TEORYA

CIŚNIENIA CIECZY

NA ŚCIANY PŁASKIE I NA ŚCIANY KRZYWE.

PRZEZ

A. MARTYNOWSKIEGO

Inżyniera, byłego ucznia Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 4 lipca 1872 roku.

Myśl obecnej pracy powstała z powziętego przez nas zamiaru opisania, a właściwiej, podania formuł, używanych przy konstrukcyi metalicznych rezerwóarów, służących do zasilania wodą lokomotyw kolei żelaznych. Zdarzyło się nam robić podobne rachunki dla Kompanii kolei żelaznej między Châlons a Orléans'em, która, mając do postawienia pewną liczbę rezerwóarów, objętości od 70 do 80 metrów sześciennych każdy, i chcąc aby takowe spoczywały na podstawach żelaznych (beffroi), wysokich około $7^m,50$ nad poziomem szyn, życzyła sobie, ażeby wytrzymałość każdej części, wchodzącej w skład tej budowli, była ściśle obrachowaną; żeby wziętém było pod uwagę działanie na tę konstrukcyę siły wiatru; jednėm słowem, ażeby rachunki, usprawiedliwiające wymiary rozmaitych części, obejmowały wszystkie kwestye, mogące się przedstawić przy takiej budowie, i służyły za typ dla innych tego rodzaju projektów.

Przy obrachowaniu rezerwóaru we właściwém znaczeniu, to jest, przy obliczaniu wymiarów tej części konstrukcyi w której ma być zbieraną i przechowywaną woda, potrzebném jest wiedzieć naprzód ciśnienie wywierane przez wodę na ściany zawierającego ją naczynia, które, najczęściej, są ścianami krzywemi: walcowemi i sferycznemi. Otoż, wzory, jakimi się posługuje w podobnych okolicznościach, zazwyczaj są podawane zbyt pobieżnie; ich wyprowadzenie, w dziełach traktujących o ciśnieniu, albo jest zupełnie opuszczone, albo też pzedstawione pod formą, pozostawiającą wiele do życzenia, tak pod względem ścisłości, jak również i co do ich ogólności: takiém jest np. dowodzenie P. Morin, lub P. Lowe (jedyne zresztą jakie gdziekolwiek znaleźliśmy). Nadto, przy obliczaniu sferycznej części rezerwóaru, wkrada się niejako nieporozumienie między P. Lowe i P. Dupuit; gdyż w dziele P. Lowe (*), pod § 152, noszącym tytuł: « *Forces tangentielles qui sollicitent le fond suivant des petits cercles horizontaux. Erreur commise à ce sujet par M. l'Ingénieur Dupuit. Expres-*

(*) G. H. Lowe : *Des diverses résistances de la fonte, du fer et de l'acier.*

http://rcin.org.pl

sion de la somme de ces forces, » znajdujemy następujący ustęp: « Quant à la force qui tend à rompre « un réservoir à fond sphérique, suivant un petit cercle horizontal, quoique facile à déterminer, elle « vaut la peine qu'on s'y arrête et qu'on la calcule d'autant plus que quelques ingénieurs éminents « ont commis, à cet égard, une erreur que je signalerai et releverai en son lieu. » Ten sam autor, przyszedłszy do wypadku, różniącego się od tego jaki otrzymał P. Dupuit (*), powiada dalej: « C'est « probablement en se servant de cette formule, déduite par M. Dupuit d'une formule inexacte, que « les ingénieurs de la Compagnie de l'Ouest ont été amenés à construire des réservoirs en tôle dans « lesquels les épaisseurs du métal de la calotte vont en augmentant vers le milieu. »

Okoliczność ta, zniewalając do bliższego rozpatrzenia kwestyi tyczącej się dna sferycznego rezerwóaru, pociągała za sobą, jako naturalny wstęp do tego przedmiotu, rozpatrywanie ciśnienia na ściany krzywe w ogólności.

W dziełach traktujących o Hydrostatyce, jakie mieliśmy pod ręką (P. P. Bélanger, Delaunay, Duhamel, de Freycinet, Sturm; Hydraulika P. Bresse i P. Collignon), prócz twierdzenia Archimedesa i twierdzenia tyczącego się ciśnienia na *wszystkie* ściany naczynia, których dowodzenie jest rozwiniętém w zupełności, znajdujemy zaledwie wzmiankę o ciśnieniu na ściany krzywe, lub tylko w krótkości wysłowione niektóre rezultata, nie obejmujące rozmaitych przypadków, w jakich ściany mogą się znajdować, a w każdym razie, potrzebujące pewnego wyjaśnienia, jako nie będące odrazu widocznymi.

Powzięliśmy więc myśl rozwinięcia wskazówek, pobieżnie rzuconych w niektórych z dzieł wyżej wymienionych; wyprowadzenia wzorów, podawanych bez dowodzenia; zapełnienia braku jaki się spotyka w teoryi ciśnienia na ściany krzywe.

Raz wszedłszy na tę drogę, teoretyczna kwestya ciśnienia byłaby niezupełną, gdyby rozpatrywanie ciśnienia na ściany krzywe nie było poprzedzoném kwestyą ciśnienia na ściany płaskie, tém bardziej, że szukanie ciśnienia wypadkowego na ściany krzywe często się sprowadza do tych ostatnich, i że teorya ścian płaskich, jakkolwiek prosta i traktowana z pewnymi szczegółami, pozostawia do życzenia tak podanie rozmaitych przykładów na jej zastosowanie, jak wykazanie związku, w jakim teorya ciśnienia hydrostatycznego zostaje z innemi teoryami. Ściany płaskie znajdując więc naturalne miejsce przy ścianach krzywych, rozpatrujemy, dla całości kwestyi, obydwa przypadki ścian, i pracy niniejszej dajemy tytuł: *Teorya ciśnienia cieczy na ściany płaskie i na ściany krzywe.* Rozumiemy że ciecz znajduje się w spoczynku i pod działaniem jednej tylko siły ciężkości.

Przy ścianach płaskich, po wyprowadzeniu ogólnych wzorów, przytaczając szereg przykładów, wskazujemy, jak znajomość momentu bezwładności (moment d'inertie) ściany może być z korzyścią zużytkowaną na prędkie znalezienie jej środka ciśnienia, i jaką własność, co do tego punktu, posiadają figury foremne; po metodzie analitycznej, rozpatrujemy następnie metodę geometryczną, z której wyprowadzamy *graficzny* sposób znalezienia prostopadłej zawierającej środek ciężkości walca kołowego lub elliptycznego, ściętego płaszczyzną nachyloną do jego podstawy pod kątem nieprzewyższającym 45°: kończymy nareszcie dział ten porównaniem wypadków, otrzymanych z teoryi ciśnienia hydrostatycznego, — teoryi opartej na samej własności cieczy i wolnej od hypotez, — z rezultatami do jakich przyprowadza powszechnie w Mechanice zastosowanej przyjęta, a polegająca na pewnej hypotezie, teorya układu (répartition) ciśnienia na poprzeczne przecięcie ciała stałego, znajdującego się pod działaniem sił do tego przecięcia normalnych.

Przy ścianach krzywych, rozpatrujemy ściany najwięcej w praktyce używane: walcowe, stożkowe i sferyczne, w rozmaitych ich położeniach względem kierunku pionowego (siły ciężkości),

(*) J. Dupuit: *Traité théorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux.*

http://rcin.org.pl

używając, do przedstawienia natężenia wypadkowych ciśnień, metody geometrycznej, która, obok innych dogodności, wyjaśnia w sposób dotykalny powszechnie znany hydrostatyczny paradoks, i na zastosowanie której podajemy inne przykłady, jak np. szukanie wypadkowego ciśnienia na powierzchnie obrotowe jakiekolwiek.

Przedsiębiorąc tę pracę, musieliśmy zacząć od rozpatrzenia i geometrycznego przedstawienia ilości, ściśle z naszą kwestyą związanej i zwanej *ciśnieniem na jedność powierzchni*; — ta okoliczność wprowadziła nas na drogę czystej Hydrostatyki i wymagała poprzedniego nadmienienia o niektórych ogólnych własnościach ciał ciekłych. Wyprowadzając związek między ciśnieniem w danym punkcie i siłą ciężkości z ogólnego równania Hydrostatyki, podaliśmy dowodzenie tego równania z wyjaśnieniem kwestyi niedostatecznie przez autorów rozwiniętej, a tyczącej się sposobu przejścia od cząstkowych przyrostków ciśnienia w danym punkcie do przyrostku całkowitego w punkcie nieskończenie mu blizkim; prócz tego dodaliśmy pewne uwagi, według nas, lepiej rzecz przedstawiające.

Teorya ciśnienia cieczy na ściany naczynia zostaje w skutek tego poprzedzoną kwestyami przygotowawczemi, które, umieszczone na wstępie i stanowiąc dział osobny, mogą być, dla ich podrzędnej ważności, opuszczone, i nie przeszkadzają w niczém przystąpieniu wprost do samego przedmiotu.

Dzielimy więc obecną pracę na następujące trzy części:

Wiadomości ogólne z Hydrostatyki:
- A) Wiadomości wstępne i wyprowadzenie ogólnego równania Hydrostatyki.
- B) Zastosowanie ogólnego wzoru Hydrostatyki do cieczy ważkich.

Rozdział I. Teorya ciśnienia cieczy na ściany płaskie.

Rozdział II. Teorya ciśnienia cieczy na ściany krzywe.

http://rcin.org.pl

WIADOMOŚCI OGÓLNE Z HYDROSTATYKI.

A. WIADOMOŚCI WSTĘPNE I WYPROWADZENIE OGÓLNEGO RÓWNANIA HYDROSTATYKI.

STRESZCZENIE: Wzajemne oddziaływanie jednych cząsteczek cieczy na drugie i na ściany naczynia: ciecze doskonałe — Zasada jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta — Ciecze naturalne — Ciągłość materyi ciecz składającej — Ciśnienie wywierane na cząsteczkę cieczy przez wszystkie inne jej cząsteczki. — Określenie ciśnienia na jedność powierzchni w danym punkcie cieczy — Równość tego ciśnienia w każdym kierunku. — Różnica między równością ciśnienia w każdym punkcie a równością ciśnienia w każdym kierunku. — Zadanie Hydrostatyki — Wyznaczenie w funkcyi ciśnienia, danego w punkcie M, ciśnienia w punkcie nieskończenie mu blizkim M′ — Rożniczkowe równanie ciśnienia w danym punkcie cieczy — Równanie powierzchni jednakowego ciśnienia — Związek między ciśnieniem i gęstością w jakimkolwiek punkcie cieczy.

1. Wzajemne oddziaływanie jednych cząsteczek cieczy na drugie i na ściany naczynia: Ciecze doskonałe. Już w Mechanice ciał *stałych* rozpatrują się takie ciała, których powierzchnia może przeciwstawić działającej na nią zewnętrznej sile tylko *reakcyę normalną* do tej powierzchni; tak że wszelka, nawet nieskończenie mała, zewnętrzna siła przyczepiona do punktu, leżącego na takiej powierzchni, w kierunku do niej *nie normalnym* jest dostateczną aby nadać ruch temu punktowi: mówimy o powierzchniach *bez tarcia*, czyli o powierzchniach *doskonałych*. Mechanika ciał *płynnych* nadaje tę własność nie tylko zewnętrznej powierzchni tych ciał, ale jeszcze i każdej zosobna ich cząsteczce, to jest, powierzchni każdej cząsteczki wchodzącej w skład cieczy lub gazów; tak że brak *wszelkiego przylegania* (adhérence), *wszelkiego tarcia* (frottement):

1) pomiędzy cząsteczkami ciecz składającemi,

2) pomiędzy cząsteczkami cieczy i ciałami je otaczającemi i zostającemi w bezpośredniém z niemi zetknięciu, — a zatem, pomiędzy cząsteczkami cieczy i ścianami zawierającego ją naczynia (*) — stanowi jednę z charakterystycznych cech cieczy, uważanych w Mechanice Rozumowej i zwanych *cieczami doskonałemi*. Ciecze doskonałe są to *ciecze teoretyczne*.

2. Raz nadawszy cieczom tę własność, potrzeba przyjąć wnioski jakie z niej bezpośrednio wynikają:

1° Dla cieczy doskonałych, nieskończenie mała zewnętrzna siła,

a) leżąca w płaszczyźnie stycznej, spólnej do powierzchni dwóch cząsteczek, w jakimkolwiek punkcie wziętym na tej powierzchni; jak również, w płaszczyźnie stycznej, spólnej do powierzchni cząsteczki i do ściany naczynia, będzie dostateczną dla nadania cząsteczce ruchu w tej płaszczyźnie stycznej, to jest, dla wprawienia jednej cząsteczki w *ślizganie* się po drugiej, lub po ścianie naczynia;

b) nieskończenie mała zewnętrzna siła, działająca w kierunku normalnym do powierzchni zetknię-

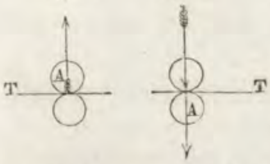
(*) Łatwiej jest nam pojąć brak przylegania i tarcia pomiędzy cząsteczkami cieczy, aniżeli zupełną niezależność pomiędzy cieczą a ścianami naczynia; ale ten ostatni przypadek możemy sprowadzić do pierwszego. W rzeczy samej, jeżeli ciecz jest zdolną przylegać do ścian naczynia, możemy uważać przylegającą do ściany nieskończenie cienką warstwę tej cieczy jako wchodzącą w skład samej ściany; tak że ściany naczynia i ciecz w niém zawarta będą się dotykać tylko samemi cząsteczkami tej cieczy.

http://rcin.org.pl

cia dwóch cząsteczek, jest zdolną *oddzielić*, czyli *oderwać* jednę cząsteczkę od drugiej lub od ściany naczynia.

Uwaga. Gdyby pojęciu o cieczy nie towarzyszyło pojęcie o naczyniu, w jakiém ona musi być zawartą, to jest, gdybyśmy wyobrazili ciecz bez wszelkiego naczynia, sens normalnego kierunku zewnętrznej siły byłby dla nas rzeczą obojętną, i bądź przy odrywaniu cząsteczek, (fig. 1), bądź przy ich ściskaniu (fig. 2), cząsteczka A, do której byłaby przyczepioną taka siła, zachowywałaby się zupełnie tak, jak się zachowuje wszelki materyalny punkt wolny w przestrzeni, i przyjęłaby ruch odpowiedni natężeniu działającej na nią zewnętrznej siły. Ale niezbędna, przy rozpatrywaniu cieczy, przytomność naczynia zmienia postać rzeczy: w przypadku fig 2, gdyby zewnętrzna normalna siła skierowaną była ku stronie płaszczyzny T, równoległej do ściany naczynia, a w ogólności, do płaszczyzny stycznej do naczynia w punkcie w którym kierunek siły przebija ścianę; gdyby więc siła ta *cisnęła* cząsteczkę A, jej natężenie musiałoby być bardzo wielkie, aby cząsteczka ustąpiła swego miejsca; tak że, w podobnych warunkach, sens zewnętrznej siły, oznaczony fig. 2, odpowiada *spoczynkowi* cieczy.

fig 1. fig 2.



2° Wzajemne oddziaływanie (akcya i reakcya) dwóch cząsteczek zostających z sobą w zetknięciu, jak również, — cząsteczki ciała ciekłego na element powierzchni wszelkiego innego ciała w zetknięciu z tą cząsteczką, a zatem, i na element ściany naczynia, — może być tylko siłą *normalną* do spólnej ich powierzchni zetknięcia, to jest, sprowadza się tylko do *ciśnienia normalnego* jednej cząsteczki na drugą, lub też na ścianę naczynia; i odwrotnie.

Dodajemy że:

a) *Dla cieczy* oddziaływanie cząsteczek jednych na drugie wywiązuje się dopiéro po wprowadzeniu siły zewnętrznej; gdyż cząsteczki cieczy doskonałych nie wywierają, same przez się, żadnego wewnętrznego działania na cząsteczki je otaczające, z powodu, że ciecz taka nie jest *systemem* materyalnych punktów, związanych z sobą pewnymi związkami, lecz tylko *skupieniem*, na pewnej przestrzeni, cząsteczek, zupełnie jedne od drugich niezależnych. Najzupełniejsza swoboda, jaką posiada każda cząsteczka, ulegania najmniejszej nawet zewnętrznej sile na nią działającej, jest przyczyną dla której, dla uchronienia cząsteczek od rozpierzchnięcia się ich w przestrzeni, zawiera się ciecze w naczynia *stałe*. Ciecze, raz zawarte w naczyniu, wywierają na ściany jego ciśnienie nie pierwej, jak dopiéro wtedy, gdy dążąca do wprawienia w ruch cząsteczki zewnętrzna siła znajduje w ścianach naczynia przeszkodę do urzeczywistnienia tego ruchu(*); w takich warunkach cząsteczki przestają być wolnemi i powstają między niemi działania molekularne. Lecz gdy na ciecz nie działa ani siła ciężkości, ani żadna inna zewnętrzna siła, ciecz pozostawiona sama sobie nie wywiera żadnego ciśnienia na ściany zawierającego ją naczynia.

b) Dla *gazów* rzecz się ma inaczej: wzajemne wewnętrzne oddziaływanie cząsteczek jednych na drugie istnieje tu samo przez się; wywiązuje się ono z samej natury gazów, z ich sprężystości, w skutek której czynią one bezustanne usiłowanie do zajęcia coraz większej objętości; tak że działania molekularne gazów są, z natury swojej, działania odpychające jednę cząsteczkę od drugiej. Jedna więc siła sprężystości, jaką posiadają gazy same w sobie, jest już dostateczną, ażeby takowe, będąc zawarte w naczyniu zamkniętém, wywierały ciśnienie (normalne) na jego ściany; wprowadzenie siły ciężkości, lub innej jakiejkolwiek zewnętrznej siły, zmieniłoby tylko natężenie tego ciśnienia.

3. Zasada jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta. Działania mo-

(*) Jest widocznėm, że przy swobodnym spadku cieczy ważkiej zawartej w rurze pionowej, *o przecięciu stałem*, żadne ciśnienie pomiędzy jej cząsteczkami nie powstaje.

http://rcin.org.pl

lekularne określone powyżej, co do *kierunku*, ulegają, co do ich *natężenia*, pewnemu prawu, właściwemu tylko płynom i zwanemu powszechnie *zasadą jednakowego* (równego) *przekazywania* (transmission) *ciśnienia na wszystkie punkta*, gdziebyśmy takowe nie uważali. Zasadę tę uważamy nie jako wynik rozumowania, ale wprost, jako nabytek spostrzeżeń i doświadczeń, i wyrażamy ją w sposób następujący:

Wywierając ZEWNĘTRZNIE, *jakimkolwiek mechanicznym sposobem* (np. za pomocą tłoka), *pewne normalne ciśnienie na pewną część powierzchni cieczy, zostającej* W SPOCZYNKU, *usuniętej od działania siły ciężkości, lub wszelkiej innej zewnętrznej siły, i napełniającej zupełnie naczynie ze wszystkich stron zakryte* ŚCIANAMI PŁASKIEMI, — *ciśnienie to jest przekazane* (*transmise*), *z témże samém natężeniem i normalnie, na każdą powierzchnię równą lub równowartą powierzchni wprost ciśnionej, bez względu gdziebyśmy nie uważali tę powierzchnię: na ścianach naczynia, lub też na wszelkiej innej płaszczyźnie rzeczywistej, lub idealnej, wziętej w samej massie cieczy, czyli w jej wnętrzu.*

Co znaczy, że jeżeli ciśnienie, wprost wywierane na powierzchnię Ω cieczy, jest P, znajdziemy, że to samo ciśnienie P będzie wywartém na powierzchnię równą Ω, wziętą naokoło jakiegokolwiek punktu ściany naczynia; nadto, biorąc dowolny punkt w samém wnętrzu cieczy, prowadząc przez niego płaszczyznę w kierunku również dowolnym, i uważając na tej płaszczyznie powierzchnię Ω, ta ostatnia będzie ciśnioną, z obu jej stron, siłami normalnemi, równemi i sobie przeciwnemi, i mającemi za wartość ilość P.

To, co mówimy o *ścianach płaskich*, ma miejsce i dla *ścian krzywych*, z warunkiem, iż zamiast powierzchni *jakiejkolwiek* Ω, będziemy rozpatrywać na ścianach, lub we wnętrzu cieczy, powierzchnię *nieskończenie małą* ω; gdyż wówczas ta ostatnia może być uważaną za element płaski i kwestya zostaje sprowadzoną do pierwszego przypadku.

Zasada jednakowego ciśnienia we wszystkich punktach stosuje się również i do gazów, usuniętych od działania na nie siły ciężkości, lub wszelkiej innej zewnętrznej siły, i zawartych w naczyniu ze wszystkich stron zakrytém; to jest, że *dla gazów, ciśnienie normalne wywierane w skutek ich siły sprężystości na ściany naczynia, lub na wszelką inną powierzchnię, jaką myślą możemy przeprowadzić w samej massie gazu, jest we wszystkich punktach jedno i to samo.*

Więc widzimy że dla cieczy, lub dla gazów, zostających w warunkach o jakich mówimy, ciśnienie we wszystkich ich punktach jest *stałe*.

