JEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ II.

W WILNIE

w Drukarni Imper: Uniwer:

Roku 1804.

CZĘŚĆ DRUGA

O Bryłach.

WSTĘP.

W częśći piérwszéy samémi tylko zatrudnialiśmy się liniami i powiérzchniami; lubo iakążkolwiek *rozlégłość* (extensio) będzie rzeczy iakiéy, nie ieſt ona ani ſamą linią, ani samą powiérzchnią; ale się rozciąga wzdłuż w ſzerz i wgłąb. I tak, pokóy naprzykład, ma ſwoię długość, ma ſzérokość, i wyſokość, czyli grubość. Tarcica, choćby nayciénſza, ma także długość, ſzérokość i grubość. Nie byłoby powierzchni téy tarcicy, to iest: nie byłoby rozległości iey, uważanéy co do długości tylko, i ſzerokości, gdyby nie było tarcicy uważanéy co do wſzyſtkich iéy wymi rów. Powiérzchniá ograniczá rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiéy rozległości była w sam éy rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powiérzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mowiąc przez podobieństwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobém, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiéy rozległości, (cośmy nazywali linią) nié masz iednak téy długości, ieżeli nié masz powierzchni, którą ona kończy, lub na któréy może bydź w rzeczy saméy ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powiérzchni; a że nie będzie powiérzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącéy trzy wymiary, więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzéma wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mówi się, iż się bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Jeometryá nie uważa inaczéy ciała, tylko ile to rozciągnione iest wzdłuż, wszerz, i wzwyż albo w głąb: innemi zaś własnościami iego całe się nie zatrudnia, zostawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie się, iż sobie ścisłe nader w uważaniu ciała założyli granice Ieometrowie, maią

iednak

iednak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych, których wiadomość po większéy części koniecznie ieſt potrzebna chcącému w Fizyce poſtąpić.

Nie sami tylko Jeometrowie, uważaiąc ciała, iednę sobie w nich właſność, to ieſt rozlègłeść za cel wyſtawuią. Jest to a przynaymniéy bydź powinien, powſzechny poſtępowania ſposób, że gdy kto rzecz iaką zgruntu chce poznać, i poiąć: po części naprzod iéy właſności uważa, a dopiéro łączy ie razém, i dokładniéyſzéy o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele pospołém nieznanych ieżcze własności mógł dochodzić, a tém bardziéy ie ogarnąć.

Skutek takowego właſności rzeczy z osobna dochodzenia, tém większéy ieſt wagi, im więcéy rzeczom taż właſność służyć będzie; a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmysły naſze podpada i podpadać może, wſzystko to iest rozległém; cokolwiek więc odkryie tym ſposobem Jeometra, może to do wſzystkich rzeczy przystoſować, ktore tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane bydź mogą. A ztąd się okazuie ważność w wynalazkach Jeometrycznych, i obfitość w przystosowaniu onychże.

Az Lu-

Lubo maiąc wzgląd na słabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Jeometra, dla więkſzéy iednak wygody i tę ieſzcze dzieli niejako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſaméy oſobno się nie znayduią. Nié ma względu rolnik na grubość ziemi w têm mieyscu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu na têm, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do dostarczania ſoku i do rozwinienia się tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiéy ſtara się, aby wiedział, ile na nim ziarna posiać może, a zatém powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papiéru, końcém zmieszczenia na nim tego co ma piſać: nie wchodząc w jego grubość, i dosyć maiąc na têm, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wſzelako iednak, ciało to, dwie strony odmienne, przeciwne ſobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy ſaméy może od drugiéy, luboby nie znalazło się ſposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż naycieńſze, nie może bydź za iedno brane, co powierzchnia; a zatém nie prawdziwie rzecz wykładaią

nie-

niektórzy Jeometrowie, gdy mowią: że ciało albo bryła ſkłada się z powierzchni położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warſt, z których ciało złożone uważamy każda iednak w ſzczególności ta warſta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy; że nie dla tego ſą od Jeometrów uważane, iakoby w rzeczy ſamey znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak ſzeroká iest droga, którą ma przebyć. dosyć mu na tym, iż się nią udać może. Liczba kroków, które ma czynic nie zawiſła od ſzerokości, ale od ſamey długości tey drógi; tę przeto długość ſzczególniey uważa.

Niechby była bardzo mała ſzerokość powierzchni iakiey, naprzykład równoległoboku, i niechby ta ſama tak mała ſzerokość podzielona była na iak naywięcey części, przez liniie równoodległe od długości, wſzelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieyſza była odległość dwóch linii, które tę ſzczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak linią wziąść ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie

ieſt

ieſt niedokładne a bardziéy ieſzcze łałſzywe; że powierzchnią składa się z linii położonych iednych przy drugich.

Na koniec zdarzaią się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całéy linii, ale koniec iéy tylko ieden lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iéy cześci. W takim razie mówi się, że Jeometra samym się zatrudnia *punktem*. Punktu w ſaméy iſtocie nié maſz, ieżeli nié maſz, linii, którą punkt kończy, albo iéy części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiéy drogi, iak punkt iaki ſobie wystawia wielkością iego cale się nie zaprzątaiąc, aż póki do niego nie doydzie, doszedłſzy uważa dopiéro obſzerność mniéyſca do którego dążył. Nié maſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch linii ten kąt czyniących. Uwagi nad któremi się zaſtanawia Jeometra, czyli to co do położenia punktów iednych względém drugich, czyli względém linii iakiéy, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w jstocie się nie znayduiących, dla łatwiéyſzego, doyścia tégo, czégo ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względém zmyſłów naſzych, lub względém wielkości ciał, które nam nayczęściéy pod zmysły podpadaią: wszelako można oddalić myślą tę małość, względém innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też nay-

mniey-

mnieyſzé, iak gdyby wielkim bardzo było; a to względém tysiączney naprzykład części ſwoiéy.

Niech będzie iak naymnieyſzá liniiá; téy linii koniec ieden, zawſze różnić się będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak nay więcéy części podzielił iaką liniią, każdá z tych części dwa końce odmiénne mieć będzie a ztąd poznać można iak nie prawdziwé iest to wyrażenie; że liniiá składa ſię z punktów przy ſobie położonych.

Wyſtawuiąc ſobie Jeometra pod témi różnemi poſtaciami rozległość, uprzedzać têm ſamém zdaie ſię te trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwéy *bytności* (exiſtèntia) tych rzeczy, które ſą celém iego nauki.

Powiérzchniá płaſká, ieſt powierzchnią, na którey ku wſzyſtkim stronom liniie proste prowadzić można: i takémi to liniiami i powiérzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wſzyſtkie części na téyże ſaméy *płaſzczyznie* zoſtaią (in eodem Plano.) w części następuiącéy takie nadto liniie i powiérzchnie zabawiać nas będą, które na odmiennych płaszczyznach znayduią się.

Z dwoiakiémi liniiami mieliśmy ieſzcze do czynienia, z prostémi i z kołowémi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około któ-

których bawiliśmy się, były albo zakończone liniiami prostémi, albo liniią kołową, albo liniiami prostemi i częściami linii kołowych. W części następuiącéy będziemy nadto zabawiać się różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wystawić sobie można iak gdyby początek miały z obrótu powierzchni płaskich, które iużeśmy roztrząsali. Obaczymy to w szczególności, gdy o każdéy takiéy powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Brył*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które są zakończone powierzchniami płaskiémi, drugie, które się kończą powierzchniami krzywémi albo częścią krzywémi, częścią płaskiémi.

Jeometryá więc, iest to nauka, która się zabawia samą rozległością.

Liniie proste dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwszym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spolną im miarę, do któréy stosowaliśmy każdą z osobna liniią. W drugim względzie, albo liniie z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iednéy względem

dem drugiéy iakiékolwiek do upodobnia położenie: toieſt robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii danéy. Wyznaczyliśmy mieyſce wierzchołków, kątow iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć ſtoſunku okręgu koła do linii proſtéy, przybliżyliśmy iak naybardziéy ſtoſunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz że porównanie okręgów iednych do drugich nie zawisło od porównania okręgu z linią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy naprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Widzieliśmy że to przyſtawanie zawiſło iedynie od wielkości i położenia linii iednych względém drugich; to ieſt, że tylko takie dwie figury przyſtać mogą do ſiebie, w których boki iednakowéy ſą wielkości iedne względem drugich, i iednakowego położenia. Jednem z naynaznamienitszych przyſtoſowań było przeniesienie czyli przerysowanie iakieykolwiek figury proſtokreślnéy. Widzieliśmy także, iż wielkość figur proſtokreślnych nie zawiſła od wielkości i położenia ich boków, gdyż troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podſtawy i wysokości, ſą równe, równe też będą, tak dwa naprzykład troykąty, iako i dwa Równoległo-

bok

boki. gdy ich podſtawy będą w stosunku odwrótnym ich wyſokości. Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ troykąt, równoległobok, i kwadrat może bydź tak zrobiony, że się równać będzie iakiéykolwiek figurze danéy proſtokréślnéy; może ieſzcze zrównany bydź z ſummą lub różnicą figur innych prostokréślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką proſtokreślną. i zryſować takie koło, któréby mało co różniło się od iednéy lub więcéy figur prostokréślnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym Lubo wielkość figury nie ieſt tém ſamém wyznaczona, że wyznaczony ieſt iéy obwod i położenié boków; podany iednak mieliśmy ſpoſob ieden z naywygodnieyſzych, wykréślenia figury proſtokréślnéy o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iéy obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiękſzonym obwodzie, powierzchnia figury bydź może powiękſzona; lubo zmnieyſzenia iey nie ma żadnych granic.

Z podobieńſtwa położenia linii, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże linii wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przystoſowań. Szczególniéy zaś wynikało, przeniesienie

na

na papier, działań na ziemi częstokroć nie równéy odprawionych; które to przeniesienie dokładniéyſzym i łatwiéyſzym ieſzcze stawało się, używſzy rachunku.

W tém wſzystkiém, co się dotąd mówiło, nie wſpomniało się tylko o linii prostéy, i o linii kołowéy, o powiérzchniach płaskich zakończonych przez liniié proſte albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskémi albo krzywémi maiącémi ſwoy początek od powierzchni płaſkich. Ta część Jeometryi, nazywa się *Jeometryą początkową*. (Geometria Elementaris) służy ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilſzych z których się składa *Jeometryá; wyżſzá;* (Geometria sublimis) a wtéy rzecz iest o rozmaitych innich liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasém można, a czasem nie można wyprowadzić z tych oſtatnich linii krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też Jeometryá początkowá od wyżſzey, i co do ſpoſobu ryſowania figur do niéy należących; w Jeometryi albowiém początkowéy, doſyć iest, na cérklu i linii do wykreślenia figur iéy właſnych; każdé przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może byź rozwiązané,

do

do niéy należy. Jeżeli zaś zagadnienie mogąc bydź rozwiązanem, z pomocą samey linii i cérkla, to iest przez same linie i łuki koła, rozwięzuie się z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo linii krzywych, odmiennych od koła, o takowém rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobém zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Linii iako i Płaszczyn iednych względém drugich.

1. *Twierdz:* 1. Gdy liniiá ma dwa swoie punkta, na iednéy płaszczyznie, ma ie oraz i wszystkie na téyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniiá prostá wyznacza się przez dwa punkta; a zatém liniiá prostá poprowadzoná przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyznie zéydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz:* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płaszczyzna.

Dowodz. Wystawmy sobie myślą, iż przez tę linią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; nie. hay ta płaszczyzna obraca się około téyże linii, w tym obrócie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą samą płaszczyzną którey szukamy.

Można także i przez dwie linie przecinaiące się (a) przeprowadzić płaszczyznę; ponieważ płaszczyzna przechodząca przez iednę z tych linii i przez którykolwiek punkt drugiéy, przechodzi razém i przez przecięcie tych dwóch linii, i przez punkt należący do drugiéy linii; a zatem i druga ta linia cała iest na téyże płaszczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki troykąta przeprowadzić płaszczynę. Jakoż płaszczyzna przechodząca prze dwa boki troykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecina tamte dwa,

---

(a) *Mówię.* przecinaiące się, *bo wiele iest linii, których położenie iest takié, że przez nie, nie może razém przechodzić iedna płaszczyzna; naprzykład w kostce od grania, tak iest położoné ramie iedno kąta, na iednéy stronie, i bok przeciwny drugimu ramieni i tegoż kąta, na inn-y stronie, że przez te dwie linie, iedna płaszczyzna przechodzić nie może*

a za-a zatém i ten trzeci bok na teyże ieſt płaſzczyznie.

3. *Twiérdz.* 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinaią, tém ſpólném ich przecięciém, ieſt liniiá proſtá.

Dowodz. Weźmy na tém ſpólném przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaſzczyznie, liniią prostą; ta liniiá będzie miała na drugiey płaſzczyznie dwa punkta do ſiebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiéy płaſzczyznie; a zatém będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to ieſt będzie ſpolném ich przecięciém.

To co się o płaſzczyznach powiedziało, można porównać z tém co się linii tycze; to iést liniiá proſtá wyznacza się przez dwa punkta, płaſzczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie linie przecinaiące się. Gdy znowu dwie linie wzaiém się przecinaią, punkt spólném ich ieſt przecięciém; gdy zaś przecinaią się dwie płaszczyzny, spólném ich przecięciem iest liniiá prostá.

4. *Twirdz.* 4. Gdy liniiá prostá do dwóch innych, które się przecinaią na iednéy płaſzczyznie, proſtopadłą ieſt w punkcie ich przecięcia, będzie też proſtopadłą i do każdéy innéy linii, przechodzącéy przez ten punkt na téyże płaſzczyznie.

Można

Można to naprzod obiaśnić na karcie przełamanéy. Liniiá prostá, podług któréy karta się przełamała, prostopadłą iest do boków, części dwóch, téy karty przełamanéy. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli spólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniiá przecięcia była prostopadłą, odmieniać będzie położenie, wszelako iednak na iednéy zostanie płaszczyznie i liniiá przecięcia zawsze do niego będzie prostopadłą. Ten przykład prawdę tę zmysłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech będą dwie liniie proste, AB, i CD. przecinaiące się w P, i niech do obydwóch prostopadłą będzie liniiá SP. Na płaszczyznie przechodzącéy przez te dwie linie, pociąg nawszy przez punkt P. iakązkolwiek linią EF. do téy linii będzie też prostopadłą liniá SP.

Weźmiy liniie równe: PA, i PB, i znowu PC, i PD, także równe. Poprowadźmy BD. spotykaiące liniią EF, w punktach AC, E, i F.

Ponieważ Troykąty: APC, i BPD, maią dwa boki równe iedne względém drugich, i kąty między témi bokami zawarte, także równe, więc mogą przystać do siebie; a w szczególności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i Troykąty APE, i BPF, iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty

równe

równe iedné względém drugich, mogą też do siebie przystać, a w szczególności, równé są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniymy ieszcze liniie SA, SB, SC, SD; troykąty prostokątne SPA, SPB, máią bok spólny SP, i boki PA, i PB, równe: a zatém mogą do siebie przystać, a w szczególności liniie SA, SB, są równé. Podobnie równé są i liniie SC, i SD. Dwa więc troykąty CSA, BSD, których boki wszystkie równé są iedné względém drugich mogą do siebi przystać, a w szczególności kąty SAC, i SBD są równé.

Poprowadziwszy SE, SF; i troykąty SAE, SBF, maią boki SA, i AE, równe względém boków SB, i BF, i kąty między témi bokámi zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a w szczególności rowne są liniié, SE, i SF.

Więc w troykątach SPE, i SPF równe są boki w jednym, względém boków drugiego, a zatém i te przystać mogą do siebie; a w szczégólności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razém dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątém prostym; a zatém liniiá SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To twierdzenie bardziéy w dowodzeniu długie niż trudne, powinno bydź obiaśnioném przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w jnny sposob. Toż

rozu-

rozumieć trzeba i względém wszystkich prawie podań, w téy części zawartych.

5. *Defin*: Gdy liniiá prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iéy spadku przecinaią na płaszczyznie iakiéy, o takiéy linii mówi się, że iest prostopadłą do téy płaszczyzny; a zatym ieżeli liniiá prostopadłą iest do dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniiá prostopadłą iest i do tey płaszczyzny.

6. *Twierdz: 5. Wzaiemnie*, ieżeli liniiá, prostopadłą iest do trzech innych linii, które się w jednym iéy punkcie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii, prezchodzi też i przez trzecią.

Niech będzié liniiá SP, prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP. *Tab.I, Fig.1.*

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakáżkolwiek będzie liniiá, w któréy ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez linie PB, i PD, wszelako liniiá SP, będzie prostopadłą do tego spólnego przecięcia, a zatém gdyby liniiá PF, nie była tém spólném przecięciém, tedy liniiá SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na téyże co i ona płaszczyznie, to iest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiéy ieszcze linii różnéy od PF, przecinaiącéy spólnie dwie płaszczyzny; co bydź nie może. Liniiá więc PF. nie iest różná od spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, i BPD, a zatém iest tém spólném przecięciém, przeto należy i do drugiéy płaszczyzny BPD; to iest ta płaszczyzna BPD, przechódzącâ przez liniié PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz:* 6. Dwie liniié prostopadłe do iednéy płaszczyzny, są od siebie równo-
Tab.I. odległe.

Fig.2. Niech będą dwie liniié BA, i CD, prostopadłe do iednéy płaszczyzny, na którą spadaią w punktach B, i C, te dwie liniié są równoodległe.

Poprowadźmy liniią BC, a od końca C, spólnego linii BC, z liniią DC, prostopadłą do płaszczyzny, wyciągniymy na téy płaszczyznie prostopadłą CE, do BC, równą iakiéykolwiek długości BA, wziętéy na drugiéy linii prostopadłéy do téyże płaszczyzny. Poprowadźmy ieszcze i liniié BE, AE. Dwa troykąty ABC, ECB, maią spólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykreslenia, i kąty proste: ABC, BCE; więc te troykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności liniie BE, AC, są równe. Dwa tedy troykąty ABE, ECA maią względém siebie równe wszystkie boki, á zatym przystać mogą do siebie; a w szczegulności

ności równe są kąty ABE, i ACE; że zaś liniiá AB, prostopadłą iest do linii BE, ponieważ wzięliśmy ią za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez liniié BC, BE) więc kąt ACE, iest też prosty; a zatém liniiá EC, prostopadłá do dwóch linii CB, i CD, z wykréslenia, iest też prostopadłą i do linii CA. Przeto ta liniiá CA iest na téy saméy płaszczyznié, co i liniié BC, CD. Aże płaszczyzna przechodzącá przez liniié AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc liniié AB, CD, są na iednéy płaszczyznie; będąc zaś na iednéy płaszczyznie, że są prostopadłémi od linii BC, więc od siebie równoodległemi będą.

Przestroga. Aby łatwiéy zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2. w linii BC; tak, aby część iedna ABCD, téy Figury, przypadała prosto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomagać można łatwiéyszému wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaszczyzna.

Uwaga W piérwszéy części cokolwiek się mówiło o liniiach równoodległych, zawsze to było w tém rozumieniu, że te liniié kréślone były, na téy saméy płaszczyznie, na któréy i każda inna liniiá łączącá dwa ich punkta, leżała.

8, *Twierdz*: 7. Jeżeli dwie liniié są od siebie równoodległémi, a iedna z nich prostopadłą iest do iakiéy płaszczyzny, będzie i drugá do téyże płaszczyzny prostopadłą.

Tab.I. Fig.2. Weźmy dwie liniiè BA, i CD za równoodległe; ieżeli iedna z nich nap: CD, iest prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, będzie do téyże płaszczyzny prostopadłą i drugá BA.

Na płaszczyznie, do któréy wzięlismy za prostopadłą CD, pociągniymy CB; będą do CB, prostopadłémi obiedwie liniié AB, i CD. Na téyże płaszczyznie niech będzie CE, prostopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy ieszcze AC, AE, i BE. Całe dowodzenie na tém zawisło, aby okazać, że kąt ABE, iest prostym, to iest, że liniiá AB, prostopadłą do linii BC, iest razém prostopadłą i do linii BE, leżącéy na téy saméy płaszczyznie, do któréy liniiá CD iest prostopadłą.

Dwa tróykąty prostokątne ABC, i ECB, maią ramiona kąta prostego równe iedne względém drugich; a zatém te dwa tróykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności linie AC, i BE, są równe. Maią tedy dwa troykąty ABE, i ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względém drugich, i mogą zatém przystać do siebie; a w szczególności równe są kąty ABE, i ACE. Płaszczyzna przechodzącá przez dwie liniié równoodległe AB, i CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc li-

nie

niie DC, BC, i AC, na iednéy płaszczyznie leżą. A że liniiá CE iest prostopadłą do dwóch linii CD, i BC; będzie też prostopadłą i do trzeciéy linii CA; a zatém kąt ACE, est prostym; a że ten kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, iest prostym.

9 *Zagad*: Spuścić prostopadłą do płaszczyzny, z punktu nie na niéy danego. Tab:I.

Niech będzie taki punkt S, z którego Fig:3. spuścić trzeba prostąpadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyznie danéy nakréślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę linią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaszczyzna, na któréy pociągniymy SD, prostopadłą do AB. Na danéy płaszczyznie niech też będzie poprowadzoná DP, prostopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na któréy niech będzie SP, prostopadłą do linii DP; ta liniiá SP, będzie razém prostopadłą, któréy szukaliśmy.

Wykreślenie służące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniiá EF, równoodległá od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykréślenia są prostopadłe do linii AB; więc liniié DB, wzaiémnie iest do obydwóch tych linii prostopadłą; a zatém prosopadłą iest i do płaszczy-

szczy-

szczyzny przechodzącéy, przez te dwie liniié. Aże liniiá EF, równoodległą iest od linii AB, więc liniiá EF, iest też prostopadłą do téyże płaszczyzny SDP: a w szczególności prostopadłą iest do linii SP; i liniiá SP, iest wzaiemnie do linii EF, prostopadłą. Że zaś liniiá SP zrobioná była prostopadłą do linii PD, więc liniiá SP, iest razém prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy iéy spadku P, przecinaią na danéy płaszczyznie, a zatém liniiá SP, prostopadłą iest do téyże płaszczyzny.

10. *Zagadn: 2.* Od punktu danego na płaszczyznie wynieść prostopadłą do téyże płaszczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaszczyzny danéy z punktu iakiegokolwiek nie na niéy będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od téyże prostopadłéy.

11, *Uwaga 1.* Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można prostopadłą, do płaczyzny.

12. *Uwaga 2.* Gdy liniiá iaka nie iest ani na saméy płaszczyznie, ani do niéy prostopadłą; może bydź albo od niéy równoodległą, albo tak, iak zechcémy do niéy nachyloną.

Naprzód. Jeżeli, spuściwszy z dwóch

pun-

punktów linii iakiéy, dwie prostopadłe na płaszczyznę, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta liniiá od któréy są spuszczone, będzie równoodległa od płaszczyzny, na którą ie spuściliśmy, to iest: nie spotka nigdzie téy płaszczyzny, choćby tak liniiá, iako i płaszczyzna naydaléy były przedłużone.

Powtóre. Niech będzie liniiá SD. *Tab.* nie prostopadłą do płaszczyzny; ale niech *Fig.* spotyka płaszczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu któregokolwiek téy linii naprz: z S, spuśćmy do téy płaszczyzny prostopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa się kątém *pochyłości* (angulus inclinationis) téy linii SD, do płaszczyzny.

