkeit, mit welcher zwischen dem wahrscheinlichsten und dem wahren Werthe irgend einer der hier in Betracht kommenden Größen eine gegebene Differenz darf erwartet werden. Diese Wahrscheinlichkeit wird eine Function sein von dieser Differenz, so wie von dem Maße der Präcision, mit welcher der wahrscheinlichste Werth der in Rede stehenden Größe bestimmt worden ist. Um den Ausdruck dieser Function zu erhalten, muß man an die Betrachtung des §. 17 wieder anknüpfen, weil diese den Weg angibt, um von einem gegebenen Erfolge auf die Wahrscheinlichkeiten der ihm zum Grunde liegenden möglichen Ursachen einen Rückschluß zu machen.

§. 30. Man hat nach §. 17 für die Wahrscheinlichkeit irgend einer Complexion von Werthen der Constanten a, b, c, 2c., auf Grund der gegebenen Beobachtungen, allgemein den Ausdruck gefunden

$$k\Omega\, da\, db\, dc \ldots,$$

wo k an die Bedingung gebunden ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots k\Omega\, da\, db\, dc \ldots = 1$$

und Ω den Werth hat

$$\Omega = \left(\frac{h dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 \Sigma(x^2)}.$$

Diese Ausdrücke bedürfen für den Zweck der bevorstehenden Untersuchung einer Modification, betreffend eine schärfere Feststellung der hier zu Grunde zu legenden Bezeichnung. Man verstehe nämlich unter a, b, c, 2c. von jetzt an nicht mehr die allgemeinen Ausdrücke für die unbekannten Constanten, sondern diejenigen bestimmten Werthe dieser Constanten, welche nach §. 18 die Function Ω zu einem Maximum machen; ebenso unter x_1, x_2, x_3, 2c. nicht mehr die allgemeinen Ausdrücke für die Beobachtungsfehler, sondern gleichfalls die der Forderung des §. 18 entsprechenden Werthe dieser Größen; endlich bezeichne Ω_0 das Maximum der Function Ω. Alle diese Größen sind mithin unveränderlich. Dagegen mögen die unbekannten Constanten allgemein ausgedrückt werden durch $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$, rc. und die denselben entsprechenden Werthe der Beobachtungsfehler durch $x_1+\Delta x_1$, $x_2+\Delta x_2$, $x_3+\Delta x_3$, rc., so daß die Größen Δa, Δb, Δc, rc. willkürliche Aenderungen bedeuten, welche man den wahrscheinlichsten Werthen der unbekannten Constanten ertheilt hat, und die Größen Δx_1, Δx_2, Δx_3, rc. Functionen dieser Aenderungen sind.

Vermöge dieser neuen Bezeichnung hat man statt da, db, dc, rc. resp. zu schreiben $d(a+\Delta a)$, $d(b+\Delta b)$, $d(c+\Delta c)$, rc. d. i. $d\Delta a$, $d\Delta b$, $d\Delta c$, rc.; und ebenso statt dx zu schreiben $d(x+\Delta x)$ d. i. $d\Delta x$. Ferner wird

$$\Omega_0 = \left(\frac{hd\Delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x^2)}$$

$$\Omega = \left(\frac{hd\Delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x+\Delta x)^2},$$

woraus

$$\Omega = \Omega_0 \,.\, e^{-h^2[\Sigma(x+\Delta x)^2 - \Sigma(x^2)]}.$$

Die Wahrscheinlichkeit irgend einer Complexion von Werthen der unbekannten Constanten ist jetzt gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß die wahren Werthe dieser Constanten von den wahrscheinlichsten Werthen a, b, c, rc. derselben resp. um die Differenzen Δa, Δb, Δc, rc. verschieden seien. Der Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit wird

$$k\Omega\, d\Delta a\, d\Delta b\, d\Delta c \ldots .$$

wo k an die Bedingung gebunden ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots . k\Omega\, d\Delta a\, d\Delta b\, d\Delta c \ldots . = 1.$$

Mit Zuziehung des vorstehenden Werthes für Ω erhält man als Ausdruck der in Rede stehenden Wahrscheinlichkeit endlich

$$k\Omega_0\, e^{-h^2[\Sigma(x+\Delta x)^2-\Sigma(x^2)]}\, d\Delta a\, d\Delta b\, d\Delta c \ldots.$$

welcher Ausdruck als eine Function der Veränderlichen Δa, Δb, Δc, rc. anzusehen ist.

§. 31. Zur weiteren Entwickelung dieses Ausdrucks in seiner Abhängigkeit von den Differenzen Δa, Δb, Δc, rc. bedarf es jetzt einer bestimmten Annahme über die Natur der Function F. Wie sich im II. Abschnitte gezeigt hat, so ist es für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate allgemein ausreichend, diese Function als lineär in Bezug auf die unbekannten Constanten vorauszusetzen, und man kann mithin wie im §. 20 schreiben

$$F = au + bv + cw + \text{rc.},$$

wo u, v, w, rc. die unabhängigen Veränderlichen bezeichnen, welche in den einzelnen Beobachtungen resp. die Werthe u_1, v_1, w_1, rc.; u_2, v_2, w_2, rc.; u_3, v_3, w_3, rc. rc. annehmen. Man erhält daraus für die Beobachtungsfehler x_1, x_2, x_3, rc. die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
x_1 &= -M_1 + au_1 + bv_1 + cw_1 + \text{rc.}\\
x_2 &= -M_2 + au_2 + bv_2 + cw_2 + \text{rc.}\\
x_3 &= -M_3 + au_3 + bv_3 + cw_3 + \text{rc.}\\
&\text{rc.}
\end{aligned}$$

wo M_1, M_2, M_3, rc. wie früher die einzelnen beobachteten Werthe der Function F bedeuten. Ebenso erhält man für die Beobachtungsfehler $x_1+\Delta x_1$, $x_2+\Delta x_2$, $x_3+\Delta x_3$, rc., welche den geänderten Werthen $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$, rc. der unbekannten Constanten angehören, die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
x_1+\Delta x_1 &= -M_1+(a+\Delta a)u_1+(b+\Delta b)v_1+(c+\Delta c)w_1+\text{rc.}\\
x_2+\Delta x_2 &= -M_2+(a+\Delta a)u_2+(b+\Delta b)v_2+(c+\Delta c)w_2+\text{rc.}\\
x_3+\Delta x_3 &= -M_3+(a+\Delta a)u_3+(b+\Delta b)v_3+(c+\Delta c)w_3+\text{rc}\\
&\text{rc.}
\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser beiden Systeme von Werthen, sowol für die verschiedenen x als für die verschiedenen $x+\Delta x$, verwandelt sich der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß die wahren Werthe der unbekannten Constanten von den wahrscheinlichsten Werthen a, b, c, rc. derselben resp. um die Differenzen Δa, Δb, Δc, rc. verschieden seien, in

$$k\Omega_0 e^{-h^2\left\{\begin{array}{c}\Sigma[-M+(a+\Delta a)u+(b+\Delta b)v+(c+\Delta c)w+\text{rc.}]^2\\ -\Sigma(-M+au+bv+cw+\text{rc.})^2\end{array}\right\}} d\Delta a\, d\Delta b\, d\Delta c \ldots$$

und erscheint somit unmittelbar in seiner Abhängigkeit von den Differenzen Δa, Δb, Δc, rc. dargestellt.

Dieser Ausdruck läßt noch eine Vereinfachung zu. Die Entwickelung des Exponenten von e gibt nämlich

$$\begin{aligned}&\Sigma[-M+(a+\Delta a)u+(b+\Delta b)v+(c+\Delta c)w+\text{rc.}]^2\\ &\qquad -\Sigma(-M+au+bv+cw+\text{rc.})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=2\Sigma(-M+au+bv+cw+\text{rc.})(u\Delta a+v\Delta b+w\Delta c+\text{rc.})\\ &\qquad+\Sigma(u\Delta a+v\Delta b+w\Delta c+\text{rc.})^2.\end{aligned}$$

Der erste von den beiden Theilen auf der rechten Seite dieser Gleichung hat aber den Werth Null. Denn wenn man denselben weiter entwickelt, so erhält man

$$2\Sigma(-M+au+bv+cw+\text{rc.})(u\Delta a+v\Delta b+w\Delta c+\text{rc.})$$

$$=\left[\begin{array}{l}\;\;\,2\Delta a[-\Sigma(uM)+a\Sigma(u^2)+b\Sigma(uv)+c\Sigma(uw)+\text{rc.}]\\ +2\Delta b[-\Sigma(vM)+a\Sigma(uv)+b\Sigma(v^2)+c\Sigma(vw)+\text{rc.}]\\ +2\Delta c[-\Sigma(wM)+a\Sigma(uw)+b\Sigma(vw)+c\Sigma(w^2)+\text{rc.}]\\ +\text{rc.}\end{array}\right]$$

und da die Größen a, b, c, rc., welche hier die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten bezeichnen, den Endgleichungen des §. 20 Genüge leisten müssen, so ist jede Reihe in diesem letzten Ausdrucke für sich gleich Null.

Der Ausdruck der in Rede stehenden Wahrscheinlichkeit wird also jetzt

$$k\Omega_0\, e^{-h^2\Sigma(u\Delta a+v\Delta b+w\Delta c+\text{rc.})^2} d\Delta a\; d\Delta b\; d\Delta c \ldots,$$

wo man auch, wenn man will, im Exponenten statt der Summe $\Sigma(u\Delta a+v\Delta b+w\Delta c+\text{rc.})^2$ kürzer $\Sigma(\Delta x^2)$ schreiben kann.

§. 32. Die Betrachtung dieses Ausdrucks läßt sich bequem zu weiteren Folgerungen fortführen, wenn man über die Anzahl der unbekannten Constanten bestimmte Annahmen macht. Es sei deßhalb erstens nur eine einzige unbekannte Constante in der Function F enthalten, also diese Function von der Gestalt

$$F = au,$$

wo man nach §. 21 als wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Constante findet

$$a = \frac{\Sigma(uM)}{\Sigma(u^2)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth der Constante von diesem wahrscheinlichsten Werthe derselben um die Differenz Δa verschieden sei, wird sodann nach der vorstehenden Formel ausgedrückt durch

$$k\Omega_0\, e^{-h^2\Delta a^2\Sigma(u^2)}\, d\Delta a.$$

Dieser Ausdruck stimmt der Form nach vollkommen überein mit dem Ausdrucke des §. 9 für die Wahrscheinlichkeit ω eines Beobachtungsfehlers x, nämlich

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}\, dx;$$

und betrachtet man mithin x als das allgemeine Symbol irgend einer Abweichung von einem Resultate, dessen Wahrscheinlichkeit ein Maximum ist, so daß x hier mit Δa zusammenfällt, so lassen sich hier alle diejenigen Betrachtungen wiederholen, welche den Gegenstand der §§. 9 bis 13 ausmachen.