4. Ale oczywiście warunki te nie są warunkami w jakich płyny znajdują się w rzeczywistości; i tak ciecze uważane w naturze, prócz działania na ich powierzchnię ciśnienia normalnego (atmosfery) poddane są sile ciężkości, działającej na każdą ich cząsteczkę zosobna; prócz tego, mogą się one znajdować pod działaniem innych zewnętrznych sił jakichkolwiek; również co do gazów, — prócz siły sprężystości, działa na nie, co najmniej, siła ciężkości. W warunkach naturalnych, ciśnienie nie będzie stałém dla wszystkich punktów; przeciwnie, będzie się ono zmieniać z punktem jaki rozpatrujemy; ale należy zauważyć, i to jest wielkiej wagi, że w każdym razie, jakiekolwiekby były dodatkowe zewnętrzne siły, działające na ciecz, zostającą w spoczynku, *zasada jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta istnieje zawsze*, to jest, że niezależne od działania tych ostatnich sił, ciśnienie wywierane na powierzchnię cieczy, przekazuje się *całkowicie*, z jednem i tém samém natężeniem, na wszystkie punkta cieczy lub gazu; tak że ostateczne rzeczywiste ciśnienie w jakimkolwiek punkcie jest wypadkową, powstałą ze złożenia dwóch normalnych ciśnień:

1) ciśnienia *stałego* wywieranego na powierzchnię cieczy,

2) innego ciśnienia, wywiązanego w skutek działania innych sił zewnętrznych.

http://rcin.org.pl

Dodając, że ta ostatnia składowa wypadkowego ciśnienia ulega *zasadzie jednakowego przekazywania ciśnienia*, pojmujemy, że ciśnienie wypadkowe rzeczywiste musi się zmieniać ze zmianą punktu bez względu, czy natężenie zewnętrznej siły jest stałe dla wszystkich punktów cieczy, (jak siła ciężkości), czy też zmienne z każdym jej punktem.

5. Ciecze naturalne. Mówiąc o warunkach, w jakich ciecze znajdują się w rzeczywistości, powinniśmy zauważyć, że sama istota cieczy spotykanych w naturze różni się nieco od cieczy doskonałych. Cząsteczki ciał ciekłych naturalnych, zamiast być niezależnemi jedne od drugich, przylegają, mniej lub więcej, do siebie i do ścian naczynia; dla wprawienia więc jednej cząsteczki w ślizganie się po drugiej, lub po ścianie naczynia, dla oddzielenia cząsteczek, zewnętrzna siła musi mieć pewne natężenie, gdyż powinna ona zwyciężyć siłę pochodzącą z wzajemnego przylegania cząsteczek, czyli *siłę tarcia*, (siłę zewnętrzną dla cząsteczki) działającą w kierunku wprost przeciwnym temu, jaki chcemy nadać cząsteczce, i powodującą stratę pewnej części mechanicznej pracy, jakąby wykonała siła przyczepiona do cząsteczki, gdyby ta ostatnia była zupełnie wolną w przestrzeni. Spoczynek cieczy naturalnych może zatem mieć miejsce nie tylko przy działaniu normalném zewnętrznej siły, ale i przy sile pochyłej, byleby tylko jej składowa leżąca w płaszczyźnie stycznej, spólnej do powierzchni dwóch cząsteczek, była mniejszą od siły tarcia, jaką cząsteczka jest zdolna wywiązać; tak że, mówiąc ogólnie, *wzajemne oddziaływanie cząsteczek ciał ciekłych naturalnych nie jest normalne do spólnej ich powierzchni lub do ścian naczynia*. Uważając jednak że *tarcie* ciał występuje jawnie tylko w skutek ruchu cząsteczek i nie odgrywa żadnej roli dla ciał zostających w spoczynku, możemy powiedzieć, że *dla cieczy naturalnych w spoczynku, wzajemne oddziaływanie cząsteczek* jednych na drugie, jak również i na ciała bezpośrednio je otaczające, — a zatem i na ściany naczynia, — *jest siłą normalną, czyli ciśnieniem normalném do spólnej ich powierzchni.*

6. Ciągłość materyi ciecz składającej. Mechanika nadaje cieczom doskonałym jeszcze inną własność: *ciągłość materyi ciecz składającej*, to jest przypuszcza, że ciecze są utworzone z cząsteczek, czyli z materyalnych punktów, przyłożonych (juxtaposées) jedne do drugich bez najmniejszej między niemi przerwy ani próżni, któraby je przedzielała.

Chociaż to przypuszczenie jest przeciwném teoryi cząsteczkowej ciał, a ściśliwość cieczy, wprawdzie bardzo słaba, dowodzi widocznej jego fałszywości; jednak, by uczynić możebném zastosowanie rachunku, możemy, bez popełnienia znacznego błędu (*), podstawić w analizę, — zamiast cieczy rzeczywistej, złożonej z cząsteczek materyalnych, oddzielonych jedne od drugich, — ciecz idealną, *o materyi ciągłej*, równowartą pierwszej co do ilości materyi w niej zawartej, rozdzielając jednostajnie, na pewną objętość, summę materyi,ześrodkowanej w rozmaitych punktach cieczy rzeczywistej, zawartej w tejże samej objętości. Na takiém podstawieniu zyskujemy to, że *summowanie* zamieniamy na *całkowanie*, czyli, wyrażając się analitycznie, znak Σ zastępujemy znakiem $\int$.

7. Ciśnienie wywierane na cząsteczkę cieczy przez wszystkie inne jej cząsteczki. Wiemy już, że dla ciał ciekłych *w spoczynku* możemy zastosować własność *ciśnienia normalnego*, bez względu czy takowe są ciecze doskonałe, czy też ciecze naturalne.

(*) Błąd, jaki w skutek tego popełniamy, polega jedynie na tém, że uważając ciecz utworzoną z materyi ciągłej, zmieniamy przez to, o ilości nieskończenie małe, spółrzędne x, y, z rzeczywistych punktów cieczy; w skutek czego zmieniamy, o ilości nieskończenie małe, punkta przyczepienia sił działających na cząsteczki, a zatem, i punkt przyczepienia siły wypadkowéj. Błąd ten, w każdym razie bardzo mały, będzie jeszcze mniejszy dla cieczy *jednorodnej*, zostającej pod wpływem samej tylko siły ciężkości, gdyż w tym razie, tak dla cieczy rzeczywistej, jak też dla idealnej, o materyi ciągłej, punkt przyczepienia wypadkowej sił działających na pewną objętość zawsze się będzie znajdować w środku ciężkości tej objętości.

http://rcin.org.pl

Uważajmy zatem pewną massę cieczy w stanie spoczynku. Każda jej cząsteczka, rozpatrywana zosobna, znajduje się również w spoczynku, a zatem wypadkowa wszystkich sił działających na nią sprowadza się do zera. Otoż, siły działające na tę cząsteczkę są : z jednej strony — *siły wewnętrzne*, względem rozpatrywanego systemu, inaczej zwane *siłami cząsteczkowemi*, lub *molekularnemi* (forces moléculaires); z drugiej strony — siły *zewnętrzne* systemowi, to jest siły bezpośrednio do cząsteczki przyczepione. Więc każda cząsteczka cieczy w spoczynku, będąc utrzymywaną w tym stanie przez wewnętrzne działanie na nią wszystkich innych cząsteczek cieczy i przez siły zewnętrzne do niej indywidualnie przyczepione, wypadkowa sił wewnętrznych musi być równa, co do wielkości, wypadkowej sił zewnętrznych, przyczepioną zaś będzie do cząsteczki w kierunku wprost przeciwnym kierunkowi siły zewnętrznej.

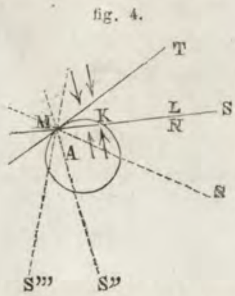
Kształt cząsteczki jest nam nieznany; ale, ponieważ jej wymiary są nieskończenie małe we wszystkich kierunkach, wszelka geometryczna figura o wymiarach linjowych nieskończenie małych, jak np. czworościan, sześcian, sfera itp. może być użytą do jej przedstawienia. Dla utkwienia myśli, nadajmy cząsteczce formę sfery o promieniu nieskończenie małym.

fig. 3

Wiemy, że wzajemne oddziaływanie cząsteczek jest ciśnieniem normalném do powierzchni ich zetknięcia; cząsteczka A (fig. 3) ulega zatem, ze strony wszystkich innych cząsteczek ją otaczających, ciśnieniom normalnym, więc skierowanym ku środkowi sfery. Gdybyśmy chcieli przedstawić długością linji prostej natężenie ciśnienia jakie wytrzymuje cząsteczka A, zbiór tych ciśnień utworzyłby pęk linij prostych, mających za wierzchołek środek sfery, i rozchodzących się, od tego punktu, we wszystkich możliwych kierunkach; długość wypadkowej wszystkich cisnień wyrażałaby natężenie wypadkowej sił zewnętrznych przyczepionych do cząsteczki.

8. Określenie ciśnienia na jedność powierzchni w danym punkcie cieczy. Pomiędzy rozmaitemi rozumowaniami, jakiemi możemy być przyprowadzeni do określenia ciśnienia na jedność powierzchni w danym punkcie cieczy, użyjmy następującego.

fig. 4.



Uważajmy (fig. 4) jakikolwiek punkt M, wzięty na cząsteczce A, i poprowadźmy przez niego dowolnie jakąkolwiek płasczyznę sieczną MS ; wiemy, że zbiór wszystkich ciśnień wywieranych na cząsteczkę A, po obu stronach elementu MK tej płasczyzny, daje ciśnienie wypadkowe, równe wypadkowej sił zewnętrznie przyczepionych do tej cząsteczki. Otoż, ograniczmy się nateraz rozpatrywaniem ciśnień wywieranych na cząsteczkę *po jednej tylko stronie* elementu NS, naprzykład, po stronie MLS ; każdy punkt tego elementu wytrzymuje ciśnienie normalne do płasczyzny MS, więc te ciśnienia będąc siłami równoległemi, mogą być sprowadzone do jednej wypadkowej P, której natężenie będzie równe summie tych ciśnień, a kierunek normalny do płasczyzny MS, i możemy powiedzieć, że element płaski $MK = \omega$ zostaje pod ciśnieniem siły P. Punkt przyczepienia siły P nam jest nieznany, gdyż nie znamy natężenia ciśnień składowych, które mogą być różne w różnych punktach elementu ω; ale nic nie zmienimy, co do wielkości tej siły, jeśli przypuścimy, że każdy punkt elementu MK (gdzie materya może być uważana za ciągłą), podlega jednostajnemu ciśnieniu równemu, na jedność powierzchni, ilości $\frac{P}{\omega}$; zmienimy przez to tylko punkt przyczepienia wypadkowej P, który będzie teraz się znajdować w środku ciężkości powierzchni elementu ω. To ciśnienie *ideałne* $\frac{P}{\omega}$, czyli *ciśnienie średnie na jedność powierzchni elementu* ω, *wywierane wedle płasczyzny* MS, tém wię-

http://rcin.org.pl

cej będzie się zbliżać do ciśnienia, jakie *rzeczywiście* istnieje w rozmaitych punktach elementu ω, im ten element będzie mniejszy; gdyż, mając wszelkie prawo do przypuszczenia, że na małej przestrzeni, jaką zajmuje nasza cząsteczka, ciśnienie zmienia się w sposób ciągły, czyli że jest ono *funkcyą ciągłą* spółrzędnych punktów cieczy, pojmujemy, że im mniejsza będzie ilość punktów zawartych w elemencie ω, tém mniejsza będzie różnica między największém i najmniejszém ciśnieniem jakie może istnieć w zakresie tego elementu, a tém bardziej, tém mniej będzie się różnić każde z tych ciśnień skrajnych od ciśnienia średniego $\frac{P}{\omega}$; tak, iż naturalném jest przyjąć, że granica stosunku $\frac{P}{\omega}$, gdy ω zdąża do zera, będzie nam przedstawiać ciśnienie *rzeczywiste* w danym punkcie cieczy. Dodajmy, że to ostatnie ciśnienie będzie *ciśnieniem na jedność powierzchni*, gdyż zmieniając ω (przez co i P się zmienia) iloraz $\frac{P}{\omega}$ nigdy nie przestaje być *ciśnieniem średniém*, odniesionémdo jedności powierzchni, i to znaczenie zachowuje się ciągle i istnieje przy granicy.

W granicy, płaszczyzna sieczna MS staje się płaszczyzną styczną MT, i element ω pierwszej staje się punktem styczności M ostatniej.

Z naszego rozumowania przychodzimy do podania następującego określenia, nastręczającego się, że tak powiemy, w sposób naturalny, samo przez się:

Nazywamy *ciśnieniem, na jedność powierzchni, w danym geometrycznym punkcie* M *cieczy, granicę stosunku ciśnienia, wywieranego na element płaszczyzny przeprowadzonej przez punkt* M, *do powierzchni tego elementu*; tę granicę otrzymujemy, zmniejszając nieskończenie powierzchnię elementu, z warunkiem tylko ażeby takowy zawierał w sobie zawsze dany punkt M (*).

Oznaczając jak poprzednio:

ω element płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt M (wzięty w massie cieczy lub na ścianie naczynia),

P wypadkowę ciśnień wywieranych przez ciecz na ten element,

p ciśnienie na jedność powierzchni w punkcie M,

Mamy, z określenia:

$$p = \text{gr.}\, \frac{P}{\omega},$$

gdy ω zdąża do zera.

Granica ta istnieje, to jest, nie jest ona ani zawsze 0, ani ∞.

9. Uważajmy teraz, że podane określenie nie jest dotychczas zupełnie wyraźném, gdyż nie obejmuje ono kierunku, w jakim rozpatrujemy ciśnienie na punkt M. Ilość p, otrzymana z tego określenia, będzie ilością wyznaczoną, lecz stosującą się tylko do kierunku płaszczyzny MS, i to z jednej tylko strony MLS tej płaszczyzny. Gdybyśmy rozpatrywali ciśnienia wywierane na ten sam element ω po drugiej jego stronie, to jest po stronie MNS, otrzymalibyśmy ich wypadkowę P_1, a na ciśnienie w tym samym punkcie M, wywierane w uważanym teraz kierunku, mielibyśmy z powyższego określenia:

$$p_1 = \text{gr.}\, \frac{P_1}{\omega}.$$

(*) Jak widzimy, określenie *ciśnienia* w danym punkcie cieczy jest tego samego rodzaju co określenie w danym punkcie *szybkości* w ruchu zmiennym, *ciężkości gatunkowej* w materyi różnorodnej, *temperatury* w ciele nierównie ogrzewaném i t. p.

http://rcin.org.pl

Prowadząc, nadto, przez punkt M inne płasczyzny MS', MS'',... otrzymalibyśmy z kolei, na ciśnienie w tym punkcie, wyrażenia:

$$p' = \text{gr.}\frac{P'}{\omega'},$$

$$p'' = \text{gr.}\frac{P''}{\omega''},$$

$$\cdots\cdots$$

i w ogólności, na ciśnienie w jednym i tym samym punkcie M mielibyśmy tyle wartości: p', p'', p'''.., ile przez ten punkt możemy poprowadzić płasczyzn, to jest, w ilu kierunkach możemy rozpatrywać to ciśnienie.

Pojmujemy więc, że określenie ciśnienia w danym punkcie cieczy takie, jakieśmy podali, nie przedstawiałoby żadnej korzyści w zastosowaniu jego do rachunku ciśnień, gdybyśmy nie mogli znaleźć i wyrazić matematyczną formułą związku istniejącego między ciśnieniami: p', p'', p''',... wywieranémi na punkt dany w rozmaitych kierunkach.

10. Równość ciśnienia wywieranego w każdym kierunku na jeden i ten sam punkt cieczy. Związek ten, przewidywany a priori, wyraża się następującém twierdzeniem, dowodzenie którego nie wchodzi w nasz program:

Dla każdego punktu cieczy, ciśnienie na jedność powierzchni jest to samo, jakikolwiek byłby kierunek elementu płasczyzny, przez ten punkt przeprowadzonej, wedle której chcielibyśmy rozpatrywać to ciśnienie; inaczej mówiąc, *ciśnienie to jest stałe dla wszystkich kierunków naokoło tego punktu*; czyli jeszcze inaczej, *jest ono niezależne od kierunku;* tak że dla wyznaczenia ciśnienia w danym punkcie cieczy możemy wybrać taki kierunek, jaki nam się wyda stosowniejszym do uproszczenia rozumowania i rachunku.

Na mocy tego twierdzenia, związek między ciśnieniami: p', p'', p''',... wyrazi się w sposób następujący:

$$p' = p'' = p''' = \ldots = p.$$

a geometrycznie może on być wysłowiony tak:

« Znając w jakimkolwiek kierunku, ciśnienie w danym punkcie cieczy, na jedność powierzchni, i przedstawiając natężenie tego ciśnienia długością linji prostej, mającej swój początek w uważanym punkcie cieczy, — geometryczném miejscem końców linij wychodzących z tegoż punktu, i wyrażających długością swoją (odniesioną do jednej i tejże skali) ciśnienia, (na tę samą jedność powierzchni), wywierane przez ciecz na punkt dany we wszystkich innych możliwych kierunkach, jest powierzchnia sfery, opisanej z tegoż punktu, jako ze środka, promieniem równym natężeniu ciśnienia znalezionego dla uważanego kierunku. »

Rozciągając na wszystkie punkta nieskończenie małej cząsteczki własność wyrażoną tém twierdzeniem, a stosującą się do jednego tylko jakiegokolwiek jej punktu, przedstawimy rzecz bardziej dotykalnie powiadając:

« Uważając dany punkt cieczy za geometryczny środek materyalnej sfery o promieniu nieskończenie małym, ciśnienie na jedność powierzchni, wywierane przez wszystkie inne cząsteczki cieczy na każdy punkt takiej sfery, będzie jedno i to samo; czyli że ciśnienie wywierane wedle płasczyzny stycznej do sfery na jej punkt zetknięcia nie zmienia się ze zmianą położenia tego punktu na sferze. » Ale wysłowienie następujące będzie ściślejszém:

« *Prowadząc przez środek sfery, dla każdego kierunku płasczyzny stycznej do sfery, płasczyznę do niej*

http://rcin.org.pl

równoległą, i biorąc na niej element, dla którego środek sfery mógłby być uważany za środek ciężkości jego powierzchni, ciśnienie na każdy taki element będzie jedno i to samo, czyli stałe dla wszystkich elementów. »

Twierdzenie dowodzące równości ciśnienia, na jedność powierzchni, w jednym i tym samym punkcie cieczy, we wszystkich kierunkach na około tego punktu, uzupełnia i rozjaśnia wyżej podane określenie ciśnienia, i nadaje mu całą ścisłość i ogólność.

11. Ważnem jest mieć dokładne pojęcie o tém, co mamy rozumieć pod wyrażeniem : « *ciśnienie w danym punkcie na jedność powierzchni.* » Otóż mówiąc, że ciśnienie w danym punkcie M, na jedność powierzchni, jest p, rozumiemy przez to, że *gdyby* na przestrzeni powierzchni, zawierającej punkt M, i równéj jednemu metrowi kwadratowemu, lub jednemu decymetrowi, i t. p. każdy punkt tej powierzchni *był ciśniony tak*, jak obecnie jest ciśniony punkt M, ciśnienie normalne całkowite na tę *jedność powierzchni* byłoby równe p *jednościom siły*, czyli p kilogramom.

Liczba p będzie zależeć :

1) od wielkości wziętej za jedność powierzchni;

2) od położenia jakie punkt zajmuje w massie cieczy;

3) od samej istoty cieczy. Poniżej zobaczymy, jaką funkcyą tych ilości wyraża się liczba p, i jak będziemy ją mogli wyznaczyć dla każdego punktu cieczy (*).

Dobrze jest zauważyć, iż często, przez skrócenie, zamiast mówić, « że ciśnienie w punkcie M na jedność powierzchni jest p », powiada się wprost : « ciśnienie w punkcie M jest p. » I tak, jeżeli mówiąc o ciśnieniu w danym punkcie, nie wymienia się wielkości powierzchni na jaką ono jest wywieraném, mamy przez to rozumieć, że ciśnienie takie jest wywierane *tylko* na jedność powierzchni.

12. Dowodzenie twierdzenia podanego pod §.10 przedstawioném jest, w rozmaitych dziełach, pod rozmaitemi formami. Dostateczném dla nas będzie tylko nadmienić, że wszystkie te dowodzenia polegają na następujących dwóch podstawach :

1° *Ciśnienia*, wywierane na rozmaite części powierzchni cząsteczki, są wielkościami tego samego rzędu co i ciśnione powierzchnie, czyli że są one proporcyonalne do tych powierzchni; tak że oznaczając przez ε wymiar linjowy, nieskończenie mały, ciśnionej powierzchni, ciśnienie całkowite wywierane na nią przez ciecz, może być wyrażone iloczynem : $k\varepsilon^2$, gdzie k jest ilością stałą.

2° *Siła zewnętrzna*, działająca na massę cząsteczki, jest wielkością tego samego co i ta massa rzędu, czyli co i objętość cząsteczki; może ona więc być przedstawioną pod formą : $k'\varepsilon^3$, k' będąc spółczynnikiem stałym.