Ten kąt iest naymnieyszym z tych wszystkich, które czynić może liniiá SD, z jakąkolwiek inną liniią poprowadzoną na téy płaszczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równém linii PD, nakryślony był okrąg koła, wszystkie liniié ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do innych głównieyszych *pomocnicze* (subsidiariæ) i łatwe do dowiedzenia, przestaie się tu na samém ich wyrażeniu.

13. *Twier*

13. *Twierdz*: 8. Gdy dwie liniié równoodległe są od trzeciéy, która na odmiennéy od nich leży płaszczyznie; te dwie liniié i od siebie rownoodległe będą.

Tab: I. Fig: 4. Niech będą dwie liniié AB, i CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniié i od siebie równoodległémi. Od punktu ktoregokolwiek na linii EF. naprzykład G. wyciągniymy dwie do téy linii prostopadłe: GH, i GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniiá EF, iest prostopadłą, tak do linii GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez te dwie liniié. A że znowu dwie liniié AB, i CB są rownoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłé do płaszczyzny przechodzącéy przez liniié GH, i GI, a zatym są od siebie równoodległé.

14. *Twierdz*; 9. Gdy dwie liniié, które się przecinaią, są równoodległe względém dwóch drugich, które się także przecinaią, kąt zawarty między dwiéma piérwszémi liniiami, równy będzie kątowi zawartému między dwiéma drugiémi.

Tab: I. Fig: 5. Niech będą dwie liniie AB, i AC, równoodległe względém dwóch drugich DE, i DF; kąt BAC zawarty między dwiéma piérwszémi, równy iest kątowi EDF zawartému między dwiéma drugiémi.

Weźmy

Weźmy równe liniié AB. i DE. i równe także liniié AC. i DF. Pociągniymy liniié AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ liniiê AB, i ED, są równe, i równoodległe; czworokąt ABED będzie oraz równoległobokiém, i liniié też AD, i BE, będą równémi, i równoodległémi.

Podobnie równe są i równoodległe liniie, AD, i CF; więc liniié BE, i CF są też równe, i równoodległe, względém linii AD; a zatém równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz równoległobokiém, a w szczegulności równe są liniié BC, i EF. Przeto troykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względém drugich, a zatém przystać mogą do siebie, a w szczegulności równe są kąty BAC, EDF,

15. *Przystosowanie*. Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdéy z tych płaszczyznie wystawmy prostopadłą, do spólnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema témi prostopadłémi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraz inny na spólném przecięciu punkt wybierać będziémy, do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

Defin: Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaszczyzn

szczyzn iednéy względém drugiéy. Gdy zatém kąt zawarty między témi dwiéma prostopadłémi, iest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna iest prostopadłą do drugiéy*. Gdyby zaś kąt między témi dwiéma prostopadłémi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaszczyzny zawierałyby kąty: 10°, 20°, 30°, i t. d.

Można ieszcze i w jnny sposób, przeświadczyć się iako pochyłość dwóch prostopadłych, wyciągnionych na dwóch płaszczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spólnego tych płaszczyzn, odpowiada zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyzn. Wystawmy albowiém sobie te dwie płaszczyzny przystaiące do siebie, i leżące iedna na drugiéy. Niech potém spodnia płaszczyzna zostanie na swoiém miéyscu, a wyższa niech się podnosi, i obraca około spólnego przecięcia. Spólné przecięcié, podczas tego obrótu będzie zawsze prostopadłe, do dwóch linii prostopadłych wyciągnionych na obydwóch płaszczyznach, od iednego punktu; a zatém te dwie prostopadłe zostáiące zawsze każda na swoiéy płaszczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu; pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy naprz: płaszczyzna ruchoma, obieży połowę drógi, którą iéy obéyśdź trzeba, aby się znalazła na drugiéy stronie w równi z płaszczyzną ruchomą, w ten czas i prostopadła do spólnego przecięcia, znayduiąca się na płaszczyznie ruchoméy obieży połowę téy drógi, którą ma obéyśdź, aby się w jednéy równi stykała

koń-

końcém swoim z drugą liniią prostopadłą, do spolnego przecięcia wyciągnioną na płaszczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz.* 10. Gdy iaka prosta liniiá prostopadłą iest do płaszczyzny, do téyże płaszczyzny prostopadłą będzie każdá inná płaszczyzna przez tę liniią przechodzącá.

Niech będzie liniiá GP, prostopadłą do jakiéy płaszczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inná iakakolwiek płaszczyzna; ta prostopadłą będzie do piérwszéy płaszczyzny. Tab. I. Fig. 6.

Niech liniiá AB, będzie spólném tych dwóch płaszczyzn przecięciém; od punktu P, przez piérwszą płaszczyznę wyciągniymy PC, prostopadłą do tego spólnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za prostopadłą do piérwszéy płaszczyzny, więc GP. prostopadłą będzie tak do linii AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniié przechodzą przez pierwszą płaszczyznę; a zatym od punktu któregokolwiek np: P, znayduiącego się na spólném przecięciu dwóch tych płaszczyzn, wyciągnąwszy, prostopadłe PG, PC, do tegoż spólnego przecięcia, te liniié będą prostopadłe iedna do drugiéy; a ztąd prostopadłe będą do siebie i te dwie płaszczyzny.

17.

17. *Wniosek.* Gdy liniiá iaka prostopadłą iest do płaszczyzny, a na téyże płaszczyznie pociągniémy iakąkolwiek inną liniią, i do téy spuściémy drugą prostopadłą od spodku pierwszéy prostopadłéy; poprowadziwszy potém od któregokolwiek punktu pierwszéy prostopadłéy, lin ią do punktu, w którym drugá prostopadła spotyká liniią pociągnioną na płaszczyznie; ta ostatniá liniiá poprowadzoná, prostopadłą będzie do linii na płaszczyznie pociągnionéy.

Tab. I. Fig. 5. Niech będzie SP, prostopadłą do płaszczyzny; pociągniémy na téyże płaszczyznie liniią AB, i spuściny do niéy prostopadłą PD. od spodku P. linii SP, Poprowadziwszy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii prostopadłéy SP, liniią SD, do punktu D, w którym prostopadłá PD. spotyka liniią AB, ta liniiá SD, będzie prostopadłą do AB.

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniiá SP prostopadłá iest do płaszczyzny danéy, będzie też prostopadłą i do EF. znayduiącéy się na téy płaszczyznie; a wzaiémnie i EF. będzie prostopadłą do SP. Taż liniiá EF, iako równoodległá od AB, iest też prostopadłą do PD; a zatém będąc prostopadłą tak do PD. iako i do PS. będzie także prostopadłą i do płaszczyzny SPD. przechodzącéy przez te dwie liniié; więc i AB równoodległá od EF. będzie też prostopadłą

padłą do płaszczyzny SPD, a w szczególności będzie prostopadłą do linii SD, znayduiącéy się na téy płaszczyznie.

18. *Twierdz*: 11. Gdy płasczyzna iedna prostopadłą iest do drugiéy, a przez którykolwiek punkt iednéy z tych płaszczyzny pociągniémy prostopadłą do drugiey, ta prostopadłá, padnie na spólne przecięcie tych dwóch płaszczyzn.

Dowodz: Gdyby liniiá SP. nie padała na spólne przecięcie dwóch płaszczyzn, tedy, spuściwszy z tegoż samego punktu S, prostopadłą, do spólnego przecięcia, ta byłaby oraz prostopadłą i do drugiéy płaszczyzny; a zatém dwie prostopadłe z jednego punktu spuszczone byłyby na iednę płaszczyznę, co bydź nie może.

19 *Twierdz*: 12 Gdy dwie płaszczyzny prostopadłe są do trzeciéy, spólné przecięcie tychże dwóch płaszczyzn, prostopadłé też będzie do téyże trzeciéy płaszczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniiá przecięcia dwóch piérwszych płaszczyzn, spotyka trzecią płaszczyznę; pociągnąwszy tak na iednéy iak i na drugiéy z dwóch piérwszych płaszczyn prostopadłe do dwóch linii spólnego ich przecięcia z trzecią płaszczyzną, te dwie prostopadłe, prostopadłemi też będą do trzeciéy płaszczyzny; a zatém gdyby te dwie prostopadłe nie zeszły się w jednę, i nie były

w rzew rzeczy samey iedną liniią, która iest spólném przecięciém dwóch pierwszych płaszczyzn, tedy od iednego punktu można by do iedney płaszczyzny dwie prostopadłe wyprowadzić; to zaś bydź nie może.

20. *Twierdz:* 13. Gdy iedna liniiá prostopadłą iest do dwóch płaszczyzn, te dwie płaszczyzny, nigdzie się z sobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz. Gdyby te dwie płaszczyzny mogły się spotkać z sobą, tedy troykąt zrobiony z tey prostopadłey, i z dwóch linii poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na spólném przecięciu dwóch tych płaszczyzn, do punktów w których prostopadłá spotyka też płaszczyzny, miałby dwa kąty proste, co bydź nie może.

Defin: Dwie płaszczyzny, które nawet, przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywaią się *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniié są równoodległe względém dwóch drugich, płaszczyzna przechodzącá przez dwie pierwsze liniié, będzie równoodległá od płaszczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniié.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniié AB, i AC równoodległe względém dwóch drugich DE, DF; płaszczyzna przechodzącá przez liniié

AB.

AB, i AC, równoodległá będzie od płaszczyzny przechodzącéy przez liniié DE, i DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiéma piérwszémi liniiami spuśćmy prostopadłą AG, do płaszczyzny przechodzącéy przez drugie dwie liniié, i od spodku G, téy prostopadłéy poprowadźmy na téyże saméy płaszczyznie liniié GH, GI równoodległe względém linii DE, DF.

Liniiá AG, prostopadłá do drugiéy płaszczyzny, iest też prostopadła, i do linii GH, i GI; a że liniié AC, GI, są obiedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległémi; a zatym liniiá AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobém pokazać można, że liniiá AG, iest też prostopadłą i do linii AB. Więc ta liniiá AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey, przez liniié AB, AC; a zatém i dwie płaszczyzny przechodzące, iedna przez liniié AB, AC, drugá przez liniié DE, DF, są obiedwie prostopadłe do téyże saméy linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdz:* 15. Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie, przecina trzeciâ płaszszyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te spólne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, bą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć należąc, tak do iednego iak i do drugiego spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatém dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz*: 16, Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniiá którá iest prostopadłą do iedney, z tych płaszczyzn, będzie prostopadłą i do drugiey.

Tab 1. Fig 7. Niech będą dwie płaszczyzny równoodległe: BAC, EDF; liniiá AG. prostopadłá, do iedney z tych płaszczyzn nap: do pierwszey; taż liniiá prostopadłą będzie i do drugiey płaszczyzny.

Jeżeli liniiá AG, nie iest prostopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez spodek G, teyże linii AG, który iest na płaszczyznie EDF; tedy przeciągnąwszy przez liniié GH, i AG, płaszczyznę, któráby przecięła płaszczyznę BAC, w linii AB; liniiá AG. będzie prostopadłą do linii AB; więc liniié AB, i GH, z których iedna iest, a drugá nie iest prostopadłą do linii AG, leżącey na teyże samey, co one, płaszczyznie, spotkać się mogą z sobą; a przeto i płaszczyzny, na których leżą spotkać się też z sobą mogą, i nie będą równoodległe; co iest przeciwko warunkowi.

14.

24. *Twie:* 17. Gdy dwie liniie leżące albo nie leżące na iednéy płaszczyznie, przecięte są przez trzy równoodległe do siebie płaszczyzny, te lini,e będą od tych płaszczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iednéy płaszczyznie; niech trzy płaszczyzny równoodległe przecinaią pierwszą linią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C, G, D; będzie, BF: AF = CG: DG,

Poprowadźmy linią BD, spotykaiącą płaszczyznę średnią w punkcie E.

Liniié EF, AD, są spólnémi przecięciami płaszczyzny BAD, z dwiema płaszczyznami równoodległémi; więc te dwie liniié są od siebie równoodległe; a zatém podobne są Troykąty: BFE, BAD; przeto, BF: AF = BE: ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą i Troykąty: BDC, EDG, a zatém BE: ED = CG: GD. Więc też będzie, BF: AF = CG: GD.

Uwaga. W tym razie tylko liniie BC, AD są równoodległe, i oraz liniie FE, EG, iednę czynią linią, gdy liniie AB, CD na teyże saméy płaszczyznie znayduią się.

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych.

DEfin; Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy linie do iednego punktu, nie na téy płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znayduiących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt naprzód wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich *kątów płaskich*, nazywasię *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiém wszystkich kątów płaskich, nazywa się; *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaszczyzny na których się znáyduią kąty płaskie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo facies:) a zaś spólne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes.*)

Przestroga. W tém wszystkiém, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie schodząc się w ich wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułém* De angulis solidis Dissertatio Vitembergœ. 1764.

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzaiémne tych ścian, i stosunek placu zawartego między témi ścianámi, do placu całego około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposob, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względém całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placém płaszczyznie znayduiącego się *Obacz niżéy, co służy do ostatniéy téy uwagi, w Rozdziale o kuli. (Sphæra.)* Jako Wielokąt w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może bydź na Troykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Jeometrowie naywięcéy się bawią około kątów bryłowych, trzéma kątami płaskiémi określonych, aby doszli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potém wiadome maiąc dostatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który się z tych scian układa. Część ta Jeometryi, w któréy o kątach bryłowych rzecz iest, pod tą, pod którą ie wystawuiémy postacią, nazywa się Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonométria spherica). Damy przyczynę tego nazwiska, gdy się o kuli mówić będzie. Jest ta część koniecznie potrzebna. Astronomom. Na daniu pierwszych o niéy początków, tu przestaniémy, i nie więcéy mówić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących się do samychże brył.

25. *Twierdz:* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, summa dwóch z tych trzech kątów, większa iest od kąta trzeciego.

Tab.2. Fig.2. *Dowodz*; Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaskich: BAC, BAD, CAD; ktorykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyszy iest od summy dwóch innych.

Jeżeli te trzy kąty są wszystkie równe iuż oczywiście dwa, większe są od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, większy iest tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wszelako mnieyszy będzie od summy obydwóch.

Zrobmy albowiém na płaszczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta B D, E, niech przechodzi płaszczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Troykąty: BAD, BAE maią bok spólny AB boki: AD AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc

te

te Troykąty mogą przystać do siebie, a w szczegulności, linié: BD BE, są równe. Aże w Troykącie, BDC, summa boków: BD, CD większa iest od trzeciego boku BC: więc bok CD, większy iest od linii CE; a zatém Troykąty: CAD, CAE, maią bok spólny AC, boki: AD, AE równe; podstawa zaś DC, iednego większa iest od podstawy CE, drugiego: więc kąt; CAD, w wierzchołku pierwszego Troykąta, większy iest od kąta CAE w wierzchołku drugiego; więc i summa kątów: BAD, CAD, większa iest od summy kątów: BAE, CAE, to iest: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mniéysza iest od summy czterech kątów prostych. (c)

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że się tu niemówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspieraią się na wierzchołkach Wielokąta, maiącego same tylko kąty wyskakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą bydź kąty bryłowe takie, w których summa kątów płaskich, będzie większa od 4. kątów prostych tyle, ile zechcémy. P. Le Sage Geneweńczyk pierwszy tę prawdę odkrył, która też pierwsza i sama iedna zdaie się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz Historyą Akademii Nauk Paryskiéy na Rok 1756.*

Dow:

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wspieraią się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych przez kąty trzy płaskie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią się przy podstawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, to iest: do Wielokąta na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wspieraią.

Na każdéy z tych ścian summa trzech kątów iednego w wierzchołku, a dwóch przy podstawie ściany, równa się summie dwóch kątów prostych; a zatém summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścian, równać się będzie, dwóm kątom prostym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy,

Summa dwóch kątów przy podstawach ścian, większa iest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwóma tamtémi robi kąt ieden bryłowy przy téy podstawie; a zatém summa wszystkich, kątów przy podstawach scian wszystkich, większa iest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc summie wszystkich kątów, przy podstawach ścian, mniéy niedostaie do summy

dwa

dwa razy tylu kątów prostych, ile Wielokąt czyli podstawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli summie wszystkich kątów Wielokąta tego nie dostaie do téyże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że summie kątów wszystkich Wielokąta do przerzeczonéy summy, brakuie 4. kątów prostych, więc summie kątow wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do téyże summy mniéy niż 4. kąty proste. Ze zaś summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, spełnia ten niedostatek mniéyszy od 4. kątów prostych, więc summa wszystkich kątów przy wierszchołku kąta bryłowego, mniéysza iest od 4. kątów prostych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów szczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3, 4, 5, 6, i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś kątów. Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatém summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcéy niż 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych. Ze zaś summa tych ostatnich kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach kątów prostych 6, 8, 10, 12, więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mniéy-

mniéysza iest, niż *nadmiar* (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To iest: ta summa kątów przy wierzchołku mniéysza iest od 4, kątów prostych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w sposób następuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego linie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta, podług ciągu linii prostopadłéy do téy płaszczyzny. Im bardziéy ten punkt oddalony będzie od wierzchłków Wielokąta, tém bardziéy zmniéyszy się każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniami, od niego poprowadzonémi do wierzchołków Wielokąta; a zatém tém mniéysza będzie summa wszytkich kątów przy tym punkcie od summy pierwszéy 4. kątów prostych,

27. *Przystosowanie*. Pięć tylko iest gatunków kątów należących do Wielokątów, foremnych, z których może się złożyć kąt brydłowy.

1. W ką-

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Troykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta prostego, a zatem summa ich ważyłaby 2, kąty proste.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Troykąta równobocznego, summa takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proste.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Troykąta równobocznego, summa takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proste.

Sześć kątów troykąta równobocznego, waży kątów prostych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu jakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż sześciu takowych kątów, ważyłaby też więcéy niż cztery kąty proste.

4. W kącie bryłowym złożonym z trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt, byłby kątém prostym, a zatém summa takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych; summa 4 kątów kwadratu, byłaby summą 4 kątów prostych; a przeto z 4 takowych kątów składać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziey składać się nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym z trzéch kątów, Pięciokąta ſoremnego, każdy takowy kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kąt prosty; a zatém

tém summa ich ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proste.

Summa czterech takowych kątów, a tém bardziey więcéy niż czterech, ważyłaby więcéy, niż cztery kąty proste,

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatém żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tém bardziéy zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcéy niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcéy iak pięć bydź nie może

Bryła, któréy każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Troykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Troykątém równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanèm* (Tetraèdrum).

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest z 4. kątów Troykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Troykątém równobocznym, i 6, kątów bryłowych. Nazywa się, *Ośmiościanèm* (Octóèdrum.)

gry-

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest z 5 kątów Troykąta równobocznego, ma 20. ścian, z których każda iest Troykątém równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa się *Dwudziestościanėm* (Jcosáédrum,)

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda iest kwadratém, i 8 kątów bryłowych. Nazywa się *Sześcianém* (Hexàédrum,) a zwyczayniéy (*Cubus.*)

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda iest Pięciokątém foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwunastościanėm* (Dodecáédrum.)

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszerne w téy mierze rozwodzenia się, które więcéy saméy ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty maią równe, i wszystkie ściany forémne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywaią się bryłami *forémnémi.*

Gdyby w kącie bryłowym pomieszać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcém złożenia tegoż kąta bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby bydź do upodobania powiększoną.

28. *Twierdz*, 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względém drugich: pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych, równe też są iedne względém drugich.

Tab. II Fig. 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względém siebie; BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względém drugich; nap; pochyłość płaszczyzny BAD, do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad; wyniéśmy do AB prostopadłą BD, a do ab prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadźmy do tychże linii AB, ab, prostopadłe, BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD. BAC i bad, bac; a zatém dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd są równe.

Dowodz: Dwa Troykąty DBA, dba, są prostokątne w B. i b; maią równe kąty BAD, bad i boki: AB, ab, równe; więc mogą przystać do siebie; a w szczegulności, liniie: BD, bd, są równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla téyże przyczyny i Troykąty BAC,

bac przystać do siebie mogą, a w szczególności liniié BC, bc, są równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc Troykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad, także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między témi bokami zawarte, równe, przystac do siebie mogą; w szczególności zaś liniié CD, cd, są równe.

Więc Troykąty; CBD, cbd, maią wszystkie boki równe, iedne względém drugich, a zatém do siebie przystać mogą; a w szczegulności kąty: CBD, cbd, są równe.

29. *Twierdz*: 4. Gdy dwa kąty bryłowe, składaią się z trzech kątów płaskich, które równe są iedne względém drugich, takie kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaskich: BAD BAC,DAC, równych względém kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w a; te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniiá zaś ab, aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte są za równe.

li-

liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaskie w a, równe są trzém kątom w A; równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyn bad, bac; a zatém płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniiá ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniiá ad, leży na linii AD, iak i ac na AC; a zatém płaszczyzna cad, przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzéma kątami płaskiémi, iuż tém samém iest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy, maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iakoteż z wiadoméy tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak ostatnie podanie, iż nie służą do naszego zamierzenia, przeto dósyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma bydź złożony tenże kąt bryłowy

Do

Do składu tego kąta bryłowego z 3, kątów płaskich; następuiący sposob, zdaie się bydź naywygodniéyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: BAD, BAC, DAC do zrobienia kąta bryłowego. Wystawmy sobie myślą, iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, liniié prostopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowadźmy do téyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE, które się przétną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec liniié: CE, AE. *Tab: II. Fig, 3.*

Ponieważ liniie CB, EB są prostopadłe do linii AB, liniiá więc AB iest prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatém płaszczyzna BAD, która przechodzi przez linią AB, iest też prostopadłą do płaszczyzny, CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna iest do tamtéy prostopadłą. Dla téyże przyczyny, płaszczyzna CDE, prostopadłą iest do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, prostopadłe są do płaszczyzny: BAD; a zatém spolne ich przecięcie CE, iest także prostopadłém do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, iest także prostopadłą do téyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po

Po obydwóch stronach linii ac, przy punkcie a. nakreślmy kąty: cab, cad. rówwne względém kątów danych CAB. CAD. Od punktu którégokolwiek téyże linii ac, nap: od c spuśćmy na dwa drugie ramiona. ab, ad, liniié prostopadłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwszy od wierzchołka A. liniié AB, AD równe względém linii ab, ad. Od punktów B, i D. wyprowadźmy prostopadłe do linii AB, AD. przecinaiące się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez liniie EC, i AE przechodzi inna płaszczyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniém równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie prostopadłą w EC, punkcie C; Naostatek przez punkt C, i liniié AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszczyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego szukamy.

Jnaczéy ieszcze punkt C, będzie wyznaczony na prostopadłéy EC; gdy taką liniią EC, weźmiémy, aby kwadrat iéy równał się różnicy kwadratów: linii ac, i AE albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: bc i BE.

32. *Uwaga*. Używaiąc tego wykreślenia można łatwo dowieśdź następuiące Twierdzenie, na którém się zasadza Trygonometrya kulna; to iest, że:

W ka-

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, wstawa iednego kąta płaskiego, iest do wstawy drugiego, iak wstawa kąta pochyłośći przeciwnego drugiému kątowi; to iest, iak wstawa kąta pochyłości płaszczyzn dwóch scian pod pierwszym kątém będących, do wstawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kąt m będących.