Zunächst erhält man unmittelbar, wenn man das Maß der Präcision in der Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes a mit H bezeichnet,

$$H = h\sqrt{\Sigma(u^2)}$$

d. h. die Präcision in der Bestimmung des Werths a der unbekannten Constante verhält sich zu der Präcision der gegebenen Beobachtungen wie $\sqrt{\Sigma(u^2)}$ zu 1.*)

Da man ferner vermöge der Bedingung, der die Größe k unterworfen ist, haben muß

$$k\Omega_0 = \frac{H}{\sqrt{\pi}},$$

so wird die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit selbst gleich

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \Delta a^2} d\Delta a.$$

Daraus erhält man weiter die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung des wahren Werths der unbekannten Constante von dem wahrscheinlichsten Werthe a derselben, absolut genommen, die Größe Δa nicht überschreite, ausgedrückt durch das bestimmte Integral

---

*) Will man statt der Präcisionen H und h die Gewichte G und g einführen, welche sich wie die Quadrate der Präcisionen verhalten, so hat man unmittelbar aus der vorigen Gleichung durch Quadrirung derselben

$$G = g \, . \, \Sigma(u^2)$$

als Ausdruck für das Gewicht G des gefundenen Werthes a, wenn unter g das Gewicht der gegebenen Beobachtungen verstanden wird. Ebenso kann man in allen folgenden Fällen verfahren.

$$\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Delta a} e^{-H^2\Delta a^2}\, d\Delta a;$$

und wenn man $H\Delta a = t$ setzt, so kann man die Werthe dieses bestimmten Integrals aus der Tafel des §. 11 entnehmen.

Was endlich den wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung des Werthes a betrifft, welcher R sein mag, so findet man

$$R = \frac{r}{\sqrt{\Sigma(u^2)}},$$

wo r den wahrscheinlichen Fehler der gegebenen Beobachtungen bezeichnet.

So hat man in dem Zahlenbeispiele des §. 21

$$\sqrt{\Sigma(u^2)} = \sqrt{185} = 13{,}6;$$

folglich beträgt die Präcision in der Bestimmung des Werthes $a = 51^\circ 27' 10,''7$ das 13,6fache der Präcision der gegebenen Beobachtungen; oder der wahrscheinliche Fehler desselben Werths a, d. h. der Fehler, welcher in der Bestimmung von a eben so leicht überschritten, wie nicht erreicht sein kann, beträgt $\frac{1}{13{,}6}$ des wahrscheinlichen Fehlers der gegebenen Beobachtungen.

In dem Falle des §. 22, wo eine unbekannte Constante durch eine wiederholte Anzahl directer Messungen bestimmt wird, hat man

$$\sqrt{\Sigma(u^2)} = \sqrt{\Sigma(1)} = \sqrt{m};$$

man sieht also, daß die Präcision des arithmetischen Mittels im Verhältnisse der Quadratwurzeln aus der Anzahl der gegebenen Beobachtungen zunimmt, oder daß der wahr=

scheinliche Fehler in demselben Verhältnisse abnimmt. So entspricht dem arithmetischen Mittel aus einer 4fachen oder 9fachen Anzahl von Beobachtungen resp. der 2fache oder 3fache Werth der Präcision, oder der zweite oder dritte Theil des wahrscheinlichen Fehlers.

§. 33. Es seien ferner in der Function F zwei unbekannte Constanten enthalten, so daß diese Function die Gestalt hat

$$F = au + bv,$$

wo man nach §. 23 als die wahrscheinlichsten Werthe der beiden Constanten findet

$$a = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uM) - \Sigma(uv)\Sigma(vM)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}$$

$$b = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vM) - \Sigma(uv)\Sigma(uM)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}.$$

Der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß die wahren Werthe der beiden unbekannten Constanten von diesen wahrscheinlichsten Werthen derselben gleichzeitig resp. um die Differenzen Δa und Δb verschieden seien, wird jetzt

$$k\Omega_0 \, e^{-h^2\Sigma(u\Delta a + v\Delta b)^2} \, d\Delta a \, d\Delta b$$

d. i.

$$k\Omega_0 \, e^{-h^2[\Delta a^2\Sigma(u^2) + 2\Delta a\Delta b\Sigma(uv) + \Delta b^2\Sigma(v^2)]} \, d\Delta a \, d\Delta b.$$

Um hieraus die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß der wahre Werth der ersten Constante für sich von dem wahrscheinlichsten Werthe a derselben um die Differenz Δa abweiche, während der Werth der zweiten Constante vollkommen unbestimmt bleibt, verfährt man wie folgt.

Nach den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist (man vergl. §. 8) die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz Δb irgend einen nicht näher bestimmten Werth unter allen möglichen Werthen von $-\infty$ bis $+\infty$ annehme, gleich der Summe derjenigen Wahrscheinlichkeiten, welche diesen möglichen Werthen der Differenz einzeln genommen entsprechen. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz Δa einen bestimmten Werth besitze, während der Werth von Δb vollkommen unbestimmt bleibt, gleich der nämlichen Summe, wenn man bei der Summirung die Größe Δa wie eine Constante betrachtet. Diese Summe wird im vorliegenden Falle durch das bestimmte Integral ausgedrückt

$$k\Omega_0 d\Delta a \,.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2[\Delta a^2\Sigma(u^2)+2\Delta a\Delta b\Sigma(uv)+\Delta b^2\Sigma(v^2)]}\, d\Delta b\,,$$

wo bei der Integration Δa als constant und Δb als die Veränderliche anzusehen ist, auf welche sich die Gränzen $-\infty$ und ∞ des bestimmten Integrals beziehen.

Um die angezeigte Integration auszuführen, suche man zunächst in dem Exponenten von e ein vollständiges Quadrat von einer veränderlichen Größe herzustellen. Man setze zu dem Ende

$$\frac{\Delta a\Sigma(uv)}{\Sigma(v^2)} + \Delta b = \varphi\,,$$

wo φ eine neue Veränderliche bedeutet, so wird $d\Delta b = d\varphi$, und

$$\frac{\Delta a^2[\Sigma(uv)]^2}{[\Sigma(v^2)]^2} + \frac{2\Delta a\Delta b\Sigma(uv)}{\Sigma(v^2)} + \Delta b^2 = \varphi^2$$

$$\frac{\Delta a^2[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)} + 2\Delta a\Delta b\Sigma(uv) + \Delta b^2\Sigma(v^2) = \varphi^2\Sigma(v^2)$$

folglich

$$\Delta a^2\,\Sigma(u^2) + 2\Delta a\,\Delta b\,\Sigma(uv) + \Delta b^2\,\Sigma(v^2) = \varphi^2\,\Sigma(v^2) + \Delta a^2\,\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}.$$

Der obige Ausdruck verwandelt sich also in

$$k\Omega_0 d\Delta a . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\left[\varphi^2\Sigma(v^2)+\Delta a^2\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}\right]} d\varphi$$

oder

$$k\Omega_0 e^{-h^2\Delta a^2\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}} d\Delta a . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varphi^2\Sigma(v^2)} d\varphi.$$

Aber man hat gleichwie im §. 9

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varphi^2\Sigma(v^2)} d\varphi = \frac{1}{h\sqrt{\Sigma(v^2)}} . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(v^2)}}.$$

Mithin erhält man endlich für die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth der ersten Constante von dem wahrscheinlichsten Werthe a derselben um die Differenz Δa verschieden sei, welchen Werth auch gleichzeitig die zweite Constante annehmen mag, den Ausdruck

$$\frac{k\Omega_0\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(v^2)}} . e^{-h^2\Delta a^2\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}} d\Delta a.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man für die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth der zweiten Constante von dem wahrscheinlichsten Werthe b derselben um die Differenz Δb verschieden sei, welchen Werth daneben auch die erste Constante besitzen mag, den Ausdruck

$$\frac{k\Omega_0\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(u^2)}} . e^{-h^2\Delta b^2\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(u^2)}} d\Delta b.$$

§. 34. Wenn man die gefundenen beiden Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten der Differenzen Δa und Δb resp.

zwischen dem wahren und dem wahrscheinlichsten Werthe der beiden Constanten der Function

$$F = au + bv$$

mit dem Ausdrucke des §. 9 für die Wahrscheinlichkeit ω eines Beobachtungsfehlers x vergleicht, nämlich

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx,$$

wo die Größe x eine mit Δa und Δb analoge Bedeutung hat, so lassen sich ähnliche Folgerungen ziehen wie im §. 32 bei der Untersuchung in Betreff einer einzigen unbekannten Constante.

Bezeichnet man zunächst mit H und H' die Maße der Präcision, welche resp. der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe a und b der beiden unbekannten Constanten zugeschrieben werden müssen, so hat man

$$H = h \sqrt{\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}}$$

$$H' = h \sqrt{\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(u^2)}}$$

wo h die Präcision der gegebenen Beobachtungen bezeichnet.

Ferner wird vermöge der Bedingung, an welche die Größe k gebunden ist,

$$\frac{k\Omega_0 \sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(v^2)}} = \frac{H}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{k\Omega_0 \sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(u^2)}} = \frac{H'}{\sqrt{\pi}};$$

folglich können die Wahrscheinlichkeiten für das Stattfinden der Differenzen Δa und Δb auch ausgedrückt werden durch

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \Delta a^2} d\Delta a, \quad \frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2 \Delta b^2} d\Delta b.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten, daß diese Differenzen bei der Bestimmung der Werthe der beiden Constanten absolut ge=

nommen nicht überschritten worden sind, erhält man resp. die Integralausdrücke

$$\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Delta a} e^{-H^2\Delta a^2}\,d\Delta a\,,\quad \frac{2H'}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Delta b} e^{-H'^2\Delta b^2}\,d\Delta b.$$

Endlich werden die wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung der Werthe von a und b, welche resp. mit R und R' bezeichnet werden mögen, ausgedrückt durch

$$R = r\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}}$$

$$R' = r\sqrt{\frac{\Sigma(u^2)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}}$$

wo r den wahrscheinlichen Fehler der gegebenen Beobachtungen bedeutet.

Wenn die vorgelegte Function F von der Gestalt ist

$$F = a + bv,$$

so hat man in den vorstehenden Formeln überall $u = 1$ und $\Sigma(u^2) = m$ zu setzen, wo m wie bisher die Anzahl der gegebenen Beobachtungen anzeigt.

§. 35. Enthält die Function F drei unbekannte Constanten, d. h. ist sie von der Form

$$F = au + bv + cw,$$

so hat man zur Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe a, b, c dieser drei Constanten diejenigen Ausdrücke zu benutzen, welche sich im §. 24 angegeben finden.