A z tego wypada że :

(*) *Dla cieczy*, za jedność ciśnienia zwykle się bierze ciśnienie wywierane *ciężarem* wody, zawartej w 1^m decymetrze sześciennym, na jego podstawę, to jest na powierzchnię 1^{go} decymetra kwadratowego : a to ciśnienie jest nic innego jak 1 kilogram.

Dla *gazów i pary*, za jedność ciśnienia bierze się ciśnienie wywierane na powierzchnię 1^{go} centymetra kwadratowego *ciężarem* całej wysokości atmosfery wznoszącej się nad ziemią; zowie się ono często, przez skrócenie, *atmosferą*.

Atmosfera jest więc ciśnienie atmosferyczne na powierzchnię 1^{go} centymetra kwadratowego, i jak to później zobaczymy, może ono być zastąpione *ciśnieniem* 1,$^{kg.}$ 033 na 1 cent. kwadratowy, czyli, przez przybliżenie, ciśnieniem na 1 cent. kwadratowy jednego kilogramu; tak że ciśnienie 5^{ciu} atmosfer znaczy to samo, co ciśnienie 5^{ciu} kilogramów na 1 cent. kwadratowy.

http://rcin.org.pl

a) Jeżeli ciecz jest *w spoczynku*, ciśnienia i siły zewnętrzne, działające na cząsteczkę, wzajemnie się równoważą; więc algebraiczna summa ich rzutów na jakąkolwiek oś jest zerem; a przy tém summowaniu, nieskończenie małe 3go rzędu mogą być zaniechane w porównaniu z nieskończenie małemi rzędu 2go.

b) Jeżeli ciecz jest *w ruchu*, możemy jeszcze napisać równanie spoczynku, wprowadzając do systemu sił poprzednich siłę bezwładności (forces d'inertie); a że ta ostatnia jest również proporcyonalną do objętości cząsteczki, wyrazi się ona przez $k''\varepsilon^3$; więc jeszcze będziemy upoważnieni, przy summowaniu tych trzech sił, podług jakiejkolwiek osi, zaniechać wyrazy zawierające w sobie $k'\varepsilon^3$ i $k''\varepsilon^3$.

Ale jest rzeczą wielkiej wagi nie tracić z widoku, że przy dowodzeniu twierdzenia o którém mowa przypuszcza się, iż ciśnienia wywierane przez ciecz, na jakąkolwiek jej cząsteczkę, są *normalne* do powierzchni tej cząsteczki; otóż, jak widzieliśmy wyżej, *dla cieczy naturalnych* własność ta ma miejsce tylko w stanie ich *spoczynku*, gdyż w tym tylko razie siła tarcia zostaje, że tak powiémy, ukrytą; zaś przy ruchu cieczy naturalnej występuje ona jawnie i zmienia przez to, względem normalnej do powierzchni zetknięcia dwóch cząsteczek, kierunek wzajemnego ich oddziaływania, czyniąc kąt jego z normalną tém większy, im cząsteczki cieczy będą więcej przylegać do siebie, to jest, im jej *lepkość* (viscosité) będzie większą. Więc przy ruchu cieczy naturalnych wzajemne ciśnienia cząsteczek nie będąc normalnémi, twierdzenie nasze nie stosuje się do tego przypadku; zkąd wnosimy że:

Dla cieczy naturalnych, ciśnienie w danym punkcie, na jedność powierzchni, będzie jedno i to samo we wszystkich kierunkach tylko w stanie ich spoczynku.

Dodajmy jednak, że dla ruchów powolnych i dla cieczy jakie zwykle rozpatrują się w zastosowaniach, tarcie między ich cząsteczkami jest dostatecznie małém, aby, uważając i w tym razie, dla uproszczenia rachunku, ciśnienie na punkt dany za jednakowe we wszystkich kierunkach, błąd, jaki się w skutek tego popełnia, nie miał znacznego wpływu na rezultata *praktyczne*.

Co zaś do cieczy w spoczynku, któremi jedynie zajmować się będziemy, powyższe twierdzenie stosuje się bez żadnego zastrzeżenia.

13. Różnica między równością ciśnienia w każdym punkcie, a równością ciśnienia w każdym kierunku. Zasada jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta cieczy lub gazów zowie się często, przez skrócenie, zasadą równego ciśnienia. Otóż, ważną jest rzeczą odróżniać równość ciśnienia *we wszystkich punktach* od równości ciśnienia *we wszystkich kierunkach*. Różnica między temi dwoma wyrażeniami jest następująca:

1° *Równość ciśnienia we wszystkich punktach jest zasadą* (principe), nabytą wprost przez spostrzeżenia i doświadczenia; równość ta ma tylko miejsce wtedy, gdy ciecz lub gaz znajdują się w *spoczynku*, i kiedy na ciecz nie wywiera się, prócz ciśnienia zewnętrznego na jej powierzchnię, żadnej innej zewnętrznej siły (jak np. siły ciężkości, i t. p.); a na gaz — żadnej innej siły, prócz własnej jego siły sprężystości.

Równość ciśnienia we wszystkich kierunkach jest twierdzeniem (thèoréme) opartém na fundamentalnej własności nadanej *cieczom doskonałym*, w skutek której ciśnienie, wywierane przez ciecz lub gaz na powierzchnię wziętą w punkcie dowolnym ich massy, jest normalném do tej powierzchni; twierdzenie to ma miejsce jakiekolwiekby były działające zewnętrzne siły, i stosuje się najzupełniej tak do ciał ciekłych *w spoczynku*, jak też i w ich *ruchu* jakimkolwiek, byleby tylko ciśnienia były zawsze wywierane normalnie.

2° *Równość ciśnienia we wszystkich kierunkach jest wcale niezależną od równości ciśnienia we wszystkich*

http://rcin.org.pl

punktach; równość ciśnienia we wszystkich kierunkach, naokoło danego punktu, będzie istnieć zawsze jeżeli tylko warunek normalnego ciśnienia, stanowiący podstawę samego twierdzenia, jest zadowolniony; twierdzenie równości ciśnienia we wszystkich kierunkach mogłoby zresztą być dowiedzionem przed odkryciem zasady jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta, i pozostanie prawdziwém nawet w razie gdyby sama ta zasada okazała się fałszywą.

Nadmieńmy przy tej sposobności, że przy *ruchu powolnym* cieczy naturalnych, obok przypuszczenia (§ 12) równości ciśnienia na dany punkt we wszystkich kierunkach, przyjmuje się jeszcze i równość ciśnienia we wszystkich punktach. Ściśle mówiąc, jak jedna tak i druga równość nie jest prawdziwą, ale te przypuszczenia upraszczają rachunek, a błąd, jaki ztąd może powstać, nie ma wielkiego znaczenia praktycznego.

14. Zadanie Hydrostatyki. W cieczy, znajdującej się pod działaniem jakichkolwiek sił i zostającej *w spoczynku*, natężenie ciśnienia *całkowitego*, wywieranego na cząsteczkę przez wszystkie inne jej cząsteczki, zależy od natężenia sił *zewnętrznych* na ciecz działających, i równa się, co do swej wielkości, sile zewnętrznej *indywidualnie* do cząsteczki przyczepionej; gdyby więc się zdarzyło, że do wszystkich cząsteczek cieczy przyczepioną jest jedna i ta sama zewnętrzna siła, czyli siła *stała*, *wypadkowe* ciśnienie, wywierane przez całą massę cieczy na każdą zosobna cząsteczkę, miałoby zawsze jednę i tę samą wartość, to jest byłoby *stałe* dla wszystkich cząsteczek; jeżeli zaś, — co jest przypadkiem ogólniejszym, — zewnętrzna siła zmienia się z każdym punktem, *wypadkowe* ciśnienie będzie się zmieniać ze zmianą siły, pozostając zawsze jej równém i przeciwnego sensu. Ciśnienie w danym geometrycznym punkcie cząsteczki, takie jakieśmy rozpatrywali przy określeniu ciśnienia na jedność powierzchni, jest tylko *jedną ze składowych* ciśnienia wypadkowego, i również będzie zależeć od natężenia siły zewnętrznej, czyli jest ono w pewnym związku z tą ostatnią. Znaleźć ten związek, to jest *wyrazić ciśnienie, na jedność powierzchni, w danym punkcie cieczy w funkcyi siły zewnętrznej, zgóry nam danej*, — *takie jest główne zadanie Hydrostatyki.*

fig. 5

Przechodząc od jednego punktu M, (fig. 5) gdzie ciśnienie, na jedność powierzchni, jest p, do innego M_1, znajdziemy w tym ostatnim inne ciśnienie p_1; że zaś uważamy ciecz za *materyę ciągłą*, ciśnienie w punkcie M_1 nabyło obecną swą wartość p_1 po przejściu przez wszystkie inne wartości : $p' = p + \varepsilon$. $p'' = p + \delta$, ... jakie z kolei przypadną na punkta: M′, M″, ... znajdujące się między dwoma punktami skrajnymi M i M_1; powiadamy zatem, że *ciśnienie* p *w danym punkcie* $M(x, y, z)$ *jest*, w ogólności, *funkcyą ciągłą* $\varphi(x, y, z,)$ *spółrzędnych tego punktu*; w wyrażeniu :

$$p = \varphi(x, y, z)$$

x, y, z są zmienne niezależne.

Możemy więc uprościć zadanie Hydrostatyki, mówiąc że ma ona za cel swój *znalezienie analitycznego prawa według jakiego zmienia się ciśnienie, na jedność powierzchni*, w cieczy zostającej w spoczynku pod działaniem danych sił zewnętrznych, *gdy przechodzimy od jednego punktu M*, gdzie ciśnienie jest p, do punktu nieskończenie mu blizkiego M′, gdzie ciśnienie będzie $p' = p + \varepsilon$.

Otóż, nie trudno jest widzieć à priori, a co zresztą wyjaśnimy poniżéj, że ε, oznaczając zmianę wartości p, odpowiadającą, w ogólności, zmianie *wszystkich* spółrzędnych punktu $M(x, y, z,)$ na spółrzędne punktu $M'(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, będzie nic innego jak dp; możemy więc jeszcze powiedzieć że: *celem Hydrostatyki jest wyrazić* dp *w funkcyi znanych nam sił zewnętrznych, wyrażonych przez spółrzędne uważanego w cieczy punktu.* Znalezienie ztąd wartości p stanowić będzie zadanie innej części matematyki — rachunku całkowego.

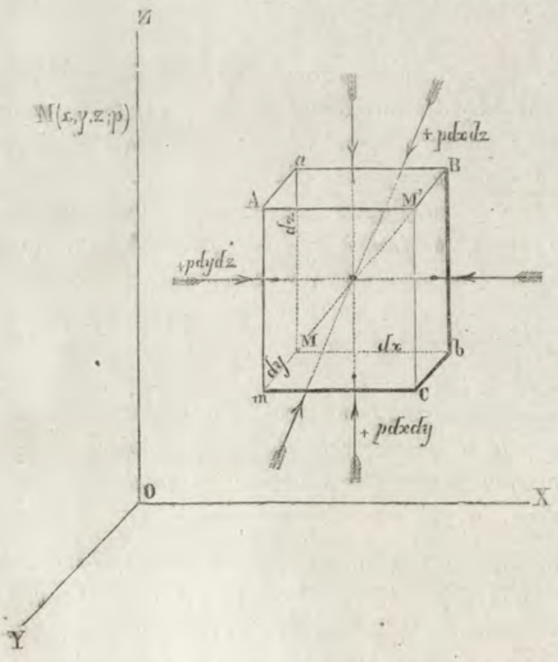
http://rcin.org.pl

15. Uważanie figury sferycznej, jakąśmy przedtém nadawali cząsteczce, przedstawiałoby pewną dogodność, gdyby cały system był odniesiony do spółrzędnych biegunowych; ale ponieważ spółrzędne, zazwyczaj używane, są prostokątne, do nich więc odnosimy nasz system ciekły i będziemy uważać cząsteczkę, jako figurę, ograniczoną elementami płaszczyzn równoległych do trzech płaszczyzn spółrzędnych.

Uważajmy więc w massie cieczy, zostającej w spoczynku pod działaniem pewnych sił zewnętrznych, jakąkolwiek cząsteczkę, i nadajmy jej kształt równoległościanu prostokątnego, o wymiarach linjowych nieskończenie małych i równoległych do trzech osi spółrzędnych OX, OY, OZ. Powierzchnia każdej ściany cząsteczki będzie, — względem jakiegokolwiek z trzech jej wymiarów linjowych, wziętych za nieskończenie małe 1^{go} rzędu, — ilością nieskończenie małą rzędu 2^{go}; możemy więc przypuścić, bez znacznego błędu, że ciśnienie na jakąkolwiek ścianę cząsteczki będzie jedno i to samo we wszystkich jej punktach, tak że jeżeli znaném nam będzie ciśnienie, na jedność powierzchni, w jednym punkcie ściany, będziemy przez to wiedzieć i ciśnienie wypadkowe wywierane na całą tę ścianę.

Otoż, nadając cząsteczce formę równoległościanu prostokątnego, mamy tę dogodność, że chcąc mieć ciśnienia wywierane na wszystkie ściany cząsteczki, i poprzestając na przybliżeniu, jakie wyniknie z przypuszczenia jednakowego ciśnienia ściany we wszystkich jej punktach, nie potrzebujemy szukać ciśnienia w sześciu punktach, wziętych po jednemu na każdej z sześciu ścian cząsteczki, a dosyć będzie wiedzieć ciśnienie na jedność powierzchni, wywierane na dwa wierzchołki, leżące na przekątnej równoległościanu. Rzeczywiście, na mocy znanego nam twierdzenia, ciśnienie w danym punkcie cieczy jest jedném i tém samém dla każdego kierunku płaszczyzny przez niego poprowadzonej; więc ciśnienie, na jedność powierzchni, wywierane na wierzchołek równoległościanu, będzie zarazem ciśnieniem w jednym punkcie każdej z trzech ścian cząsteczki przecinających się w tym wierzchołku, i jak wiemy, będzie ono normalném w tym punkcie do każdej z trzech ścian rozpatrywanych zosobna; będziemy zatém z łatwością mieć ciśnienia wypadkowe na trzy ściany cząsteczki skoro znaném nam będzie ciśnienie, na jedność powierzchni, w punkcie tym ścianom spólnym.

fig. 6.



Na zastosowanie tego cośmy powiedzieli uważajmy (fig. 6) wierzchołek M równoległościanu; niech spółrzędne punktu M będą: x, y, z, a ciśnienie w nim na jedność powierzchni, w jakimkolwiek kierunku, niech będzie p; nieskończenie małe wymiary równoległościanu oznaczą się różniczkami: dx, dy, dz. Rozpatrując trzy ściany MA, MB, MC, wychodzące z punktu M, będziemy mieć, na mocy powyższego rozumowania, na *ciśnienia wypadkowe*, wywierane na cząsteczkę wedle tych ścian, wyrażenia:

1° Ciśnienie wypadkowe na ścianę AM, równoległą do płaszczyzny YZ, będzie co do *natężenia* równem $pdydz$; co do *kierunku* — normalném do tej ściany, to jest równoległém do osi OX; co do *strony* — skierowaném w stronę dodatnią tej osi, a więc ciśnienie to trzeba uważać za $+$; *punkt* jego *przyczepienia* na ścianie MA — będzie w środku ciężkości powierzchni tej ściany.

Podobnież :

2° Ciśnienie wypadkowe na ścianę MB, równoległą do płaszczyzny ZX, będzie $pdydz$, przyczepione w środku ciężkości powierzchni MB, równoległe do osi OY i skierowane ku stronie *dodatniej* tej osi ; należy więc również uważać ciśnienie to ze znakiem $+$. Nareszcie,

3° Ciśnienie wypadkowe na ścianę MC, równoległą do płaszczyzny XY, będzie $pdxdy$, przyczepione w środku ciężkości powierzchni MC, równoległe do osi OZ i skierowane w stronę *dodatnią* tej osi, a więc także mające znak $+$.

W podobny sposób, i z takiémże przybliżeniem, otrzymalibyśmy ciśnienia na trzy inne ściany cząsteczki : BC, AC i AB, gdyby znaném nam było zgóry ciśnienie wywierane w wierzchołku M' równoległościanu. Ale tego ostatniego ciśnienia nieznamy, a szukanie jego uczyni powyższe zastosowanie nieużyteczném; gdyż, dla znalezienia ciśnienia w punkcie M' zmuszeni właśnie będziemy znaleźć przedtém ciśnienie, na jedność powierzchni, dla każdej z trzech ścian : BC, AC, AB zosobna.

16. Wyznaczenie w funkcyi ciśnienia, danego w punkcie M, ciśnienia w punkcie nieskończenie mu blizkim M'. Znając ciśnienie w punkcie M, szukajmy ciśnienia w punkcie nieskończenie mu blizkim M'. Dla ogólności, weźmy punkt M' taki, że wszystkie trzy jego spółrzędne różnią się od spółrzędnych punktu M, tak że prosta MM', łącząca M i M', może być uważaną za przekątnę równoległościanu, wystawionego w punkcie M na długościach równych różnicy odpowiednich spółrzędnych tych dwóch punktów. Oznaczając przez p' ciśnienie w punkcie M', możemy napisać :

$$p' = p + \varepsilon.$$

gdzie ε jest jakąś funkcyą spółrzędnych x, y, z.

Wyprowadziliśmy poprzednio, z danego nam ciśnienia w punkcie M, ciśnienia wywierane przez ciecz na trzy ściany cząsteczki : AM, MB, MC z tego punktu wychodzące; więc odwrotnie, gdyby znane nam były ciśnienia wywierane na trzy pozostałe ściany : BC, AC i AB, spotykające się w punkcie M', znalezienie ztąd ciśnienia w tym ostatnim punkcie nie przedstawiłoby żadnej trudności.

Ale, oczywiście bylibyśmy w błędzie, rozumując : « ponieważ ciśnienie, na jedność powierzchni, « w każdym punkcie trzech ścian AM, MB, MC, a zatem i na ich krawędziach, jest p, i że, na « mocy twierdzenia tyczącego się równości ciśnienia we wszystkich kierunkach, ciśnienie p wywie- « raném będzie normalnie do sciany BC, w każdym punkcie krawędzi bC; do sciany AC — wzdłuż « krawędzi mC ; nareszcie, do ściany AB — we wszystkich punktach krawędzi Aa ; — możemy, jak « dla ścian MA, MB, MC, poprzednio uważanych, przypuścić, że to ciśnienie krawędziowe powtó- « rzy się jeszcze we wszystkich punktach ścian nieskończenie małych BC, AC, AB. »

Rozumowanie takie byłoby fałszywém, gdyż przypuszczenie równego ciśnienia we wszystkich punktach ścian, wychodzących z punktu M, było tylko prawdziwém w przybliżeniu ; oddalilibyśmy się więc znaczniej jeszcze od prawdy, robiąc z przybliżenia nowe przybliżenie, i nie osiągnęlibyśmy celu jaki mamy na widoku : powyższe rozumowanie przyprowadziłoby nas do znalezienia w punkcie M' tego samego ciśnienia p, jakie istnieje w punkcie M; wtedy, gdy w rzeczywistości, ciśnienie w M' będzie : $p + \varepsilon$; to jest, większe lub mniejsze od ciśnienia p, wywieranego na punkt M, o ilość nieskończenie małą ε, której wyznaczenie stanowi właśnie nasze zadanie.

http://rcin.org.pl

17. Wiemy, że od punktu M (którego spółrzędne są x, y, z) możemy przejść do punktu M′ (o spółrzędnych $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$), nadając ruch postępowy trzem płaszczyznom, przez punkt M i równolegle do trzech płaszczyzn spółrzędnych poprowadzonym. I tak :

1°. Posuwając wzdłuż osi OX płaszczyznę równoległą do płaszczyzny YZ na odległość $x+dx$ od tej ostatniej, punkt M′ będzie się znajdować w ostatecznem położeniu tej płaszczyzny, — geometryczném miejscu wszystkich punktów mających za spółrzędnę $x+dx$.

2°. Posuwając następnie wzdłuż osi OY płaszczyznę równoległą do płaszczyzny ZX, punkt M′ musi się znajdować na płaszczyznie wyznaczonej wartością: $y+dy$; znajdzie się on zatem na prostej M′C, spólnej dwóm przeprowadzonym płaszczyznom.

3°. Nareszcie, trzecia płaszczyzna, poprowadzona w podobny sposób i na odległości $z+dz$ od płaszczyzny XY, przecięciem się swojém z linją M′C wyznaczy zupełnie położenie punktu M′.

18. Przechodząc (fig. 6) od ściany MA, poprowadzonej przez punkt M (x, y, z; p) do ściany BC jej przeciwnej, równoległej i odległej od niej na dx, *dla każdego punktu* (x, y', z'), *wziętego na ścianie* MA, *znajdziemy, na ścianie* BC, *punkt jemu odpowiedni* ($x+dx$, y', z'); więc wszystkie punkta ściany BC, znajdują się, co do ich y i z, w tych samych warunkach, co i punkta ściany MA; zmieniła się w nich, o ilość stałą dx, jedna tylko spółrzędna x; punkta ściany BC mogą więc być uważane za punkta ściany MA, przeniesione ruchem postępowym wzdłuż osi OX na odległość dx od ich pierwotnego położenia.