Jakoż liniié: CD, CB, są wstawami, pierwsza kąta CAD, druga, kąta CAB, wziąwszy za promień liniią AC; a zatém te dwie liniié tak się do siebie maią, iak wstawy tych dwóch kątów.

Aże w Troykącie ECD prostokątnym w E; CD: CE=Pr; Wst. CDE,

A w Troyk: EBC; CE: CB=Wst: CBE. Pr;

Więc złożywszy te stosunki, będzie; CD. CB= Wst: CBE:Wst. CDE,

To iest: Wstawa kąta CAD, tak się ma do wstawy kąta CAB, iak wstawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wstawy kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, CAD:

33. *Zagadn:*

33 *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaskie, z których się ma składać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma bydź pochyłość płaszczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Sposob 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwne B i D są proste: więc Czworokąt ten może bydź w koło wpisanym, a zatém kąty (w tymże samym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawszy tedy w Troykącie BAD kąt ADB, iuż tém samém znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stosunek boku BC do BE, to iest stosunek wstawy całéy, czyli promienia, do Dostawy kąta pochyłości CBE, składa się z stosunków boków: BC do AB i AB do BE.

Aże iest; BC: AB=Stycz. BAC Wst. całéy.

i - AB : BE = Wst. cała: Dostycz. AEB

więc; BC: BE=Stycz. BAC: Dost. AEB
A zatém: - - - -
Stycz,—BAC: Dost: AEB=Pr: Dost. CBE.

Sposob 2. Wyciągnąwszy od punktu iednego nap: B znayduiącego się na któréykolwiek krawędzi kąta bryłowego, prostopadłe: BD, BC, do téy krawędzie,

a na

a na dwóch płaszczyznach, których spolném przecięciém iest ta krawędź, niech te dwie prostopadłe spotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniié BC, BD będą stycznémi, a liniié AC, AD będą siecznémi względém kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniié mogą bydź wyrachowane na miarę linii stałéy AB, czyli promienia. W Troykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Troykącie zatém CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możémy wyznaczyć kąt CBD, który iest kątém pochyłości dwóch płaszczyzn: BAD, BAC. Inne też kąty pochyłość łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącéy.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podniesieniu liczby do iéy Szescianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiastku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed następuiącémi Rozdziałami, kładzie się nauka o podniesieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiastku sześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, mo-

żna

żna będzie naukę tę do praktyki zaraz przystosować.

24. Sześcian liczby iakiky robi się, gdy tę liczbę przez nią samę raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieszcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwszych:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

są: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

Sześciany liczb:

10, 20, 30, 40, . . . 90

są: 1000, 8000, 27000, 64000, . . . 729 000,

Sześciany liczb:

100, 200, 300, . . 900,

są 1000000, 8000000, 27000000 729000000,

25. Sześciany więc liczb maiących iednę tylko cyfrę, a resztę zerów, są te same, co i sześciany tychże cyfr samych przez się, przydawszy im trzy razy tyle zerów,

ile

ile ich było w liczbie z któréy się Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty iest z Jeometryi, w któréy, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża się liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez siebie.

Sześcian każdéy liczby znaleśdź można, mnożąc iéy kwadrat przez nią samę; podamy tu iednak inny sposob zrobienia Sześcianu z liczby danéy, a ten sposob pomoże nam do przeciwnego działania, to iest: do wyciągania Pierwiastku Sześciennego z liczby iakiéykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może bydź rozłożony na cztery części następuiące.

1. Na Sześcian pierwszéy części.

2. Na Kwadrat pierwszéy części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiéy części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwszą.

4. Na Sześcian drugiéy części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części

części naprzyk: 1, i 4; można uważać iéy Sześcian, iakoby złożony z cztérech części: 1. 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iéy Sześcian mogłby się był rozłożyć na cztery części: 8, 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleśdź Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iéy kwadrat (podług reguły iuż nam wiadoméy) składa się z kwadratu pierwszéy części 40, z téyże części 40, dwa razy wziętéy, przez drugą 7, rozmnożonéy, i z kwadratu drugiéy części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu téyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, składać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razém to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu téyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7.

Co

Co uczyni Summę: 103823, która iest Sześcianém liczby 47.

Ponieważ zaś nie można ieszcze dowieśdź tego Algebraicznie, trzeba przynáymniéy będzię z Jeometryi zaciągnąć objaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożonéy z dwóch części, może bydź w rzeczy saméy rozłożony na Sześciany każdéy, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanów, z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iednéy części; a za wysokość część drugą trzy zaś inne mieć będą za podstawę kwadrat drugiéy części, a za wysokość część piérwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papiéru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Náy wygodniéy iest, rozłożyć liczbą na iedności, dziesiątki, sta, i t. d. które w sobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iéy składać się będzie z części następuiących:

1000, Sześcian dziesiątku

600.

600. Kwadrat dziesiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dziesiątek rozmnożony.

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80 i 4; Sześcian iéy mieć będzie części następuiące :

512000. Sześcian dziesiątków,
76800. Kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności rozmnożony
3840. Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.
64. Sześ ian z jedności.

592704. Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4: aby zaś mieć Sześcian pierwszey części, rozłożmy ją na części 300, i 20.

27000000. Sześcian stów
5400000. Kwadrat stów potróyny przez dziesiątki rozmnożony.

360000.

360000. Kwadrat dziesiątków potróyny przez sta rozmnożony.

8000. Sześcian dziesiątków.

1228800. Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności.

15360. Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.

64. Sześcian iedności.

34012224 Sześcian z 324.

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000 Sześcian z 8000.

768000000000 Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.

3840000000. Kwadrat z 400 potróyny roz: Przez 8000.

64000000. Sześcian z 400.

4233600000, Kwadrat z 8400 potróyny rozm: przez 20.

1008000. Kwadrat z 20. potroyny rozmn: przez 8400.

8000,

8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420,
1.	Sześcian z 1.
597160402461.	Sześcian z 8421.

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część następuiąca Sześcianu mniey ma iedném zerém, od części, która ią poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu iest zawsze Sześcianém; a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcian.

40 Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdey części następuiącey występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły bydź w ten sposob wypisane.

27
 54
  36

8

8

12288

1536

64.

34012 24.

41. Ten sposob postępowania, pokazuié nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iedności, kończy się na ostatniéy po prawéy ręce cyfrze, że Sześcian dziesiątków kończy się na czwartéy od prawéy ręki cyfrze, liczba Sześcianu stów kończy się na siodméy cyfrze od teyże strony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiastek Sześcianu danego, trzeba od prawéy strony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreskami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie się znaydowało w Pierwiastku. Oddział pierwszy po lewéy stronie może mieć trzy, dwie, a czasém i iednę tylko cyfrę iako to przykłady poprzedzaiące, okazuią. I tak Pierwiastki sześcienne liczb 1,331; 32; 767; 226, 981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiastek sześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku, bo dwa w niéy uczynić można oddziały, tym sposobém: 1,331. Naywiększa

ksza liczba dziesiątków tego Pierwiastku taka bydź powinna, aby iéy Sześcian nie był większy od 1; a zatém będzie tylko ieden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcian z 10, iest: 1000; który Sześcian odjąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże w szczegulności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiątka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potróyny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331. przez 300 podzielonych, iest 1, więc iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331 odjąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma ieszcze w sobie zamykać potroyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, to iest: 30; i Sześcian iedności, to iest: 1, a ze wszystkiém 31, które odjąwszy od ostatniéy reszty nic nie zostanie; a zatém Pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest; 11.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 68,921. Pierwiastek téy liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków taka bydź powinna, aby Sześcian iéy odjąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34)

którą

którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian náybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest; 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma w szczegulności zawierać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921; kwadrat potróyny 4800. rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potroyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a ze wszystkiém, 121; które odiąwszy ostatniéy reszty, nic nie zostanie; a zatém Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884, 636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729. którego Pierwiastkiêm iest: 9, więc Pierwiastek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcian z 90, iest 729000; który odiąwszy od 884736, zostanie 155736. Kwadrat z 90, iest 8100; potroyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, resztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiastek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywszy 24300 przez 6. będzie

dzie 145800, ktore odjąwszy od 155736, zostanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9720, odjąwszy go od 9936, zostanie 216 nakoniec Sześcian z 6, iest 216; a zatém Pierwiastek zupełny będzie 96 Jakoż Sześcian z 96, iest 884,736.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 590,589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba stów w Pierwiastku taka bydź powinna aby iéy Sześcian nie przechodził 590. Z dziewiąciu pierwszych Sześcianów, náybliższy liczby 590 iest Sześcian: 512, którego Pierwiastek; iest 8; a zatém 8 stów będzie w Pierwiastku. Odjąwszy 512000000, od Sześcianu danego, zostanie 78589719. Kwadrat potróyny stów 8, albo 800, to iest 1920000 znáyduie się razy 40 w téy reszcie; mogłoby więc zdawać się iż 4 dziesiątki Pierwiastek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odjąc dwóch innych części, to iest kwadratu potróynego dziesiątków rozmnożonego przez sta, i Sześcianu dziesiątków; nie można przeto więcéy dać Pierwiastkowi, iak 3 dziesiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30. to iest 57600000, odjąwszy od 78589719, zostanie 20989719; od téy reszty odjąwszy znowu kwadrat potroyny 3 dziesiątków, przez stą rozmnożonych, to iest 2160000,

zo-

zostaie 18829719. a po odjęciu Sześcianu dziesiątków, to iest 27000, będzie w reście, 18802719, Kwadrat potróyny części pierwiastku znalezioney, to iest liczby 830, iest 2066700; przez ten dzieląc resztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odjąwszy od téy reszty, liczbę 2066706, rozmnożoną przez 9, to iest: 18600300, zostanie 202419; zkąd znowu odjąwszy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to iest 20690, zostaie 729. Naostatek Sześcian z 9 iest: 729, a zatém Pierwiastek którego szukaliśmy będzie 839.

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.

```
     1,331. | 10.
     1 000  |
     ---------
300 | 331 |  1.
    | 300 |
     ---------
        31.
        30
       ----
        1.
        1
       ----
        0
```

Przykład 2.

```
     68,921 | 40
     64 000 |
     ---------
480 | 4 021 |  1.
    | 4 800 |
     ---------
       121.
       120.
       ----
        1
        1
       ----
        0
```

Przykład

Przykład 3.

```
        884.736.|90
        729 000 |
        ---------
24300 |155736|6.
      |145800|
      ----------
         9936.
         9720.
         -----
          216.
          216.
          ----
            0.
```

Przykład 4.

```
         590.589.719.|800
         512 000 000 |
         -------------
        |78589719|30
1920000 |57600000|
        ----------
        20989819.
         2160000
        ---------
        18829719.
           27000
        ---------
        |18802719| 9
2066700 |18600300|
        ----------
          202419
          201690
          ------
             729
             729
          ------
               0.
```

Więcéy takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwsze skrócenie, na tém zawisło, aby opuszczać zera, w liczbach dzielących,

podzie-

podzielnych, i w wielorazach: maiąc iednak zawsze uwagę na mieysca, które zastępować przypada cyfrom znaczącym. W szczególności zaś co do wielorazów, będzie ten z opuszczania zerów pożytek, że zaraz przy sobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiastek, którego szukamy.

Drugie skrócenie, związane z pierwszym na tym się zasadza, aby do każdego następuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reszty pozostałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wszystkie pozostałe Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnie zwłaszcza cyfry przez większą część działania nie naruszone zostaią.

Trzecie skrócenie na tym zawisło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część następuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część, pierwszą znalezioną, i Sześcian tey części drugiey. To zaś wykona się, dodaiąc razem te trzy liczby odeymować się maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiastek wyciągamy. Zawsze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich summę odeymować mamy, zachowane było mieysce

sce każdey cyfrze właściwe; iakoteż wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przystosowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiastek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy. Naywiększy Sześcian zawarty w 257, iest 216, którego Pierwiastek iest: 6. odiąwszy ten Szescian od 257. zostanie 41. Do tey reszty przyłączmy następuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry: 59. dzielmy 412. przez potróyny kwadrat z 6, to iest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz summę trzech liczb: $^{3\,24}_{\;162}$. to iest kwadratu potróynego z 6. ^{27}stów rozmnożonego przez 3. dziesiątki, kwadratu potróynego z 3. dziesiątków rozmnożonego przez 6. stów, i Sześcianu z 3. dziesiątków. Summę 34047 odeymiymy od 41259. zostanie 7212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielmy 72124. przez kwadrat potróyny z części Pierwiastku znalezioney, to iest przez 11907, wypadnie 6. na wieloraz. Weźmy summę trzech liczb: $^{7\,1\,42}_{\;\;6804}$ to iest kwadrat potroyny części ^{216} pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa

się

się reszcie ostatniey; co znakiem iest że Pierwiastek, którego szukaliśmy, ani mnieyszy ani większy iest, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częstego w nim ćwiczenia się.

44. Aby wyciągnąć Pierwiastek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik iest Sześcianem; trzeba go osóbno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiastek sześcienny z $\frac{125}{216}$, iest: $\frac{5}{6}$. Pierwiastek z $\frac{64}{343}$ iest: $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Pierwiastek Sześcienny z liczby mieszaney, trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiastki sześcienne liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$ są te same co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$, to iest $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co się o Pierwiastku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga się i do Pierwiastku sześciennego; to iest; że ieżeli nie można mieć Pierwiastku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi się to ogulnie tymże samym, iak względem Pierwiastku kwadratowego sposobem. (d)

(d) *Otoż i drugi rodzay ilości nie spółmiernych. Pierwszego rodzaiu ilości nie*

46. Pierwiastek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposob nayogulnieyszy iest, używaiąc do tego ułomków dziesiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiastek sześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząstkach tysiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiastek, sposobem dopiero podanym, z liczby 2,000,000,000, a ostatnie trzy tego Pierwiastku cyfry położmy za dziesiątne. Pierwiastek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych naybliższych wyrażony, iest: 1259; a zatym Pierwastak Sześcienny liczby 2. przybliżony aż do części tysiącznych iedności będzie 1.259. Jakoż Sześcian z 1,259 iest: 1,995,616,979. mnieyszy od 2, a Sześcian 1,26, iest: 2,259575, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiastek sześcienny liczby nap: 2. przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwszy dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*. 1 2.3,4. i t. d. uwazać należy (podobnie iako się o przybliżeniu Pierwiastku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześciana-

mi

ſpółmierne można Geometrycznie wyrazić; lecz wyrażenie tych drugich, wyższey nad początkową nauki potrzebuie.

mi podwoionemi, nieznayduie się taki, któryby bliski bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap: że 64. podwoione, to iest 128 mało się co różni od 125. to iest od Sześcianu liczby 5; a zatym 2. które równa się cale $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$; przeto i Pierwiastek Sześcienny liczby 2. będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. A zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny. Pierwiastek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to iest, $\frac{3}{64}$., przez kwadrat potroyny tego pierwszego Pierwiastku, to iest przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do pierwiastku $\frac{5}{4}$ Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiastkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ iest, $2\frac{126}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieszcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey sposobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiastek sześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele się różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiastek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwsze uchybienie, Pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie iest Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, mianownik

stał

stał się Sześcianem; potym dopiero wyciąga się Pierwiastek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli się przez Pierwiastek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć pierwiastek sześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwszy z 2, przez przybliżenie Pierwiastek sześcienny: 1,259.-- biorę iego połowę 0,629---; to iest: dzielę go przez Pierwiastek sześcienny mianownika 8. Podobnie Pierwiastek Sześcienny z $\frac{5}{12}$, ten sam iest, co i Pierwiastek Sześcienny z $\frac{90}{216}$, to iest $\frac{1}{6}$. Pierwiastku sześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Rownoległościanach prostokątnych(c)

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaka zakończona iest sześcią ścianami prostokątnemi, taka Bryła nazywa się, *Rownoległo-*

(c) *Częste używanie Równoległościanów prostokątnych iest nam pobudką do mówienia o nich w szczególności: tym barziey, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie prostokątnych Rownoległościanow na prostokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równe i równo odległe; a każda z tych ścian w szczegulności prostopadłą iest, do każdey z czterech innych ścian, które z nią spolny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny, spolne dwóch ścian GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC,BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechoczącey przez liniie AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spólne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spólnym przecięciem iest liniia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. *Tab. II. Fig. 4.*

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie dowieśćby można, że taż liniia iest prostopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany są prostopadłe do iedney linii GB, a zatym są od siebie równoodległe.

Na-

Naostatek w Prostokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH są równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przystać do siebie.

51. *Uwaga*. Ponieważ w Równoległościanie prostokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok spolny z bokiem iedney ściany z dwóch pozostałych; przeto można wystawić sobie *rodzenie się* (generatio albo formatio) Równoległościanu prostokątnego, w sposob następuiący.

Niech będzie Prostokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszystkich wystawione są prostopadłe do iego płaszczyzny wszystkie równe. Niech ten Prostokąt posuwa się równoodlegle od pierwszego swego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy prostopadłych wznosiły się. Mieysce to, które takowym posuwaniem się przeydzie Prostokąt, będzie Równoległościanem prostokątnym.

52. *Defin*: Równoległościan prostokątny, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińskiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, iest to Bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twier-

Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, na przeciwko siebie stoiące, są równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące się na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległościań prostokątny, iako zbudowany na iedney z ścian swoich, prostopadłą spuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa iest spólnemu przecięciu dwoch ścian zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twierdz.* 2. Gdy Podstawy dwóch Równoległościanów mogą przystać do siebie, a ich wysokości są równe, te dwa Równoległościany, mogą też przystać do siebie, to iest nie różnią się od siebie tylko mieyscem.

Dowodz: Wszystkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przystać do siebie; wszystkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, składaią się z trzech kątów prostych, a zatym wszystkie te kąty bryłowe mogą przystać do siebie. Przeniosłszy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden

z ką-z kątów iego bryłowych, przystał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwszego kąta, które mogą przystać do ścian drugiego, w samey rzeczy do niego przystały, wszytkie końce krawędzi pierwszego kąta, przystaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwszego Równoległościanu, które są przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przystaną iedne do drugich:

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wysokość iakiego Równoległościanu prostokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszystkie punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przystać do siebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszystkie Równoległościany mnieysze, iednakową wysokość, a takie podstawy, z których każda przystać może do podstawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz*; 3. Dwa Równoległościany prostokątne, wystawione na teyże samey pod-

podstawie, lub na podstawach mogących przystać do siebie, tak się maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wysokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy Równoległościan, mógłby się podzielić na 2. 3. 4. i t. d. Równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2. 3, 4, i t. d. razy, Co przystosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego Równoległościanu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Rownoległościanu zawierała nap. 3. takich części; iakich 5. zawiera wysokość drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych częci, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3. a drugi na 5. Równogłościanów iednakowey wysokości, i których podstawy przystaćby mogły do siebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby się miał do drugiego iak 3, do 5. to iest iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na

Na koniec, to, co się powiedziało w przypadkach społmiernych, przystosować można i do przypadków nie społmiernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaskich, w Części 1.

Tab.II, Fig:5. Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na teyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przystać; i niech te wysokości będą niespołmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak ich wysokości.

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy stosunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stosunków. Niechże więc ieżeli to być może, stosunek pierwszego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Ro-

Rownoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spółmierne CD. i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do Równoległościanu, którego wysokością iest CD, iak się ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Rownoległościany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak liniie AE, i AF, Ze zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym stosunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: Niech będą óznaczone przez R.AB, R.AF, R. CD, Równoległościany maiące iednakowe podstawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB. R. CD=AE: CD.

tedy ponieważ iest, - - R. CD: R. AF=CD: AF.

byćby powinno - - R. AB; R. AF=AE: AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległo-
Tab:II. ścianów tak, aby podstawa iego stykała
Fig:6. ła się w wierzchołku spolnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw, a drugą: EBGF. Dopełniymy Prostokąta, CBGH przedłużywszy boki DC, FG, aż do ich spólnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie w myśli Równoległościan trzeci stoiący na podstawie CB GH, dawszy mu wysokość równą wysokości iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa iest: ABCD, i ten, którego podstawa iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia CB, a drugim, wysokość spolna obydwóch danych Równoległościanów; te mówię Równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH.

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. są podstawami, uważane, iak gdyby miały za podstawę. Prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia

BG,

BG, a drugim spolna wysokość dwóch danych Równoległościanów są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BE FG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościan, którego podstawą iest AB CD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Króciey to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi; R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R. ABCD: R. CBGH = ABCD: CBGH.

2. proporcya;

R. CBGH: R. BEFG = CBGH: BEFG.

więc - - - - - - - - - - - - -

R. ABCD: R. BEFG = ABCD. BEFG.

57. *Wniosek* 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ie-

żeli

żeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będę i ich podstawy.

58. *Wniosek 2.* Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Tab: II. Fig: 6. Niech będzie ABCD podstawa. a BI wysokość Równoległościanu iednego Prostokątnego; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podstawami i wysokościami proporcya:

ABCD: BEFG = BL: BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wy

Wystawmy sobie drugi *Równoległościan*, iakoby zamieniony na inny teyże samey wysokości BL, a maiący za ieden bok swoiey podstawy, bok nap: BC, należący do podstawy pierwszego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podstawa CBMN.

Będzie zatym podstawa ABCD do podstawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD: BEFG=BL: BI. więc będzie AB: BM = BL: BI. a zatym Prostokąt maiący za boki, AB, BI. równy będzie Prostokątowi maiącemu za boki: BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podstawy te dwa równe Prostokąty, i spolną przytym maią wysokość BC, więc są sobie równe. Aże trzeci Równoległościan równy iest drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech Równoległościan, którego AB CD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podstawą iest BEFG: a wysokością BL; idzie zatym że, - - - ABCD: BEFG=BL: BI.

Zrobmy to samo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość spolną, BC, będzie pierwszy do trzeciego iak Prostokąt AB × BI do Prost· BM × BL. Aże te dwa Równoległościany są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc AB × BI = BM × BL; a zatym AB· BM = BL: BI. Ze zaś AB: BM = ABCD CBMN = ABCD: BEFG; więc ABCD: BEFG = BL: BI.

60. *Wniosek* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do siebie w stosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan prostokątny, znaleść liniią taką, aby stosunek Sześcianu do Równoległościanu równy był stosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S. bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Równoległościanu. Zamieńmy nayprzód Prostokąt, którego bokami są P, i Q na inny któryby miał za bok ieden bok Sześcianu; to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S, L, R; a zatym stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego. równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do Prostokąta L × R. Zamieńmy

znowu

znowu ten drugi Równoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S. za bok ieden. to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, to iest stosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach, stosunek Sześcianu do Równoległościanu prostokątnego, trzeba 1°, do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku Sześcianu, do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Idzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu; wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosuuków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwaga*. Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równolegościanów.

Przykład. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5,7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwszych boków Równoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, to iest zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35, czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwszey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to iest zawierać ta będzie bok sześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w sobie Sześcian razy 315; to iest, wziąwszy Szescian za iednośc albo spolną miarę; ten Równoległościan wyrazi się przez liczbę 315. która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy liniie, że stosunki, prierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey są równe, o takich liniiach mówi się że są *ciągło* (continué) proporcyonalne.