Nach der Formel des §. 31 hat man in diesem Falle für die Wahrscheinlichkeit, daß die wahren Werthe der drei unbekannten Constanten von diesen wahrscheinlichsten Werthen derselben gleichzeitig resp. um die Diffenrenzen Δa, Δb, Δc verschieden seien, den Ausdruck

$$k\Omega_0\, e^{-h^2\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c)^2}\, d\Delta a\, d\Delta b\, d\Delta c$$

d. i.

$$k\Omega_0\, e^{-h^2\left\{\begin{array}{l}\Delta a^2\,\Sigma(u^2)\ +\ 2\Delta a\,\Delta b\,\Sigma(uv)\ +\ \Delta b^2\Sigma(v^2)\\ +2\Delta a\Delta c\Sigma(uw)+2\Delta b\Delta c\Sigma(vw)+\Delta c^2\Sigma(w^2)\end{array}\right\}}\, d\Delta a\ d\Delta b\ d\Delta c.$$

Um hieraus die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß der wahre Werth der ersten Constante für sich von dem wahrscheinlichsten Werthe a derselben um die Differenz Δa abweiche, während die Werthe der beiden anderen Constanten vollkommen unbestimmt bleiben, wird man auf ähnliche Weise zu Werke gehen wie im §. 33. Man wird nämlich die Summe der Wahrscheinlichkeiten nehmen, welche allen möglichen Werthen der Differenzen Δb und Δc entsprechen, beide von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen; und als Ausdruck dieser Summe hat man das bestimmte Integral

$$k\Omega_0 d\Delta a\,.\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta b\,.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2[\Delta a^2\Sigma(u^2)+\ldots+\Delta c^2\Sigma(w^2)]}\, d\Delta c,$$

wo Δb und Δc die beiden Veränderlichen sind, auf welche sich die beiden nach einander auszuführenden Integrationen beziehen, während Δa bei beiden Integrationen als constant anzusehen ist.

Integrirt man zuerst in Bezug auf Δc allein, so hat man Δa und Δb als constant zu betrachten, und damit im Exponenten ein vollständiges Quadrat von einer veränderlichen Größe hergestellt werde, wird man setzen

$$\frac{\Delta a\,\Sigma(uw)+\Delta b\,\Sigma(vw)}{\Sigma(w^2)}+\Delta c=\psi$$

wo ψ eine neue Veränderliche bedeutet. Sodann wird $d\Delta c = d\psi$, und

$$\frac{[\Delta a\Sigma(uw)+\Delta b\Sigma(vw)]^2}{[\Sigma(w^2)]^2}+\frac{2\Delta a\Delta c\Sigma(uw)+2\Delta b\Delta c\Sigma(vw)}{\Sigma(w^2)}+\Delta c^2=\psi^2$$

folglich

$$\left[\begin{array}{l}\Delta a^2\,\Sigma(u^2)+2\Delta a\,\Delta b\,\Sigma(uv)+\Delta b^2\,\Sigma(v^2)\\+2\Delta a\Delta c\Sigma(uw)+2\Delta b\Delta c\Sigma(vw)+\Delta c^2\Sigma(w^2)\end{array}\right]$$
$$=\psi^2\Sigma(w^2)+\Delta a^2.P+2\Delta a\Delta b.Q+\Delta b^2.S,$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$P=\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(uw)]^2}{\Sigma(w^2)}$$

$$Q=\frac{\Sigma(uv)\Sigma(w^2)-\Sigma(uw)\Sigma(vw)}{\Sigma(w^2)}$$

$$S=\frac{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(vw)^2]}{\Sigma(w^2)}.$$

Der obige Integralausdruck verwandelt sich jetzt in

$$k\Omega_0 d\Delta a.\int_{-\infty}^{\infty}d\Delta b.\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2[\psi^2\Sigma(w^2)+\Delta a^2P+2\Delta a\Delta b.Q+\Delta b^2S]}d\psi$$

oder

$$k\Omega_0 d\Delta a.\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2[\Delta a^2P+2\Delta a\Delta b.Q+\Delta b^2S]}\,d\Delta b.\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2\psi^2\Sigma(w^2)}d\psi;$$

und weil

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2\psi^2\Sigma(w^2)}d\psi=\frac{1}{h\sqrt{\Sigma(w^2)}}.\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(w^2)}},$$

so erhält man endlich

$$\frac{k\Omega_0\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(w^2)}}\,d\Delta a.\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2[\Delta a^2P+2\Delta a\Delta b.Q+\Delta b^2S]}\,d\Delta b.$$

Um jetzt zweitens die Integration in Bezug auf Δb auszuführen, wobei Δa constant bleibt, wird man eine neue Veränderliche φ einführen, welche durch die Relation bestimmt wird

$$\frac{\Delta a.Q}{S}+\Delta b=\varphi.$$

Man hat sodann $d\Delta b=d\varphi$, so wie ferner

$$\frac{\Delta a^2 Q^2}{S^2} + \frac{2\Delta a\Delta b\,.\,Q}{S} + \Delta b^2 = \varphi^2,$$

folglich

$$\Delta a^2 P + 2\Delta a\Delta b\,.\,Q + \Delta b^2 S = \varphi^2 S + \Delta a^2\,\frac{PS-Q^2}{S}.$$

Der letzte Integralausdruck verwandelt sich also in

$$\frac{k\Omega_0\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(w^2)}}\,d\Delta a\,.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\left[\varphi^2 S+\Delta a^2\,\frac{PS-Q^2}{S}\right]}d\varphi$$

oder

$$\frac{k\Omega_0\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\Sigma(w^2)}}\,e^{-h^2\Delta a^2\,\frac{PS-Q^2}{S}}\,d\Delta a\,.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varphi^2 S}\,d\varphi.$$

Aber man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varphi^2 S}d\varphi = \frac{1}{h\sqrt{S}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{S}}.$$

Mithin erhält man endlich für die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth der ersten Constante von dem wahrscheinlichsten Werthe a derselben um die Differenz Δa verschieden sei, welchen Werth auch gleichzeitig die beiden anderen Constanten annehmen mögen, den Ausdruck

$$\frac{k\Omega_0\pi}{h^2\sqrt{\Sigma(w^2)}\sqrt{S}}\,.\,e^{-h^2\Delta a^2\frac{PS-Q^2}{S}}\,d\Delta a\,;$$

und wenn man für P, Q, S ihre Werthe setzt

$$\frac{k\Omega_0\pi}{h^2\sqrt{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(vw)]^2}}\,.\,e^{-h^2\Delta a^2\frac{N}{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(vw)]^2}}d\Delta a,$$

wo N dieselbe Bedeutung hat wie im §. 24, nämlich

$$N = \Sigma(u^2)\Sigma(v^2)\Sigma(w^2) - \Sigma(u^2)[\Sigma(vw)]^2 - \Sigma(v^2)[\Sigma(uw)]^2 - \Sigma(w^2)[\Sigma(uv)]^2 + 2\Sigma(uv)\Sigma(uw)\Sigma(vw).$$

Durch eine Entwickelung von gleicher Art findet man die Wahrscheinlichkeit der Differenz Δb ausgedrückt durch

$$\frac{k\Omega_0\pi}{h^2\sqrt{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(uw)]^2}} \cdot e^{-h^2\Delta b^2\frac{N}{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(uw)]^2}}d\Delta b,$$

und die Wahrscheinlichkeit der Differenz Δc durch

$$\frac{k\Omega_0\pi}{h^2\sqrt{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}} \cdot e^{-h^2\Delta c^2\frac{N}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}}d\Delta c,$$

wo N immer die vorige Bedeutung beibehält.

§. 36. An die vorstehenden drei Ausdrücke, welche die Wahrscheinlichkeiten der Differenzen Δa, Δb, Δc angeben, um welche resp. die wahren und die wahrscheinlichsten Werthe der drei Constanten der Function

$$F = au + bv + cw$$

von einander abweichen können, lassen sich nun durch Vergleichung mit dem Ausdrucke des §. 9

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

wo der Größe x hier resp. entsprechen $\Delta a, \Delta b, \Delta c,$ wieder ähnliche Folgerungen anknüpfen wie in den §§. 32 und 34.

Zunächst erhält man als Maße der Präcision in der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe a, b, c der unbekannten drei Constanten, welche resp. mit H, H', H'' bezeichnet werden mögen, die Ausdrücke

$$H = h\sqrt{\frac{N}{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(vw)]^2}}$$

$$H' = h\sqrt{\frac{N}{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2)-[\Sigma(uw)]^2}}$$

$$H'' = h\sqrt{\frac{N}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-[\Sigma(uv)]^2}}$$

wo h die Präcision der gegebenen Beobachtungen bezeichnet und N die Bedeutung hat

$$N = \Sigma(u^2)\Sigma(v^2)\Sigma(w^2) - \Sigma(u^2)[\Sigma(vw)]^2 - \Sigma(v^2)[\Sigma(uw)]^2 - \Sigma(w^2)[\Sigma(uv)]^2 + 2\Sigma(uv)\Sigma(uw)\Sigma(vw).$$

Ferner können die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeiten der Differenzen Δa, Δb, Δc, selbst resp. ausgedrückt werden durch

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta a^2}\, d\Delta a\,,\ \frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2\Delta b^2}\, d\Delta b\,,\ \frac{H''}{\sqrt{\pi}} e^{-H''^2\Delta c^2}\, d\Delta c\,;$$

und wenn man diese Differentialausdrücke resp. von $-\Delta a$ bis Δa, von $-\Delta b$ bis Δb, von $-\Delta c$ bis Δc integrirt, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten, daß diese drei Differenzen resp. bei der Bestimmung der Werthe der drei Constanten nicht überschritten worden sind.

Endlich werden die wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe a, b, c der drei unbekannten Constanten, wenn man dieselben resp. mit R, R', R'' bezeichnet,

$$R = r\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)\Sigma(w^2) - [\Sigma(vw)]^2}{N}}$$

$$R' = r\sqrt{\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(w^2) - [\Sigma(uw)]^2}{N}}$$

$$R'' = r\sqrt{\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{N}}$$

wo r der wahrscheinliche Fehler der gegebenen Beobachtungen ist und N die obige Bedeutung hat.

Wenn die Function F die Gestalt hat

$$F = a + bv + cw,$$

so hat man in den vorstehenden Formeln überall $u = 1$ und $\Sigma(u^2) = m$ zu setzen. Wenn ferner ist

$$F = a + bv + cv^2,$$

so wird man überdies w in v^2 verwandeln. Und so in ähnlichen Fällen.

Wie man diese Untersuchungen auch für diejenigen Fälle zu führen hat, wo die vorgelegte Function F vier oder mehr unbekannte Constanten enthält, das ist aus dem bisherigen Gange der Entwickelung ohne Mühe zu übersehen.