Wiemy, że ciśnienie p w danym punkcie cieczy, na jedność powierzchni, jest funkcyą ciągłą spółrzędnych x, y, z tego punktu :

$$p=\varphi(x, y, z);$$

więc, jeżeli dla ściany MA funkcya ta była φ, jej wartość na ścianie BC, — gdzie się zmieniła *jedna* ilość w skład tej funkcyi wchodząca : x na $x+dx$, — będzie inna, i wyrazi się, dla wszystkich punktów ściany BC, przez $\varphi(x+dx, y, z)$; tak że oznaczając p_{BC} ciśnienie na tej ostatniej ścianie, mamy :

$$p_{BC}=\varphi(x+dx, y, z);$$

zatem, *przyrostek* ciśnienia, na jedność powierzchni, na ścianie BC będzie :

$$p_{BC}-p=\varphi(x+dx, y, z)-\varphi(x, y, z)=\frac{d\varphi}{dx}dx$$

i wartość ciśnienia p_{BC} wyrazi się ostatecznie :

$$p_{BC}=p+\frac{d\varphi}{dx}dx=p+\frac{dp}{dx}dx.$$

Ztąd widzimy, że ciśnienie na jedność powierzchni, które na ścianie MA, przeprowadzonej na odległości x od płaszczyzny YZ, było p, — na ścianie jej przeciwległej i poprowadzonej na odległości $x+dx$ będzie, *na tę samą jedność powierzchni* :

$$p+\frac{dp}{dx}dx;$$

to jest, *powiększy się różniczką cząstkową tego pierwszego ciśnienia, uważaną wedle zmiennej niezależnej* x (*).

(*) Przypuściliśmy domyślnie (implicitement) że ciśnienie, na jedność powierzchni, będzie jedno i tosamo : $p+\frac{dp}{dx}dx$

http://rcin.org.pl

Przechodząc od ściany MB do ściany AC, jej równoległej, równej i odległej od niej na dy, rozumowanie będzie toż samo. Każdy punkt ściany MB różnił by się od odpowiedniego mu punktu na ścianie AC tylko tém, że *jedna* z jego spółrzędnych y zmieniła się, na tej ostatniej ścianie, na $y+dy$; zaś dwie inne spółrzędne x i z pozostają bez żadnej zmiany. Więc ciśnienie, na jedność powierzchni:

$$p=\varphi(x, y, z),$$

wywierane we wszystkich punktach ściany MB w jej pierwotném położeniu, stanie się teraz, gdy ona przejdzie od MB do AC, funkcyą:

$$p_{AC}=\varphi(x, y+dy, z);$$

więc ta funkcya nowa p_{AC}, różni się od wartości p, czyli φ, jaką miała na ścianie MB, o ilość:

$$p_{AC}-p=\varphi(x, y+dy, z)-\varphi(x, y, z)=\frac{d\varphi}{dy}dy;$$

tak, że wartość ciśnienia, na jedność powierzchni, na ścianie AC będzie:

$$p_{AC}=p+\frac{d\varphi}{dy}dy=p+\frac{dp}{dy}dy;$$

w skutek postępowego ruchu ściany MB wzdłuż osi OY, od położenia wyznaczonego przez wartość y do AC, danego przez $y+dy$, ciśnienie p, wywierane na ścianie MB, zamienia się więc, na ścianie AC, na $\left(p+\frac{dp}{dy}dy\right)$, to jest, *powiększa się różniczką cząstkową* $\frac{dp}{dy}dy$ *pierwszego ciśnienia* p, *wziętą wedle jednej tylko zmiennej niezależnej* y.

W ogóle, z powyższego rozumowania możemy wyprowadzić następujący wniosek:

W ruchu postępowym jakiejkolwiek ściany, wzdłuż osi spółrzędnej, do niej prostopadłej, od jednego położenia do drugiego nieskończenie mu blizkiego, ciśnienie, na jedność powierzchni, w każdym punkcie nieskończenie małej ściany, powiększa się o swą różniczkę cząstkową, wziętą wedle zmiennej mającej nazwisko postępowej osi.

Przenosząc na ilość dz, ruchem postępowym wzdłuż osi OZ, ścianę MC do niej prostopadłą, i zostającą pod ciśnieniem p, na jedność powierzchni, przyrostek ciśnienia na ścianie AB, na tę samą jedność powierzchni, wyrazi się przez: $\frac{dp}{dz}dz$; a zatem, ostateczna wartość ciśnienia na ścianie AB będzie:

$$p_{AB}=p+\frac{dp}{dz}dz.$$

19. Zamiast *kolejnego* postępowego ruchu ścian MA, MB, MC, wzdłuż trzech osi spółrzędnych,

dla *wszystkich* punktów ściany BC; ściśle rzecz uważając, jak ciśnienie p stosuje się tylko do jednego punktu M, tak ciśnienie: $(p+\frac{dp}{dx}dx)$ będzie mieć miejsce tylko w jednym punkcie b (fig 6); lecz błąd, w skutek takiego przypuszczenia wynikający, jest wcale *niezależny* od błędu popełnionego wyżej (§. 15) dla ściany MA, i jest on, co do swej wielkości, *tego samego rzędu* co i ten ostatni. Zmniejszając wymiary równoległościanu, błędy te przestają istnieć przy granicy.

na: dx, dy, dz, uważajmy teraz postępowy ruch tychże ścian, jako odbywający się *jednocześnie*, wzdłuż tychże osi i na te same ilości i taki, żeby ściany te znalazły się *jednocześnie* w swych ostatecznych położeniach BC, AC, AB, wyznaczając ich wzajemnem przecięciem się punkt M′, którego spółrzędne będą; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, i gdzie nieznane nam ciśnienie (na jedność powierzchni) oznaczamy przez $p'=p+\varepsilon$.

Ruchy te dadzą *jednocześnie* wszystkie cząstkowe przyrostki ciśnienia, każdemu ruchowi zosobna odpowiadające; a że ściany wychodzące z punktu M przybywają do ostatecznej swej pozycyi *w jednym i tym samym czasie*, punkt M′, który w końcu tego ruchu ścian znajdzie się dla nich spólnym, będzie, *w jednej i tej samej chwili*, posiadać wszystkie cząstkowe przyrostki ciśnienia, nabyte, z końcem ruchu, przez każdą z trzech ścian zosobna.

Otóż jak widzieliśmy, przyrostki cząstkowe ciśnienia, nabyte *w punkcie przybycia* M′, wyrażają się przez ciśnienie p *w punkcie wyjścia* M tak:

dla 1ej ściany BC przyrostek ten jest $=\frac{dp}{dx}dx$, i prostopadły do BC, zatem równoległy do osi OX

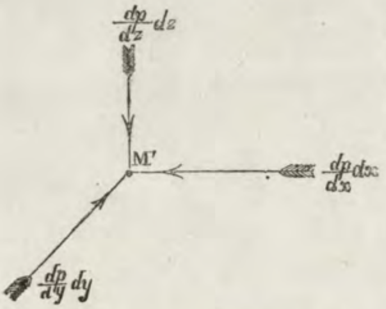
» 2ej » AC » $=\frac{dp}{dy}dy$, » AC, » OY

» 3ej » AB » $=\frac{dp}{dz}dz$, » AB, » OZ

więc przyrostek *całkowity* ciśnienia w punkcie M′ będzie *wypadkową* tych trzech przyrostków *cząstkowych*.

Ale, gdybyśmy te ostatnie złożyli w sposób *geometryczny*, używany do znalezienia wypadkowej sił przyczepionych do punktu *jakiegokolwiek* (fig 7), ominęlibyśmy *fizyczną* własność punktu który rozpatrujemy, to jest, nie wyrazilibyśmy bynajmniej że on właśnie należy do *cieczy*; więc dla znalezienia, *w naszym przypadku*, wypadkowej ciśnień cząstkowych, powinniśmy się posiłkować twierdzeniem równego ciśnienia we wszystkich kierunkach; powiadamy zatem: ponieważ, w cieczy w spoczynku, ciśnienie jest jedno i to samo bez względu na kierunek, w którym chcemy go uważać, możemy przeto trzy przyrostki cząstkowe złożyć w jednym dowolnie wziętym kierunku, w skutek czego szukaną wypadkową będzie ich *summa*; tak że *całkowity* przyrostek ε ciśnienia, na jedność powierzchni, w M′ wyrazi się formułą:

fig. 7.



$$\varepsilon=\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz,$$

i ciśnienie ostateczne w tym punkcie będzie zatem:

$$p'=p+\varepsilon=p+\left(\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz\right).$$

Ponieważ p może zawsze być uważane jako funkcya trzech tylko zmiennych niezależnych x, y, z, więc przyrostek całkowity ε wyraża różniczkę zupełną tej funkcyi, to jest że:

$$\varepsilon=\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz=dp\ (*),$$

(*) Uwaga. Odległość ds punktu $M(x, y, z)$ od punktu $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ mając za wyrażenie:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

http://rcin.org.pl

zatem ostateczna wartość ciśnienia p' w punkcie M', wyrazi się tak:

$$p' = p + dp.$$

Możemy więc powiedzieć: *znając ciśnienie* $p = \varphi(x, y, z)$, *na jedność powierzchni, w jednym punkcie* M (x, y, z), *znajdziemy ciśnienie, na tę samą jedność powierzchni, w punkcie nieskończenie mu blizkim* M' $(x + dx, y + dy, z + dz)$, *różniczkując ciśnienie p punktu* M *wedle wszystkich zmiennych:* x, y, z *i dodając otrzymaną ztąd różniczkę zupełną:* dp *do danego ciśnienia* p.

I nawzajem:

Znając ilość dp, *o jaką ciśnienie w danym punkcie* M' *zostało zwiększoném, względem ciśnienia wywieranego na punkt* M, *nieskończenie mu blizki, otrzymamy całkowite ciśnienie w* M *biorąc z wyrażenia* dp *potrójną całkę, odpowiadającą trzem zmiennym niezależnym:* x, y, z; to jest, wartość ciśnienia p w punkcie M otrzyma się ze wzoru:

$$p = \int\int\int dp = \int\int\int d.\varphi(x, y, z).$$

Otóż, ażeby znać funkcyę dp dla każdego punktu M', potrzeba się starać wyrazić takową w funkcyi ilości od których ona zależy, a które zwykle znane nam są zgóry, to jest w funkcyi sił zewnętrznych, na ten punkt działających (§. 14). Zadanie to z łatwością rozwiązaném zostanie, posiłkując się równaniami, któremi Statyka stwierdza równowagę jakiegokolwiek systemu.

20. Różniczkowe równanie ciśnienia w danym punkcie cieczy. Uważajmy zatem ciecz zostającą w spoczynku pod działaniem jakichkolwiek sił zewnętrznych, przyczepionych w rozmaitych jej punktach, i rozpatrujmy wyłącznie jednę tylko jej cząsteczkę, która, w skutek spoczynku całego systemu, również będzie w spoczynku i zostaje pod działaniem nietylko ciśnień wywieranych, skutkiem sił zewnętrznych, przez resztę otaczającej ją cieczy, ale jeszcze i pewnej zewnętrznej siły, indywidualnie do cząsteczki przyczepionej. Uważamy cząsteczkę jako mającą kształt prostokątnego równoległościanu o wymiarach linjowych: dx, dy, dz nieskończenie małych.

Wiemy, że w takim razie sześć równań statycznych będą mieć miejsce dla każdego punktu systemu, rozpatrywanego zosobna; jesteśmy więc pewni, że dla naszej cząsteczki trzy równania rzutów:

$$\begin{cases} \Sigma F_x + \Sigma f_x = 0, \\ \Sigma F_y + \Sigma f_y = 0, \\ \Sigma F_z + \Sigma f_z = 0, \end{cases}$$

są zadowolnione, to jest, że się one sprawdzają wszystkie trzy jednocześnie. W równaniach tych F oznacza siłę *zewnętrzną*, daną; zaś f siłę *wewnętrzną*, która jest nieznaném ciśnieniem wywieranem przez ciecz na rozmaite punkta cząsteczki.

Co do *sił wewnętrznych*, pojmujemy o ile trudnémby było rozpatrywanie zosobna ciśnienia wywieranego na każdy punkt cząsteczki; dla tego więc staramy się sprowadzić je wszystkie do jak najmniej-

będzie nieskończenie małą ilością tego samego rzędu, co i ilości: dx, dy, dz; że zaś jak wiemy:

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz,$$

dp będzie również tego rzędu co: dx, dy, dz; więc dp — *przyrostek ciśnienia jest tego samego rzędu co* ds — *przyrostek odległości*.

http://rcin.org.pl

szej liczby sił, zachowując, w każdym razie, granice przybliżenia za które przejść niepowinniśmy: tu właśnie leży przyczyna, dla której uważamy część cieczy o wymiarach nieskończenie małych.

Widzieliśmy pod § 15, jakim sposobem zbiór ciśnień wywieranych na trzy ściany cząsteczki zastąpiliśmy trzema tylko ciśnieniami wypadkowemi, a mianowicie:

Ciśnieniem $+pdydz$, równoległem do osi OX, na ścianę MA,

« $+pdxdz$, « OY, « MB,

« $+pdxdy$, « OZ, « MC,

widzieliśmy nadto pod §. 18, że ciśnienie, *na jedność powierzchni*, w jednym punkcie ściany BC równoległej do ściany MA, będzie

co do swej *samoistej wartości* równem: $\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)$;

podobnież dla ściany AC, równoległej do MB: $\left(p+\frac{dp}{dy}dy\right)$;

nareszcie, » AB, » MC: $\left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)$;

ponieważ zaś powierzchnie ścian cząsteczki są nieskończenie małemi ilościami 2go rzędu, przypuszczamy, że ciśnienie na jedność powierzchni będzie stałem dla wszystkich punktów ściany; wskutek czego ciśnienie wypadkowe normalne, wywierane przez ciecz otaczającą cząsteczkę,

na jej ścianę BC, będzie co do swego natężenia $=\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dydz$,

» AC, » $=\left(p+\frac{dp}{dy}dy\right)dxdz$,

» AB, » $=\left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)dxdy$;

punkta przyczepienia tych ciśnień, na odpowiednich im ścianach, będą widocznie znajdować się w środku ciężkości powierzchni tych ścian; więc wszystkie trzy kierunki ciśnień spotykają się w geometrycznym środku równoległościanu, czyli w środku ciężkości objętości cząsteczki. Że zaś ciśnienia te są odpowiednio skierowane w stronę wprost przeciwną ciśnieniom wypadkowym na ściany MA, MB, MC, więc *skoro* te ostatnie *wzięliśmy* za *dodatne* (gdyż są one skierowane ku stronie dodatnej 3ch osi), ciśnienia na ściany BC, AC, AB, *powinny* być uważane za *odjemne* (jako skierowane w stronę odjemną osi).

Więc ostatecznie, zamiast całego zbioru ciśnień, jakim ulega cząsteczka w rozmaitych swych punktach ze strony otaczającej ją cieczy, mamy tylko do uważania sześć następujących wypadkowych ciśnień, wywieranych na sześć ścian równoległościanu, i zupełnie wyznaczonych co do ich wielkości, kierunku, znaku, i punktów ich przyczepienia:

Równolegle do osi OX: $+pdydz$ na ścianę MA; $-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dydz$ na ścianę jej przeciwną BC,

» OY: $+pdxdz$ » MB; $-\left(p+\frac{dp}{dy}dy\right)dxdz$ » AC,

» OZ: $+pdxdy$ » MC; $-\left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)dxdy$ » AB,

http://rcin.org.pl

Ale te sześć ciśnień mogą być zastąpione trzema ciśnieniami równoległemi do trzech spółrzędnych osi. Istotnie, ponieważ nasz równoległościan *ciekły* jest w stanie spoczynku, to jest, wszystkie jego punkta zachowują ciągle jedno i to samo położenie, możemy myślą związać te punkta *stale* pomiędzy sobą, bez obawy, aby stan spoczynku był przez to zachwianym; przeciwnie, przy nowych warunkach, w jakie stawiamy wszystkie punkta równoległościanu, spoczynek jego będzie jeszcze *stalszym*; gdyż, jeżeli miał on miejsce wtedy gdy, z natury samej cieczy, materyalne jej punkta były *niezależne* od siebie, tém bardziej będzie on istnieć, gdy pozbawimy punkta tej wolności, jaką przedtem posiadały. Więc nic nie zmieniając w stanie spoczynku systemu, możemy uważać równoległościan ciekły za równoległościan *stały*, a zatem zastosować do niego własności tyczące się *ciał stałych*. Otoż wiemy, że punkt przyczepienia jakiejkolwiek siły może być przeniesiony do wszelkiego innego punktu, wziętego na jej kierunku, *byleby ten ostatni punkt był stale połączony z pierwszym*; więc przenosząc punkta przyczepienia powyższych ciśnień, odpowiednio po dwa, we własnym ich kierunku, na ilości: $\frac{dx}{2}$, $\frac{dy}{2}$, $\frac{dz}{2}$, wszystkie te 6 ciśnień będą teraz przyczepione do jednego punktu O (fig 8), który jest środkiem ciężkości równoległościanu, i sprowadzą się do trzech następujących sił:

fig. 8.

1°: $-\frac{dp}{dx}dxdydz$ równoległej do osi X,

2°: $-\frac{dp}{dy}dydxdz$ » Y,

3°: $-\frac{dp}{dz}dzdxdy$ » Z.

Więc będziemy mieć do podstawienia w równaniach (1):

$$\Sigma f_x = -\frac{dp}{dx}dxdydz,$$

$$\Sigma f_y = -\frac{dp}{dy}dxdydz,$$

$$\Sigma f_z = -\frac{dp}{dz}dxdydz;$$

i te siły mogą być uważane jako działające na środek O równoległościanu (*).

21. Przechodzimy teraz do wyrażenia sił *zewnętrznych*: ΣF_x, ΣF_y, ΣF_z.

(*) Ściśle mówiąc, oprócz tych trzech sił, działających na punkt cieczy O, będą jeszcze działać w tym punkcie inne siły wewnętrzne, wywierane przez materyalne punkta zawarte w samej objętości równoległościanu; ale że ta objętość jest: $dx\,dy\,dz$, więc jej massa będzie nieskończenie małą ilością 3go rzędu; zatem działanie na punkt O tej massy nieskończenie małej może być zaniechane, w porównaniu z działaniem massy *skończonej*, otaczającej równoległościan.

http://rcin.org.pl

Jakiekolwiekby były, siły działające na punkt materyalny, mogą one zawsze być zastąpione geometrycznie *jedną tylko siłą*, do znajomości której potrzeba mieć: 1° jej punkt przyczepienia M, to jest wartości x, y, z tego punktu; 2° jej kierunek i jej sens, to jest wartości dostaw kątów α, β, γ, jakie kierunek siły czyni z trzema osiami; 3° jej natężenie F, odniesione do *jedności massy*, to jest liczbę F *jedności siły*, (wybór tej jedności jest zupełnie dowolny i zależy od ugody) pod wpływem której znajdowałaby się *jedność massy* (*) otaczającej punkt M, gdyby wszystkie punkta tej massy były w jednych i tych samych co i punkt M warunkach.

Niech więc będzie nam daną, przez swe trzy rzuty X, Y, Z na osi spółrzędne, siła F, *na jedność massy*, działająca w punkcie M(x, y, z) cząsteczki: dane te wystarczają do zupełnego wyznaczenia siły, gdyż jej natężenie F wyrazi się przez:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

a jej kierunek znanym będzie z równań:

$$\text{dost}\alpha = \frac{X}{F}; \qquad \text{dost}\beta = \frac{Y}{F}; \qquad \text{dost}\gamma = \frac{Z}{F};$$

znaki składowych X, Y, Z, są, dla naszego celu, rzeczą obojętną.

(*) (DUHAMEL, *Cours de Mécanique*. Tom I, str. 305):

W Mechanice uważamy 4 jedności: jedność czasu, jedność szybkości, jedność siły i jedność massy, i związujemy je pomiędzy sobą jedną tylko następującą względnością:

1ość *siły, przyczepiona do* 1ści *massy i działająca stale na tę ostatnią wciągu* 1ści *czasu, nadaje tej massie i w końcu tego czasu szybkość, równą* 1ości *długości na* 1ść *czasu.*

Widzimy więc, że trzy z tych jedności są zupełnie dowolne, i możemy im nadać taką samoistą wielkość jaka się nam podoba. Otóż, zgodzono się przyjąć:

1°	za jedność szybkości, czyli za jedność długości,		—	metr,
2°	»	czasu	»	sekundę,
3°	»	siły	»	kilogram,

to jest *ciężar* 1go decymetru sześciennego dystylowanej wody, wziętej przy temperaturze przy której jej gęstość jest największa (około 4°) i uważany (ciężar) w Obserwatoryum Paryzkiém.

Wypadnie zatem z tej ugody, że *jedność massy* będzie to taka *ilość materyi*, która, w skutek ciągłego i stałego działania na nią siły równej 1 kilogramowi, nabędzie, po upływie jednej sekundy, szybkość równą 1 metrowi na 1 sekundę, jeśli siła w końcu tej sekundy działać nań przestaje.