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2.4.8, nazywaią się ciągło proporcyonalnemi, a cztery l nije, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby się też ciągło proporcyonalnemi. Toż mowić i o liczbach, 8.12,18,27. z których każda zawiera w sobie, poprzedzaiącą ieden raz i pół, i t. d,

Stosunek pierwszey z tych linii, do czwartey. składa się z stosunku, pierwszey do drugiey drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stosunku składanego) Ze zaś wszystkie te szczegulne stosunki są równe, więc stosunek pierwszey tey linii do czwartey, składa się z 3. stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta liniia do czwartey, będzie w stosunku tróymnożnym.

63, *Przystosowanie.* Niechby Równoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem,

Niech

Tab.II. Fig 7 Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego służyć za miarę: AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE (kreśląc Tróykąt prosokątny ABC, maiący, AB za iedno ramie kąta prostego, a AC za przeciwprostkątną; i wystawuiąc do linii AC, w punkcie C, próstopadłą CE, aż do iey spotkania się w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalney. AF (wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, prostopadłą EF, aż do iey spotkania się w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwszy Sześcian, wzięty za miarę, tak się będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to iest: iak liniia pierwsza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwszych dwóch iedna iest bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym stosunek pierwszego Sześcianu do drugiego iest tróymnożnym stosunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiego trzy razy zawiera w sobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwszy będzie do drugiego iak $3 \times 3 \times 3$ do 1. albo iak 27, do 1; to iest ieżeli liniia AC zawiera w sobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB;

li-

linia też AE zawierać będzie razy 3 liniią AC, a zatym 9. razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3, razy liniią AE, a tym samym 27. razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, któryby do drugiego był w stosunku danym, i takim, któryby się równał stosunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok Sześcianu, którego szukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwsza z czwartą, są w danym stosunku; to iest: bok ten szukany, ma być liniią pierwszą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między piewszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba trefunkiem przez doswiadczanie i szukanie nie pewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznemi* (sectiones conicæ) o których się potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwszym powodem być musiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wspomnionych, i do uczynienia pierwszego kroku w wyższey Geometryi. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był ziednania

Bo-

Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dać głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur Altaria) Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu dwa razy t k wielkiego, iak drugi wzięty za spolną miarę; to iest; iż trzeba było wynaleść pierwszą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stosunek dany, iest stosunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do siebie, iak, 1. do 8; albo iak 1. do 27, albo iak 8. do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2. albo iak 1, do 3. albo iak 2. do 3. i t. d.

Ale gdy stosunek dany nie iest stosunkiem dwóch liczb Sześiennych, róźwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden, ma być dwa razy tak wielki, iak drugi. wziąwszy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką którey Sześcianem, iest 2; a zatym pierwiastek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok: Pierwiastek

zaś

zaś ten przybliżony, iest 1, 26. to iest bok mnieyszego Sześcianu, tak by się miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1. 26, albo iak 100, do 126. albo ieszcze dokładniey iak 23. do 29.

66. *Uwaga*. Gdy stosunek dwóch liniy iest dany; dany iest tym samym i stosunek ich Sześcianów.

Tak albowiem mieć się będą do siebie te Sześciany, iak liniia pierwsza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwszy za pierwszy dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie których stosunek iest dany.

Zkąd wypada wniosek następuiący:

67. Gdy cztery liniie są w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to iest; gdy stosunek dwóch pierwszych liniy równa się stosunkowi dwóch drugich; stosunek też Sześcianów z dwóch pierwszych liniy, równać się będzie stosunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8. 12. składaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27,512,1728, składaią także proporcyą.

68. *Uwaga*. Podanie zamknięte w tym wnio-

wniosku, iest tylko wyszczegulnieniem podania następuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościany prostokątne; aby krawędzie pierwszego Równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwszych stosunków, krawędzie drugiego, trzema następnikami tychże trzech pierwszych stosunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich stosunków, a krawędzie czwartego, trzema następnikami tychże trzech drugich stosunków; stosunek pierwszych dwóch Równoległościanów równy będzie stosunkowi dwóch ostatnich.

Trzeba nayprzod to podanie obiaśnić na przykładach liczebnych:

W ogułności zaś niech będą trzy iakiekolwiek proporcye: $A : B = C : D$.

$a : b = c : d$.

$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{c} : \mathfrak{d}$.

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*; Zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *c*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom $B \times b$, i $D \times d$; a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszyskie równe, - -

więc - - b: E = d: e.

Ze zaś - - a: b = c: d

więc - - a: E = c: e.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy iest stosunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jest też z przypuszczenia; -

- - - a: b = c: ∂

więc Prostokąty aa, Eb, cc, e∂ składaią proporcyą; a zatym cztery Równoległościany; któreby te Prostokąty miały za podstawy, i z których dwa pierwsze miałyby spolną wysokość A, dwa zaś drugie

gie wysokość C, byłyby także z sobą w proporcyi, Aże pierwszy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: A, a, *a*. drugi zaś równałby się temu, któryby miał za krawędzie trzy liniie: B, b, *b*; a to dla tego, że są równe Prostokąty: B×b i A×E (trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy liniie: C, c, *c*, a czwarty równałby się temu, któryby miał za krawędzie, trzy liniie: D, d, *∂*; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. *DEfin:* Bryła zakończona 6. ścianami parzysto równoległemi nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzającym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Tab: III Fig 1. Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: AB

CD

CD, EFGH mogą do siebie przystać.

Dowodz: Ponieważ płaszczyny równoodległe ABCD, GHFE są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Takoż pokazać można, że linije HE, GF są równoodległe, i linije HG, EF równoodległe; a zatym że ściana HGFE iest Równoległobokiem. Podobnie i wszystkie inne ściany są także Równoległobokami.

W szczegulności zaś, linije: BA, GH, i linije BC, GE, są od siebie równoodległemi; więc równe są kąty ABC, HGF. Aże te linije BA, GF, i BC, GF są równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przystać do siebie. Toż mówić o każdey inney parze ścian przeciwnych.

71. Ztąd też wystawić sobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył się następuiącym sposobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaszczyzną, kąt iakikolwiek; wyciągnimy potym i przez drugie wierzchołki, linije równoodległe od pierwszey, i zrobmy wszystkie sobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok posuwa się równo-

od-

odległe od pierwszego swego położenia, i niech wierzchołki iego nie schodzą nigdy z liniy równoodległych, mieysce od Równoległoboków, tym sposobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. *Twierdz.* 2. Dwa Równoległościany mogą przystać do siebie, gdy i wszystkie ich odpowiadaiące sobie ściany przystać do siebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także sobie odpowiadaiące, robią się z kątów równych należących do tychże ścian.

Tab. III Fig. 1a i 2a Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wszystkie ściany odpowiadaiące sobie w iednym i drugim Równoległościanie, mogą przystać do siebie, i których kąty bryłowe także sobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią się z równych kątów tychże ścian: te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A, i a, robią się z równych względem siebie kątów płaskich, więc przystać do siebie mogą. Przeniozłszy tedy Równoległościan af, tak aby kąt bryłowy a, przystał w rzeczy samey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaskie, z których się te bryłowe robią, przystaią iedne do drugich sobie równych; a liniie ab, ad, aa, są równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta

b, d, h,

b, d, h, przystaną do punktów: B, D, H, i ściany także czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przystaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przystaną do punktów odpowiadaiących sobie C,G,E; a w szczegulności linie: bc, bg, przystaną do liniy: BC, BG. Więc i płaszczyzna przechodząca przez linie: bc, bg, leżeć będzie na płaszczyznie przechodzącey przez linie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana befg, przystać może do ściany BCFG, więc punkt f, przystanie do punktu F.

Tymże sposobem okazać można, że i wszystkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przeniesionego, przystaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

73. *Uwaga*. Tymże cale sposobem dowodzi się, że dwie iakiekolwiek Bryły, przystać mogą do siebie, gdy wszystkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przystać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

73. *Definicye*. Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian swoich, ta ściana nazywa się, *podstawą* iego; a prostopadła od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, do tey spuszczona, na-

nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podstawy, są do niey prostopodłemi, taki Równoległościan nazywa się *prostym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany prostokątne, są gatunkiem Równoległościanów prostych, w których podstawa nawet sama iest prostokątem.

75. *Twierdze.* 3. Dwa Równoległościany równe są w *bryłowatości.* (soliditas) gdy maią iednakową wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, a dwie ich ściany, na iedney płaszczyznie znayduiące się, stoią na tymże samym boku podstawy.

Tab: III Fig: 3. Niech będą dwa Równoległościany: AC GE. i ACLI. zbudowane na teyże samey podstawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią się na teyże samey płaszczyznie; te dwa Równoległościany, są równe w bryłowatości.

Dowodz. Dwie Bryły: ADIEHMBCKFGL, maią takie wszystkie ściany odpowiadaiące sobie, iż iedne do drugich przystać mogą; wszystkie podobnie kąty ich bryłowe przystać mogą do siebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przystać do Troykąta GBL, a w szczegulności kąty HAM, GBL, są

równe.

równa. Równoległobok HADE przystać może do Równoległoboku GBCF sobie przeciwnego, w pierwszym Równoległościanie, a wszczególności kąty HAD, GBC, są równe; Równoległokoki także MADI, LBCK przeciwne sobie, w drugim Równoległościanie, mogą do siebie przystać, a wszczególności kąty: MAD, LBC, są równe, więc kąty bryłowe A, B, i ściany tych kątów mogą przystać do siebie. Toż mówić i o wszystkich innych kątach bryłowych, i o wszystkich innych, tych dwóch Brył ścianach. Zaczym te dwie Bryły przystać mogą do siebie i są równe sobie w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwszy pierwszą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zostaie się Równoległościan ACLI a odiąwszy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zostaie się Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany są równe. (f)

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iedna-

G ką

(*f*) *To dowodzenie iest ogulne, i rozciąga się do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt G. czyliby się znaydował między G. i H. czyli nakoniec byłby na linii HG. przedłużoney.*

ką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Tab: III Fig: 4. Niech będą dwa Równoległościany. ACGF, i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmienych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe.

Dowodz. Przedłużmy liniie KI, HE tak daleko, aż się zniydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N; a liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P. i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

Równoległościan ACQO, ma tę samę co tamte dwa, podstawę AC.

Ma ścianę AO na płaszczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu ACGE, więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaszczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Równoległościan ACQO równy iest tak Równoległościanowi ACGE, iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany są też sobie równe.

77. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany są równe, gdy iednaką maią wysokość i równe podstawy, z iednym spolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże samym boku spolnym wystawione, znayduią się na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: AC-GE, ICOQ iednakiey wysokości; a podstawy ich równe AC, IC, niech maią bok spolny CD, na którym wystawione są dwie ściany DF, DP na teyże samey płaszczynie znayduiące się, te dwa Równoległościany są równe. *Tab: III Fig: 5.*

Wykreśl: Przez punkta I, i L. poprowadźmy na płaszczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM. równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe spotykaią w N i M. liniią HO. Pociągniymy i liniie

EN, FM. Bryła ICME będzie też Równoległościanem.

Dowodzenie. Równoległościan ICME, ma tęż samą podstawę IC, i tę samą wysokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą sobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę spólną DF, iak podstawę, maią też iednaką wysokość, a zatym są sobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy iest tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany są równe.

Tab: III Fig: 5. 78. *Twierdz*: 6. Dwa Równoległościany są równe, gdy maią iednaką wysokość gdy ich podstawy maiące bok ieden spólny, są równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wysokości będą dwie podstawy: AC, i IC równe, i maiące spólny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

Wykreśl Na podstawie IC, iednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwszym, postawmy trzeci Równoległościan teyże samey wysokości, tak, aby

aby ściana iego stoiąca na boku CD, znaydowała się na płaszczyznie ściany drugiego Równoległościanu, stoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwszym spólną podstawę i wysokość, będzie mu równy, Tenże trzeci Rówoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podstawy: IC, AC, z spólnym bokiem CD, i ściany ich stoiące na boku CD, znayduią się na teyże samey płaszczynie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy iest tak pierwszemu iak i drugiemu, a zatym i one sobie równe będą.

W szczegulności. Równoległościan każdy równy iest Równoległościanowi prostokątnemu, który ma tę samę, co i tamten wysokość, podstawę równą podstawie iego, i bok ieden spólny obydwóm podstawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach prostokątnych, wszystko to do iakichkolwiek innych można przystosować; kładąc zamiast każdego z nich, Równoległościan prostokątny, teyże samey wysokości, i podstawy równey, a maiącey, bok ieden spól-

spólny z podstawami Równoległościanów nie prostokątnych. I tak,

1. Dwa Równoległościany, maiące równe podstawy i wysokości, są równe; bo Równoległościany prostokątne iednakiey wysokości, i maiące z tamtemi Równoległościanami równe podstawy, a w nich spólny bok ieden, są równe.

2. Dwa Równoległościany są też równe, których podstawy są w stosunku odwrótnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

4. Wszystko to, co się powiedziało o zamienianiu stosunku dwóch Równoległościanów prostokątnych, na stosunek dwóch liniy; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanów prostokątnych, przystosować można do miary Równoległościanów nie prostokątnych; używaiąc do tego boku iednego, podstawy wysokości iey względem tego boku, i wysokości Równoległościanu.

80. *Przestroga.* Gdyby ściste i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudnym się zdawało uczniom do poięcia, mimo wystawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papie-

pieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w sposob następuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podstawami y wysokościami stoią na teyże samey płaszczyznie. Niech inna iakakolwiek płaszczyzna równoodległa od pierwszey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podstawom, a zatym i sobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płaszczyznę równoodległą od ich Podstaw, równe zawsze będą te przecięcia. Zadney więc niemasz przyczyny, dla któreyby ieden z tych Równoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak ostrzedz zaraz uczniów, iż tym sposobem, słabo się w rzeczy samey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podstaw Równoległościanow, to iest: chociażby iak naymnieysza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego, naybliższego, wszelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwóma przecięciami, są ieszcze Równoległościanami, które tak się względem siebie maią, iak się maią całe Równoległościany, których tamte są częściami. Aby więc wnieść można ró-

wność

wność Równoległościanow, z równości ich części, trzebąby pierwiéy dowieść równości tych części.

Może się imaginacya naszą tak daleko zapuścić, że przez nię wystawiemy sobie dwóch Równoległościanów przecięcia tak bliskie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą się zdawać nie różnić od podstaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iąkiey rzeczy, nię iest w sobie małością lub wielkością, ale się albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość, względem inney mnieyszey; i nie można nigdy Bryły choćby też nayeieńszey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawdą to iest, że im większa będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płaszczyzny równoodległe od ich podstaw, tym mnieysza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema nayblizszemi płaszczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iąkąkolwiek iest choćby też naymnieysza, ta różnica, tedy wielokroć powtórżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząstek, czyli małych Równo-

wno-

wnoległościanów, z których się składaią.

Ta samą trudność do rozwiązania zostaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podstawę i wysokość, a z których ieden byłby naprzykład prosty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoszenia się w górę ich podstaw w równey zawsze od pierwszego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieysca od podstaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w samey rzeczy punkt każdy tych podstaw przebył; (bo do iednakiey wysokości postępuiąc, więcey mieysca przeydzie punkt nap: skrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który iest prosty) ale to mieysce od podstaw Równoległościanów przebyte, powinno się wymierzać wzdłuż linii prostopadłey do teyże podstawy, ponieważ tą tylko liniią mierzy odległość, w którey podstawa podnoszeniem się swoim oddaliła się od pierwszego swego położenia.

Następuiące porównywanie może iakożkolwiek służyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znosi cale.

Gdy dwa Rónoległoboki zrobione na teyże samey podstawie, i z równą wysokością, przetniemy linią równoodległą od od podstawy, obadwa przecięcia równe będą podstawie. Wszystkie też inne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i o dwóch Tróykątach, których przecięcia równoodległe od podstawy spolney, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty niemiałyby sobie być równe? Ponieważ tedy tym sposobem dochodziemy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłym pierwey dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można z tym przystosować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potym. gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie. 7.* W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiem, i podzieli Równoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan; ACGE; przez krawędź AH, i przez przekątną HF niech przechodzi płaszczyzna; linije AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Ze zaś linije AH, CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt ACFH, iest oraz i równoległobokiem. Tab: III Fig 1.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Równoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2. Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a w szczegulności są sobie równe.

ROZ-

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. *Twierdz: przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach; niech ieszcze i boki ich równe, będą równoodległe ieden względem drugich: Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatym i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi równemi, podobnemi, i równoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Rónoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach mówiliśmy, są pewnemi Graniastosłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wystawiamy sobie, iakoby zbudowa-

sy

ny Graniastosłup nazywa się iego *podstawą*, a prostopadła spuszczona na tę podstawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa się *wysokością* tego Graniastosłupa. Graniastosłup albo iest *prosty*: albo *ukośny*; *prosty*, gdy ściany iego stoią do pionu względem podstawy; *ukośny*, gdy też ściany są do podstawy nachylone.

Różne także nazwiska przybiera Graniastosłup, podług rozmaitey liczby boków podstawy swoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa się *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześciokątnym*, gdy podstawa iego iest Tróykątém, Czworokątém, Pięciokątêm, Sześciokątém i t. d.

84. *Twierdz*: 1. Przeciąwszy gdziekolwiek Graniastosłup płaszczyzną równoodległą od iego Podstawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podstawie.

Dowodz: Przecięcie iedney któreykolwiek ściany poboczney, przez tę płaszczyznę, równoodległym będzie od tego boku podstawy, na którym ta ściana stoi; i te dwie liniie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podstawą i pła-

szczy-

szczyzną przecinaiącą; więc te dwie linii będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaszczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków sobie przeciwnych na leżących do podstawy, a zatym kąt który te spólne przecięcia zrobią równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podstawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniastosłupa przez tę płaszczyznę, wszystkie swoie boki i wszystkie kąty równe względem boków i kątów podstawy Graniastosłupa, i dla tego przecięcie to przystać może do podstawy.

85. Można sobie wystawić Graniastosłup, iakoby zrobiony przez posuwanie się w górę iego podstawy, w sposob następuiący:

Niech będzie Figura iaka prostokreślna, odrysowana na płaszczyznie. Od wierzchołku kąta któregokolwiek tey Figury, wyciągniymy liniią prostą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potym wznosi do góry ta Figura, w równey zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieschodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła któ-

ra

ka się takim ruchem utworzy, będzie Graniastosłupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniastosłup tróykątny, iest połową Równoległościanu takiego, któryby za podstawę miał Równoległobok dwa razy większy od podstawy tego Graniastosłupa, z dwóma bokami równaiącemi się bokom podstawy tegoż Graniastosłupa tróykątnego.

Niech będzie Graniastosłup tróykatny ABCDEF, którego podstawą iest Tróykąt ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami są AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACEH, któryby miał spolne dwie ściany AE, i BD z Graniastosłupem tróykątnym. Tab: I. Fig. VI

Dwa Graniastosłupy Tróykątne: ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami oddzielonémi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH.

87. *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniastosłupów tróykątnych, które tych Równoległościanow są połowami.

1 Dwa

1. Dwa Graniastosłupy tróykątne, równey wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy tróykątne, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy tróykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy tróykątne, których podstawy są w stosunku odwrótnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy tróykątne, równe w bryłowatotości, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

6. Co się powiedziało o porównywaniu liczebnym dwóch Równoległościanów, to twierdzić można i o porównywaniu dwóch Graniastosłupów tróykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podstawy Graniastosłupa tróykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wysokości.

7. Maiąc wiadomą podstawę Graniastosłupa tróykątnego, i kąty dwóch ścian

iego,

iego, które z kątem podstawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniastosłup tróykątny, i iego wysokość, a zatym i bryłowatość tymże samym sposobem, iak się czyniło względem Równoległościanów.

8. Graniastosłupy tróykątne, maiące spólny kąt ieden bryłowy, są do siebie iak Równoległościany prostokątne, maiące te same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz*: 3. Graniastosłup nie tróykątny może być rozłożony na Graniastosłupy tróykątne teyże co on wysokości; za podstawy zaś maiące Tróykąty, na które rozdzielona iest iego podstawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podstawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Niech będzie ABCDE, podstawa nap: *Tab:IV Fig: 2.* pięciokątna Graniastosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podstawę na trzy Tróykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podstawie, od punktu *a*; odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

H Linie

Liniie Aa, Dd, są obiedwie równoodległe od linii Ee, i oney równe; więc i względem siebie będą równoodległemi i równemi; a przeto Czworokąt ADda, iest Równoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, iest Graniastosłupem tróykątnym. Tymże sposobem okazuie się, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, są Graniastosłupami tróykątnemi.

89. *Twierdz*: 4. Dwa iakiekolwiek Graniastosłupy maiące równą wysokość, tak się do siebie maią, iak ich podstawy,

Jakoż Graniastosłupy ADEeda, ADC eda, ACBbca, i t. d. maią się do siebie iak ich podstawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniastosłup: ADE eda, tak się ma do summy wszystkich, to iest, do Graniastosłupa pięciokątnego; iak podstawa tróykątna pierwszego, do summy podstaw wszystkich, to iest, do podstawy Graniastosłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniastosłup iednakiey wysokości, takby się miał do Graniastosłupa tróykątnego: ADE eda, iak podstawa iego do podstawy tróykątney ADE.

Więc (złożywszy stosunki) będzie stosunek iakiegokolwiek Graniastosłupa do Graniastosłupa ABCDEedcba, równy stosunsunkowi podstawy pierwszego Graniastosłupa, do podstawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwóch Graniastosłupów są równe.)

W szczególności zaś, gdy Równoległościan i Graniastosłup iakikolwiek równe mieć będą podstawy i wysokości; bryłowatość iednego, równa będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek się o Równoległościanach powiedziało, można to i do Graniastosłupów iakichkolwiek przystosować, co do wielkości ich, ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniastosłupów przystosować wnioski, co do Graniastosłupów tróykątnych w szczególności, które po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału następuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostrosłupach.

90. *DEfin:* Niech punkt iaki znayduie się nad płaszczyzną Figury iakieykolwiek prostokreślney; przez ten punkt i przez wszystkie boki Figury, niechay przechodzą płaszczyzny; zrobi się ztąd Bryła kończąca się z iedney strony na

tey Figurze, a z innych stron, na tylu Tróykątach maiących spolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma boków. Bryła ta nazywa się *Ostrosłupem* (Pyramis.) Powierzchnią Ostrosłupa można sobie wystawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego się nad płaszczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey się około obwodu teyże Figury. Figura prostokreślna, któréy boki służą za podstawy Tróykątów kończących Ostrosłup, nazywa się *podstawą* ostrosłupa, te Tróykąty nazywaią się iego *ścianami*; punkt który iest wierzchołkiem spólnym wszystkich ścian Ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* iego. Prostopadła spuszczona od tego wierzchołka, na płaszczyznę podstawy, zowie się *wysokością*. Ostrosłupa.

Ostrosłup różne przybiera nazwiska, podług wielkości boków podstawy swoiey. Nazywa się tróykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa iego iest Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadłey spuszczoney od wierzchołka

chołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na śrzodek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakowa, i tych ścian płaszczyzny równie są nachylone do płaszczyzny podstawy,

W Ostrosłupie, którego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się wpisać w koło, a którego wysokość wychodzi od środka, tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatym wszystkie te ściany są Tróykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opisanego na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego, takowego Ostrosłupa nie można nazywać prostym.

Zeby iednak nazwisko to Ostrosłupa prostego (zle do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyszym uczynić, przydamy następuiący warunek.