§. 37. Zwischen den hier entwickelten Ausdrücken für die Maße der Präcision H, H', H'', ꝛc. oder die wahrscheinlichen Fehler R, R', R'', ꝛc. der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten einer linearen Function F, und den früher gefundenen Ausdrücken für die wahrscheinlichsten Werthe a, b, c, ꝛc. dieser Constanten selbst, findet ein Zusammenhang statt, der hier noch in der Kürze angezeigt werden mag, da er zur Vereinfachung der numerischen Rechnung beiträgt. Es ist nämlich aus der Gestalt der Endgleichungen des §. 20 klar, daß die Werthe von a, b, c, ꝛc., welche sich durch die Auflösung dieser Gleichungen ergeben, als lineäre Functionen der Größen $\Sigma(uM), \Sigma(vM), \Sigma(wM)$, ꝛc. dargestellt werden können, d. h. daß ihre Ausdrücke die Form besitzen müssen

$$a = A\Sigma(uM) + A'\Sigma(vM) + A''\Sigma(wM) + \text{ꝛc.}$$
$$b = B\Sigma(nM) + B'\Sigma(vM) + B''\Sigma(wM) + \text{ꝛc.}$$
$$c = C\Sigma(uM) + C'\Sigma(vM) + C''\Sigma(wM) + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

wo A, A', A'', ꝛc.; B, B', B'', ꝛc.; C, C', C'', ꝛc. ꝛc. numerische Coefficienten bezeichnen, welche auf dem Wege der gewöhnlichen Elimination gefunden werden. Diese Coefficienten kehren aber nach einem gewissen Gesetze wieder, sobald es sich um die Bestimmung der Präcisionen oder der wahrscheinlichen Fehler jener wahrscheinlichsten Werthe der Constanten handelt; man überzeugt sich davon leicht in den bisher behandelten Fällen auf folgende Weise.

1) Für eine Constante, oder $F = au$, hat man

$$a = A\Sigma(uM);$$

und aus der Vergleichung der §§. 21 und 32 erhält man als Maße der Präcision von a

$$H = h\sqrt{\frac{1}{A}}$$

und als wahrscheinlichen Fehler von a

$$R = r\sqrt{A}.$$

2) Für zwei Constanten, oder $F = au + bv$, hat man

$$a = A\Sigma(uM) + A'\Sigma(vM)$$
$$b = B\Sigma(uM) + B'\Sigma(vM)$$

und die Vergleichung der §§. 23 und 34 liefert für die Maße der Präcision von a und b resp.

$$H = h\sqrt{\frac{1}{A}},\ H' = h\sqrt{\frac{1}{B'}},$$

und für die wahrscheinlichen Fehler von a und b resp.

$$R = r\sqrt{A},\ R' = r\sqrt{B'}.$$

3) Für drei Constanten, oder $F = au + bv + cw$, ist

$$a = A\Sigma(uM) + A'\Sigma(vM) + A''\Sigma(wM)$$
$$b = B\Sigma(uM) + B'\Sigma(vM) + B''\Sigma(wM)$$
$$c = C\Sigma(uM) + C'\Sigma(vM) + C''\Sigma(wM)$$

und aus der Vergleichung der §§. 24 und 36 werden die Maße der Präcision von a, b, c resp. gleich

$$H = h\sqrt{\frac{1}{A}},\ H' = h\sqrt{\frac{1}{B'}},\ H'' = h\sqrt{\frac{1}{C''}}$$

und die wahrscheinlichen Fehler von a, b, c resp.

$$R = r\sqrt{A},\ R' = r\sqrt{B'},\ R'' = r\sqrt{C''}.$$

Wie dieses Gesetz für mehr als drei Constanten auszudrücken sei, geht hieraus von selbst hervor. Der allge=

meine Beweis desselben mag jedoch hier, wo vorzugsweise nur die Bedürfnisse der Praxis zur Richtschnur dienen, übergangen werden.

§. 38. Die bisherigen Betrachtungen enthalten fortwährend die Voraussetzung in sich, daß die Präcision h oder der wahrscheinliche Fehler r der gegebenen Beobachtungen, welche beiden Größen nach §. 12 durch die Gleichung

$$hr = \varrho = 0{,}4769360$$

mit einander zusammenhängen, bereits bekannt sei, und sie liefern mithin nur die Präcisionen und die wahrscheinlichen Fehler der gefundenen wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten ausgedrückt resp. durch die Präcision und den wahrscheinlichen Fehler der gegebenen Beobachtungen. Es bleibt also jetzt noch eine exacte Bestimmung dieser beiden zuletzt genannten Größen zu leisten. Zu solcher Bestimmung eignet sich aber nicht mehr das im Eingange des §. 13 angezeigte Verfahren, welches, abgesehen von seiner Unsicherheit bei einer geringen Anzahl von Beobachtungen, vorzüglich deßhalb hier unzulässig wird, weil es die Kenntniß der wahren Beobachtungsfehler voraussetzt, während das bisherige Verfahren nur solche Werthe der Beobachtungsfehler kennen lehrt, welche die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum machen und dadurch zur Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten führen. Man kann dagegen zur Bestimmung der Werthe von h und r auf einem ähnlichen Wege gelangen, wie er im Bisherigen in Betreff der unbekannten Constanten selbst eingeschlagen worden ist, indem man mit Verzichtleistung auf die wahren Werthe jener Größen, die niemals zu ermitteln sind, die wahrscheinlichsten Werthe derselben zu berechnen sucht. Der Weg, welcher zur Auffindung des wahrscheinlichsten Werths der Präcision h der gegebenen Beobachtungen führt, ist folgender.

Der Ausdruck des §. 15

$$\Omega = \left(\frac{h dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 \Sigma(x^2)}$$

spricht die Wahrscheinlichkeit aus, daß bei der Beobachtung von m verschiedenen Werthen der Function F sich die Resultate $M_1, M_2, M_3, \ldots M_m$ ergeben haben. Dieser Ausdruck wurde dort als Function von $a, b, c,$ ꝛc. angesehen, während h als constant galt; man betrachte ihn jetzt als Function von h, während $a, b, c,$ ꝛc. constant bleiben. Zu größerer Einfachheit kann man sich einstweilen unter $a, b, c,$ ꝛc. die wahren Werthe der unbekannten Constanten denken, so daß $\Sigma(x^2)$ die Summe der Quadrate der wahren Beobachtungsfehler bedeutet. Wenn man unter diesen Voraussetzungen das allgemeine Theorem des §. 17 auf den in Rede stehenden Ausdruck anwendet, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß dem Eintreten der beobachteten Werthe $M_1, M_2, M_3, \ldots M_m$ der Function F ein bestimmter Werth der Präcision h zum Grunde gelegen habe, den Ausdruck

$$\frac{\Omega}{\Sigma(\Omega)},$$

wo im Zähler für h der genannte bestimmte Werth, im Nenner dagegen für dieselbe Größe nach und nach der Inbegriff aller möglichen Werthe von $-\infty$ bis ∞ zu setzen ist. Dieser Ausdruck wird also streng die Gestalt annehmen müssen

$$\frac{\Omega dh}{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega dh}.$$

Bezeichnet man den Nenner dieses Bruchs zur Abkür=

zung mit $\frac{1}{k'}$ so daß k' eine Constante bedeutet, welche an die Bedingung gebunden ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} k'\Omega dh = 1,$$

so erhält man endlich als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit irgend eines Werths von h, als Function dieses Werths,

$$k'\Omega dh.$$

Dieser Ausdruck führt nun sofort zur Auffindung des gesuchten wahrscheinlichsten Werthes der Präcision h so wie des wahrscheinlichen Fehlers r der gegebenen Beobachtungen. Der wahrscheinlichste Werth von h wird nämlich derjenige sein, welcher den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit dieser Größe, oder

$$k'\Omega dh$$

zu einem Maximum macht. Dieser Ausdruck kann aber nur dann zu einem Maximum werden, wenn die Größe

$$\Omega = \left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x^2)}$$

für denselben Werth von h gleichfalls zu einem Maximum wird. Und damit dieses geschehe, muß man nach bekannten Regeln haben

$$\frac{d\Omega}{dh} = mh^{m-1}\left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x^2)} - 2h\Sigma(x^2)\left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x^2)} = 0,$$

woraus

$$h = \sqrt{\frac{m}{2\Sigma(x^2)}}$$

als Ausdruck für den wahrscheinlichsten Werth von h. Daraus folgt sogleich weiter

$$r = \frac{\varrho}{h} = \varrho \sqrt{\frac{2\Sigma(x^2)}{m}}$$

als Ausdruck für den wahrscheinlichsten Werth von r.

§. 39. So wie die vorstehende Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes von h im allgemeinen denselben Gang genommen hat wie die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Constanten $a, b, c,$ 2c. im **II.** Abschnitte, so kann man dieselbe Analogie auch weiter verfolgen, indem man nach Vorschrift der §§. 30 2c. die Genauigkeit auszumitteln sucht, welche dieser Bestimmung des wahrscheinlichsten Werths von h zugeschrieben werden muß. Zu dem Ende möge von jetzt an unter h derjenige constante Werth der Präcision der gegebenen Beobachtungen verstanden werden, dessen Wahrscheinlichkeit vermöge des Vorigen ein Maximum ist; der ihm entsprechende Maximumwerth von Ω sei Ω_0; endlich werde die in Rede stehende Präcision allgemein bezeichnet durch $h+\Delta h$. Sodann hat man aus dem vorigen Paragraphen

$$\Omega_0 = \left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2\Sigma(x^2)}$$

$$\Omega = \left(\frac{(h+\Delta h)dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-(h+\Delta h)^2\Sigma(x^2)},$$

folglich

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^m e^{-\Delta h(2h+\Delta h)\Sigma(x^2)}$$

oder vermöge des vorhin gefundenen Werth von h, welcher gibt $\Sigma(x^2) = \frac{m}{2h^2}$,

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^m e^{-m\left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{1}{2}\frac{\Delta h^2}{h^2}\right)}$$

Setzt man hierin

$$\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^m = e^{ml\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)} = e^{m\left(\frac{\Delta h}{h} - \frac{1}{2}\frac{\Delta h^2}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{\Delta h^3}{h^3} - \text{2c.}\right)}$$

so wird auch

$$\Omega = \Omega_0 \, e^{-m\frac{\Delta h^2}{h^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\Delta h}{h}+\text{etc.}\right)}.$$

Ferner wird die Wahrscheinlichkeit irgend eines Werthes der unbekannten Präcision der gegebenen Beobachtungen jetzt gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß zwischen dem wahren Werthe dieser Präcision und dem wahrscheinlichsten Werthe h derselben die Differenz Δh bestehe; und diese Wahrscheinlichkeit hat nach der jetzigen Bezeichnung, wo dh sich in $d(h+\Delta h) = d\Delta h$ verwandelt, den Ausdruck

$$k'\Omega d\Delta h,$$

wo k' an die Bedingung gebunden ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} k'\Omega d\Delta h = 1.$$

Mit Zuziehung des vorstehenden Werths für Ω erhält man als Ausdruck der in Rede stehenden Wahrscheinlichkeit endlich

$$k'\Omega_0 \, e^{-m\frac{\Delta h^2}{h^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\Delta h}{h}+\text{etc.}\right)} d\Delta h,$$

welcher Ausdruck als Function von Δh zu betrachten ist.