Doświadczenia robione w Obserwatoryum Paryzkiém, dla znalezienia tej ilości materyi, (to jest bezwzględnej jej wartości) pokazały, że ilość materyi zawartej w 1 decymetrze sześciennym dystylowanej wody, zostając w ciągu 1 sekundy pod działaniem siły równej 1 kilogramowi, (to jest pod działaniem tylko swego *własnego ciężaru*) nabywa, w końcu 1 sekundy, gdzie działanie tego ciężaru sztucznie się usuwa, szybkość równą 9met.,80896 na sekundę, i tę szybkość przyjęto oznaczać, dla skrócenia, literą g, rozumiejąc że:

$$\text{długość } g = 9,\ 80896 \text{ metrów.}$$

Zkąd wniesiono, że ilość materyi zawartej w g decymetrach sześciennych wody, zostającej, jak poprzednio, pod działaniem 1 kilogramu (to jest siły równej $\frac{1}{g}$ własnego ciężaru tej wody) i wciągu 1 sekundy, nabędzie, z końcem tej ostaniej, szybkość równą 1 metrowi na 1 sekundę; tak że z powyższego określenia związku międzu czterema jednościami wypada, że *jednością massy* będzie to *taka ilość materyi*, jaka jest zawarta *w g decymetrach sześciennych dystylowanej wody*, wziętej przy temperaturze bardzo blizkiej 4°, i uważanej w Obserwatoryum Paryzkiém.

I tak, w strzeszczeniu, biorąc za 1ść czasu *sekundę*, za 1ość szybkości lub długości *metr*, za 1ść siły *kilogram*, wypada wziąść za 1ść massy — ilość materyi zawartej w g dec. sześc. wody.

Wychodząc z tego punktu, możemy powiedzieć że: massą jakiegokolwiek ciała będzie to liczba, wyrażająca ile razy wskład materyi tego ciała wchodzi ilość materyi zawartej w g d. s. wody.

http://rcin.org.pl

Siły zewnętrzne, mówiąc ogólnie, mogą się zmieniać, co do ich natężenia i kierunku, od jednego materyalnego punktu do drugiego: ale, zważając na nieskończenie małe wymiary, jakie nadajemy cząsteczce, możemy *wypadkowę* wszystkich zewnętrznych sił na nią działających wyrazić przez siłę F, znaną nam w jednym tylko punkcie $M(x, y, z)$. I rzeczywiście, zważywszy iż objętość cząsteczki $dv = dx\,dy\,dz$ jest nieskończenie małą ilością 3go rzędu, możemy przypuścić że:

1° *gęstość* cieczy, — która w ogólności może się zmieniać z każdym punktem, czyli jest pewną funkcyą : $\psi(x, y, z)$, będzie jedna i ta sama we wszystkich punktach cząsteczki; to jest, możemy uważać równoległościan jako napełniony cieczą *jednorodną*; tak, że znając gęstość ρ, na 1ość objętości, w jednym punkcie $M(x, y, z)$ cząsteczki, mamy prawo powiedzieć że $\rho\,dx\,dy\,dz$ będzie *massą* cząsteczki, czyli że:

$$dm = \rho dxdydz;$$

ρ będąc ilością skończoną, massa ta jest nieskończenie małą tego co i objętość rzędu.

2° *siły zewnętrzne*, działające indywidualnie na cząsteczkę nieskończenie małych rozmiarów, są, na *jedność massy*, we wszystkich punktach cząsteczki jedne i też same, tak co do ich natężenia, jak co do kierunku. Więc wszystkie te siły *zewnętrzne* mogą być złożone w jednę tylko siłę R; że zaś ciecz zawartą w objętości cząsteczki uważamy za *jednorodną*, punkt *przyczepienia* wypadkowej R będzie się znajdować w środku ciężkości tej objętości, to jest w środku O równoległościanu; jej *kierunek* będzie spólny kierunkom wszystkich sił składowych F; a jej *natężenie*, przedstawiające całkowite natężenie wszystkich zewnętrznych sił do cząsteczki przyczępionych, wyrazi się przez:

$$R = F\rho\, dxdydz;$$

jej natężenia *składowe* wedle 3ch osi spółrzędnych będą odpowiednio:

$$R_x = X\rho\, dxdydz,$$
$$R_y = Y\rho\, dxdydz,$$
$$R_z = Z\rho\, dxdydz;$$

będziemy zatem mieli do podstawienia w równaniach (1):

$$\Sigma F_x = X\rho\, dxdydz,$$
$$\Sigma F_y = Y\rho\, dxdydz,$$
$$\Sigma F_z = Z\rho\, dxdydz;$$

i związek, jaki zachodzi pomiędzy *ciśnieniem*, wywieraném przez ciecz *na całą powierzchnię* cząsteczki, i *siłami zewnętrznemi*, działającemi na *wszystkie punkta massy* tej cząsteczki, wyrazi się równaniami:

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho X dx\,dy\,dz - \dfrac{dp}{dx}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ \rho Y dx\,dy\,dz - \dfrac{dp}{dy}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ \rho Z dx\,dy\,dz - \dfrac{dp}{dz}\,dx\,dy\,dz = 0, \end{cases}$$

zkąd widzimy, że każde z trzech ciśnień, rozpatrywanych wedle 3ch osi, może być *dodatne* lub *odjemne* stosownie do znaku, jaki mają składowe X, Y, Z sił zewnętrznych; ciśnienia są zawsze tym siłom równe i przeciwnego im znaku.

http://rcin.org.pl

22. Ilości dx, dy, dz są dowolne; mogą one być tak małe jak się nam podoba, ale nigdy 0; więc nic nie zmieniając w równaniach (2), możemy je podzielić przez każdą z tych ilości zosobna, lub też przez ich iloczyn; skróciwszy więc pierwsze wyrażenie na $dydz$, drugie na $dxdz$, a trzecie na $dxdy$, równania (2) przedstawią się pod formą:

$$(2') \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx}dx = \rho X dx, \\ \dfrac{dp}{dy}dy = \rho Y dy, \\ \dfrac{dp}{dz}dz = \rho Z dz, \end{cases}$$

która nam pokazuje, jak się wyrażają, w funkcyi siły zewnętrznej działającej na punkt M(x, y, z) cieczy, cząstkowe przyrostki ciśnienia, (na jedność powierzchni,) gdy przejdziemy od trzech ścian cząsteczki, wychodzących z punktu M, do ścian im odpowiednio równoległych i odległych od pierwszych na dx, dy, dz.

Wiemy ze Statyki że, przy spoczynku jakiegokolwiek systemu, trzy te równania (2') istnieją *jednocześnie*; więc równanie, jakie otrzymamy z dodania do siebie tych równań, też będzie sprawdzoném; jednoczesność równań (2') wyznacza *geometrycznie* punkt M', czyli od punktu M(x, y, z) przenosi nas do punktu M'$(x+dx, y+dy, z+dz)$ nieskończenie mu blizkiego; *analitycznie*, daje ona dla punktu M' następujący związek:

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

czyli na mocy poprzedniego (§ 19):

$$(A) \qquad dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Tak się wyrazi, *w funkcyi danej siły zewnętrznej* (X, Y, Z) — działającej na jakikolwiek punkt M(x, y, z) cieczy w spoczynku, i gdzie ciśnienie (na jedność powierzchni) oznaczamy przez p, — *całkowity przyrostek* dp (na tę samą jedność powierzchni) ciśnienia, jakie będzie istnieć w punkcie nieskończenie mu blizkim M'$(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Równanie (A) jest równanie różniczkowe, i stanowi fundamentalne równanie Hydrostatyki.

23. Uwaga I. Wiemy, że dla spoczynku systemu *stałego* sześć równań statycznych są konieczne, ale zarazem i wystarczające. Dla spoczynku systemu, w ogólności jakiegokolwiek, sześć tych równań jeszcze *muszą* istnieć, tylko *mogą* one nie być wystarczającémi; to jest, że nie wiedząc *à priori* w jakim system znajduje się stanie, nie możemy jeszcze z samego tylko sprawdzenia się 6 statycznych równań twierdzić, że ten system znajduje się w spoczynku; gdyż, obok sześciu równań, wyrażających związki między rozmaitemi siłami, mogą *jednocześnie* istnieć inne związki, właściwe tylko rozpatrywanemu systemowi. Więc wartości, jakie chcemy znaleść, w *systemie jakimkolwiek*, z równań statycznych powinny uledz pewnemu kryteryum; inaczej mówiąc, powinny być wzięte nie pierwej, jak po wprowadzeniu do tych równań związku *charakteryzującego* uważany system; czyli, że równania statyczne i równania charakteryzujące wyjątkowo system, jakim się zajmujemy, powinny być rozpatrywane *jednocześnie*.

Dotykalne zastosowanie tej uwagi przedstawiają nam gazy. Charakterystyczna własność gazów

http://rcin.org.pl

wyraża się związkiem: między gęstością gazu, jego ciśnieniem, jego rozszerzalnością i nareszcie jego temperaturą. Związek ten, odkryty przez Mariotte'a i Gay-Lussac'a, wyraża się formułą:

$$(a) \qquad \rho = \frac{kp}{1+\alpha\theta};$$

gdzie: ρ i p oznaczają odpowiednio gęstość i ciśnienie,

θ temperaturę,

α spółczynnik rozszerzalności gazu,

k spółczynnik stały;

a gdyby, w przypadku szczególnym, gaz był uważanym przy temperaturze stałej, w takim razie oznaczając:

$$\frac{k}{1+\alpha\theta} = \mathrm{K} = \text{ilości stałej},$$

związek ten przyjął by formę:

$$\rho = \mathrm{K}p.$$

Spoczynek gazów będzie zapewniony nie pierwej, jak przy jednoczesnem istnieniu równań statycznych (2) i równania (a); to jest, kiedy wartość bądź na p, bądź na ρ, wyciągnięta z równań *mechanicznych* (2'), sprawdza równanie *fizyczne* (a).

Co do cieczy, jedna z charakterystycznych jej własności: *nieściśliwość*, jest przyczyną, dla której gęstość jej nie zależy od ciśnienia; tak że w punktach cieczy ciśnionych rozmaicie gęstość może być jedna i ta sama (ciecze jednorodne), i jeżeli zmienia się ona z każdym punktem (ciecze różnorodne), to pochodzi z samej natury takiej cieczy, lecz bynamniej nie wynika ze zmienności w ciśnieniu. Więc dla cieczy nie mamy żadnego dodatkowego równania do wprowadzenia w równania (2'), tak że nawet dla cieczy *naturalnych*, — z powodu, że ściśliwość ich jest nadzwyczaj mała i wymaga z tém wszystkiém sił nadzwyczaj wielkich, — równania (2') mogą być uważane za wystarczające; to jest, że spoczynek cieczy będzie niezależnym od wartości na p z (2') a właściwie z (A) wyciągniętej: ciecze bowiem są w stanie wywiązać nadzwyczaj wielką reakcyę, zdolną równoważyć nadzwyczaj wielkie ciśnienia wywierane na ich cząsteczki.

Uwaga 2. W równaniu (A) ilością niewiadomą jest p, która jest szukaném właśnie ciśnieniem w punkcie $\mathrm{M}(x, y, z)$. Otóż, ażeby z wyrażenia na przyrostek ciśnienia dp, w punkcie $\mathrm{M}'(x+dx, y+dy, z+dz)$, przejść do całkowitego ciśnienia, na jedność powierzchni, w punkcie M, nieskończenie mu blizkim, (dla którego gęstość ρ i siła zewnętrzna na niego indywidualnie działająca (X, Y, Z) są nam znane) dosyć jest zcałkować równanie (A). Lecz ażeby módz znaleźć ciśnienie już nie tylko w punkcie M, ale i w każdym innym punkcie cieczy, potrzeba:

1° potrafić wyrazić analitycznie, w funkcyi x, y, z, prawo, według którego zmienia się gęstość ρ ze zmianą punktów w cieczy różnorodnej; jak również, umieć wyrazić w funkcyi x, y, z prawo, według którego zmieniają się siły zewnętrzne (X, Y, Z) działające na rozmaite punkta cieczy.

2° nie trzeba tracić z uwagi tych warunków, przy jakich zostało wyprowadzoném równanie (A). Otóż, powyższe rozumowania przypuszczają, że, na objętości naszego równoległościanu, ciecz jest ciągłą; że pomiędzy jej materyalnemi punktami niema przerwy; to jest, niema ani próżni, ani *żadnego ciała* innej, jak uważana ciecz, natury. Widzieliśmy, jakim sposobem możemy, bez oczekal-

http://rcin.org.pl

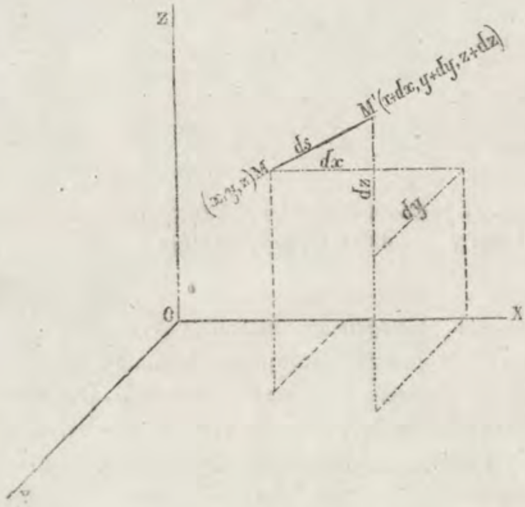
nego błędu, ciecz rzeczywistą zastąpić cieczą ciągłą; więc, co do ciągłości materyi, uwagi ustają; ale rzeczą, na którą powinniśmy zwrócić szczególniejszą baczność, jest ta okoliczność, iż wzór (A) przypuszcza, że pomiędzy dwiema jakiemikolwiek ścianami cząsteczki nie ma wstawionego innego obcego ciała; czyli, że *od jednej ściany do drugiej możemy przejść wprost, nie wychodząc wcale z cieczy.*

Więc równanie (A) możemy całkować *tylko między temi granicami*, w których powyższy warunek jest wypełniony.

Uwaga ta ma swoje znaczenie przy teoryi naczyń komunikujących.

24. Wiemy już, jakie ma *analityczne* znaczenie przyrostek ciśnienia dp, gdy przechodzimy od jednego punktu M do drugiego M′: *przyrostek ten jest różniczką zupełną ciśnienia w pierwszym punkcie, wziętą wedle wszystkich zmiennych niezależnych:* x, y, z; ma on jednak, nadto, jeszcze znaczenie *mechaniczne*, które wprost wypłynie z równania (A), jeżeli, zamiast charakteru *statycznego*, jedynie mu właściwego, będziemy zapatrywać się na nie z punktu widzenia *dynamicznego*,

fig. 9



Uważajmy (fig. 9) w przestrzeni dwa nieskończenie blizkie od siebie punkta M(x, y, z) i M′($x+dx$, $y+dy$, $z+dz$), odległe na ds i *przypuśćmy*, że materyalny punkt znajdujący się w pewnej chwili w M przyjmuje, po pewnym czasie, położenie M′, w skutek ciągłego nań działania siły F (danej przez trzy swe składowe X, Y, Z). Siła więc F, zmuszając punkt do przebieżenia drogi MM′ $= ds$, wykonała pewną mechaniczną pracę, dającą się wyrazić równaniem:

$$d.\mathfrak{T}\mathrm{F} = \mathrm{F}ds \operatorname{dost}(\mathrm{F},\ ds).$$

Otoż, możemy uważać ds jako drogę wypadkową trzech dróg składowych: dx, dy, dz, które są rzutami ds na osie OX, OY, OZ; uważając podobnież siłę F za wypadkowę trzech sił składowych: X, Y, Z piszemy, na mocy znanego twierdzenia tyczącego się pracy sił, wzory:

$$\begin{aligned} d.\mathfrak{T}\mathrm{F} &= \mathrm{F}ds \operatorname{dost}(\mathrm{F},ds) = \mathrm{F}dx \operatorname{dost}(\mathrm{F},dx) + \mathrm{F}dy \operatorname{dost}(\mathrm{F},dy) + \mathrm{F}dz \operatorname{dost}(\mathrm{F},dz) \\ &= \mathrm{F} \operatorname{dost}(\mathrm{F},dx)dx + \mathrm{F} \operatorname{dost}(\mathrm{F},dy)\, dy + \mathrm{F} \operatorname{dost}(\mathrm{F},dz)\, dz \\ &= \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz\,; \end{aligned}$$

a ztąd, na mocy równania (A) § 22, otrzymujemy:

$$dp = \rho\,(d.\mathfrak{T}\mathrm{F}),$$

i powiadamy: *W cieczy w spoczynku, przechodząc od punktu* M *do punktu nieskończenie mu blizkiego* M′, *przyrostek ciśnienia na jedność powierzchni w* M′, *względem ciśnienia na tęż samą jedność w* M, *ma za miarę iloczyn z gęstości cieczy przez pracę, jakąby wykonała siła zewnętrzna odniesiona do jedności massy, a działająca na punkt* M, *gdyby mogła ona zmusić punkt* M *do rzeczywistego przebieżenia drogi* MM′.

25. Równanie powierzchni jednakowego ciśnienia. Równanie (A) istnieje dla cieczy lub gazów jakichkolwiek i dla sił jakichkolwiek; dyskussya tego ogólnego równania nie jest naszym celem,

http://rcin.org.pl

gdyż mamy na widoku rozpatrywanie cieczy w jednym szczególnym przypadku, co do natury sił zewnętrznych, a mianowicie, — cieczy poddanej działaniu siły ciężkości. Nie możemy jednak pominąć wzmianki, choćby krótkiej, o różniczkowem równaniu powierzchni jednakowego ciśnienia, równaniu, tak obfitem w znaczenia, jakie ono przybiera w skutek zapatrywania się na nie z rozmaitych punktów widzenia.

Kwestye, jakie równanie (A) nam może nastręczyć,—nader ważne w zastosowaniach Hydrostatyki,— mogą się streścić w sposób następujący: *znając system sił działających na ciecz w spoczynku, znaleźć geometryczne miejsce punktów najwięcej, najmniej, lub jednakowo ciśnionych.* Kwestya jednakowego (równego) ciśnienia, jako przychodząca naturalnie, z prostego, że tak powiemy, rzutu oka na równanie (A), wskazuje nam odrazu, że dla znalezienia punktów jednakowego ciśnienia, potrzeba szukać takich punktów, w których przyrostek tego ciśnienia, względem ciśnienia wywieranego w danym punkcie M, jest zerem; inaczej mówiąc, trzeba szukać takich punktów jak M; więc geometryczne ich miejsce wyrazi się warunkiem:

(1) $$dp = 0;$$

czyli, że spółrzędne tych punktów: x, y, z, powinny zadowalniać równanie:

(2) $$\rho\,(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Rozwiązanie: $\rho = 0$ powinno być odrzucone, gdyż przypuszczając $\rho = 0$, przypuścilibyśmy tem że sama ciecz istnieć przestała; więc punkta jednakowo ciśnione powinny zadośćczynić warunkowi:

(3) $$Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$

czyli znajdować się na powierzchni:

(4) $$\varphi(x, y, z) = C,$$

takiej że:

(5) $$d\varphi(x, y, z) = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Równanie (3) jest równanie różniczkowe, a (4) równanie skończone *powierzchni jednakowego ciśnienia* (surfaces d'égale pression, albo jeszcze, surfaces izopieziques), które powszechnie noszą nazwę *powierzchni poziomu* (surfaces de niveau), z powodu, że w naturze wszystkie ciała znajdują się pod działaniem siły ciężkości, i powierzchnie równego ciśnienia dla cieczy, w spoczynku pod działaniem takiej siły, są, jak zobaczymy niżej, powierzchnie płaskie *poziome*, czyli płaszczyzny *poziome*.

26. Powierzchnie jednakowego ciśnienia, określone z punktu widzenia *mechanicznego*, mają nadto własność *geometryczną*, która wypływa wprost, jako wniosek, z równania (3) wyrażającego analitycznie to określenie. Istotnie, oznaczając α, β, γ kąty, jakie czyni siła zewnętrzna $F(X, Y, Z)$ w jakimkolwiek punkcie cieczy (x, y, z) z trzema osiami OX, OY, OZ; a λ, μ, ν kąty jakie czyni, z temiż osiami, *jakikolwiek* element $ds\,(dx, dy, dz)$ prostej przez punkt (x, y, z) poprowadzonej, i zauważywszy że:

$$X = F\operatorname{dost}\alpha,\quad Y = F\operatorname{dost}\beta,\quad Z = F\operatorname{dost}\gamma;\quad dx = ds\operatorname{dost}\lambda,\quad dy = ds\operatorname{dost}\mu,\quad dz = ds\operatorname{dost}\nu;$$

wyrażenie: $Xdx + Ydy + Zdz$ może być, dla *każdego punktu cieczy*, zastąpione przez równe im wartości; a że, w przypadku szczególnym uważania punktów jednakowo ciśnionych, mamy związek (3) więc *dla takich punktów*:

$$F\operatorname{dost}\alpha \,.\, ds\operatorname{dost}\lambda + F\operatorname{dost}\beta \,.\, ds\operatorname{dost}\mu + F\operatorname{dost}\gamma \,.\, ds\operatorname{dost}\nu = 0;$$

http://rcin.org.pl

zkąd, po skróceniu na Fds, otrzymujemy:

(6) $$\text{dost}\alpha\ \text{dost}\lambda + \text{dost}\beta\ \text{dost}\mu + \text{dost}\gamma\ \text{dost}\nu = 0 = \text{dost}(F, ds);$$

oznaczając (F, ds) kąt sił zewnętrznych, przyczepionych do punktów jednakowo ciśnionych, z elementami ds łączącymi dwa nieskończenie od siebie blizkie punkta tego rodzaju.