Gdy w Figurze prostokreślney, znayduie się taki punkt, przez który ciągnione liniie a po obydwóch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzialą się w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywą się środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Rónoległoboku, iest tego Równoległoboku środ-

środkiem. Jeżeli tedy Figura prostokreślna maiąca taki środek, służy za podstawę Ostrosłupowi, i ieżeli prostopadła od wierzchołku iego spuszczona przypada na ten srodek Figury, taki Ostrosłup nazwiemy prostym.

Ostrosłup nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną równoodległą od podstawy iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Tab: IV. Fig: 3. Niech będzie Ostrosłup SABCDE, maiący wierzchołek w punkcie S, a którego podstawą iest Figura prostokreślna ABCDE. Niech ten Ostrosłup przecina płaszczyzna równoodległa od podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy.

Ponieważ płaszczyzna podstawy równoodległa iest od płaszczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, spólne z temi płaszczyznami, równoodległe iedne względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia nap: ab, bc równoodległe będą względem boków AB, BC podstawy; a zatym i wszystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, nap:

kąt

kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Iest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Tróykąty SAB, sab są podobne, więc Sb: SB=ab: AB.

Tróykąty też, Sbc. SBC podobne; więc Sb: SB=bc; BC; a zatym ab: AB=bc: BC.

Więc przecięcie, i podstawa, maią około kątów względem siebie równych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne iest do podstawy.

W szczegulności zaś, przecięcie takie, i podstawa, maią się do siebie w stosunku dwumnożnym boków ich, odpowiadaiących sobie; albo są do siebie w stosunku dwumnożnym liniy nap; Sb, SB; albo nakoniec w stosunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Ostrosłupa, maiącey się wymierzać przez prostopadłą spuszczoną od tego wierzchołka, do ich płaszczyzn; tak dalece, że przeciąwszy Ostrosłup płaszczyznami równoodległemi od podstawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały się do siebie, iak liczby 1,2,3,4,5, i t. d: powierzchnie tych przecięciów będą do siebie iak liczby 1,4.9.16.25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz: IX.)

Uwa-

Uwaga. Tego Podania częste iest w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy z iednakową wysokością, i z równemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, po iedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a wszczegulności gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i równe podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy równych wysokościach, są nierówne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące równe wysokości, i podstawy, są równe, i że gdy równe maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Na-

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrosłup Tróykątny przecięty płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrosłupa, Graniastosłupy z których każdy miałby wysokość równą odległości dwóch płaszczyn naybliższych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniastosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastosłupów ma iednę krawędź spolną z Ostrosłupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrosłupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniastosłupów (które nazwę opisanemi) od summy drugich (które nazwę wpisanemi) równą będzie pierwszemu Graniastosłupowi, który iest wystawiony na podstawie Ostrosłupa.

Niech będzie Ostrosłup trókątny SABC, którego wierzchołek S, a podstawa ABC. *Tab: F Fig. 4.*

Podzielmy ten Ostrosłup na części np: 5. płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odle-

głości

głości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Ostrosłupa, przez te płaszczyzny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa, wystawmy ku iego wierzchołkowi Graniastosłupy, kończące się na przecięciu naybliższym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniastosłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Różnica między summą pierwszych i drugich Graniastosłupów, równać się będzie Graniastosłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl. Podzielmy liniie AB, AC, na 5 równych części, w punktach: b^1, b^2, b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4, i pociągniymy liniie: $b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4$.

Tróykąty: $Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4$, będą równe względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Różnica między Graniastosłupem opisanym a stoiącym na podstawie ABC, i między Graniastosłupem wpisanym a stoiącym na podstawie $A^1B^1C^1$ równa się Graniastosłupowi teyże samey co tamte

wy-

wysokości, maiącemu za podstawę, różnicę tamtych dwóch podstaw, to iest Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniastosłupem opisanym, a stoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniastosłupem wpisanym a stoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa się Graniastosłupowi, teyże samey co one wysokości, maiącemu za podstawę, różnicę tamtych dwóch podstaw, to iest Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnice dwóch par Graniastosłupów następuiących, równe są Graniastosłupom, teyże co one wysokości maiącym za podstawy Czworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3b^4c^4$.

Ostatni zaś Graniastosłup opisany, równa się Graniastosłupowi, teyże co on wysokości, maiącemu za podstawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między summą wszystkich Graniastosłupów opisanych, a summą wszystkich Graniastosłupów wpisanych, równą będzie summie wszystkich Graniastosłupów teyże co one wysokości, któreby stały na Czworokątach BCc^1b^1, $b^1c^1c^2b^2$, $b^2c^2c^3b^3$, $b^3c^3c^4b^4$, i na Tróykącie Ab^4c^4. to iest. równa będzie Graniastosłupowi tróykątnemu teyże co one

wy-

wysokości, a maiącemu za podstawę Tróykąt ABC. Tą więc różnica równa się w samey rzeczy pierwszemu Graniastosłupowi opisanemu.

95. *Wniosek.* Pierwszy ten Graniastosłup opisany na Ostrosłupie SABC, którego podstawa ABC nie odmienia się, będzie tym mnieyszy, im mnieyszą damy mu wysokość, to iest, im liczba przecięć Ostrosłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten Graniastosłup mnieyszym od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten ostatni Graniastosłup na inny, któryby miał za podstawę Tróykąt ABC, i dzieląc wysokość iednostayną Ostrosłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieysza od wysokości tego Graniastosłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Ostrosłup, można weń wpisać, i opisać na nim sposobem wyżey wyrażonym, tyle Graniastosłupów, aby różnica dwóch summ, mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego, a tym bardziey, aby różnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdy-

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były równe tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich różnica zamieniona była na Graniastosłup maiący równą z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwóch Ostrosłupach, będą równe iedne względem drugich (87, 88) a zatym summa Graniastosłupów wpisanych napi w ieden Ostrosłup będzie równa summie Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup. Ze zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ Graniastosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostrosłupie, mnieyszą od różnicy mniemaney dwóch Ostrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Ostrosłupa od summy wszystkich Graniastosłupów weń wpisanych, mnieysza będzie, od róznicy mniemaney tych dwóch Ostrosłupów; a zatym i różnica pierwszego Ostrosłupa, od summy Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup, mnieysza będzie, niż różnica pierwszego Ostrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniastosłupów wpisanych w ten dru-

dru-

drugi Ostrosłup, byłaby większa od tego drugiego Ostrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa Ostrosłupy nie mogą sobie być nierówne.

97. *Twierdz:* 3. Graniastosłup tróykątny, może zawsze być rozłożony na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa mieć będą tę samę podstawę i wysokość, co i Graniastosłup.

Tab: VI *Fig.* 5. Niech będzie Graniastosłup tróykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa, tę samę, co on mieć będą podstawę i wysokość.

Przez bok AC. podstawy ABC, Graniastosłupa, i przez koniec F, krawędzi tego Graniastosłupa nie przechodzącey przez punkta: A i C, przeciągniymy płaszczyznę ACF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tróykątny FABC. maiący za wierzchołek punkt F, a za podstawę Tróykąt: ABC; a zatym ten Ostrosłup, tę samę co i Graniastosłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podstawie, i przez punkt C przeciągniymy płaszczyznę ECF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tróykątny CEDF, maiący za wierzchołek, punkt

C,

C, a za podstawę Tróykąt DEF, równy Tróykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Ostrosłup ma tę samę także co i Graniastosłup, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostrosłupy: FABC, CDEF równe maią wysokości, i podstawy, a zatym są równe (96). Zostanie ieszcze po tych dwóch przecięciach, Ostrosłup CFEA, zakończony czterma Tróykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni Ostrosłup iako maiący za podstawę Tróykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostrosłup zaś CDF, iakoby miał za podstawę, Tróykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą: więc te dwa Ostrosłupy maią podstawy równe, ACEDEC, i na iedney płaszczyznie znayduiące się; a oprócz tego, maią spólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wysokość równą; więc są równe; wszystkie tedy trzy Ostrosłupy, na które Graniastosłup był podzielony, są równe.

Wzaiemnie Ostrosłup tróykątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część Graniastosłupa maiącego tę samę co i Ostrosłup podstawę, i wysokość.

Niech

Niech będzie Ostrosłup tróykątny: ABCF którego podstawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podstawie ABC, wystawmy sobie iakoby zbudowany Graniastosłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znayduią się dwie ściany Ostrosłupa, i krawędź im spolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniastosłup iest trzy razy tak wielki, iak Ostrosłup; więc też i ten Ostrosłup iest trzecią częścią tego Graniastosłupa. A że wszystkie Graniastosłupy maiące równe podstawy i wysokości, są równe; więc Ostrosłup tróykątny iest trzecią częścią Graniastosłupa iakiegokolwiek, maiącego taką samę iak on podstawę i wysokość.

98. *Twierdz:* 4. Ostrosłup iakikolwiek iest trzecią częścią Graniastosłupa maiącego tę samę co on podstawę, i wysokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podstawa Ostrosłupa, poprowadźmy na niey przekątnych tyle do wszystkich kątów, ile można. Przez te wszystkie przekątne; i przez wierzchołek Ostrosłupa niech przechodzą płaszczyzny; Ostrosłup będzie przez te płaszczyzny podzielony na tyle

Ostro-

Ostrosłupów tróykątnych, na ile Tróykątów podstawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Ostrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniastosłupa maiącego taką samę iak on podstawę, i wysokość; a zatym summa wszystkich tych Ostrosłupów tróykątnych, to iest cały iakikolwiek Ostrosłup z nich się składaiący, równać się będzie trzeciey części, summy wszystkich tych Graniastosłupow, albo co na iedno wychodzi, równać się będzie trzeciey części Graniastosłupa maiącego tę samę podstawę i wysokość, co i Ostrosłup.

99. *Wnioski*. Cokolwiek się o stosunku Graniastosłupów powiedziało, toż mówić można i o stosunku Ostrosłupów, które, maiąc takie same iak i te Graniastosłupy, podstawy, i wysokości, są trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Ostrosłupy iakiekolwiek (proste, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wysokościami, tak się do siebie maią, iak ich podstawy.

2. Dwa Ostrosłupy z równemi podstawami, tak się do siebie maią, iak ich wysokości,

3. Dwa Ostrosłupy są równe, gdy ich

podstawy są w stosunku odwrótnym ich wysokości.

4. Dwa Ostrosłupy równe, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowatości Ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecią część dwóch liczb rozmożonych, z których iedna znaczyłaby wielkość powierzchni podstawy tego Ostrosłupa, a druga, wielkość iego wysokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane w liczbach, sześć krawędzi iakiego Ostrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Tróykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę Ostrosłupa; a na trzech bokach tey podstawy, zrobiwszy trzy Tróykąty, na teyże samey, co i podstawa płaszczyznie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; te Tróykąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Tróykąta wziętego za podstawę, i z dwóch kątów ścian dwóch przy podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a wszczegulności będzie można wyrachować

wać stosunek wysokości Ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwóch ścian. A że to spólne przecięcie iest dane co do wielkości, więc dóydziemy i wysokości Ostrosłupa, a zatym i iego bryłowatości, która zawisła od wysokości Ostrosłupa, i powierzchni iego podstawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako się to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy Ostrosłup iest foremny, a zatym trzy ścian iego krawędzie są równe; Kwadrat wysokości Ostrosłupa, równa się różnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podstawie opisanego. A przeto ta wysokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś sposob postępowania przystosować można do wszystkich Ostrosłupów foremnych, iakażkolwiek byłaby liczba ich boków w podstawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok ieden Troykąta równobocznego wyznaczywszy przez liczbę 2. kwadrat wysokości tego Tróykąta wyrazi się przez liczbę 3. Promień koła opisanego iest $\frac{2}{3}$ tey wysokości, więc kwadrat tego promienia, iest $\frac{4}{9}$. kwadratu wysokości Tróykąta, azatym kwadrat tego promienia iest $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wysokości tego Ostrosłupa iest $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$. więc sama wysokość będzie $= \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Powierzchnia Tróykąta służącego za podstawę wyrazi się przez $\sqrt{3}$, a zatym bryłowatość Ostrosłupa będzie wyrażona przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; to iest bryłowatość Ostrosłupa tak się ma do bryłowatości Sześcianu równego co do bokow Ostrosłupowi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2. do $12\sqrt{2}$, albo iak 1. do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1. do $\sqrt{72}$. który to stosunek bliski iest stosunku 2. do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało różni się od stosunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Mo-

Można sobie Ośmiościan wystawić w myśli, iakoby złożony z dwóch Ostrosłupów prostych kwadratowych, stykaiących się z sobą równemi podstawami,

Wyraziwszy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2. kwadrat promienia koła opisanego na podstawie iednego z tych dwóch Ostrosłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ostrosłupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to iest 4, i 2, to iest będzie $=4-2=2$. Wysokość zaś tego Ostrosłupa wyrazi się przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Ostrosłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, azatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. Jest tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, do 8, albo iak $\sqrt{2}$: 3. który to stosunek bliski iest stosunkowi 8. do 17. albo 17. do 36. a bardzo mało różni się od stosunku 33. do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Ostrosłupa są powierzchniami płaskiemi i to ieszcze troykątnemi, wyznaczenie iego po-

powierzchni, żadney niepodlega trudności. Gdy Ostrosłup iest foremny, powierzchnia iego (oprócz podstawy) równa będzie Troykątowi, któryby miał za podstawę, obwod podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany którey kolwiek (ponieważ wszystkie są równe.)

Wyboczenie (Digressio) *o sposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhaustionis; *maiące służyć za wstęp do Rozdziałów następuiących.*

104. Sposob, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwóch Ostrosłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Ostrosłupów zawarty iest między dwiema ilościami, których różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to iest: że każdy Ostrosłup iest zawarty między summą Graniastosłupów na nim opisanych i summą Graniastosłupów weń wpisanych; i że tych dwoch summ różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardziey każdego z tych Ostrosłupa różnica, od iedney z tych summ, może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Ostrosłupom porównywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powie-
działo

działo o stosunku iedney z tych summ, nao summy Graniastosłupów opisanych na iednym Ostrosłupie, do drugiey z tych summ, to iest do summy Graniastosłupów w iednakiey liczbie, opisanych na drugim Ostrosłupie. Ze zaś, gdy Ostrosłupy miały równe podstawy i wysokości, te dwie summy Graniastosłupów były równe; więc też i Ostrosłupy, któych różnica od tych dwóch summ może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Ostrosłupy miały tylko wysokości równe, a podstawy nierówne; możnaby tymże samym prawie sposobem okazać że są do siebie, iak ich podstawy; a to ztądby się wniosło, że w tymże samym stosunku byłyby do siebie summy Graniastosłupów opisanych na każdym z tych Ostrosłupów; i że każdy z tych Ostrosłupów może się różnić od każdey z tych summ, odpowiadaiących sobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten sposób wnoszenia stosunku dwóch ilości, które bezśrednie z sobą porównywać iest trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziałach następuiących, przeto nie zawadzi okazać ieszcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było

za

za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, który zawsze iest iednakowy,

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Równoległoboki maiące równe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba ieszcze dowieść, że i dwa Tróykąty, których równe są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy. (W tym zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tróykąt iest połową Równoległoboku, teyże co on podstawy i wysokości,

Tab:IV Fig. 6 Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc. równey wysokości, a z nie równemi podstawami; trzeba dowieść, że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to ztąd, że i Równoległoboki iednakiey wysokości są do siebie, iak ich podstawy,

Podzielmy bok ieden nap: AC. na pewną liczbę części równych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy równoodległe od podstawy; a na każdey z tych równoodległych wpiszmy i opiszmy Tróykątowi ABC, Równoległoboki, maiące za spolną wysokość równe oddalenie dwóch naybliższych równoodległych.

Różnica Równoległoboków opisanych, od Równoległoboków wpisanych, równać

się

się będzie naywiększemu z nich Równoległobokowi. Ta zaś różnica może być mnieyszą zrobiona, niż iakikolwiek Równoległobok naznaczony, odmieniwszy go na inny Równolegobok, któryby tę samę, co i Troykąt miał podstawę, i kąt z nim przy podstawie spolny, a potym podzieliwszy drugi bok AC Tróykąta na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, aby dwa Tróykąty: ABC, abc. nie miały się do siebie, iak ich podstawy; tedy ieden z tych Tróykątów; nap: ABC, byłby do uczynienia tego stosunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiększyć Tróykąt ABC, Równoległobokiem ABFE. aby się tak miał do Tróykąta abc, iak AB do ab.

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od linii AE; wpiszmy potym i opiszmy Tróykątowi Rownoległoboki, w sposób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiększy z nich równoległobok AGHB. Różnica summy Równoległoboków opisanych od summy Równoległoboków wpisanych, uczyniona iest mnieyszą, niżeli Równoległogłobok ABFE; tym bardziey zaś Różnicą summy Równoległoboków opisanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieysza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym summa wszystkich Równoległoboków opisanych, mnieysza iest od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac. Tróykąta abc. na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiszmy na tym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opisane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące sobie, tak się mieć będą do siebie, iak podstawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie ABC, tak się mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego Tróykąta, do podstawy ab, drugiego; to iest: przez przypuszczenie, iak summa, z Tróykąta ABC, i z Równoległoku ABFE, do Tróykąta abc. Aże zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to iest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieysza od Tróykąta abc, co iednak być nie

może;

może; a zatym stosunek podstaw tych dwóch Tróykątów, tenże sam iest, co i samych Tróykątów.

Podobnym sposobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiększony aby miał ten sam do Tróykąta ABC, stosunek, co i ich podstawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC,abc. wystawuią dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów. Niech te obadwa Ostrosłupy, będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Ostrosłupów, tak się maią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności Graniastosłupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się iuż wyżey dowiodło.

Okaże się, w podobny sposob, że opisawszy i wpisawszy iednemu z tych Ostrosłupowi, Graniastosłupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie naywiększemu Graniastosłupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieysza była niż iakikolwiek Graniastosłup naznaczony; a tym bardziey różnica O-

stro-

strosłupa od każdey z tych summ mnieysza będzie, niżeli ten Graniastosłup.

Wpisawszy i opisawszy drugiemu Ostrosłupowi, tyle co i pierwszemu Graniastosłupów; summa tych wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie. tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego. Także i summy Graniastosłupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwóch Ostrosłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby stosunek dwóch tych Ostrosłupów, nierówny był stosunkowi ich podstaw, tedy ieden z tych Ostrosłupów, byłby nap: nadto mały na ten stosunek. Przydaymy mu więc tę ilość, którą powiększony, zachowa ten stosunek, i zamieńmy tęż ilość na Graniastosłup równey z nim podstawy. Temu Ostrosłupowi wpiszmy i opiszmy Graniastosłupy iednakiey wysokości. tak iednak małey, aby różnica summ Graniastosłupów wpisanych od opisanych, mnieysza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica summy Graniastosłupów opisanych na tym Ostrosłupie, od tegoż Ostrosłupa mnieysza, niżeli różnica naznaczona; a zatym summa tych Graniastosłupów mnieysza będzie

dzie niżeli summa z Ostrosłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Ostrosłupie opiszmy tyleż co i na pierwszym Graniastosłupów.

Summa wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy Graniastosłupów opisanych na drugim Ostrosłupie, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego; to iest: iak summa z pierwszego Ostrosłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Ostrosłupa,

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak byc nie może.

Więc stosunek dwóch tych Ostrosłupów, nie różni się od stosunku ich podstaw.

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpisanych; lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od

obwo-

obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgów koł, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z Tróykątem maiącym zawysokość promień iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego.

W którymkolwiek z tych przykładów nap: w ostatnim, koło iest granicą między Wielokątami wpisanemi, i opisanemi, do którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więcey boków mu damy, tak dalece, że przyść można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwóch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże koł promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątów, to iest koła, też samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu równe zamienili.

Ten

Ten sposob postępowania nazywa się *Sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, ktorym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby linije krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich małości nadzwyczayney: bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków maiące.

Po tych, które się tu dały obiaśnieniach, obeydzie się w następuiących podaniach bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub Bryłami, o których iuż mówiliśmy, a które mogą się różnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mówić o ścianach Brył, o ich *warstach* (laminæ) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obszerne obiaśnienia, dosyć się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn. i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni usłanych iednych nad drugiemi.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

o Walcach.

180. Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwóch płaszczyznach równoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwóch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwóch koł; niechay ta liniia końce dwóch promieni łącząca obraca się równym wszystkich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwóch koł. Powierzchnia krzywa obrótem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwóma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:) Liniia prosta łącząca środki tych dwóch koł, nazywa się *Osią* tego Walca. (Axis) Dwa koła na których się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu któregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś Walca, albo liniia łącząca środki dwóch podstaw iego, prostopadłą iest do pła-

szczyzn

szczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś iest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniia robiąca obrótem swoim powierzchnią walcową, równoodległą iest w początkowym swoim położeniu, od osi walca (bo ta liniia z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, którego dwóma innemi bokami, są dwa promienie kół równe i równoodległe). Że zaś ta liniia zawsze iest od pierwszego swego położenia równoodległą, więc zawsze będzie równoodległą od osi. Wzaiemnie, gdy przez punkt którykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, równoodległą od osi, ta liniia zmiesza się z liniią, która obrótem swoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować się będzie na powierzchni walcowey. Liniia równoodległa od osi, a przechodząca przez punkt którykolwiek powierzchni walcowey, nazywa się *bokiem* Walca; wszystkie zatym boki Walca są równe, a wszczególności równaią się osi.

110. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

K Niech

Tab. V. Fig. 1. Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spólnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey rownoodległey od podstawy.

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD. CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległemi; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczynę równoodległą od podstawy; azatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczegulności, równe są podstawie.

III. *Wniosek*. Ztąd wynika inny sposob, którym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, którymby się to koło w równey zawsze od pierwszego swego położenia odległości

po-

posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia,

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrótem Równoległoboku prostokątnego, około iednego z boków iego.

112. *Twierdz* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, równa się Prostokątowi, któryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z równą liczbą boków, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste, teyże co i Walec wysokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniastosłupów równe będą względem Prostokątów maiących wysokość Walca; podstawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniastosłupów, tak

K2 się

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w którą nie wchodzą podstawy Walca.*

się mieć do siebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić się od siebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do równości, to iest, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym bardziey powierzchnia krzywa, może się mniey ieszcze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I) powierzchnia krzywa Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu wysokość tego Walca, a podstawę równą okręgowi podstawy iego.

113, *Wnioski* 1. Powierzchnie krzywe Walcow prostych iednakiey wysokości, tak się do siebie maią, iak promienie ich podstaw

2, Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwóch podstaw Walca,

ca, równa iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi któryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga.* Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wywyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krżywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz.* 3. Dwa Walce równe są w bryłowatości. których tak podstawy iako i wysokości, są równe.

Dowodz: Wpisawszy, i opisawszy podstawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwszy na tych Wielokątach, Graniastosłupy równey z Walcami wysokości, maiące ściany równoodlegle względem osi tych Walców; różnica Graniastosłupa opisanego na iednym z tych Walców,

ców, od Graniastosłupa w tenże Walec wpisanego, równać się będzie Graniastosłupowi maiącemu tę samę, co tamte dwa wysokość, a podstawę równą różnicy dwóch ich podstaw. A że różnica tych dwóch podstaw, mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwóch Graniastosłupów, wpisanego i opisanego, można uczynić mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniastosłupa, od Walca może być mnieyszą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniastosłupy podobne, nap: opisane na tych dwóch Walcach są równe, więc też i te dwa Walce są równe, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podstawami, maią, się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierdz:* 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo iest prawie, co i dowodzienie Twierdzenia 3; położywszy stosunki nie ró-

równości podstaw, lub wysokości, na mieysce stosunków równości.