So lange Δh im Vergleich mit h sehr klein vorausgesetzt werden darf, so kann man statt dieses gefundenen Ausdrucks für die Wahrscheinlichkeit von Δh annäherungsweise setzen

$$k'\Omega_0 \, e^{-m\frac{\Delta h^2}{h^2}} d\Delta h,$$

und dieser neue Ausdruck läßt wieder, wie früher, unmittelbar eine Vergleichung mit dem Ausdrucke des §. 9 zu, nämlich

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

welcher die Wahrscheinlichkeit ω eines Beobachtungsfehlers x als Function dieses letzteren darstellt. Man erhält aus dieser Vergleichung, bei welcher Δh und x als einander entsprechend anzusehen sind, für das Maß der Präcision, welche der Bestimmung der Größe h zukommt, den Werth

$$\frac{\sqrt{m}}{h};$$

folglich für den wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung von h, nach §. 12, den Werth

$$\frac{\varrho h}{\sqrt{m}},$$

oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß der wahre Werth der Präcision der gegebenen Beobachtungen innerhalb der Gränzen

$$h\left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad h\left(1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

enthalten sei. Diese Gränzen werden die *wahrscheinlichen Gränzen der Präcision* der gegebenen Beobachtungen genannt.

Ueberträgt man dieses Resultat auch auf die obige Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes r des wahrscheinlichen Fehlers der gegebenen Beobachtungen, so erhält man

$$\frac{r}{1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}} \quad \text{und} \quad \frac{r}{1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}}$$

als Ausdrücke für die *wahrscheinlichen Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers* der gegebenen Beobachtungen; statt deren man auch, mit Vernachlässigung der Potenzen des Bruchs $\frac{\varrho}{\sqrt{m}}$, setzen kann

$$r\left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \text{ und } r\left(1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right).$$

Da man hat $\varrho = 0{,}4769360$, so übersieht man leicht, daß diese angenäherten Bestimmungen schon bei einer mäßigen Anzahl von Beobachtungen sich nicht weit von der Wahrheit entfernen.

§. 40. Die hier gegebenen Formeln zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von h und r so wie der wahrscheinlichen Gränzen dieser Größen, kommen zuletzt, nach §. 38, auf die Ermittelung der Hülfsgröße $\sqrt{\frac{(\Sigma x^2)}{m}}$ zurück, welche durch die Eigenschaft charakterisirt wird, daß das Quadrat derselben gleich dem arithmetischen Mittel aus den Quadraten aller Beobachtungsfehler ist. Diese Hülfsgröße wird der mittlere Fehler der gegebenen Beobachtungen genannt. Bezeichnet man den mittleren Fehler mit ε, so hat man

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{m}}$$

und sodann aus §. 38

$$h = 0{,}7071068 \,.\, \frac{1}{\varepsilon}, \quad r = 0{,}6744897 \,.\, \varepsilon$$

als die wahrscheinlichsten Werthe der Präcision und des wahrscheinlichen Fehlers der gegebenen Beobachtungen, woraus sich sodann die wahrscheinlichen Gränzen dieser Größen wie oben weiter bestimmen.

Der mittlere Fehler hat vermöge seiner Definition überdies die Eigenschaft, daß sein Quadrat das wahrscheinlichste unter sämmtlichen Fehlerquadraten darstellt. Dies folgt schon aus dem Satze des §. 22, wonach das arithmetische Mittel aus gegebenen Werthen einer unbekannten Größe mit dem wahrscheinlichsten Werthe dieser unbekannten Größe einerlei ist. Man kann aber auch zu demselben Resultate gelangen, indem man den Inbegriff aller möglichen Beobachtungsfehler von $-\infty$ bis $+\infty$ ins Auge faßt. Die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers x ist nämlich nach §. 9

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

und die relative Möglichkeit desselben Beobachtungsfehlers x wird nach §. 6 ausgedrückt durch

$$y = y_0 \, e^{-h^2x^2},$$

wo y_0 eine willkürliche Constante bezeichnet. Da nun je zwei Beobachtungsfehler, welche sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, einerlei Fehlerquadrat liefern, so kann dieser letzte Ausdruck auch als der Ausdruck der relativen Möglichkeit des Fehlerquadrats x^2 angesehen werden; oder wenn man $x^2 = z$ setzt, so wird die relative Möglichkeit von z ausgedrückt durch

$$y = y_0 \, e^{-h^2 z}.$$

Daraus folgt als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit ω' des Fehlerquadrats z, ähnlich wie im §. 9

$$\omega' = \frac{y}{\Sigma(y)},$$

wo der Nenner auf alle möglichen Werthe von y, also von $z = 0$ bis $z = \infty$ auszudehnen ist; d. h.

$$\omega' = \frac{e^{-h^2 z} dz}{\int_0^\infty e^{-h^2 z} dz} = h^2 e^{-h^2 z} dz;$$

oder als Function der unabhängigen Veränderlichen x ausgedrückt

$$\omega' = 2h^2 \, e^{-h^2x^2} \, x dx.$$

Fragt man nun nach demjenigen Werthe $x = \varepsilon$, welcher diesen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit von x^2 zu einem

Maximum macht, so hat man $\frac{d\omega'}{dx}=0$ zu setzen, woraus sich ergibt

$$\varepsilon^2=\frac{1}{2h^2}$$

übereinstimmend mit dem Obigen.

Man kann bemerken, daß in der Curve des §. 6, die Abscisse $x=\pm\varepsilon$ denjenigen Punkt anzeigt, in welchem die Curve eine Beugung d. h. einen Uebergang aus Concavität in Convexität erleidet.

§. 41. Die Berechnung des mittleren Fehlers gegebener Beobachtungen nach der Formel

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{m}}$$

setzt unter der Bezeichnung $\Sigma(x^2)$ die Summe der Quadrate der wahren Werthe der Beobachtungsfehler als bekannt voraus, und liefert unter dieser Voraussetzung den wahren Werth des mittleren Fehlers der gegebenen Beobachtungen. Jene wahren Werthe der Beobachtungsfehler sind aber unbekannt. Wollte man statt derselben diejenigen aus den früheren Entwickelungen als bekannt anzusehenden Werthe der Beobachtungsfehler setzen, welche $\Sigma(x^2)$ zu einem Minimum machen, so würde der Werth von ε zu klein ausfallen, und folglich auch die daraus hergeleiteten wahrscheinlichsten Werthe von h und r resp. zu groß und zu klein. Mit Rücksicht auf die Bezeichnung des §. 30 hat man vielmehr zu schreiben

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\Sigma(x+\Delta x)^2}{m}}$$

und es entsteht die Frage, wie man hieraus durch Substitution des wahrscheinlichsten Werthes von $\Sigma(x+\Delta x)^2$, welcher von dem Minimum $\Sigma(x^2)$ desselben nothwendig verschieden sein muß, zur Kenntniß des wahrscheinlichsten Werths von ε gelangen kann.

Aus der Entwickelung des §. 31 geht hervor, daß man die Differenz $\Sigma(x+\Delta x)^2 - \Sigma(x^2)$ unter die Form bringen kann

$$\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c + \text{2c.})^2,$$

wo Δa, Δb, Δc, 2c. diejenigen Aenderungen bedeuten, welche den wahrscheinlichsten Werthen a, b, c, 2c. der unbekannten Constanten ertheilt werden müssen, wenn man die wahren Werthe dieser Constanten ausdrücken will. Es ist also

$$\Sigma(x+\Delta x)^2 = \Sigma(x^2) + \Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c + \text{2c.})^2,$$

und da hierin $\Sigma(x^2)$ den durch §. 18 bestimmten Minimumwerth bezeichnet, der hier als bekannt vorauszusetzen ist, so wird man, um den wahrscheinlichsten Werth von $\Sigma(x+\Delta x)^2$ zu finden, nur noch nöthig haben den wahrscheinlichsten Werth der Summe $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c + \text{2c.})^2$ zu suchen. Zu dem Ende betrachte man einzeln die Fälle, wo eine, zwei, drei 2c. Constanten in Betracht kommen.

1) $\Sigma(u\Delta a)^2$ ist gleichbedeutend mit

$$\Delta a^2 \Sigma(u^2),$$

und die Wahrscheinlichkeit von Δa ist nach §. 32 gleich

$$k\Omega_0\, e^{-h^2\Delta a^2\Sigma(u^2)}\, d\Delta a.$$

Folglich ist nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze der wahrscheinlichste Werth von Δa^2 gleich

$$\frac{1}{2h^2\Sigma(u^2)};$$

mithin der wahrscheinlichste Werth von $\Delta a^2\Sigma(u^2)$ oder von $\Sigma(u\Delta a)^2$ gleich

$$\frac{1}{2h^2} \text{ d. i. } = \varepsilon^2.$$

2) $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b)^2$ läßt sich nach §. 33 auf die Form bringen

$$\Delta a^2 \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)} + \varphi^2\Sigma(v^2),$$

wo φ eine neue unabhängige Veränderliche bezeichnet; und die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffens von irgend zwei Werthen von Δa und φ ist

$$k\Omega_0 \, e^{-h^2 \Delta a^2 \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}} d\Delta a \, . \, e^{-h^2 \varphi^2 \Sigma(v^2)} d\varphi.$$

Daraus erhält man durch das im §. 33 eingeschlagene Verfahren für die Wahrscheinlichkeit von Δa den Ausdruck

$$K \, . \, e^{-h^2 \Delta a^2 \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)]^2}{\Sigma(v^2)}} d\Delta a \cdot$$

und ebenso für die Wahrscheinlichkeit von φ den Ausdruck

$$K' \, . \, e^{-h^2 \varphi^2 \Sigma(v^2)} d\varphi,$$

wo K und K' Constanten sind. Folglich werden die wahrscheinlichsten Werthe von Δa^2 und φ^2 vermöge des obigen Satzes resp. gleich

$$\frac{1}{2h^2 \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - [\Sigma(uv)[^2}{\Sigma(v^2)}} \text{ und } \frac{1}{2h^2 \Sigma(v^2)},$$

und wenn man dieselben in den vorigen Ausdruck für $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b)^2$ setzt, so erhält man als wahrscheinlichsten Werth dieser Summe schließlich

$$\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2h^2} = 2\varepsilon^2.$$

3) $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c)^2$ nimmt nach §. 35 die Form an

$$\Delta a^2 \frac{PS - Q^2}{S} + \varphi^2 S + \psi^2 \Sigma(w^2),$$

wo φ und ψ zwei neue Veränderliche bedeuten. Durch ähnliche Schlüsse wie vorhin erhält man daraus für die wahrscheinlichsten Werthe der Quadrate Δa^2, φ^2, ψ^2 resp. die Ausdrücke

$$\frac{1}{2h^2 \frac{PS - Q^2}{S}}, \quad \frac{1}{2h^2 S}, \quad \frac{1}{2h^2 \Sigma(w^2)};$$

folglich als wahrscheinlichsten Werth der Summe $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c)^2$

$$\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2h^2} = 3\varepsilon^2.$$

Die Allgemeinheit dieses Verfahrens ist leicht zu übersehen. Wenn man demnach wieder wie früher mit n die Anzahl der Constanten a, b, c, ꝛc. bezeichnet, so hat man für den wahrscheinlichsten Werth von $\Sigma(u\Delta a + v\Delta b + w\Delta c + \text{ꝛc.})^2$ allgemein den Ausdruck $n\varepsilon^2$; mithin für den gesuchten wahrscheinlichsten Werth von $\Sigma(x + \Delta x)^2$ den Ausdruck

$$\Sigma(x^2) + n\varepsilon^2.$$

Nun ist $\Sigma(x + \Delta x)^2 = m\varepsilon^2$, folglich

$$m\varepsilon^2 = \Sigma(x^2) + n\varepsilon^2,$$

woraus

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{m-n}}$$

als wahrscheinlichster Werth des mittleren Fehlers der gegebenen Beobachtungen, ausgedrückt durch die Anzahl m der gegebenen Beobachtungen, die Anzahl n der gesuchten Constanten, und denjenigen Minimumwerth $\Sigma(x^2)$ der Summe der Fehlerquadrate, welcher vermöge der Entwickelung des §. 18 als bekannt vorausgesetzt werden kann.