Rezultat (6) do jakiegośmy przyszli może być tak wyrażony:

We wszystkich punktach powierzchni jednakowego ciśnienia, wypadkowa sił zewnętrznych przyczepionych do punktu jest normalną w tym punkcie do tej powierzchni.

Wynika ztąd, że gdyby siły, działające na rozmaite punkta cieczy, skierowane były wszystkie ku jednemu punktowi *stałemu*, powierzchnie jednakowego ciśnienia byłyby sferyczne i mające ten punkt za środek; w razie zaś sił równoległych, powierzchnie te byłyby płaszczyznami równoległemi, prostopadłemi do spólnego kierunku sił.

Powyższy rezultat mógłby być otrzymany natychmiast z równania (3), uważając że składowe: X, Y, Z, siły F i składowe: dx, dy, dz, elementu ds są proporcyonalne do dostaw kątów, jakie siła i element tworzą z trzema osiami; ale woleliśmy nadać dowodzeniu formę jaką przedstawiamy.

Ggybyśmy znalezioną własność wzięli za określenie powierzchni poziomu, znaleźlibyśmy bez najmniejszej trudności, że we wszystkich punktach powierzchni tak określonej ciśnienie jest jedno i to samo. Więc za określenie powierzchni jednakowego ciśnienia moglibyśmy wziąć jednę z tych dwóch własności, gdyż są one sobie wzajemne.

27. Związek między ciśnieniem i gęstością w jakimkolwiek punkcie cieczy. Analityczna dyskussya równania (A) pokazuje, że dla cieczy w spoczynku, wyrażenie: $Xdx + Ydy + Zdz$ jest, z samej natury rzeczy, zawsze całkowalne (intégrable); to jest, że *istnieje* zawsze taka funkcya: $\varphi(x, y, z)$, której różniczką *dokładną* będzie właśnie to wyrażenie: $Xdx + Ydy + Zdz$; czyli, inaczej, że możemy zawsze użyć równania (5). Otoż, po wprowadzeniu (5) do równania (A), i oznaczając, dla skrócenia, $\varphi(x, y, z)$ jedną literą φ, przyrostek ciśnienia w dowolnym punkcie cieczy wyrazi się tak:

(A') $$dp = \rho d\varphi;$$

a ztąd, ciśnienie całkowite p, w punkcie nieskończenie blizkim pierwszemu, wyrazi się symbolicznie:

(B) $$p = \int \rho d\varphi + C;$$

gdzie ilość stała C zostanie wyznaczoną, skoro ciśnienie w danym jakimkolwiek punkcie cieczy będzie nam znaném à priori.

Ponieważ, w spoczynku cieczy, ciśnienie p jest z istoty swej ilością wyznaczoną i funkcyą spółrzędnych x, y, z, więc $\rho d\varphi$ musi być różniczką dokładną; a zatem (jak się tego dowodzi w rachunku całkowym), ρ musi być albo ilością *stałą*, albo funkcyą funkcyi φ; tak, że jeżeli ρ nie jest stałe, musi istnieć związek:

(a) $$\rho = f[\varphi(x,y,z)] = f(\varphi);$$

w skutek którego (B) przyjmie formę:

(B') $$p = \int f(\varphi)\, d.\varphi + C = F(\varphi) + C;$$

oznaczając przez $F(\varphi)$ taką funkcyę, której pierwsza pochodna jest $f(\varphi)$, czyli $F'(\varphi) = f(\varphi)$.

http://rcin.org.pl

Cała trudność w znalezieniu p będzie więc polegać:

1° na znalezieniu $\varphi(x,y,z) = \int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$;

2° na wyrażeniu funkcyi: $f(\varphi)$;

3° nareszcie, na zcałkowaniu funkcyi: $f(\varphi)\,d\varphi$.

W przypuszczeniu, że funkcye: φ, f, F znaleźć potrafimy, i że umiemy rozwiązać równanie (a), będziemy mogli otrzymać:

$$\varphi = f_1(\rho),$$

gdzie f_1 będzie funkcyą nam znaną; ztąd (B′) wyrazi się tak:

$$(\mathrm{B}'') \qquad p = \mathrm{F}[f_1(\rho)] + \mathrm{C} = \Phi(\rho) + \mathrm{C};$$

a z równania tego możemy wyciągnąć ρ i napisać:

$$(a') \qquad \rho = \psi(p) + \mathrm{C};$$

co nam pokazuje, że *w każdym punkcie cieczy, w spoczynku zostającej, ciśnienie jest funkcyą gęstości* i odwrotnie: *gęstość funkcyą ciśnienia*. Wypada ztąd, że *jakakolwiekby była natura cieczy, we wszystkich punktach jednej i tej samej powierchni poziomu*, — gdzie ciśnienie jest wszędzie jedno i to samo, — *gęstość musi być* również *stała*. Powierzchnie jednakowego ciśnienia będą więc zarazem *powierzchniomi jednakowej gęstości*.

Ale wniosek ten wyraża się daleko ogólniej, a właściwie przestaje być wnioskiem, w szczególnym przypadku takich cieczy, których jednorodność od zmiany ciśnienia nie zależy, to jest — dla cieczy jednorodnych nieściśliwych; w takim bowiem razie mamy à priori, że ρ jest *stałe* dla wszystkich bez wyjątku punktów; ρ nie zależy zatem od p; związek (a') przestaje mieć miejsce, i druga część równania (A′) jest, sama przez się, różniczką dokładną: tak że ze wzoru (B) wyciągamy natychmiast:

$$p = \rho\varphi + \mathrm{C}.$$

http://rcin.org.pl

B. ZASTOSOWANIE OGÓLNEGO WZORU HYDROSTATYKI DO CIECZY WAŻKICH.

STRESZCZENIE: Wyrażenie na przyrostek ciśnienia w jakimkolwiek punkcie cieczy ważkiej. — Powierzchnie poziomu. — Powierzchnie wolne. — Wyrażenie skończone ciśnienia w danym punkcie. — Związek między ciśnieniami w rozmaitych punktach cieczy. — Geometryczne przedstawienie ciśnień prostemi pionowemi lub poziomemi.

28. Wyrażenie na przyrostek ciśnienia w jakimkolwiek punkcie cieczy ważkiej. Równoległość kierunku i stałość natężenia siły ciężkości działającej na rozmaite punkta cieczy, w nierozległych granicach objętej, czynią teoryę cieczy ważkich bardzo prostą, i pozwalają traktować ją w sposób elementarny, nie posiłkujący się wyższym rachunkiem. W tym szczególnym przypadku sił, teorya ciśnienia może być rozwijaną bezpośrednio, bez znajomości ogólnego równania; ale dla lepszego wyjaśnienia przedmiotu, jak również, dla zachowania ogólnego poglądu na Hydrostatykę, wyprowadzamy teoryę ciśnienia cieczy ważkich z ogólnego wzoru, znalezionego dla sił jakichkolwiek.

Wiemy z § 22, że dla cieczy w spoczynku, przyrostek ciśnienia dp, na jedność powierzchni, w punkcie $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, względem ciśnienia p w punkcie $M(x, y, z)$, nieskończenie mu blizkim, wyraża się równaniem:

$$(A) \qquad dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

odniesioném do 3^{ch} osi prostokątnych, i w którém: ρ oznacza gęstość cieczy odniesioną do 1^{ści} objętości; X, Y, Z składowe siły zewnętrznej wypadkowej F, działającej na punkt $M(x, y, z)$, odniesione do 1^{ści} massy.

Zastosujmy teraz to ogólne równanie do przypadku praktycznego, kiedy jedyna siła, działająca na rozmaite punkta cieczy, jest *siła ciężkości*, i kiedy ciecz ta jest *jednorodna*, to jest, gdy ρ jest ilością stałą.

Siła ciężkości, będąc siłą pionową, nie ma rzutów poziomych, to jest $X = 0$, $Y = 0$; ma ona tylko jeden rzut Z na oś OZ, który zarazem będzie przedstawiać całkowite jej natężenie; otóż co do tej wartości Z uważajmy, że w naszym przypadku, będzie to *ciężar jedności massy*, to jest, ciężar ilości materyi zawartej w $9{,}80896 = g$ decymetrach sześciennych dystylowanej wody, wziętej przy temperaturze 4°; że zaś ilość materyi, zawartej w 1 decymetrze sześciennym takiej wody, waży 1 kilogram, więc jedność massy będzie ważyć $9{,}80896 = g$ kilogramów; więc $Z = g^{\text{kilg.}}$; a że kierunek tej siły jest zwrócony ku stronie odjemnej osi OZ, więc ostatecznie, siła działająca na jedność massy w punkcie M, wyrazi się, co do swej wartości i znaku, tak:

$$Z = -g^{\text{kilogr.}}$$

wskutek czego równanie (A) przyjmie formę:

$$(1) \qquad dp = -\rho g dz,$$

i to nam przedstawi wyrażenie na przyrostek ciśnienia, na jedność powierzchni, w punkcie M'.

Zróbmy tu uwagę, że ponieważ ciężar jakiegokolwiek ciała wyraża się wzorem:

$$P = mg,$$

jeżeli $m = 1$, znajdujemy $P = g$; to jest, w naszym przypadku $Z = g$; co oznacza, że Z wyraża tyle jedności siły, ile przyśpieszenie g wyraża jedności długości; czyli tyle kilogramów, ile g oznacza me-

http://rcin.org.pl

trów. Tak, że wychodząc z tej uwagi, moglibyśmy wprost napisać wartość na Z, bez powyższego rozumowania, które podaliśmy tylko dla ściślejszego przedstawienia rzeczy.

29. Powierzchnie poziomu. Warunki $X=0$, $Y=0$, wprowadzone w równania (2'), § 22, dają jednocześnie:

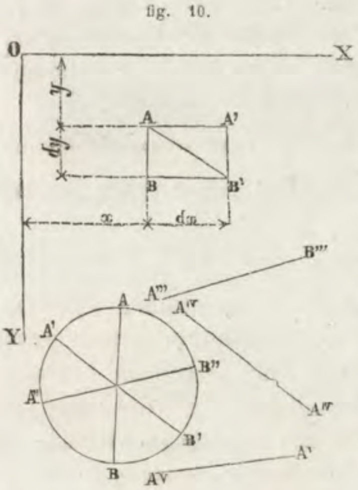
$$(a)\qquad \frac{dp}{dx}dx=0 \quad \text{i} \quad \frac{dp}{dy}dy=0;$$

pierwsze z tych dwóch równań wyraża, że cząstkowy przyrostek ciśnienia, odpowiadający zmianie jednej tylko spółrzędnej x punktu jest zerem; drugie zaś, że cząstkowy przyrostek, odpowiadający zmianie spółrzędnej y punktu, jest również zerem; a że te dwa równania istnieją *jednocześnie*, więc wnosimy, że jednoczesna zmienność *dwóch* spółrzędnych x i y punktu też nie wpłynie na zmianę w jego ciśnieniu; więc to ciśnienie jest niezależnem od x i y: będzie ono zatem funkcyą jednego tylko z; więc wszystkie punkta, mające jedno i to samo z, to jest, znajdujące się na jednej i tej samej płasczyznie *poziomej*, będą zostawać pod jednakowém ciśnieniem; powiadamy zatem: że *dla cieczy zostającej w spoczynku pod działaniem siły ciężkości, powierzchnie jednakowego ciśnienia są płasczyzny poziome.*

Wniosek, do którego przyprowadzają nas równania (a), może być wyrażony jeszcze w sposób następujący, ogólniejszy:

Uważając szereg punktów, zawartych w płasczyznie pionowej AB (*fig* 10), *wziętej dowolnie w massie cieczy w spoczynku, ciśnienia, w odpowiednich sobie punktach, zostaną zawsze jedne i te same, jakikolwiek byłby ruch tej płasczyzny, obrotowy lub postępowy, byleby tylko w tym ruchu odpowiednia odległość punktów od jakiejkolwiek płasczyzny poziomej, raz wziętej za płasczyznę porównania, zostawała zawsze jedna i ta sama.*

fig. 10.



Nie przechodząc przez dyskussyę równań (a), łatwo możemy przyjść do powyższego wniosku z samego *geometrycznego* określenia powierzchni poziomu (§ 26), uważając, że ponieważ siła ciężkości jest siłą pionową w każdym punkcie cieczy, powierzchnia, w każdym swym punkcie do takiej siły normalna, jest *płasczyzna pozioma.*

Znaczenie *dynamiczne* przyrostka ciśnienia (§. 24) przyprowadza nas również do wniosku, że ten przyrostek dp jest zerem dla punktów leżących na jednej i tej samej płasczyznie poziomej, na odległości *jakiejkolwiek* od siebie, to jest, że ciśnienie we wszystkich punktach takiej płasczyzny jest *stałe;* gdyż jak wiemy, praca siły ciężkości jest zerem, skoro punkt, do którego ta siła jest przyczepioną, nie wychodzi z płasczyzny poziomej poprowadzonej przez pierwotne jego położenie.

Równanie ogólne powierzchni jednakowego ciśnienia: $Xdx+Ydy+Zdz=0$, nie może jak tylko sprawdzić nasze rozumowanie; rzeczywiście w przypadku jaki rozpatrujemy, zważywszy że g jest ilością stałą, równanie to sprowadza się do formy:

$$dz=0; \quad \text{zkąd otrzymujemy:} \quad z=C,$$

na równanie skończone szukanej powierzchni; a to oznacza równanie płasczyzny, równoległej do płasczyzny poziomej XY, i wyraża tyle *płasczyzn poziomych*, ile możemy nadać rozmaitych wratości

http://rcin.org.pl

na C, to jest, ile możemy uważać punktów, należących do cieczy i znajdujących się na pionowej z, wyrażającej ich wysokość nad płaszczyzną porównania XY.

Dodajemy nareszcie, że bez wszelkiego określenia, i nie posiłkując się żadném równaniem, można z łatwością dowieść wprost twierdzenia: *dla cieczy w spoczynku ciśnienie jest jedno i to samo we wszystkich punktach jednej i téj samej płaszczyzny poziomej*; i ta własność cieczy ważkiej tak jest charakterystyczną, że często powiada się odwrotnie: *ażeby ciecz zostawała w spoczynku, potrzeba żeby ciśnienia, we wszystkich punktach jednej i téj samej płaszczyzny poziomej, były jednakowe.*

Uwaga. Ponieważ, dla siły jaką się zajmujemy, mamy $X=0$ i $Y=0$, wnosimy ztąd, że kierunek osi OX i OY jest rzeczą zupełnie dla nas obojętną: osie te mogą czynić ze sobą kąt jakikolwiek, byleby tylko położenie ich w przestrzeni wyznaczało płaszczyznę poziomą XY, od której rachujemy wartości na z.

30. Powierzchnie wolne. Gdyby ciecz była usunięta od działania na nią wszystkich innych zewnętrznych sił, prócz siły ciężkości, to jest, gdyby ciecz ważka znajdowała się *w próżni* i w spoczynku, górna powierzchnia cieczy, zawartej w jakiémkolwiek naczyniu, byłaby wolną od wszelkiego na nią działania; nazywamy ją dla tego *powierzchnią wolną* (surface libre). Otóż, widzimy natychmiast, że *powierzchnia wolna* cieczy będzie zarazem *powierzchnią jednakowego ciśnienia*, gdyż, z przypuszczenia, ciśnienie we wszystkich jej punktach jest 0; więc będzie to *płaszczyzna pozioma*. I tak, przestrzeń zajmowana cieczą ważką, zostającą w próżni i w spoczynku, będzie ograniczoną, od góry, płaszczyzną poziomą, jeżeli siła ciężkości, działająca w obszarze tej przestrzeni, może być uważaną za stałą, co do natężenia i kierunku, we wszystkich punktach cieczy; gdyż równanie (1) i wnioski jakie z niego wyprowadzamy mają miejsce tylko przy takich warunkach.

Z powodu atmosfery ciecz otaczającej i zostającej pod działaniem siły ciężkości, a zatem, wywierającej ciśnienie na powierzchnie wszystkich ciał w niej zanurzonych, powierzchnia cieczy, w rzeczywistości, nie jest wolną. Łatwo widzieć że powierzchnia odzielająca ciecz od atmosfery, w razie gdy jedna i druga są w spoczynku, jest *płaszczyzna pozioma* (zawsze na małej tylko przestrzeni); i ażeby się o tem przekonać, dosyć jest uważać że:

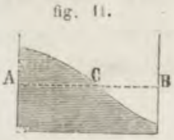
1° jak dla cieczy tak i dla atmosfery, powierzchnie jednakowego ciśnienia są płaszczyzny poziome;

2° że, jak widzieliśmy pod § 27, we wszystkich punktach jednej i tej samej powierzchni poziomu gęstość musi być jedna i ta sama, nie zważając na naturę płynu;

3° że wiemy à priori, iż gęstość cieczy jest różną od gęstości atmosfery.

Gdyby więc powierzchnia przedzielająca ciecz od atmosfery nie była płaszczyzną poziomą, a płaszczyzną, lub w ogólności (fig. 11) powierzchnią pochyłą, w takim razie moglibyśmy, przez jakikolwiek punkt jej, poprowadzić płaszczyznę poziomą AB tak, żeby przecinała ona zarazem ciecz i atmosferę; ale z tego przypuszczenia wypadłoby, że gęstość cieczy i gęstość atmosfery byłaby jedną i tą samą, gdyż, jak wiemy, gęstość jaka istnieje dla rozmaitych punktów części AC płaszczyzny AB, musi być jeszcze taką samą i dla rozmaitych punktów części CB; co jest przeciwnem założeniu.

fig. 11.



Więc płaszczyzny poziome nie mogą *przecinać* powierzchni oddzielającej ciecz od atmosfery; muszą więc one być płaszczyznami *stycznemi* we wszystkich jej punktach; więc górna powierzchnia cieczy, uważanych w rzeczywistości i znajdujących się w spoczynku, jest zawsze płaszczyzną *poziomą*, to jest, prostopadłą do kierunku siły ciężkości w tém miejscu.

Ponieważ powierzchnia przedziału między cieczą i atmosferą (a w ogólności między cieczami różnej gęstości, nie mieszającemi się ze sobą), jest płaszczyzną poziomą, więc ciśnienie, na jedność po-

http://rcin.org.pl

wierzchni, wywierane przez atmosferę w rozmaitych punktach tej płaszczyzny przedziału jest stałe dla wszystkich jej punktów; tak że możemy powiedzieć: *dla cieczy, uważanych w naturze i zostających w spoczynku, górna ich powierzchnia jest powierzchnią jednakowego ciśnienia.*

Na mocy zasady jednakowego przekazywania ciśnienia na wszystkie punkta cieczy, ciśnienie wywierane przez atmosferę na powierzchnię cieczy zostanie przekazanem całkowicie, z jedném i témsamém natężeniem i normalnie, na wszystkie jej punkta, tak na ścianach naczynia jak i wewnątrz cieczy uważane. Wnosimy ztąd, że chcąc wiedzieć absolutne ciśnienie w jakimkolwiek punkcie cieczy, potrzeba, do ciśnienia, pod jakim ten punkt się znajduje, w skutek działania na niego otaczającej go cieczy, dodać jeszcze (§ 4) ciśnienie *dodatkowe*, wywierane przez atmosferę; lecz jeżeli ograniczamy się tylko porównaniem ciśnień pomiędzy sobą, *przez odciąganie*, to ciśnienie dodatkowe, będąc *stałém* dla wszystkich punktów, nie wejdzie w ich różnicę; tak że w tym razie możemy uważać górną powierzchnię cieczy, w spoczynku, jako powierzchnię *wolną*. Przypuszczenie takie nie będzie przedstawiało żadnej niedogodności nawet w każdym innym razie; gdyż, jeśli zachodzi potrzeba, umiemy zawsze wprowadzić w rachubę ciśnienie atmosferyczne, którego natężenie mierzy się, jak wiemy, wysokością barometru, i jak wiadomo, w przypadku szczególnym, kiedy temperatura powietrza jest 0°, a wysokość barometru $= 0^{m}760$, to ciśnienie atmosfery jest równem ciśnieniu $10333^{kg.}$ na 1 metr kwadratowy.

Mówiąc ogólniej, i z punktu widzenia analitycznego, możemy zawsze uważać (jak to zobaczymy poniżej) powierzchnię spoczynku cieczy za powierzchnię absolutnie *wolną*, zastępując ciśnienie atmosfery innem, równém mu ciśnieniem.