118. *Wnioski*: Cokolwiek się powiedziało o porównywaniu Graniastosłupów maiących podstawy różnego gatunku, wszystko to przystosować można do porównywania Walcow z Graniastosłupami. Walec równy naprzykład iest iakiemukolwiek Graniastosłupowi maiącemu równą z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma Graniastosłupa teyże co on wysokości, iak podstawa tego Walca, do podstawy Graniastosłupa a zatym Walec tak się ma do Graniastosłupa teyże co i on wysokości, a którego podstawa iest Wielokątem opisanym na podstawie Walca, iak podstawa Walca do podstawy Graniastosłupa, to iest iak obwod podstawy Walca, do obwodu podstawy Graniastosłupa; nap: Walec, którego wysokość równa się średnicy podstawy iego tak się ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4. razy.

Gdy Walec równy iest Graniastosłupowi w bryłowatości, wysokość ich będzie w stosunku odwrotnym podstaw, i znowu, ieżeli wysokości są w stosunku odwrotnym podstaw, tedy Walec równa się Graniastosłupowi.

Sto-

Stosunek dwóch Walców, może podobnie, iak i stosunek Graniastosłupów, wyłożonym być w liniiach sposobem następuiącym: Wyraźmy w liniiach stosunek ich podstaw; znalazłszy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwszego, i do promienia Walca drugiego. Do wysokości Walca pierwszego, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney; szukaymy czwartey proporcyonalney, stosunek promienia Walca pierwszego, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi bryłowatości pierwszego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podstawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podstawy pierwszego; wysokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wysokość pierwszego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwszego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwszego Walca; a ponieważ wysokość drugiego Walca, 4. razy iest tak wielka iak wysokość pierwszego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wysokości pierwszego Walca, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to iest: 36. razy tak wielka iak pierwszy promień, a zatym drugi Walec zawiera

wiera w sobie pierwszy, razy 36. Jakoż, gdyby podstawa drugiego Walca zawierała w sobie razy 9. podstawę pierwszego, a wysokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9. razy tak wielki iak pierwszy; a że nadto wysokość drugiego Walcą zawiera w sobie razy 4. wysokość pierwszego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4. razy tak wielki, iak pierwszy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36. razy tak wielki, iak pierwszy.

Co się zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyraziwszy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podstawy (podług tego co się powiedziało o powierzchni koła,) a potym rozmnożywszy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wysokość Walca.

119, *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca prostego, iakoteż i całey iego powierzchni; to iest dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią prostą, nap: z kwadratem, zawisło od skwadrowania koła; a zatym od wyprostowania iego okręgu. Toż mówić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap: Sześcianu.

Wy-

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, maiących za podstawy, wycinki, lub odcinki koła, zawisło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak się maią do Walca całego, którego są częściami, iak ich podstawy do koła służącego za podstawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O Ostrokręgach.

120. *DEfin:* Niech będzie koło nakreślone na iakiey płaszczyźnie i niech od punktu nad tą płaszczyzną znayduiącego się, wyciągniona liniia lub nitka, obraca się około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa obrótem tym linii lub nitki naznaczona nazywa się *powierzchnią* Ostro-

---

(h) *Lubo nie które części powierzchni Walcowey same przez się wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich stosunku do całey powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey iest ciekawa, niż użyteczna, dla tego też dosyć iest o tym namienić.*

Ostrokręgu; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około ktorego nitka się obracała nazwiemy *Ostrokręgiem* (Conus). koło, na którym Ostrokrąg stoi, nazwiemy *podstawą* iego, *wierzchołkiem* zaś punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Osią* Ostrokręgu a prostopadła spuszczona od wierzchołku do płaszczyzny podstawy; nazywa się *wysokością*. Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywa się *ukośnym*.

121. *Wniosek*. Poprowadziwszy liniią od wierzchołku Ostrokręgu do któregokolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniia zmiesza się wtedy z nitką rodzącą obrótem swoim, powierzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzyć będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego Ostrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołku Ostrokręgu powierzchni iego krżywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiem* Ostrokręgu.

122.

122. *Twierdz*: 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze Tróykątem.

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaszczyznie od wierzchołku Ostrokręgu, do dwóch punktów okręgu, w których go ta płaszczyzna przecina, będą bokami Ostrokręgu, i spolnemi powierzchni iego krzywey, z tą płaszczyną przecięciami; a zatym przecięcie Ostrokręgu przez tę płaszczyznę, będzie Tróykątem maiącym za podstawę, spólne przecięcie tey płaszczyny, z płaszczyzną podstawy Ostrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktów przecięcia okręgu, od płaszczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz*: 2. Gdy Ostrokrąg przecięty iest przez płaszczyznę równoodległą od iego podstawy, przécięcie to iest kołem.

Tab: V. Fig: 2. Niech Tróykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża spolne przecięcie tey płaszczyzny i inney równoodległey od podstawy,

Tró-

Tróykąty SCB, SFE, są podobne; więc SC: CB = SF: FE. Aże płaszczyzna przecinaiąca Ostrokrąg równoodlegle od podstawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwsze wyrazy tey proporcyi są stałe iakiżkolwiek będzie promień podstawy przez którą, a razem i przez oś przechodzi płaszczyzna; więc też i czwarty wyraz iest stałym. Poprowadziwszy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawsze będą, a zatym to przecięcie iest kołem, którego punkt F, iest środkiem.

124. *Wnioski.* Te kol powierzchnie tak się do siebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie iest wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Ostrokrąg iest prostym, wtedy wszystkie płaszczyzny, równoodległe od podstawy, są do Osi prostopadłemi; a z tąd, można uważać Ostrokrąg prosty, iakoby zrobiony obrótem Tróykąta pro stokątnego, około iednego z ramion kąta iego prostego. To ramie będzie Osią Ostrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podstawy, przeciwprostokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Ostrokręgu.

125.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy liniia poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spólnego z Ostrokręgiem nie będzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi.

Tab: V. Fig: 3 Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczzyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez liniie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA,

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spólnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącey; niech iescze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez liniie: SA, AT. Liniie; *ca*,*at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT; a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT iest prostym, więc prostym także będzie i kąt *cat*; a zatym,

oprócz

oprócz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to iest: niżeli odległość punktu na powierzchni Ostrokręgu, i oraz na płaszczyznie *cat*. znayduiącego się, od punktu Osi, do teyże płaszczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprócz punktu *a*, iest za okręgiem.

126. *Defin*: O tey płaszczyznie mówi się, iż się *dotyka Ostrokręgu*, która iednę tylko liniią ma spólną z powierzchnią krżywą Ostrokręgu.

127. *Wniosek* Opisawszy Wielokąt na podstawie Ostrokręgu, a przez wierzchołek tego Ostrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwszy płaszcyzny; ponieważ te boki Wielokąta opisanego, służyć będą za podstawy ścian Ostrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten sam, co i wierzchołek Ostrokręgu, więc ściany tego Ostrogranu dotykać się będą powierzchni Ostrokręgu. Ostrogran, ten nazywa się opisanym na Ostrokręgu inny zaś, któryby spólny z Ostokręgiem miał wierzchołek, a za podstawę Wielokąt wpisany w podstawę Ostrokręgu, nazywałby się w Ostrokrąg *wpisanym*.

128. *Twierdz. przybrane* 2. Maiąc dany Ostrokrąg prosty, można weń wpisać i opi-

i opisać na nim dwa Ostrograny foremne, którychby stosunek powierzchni ściennych bardziey się zbliżał do stosunku równości, niż iakikolwiek naznaczony stosunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Ostrogranów. rownaią się Tróykątom, maiącym za podstawy, obwody podstaw Ostrogranów, a wysokości zaś, równe wysokościom iedney z ścian każdego Ostrogranu; azatym tak się do siebie maią te Ostrograny, iak te dwa Tróykąty. Aże podstawy tych dwôch Tróykątów, tak się maią do siebie, iak prostopadłe spuszczone od środku, do dwóch którychkolwiek boków podstaw Ostrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak się też do siebie mieć będą, iak Tróykąty równey z ścianami Ostrogranów wysokości, a maiące za podstawy, te prostopadłe; albo iak Prostokąty, teyże z dwiema temi Tróykątami podstawy i wysokości. Ze zaś stosunek takich dwóch Prostokątów, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, to się tak dowodzi.

Tab: V. Fig. 4. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey przez oś tego Ostrokregu i przez wysokości SA, SB dwóch ścian Ostrogranów foremnych, i maiących za podstawy

stawy Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Ostrogranów niech będzie opisanym na Ostrokręgu, a drugi weń wpisanym.

Powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego proporcyonalna iest z Prostokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Ostrogranu wpisanego, proporcyonalna iest Prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą SA. Powierzchnia ścienna Ostrogranu, maiącego za podstawę, podstawę Ostrogranu wpisanego, a za wysokość liniią CD, takby się miała do powierzchni ścienney, Ostrogranu opisanego, iak Prostokąt: CB × BD do Prostokąta CA × AS; to iest (dla podobieństwa Tróykątów SAC,DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podstaw, dwóch Ostrogranów. Aże się dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc też i stosunek powierzchni ściennych, tych dwóch Ostrogranów, bliższy może byc stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności. Że zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu, którego SCA iest przecięciem, mniey się różni od Ostrogranu, którego przecięciem iest SCB, niżeli od Ostrogranu, którego prze-

L cię-

cięciem iest: DCB, więc tym bardziey stosunek powierzchni ściennych dwóch Ostogranów, iednego wpisanego, drugiego opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli od tegoż stosunku różni się iakikolwiek dany stosunek nierówności.

129. *Twierdz.* 3. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się Tróykątowi maiącemu za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok Ostrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego iest Granicą między powierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nie równości, więc tym bardziey stosunek powierzchni Ostrokręgu prostego, do powierzchni iednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nierównosci. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Tróykątowi maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę obwod podstawy tego Ostrogranu; więc (podług

ług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczegulności w Rozdziale o kwadrowaniu koła że powierzchnia koła, równa się Tróykątowi maiącemu za podstawę obwod koła, a za wysokość promień iego): Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, iest też równa Tróykątowi, któryby miał za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się wycinkowi koła, ktoreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Tróykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, którey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu, byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy; a zatym i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy iego, Bryła zakończona z iedney strony, podstawą Ostrokręgu a z drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz:* 4. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokośc, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu Okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia arytmetyczna między dwóma temi promieniami.

Tab:V. Fig 5. Niech Tróykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy, a spólnym tey płaszczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca*. Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią

AB,

AB, prostopadłą do boku SA, i równą Okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tróykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Ostrokręgu całego: poprowadzmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB. i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Tą liniia *ab*, będzie też równa okręgowi koła, którego promieniem iest: *ca*, a Tróykąt Sab, równać się będzie powierzchni krzywey Ostrokręgu Sac; będzie zatym Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF; równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby się linii: ED, to iest średniey Arytmetyczney między promieniami, CA. i *ca*, dwóch podstaw Ostrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa się Prostokątowi AHGa, maiącemu za wysokość, bok Aa, Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF równą okręgowi średnie arytmetycznie proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podstaw tegoż Ostrokręgu.

134 *Uwaga* 1. Wyrażenie następuiące powierzchni krzywey Ostrokręgu prostego

stego

stego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.

Od środku E. linii Aa, wyciągniymy liniią EI prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC. w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, równoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IFD, DEa, równą się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów; AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatym kąt IED, rowna się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Tróykąty prostokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, IE: ED=Aa: aL, (albo Cc), a ztąd i okręgi, maiące za promienie, liniie: IE, ED, są też do siebie, iak liniie: Aa, Cc; a zatym Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego liniia IE, byłaby promieniem, równałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Prostokąt równy iest powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy teyże Ostrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokręgu ściętego, równa Prostokątowi maiącemu wysokość równą wysokości Ostrokręgu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego

rego promieniem byłaby prostopadła, od środku boku Ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do iego osi, która to prostopadła iest czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wysokości Ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwóma promieniami: co wszystko łatwo przystosować można i do Ostrokręgu ściętego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższey iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz: przybrane* Bryłowatości dwóch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego; różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to iest: stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Do-

5. Stosunek dwóch Ostrokręgów w liniiach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy iednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokręgu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Ostrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wysokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Ostrokręgu, zawisło od wyznaczenia dokładnego, iego podstawy, a zatym, od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowatość Ostrokręgu, równa się bryłowatości iakiegokolwiek Ostrogranu, równey z Ostrokręgiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdz.* 6. Bryłowatość Ostrokręgu prostego równa się bryłowatości Ostrokręgu innego, którego powierzchnia podstawy byłaby równa, powierzchni całey Ostrokręgu prostego, a wysokość, równa promieniowi koła wpisanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Ostrokręgu prostego od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie SC prostopadła do AB, wysokością, czyli osią tego Ostrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podstawie AB, np: kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, prostopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadła DE do SA. Linie równe DC, DE, będą promieniami koła wpisanego w Tróykąt przechodzący przez oś Ostrokręgu. *Tab: V. Fig: 6.*

Powierzchnia podstawy Ostrokręgu, tak się ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podstawy, tak się mieć będzie do całey powierzchni Ostrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Ostrokręgu równa się kołu maiącemu za promień średnią

dnią geometryczną między promieniem AC podstawy Ostrogręgu; i summą z tego promienia i z boku Ostrokręgu. Aże liniią AD. dzieli kąt CAS na dwie równe części więc AS: AC = SD: CD; i AS+AC: AC = SD+CD: CD; a nakoniec (AS+AC) AC. AC = SC: CD.

Więc Ostrokrąg maiący za promień podstawy, średnią geometryczną między AC, i $\overline{AC+AS}$, a za wysokość liniią CD, miałby powierzchnią swoię, do powierzchni Ostrokręgu podanego. wstosunku odwrótnym wysokości; a zatym te dwa Ostrokręgi byłyby równe. Że zaś podstawa pierwszego Ostrokręgu iest równa całey powierzchni Ostrokręgu podanego; więc bryłowatość Ostrokręgu prostego, równa się bryłowatości Ostrokręgu innego, maiącego podstawę równą całey prostego Ostrokręgu powierzchni, a wysokość rowną promieniowi koła wpisanego w Tróykąt, który iest przecięciem tego Ostrokęgu od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZ

ROZDZIAŁ. IX.

O Kuli.

140. *DEfin:* Niechby Połkole obracało się około swoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym swoim obrótem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kulistą* (superficies spherica); całe zaś połkole obiegnie mieysce tą powierzchnią krzywą zakończone, które się nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrótu, każdy punkt okręgu półkoła, w iednakowey zawsze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kulistey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka.

Kula więc iest bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, którey wszystkie punkta iednakowo są odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem*.

Odległośc środka od punktu któregokolwiek powierzchni kuli, nazywa się *promieniem*. Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwóch stro-

nach

nach kończąca się na iey powierzchni, nazywa się średnicą, i dwa razy iest większą od promienia. Ta zaś średnica, około którey obracaiąc się połkole, zrobiło kulę nazywa się *Osią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaszczyzną przechodzącą przez iey środek, wszystkie punkta przecięcia powierzchni kulistey, przez tę płaszczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na tymże iest przecięciu.

Więc takie przecięcie iest kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaszczyzny, która przez iey środek przechodzi, nazywa się *wielkim kołem kuli.*

Dwa takie koła przecinaią się, iedno z drugim na dwie części równe.

Jakoż spólne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc iest średnicą obydwóch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią się na dwie części równe.

Gdyby kula przecięta była płaszczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale

ale prostopadłą do osi iey obrótu, przecięcie to kuli byłoby kołem od spolnego przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyzną połkola, nakreślonym, pod czas obrótu tegoż połkola tworzącege kulę.

Że zaś można sobie wystawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrót któregokolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrótu powstała, iednakowey zawsze iest wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaszczyzną, wszędzie przecięcie iey, będzie kołem, ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, która do tey płaszczyzny iest prostopadłą.

Przecięcie kuli od płaszczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa się *małym kołem*.

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie inne punkta tey płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tey płaszczyzny, od środka kuli, iest przeciwprostokątną Tróykąta prostokątnego, który ma promień, za iedno ramie kąta prostego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wszystkie tedy inne punkta tey płaszczy-

szczy-

szczyzny są od środka odległe większą iłością, niżeli iest promień, a zatym są za kulą.

O płaszczyźnie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt spólny z kulą, mówi się, iż się kuli *dotyka*. Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwszy na tey płaszczyźnie iakąkolwiek liniią prostą, ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie styczną z tym kołem, któreby było przecięciem kuli od płaszczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżey około Walców, i Ostrokręgów prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części różnych.

141. *Twierdz: przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez którego punkt średni poprowadziliśmy styczną, aż do iey zeyścia się z obydwóch stron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części równe i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połów.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwóch stycznych.

Niech będzie ADB, łuk koła, przez którego punkt średni D, poprowadzona iest styczna spotykaiąca w punktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta. F, i f, łuków: BD, AD, poprowadźmy styczne: GH, Gh, które spotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łuków: BD, AD. Tab: VI Fig. 1.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy iest większa od linii BH.

Niech liniia CF, spotyka w punkcie L, liniią Ee; Tróykąty: CDL CFG, mogą przystać do siebie, więc linie: DG, albo BH, i FL, są równe.

Poprowadźmy cięciwę BD, którą li-

M niia

niia CL, spotyka w punkcie I, i BM równoodległą od CL.

Tróykąty prostokątne: BDM, JDL, są do siebie podobne; a że BD dwa razy iest większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatym BM, więcey niż dwa razy większa iest od FL, albo BH. Że zaś w Tróykącie EBM, kąt M, iest roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linij BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa iest od linii BH.

142. *Wniosek.* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E, H, B, spuścimy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy EB: HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. A że EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek.* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4, 8, 16. 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałów, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczególności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy pro-

sto-

stopadłą EO, na promień CN; różnica między odległością spodku. O tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mówię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się naostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144 *Twierdz:* 1. Niech będzie łuk koła, mnievszy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca spuśćmy prostopadłą na pierwszy promień, to iest na oś obrótu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona tym około osi obrótem łuku, równa się Prostokątowi, maiącemu za podstawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk iest częścią; a za wysokość liniią równą odległości środka, od spodku prostopadłey spuszczoney na oś obrótu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy iest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA; *Tab: VI Fig. 1.*

M2

CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku.

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca się około promienia CN, iak około osi swoiey. Powierzchnia krzywa, obrótem łuku AB naznaczona, równa się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, liniią CQ, a za podstawę, liniią równą okręgowi, którego CA iest promieniem.

Dowodz. Niech styczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech spotyka w punktach E. i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4.8,16,32, i t. d. a ód punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień CB, przy każdym następuiącym podziale, spuszczaymy prostopadłą na promien CN. Różnica między odległością środka, od spodku tey prostopadłey, a liniią CQ, zmnieyszać się będzie więcey niż połową; za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się na ostatek stać mnieyszą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrótu łuku AB, około linii CN, każda styczna kreśli powierzchnią

krzy-

krzywą Ostrokręgu ściętego równaiącą się Prostokątowi maiącemu za podstawę, liniią równą okręgowi, którego promieniem iest CN, a za wysokość, odległość dwóch prostopadłych spuszczonych na oś, od końców tey styczney; a zatym summa powierzchni krzywych, zrobionych od wszystkich tych stycznych, równa się Prostokątowi, maiącemu tę samę podstawę a wysokość równą summie wszystkich tych wysokości; to iest równą odległości środka od spodku prostopadłey spuszczoney na oś z punktu tego, gdzie ostatnia stycz a spotyka promień CB. Może tedy różnica summy powierzchni krzywych Ostrokręgu zrobionych obrótem wszystkich stycznych, mnieysza być od Prostokąta z taką iak się wyżey powiedziało podstawą, a z wysokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wszystkich powierzchni krzywych większa iest zawsze od powierzchni utworzoney obrótem łuku AB; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrótem łuku AB, równa się Prostokątowi, maiącemu za podstawę, okrąg, którego promieniem iest CA, a za wysokość, odległość CQ, środka C, od s odku Q, prostopadłey spuszczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mós

Mówiąc w szczegulności; powierzchnia Półkuli (Hemispherium) utworzoney obrótem czwartey części koła, ABN, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, którego, CA iest promieniem, a za wysokość, promień CN.

A zatym powierzchnia krzywa utworzona obrótem łuku BN, równa się Prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę równą okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego iey koła, A że powierzchnia wielkiego koła równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia; albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, którego promień równa się średnicy kuli.

145. Idzie zatym, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy iak piewierzchnia koła iakiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: A że powierzchnia koła, iest do powierzchni kwa-

dratu

dratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey iako się w Rozdziale XIII. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to iest) iak okrąg koła, do swoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawisło od skwadrowania koła, i od wyprostowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak się ma do powierzchni nakreśloney obrótem łuku NB, iak się ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do Prostokąta z linii NQ; i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadrata linii NB; a zatym, iak koło, któreby miało za promień tę średnicę, do koła, któreby miało za promień liniią NB; a że powierzchnia kuli równa się powierzchni pierwszego koła; więc powierzchnia nakreślona obrótem łuku NB, równa się powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA. połkole tworzące obrótem swoim kulę; niech będzie NEDA Prostokąt którego podstawą iest średnica tego połkola, a wysokością promień iego. Podczas obrótu połkola, ten Prostokąt utwórzy Walec prosty, które- Tab: VI Fig: 8.

igo

go powierzchnia krzywa zrobiona przez obrót linii ED, równać się będzie Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę DE, albo AN. a za podstawę okrąg podstawy tego Walca a zatym ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli.

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy liniią QBP, prostopadłą do osi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrót linii EP równa iest powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrót łuku NB.

148 Walec utworzony obrótem Prostokąta ADEN, miałby wysokość równą średnicy podstawy swoiey; dotykałyby się w punktach: A. i N. kuli utworzoney obrótem połkoła AFBN; dotykałby się iey także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mówi się, iż iest na kuli opisanym. Nazywa się on także i Walcem Archimedesa, od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł równość powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prosto-

kąta-kątowi z okręgu tey podstawy i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwóch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. A że powierzchnia krzywa Walca, rowna iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno prostopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, np: co dziesięć, albo co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaszczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma nayblizszemi od siebie podstawami.

W szczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno - odległe iest od *Równika* (æquator), na $23^{\circ}\frac{1}{2}$ a drugie od *Biegónu* (polus) także na $23^{\circ}\frac{1}{2}$.

Tab: VI Fig: 2. Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBT. wyraża czwartą część drugiego koła do niego prostopadłego; niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła prostopadłego i dwóch płaszczyzn równoodległych od koła, pierwszego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami CF i BQ, iak się ma promień kuli, do linii CQ, która iest wstawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami; CF, i bq; iak wstawa cała, czyli promień do wstawy łuku bF, to iest do linii Cq, Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatym i ich różnicę, to iest: część powierzchni zawartey między płaszyznami; BQ, i *bq*.

151.