Dieser Werth von ε ist zum Grunde zu legen, um daraus die wahrscheinlichsten Werthe der Präcision und des wahrscheinlichen Fehlers der gegebenen Beobachtungen nach den Formeln des §. 40

$$h = 0{,}7071068 \,.\, \frac{1}{\varepsilon}, \quad r = 0{,}6744897 \,.\, \varepsilon$$

so wie die wahrscheinlichen Gränzen dieser Größen nach den Formeln des §. 39 zu berechnen.

§. 42. Die vorstehenden Bestimmungen der Werthe von h und r liefern, soweit die Rechnung darüber Aufschluß zu geben vermag, diejenigen numerischen Data, welche zur Abschätzung der Genauigkeit der gegebenen Beobachtungen gefordert werden können. Setzt man diese Werthe in die Formeln der §§. 32 bis 37, so erhält man zugleich auch die vollständigen Hülfsmittel zur Abschätzung der Genauigkeit der durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Resultate. Zur Erläuterung des Gebrauchs der in diesem Abschnitte gegebenen Formeln möge das Zahlenbeispiel des §. 21 hier wieder aufgenommen werden.

Man hat nach §. 41 als wahrscheinlichsten Werth des mittleren Fehlers der Beobachtungen

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{m-n}} = \sqrt{\frac{108,65}{2}} = 7,''37$$

und daraus als wahrscheinlichsten Werth der Präcision der Beobachtungen

$$h = 0,7071068 \,.\, \frac{1}{7,37} = 0,096$$

und als wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen

$$r = 0,6744897 \,.\, 7,37 = 4,''97.$$

Dieser Werth von r ist kleiner als der kleinste der drei Werthe, welche im §. 21 für die Beobachtungsfehler gefunden worden sind, nämlich

$$x_1 = -5,''8$$

$$x_2 = -5,''1$$

$$x_3 = +7,''0.$$

Diese letzteren liefern vielmehr als wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen den Werth $r = 5,''8$; oder, genauer zu reden, sie sagen aus, daß der Werth von r zwischen $5,''1$ und $7,''0$ enthalten sei. Man erhält indessen eine größere Uebereinstimmung, wenn man auch die wahrscheinlichen

Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers nach §. 39 berechnet. Es wird nämlich

$$r\left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)=3,''63$$

$$r\left(1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)=6,''31$$

d h. man kann 1 gegen 1 wetten, daß der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen zwischen 3,″63 und 6,″31 enthalten sei; und da das Intervall dieser beiden Werthe mit dem Intervall der Werthe 5,″1 und 7,″0 zum Theil zusammenfällt, so hat man damit eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung, wie sie für die geringe Zahl von 3 Beobachtungen nicht wohl größer erwartet werden kann.

Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung des wahrscheinlichsten Werths der unbekannten Constante, nämlich

$$a=51^{\circ}27'\,10,''7,$$

wird nach §. 32

$$R=\frac{r}{\sqrt{\Sigma(u^2)}}=\frac{r}{13{,}6},$$

woraus man für $r=4,''97$ erhält $R=0,''37$ oder auf die erste Decimalstelle verkürzt $R=0,''4$. Man kann also 1 gegen 1 wetten, daß der wahre Werth der Constante a zwischen den Gränzen

$$51^{\circ}\,27'\,10,''3$$

$$51^{\circ}\,27'\,11,''1$$

enthalten sei. Die wahrscheinlichen Gränzen von r dagegen, nämlich 3,″63 und 6,″31, liefern für R die beiden Gränzen

$$0,''27 \quad \text{und} \quad 0,''46;$$

und wenn man die letztere auf die erste Decimalstelle verkürzt, wodurch sie wird 0,″5, so läßt sich mit noch größerer Sicherheit als vorhin sagen, daß man 1 gegen 1 wetten könne, daß der wahre Werth der Constante a zwischen den Gränzen

$$51^{0}\,27'\,10,''2$$

$$51^{0}\,27'\,11,''2$$

enthalten sein muß.

Die Werthe der Präcisionen h und H lassen keine so augenfälligen Folgerungen zu, weßhalb die Berechnung derselben hier nicht weiter verfolgt worden ist.

§. 43. Unter den physikalischen und technischen Aufgaben, welche sich vorzugsweise dazu eignen nach Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate behandelt zu werden, kommt nicht selten der Fall vor, daß die Gestalt der Function F, deren Kenntniß nach §. 2 zur Begründung der ganzen Rechnung gefordert werden muß, entweder gar nicht bekannt ist, oder nur nach ganz allgemeinen Eigenschaften, welche zur vollständigen Herstellung derselben nicht ausreichen. Man pflegt in einem solchen Falle der Function F als eine ganze algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen vorauszusetzen, in welcher jedes Glied eine unbekannte Constante zum Coefficienten hat; also insbesondere, wenn nur eine unabhängige Veränderliche vorliegt, als einen nach den steigenden Potenzen dieser Veränderlichen geordneten Ausdruck oder von der Form

$$F = a + bv + cv^2 + dv^3 + \text{rc.}$$

Die Frage, wie viel Glieder man diesem Ausdrucke der Function geben müsse, damit derselbe eine gegebene Reihe von beobachteten Werthen mit hinreichender Genauigkeit darstelle, läßt sich sodann mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate selbst beantworten.

Jeder Beobachter erlangt nämlich während der Beobachtungen ein ziemlich sicheres Urtheil über die Größe des wahrscheinlichen Fehlers dieser Beabachtungen, d. h. desje=

nigen Fehlers, welchen er bei den in Rede stehenden Beobachtungen eben so leicht überschreitet, wie nicht erreicht. Mit anderen Worten, er wird mit großer Zuverlässigkeit eine Gränze anzugeben im Stande sein, über welche der wahrscheinliche Fehler dieser Beobachtungen keinenfalls hinausgehen kann. Wenn man nun unter der Voraussetzung, daß die Gestalt der Function F unbekannt sei, für F einen ganzen algebraischen Ausdruck mit einer bestimmten Anzahl von Gliedern setzt, und, nach der Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Coefficienten dieser Glieder, zu der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers r der Beobachtungen so wie der wahrscheinlichen Gränzen dieses wahrscheinlichen Fehlers übergeht, so kann der Erfolg ein zweifacher sein. Entweder der berechnete Werth von r überschreitet die im Voraus festgestellte Gränze; in diesem Falle sind die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Functionswerthen größer als die muthmaßlichen Beobachtungsfehler; die gewählte Form der Function F stellt also die gegebenen Beobachtungen in stärkerem Maße ungenau dar, als es durch den Einfluß der Beobachtungsfehler allein hätte geschehen können, und man wird darin die Weisung erkennen, dem Ausdrucke der Function F noch das Glied der nächstfolgenden Ordnung hinzuzufügen. Oder der berechnete Werth von r fällt innerhalb der im voraus festgestellten Gränze; in diesem Falle sind die Fehler, welche durch den Einfluß der unrichtig gewählten Form der Function F entstanden sein können, von einerlei Ordnung mit den Beobachtungsfehlern, und fließen mit diesen zusammen, so daß mithin der gefundene Ausdruck für F die gegebenen Beobachtungen so genau darstellt, als es überhaupt durch eine ganze algebraische Function möglich ist. Man kann also in dem letzten Falle den erhaltenen Ausdruck der Function F für den weiteren Gebrauch beibehalten, wobei es nur von Wichtigkeit sein wird, zu beachten, daß die Anwendung desselben niemals über die Gränzen derjenigen Beobachtungen hinaus ausgedehnt werden darf, auf denen seine Entstehung beruhet.

So wurde in einem hier nicht weiter zu erörternden Beispiele, wo 27 Beobachtungen einer Function F vorlagen, welche nur an die beiden Bedingungen $F(0) = 0$ und $F(-v) = F(v)$ gebunden war, zuerst gesetzt

$$F = av^2;$$

der daraus sich ergebende Werth des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen fiel indessen so groß aus, daß der Beobachter sicher war, einen so großen Beobachtungsfehler nur in seltenen Fällen begangen zu haben. Deßhalb wurde weiter gesetzt

$$F = av^2 + bv^4,$$

wodurch der wahrscheinliche Fehler auf die gewünschte Kleinheit gebracht wurde. Dieser letzte Ausdruck konnte deßhalb, innerhalb der Gränzen der ihm zum Grunde liegenden Beobachtungen, als hinreichend genauer Ausdruck der unbekannten Function beibehalten werden.

Ein noch genaueres Kriterium in Betreff der angemessenen Wahl der Form der Function F erhält man, wenn man mit Hülfe des berechneten Werths von r, welcher im allgemeinen der vorigen Forderung schon Genüge leistet, nach der Tabelle des §. 13 die Vertheilung der Beobachtungsfehler in Bezug auf ihre Größe untersucht und mit den durch die Rechnung gefundenen Werthen der Beobachtungsfehler vergleicht. Je mehr hier Uebereinstimmung herrscht, desto mehr ist man sicher, daß der Einfluß der unrichtig gewählten Form von F auf die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Functionswerthen verschwindend sein muß im Vergleich mit den Fehlern der Beobachtung;

desto näher werden mithin jene Differenzen mit den eigentlichen Beobachtungsfehlern identisch sein.

Dieses letzte Prüfungsmittel wird man übrigens auch in denjenigen Fällen anwenden, wo die Gestalt der Function *F* gegeben ist. Je größer die Anzahl der gegebenen Beobachtungen war, desto mehr muß die Vertheilung der berechneten Werthe der Beobachtungsfehler, in Bezug auf ihre Größe, mit derjenigen Vertheilung der Beobachtungsfehler übereinstimmen, welche die Tabelle des §. 13 darstellt. Wo dieses eintritt, da erhält man den Beweis, daß die Rechnung auf richtigen Voraussetzungen beruht und daß namentlich die Natur der Aufgabe keine fremden Elemente in die Betrachtung eingemischt hat, welche die Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate und insbesondere die Bestimmungen des §. 3 über die Natur der Beobachtungsfehler hätten für den besonderen Fall unzuläßig machen können.