31. Wyrażenie skończone na ciśnienie w danym punkcie. Przejdźmy teraz do wyznaczenia ciśnienia w punkcie M (danym przez wartość z jednej tylko swej spółrzędnej, gdyż, jak wiemy, wartości na x i y tego punktu są nam obojętne) w funkcyi działającej na niego siły ciężkości Całkujmy w tym celu równanie (1), dające wyrażenie na przyrostek tego ciśnienia w punkcie M′. Uważamy ciecz jednorodną, więc ρ jest stałe, a ztąd:

(2) $$p = -\rho g z + C.$$

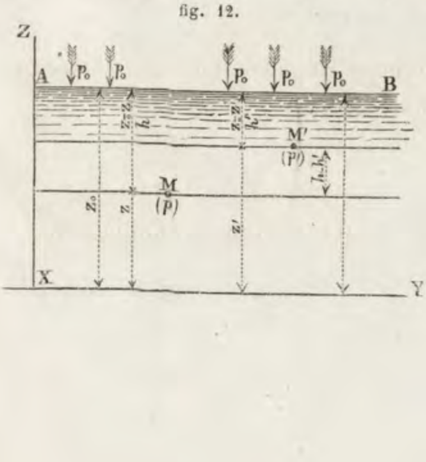
Gdyby gęstość ρ zmieniała się z każdym punktem cieczy, jakikolwiek byłby sposób tej zmienności, ciągły lub nie (jak np. dla cieczy ze sobą złożonych), potrzeba żeby ρ było funkcyą z; jeśli forma tej funkcyi jest nam znaną, i jeżeli umiemy ją zcałkować, otrzymamy skończone wyrażenie na p w funkcyi z; w przeciwnym razie, ciśnienie to wyrazi się symbolem:

$$p = -g\int \rho dz.$$

C jest ilość stała dowolna; zostanie ona zupełnie wyznaczoną, jeśli znaném nam będzie ciśnienie w jednym jakimkolwiek punkcie cieczy, wyznaczonym wartością z tego punktu.

Niech więc z_0 (fig 12) oznacza wysokość, nad płaszczyzną porównania XY, płaszczyzny *poziomej* AB ograniczającej powierzchnię cieczy uważanej w powietrzu. Wiemy że na tę płaszczyznę wywieraném będzie ciśnienie atmosferyczne, równe we wszystkich jej punktach; oznaczając to ciśnienie na jednostkę powierzchni przez p_0, równanie (2) powinno być sprawdzonem wartościami z_0 i p_0, czyli że będziemy mieli:

fig. 12.



$$p_0 = -\rho g z_0 + C,$$

na mocy czego:

(3) $$p = p_0 + \rho g(z_0 - z);$$

http://rcin.org.pl

co jest nic innego jak równanie (1) zcałkowane między granicami:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\rho g \int_{z_0}^{z} dz.$$

Wiemy, że *gęstość* ρ materyi jednorodnej jest to ilość massy zawartej w 1ości objętości; ρ będzie więc, mówiąc ogólnie, *pewną częścią jedności massy*; a że g jest właśnie ciężarem tej jedności, więc ρg będzie ciężar ilości massy zawartej w jedności objętości cieczy, czyli *ciężar gatunkowy* tej cieczy, który oznaczając przez Π, mamy z równania (3):

$$(4) \qquad p = p_0 + \Pi(z_0 - z)$$

Tak się wyrazi ciśnienie p, w danym punkcie $M(z)$, w funkcyi ciężaru gatunkowego Π cieczy i odległości $(z_0 - z)$ punktu od jej górnej powierzchni. Możemy zatem powiedzieć:

Ciśnienie, na jedność powierzchni w danym punkcie cieczy ważkiej w spoczynku, jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na tę samą jedność, dodanemu do iloczynu z ciężaru gatunkowego, właściwego rozpatrywanej cieczy, przez odległość tego punktu od powierzchni cieczy.

Zważywszy że wyraz $\Pi(z_0 - z)$ oznacza *ciężar cieczy* zawartej w objętości, której podstawą jest 1ść a wysokością $(z_0 - z)$, i pomijając ciśnienie dodatkowe *stałe* p_0, nadamy wzorowi (4) sens dobitniejszy powiadając że: *ciśnienie w danym punkcie cieczy ważkiej, na jedność powierzchni, równem jest, czyli ma za miarę, ciężar pionowej kolumny tej cieczy, mającej za podstawę uważaną jedność powierzchni, a za wysokość — wysokość cieczy nad tym punktem*, to jest, zawartej między dwiema płaszczyznami poziomemi, z których jedna jest poprowadzona przez punkt jaki rozpatrujemy, a druga — jest to górna powierzchnia cieczy.

Wzór (4) będąc fundamentalnym wzorem dla cieczy ważkich w spoczynku, wejdźmy w niektóre objaśnienia, mające na celu jego praktyczne zastosowanie.

Zauważmy naprzód, że określenie ciśnienia na jedność powierzchni, podane pod § 11, było *warunkowe*, mające dotykalne znaczenie wtedy tylko, kiedy wszystkie punkta powierzchni płaskiej, wzięte naokoło punktu danego, są ciśnione jednakowo. Otoż, dla cieczy ważkich widzimy urzeczywistnienie tego warunku: spotykamy tu nie elementa płaszczyzn, nie powierzchnie nieskończenie małe, lecz płaszczyzny poziome o powierzchni skończonej jakiejkolwiek, do wszystkich punktów których możemy, z całą matematyczną ścisłością, zastosować własność jednakowego ciśnienia, i wziąć za jedność powierzchni taką jej absolutnną wielkość jaka nam się podoba, byleby takowa nie przekraczała granic, w których siły na ciecz działające mogą być uważane za stałe.

Zauważmy następnie, że ilość Π zmienia się ze zmianą cieczy, a jej samoista wartość dla jednej i tej samej cieczy zależy od objętości jaką bierzemy za jedność. Jeżeli np. uważana ciecz jest wodą, i jeśli za jedność długości lub wysokości weźmiemy *metr* linijny, za jedność powierzchni — metr kwadratowy, a za jedność objętości — metr sześcienny,

Π = ciężarowi 1 sześciennego metra wody = 1000kilogramów;

formując następnie z decymetra, centymetra, millimetra linijnego odpowiednie im jedności powierzchni i objętości, będziemy mieli, dla wody, następujące wartości na Π:

Π, Ciężar	1 decymetra	sześciennego wody	= 1kilogram,	
« «	1 centymetra	«	= 0,k 001	= 1 gram,
« «	1 millimetra	«	= 0,gramów 001	= 1 milligram.

http://rcin.org.pl

Dla *metra*, formuła (4) ma znaczenie takie :

$$\mathfrak{P}^{\text{kg na 1 m kw.}} = \mathfrak{P}_0^{\text{kg na 1 m kw.}} + 1000^{\text{kg}}(z_0 - z);$$

gdzie $z_0 - z$ jest liczba *metrów*.

Dla *centymetra*, taż sama formuła ma znaczenie następujące:

$$\mathfrak{P}^{\text{kg na 1 cm kw.}} = \mathfrak{P}_0^{\text{kg na 1 cm kw.}} + 0^{\text{k}},001\,(z_0 - z);$$

gdzie $z_0 - z$ jest liczba *centymetrów*.

Jeżeli np. wysokość $(z_0 - z)$ punktu M jest 5^{m}, i jeżeli chcemy wyrazić w kilogramach ciśnienie wywierane przez ciecz na 1 centymetr kwadratowy, wzięty na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez punkt M, stosując wzór (4), otrzymujemy (w przypuszczeniu że wysokość barometru jest $0^{\text{m}},760$ i temperatura powietrza 0^0) :

$$\mathfrak{P}^{\text{kg na 1 cm kw.}} = \frac{10333^{\text{kg}}}{10000} + 0^{\text{k}},001\,(5 \times 100) = 1^{\text{kg}},0333 + 0^{\text{k}},5 = 1^{\text{kg}},5333\,.$$

Ale w praktyce wyraz $\Pi\,(z_0 - z)$ oblicza się daleko prędzej, pamiętając tylko że ciężar $1^{\text{m. sz.}}$ wody jest $1000^{\text{kgr.}}$. I tak, aby mieć ciśnienie na 1 centymetr kwadratowy, przy wysokości $z_0 - z = 5^{\text{m}}$, piszemy:

$$\Pi(z_0 - z) = 1000^{\text{k}} \times 5^{\text{m}} \times 1^{\text{cm.kw.}} = 1000 \times 5 \times 0{,}0001 = 0^{\text{kg}},5.$$

32. Związek między ciśnieniami w rozmaitych punktach cieczy. Uważajmy teraz inny jakikolwiek punkt cieczy $M'\,(z')$, w którym ciśnienie na jedność powierzchni oznaczamy przez p'. Na mocy wzoru (4) będziemy mieli :

(4') $$p' = p_0 + \Pi\,(z_0 - z');$$

Z (4) i (4'), oznaczając dla skrócenia $z_0 - z = h$ i $z_0 - z' = h'$, otrzymujemy :

$$p - p' = \Pi(h - h'),$$

co można wyrazić przez :

(5) $$\Delta p = \Pi \Delta h,$$

i co pokazuje, że *różnica ciśnień, na jedność powierzchni, w dwóch jakichkolwiek punktach cieczy, równą jest ciężarowi pionowej kolumny cieczy, mającej za podstawę tę jedność powierzchni, a za wysokość — odległość między dwiema płaszczyznami poziomemi poprowadzonemi przez te punkta.*

Równanie :

(6) $$p = p' + \Delta p = p' + \Pi \Delta h$$

możemy wyrazić: *ciśnienie, na jedność powierzchni, w dolnym punkcie* M *cieczy równem jest ciśnieniu, na tęż samą jedność, w górnym punkcie* M', *zwiększonemu ciężarem kolumny cieczy, mającej za podstawę tę jedność powierzchni, a za wysokość — odległość między dwiema płaszczyznami poziomemi przez te punkta poprowadzonemi.*

Moglibyśmy nadać wzorowi (6) jeszcze inne wysłowienie uważając, że odległość dwóch płaszczyzn poziomych, poprowadzonych przez dwa jakiekolwiek punkta, zowie się często *różnicą ich poziomu* (différence de niveau).

http://rcin.org.pl

Nareszcie, rozwiązując wzór (6) na p', otrzymujemy :

$$p' = p - \Pi\Delta h,$$

którego wysłowienie byłoby zbytecznêm.

Wniosek. Wzór (5), dający wartość na przyrostek ciśnienia gdy przechodzimy od jednego poziomu do drugiego, przyprowadza nas do wniosku mającego ciągłe zastosowanie przy praktycznêm obrachowywaniu ciśnień. I tak, wzór ten wyraża, że różnica w ciśnieniu dwóch punktów M i M' jest, dla jednego i tego samego płynu, proporcyonalną do różnicy ich poziomu : $\Delta h = h - h'$; więc ta różnica będzie tem mniejsza, im odległość dwóch płaszczyzn poziomych, przez te punkta poprowadzonych, będzie mniejsza; jeśli więc we wzorze (6) wysokość Δh warstwy poziomej będzie tak małą dz, że Πdz, względem p', może być zaniechanem bez znacznego błędu, wtedy wzór (6) zamieni się na następujący :

$$p = p';$$

czyli że : *dla płynu ważkiego jakiegokolwiek, ciśnienie na jedność powierzchni w rozmaitych punktach nieskończenie cienkiej warstwy poziomej może być uważane za stałe.*

Zauważmy teraz, że dla gazów ważkich—dla których, w ogólności, wartość na Π jest o wiele mniejszą jak dla cieczy — wyraz $\Pi\Delta h$ może być zaniechany, względem wartości p', nie tylko dla Δh nieskończenie małego, ale jeszcze i dla jego wartości skończonej, byleby nie zbyt znacznej. Zkąd się przychodzi do wniosku, że *dla gazów ważkich, zajmujących niewielką przestrzeń*, (jak np. objętość kotła parowego lub inne objętości zwykle w zastosowaniach spotykane) *ciśnienie, na jedność powierzchni może być, z dostatecznêm dla praktycznych potrzeb przybliżeniem, uważane za stałe we wszystkich punktach takiej przestrzeni.*

Wiemy już z poprzedniego (§ 3), że ciśnienie to byłoby z całą ścisłością stałe we wszystkich punktach *wszelkiej* przestrzeni zajętej gazem, gdyby takowy nie podlegał działaniu innych sił jak siły sprężystości.

Uwaga. Widzieliśmy pod § 31, że nie zwracając uwagi na ciśnienie atmosferyczne, (które jest jedną, ze składowych ciśnienia wypadkowego pod jakiem punkt zostaje), ciśnienie w danym punkcie cieczy jest równe ciężarowi tejże cieczy, zawartej w kolumnie pionowej, mającej za podstawę jedność powierzchni, a za wysokość odległość punktu od górnej powierzchni cieczy. Otoż, rezultat ten może być uogólniony i wyrażony w sposób następujący :

Ciśnienie, na jedność powierzchni, wywierane przez płyn ważki w jakimkolwiek punkcie, wziętym w jego wnętrzu, lub na ścianach naczynia, zawsze może być wyrażone ciężarem kolumny tego płynu ; a ogólniej, ciężarem wszelkiego innego płynu $\mathfrak{N}$ zawartego w kolumnie, mającej za podstawę tę jedność powierzchni, a za wysokość ilość którą zawsze wyznaczyć potrafimy.

Istotnie, niech $\mathfrak{P}$ będzie znaném nam à priori ciśnieniem, wyrażoném w kilogramach i wywieraném na jeden metr kwadratowy przez ciecz lub gaz, których ciężaru gatunkowego znać niepotrzebujemy ; oznaczając przez $\mathfrak{N}$ ciężar, nam znany, jednego metra sześciennego płynu dowolnego, możemy zawsze napisać równanie :

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{N} z,$$

z którego ilość szukana z wyrazi się :

$$z = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}};$$

http://rcin.org.pl

ponieważ $\mathfrak{N}$ nie jest nigdy 0, ilość z zawsze będzie zawartą między 0 i ∞; to jest, jakiekolwiekby były wartości na $\mathfrak{P}$, wysokość z zawsze będzie miała wartość wyznaczoną.

I tak np., wiedząc że ciśnienie atmosfery na 1 metr kwadratowy, i przy temperaturze 0°, jest równe 10332^{kg},96, możemy to ciśnienie wyrazić ciężarem kolumny wody, lub rtęci, lub wszelkiej innej cieczy, mającej za podstawę 1 metr kwadratowy, a za wysokość $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$; tak że wiedząc, iż dla wody, przy temperaturze 0°, ciężar $\mathfrak{N}$ jednego metra sześciennego jest około 1000^{kg}, a dla rtęci, przy tych że warunkach, $\mathfrak{N}' = 13596^{kg}$;

wysokość kolumny wody będzie:

$$z = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = \frac{10332^{kg},96}{1000} = 10^{m},33296\,;$$

a zaś wysokość kolumny rtęci:

$$z' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}'} = \frac{10332^{kg},96}{13596} = 0^{m},760.$$

Jedno i to samo ciśnienie atmosferyczne może więc być wyrażone albo wysokością 10^{m},33296 wody, albo wysokością 0^{m},760 rtęci; zmiana ciśnienia pociąga za sobą zmianę odpowiedniej wysokości wody lub rtęci.

Zwykle się uważa kolumnę jako napełnioną tąż samą cieczą, której się rozpatruje ciśnienie na punkt wzięty w jej wnętrzu.

Jak widzimy iloraz: $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = \frac{\text{ciśnienie na 1 metr kwadratowy}}{\text{ciężar 1 metra sześ. rozpatrywanej cieczy}}$, daje nam wysokość z kolumny (mającej za podstawę 1 metr kwadratowy) cieczy, której ciężar $\mathfrak{N}z$ wyrazi natężenie równe danemu ciśnieniu $\mathfrak{P}$. Iloraz $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = z$, zowie się, dla tej przyczyny, *wysokością należną* (due) *ciśnieniu* $\mathfrak{P}$, i naodwrót: ciśnienie $\mathfrak{P}$ nazywa się *ciśnieniem należném wysokości z*. Przy spadku ciał ważkich w próżni spotykamy wyrażenia: $v = \sqrt{2gh}$ i $h = \frac{v^2}{2g}$ podobnego rodzaju.

Jeśli v oznacza szybkość nabytą przez punkt, spadający swobodnie i pod działaniem jednej tylko siły ciężkości, na wysokość h od początkowego swego położenia, w którém v było zerem, mamy:

$$v = \sqrt{2gh}\,,$$

wyrażenie zaś:

$$p = \Pi h = \rho g h$$

da wartość ciśnienia na punkt znajdujący się przy końcu swego ruchu w płaszczyznie poziomej, poprowadzonej w cieczy ważkiej na odległości h od powierzchni wolnej tej cieczy.

Z porównania dwóch wyrażeń otrzymujemy:

$$\frac{p}{v} = \frac{\rho g h}{\sqrt{gh}} = \rho\sqrt{\frac{gh}{2}} = \rho\sqrt{\frac{v^2}{4}} = \rho\,\frac{1}{2}\,v;$$

zkąd:

$$p = \rho\,\frac{v^2}{2} = \text{gęstości cieczy} \times \text{żywą siłę tego punktu}:$$

http://rcin.org.pl

= gęstości cieczy $\times$ pracę siły ciężkości, której działanie zmusiłoby ten punkt do przebycia pionowej drogi h.

Tym sposobem znajdujemy sprawdzenie znaczenia dynamicznego, podanego pod § 24 dla przyrostka ciśnienia w jakimkolwiek punkcie cieczy.

33. Przedstawienie ciśnień prostemi pionowemi. Za pomocą wzoru:

$$p = p_0 + \Pi (z_0 - z) \tag{4}$$

możemy, znając p_0 i z_0, znaleźć ciśnienie w każdym punkcie cieczy; wzór ten rozwiązuje więc zadanie któreśmy sobie założyli; aby jednak widoczniej wyrazić związek między dwiema zmiennemi: z i p zachodzący, korzystném będzie przedstawić go geometrycznie, gdyż tym sposobem uwydatnimy ciągłość funkcyi p.

Z punktu widzenia geometrycznego, ciśnienie p na jedność powierzchni może być wyrażone dwojako: 1) prostemi pionowemi, i 2) prostemi poziomemi.

Przedstawienie ciśnień prostemi pionowemi. Równanie (4) możemy przedstawić pod formą:

$$z + \frac{p}{\Pi} - \frac{p_0}{\Pi} = z_0; \tag{5}$$

albo też:

$$z + \frac{p}{\Pi} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi}; \tag{6}$$

gdzie Π, p_0, z_0 są ilości stałe, mogące być uważane za znane. Zmiennemi są tylko z i p.

Uważajmy najprzód, że to wyrażenie jest *jednorodne* i *pierwszego stopnia*; każdy jego wyraz przedstawia *linje, długości*. Istotnie: z i z_0 są to spółrzędne, oznaczające *wysokość* płaszczyzn poziomych nad płaszczyzną porównania XY; są to więc *długości*; następnie, p lub p_0 oznaczają ciśnienie na jedność powierzchni, czyli siłę odniesioną do jedności powierzchni, lub też, iloraz z pewnej siły P lub P_0 (wypadkowej wszystkich sił działających na jakąkolwiek powierzchnię ab lub $a_0 b_0$) przez powierzchnię; tak że p i p_0 wyrażają:

$$p = \frac{P}{ab}; \qquad p_0 = \frac{P_0}{a_0 b_0};$$

nareszcie Π oznacza ciężar gatunkowy cieczy, czyli ciężar odniesiony do jedności objętości; Π jest więc ilorazem z pewnej siły $\mathfrak{M}$ (wypadkowej wszystkich sił ciężkości działających na pewną objętość $a'b'c'$) przez objętość; tak że właściwe znaczenie Π jest:

$$\Pi = \frac{\mathfrak{M}}{a'b'c'};$$

gdzie a, b; $a_0\, b_0$; a', b', c', są odniesione do tej samej jedności długości co i z lub z_0.

Wypada z tego że:

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{\frac{P}{ab}}{\frac{\mathfrak{M}}{a'b'c'}} = \frac{P \times a'b'c'}{\mathfrak{M} \times ab} = \frac{P}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{a'}{a} \cdot \frac{b'}{b} \cdot c' = \text{liczba} \times c' = \text{długość},$$

nam nieznana, gdyż nie znamy właśnie p.

http://rcin.org.pl

Zobaczylibyśmy tak samo, że $\frac{p_0}{\Pi}$ też będzie wyrażać długość, którą możemy uważać za znaną.

Równanie (6) może więc być przedstawionem geometrycznie linjami prostemi.

Uważajmy zatem płaszczyznę poziomą porównania XY (fig 13), od której liczymy z, i poprowadźmy dwie płaszczyzny: AB i CD, równoległe do niej i odległe od XY na wysokość: z_0 i $z_0 + \frac{p_0}{\Pi}$.