151. *Twierdz:* 2. Bryłowatość kuli równa się $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opisanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Półkulę obrutem swoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opisany na tey czwartey części koła, Ten kwadrat obracaiąc się około CB, utworzy Walec opisany na półkuli, który będzie połową Walca opisanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Półkula utworzona obrótem czwartey części koła AMBC równa się $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrótem kwadratu ACBD. Tab. VI Fig: 3.

Poprowadźmy przekątną CD; Tróykąt BCD utworzy Ostrokrąg, którego podstawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wysokość tego Ostrokręgu będzie BC; to iest będzie ten Ostrokrąg równey z Walcem podstawy, i wysokości.

Od dwóch którychkolwiek punktów nap: P, i *p* Osi CB wyciągniymy prostopadłe do niey liniie: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakreślmy nadto, liniie: MN, *mn*, LO, *lo*, równoodległe od osi. Kwadrat promienia CM, równa się summie kwadratów z PM, i CP; a że liniia PQ równa iest promieniowi, (tak iako BD, CA i

CB

CB są równe) i CP równa PL; więc kwadrat z Pq, równa się summie kwadratów z PM, i z PL.

Że zaś Walce utworżone obrótem Prostokątów Pq, PN, PO. maiących iednakie wysokości, są do siebie, iak ich podstawy, albo iak kwadraty premieniów tychże podstaw; więc pierwszy z tych Walców będzie równy summie dwóch innych. Podobnym sposobem okazać można że Walec Pq, równa się summie Walców utworzonych obrótem Prostokątów Pm, i Pl.

Takowe dowodzenie ma mieysce chociaż nie od punktów P, i p, ale od którychkolwiek innych będą wywiedzione prostopadłe do osi CB; a zatym podzieliwszy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwsy prostopadłe przecinaiące tak okrąg iako i liniią CD; Summa wszystkich Walców składaiących, Walec ADB, równać się będzie summie wszystkich Walców wpisanych w Półkule, wraz z summą wszystkich Walców opisanych na Ostrokręgu, albo summie wszystkich Walców opisanych na Półkuli, wraz z summą wszystkich Walców w Ostrogrąg wpisanych. A że summa wszystkich Walców wpisanych lub opisanych na Półkulu, może się mnieyszą ilością różnić od

tey-

teyże Półkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i summa wszystkich Walców wpisanych, lub opisanych Ostrokręgowi, różnić się też od tego Ostrokręgu będzie mnieyszą ilością, niż iest ta ilość dana.

Więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania;) Walec utworzony obrótem kwadratu CABD, równa się summie z Półkuli utworzoney obrótem czwartey części koła, i z Ostrokręgu utworzonego obrótem Tróykąta BCD.

A że Ostrokrąg utworzony obrótem Tróykąta BC, iest $\frac{1}{3}$ Walca; więc Półkula utworzona obrótem czwartey części koła AMBC, iest $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, którаby utworzyła się obrótem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opisanego na tey kuli, a utworzonego obrótem Prostokąta opisanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wniosek.* 1. Stosunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opisanego, ten sam iest co i stosunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opisanego: (149).

153. *Wniosek* 2. Bryłowatość kuli, równa się bryłowatosci Ostrokręgu, któryby miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Ostrokrąg maiąc podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanego, byłby cztery razy większy od Ostrokręgu innego równey z nim wysokości, a maiącego podstawę równą z Walcem. A że ten drugi Ostrokrąg, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokręgu maiącego równą z Walcem wysokość i podstawę, a zatym byłby połową tego Ostrokręgu, który iest $\frac{1}{3}$ Walca; więc Ostrokrąg maiący równą z Walcem podstawę, a wysokość równą promieniowi kuli, iest $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatem Ostrokrąg maiący za wysokość promień kuli, a podstawę cztery razy większą od podstawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula iest $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula równa się temu Ostrokręgowi.

Można to samo ieszcze i w ten sposob okazać;

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) którego wszystkie ściany dotykaią się kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podstawę Ostrogranu maiącego swoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równac

się

się będzie bryłowatości iednego takiego Ostrogranu, któryby miał za wysokość promień kuli, a za podstawę summę podstaw, Ostrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to iest powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawsze iest prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego Wielościanu więc (podług tego, co się mówiło o sposobie wyczerpania,) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli w szczegulności przystosowane to podanie, iest prawdziwym, a zatym że kula równa się Ostrokręgowi, któryby miał za wysokość, iey promień, a za podstawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wniosek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrótem wycinka kołowego BCM, równy iest Ostrokręgowi maiącemu za wysokość, promień tey kuli, a zapodstawę, koło, równe powierzchni kulistey, utworzoney obrótem łuku BM; to iest koło, którego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak się ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wysokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek* 4 Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrótem wycinka

ka koła BCM; iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrótem Prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak się ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli, albo iak Walec utworzony obrótem Prostokąta BPQD do Walca opisanego na kuli. A że kula iest $\frac{2}{3}$ Walca na niey opisanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrótem wycinka koła BCM, iest też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrótem Prostokąta BPQD.

156. *Wniosek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrótem wycinka ACM iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrótem Prostokąta CAqP. A że część kuli którą to część nazwać można *klócem kulistym* (Truncus sphæricus) utworzony obrótem części kołowey ACPM, iest summą z wycinka kulistego utworzonego obrótem wycinka kołowego ACM, i z Ostrokręgu utworzonego obrótem Tróykąta CPM; więc bryłowatość tego klóca kulistego równa się summie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wysokości ktoryby miał za podstawę koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wysokości, a którego podstawa byłaby równa drugiemu kołu klócen kończącemu; a zatym bryłowatość tego klóca tak się ma do bryłowatości Walca utworzonego obrótem Prostokąta CAqP, iak $\frac{2}{3}$ $CA^2 + \frac{1}{3} MP^2$ do CA^2.

157.

157. *Wniosek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrótem odcinka kołowego BMP, uważaymy sobie ten odcinek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrótem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrót odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrótem wycinka BDM; od Ostrokręgu utworzonego obrótem Tróykąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Walca utworzonego obrótem Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętego,! utworzonego obrótem Czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i których wszystkie kąty bryłowe odpowiadaiące sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiące są podobne; te mówię dwie Bryły nie różnią się, chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z których ieden ma bok długi na pół stopy, a drugi, na cal ieden, różnią się samą tylko wielko-

ścią. Takie Bryły nazywaią się podobnemi.

Przykłady, Dwa Równoległościany prostokątne są podobne, gdy ich podstawy i ściany są podobne iedne względem drugich,

Dwa Graniastosłupy proste, są podobne, gdy podobne są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podstaw.

Dwa Ostrograny, maiące kąt bryłowaty spólny w wierzchołku podobne będą, gdy podstawy ich są równoodległe.

159. *Uwaga*. Gdy dwie Figury prostokreślne, są podobne; wziąwszy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwszy od tego punktu linije do wszystkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwszemu położony; od którego ciągnąc linije do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na ktore podzielona była pierwsza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz*. 1. Wziąwszy w Bryle zakończoney powierzchniami płaszczystemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu

ku Ostrogranów, ile ta Bryła ma scian, biorąc też sciany za podstawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwszemu położony, który wziąwszy także za wierzchołek, tyluż co i w pierwszey Bryle Ostrogranów, wszystkie te Ostrograny będą podobne względem Ostrogranów pierwszey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek sześciu Ostrogranów, maiących za podstawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek szesciu Ostrogranów maiących za podstawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Ostrograny, będą podobne względem pierwszych.

Toż mówić i o innych Bryłach foremnych.

Na tym podaniu zasadza się cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuszczeniem iey nieco zabawić się.

Wybrawszy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Ostrogranów maiacych ściany tey Bryły, za podstawy, i na te Ostrograny, Bryłę podzieliwszy, spuścmy od tego punktu prostopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy

Na punkt

punkt podobnie tey ścianie położony, iakí spodek prostopadłey spuszczoney na ścianę pierwszey Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy prostopadłą do tey ściany, tak wysoką aby stosunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stosunkowi dwóch krawędzi, odpowiadaiących sobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey prostopadłey weźmy za wierzchołek wszystkich Ostrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Ostrogranów, na które podzielona pierwsza Bryła.

Dowodz: Odległości dwóch punktów służących za wierzchołki Ostrogranów od wierzchołków odpowiadaiących sobie, w ścianach, do których prostopadłe są ciągnione, te mówię odległości, są przeciwprostkątnemi Tróykątów prostokątnych podobnych, maiących za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadaiące sobie boki, maią proporcyonalne, to iest maią ie w stosunku dwóch krawędzi odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach; a zatym wszystkie te ściany; są podobne, i wszystkie ich kąty są równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich skła-

składaią, mogą przystać do siebie; są więc te dwa Ostrograny podobne. Pochyłości też ścian Ostrogranów do płaszczyzn podstaw są równe iedne względem drugich; aże także równe są pochyłości, tych podstaw do płaszczyzn ścian tych odpowiadaiących sobie w Bryłach, które ściany spólną krawędź maią z podstawami tych Ostrogranów, więc i ściany odpowiadaiące sobie w tych dwóch Ostrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach, a które maią spólną krawędź z pierwszemi dwiema ścianami; to iest z podstawami dwóch tych Ostrogranów.

Na scianach dwóch odpowiadaiących sobie w tych dwóch pierwszych Ostrogranach, spuśćmy od ich wierzchołków prostopadłe do podstaw tychże dwóch ścian; a od spodków tych prostopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach, inne dwie prostopadłe do tychże dwóch podstaw, ścian Ostrogranów. Oprócz tego, na płaszczyznie przechodzącey przez dwie w obydwóch bryłach ciągnione prostopadłe, spuśćmy do drugich dwóch prostopadłych, na płaszczyznach ścian odpowiadaiących sobie, w Bryłach, od tychże co i pierwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe; te ostatnie prostopadłe, będą

pro-

prostopadłemi do płaszczyzn dwóch tych ścian odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe; Troykąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle będą równokatne a zatym i podobne. Aże pierwsze dwie prostopadłe ciągnione na płasczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranów, maią się do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące sobie w dwóch Bryłach; więc też i odległości wierzchołków, tych dwoch Ostrogranów od drugich dwóch ścian także sobie odpowiaiących, w tych Bryłach, będą w tymże samym stosunku; i odległości spodków ich, od dwóch krawędzî należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwie ściany odpowiadaiące sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwóch Brył krawędziach odpowiadaiących sobie, a zatym odległości tych spodków od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatym odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian Brył, od końców tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwóch ścianach,

spodki

spodki prostopadłych podobnie są położone. Że zaś i wielkości tych prostopadłych są proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwszych dwóch Ostrogranów, są też podobnie położone względem dwóch ścian drugich, odpowiadaiących sobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Ostrograny maiące spólny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podstawy, będą do siebie podobne.

Toż mówię i o innych Ostrogranach odpowiadaiących sobie, z których się te dwie Bryły składaią. (i)

161. *Twierdz.* 2. Powierzchni Brył podobnych, zakończonych samemi tylko pła-

---

(i) *To Twierdzenie, iest bardziey długie niż trudne. i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Iuż by też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli samcy umieli sobie wystawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego a zdatnieyszą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odrysowana w perspektywie, i przed oczy wystawiona.*

płaszczystemi powierzchniami, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących sobie, czyli, są w stosunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wszystkie ściany dwóch Brył podobnych, po dwie brane są sobie podobne; i tak brane, w iednakowym do siebie są stosunku, to iest w stosunku dwumnożnym, dwóch krawędzi odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do summy wszystkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże samym stosunku.

F 162. *Twierdz*: 3. Bryłowatości dwóch Brył podobnych, są do siebie w stosunku sześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadaiących sobie, czyli, są w stosunku tróymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że stosunek iednego Sześcianu do drugiego, ten sam iest, co i stosunek boku pierwszego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; która się znayduie, szukaiąc nayprzód trzeciey ciągło Proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwszego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwóch boków, i do trzeciey proporcyonalney znalezioney, szukaiąc czwartey.

Gdy-

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwszego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy większa od boku Sześcianu pierwszego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwszego.

2. Niech będą dwa Równoległościany prostokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, iest nap; dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu: wszystkie też inne krawędzie pierwszego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podstawy pierwszego Równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podstawy drugiego. Aże też i wysokość pierwszego, dwa razy iest większa od wysokości drugiego; więc bryłowatośc pierwszego iest ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przystosować można do wszystkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogulności zaś mówiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu prostokątnego; a zaś: a, b, c, krawędzie drugiego Równoległościanu

pier-

pierwszemu podobnego; będą te trzy stosunki równe; $A : a = C . b = C . c$. Liniiom A, i a znaydźmy dwie linie L i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było $A : a = a : L = L : M$,

Będzie pierwszy Równoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc linie A i a, B, i b, iak boki podstaw; tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Prostokąt z linii a, i b, na inny, któryby miał za bok ieden, linią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi $B : b = a : x$. Zaś stosunek linii B: do b, wzięty iest za równy stosunkowi linii A do a, więc też będzie $A : a = a : x$; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy, będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i a. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną; L. Będzie podstawa drugiego Równoległościanu, równą Prostokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Równoległościanowi, któryby miał trzy linie B, c, L, za krawędzie; a zatym stosunek iego do pierwszego Równoległościanu, będzie ten sam, co i stosunek Prostokąta z liniy c, i L, do Prostokąta z linii A, i C.

Zamieńmy Prostokąt z linii c i L, na inny, któryby miał za bok ieden linią C,

a za

a na bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi $C : c = L : x$. Ze zaś stosunek linii C do c. wzięty iest za równy stosunkowi A do a, a stosunek A do a, zrobiliśmy równy stosunkowi a, do L więc też będzie $a : L = L : = x$; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do a, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną: M; Prostokąty: B ⋈, M i c ⋈ L. będą równe. Aże się dowiodło iż pierwszy Równoległościan iest do drugiego w stosunku Prostokąta A ⋈ C do Prostokąta c ⋈ L; więc też ten pierwszy Równoległościan będzie do drugiego w stosunku Prostokąta A ⋈ C do Prostokąta C ⋈ M, to iest w stosunku A do M.

Ze zaś $A : a = a : L = L : M$; więc stosunek pierwszego równoległościanu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwsza liniia służąca za pierwszy wyraz proporcyi, powinna być krawędziem iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem, ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest nap. krawędź A, i a.

Ale

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże samym byłyby stosunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią się do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wysokości Graniastosłupów podobnych, lub Ostrogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące sobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących sobie w dwóch Graniastosłupach podobnych, pochyłości do podstaw są równe; tychże ścian wysokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokosci tych Graniastosłupów, równe są prostopadłym spusczonym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych, nap: od punktów na bokach odpowiadaiących sobie w tychże podstawach; a zatym tę wysokości Graniastosłupów, będą służyć za iedno ramie kąta prostego w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwprostokątne, maią wysokości dwóch ścian odpowiadaiących sobie. Będą zatym te wysokości dwóch Graniastosłupow, tak się mieć do siebie, iak wysokości dwóch ich ścian odpowiadaiących sobie; to iest: iak krawędzie dwóch tychże Graniastosłupów, odpowia

wia

wiadaiące sobie. To samo rozumowanie przystosować można i do Ostrogranów.

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniastosłupy podobne, i te także są do siebie w stosunku sześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących sobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, któreby mogło służyć za wstęp do ogulnego dowodzenia, to samo iest, co i poprzedzaiące.

Wystawuiąc sobie podstawy tych dwóch Graniastosłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podstaw, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących sobie; więc też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podstawach; a zatym i stosunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach, dwóch Graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniastosłupów; więc Równoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniastosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniastosłupów, byłyby

łyby do siebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniastosłupach. Że zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniastosłupów, więc też i dwa Graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa Graniastosłupy nap: proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów; te mówię Graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne; a zatym takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów, więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczegulności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa druga Bryła, w tymże samym stosunku, to iest w stosunku sześcienym, ich krawędzi, odpowiadaiących sobie.

164. *Defin:* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatym tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a ztąd podobne są i Prostokąty tworzące obrótem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych; oprócz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadłe do podstawy powinny być do siebie podobne, to iest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców prostych podobnych, maią się do siebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie; to iest: iak kwadraty promieni, ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z summy wysokości iego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. Aże Promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa Walców) iak ich wysokości, więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku maią się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, nap: iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie Walców w tymże samym stosunku; to iest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to iest, o takich, w których się nie zamykaią podstawy.

166. *Twierdz*: 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak się mają do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; to iest, są do siebie w stosunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap: w stosunku troymnożnym promieni, ich podstaw.

Dowodz: Opiszmy na podstawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te wielokąty będą podstawami graniastosłupow, teyże z walcami wysokości. Te Graniastosłupy będą podobne, a zatym będą się miały do siebie w stosunku tróymnożnym, nap: promieni ich podstaw.

Walce tak się do siebie maią, iak Graniastosłupy na nich opisane. Iakoż każdy Walec iest do Graniastosłupa na nim opisanego, w stosunku podstawy tego Walca do podstawy Graniastosłupa. Aże podobne są dwa Wielokąty na podstawach Walcow opisane, więc tenże sam stosunek będzie każdego Walca do Graniastosłupa na nim opisanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniastosłupa na nim opisanego, iak i Walec drugi do Graniastosłupa na nim także opisanego, tak więc pierwszy Walec będzie się miał do drugiego, iak i pierwszy Graniastosłup do drugiego.

O Aże

Aże stosunek tych Graniastosłupow równa się stosunkowi tróymnożnemu promieni podstaw, Walcow, na których są te Graniastosłupy opisane; więc i stosunek tych Walcow równać się także będzie stosunkowi tróymnożnemu promieni tychże podstaw.

167 Można obiasnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś byc nayprzod przystosowane do samych Walców prostych, z kąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten sam stosunek ma mieysce; ponieważ Walce ukośne, równey podstawy i wysokości z Walcami prostemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do siebie w stosunku tróymnożnym promieni podstaw swoich.

168. *Defin:* Ostrokręgi proste nazywaią się *podobnemi*, gdy tak się maią do siebie ich wysokości, iak i promienie ich podstaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych ostrokręgów są podobne, a zatym podobne są Tróykąty, tworzące obrótem swoim te Ostrokręgi.

Co zaś do Ostrokręgów ukośnych: tych nie tylko wysokości tak się mieć do siebie powinny, iak promienie ich podstaw, ale nadto i osi ich w tymże samym do siebie są stosunku.

169. *Twierdz:* 6. Powierzchnie całe Ostro-

stro-

strokręgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następuiący, ktory także służyćby mógł równie i do Walcow.

W iednym którymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do promienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się, ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni iego podstawy; a zatym cała powierzchnia pierwszego Ostrokręgu, tak się ma do całey powierzchni drugiego, iak po-

 wierz-

wierzchnia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak kwadrat promienia pierwszey podstawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Ostrokręgów podobnych, są w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, tych Ostrokręgów lub ich boków odpowiadaiących sobie.

170. *Twierdz*, 7. Bryłowatości Ostrokręgów podobnych, maią się do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; to iest: iak Sześciany promieni ich podstaw, albo iak Sześciany ich boków, i t d:

Twierdzenie to podobnie się dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiast Graniastosłupów na Walcach opisanych, Ostrograny opisane na Ostrokręgach.

171. *Uwaga*. Wszystko to, cokolwiek się powiedziało o stosunku bryłowatości Równoległościanów, Graniastosłupow, Ostrogranów, i Ostrokręgów podobnych, na to wypada że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w stosunku złożonym z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości.

Za

Że zaś, gdy te Bryły są podobne, stosunek ich podstaw, iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości, składa się z stosunku dwumnożnego, i z stosunku poiedyńczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek tróymnożnym stosunku ich wysokości. Aże stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących sobie, więc stosunek tych Brył, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tróymnożnym ich promieni, to iest, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz. Powierzchnie kul, są cztéry razy większe, niźli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak się do siebie maią, iak powierzchnie tychże kół, to iest: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, są $\frac{2}{3}$ względem Walców na nich opisanych; więc tak się maią ią do siebie, iak bryłowatości tych Walców, to iest iak Sześciany ich promieni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w szczególności, iż powierzchnia kuli, iest do powierzchni kwadratu iey średnicy, w stosunku okręgu koła do iego średnicy, i ten stosunek iest zawsze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, iest do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła, do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także stosunek nigdy się nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w stosunku ich powierzchni, iako i w stosunku ich bryłowatości. Jakoż, są one w samey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie iest położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; iak iedna, tak i druga, tworzy się obrótem półkola, a te półkola są do siebie podobne.

Możnaby więc (z nie wielką odmianą) to im przystosować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, są te, których kąty w środku, są podobne, albo

albo które obrótem podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobne, są te, których promienie podstaw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są te, które się tworzą podobnych pół odcinków koł obrótem.

175. *Twierdz*: 9. Powierzchnie kuliste, i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą. *Tab: VI. Fig. 4.*

Dowodz: Niech będą: ACB. acb, dwa wycinki, kół podobne, które obrótem swoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki.

Nayprzód. Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki: AB; ab, równać się będą powierzchniom kół maiących za promienie, liniie: AB, ab; więc tąk się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac,

Powtóre. Powierzchnie Ostrokręgowe utworzone obrótem promieni: CB, bc, maią się też do siebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i po-

wierz-

wierzchnie całe wycinków podobnych tak się do siebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i służące za podstawy odcinkom kul, utworzonym przez obrót półodcinków kół; ABD, abd, są także do siebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, są do siebie w stosunku tróymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Nayprzód; Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła tak się ma do swoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to iest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek acb, kołą, do kuli swoiey. Więc tenże sam iest stosunek iednego z tych wycinką do swoiey kuli, co i drugiego wycinka do swoiey także kuli; azatym te wycinki, tak się do siebie maią, iak i kule do których należą. Aże stosunek tych kul, iest stosunkiem tróymnożnym ich promieni, więc i stosunek tych wycinków iest także sto-

sun-

sunkiem tróymnożnym tychże promieni.

Powtórz. Ostrokręgi podobne utworzone obrótem Tróykątow, CBD, cbd, są do siebie w stosunku trzymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrótem wycinków ACB, acb, do kół należących; a zatym i różnice każdego wycinku kuli, od każdego Ostrokręgu, to iest odcinki kul, utworzone przez półodcinki kół, ABD, abd, są do siebie w stosunku równym stosunkowi wycinkow kul, to iest w stosunku tróymnożnym promieni CB, cb.

177. *Twierdz:* 11. Gdy cztéry iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwsze wyrązy tey proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa ostatnie wyrazy teyże proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch innych bryłach podobnych; stosunek dwóch pierwszych Brył, będzie równy stosunkowi dwóch brył drugich.

Dowodz: Gdyby te cztéry linie były bokami cztérech Sześcianów, te cztery Sześciany czyniłyby proporcyą; aże stosunek dwuch pierwszych Brył, równa

się

się stosunkowi dwóch pierwszych Sześcianów, a stosunek dwóch drugich Brył, równa się stosunkowi dwóch drugich Sześcianów; więc i stosunek dwóch pierwszych Brył, równa się stosunkowi dwóch Brył drugich.

178. *Uwaga* Bryłowatości Brył podobnych, prędzey rosną, niż ich powierzchnie.

przykład. Niech będą linije odpowiadaiące sobie w dwóch Bryłach podobnych, dwa razy większe iedne względem drugich; powierzchnia iedney z tych Bryły, będzie cztéry razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większą od bryłowatości, drugiey Bryły.