IV. Beispiel.

---

§. 44. Um die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate an einem größeren Rechnungsbeispiele zu zeigen, möge die Aufgabe betrachtet werden: Das specifische Gewicht des legirten (kupferhaltigen) Silbers als Function seines Feingehalts darzustellen.

Bezeichnet man mit v den Feingehalt des Silbers, ausgedrückt in Grän (deren 288 auf eine Mark gehen), so kann die Function F, welche das specifische Gewicht dieses Silbers darstellt, unter die Gestalt gebracht werden

$$F = a + bv,$$

wo a und b Constanten sind. Was die Bedeutung dieser Constanten betrifft, so erkennt man leicht, daß die Constante a das specifische Gewicht des in der Legirung enthaltenen Kupfers bezeichnet; die Constante b dagegen drückt diejenige Zunahme des specifischen Gewichts der Legirung aus, welche einer Zunahme des Feingehalts um je 1 Grän entspricht. Setzt man $v = 288$, so muß der entsprechende Werth von F das specifische Gewicht des in der Legirung enthaltenen reinen Silbers liefern.

Zur Bestimmung der Werthe der unbekannten Constanten a und b wurden die nachstehenden 95 Beobachtungen angestellt.*) Dieselben beziehen sich ausschließlich auf geprägtes Silber; v bezeichnet den bekannten gesetzlichen Feingehalt des Silbers, in Grän, und M das beobachtete specifische Gewicht desselben, d. h. den beobachteten Werth der Function F, welcher jenem gegebenen Werthe von v zugehört.

Nr.	v	M	Nr.	v	M	Nr.	v	M
1	286	10,492	6	286	10,497	11	266,4	10,351
2	„	10,487	7	„	10,467	12	„	10,355
3	„	10,458	8	284	10,464	13	„	10,373
4	„	10,480	9	266,4	10,374	14	264	10,332
5	„	10,505	10	„	10,345	15	261	10,306

*) Diese Beobachtungen sind entlehnt aus der Abhandlung: Die hydrostatische Silberprobe oder das specifische Gewicht als Probe auf den Feingehalt des legirten Silbers, von Karl Karmarsch (Mittheilungen des Gewerbe-Vereins, Lief. 55). Sie finden sich daselbst in den Tabellen III und VII.

Nr.	v	M	Nr.	v	M	Nr.	v	M
16	260	10,312	43	240	10,211	70	168	9,744
17	"	10,274	44	"	10,211	71	"	9,766
18	"	10,321	45	"	10,208	72	"	9,768
19	259,2	10,314	46	"	10,207	73	162	9,746
20	"	10,309	47	"	10,204	74	150	9,663
21	"	10,296	48	"	10,202	75	"	9,662
22	"	10,282	49	"	10,190	76	"	9,646
23	"	10,297	50	"	10,198	77	"	9,640
24	"	10,316	51	"	10,202	78	"	9,667
25	"	10,315	52	"	10,203	79	"	9,662
26	"	10,302	53	"	10,189	80	"	9,681
27	"	10,289	54	216	10,100	81	"	9,672
28	"	10,289	55	"	10,092	82	144	9,637
29	"	10,271	56	"	10,072	83	126	9,532
30	"	10,300	57	"	10,067	84	108	9,439
31	"	10,288	58	"	10,074	85	96	9,385
32	"	10,273	59	"	10,073	86	"	9,383
33	"	10,291	60	"	10,055	87	90	9,333
34	"	10,281	61	213	10,068	88	"	9,306
35	"	10,272	62	193	9,944	89	"	9,317
36	252	10,260	63	192	9,890	90	64	9,203
37	250	10,265	64	190	9,888	91	"	9,196
38	"	10,261	65	"	9,931	92	63	9,196
39	"	10,257	66	168	9,810	93	"	9,237
40	"	10,250	67	"	9,776	94	"	9,153
41	"	10,252	68	"	9,767	95	"	9,197
42	240	10,237	69	"	9,765			

Der Anblick dieser Tabelle lehrt, daß die Werthe von M, insofern sie den gegebenen Werthen von v zugehören sollen, mit Fehlern behaftet sind, welche bis zu mehreren Einheiten der zweiten Decimalstelle aufsteigen. Man kann diese Fehler auf die folgenden drei Quellen zurückführen.

1) Fehler in der Bestimmung der specifischen Gewichte. Diese Fehler, welche allein dem Beobachter zuzuschreiben sind, können das specifische Gewicht eben so leicht zu groß, wie zu klein liefern. Ueber die mögliche Größe dieser Fehler gibt die Bemerkung des Beobachters einen Fingerzeig, daß „die dritte Decimalstelle fast niemals als völlig sicher betrachtet werden kann.“ Hieraus wird man nämlich schließen dürfen, daß die zweite Decimalstelle in der Regel als zuverlässig gelten kann, oder daß der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen, insofern er aus der angezeigten Fehlerquelle allein hervorgeht, weniger als eine Einheit der zweiten Decimalstelle betragen wird.

2) Fehler in der ungleichen Comprimirung des Metalls unter dem Prägstempel. Da die untersuchten Münzstücke aus sehr verschiedenen Münzanstalten herrührten, so kann über das Vorhandensein dieser Fehler kein Zweifel sein. Die Rechnung wird also für eine gewisse mittlere Comprimirung des Metalls gelten, welche in den einzelnen Fällen eben so leicht überschritten, wie nicht erreicht wird. Uebrigens darf man die absolute Größe dieser Fehler in den Werthen von M höchst wahrscheinlich als verschwindend ansehen im Vergleich mit den Fehlern in der Bestimmung der specifischen Gewichte.

3) Fehler in der Composition der Metalllegirung. Hier muß man die beabsichtigten Fehler von

den zufälligen Fehlern unterscheiden. Denn „es geschieht wohl, daß Münzen (besonders die durch den Umlauf schon abgenutzten, der Weißsud-Decke beraubten) um 1 oder ein Paar Grän geringhaltiger sind, als die Münzgesetzgebungen vorschreiben; ja man pflegt wissentlich um 1 bis 2 Grän weniger fein zu legiren, indem man auf die verfeinernde Wirkung des Weißsudes rechnet, so daß die abgenutzte Münze um eben so viel unter dem nominellen Feingehalte bleiben muß." Diese beabsichtigten Fehler können durch die bevorstehende Rechnung nicht ausgemittelt werden, vielmehr wird der Einfluß derselben darin bestehen, daß die Constante a und vielleicht auch die Constante b um ein Geringes fehlerhaft ausfallen wird; oder mit anderen Worten, man erhält durch die folgende Rechnung das specifische Gewicht des geprägten Silbers nicht als Function seines wahren Feingehalts, sondern als Function seines gesetzlichen Feingehalts dargestellt. Was dagegen die zufälligen Fehler in der Composition der Metalllegirung betrifft, so können dieselben eben so wohl positiv wie negativ ausfallen; und über die absolute Größe dieser Fehler läßt sich nur das aussagen, daß ihr Einfluß auf die Werthe von M merklich geringer bleiben wird als der Einfluß der Fehler in der Bestimmung der specifischen Gewichte.

Ferner hat man noch die folgenden beiden Umstände zu beachten.

4) Die gegebenen Beobachtungen werden hier als gleich zuverlässig vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist in der That unrichtig. Da nämlich die specifischen Gewichte aus absoluten Gewichten hergeleitet worden sind, welche in den verschiedenen Beobachtungen verschiedene Werthe hatten, so werden, wenn man diese absoluten Gewichte als gleich zuverlässig ansieht, die specifischen

Gewichte desto genauer sein müssen, je größer die beobachteten absoluten Gewichte gewesen sind. In aller Strenge müßte man also den obigen Werthen von M Gewichte im Sinne des §. 19 beifügen, welche von den beobachteten absoluten Gewichten der Münzstücke abhängig sind und die relative Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen charakterisiren. Will man dies unterlassen, so führt man damit eine neue Fehlerquelle ein, deren Einfluß in den obigen Werthen von M enthalten ist; d. h. die Rechnung wird unter Voraussetzung eines gewissen mittleren Grades von Genauigkeit geführt werden, während zugleich die in 1) angezeigten Fehler vergrößert erscheinen.

5) Die Function $F = a + bv$ wird als der wahre Ausdruck der Abhängigkeit des specifischen Gewichts der Legirung von ihrem Feingehalte angesehen. Diese Voraussetzung ist gleichfalls nicht streng richtig. Die Erfahrung lehrt, daß das Zusammenschmelzen zweier Metalle eine Aenderung ihres Volumen zur Folge zu haben pflegt, und es läßt sich voraussetzen, daß diese Volumänderung am beträchtlichsten sein wird, wenn beide Metalle nahe zu gleichen Theilen verbunden werden (was den mittelhaltigen Legirungen entspricht), dagegen am geringsten, wenn ein großes Quantum des einen Metalls mit einem kleinen Quantum des anderen Metalls verbunden wird (wie in den hochhaltigen und den geringhaltigen Legirungen). Die gegebenen Werthe von M können mithin streng genommen nicht durch eine lineäre Function des Feingehalts dargestellt werden, vielmehr ist die wahre Gestalt dieser Function unbekannt. Man hat also hier ein Beispiel zu §. 43, und es wird, wenn man jene lineäre Function beibehält, der Erfolg der Rechnung entscheiden müssen, ob die in Rede stehende

Function als ein hinreichend genauer Ausdruck der gegebenen Beobachtungen angesehen werden kann, oder nicht.

Die Rechnung selbst gestaltet sich nun wie folgt.

I.

Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der beiden Constanten a und b hat man nach §. 23 die Formeln

$$a = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(M) - \Sigma(v)\Sigma(vM)}{m\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}$$

$$b = \frac{m\Sigma(vM) - \Sigma(v)\Sigma(M)}{m\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}$$

Hier ist $m = 95$. Die Berechnung der Summen $\Sigma(v)$, $\Sigma(v^2)$, $\Sigma(M)$, $\Sigma(vM)$ läßt sich dahin vereinfachen, daß man zuvor diese Summen für diejenigen Beobachtungen einzeln berechnet, welche zu einerlei Werth von v gehören, und hinterher erst alle Partialsummen in eine Summe vereinigt. Die Resultate finden sich in folgender Tabelle.