Tab: VI Fig: 5 W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tróykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostokątną.

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i na-

trafia-

trafiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył, któreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w którym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bryłowatość drugiey Bryły większa iest względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to iest: bryłowatość drugiey Bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zasadza się podział *Linii Brył* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cérklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w sobie zwyczaynie 64. podziałów, które się rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak się maią do siebie, iak.

Licz-

Liczby - - - 1, 2, 3, 4, co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Jnne podziały wyznaczone są przez wyciągnienie przybliżone pierwiastków sześciennych. J tak, ponieważ boki dwóch Sześcianów, z których ieden dwa razy iest większy od drugiego, tak się blisko maią do siebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak się maią do siebie, iak liczby: 100 i 126. Używanie dwóch takich linii, znayduiących się na dwóch ramionach cérkla proproporcyonalnego, podobne iest używaniu innych linii tamże się znayduiących, które w osobnym na to Rozdziale iuż się wyłożyło. w Części I.

KONIEC.

PRZESTROGI.

Względem niektórych odsyłań i popraw w drugiey książce Geometryi.

Karta 12. Wierʃz 1: i naʃtęp. Widzieliśmy oraz i t d: ———

J kart: 41. 42. 101. 129. Odsyłania na tych kartach wyrażone, daremnieby w tey książce szukane były; ponieważ materye, do których się tu *A*utor odwołuie, za zdaniem Towarzystwa do ksiąg elementarnych odłożone są do osobnego dzieła przydatkowego do Geometryi i Algebry, maiącego się wydrukować dla Nauczycielów i dla tych tylko uczniów którzyby głębiey doskonalić się chcieli w tych dwóch Naukach.

Karta 34. §. *19.* Gdy dwie płaszczyzny *trzebá dodać*: które się przecinaią:

Karta 40. Wier: 9. Summa tych wszystkich kątów i t d: *popraw.* Mieysce nieograniczone, wprost wierzchołka, zawarte między płaszczyznami tych kątów, nazywa się kątem bryłowym.

Karta 40. W. oʃtatni. Krawędzie *popr:* boki.

Karta 48. §. 27. Pięć tylko iest i t d: *popraw.* Jeżeli są kąty takie bryłowe, któreby mogły bydź ułożone z kątów Wielokąlokątów foremnych iednakowego gatunku: tedy takich kątów bryłowych nie więcey iest, iak pięć.

Karta 55. W. 13. z których ma, *popraw* z których może.

Karta 80. W. 13. Sześcian 1, 26. *popraw* Sześcian z 1, 26.

W. 18. podwoiwszy pierwsze dziéwięć Sześcianów, *popr.* podwoiwszy Sześciany.

Karta 97. W. 3. do tegoż boku, *przyday* Sześcianu, i do boku trzeciego i t d:

Karta 111. W. 14. a dwie ich ściany, *przyday*, które stoią na tymże samym boku podstawy, znayduią się na iedney płasczyznie, *zmazawszy to co następuie po tychże słowach:* a dwie ich ściany.

Karta 123. W. 17. ADC. *popraw* ABC.

Karta 133. W. 11. wielkości *popr.* wielości.

Karta 137. W. 2. równemi *zmazać.*

Karta 142. § 96. Dwa ostrosłupy *przyday* tróykątne.

Karta 149. §. *102* Gdy Ostrosłup, *przyday* prosty.

Karta 162. W. 3. boków *popraw* ścian.

Karta 170. W. 22. Walec tak się ma *przyday* do.

Karta 193 W. 22. powierzchowną swoię do powierzchni *popraw* podstawę swoię do podstawy.

Karta 201. W. 2. mnieyszy *popraw* nie większy.

Karta

Karta 204. *W*. 20. *przed temi słowami:* którego promień *opuszczone są słowa:* a zatym równa iest powierzchni koła, którego promień, i t d:

Karta 214. *W*. 18. *i* 25. powierzchnia tego wycinka, *popraw* część powierzchni kulistey tego wycinka.

Karta 221. *W*. 19 na dwie ściany *popraw* na dwóch ścianach.

Karta 226. *W*. 11. : ⌶ ×. *zmazać ten znak* ⌶.

Karta 231. *W*. 20. Powierzchnie *przyday* całe.

W. 26. Powierzchnia *przyd.* cała.

Karta 236. *W*. Ostrokręgów *przyday* prostych.

W. 22. boków *popraw* wymiarów.

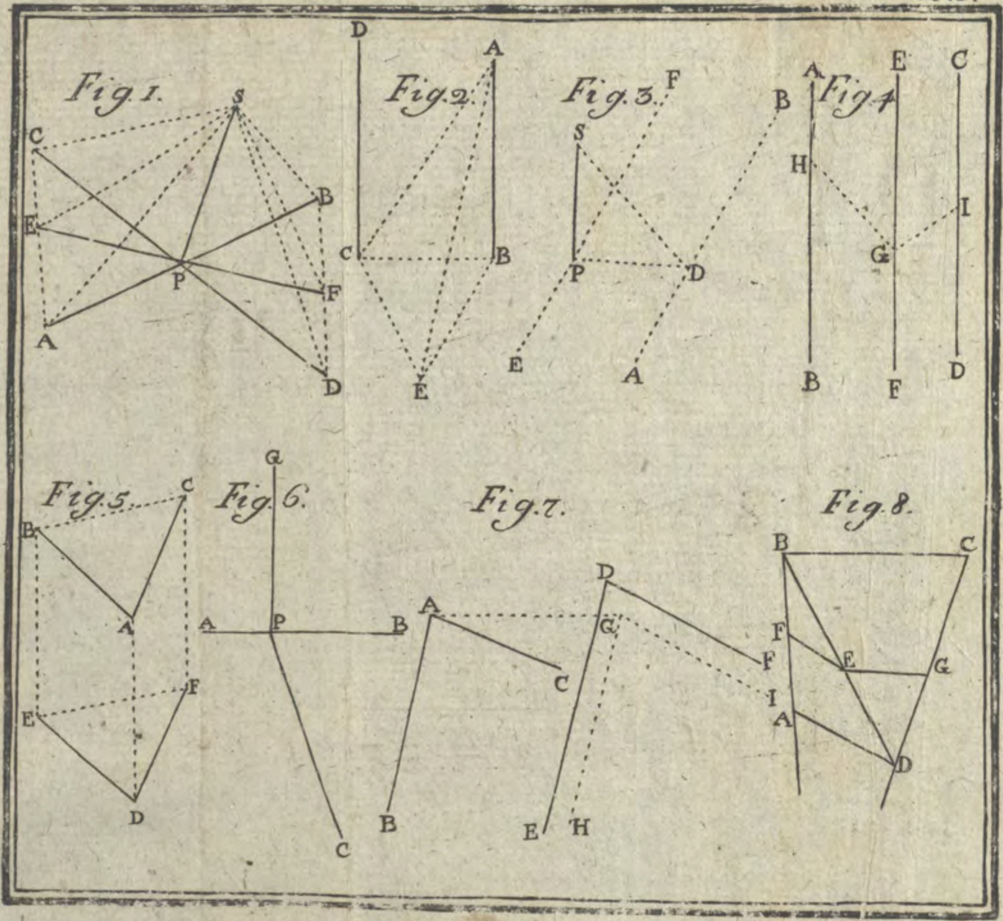


Fig. 1.
S C E A P B F D
Fig. 2.
D A C B E
Fig. 3.
F B S P D E A
Fig. 4.
A E C H I G B F D
Fig. 5.
C B A F E D
Fig. 6.
G A P B C
Fig. 7.
D A G F C I B E H
Fig. 8.
B C F E G A D

Tab. II.

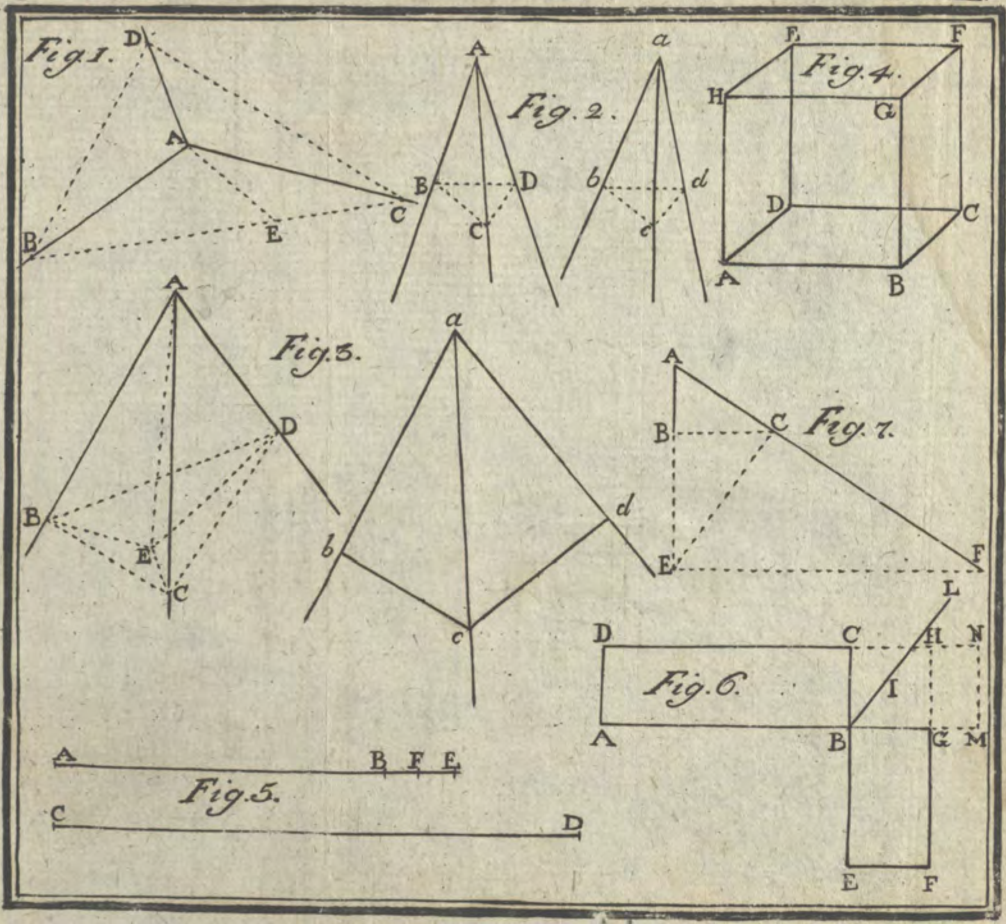


Fig. 1.
D A B E C
Fig. 2.
A B D C
a b d c
Fig. 4.
E F H G D C A B
Fig. 3.
A D B E C
a b d c
Fig. 7.
A B C E F
Fig. 6.
L D C H N I A B G M E F
Fig. 5.
A B F E
C D

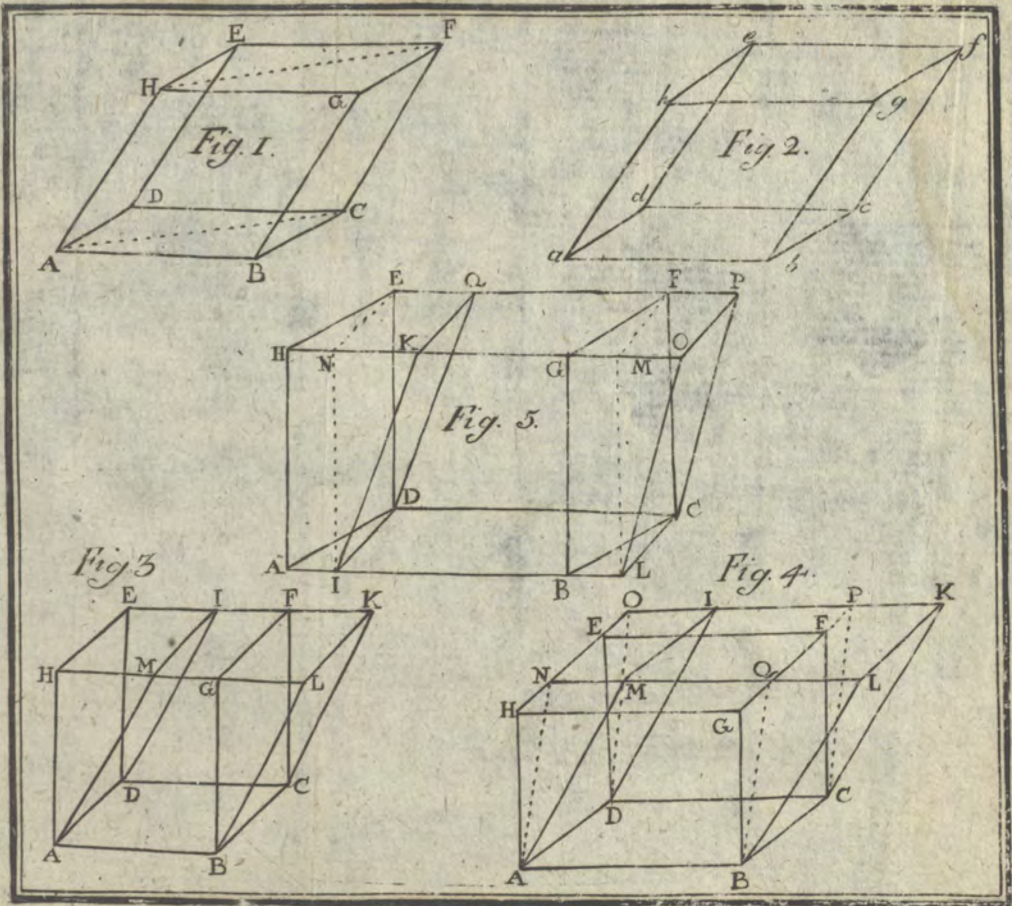
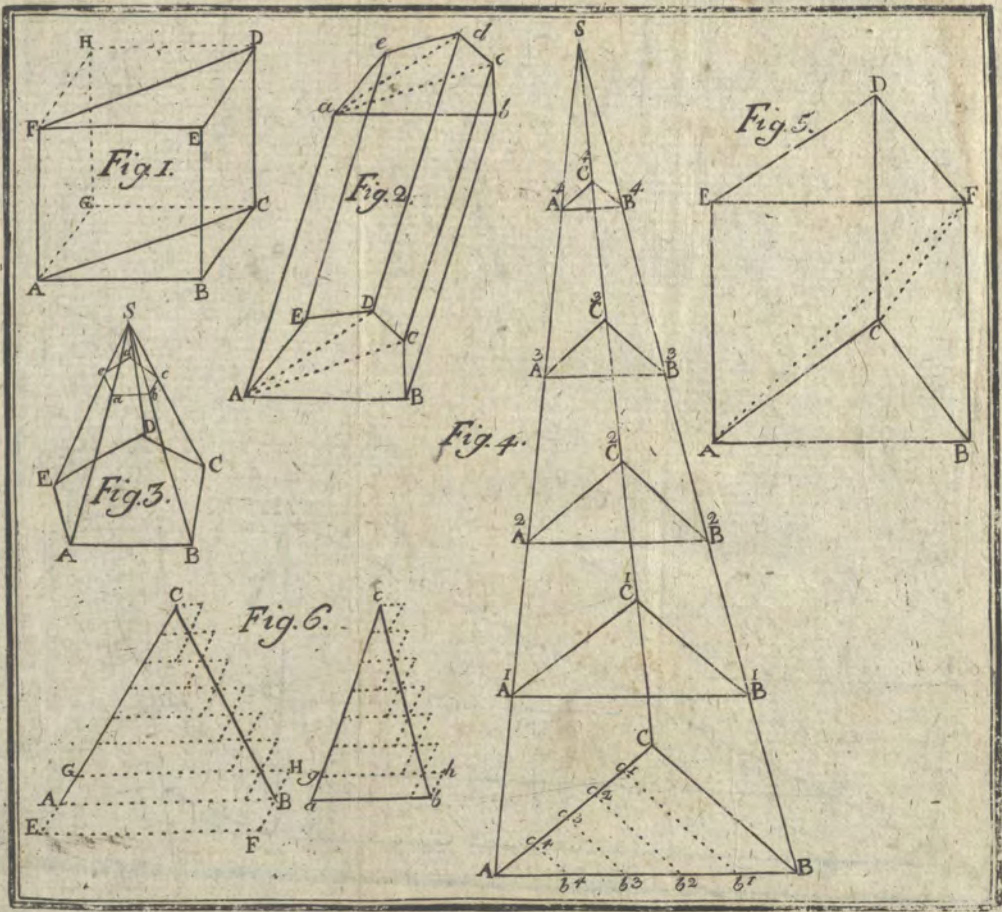


Fig. 1.
E F H G D C A B
Fig. 2.
e f h g d c a b
Fig. 5.
E Q F P H N K O G M D C A I B L
Fig. 3
E I F K H M G L D C A B
Fig. 4.
O I P K E F N M Q L H G D C A B

Tab. IV.



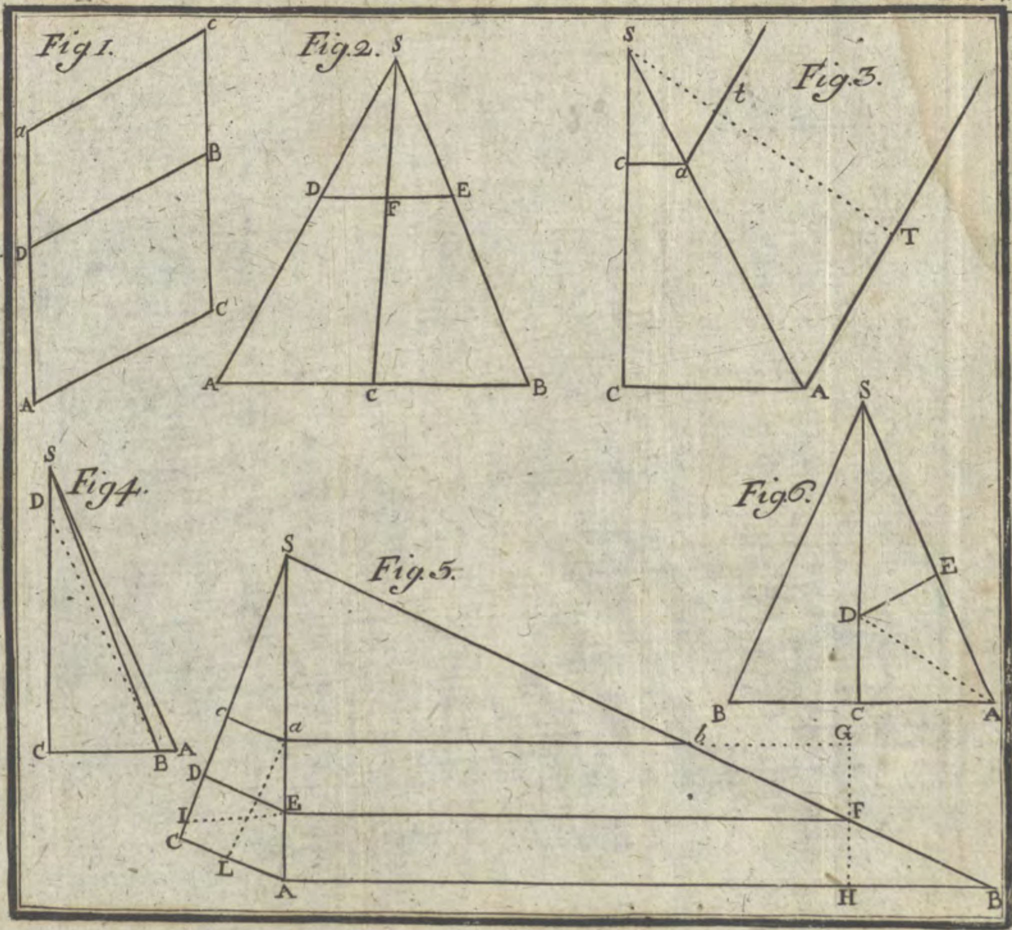


Fig.1.
c
a
B
D
C
A
Fig.2.
S
D
E
F
A
c
B
S
Fig.3.
t
c
a
T
C
A
S
Fig.4.
D
C
B
A
S
Fig.5.
c
a
b
G
D
E
F
I
C
L
A
H
B
Fig.6.
E
D
B
C
A

Tab.VI.

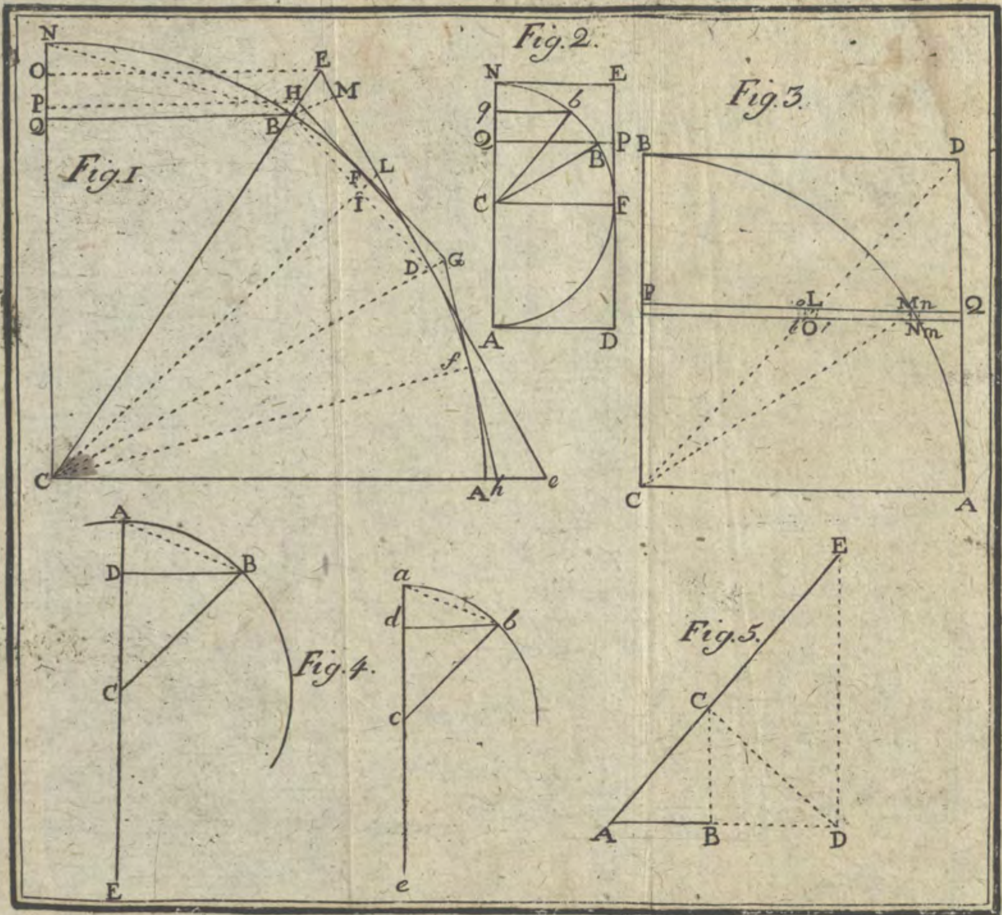


Fig.1.
N O P Q E H M B L F I D G f C A h e
Fig.2.
N E q b Q P B C F A D
Fig.3.
B D P L Mn Q O Nm C A
Fig.4.
A D B C E
a d b c e
Fig.5.
E C A B D