Nr.	Σ(v)	Σ(v²)	Σ(M)	Σ(vM)
1—7	2002	572572	73,386	20988,4
8	284	80656	10,464	2971,8
9—13	1332	354845	51,798	13799,0
14	264	69696	10,332	2727,6
15	261	68121	10,306	2689,9
16—18	780	202800	30,907	8035,8
19—35	4406,4	1142139	174,985	45356,1
36	252	63504	10,260	2585,5
37—41	1250	312500	51,285	12821,3
42—53	2880	691200	122,462	29390,9
54—60	1512	326592	70,533	15235,1
61	213	45369	10,068	2144,5
62	193	37249	9,944	1919,2
63	192	36864	9,890	1898,9
64—65	380	72200	19,819	3765,6
66—72	1176	197568	68,396	11490,5
73	162	26244	9,746	1578,9
74—81	1200	180000	77,293	11594,0
82	144	20736	9,637	1387,7
83	126	15876	9,532	1201,0
84	108	11664	9,439	1019,4
85—86	192	18432	18,768	1801,7
87—89	270	24300	27,956	2516,0
90—91	128	8192	18,399	1177,5
92—95	252	15876	36,783	2317,3
1—95	19959,4	4595195	952,388	202413,6

Substituirt man diese Werthe in die obigen Formeln, so erhält man

$$a = \frac{336354568}{38165877} = 8{,}81297$$

$$b = \frac{220199}{38165877} = 0{,}0057695.$$

Man hat also als Ausdruck der Function F, welche das specifische Gewicht des geprägten kupferhaltigen Silbers durch den gesetzlichen Feingehalt v desselben darstellt,

$$F = 8{,}81297 + 0{,}0057695 \,.\, v;$$

oder will man das specifische Gewicht nur bis zur dritten Decimalstelle haben, so wie es die obigen beobachteten Werthe geben, so kann man kürzer schreiben

$$a = 8{,}813\,, \quad b = 0{,}00577\,,$$

und

$$F = 8{,}813 + 0{,}00577 \,.\, v.$$

II.

Um über die Genauigkeit der Beobachtungen zu einem Urtheil zu gelangen, berechnet man mit Hülfe des gefundenen Ausdrucks der Function F alle Werthe dieser Function, welche den Werthen von v zugehören, denen die oben gegebenen Beobachtungen entsprechen; und daraus ferner die Werthe der Beobachtungsfehler $F - M = x$ und der Quadrate dieser Beobachtungsfehler. Man findet folgende Resultate.

Nr	F	x	x²	Nr	F	x	x²
1	10,463	—0,029	0,000841	29	10,309	+0,038	0,001444
2	"	— 24	576	30	"	+ 9	81
3	"	+ 5	25	31	"	+ 21	441
4	"	— 17	289	32	"	+ 36	1296
5	"	— 42	1764	33	"	+ 18	324
6	"	— 34	1156	34	"	+ 28	784
7	"	— 4	16	35	"	+ 37	1369
8	10,452	— 12	144	36	10,267	+ 7	49
9	10,350	— 24	576	37	10,255	— 10	100
10	"	+ 5	25	38	"	— 6	36
11	"	— 1	1	39	"	— 2	4
12	"	— 5	25	40	"	+ 5	25
13	"	— 23	529	41	"	+ 3	9
14	10,336	+ 4	16	42	10,198	— 39	1521
15	10,319	+ 13	169	43	"	— 13	169
16	10,313	+ 1	1	44	"	— 13	169
17	"	+ 39	1521	45	"	— 10	100
18	"	— 8	64	46	"	— 9	81
19	10,309	— 5	25	47	"	— 6	36
20	"	0	0	48	"	— 4	16
21	"	+ 13	169	49	"	+ 8	64
22	"	+ 27	729	50	"	0	0
23	"	+ 12	144	51	"	— 4	16
24	"	— 7	49	52	"	— 5	25
25	"	— 6	36	53	"	+ 9	81
26	"	+ 7	49	54	10,059	— 41	1681
27	"	+ 20	400	55	"	— 33	1089
28	"	+ 20	400	56	"	— 13	169

Nr	F	x	x^2	Nr	F	x	x^2
57	10,059	−0,008	0,000064	77	9,678	+0,038	0,001444
58	"	− 15	225	78	"	+ 11	121
59	"	− 14	196	79	"	+ 16	256
60	"	+ 4	16	80	"	− 3	9
61	10,042	− 26	676	81	"	+ 6	36
62	9,927	− 17	289	82	9,644	+ 7	49
63	9,921	+ 31	961	83	9,540	+ 8	64
64	9,909	+ 21	441	84	9,436	− 3	9
65	"	− 22	484	85	9,367	− 18	324
66	9,782	− 28	784	86	"	− 16	256
67	"	+ 6	36	87	9,332	− 1	1
68	"	+ 15	225	88	"	+ 26	676
69	"	+ 17	289	89	"	+ 15	225
70	"	+ 38	1444	90	9,182	− 21	441
71	"	+ 16	256	91	"	− 14	196
72	"	+ 14	196	92	9,177	− 19	361
73	9,748	+ 2	4	93	"	− 60	3600
74	9,678	+ 15	225	94	"	+ 24	576
75	"	+ 16	256	95	"	− 20	400
76	"	+ 32	1024				
							$\Sigma(x^2) = 0{,}038053$

Man erhält hieraus nach §. 41 als wahrscheinlichsten Werth des mittleren Fehlers der gegebenen Beobachtungen, indem man $m = 95$ und $n = 2$ setzt,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{m-n}} = \sqrt{\frac{0{,}038053}{93}} = 0{,}020228;$$

folglich als wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers der gegebenen Beobachtungen, oder des Fehlers, welcher absolut genommen in der Beobachtung der Werthe der Function F eben so leicht überschritten wie nicht erreicht wird,

$$r = 0{,}6744897 \,.\, \varepsilon = 0{,}013644;$$

und endlich nach §. 39 für die wahrscheinlichen Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen die Werthe

$$r\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) = 0{,}012976$$

$$r\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) = 0{,}014312.$$

Diese Werthe widersprechen den Erwartungen nicht, welche man vermöge der obigen Angaben über die vorhandenen Fehlerquellen schon im voraus über die Größe des wahrscheinlichen Fehlers hegen durfte. Auch stimmen sie sehr gut zu den oben berechneten Werthen der Beobachtungsfehler x; denn man hat

47 Fehler unter 0,014
48 Fehler über 0,013,

mithin hat man auch hier den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen zwischen 0,013 und 0,014 zu suchen.

Setzt man $r = 0{,}0136$ und geht mit dieser Zahl in die Tabelle des §. 13, so findet man über das Vorkommen der Beobachtungsfehler in Bezug auf ihre absolute Größe Folgendes:

		Nach der Theorie	Nach den Beobachtungen
Unter r	fallen	47 Fehler	47 Fehler
Zwischen r und $2r$	"	31	31
Zwischen $2r$ und $3r$	"	13	14
Zwischen $3r$ und $4r$	"	3	2
Zwischen $4r$ und $5r$	"	1	1
		95	95

Hieraus geht z. B. hervor, daß der bedeutende Beobachtungsfehler 0,060 in Nr. 93, welcher zwischen $4r$ und $5r$ liegt, vollkommen der Theorie gemäß ist und mithin keineswegs etwa besonderen störenden Ursachen zugeschrieben werden darf.

Diese Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den gegebenen Beobachtungen in Bezug auf die Häufigkeit des Vorkommens der Beobachtungsfehler bestätigt sich auch noch wenn man die Gränzen enger zieht, zwischen denen eine gesuchte Anzahl von Beobachtungsfehlern enthalten sein soll. Seien diese Gränzen z. B. die Zahlen 0, 0,0055, 0,0105, 0,0155, 0,0205, 2c. welche um das Intervall 0,005 fortschreiten, so erhält man die folgenden Resultate:

	Nach der Theorie	Nach den Beobachtungen
Von 0 bis 0,005 fallen	20 Fehler	21 Fehler
„ 0,006 „ 0,010 „	18	18
„ 0,011 „ 0,015 „	15	15
„ 0,016 „ 0,020 „	13	13
„ 0,021 „ 0,025 „	10	8
„ 0,026 „ 0,030 „	7	6
„ 0,031 „ 0,035 „	5	4
„ 0,036 „ 0,040 „	3	7
„ 0,041 „ 0,045 „	2	2
„ 0,046 „ 0,050 „	1	0
„ 0,051 „ 0,055 „	0	0
„ 0,056 „ 0,060 „	1	1
	95	95

Die hier sich zeigende Erscheinung, daß große Beobachtungsfehler in der Praxis etwas häufiger vorkommen, als die Theorie zuläßt, hat sich auch in anderen, namentlich astronomischen Rechnungen mehrfach eingestellt.

Zugleich darf man jetzt auch den in 5) angeregten Umstand als erledigt ansehen, und mithin den Ausdruck $F = a + bv$ innerhalb der Fehlergränzen als den wahren Ausdruck der Function F gelten lassen. Mit anderen Worten, es sind die durch die unrichtige Wahl des Ausdrucks der Function F herbeigeführten Fehler so gering geblieben, daß sie das in den eigentlichen Beobachtungsfehlern nach dem I. Abschnitte herrschende Gesetz nicht merklich haben zu beeinträchtigen vermocht*).

III.

Die Genauigkeit der gefundenen wahrscheinlichsten Werthe der beiden Constanten a und b, nämlich

$$a = 8{,}81297$$
$$b = 0{,}0057695$$

bestimmt sich gleichfalls durch Angabe ihrer wahrscheinlichen Fehler. Man hat nach §. 34 resp. die Ausdrücke

$$R = r\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{m\Sigma(v^2) - \Sigma[(v)]^2}}$$

$$R' = r\sqrt{\frac{m}{m\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}}.$$

---

*) Bemerkbar bleibt indessen der Einfluß der in Rede stehenden Fehler, wenn man die Reihefolge der oben berechneten Werthe von x beachtet. Es findet sich nämlich der Beobachtungsfehler in den hochhaltigen Legirungen Nr. 1 bis 13 überwiegend negativ, dagegen in den mittelhaltigen Legirungen Nr. 66 bis 83 überwiegend positiv; d. h. die Rechnung liefert das specifische Gewicht dort vorherrschend zu klein, hier aber zu groß. Man muß daraus schließen, daß bei der Verbindung von Silber und Kupfer eine Ausdehnung des Metalls eintritt; was mit anderen Erfahrungen übereinstimmt.

Durch Einsetzung der obigen Zahlen findet man hieraus

$$R = 0{,}013644 \sqrt{\frac{4595195}{38165877}} = 0{,}00473$$

$$R' = 0{,}013644 \sqrt{\frac{95}{38165877}} = 0{,}0000215$$

als die wahrscheinlichsten Werthe der wahrscheinlichen Fehler der Constanten a und b. Setzt man aber in diesen Ausdrücken statt r die oben gefundenen wahrscheinlichen Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen, nämlich

0,012976 und 0,014312,

so erhält man für die wahrscheinlichen Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers der ersten Constante a die Werthe

0,00450 und 0,00496

und für die wahrscheinlichen Gränzen des wahrscheinlichen Fehlers der zweiten Constante b die Werthe

0,0000204 und 0,0000226.

Man kann also 1 gegen 1 wetten, daß der wahre Werth der Constante a zwischen den Gränzen

8,80801 und 8,81793,

so wie daß der wahre Werth der Constante b zwischen den Gränzen

0,0057469 und 0,0057921

enthalten sei.