Równanie (6) pod formą:

$$z + \frac{p}{\Pi} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = H' \tag{7}$$

pokazuje nam, że jakikolwiek wzięlibyśmy punkt M (z), gdzie $z = OM$, wyraz $\frac{p}{\Pi}$ przedstawi się odpowiednią wysokością MP, równą *dopełnieniu* wysokości punktu M do *wysokości stałej*: $z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = H'$; tak że zmieniając z od $z = 0$ do $z = H'$, wysokość $\frac{p}{\Pi}$ będzie się zmieniać od $\frac{p}{\Pi} = H'$ do $\frac{p}{\Pi} = 0$; to jest, ciśnienie p na jedność powierzchni będzie się zmieniać od $p = \Pi H'$ do $p = 0$; co przedstawiamy tak:

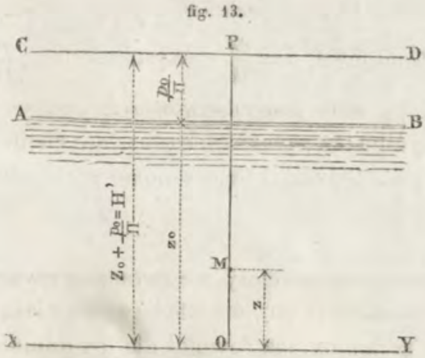
$$0 \mid z \mid H',$$

$$\Pi H' \mid p \mid 0.$$

Biorąc następnie dla z wartości większe od H', będziemy mieć z równania (7):

$$\text{dla } z > H', \ \frac{p}{\Pi} \text{ ze znakiem}: -,$$

fig. 13.



więc p byłoby ilością *odjemną*, czyli że wszystkie punkta cieczy leżące ponad płaszczyzną CD ulegałyby nie *ciśnieniu* (pression), ale *rozciąganiu* (tension); ponieważ ciecz, z natury swojej, nie stawia oporu wszelkiemu usiłowaniu oddzielania jej cząsteczek, zatem cząsteczki cieczy ponad CD nie mogłyby być w *spoczynku*, zostając pod działaniem takiej siły; że zaś, z założenia, ciecz cała znajduje się właśnie w tym stanie, więc żaden jej punkt nie może przejść płaszczyzny CD, będącej w skutek tego granicą wysokości do jakiej ciecz, nie wychodząc ze stanu spoczynku, może być podniesioną ponad płaszczyznę XY.

Ponieważ p jest 0 dla wszystkich punktów płaszczyzny CD, będzie więc ona powierzchnią wolną od wszelkiego ciśnienia, — co może mieć miejsce tylko wtedy, gdy nad tą płaszczyzną panuje najzupełniejsza *próżnia*; dla tej przyczyny płaszczyznę CD można nazwać powierzchnią *absolutnie wolną*.

W naturze, na powierzchni ziemi, nie spotykamy takich płaszczyzn (możemy je otrzymać tylko sztucznym sposobem, jak np. w barometrze): podnosząc bowiem płaszczyznę poziomu do najwyższych sfer ziemię otaczających, zawsze ponad nią istnieć będzie pewna warstwa powietrza, wywierająca pewne ciśnienie. Teoretycznie, przypuszczając że *na wszelkiej wysokości* siła ciężkości ziemi jest *stała*, moglibyśmy podnieść ciecz, w naczyniu z góry odkrytém, aż do ostatnich górnych granic atmosfery, ponad któremi ciecz znalazłaby się pod *ciśnieniem odjemném*.

http://rcin.org.pl

Pod działaniem tej nowej siły, ciecz *padałaby* w kierunku wprost przeciwnym sile ciężkości ziemi. Minimum natężenia ciśnienia odjemnego miałoby miejsce na płaszczyznie takiej jak CD; i gdyby warunki, przy których równanie (7) było wyprowadzoném, miały miejsce na przestrzeni nieskończonej, ciśnienie odjemne wzrastając w miarę oddalania się od płaszczyzny CD, dla $z=\infty$ mielibyśmy $p=-\infty$.

Całkując równanie: $dp=-\Pi dz$, oznaczyliśmy przez p_0 ciśnienie odpowiadające wysokości z_0 pewnego punktu cieczy nad płaszczyzną XY. Mówiąc ogólnie, p_0 może oznaczać ciśnienie w jakimkolwiek punkcie cieczy z_0; i ażeby z równania (4) módz wyznaczyć p dla każdego z, potrzeba żeby wartości z_0 i p_0 były znane à priori. Ponieważ wartość z_0 może być wprost wymierzoną, pozostaje więc tylko znaleźć wartość na p_0: w tym celu najwłaściwiej jest wziąć za z_0 spółrzędnę *górnej powierzchni* cieczy, gdyż wtedy ciśnienie p_0 byłoby równem *samemu tylko* ciśnieniu atmosfery, którego natężenie mogłoby być wskazaném wysokością barometru.

Nadając takie znaczenie ilościom z_0 i p_0, płaszczyzna pozioma AB, przeprowadzona na wysokości z_0 nad płazczyzną porównania XY, będzie płaszczyzną odgraniczającą ciecz od atmosfery. Płaszczyzna ta nosi często nazwę *powierzchni wolnej w powietrzu*, lub poprostu *powierzchni wolnej*, rozumiejąc pod tém nie powierzchnię absolutnie wolną od wszelkiego ciśnienia, jak płaszczyzna CD, lecz tylko powierzchnię *wolną od wszelkiego ciśnienia samej cieczy* (a nie atmosfery).

Natężenie p_0 ciśnienia atmosferycznego, na jedność powierzchni AB, może być, na mocy uwagi § 32, wyrażoném lub zastąpionem równowartym mu ciężarem kolumny samejże rozpatrywanej cieczy; a wysokość tei kolumny wyznaczy się z równania:

$$p_0=\Pi h, \quad \text{zkąd } h=\frac{\Pi}{p_0};$$

szukana wysokość h jest więc odległość między płaszczyznami AB i CD; zatem można powiedzieć że: *górna powierzchnia cieczy, pod ciśnieniem atmosferyczném* p_0, *może być teoretycznie uważana jako absolutnie wolna od wszelkiego na nią ciśnienia, z warunkiem, abyśmy podnieśli wysokość cieczy obserwowaną w rzeczywistości, o wysokość idealną tejże cieczy, równą ilości* $h=\frac{p_0}{\Pi}$. Wysokość ta $\frac{p_0}{\Pi}$ zowie się, jak widzieliśmy wyżej, *wysokością należną ciśnieniu* p_0, albo jeszcze *wysokością piezometryczną*, (πιεσνς ciśnienie) należną ciśnieniu atmosferycznemu p_0, albo też *wysokością wyrażającą* ciśnienie p_0 (hauteur représentative de la pression p_0); jej wartość, dla jednego i tego samego p_0, będzie zależeć od wartości Π, i tém będzie większa, im Π będzie mniejsze.

34. W zastosowaniach, przy obliczaniu ciśnienia w jakimkolwiek punkcie cieczy, nie zwraca się uwagi na ciśnienie dodatkowe p_0, wywierane na ten punkt przez atmosferę (§ 30), tak dla łatwości z jaką, w każdym danym razie, możemy je wyznaczyć i wprowadzić w rachunek, jak również dla uwolnienia się od powtarzania ilości wchodzącej *stale* dla wszystkich punktów; nadto wyraz ten znika sam przez się, gdy idzie o znalezienie różnicy ciśnień dwóch punktów; przypuszcza się więc dla uproszczenia, że *punkta cieczy w spoczynku są wolne od wszelkiego ciśnienia, innego jak to które powstaje z działania otaczającej ją cieczy*.

Na mocy tej ugody, oznaczając przez H wysokość powierzchni spoczynku cieczy nad pewną płaszczyzną porównania XY, będziemy mieć dla $z=\mathrm{H}$, $p=0$; zkąd, z równania (2) § 31, znajdujemy $C=\rho g\mathrm{H}=\Pi\mathrm{H}$, tak że ciśnienie w jakimkolwiek punkcie cieczy wyrazi się równaniem:

$$p=\Pi(\mathrm{H}-z),$$

http://rcin.org.pl

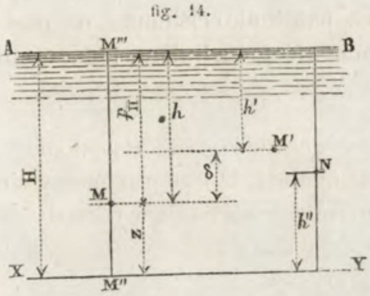
które przedstawiamy pod formą:

(1) $$z+\frac{p}{\Pi}=\mathrm{H}.$$

Licząc wysokości z punktów wgórę od płaszczyzny XY, widzimy że ciśnienie się *zmniejsza* w miarę *wzniesienia się* punktu, tak że (fig 14) $p=\Pi\mathrm{H}$ dla $z=o$, co daje punkt M'',

$$p=o \text{ dla } z=\mathrm{H}, \text{ dla punktu } \mathrm{M}''' ;$$

fig. 14.



to jest, ciśnienie będzie tém *większe*, im punkt będzie leżeć *dalej* od powierzchni wolnej AB. Naturalném więc jest liczyć wysokości punktów wdół od AB, co ułatwi wyznaczenie ciśnienia; powiedzieć bowiem, że wysokość punktu M (liczona od płaszczyzny AB, czyli głębokość tego punktu) jest np. h, jest to napisać:

$$h+z=\mathrm{H},$$

zkąd, uważając że równanie (1) zawsze musi być sprawdzone, można pisać odrazu:

$$\frac{p}{\Pi}=h;$$

więc mamy natychmiast:

(2) $$p=\Pi h.$$

Przy takich warunkach niema potrzeby wiedzieć, jaką liczebną wartość ma ilość H; wtedy gdy przeciwnie, gdyby wysokości punktów były liczone od płaszczyzny XY, i gdyby np. wysokość punktu od tej ostatniej płaszczyzny była h'', musielibyśmy, dla znalezienia ciśnienia p'' w tym punkcie, użyć równania (1), z którego otrzymujemy:

$$\frac{p''}{\Pi}=\mathrm{H}-h'', \quad \text{zkąd dopiero} \quad p''=(\mathrm{H}-h'')\,\Pi,$$

co wymaga znajomości wartości H.

Zgodziwszy się więc nazywać wysokością punktu M jego odległość h od powierzchni wolnej AB cieczy, wyrażenie (2) daje nam następującą praktyczną regułę, która, prócz łatwości w zastosowaniu, wyraża się w sposób prosty i piękny: *mając wysokość punktu cieczy, znajdziemy ciśnienie, na jedność powierzchni, wyrażone tą wysokością, z iloczynu wysokości przez ciężar gatunkowy cieczy*; otrzymany iloczyn będzie ciężarem kolumny cieczy, mającej 1[ość] powierzchni za podstawę, a h za wysokość.

Mając dane wysokości h i h' dwóch punktów cieczy N i M', odpowiednie im ciśnienia wyznaczą się z wyrażeń:

$$p=\Pi h \text{ i } p'=\Pi h',$$

zkąd:

$$p-p'=\Pi(h-h')=\Pi\delta,$$

oznaczając $h-h'=\delta$; a następnie:

(3) $$\frac{p}{\Pi}=\frac{p'}{\Pi}+\delta;$$

możemy więc powiedzieć, że *dla cieczy ważkiej w spoczynku, piezometryczna wysokość dolnego punktu jest równą piezometrycznej wysokości punktu górnego, powiększonej pionową odległością tych dwóch punktów.*

http://rcin.org.pl

Jeżeli ciecz jaką rozpatrujemy jest woda, wtedy każdy z wyrazów: $\frac{p}{\Pi}$ lub $\frac{p'}{\Pi}$ przedstawia wysokość kolumny wody, ciężar której wywiera w stanie *statycznym* na podstawę kolumny (równą naprzykład 1 decymetrowi kwadratowemu) całkowite ciśnienie równe p lub p' kilogramów.

Zauważmy jeszcze, że górna powierzchnia cieczy w spoczynku AB zowie się często, przy zastosowaniach hydraulicznych, *płaszczyzną naporu* (plan de charge) lub też płaszczyznę nacisku.

Z tego co poprzedza widzimy, że ponieważ ciśnienie w jakimkolwiek punkcie cieczy może być wyrażonem *wysokością*, i że długość prostej pionowej daje wprost natężenie ciśnienia na płaszczyznę poziomą jakąkolwiek, — sposób geometrycznego przedstawienia ciśnienia linjami pionowemi przystoi najwłaściwiej *ścianom poziomym*.

35. Przedstawienie ciśnień prostemi poziomemi. Przedstawienie ciśnień prostemi poziomemi nie różni się w gruncie od tego jakieśmy rozpatrywali wyżej; jednak metoda, którą teraz mamy się zająć, ma tę niezaprzeczalną zaletę, że przedstawia w sposób *ciągły* zmianę ciśnienia w rozmaitych punktach cieczy, to jest daje nam *linję ciśnienia*.

Wróćmy do równania (6) pod §. 33, które się przedstawia pod formą:

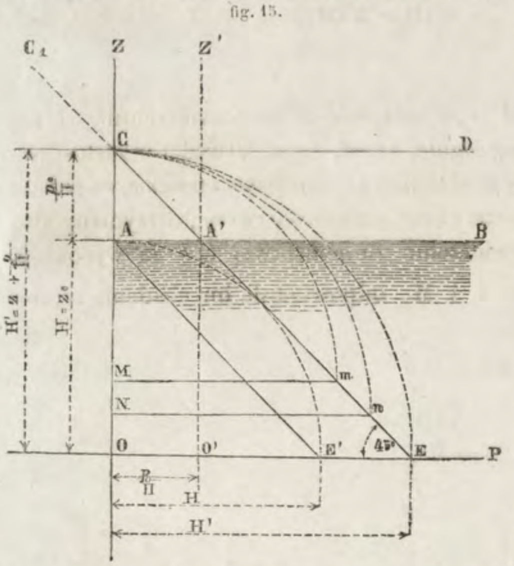
$$z + \frac{p}{\Pi} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi},$$

gdzie Π, z_0 i p_0 możemy uważać za ilości nam znane. Kładąc $z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = H'$, otrzymujemy:

(1) $$z + \frac{p}{\Pi} = H'.$$

Równanie (1) możemy uważać za równanie linji prostej, odniesionej do dwóch prostopadłych do siebie osi OZ i OP (fig. 15); rozmaite wartości z będziemy liczyć podług osi OZ, zaczynając od punktu O, dla którego kładziemy $z = 0$, i przypuszczamy że będzie on najniższym punktem cieczy; odpowiednie wartości na $\frac{p}{\Pi}$ będziemy wystawiać równolegle do osi OP, i na prawo od OZ.

fig. 15.



Aby wyznaczyć naszą prostę, szukajmy dwóch jej punktów. Równanie (1) daje:

dla $z = H' = OC$ . . . . $\frac{p}{\Pi} = 0$, zatem $p = 0$;

dla $z = 0$ . . . . . . $\frac{p}{\Pi} = H'$.

Szukana prosta przecina więc oś OZ na wysokości H', to jest, że dla wszystkich punktów C cieczy, mających tę wysokość, czyli leżących na płaszczyznie poziomej CD, ciśnienie p jest $= 0$.

Ten rezultat jest nam znany z poprzedniego; płaszczyzna CD jest płaszczyzną wolną w *próżni*. Zniżając się od punktu C do punktu O, dla którego $z = 0$, otrzymujemy na $\frac{p}{\Pi}$ wartość $= H'$;

http://rcin.org.pl

więc jeżeli dla przedstawienia rozmaitych wartości tak dla z, jak również i dla $\frac{p}{\Pi}$, weźmiemy jednę skalę, długość OE, wyrażająca wartość $\frac{p}{\Pi}$ dla $z=0$, będzie, na rysunku, równą wysokości OC; prosta CE będzie więc nachylona pod 45°. Punkt C będzie ostatnim punktem tej prostej; inaczej mówiąc, nie przejdzie ona na lewą stronę osi OZ, np. od C do C_1, gdyż, dla $z > H'$, równanie (1) daje na p ilość odjemną, co jak już widzieliśmy, miejsca mieć nie może.

Prosta CE będzie więc *linja ciśnienia*; rozmaite jej spółrzędne *poziome*, to jest linje poprowadzone równolegle do osi OP i zawarte między OC i CE, będą to rozmaite wartości $\frac{p}{\Pi}$, odpowiadające różnym wartościom z; czyli poziome te, jak Mm, Nn,... będą *prostemi wyrażającemi ciśnienie*, na jedność powierzchni, w punktach mających za wysokość OM, ON..., to jest leżących w płaszczyznach poziomych poprowadzonych przez punkta M, N,...; tak że jeżeli będzie nam daną *długość* jakiejkolwiek z tych spółrzędnych poziomych, natychmiast otrzymamy ciśnienie w odpowiednim jej punkcie, mnożąc tę długość przez ciężar gatunkowy właściwy rozpatrywanej cieczy.

Jak widzimy, system przedstawiania ciśnienia prostemi *poziomemi*, w razie *jeżeli skala na* z i $\frac{p}{\Pi}$ *jest jedna i ta sama*, niczém się nie różni od systemu *pionowego*; skoro bowiem znamy *długość poziomej* dla jakiegokolwiek punktu cieczy, *wysokość* jego liczona wdół od płaszczyzny wolnej CD jest nam znaną; tak że *spółrzędna pozioma jest tylko kładem, na płaszczyznę poziomą, wysokości wyrażającej ciśnienie w danym punkcie cieczy*.

Jeżeli skale na z i na $\frac{p}{\Pi}$ są różne, kąt COE nie będzie równym 45°; długości poziome nie będą równe, ale tylko proporcyonalne odpowiednim im wysokościom, liczonym wdół od CD.

Mówiąc ogólnie, jakiekolwiekby były dwie skale, według których chcielibyśmy przedstawić na rysunku rozmaite wartości na z i $\frac{p}{\Pi}$, to jest, jakiekolwiekby było nachylenie prostej CE, długość jej spółrzędnych poziomych zawsze będzie *propocyonalna* do ciśnienia, wywieranego na punkt z którego ta pozioma wychodzi; biorąc tę długość z rysunku, i sprowadzając ją, za pomocą odpowiedniej skali, do jej rzeczywistej długości l, będziemy mieli zawsze: $p=l\Pi$.

36. Ponieważ, w zastosowaniach, przy obliczaniu ciśnienia w jakimkolwiek punkcie cieczy nie zwraca się uwagi na ciśnienie atmosferyczne, to jest uważa się że $p_0=0$, wysokość więc $OC=H'=z_0+\frac{p_0}{\Pi}$ zamieni się na $OA=H=z$; równanie (4) przyjmie formę: $z+\frac{p}{\Pi}=H=z_0$, a *powierzchnia wolna* będzie teraz płaszczyzna AB, przeprowadzona na wysokości $z=H$, gdyż dla wszystkich jej punktów będziemy mieli $p=0$.

Odnosząc z i $\frac{p}{\Pi}$ do jednej i tej samej skali, — co zwykle jest używanem, — *linja ciśnienia* będzie teraz prosta AE' równoległa do CE, albo też prosta A'E, z warunkiem, abyśmy za *długości wyrażające ciśnienia* uważali długości jej spółrzędnych poziomych tylko do nowej osi pionowej O'Z', odległej od dawnej osi OZ na długość $AA'=AC=\frac{p_0}{\Pi}$. Dodając do tych spółrzędnych ilość stałą $\frac{p_0}{\Pi}$, otrzymalibyśmy *rzeczywiste* całkowite ciśnienie, równe summie dwóch ciśnień: cieczy i atmosfery.

http://rcin.org.pl

Wypada jednak powiedzieć, że biorąc nawet w uwagę dodatkowe ciśnienie atmosferyczne, wywierane na rozmaite punkta cieczy, *ograniczonej z góry płaszczyzną* AB, *ostatnia* spółrzędna pozioma prostej A'E, mająca sens *rzeczywisty*, byłaby to długość A'A; tak że część A'C linji ciśnienia CA powinna być odrzuconą, czyli, że zamiast trójkąta COE powinniśmy uważać trapez AA'EO; gdyż spółrzędne poziome części A'C wyrażałyby ciśnienia odpowiednich im punktów leżących na pionowej AC, gdyby punkta te należały do cieczy, co nie jest.

Równanie cieczy ważkich: $dp = -\Pi\, dz$ daje nam, *analitycznie*, punkta cieczy aż do CD (gdzie absolutnie $p = 0$) dla tego, że w równaniu ogólném:

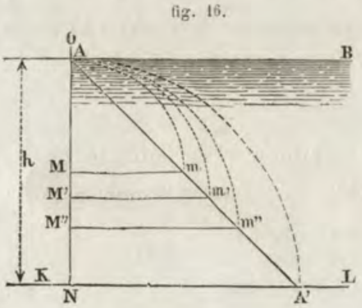
$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

przypuściliśmy, iż *jedyna* siła zewnętrzna, na ciecz działająca, jest tylko siła ciężkości; inaczej, że ciecz zostaje w *próżni*; wtedy gdy, w zwyczajnych warunkach rzeczywistości, działa na nią inna jeszcze zewnętrzna siła—atmosfera: rezultat, do jakiego przychodzimy w skutek naszego przypuszczenia, dowodzi tylko zasobu analizy, która, rozwiązując zadanie, zwraca naszą uwagę na niezupełność jego danych, i przyprowadza nas do pojęć idealnych, właściwych naturze wszelkiego rachunku. Tak więc w naszém zadaniu, na wstępie którego nie było żadnej mowy o ciśnieniu atmosfery, analiza zastąpiła takowe ciśnieniem cieczy Π, podnosząc jej wysokość *rzeczywistą*, uważaną w daném miejscu, o wysokość *idealną* $\frac{p_0}{\Pi}$, równowartą, co do jej ciśnienia, ciśnieniu atmosferycznemu w tém miejscu.

W streszczeniu, chcąc wyrazić graficznie, w sposób ciągły, zmianę ciśnienia w rozmaitych punktach cieczy, używa się w zastosowaniach następującego wykreślenia:

Mając (fig. 16) h wysokość cieczy ponad pewną poziomą KL, wyprowadzamy do tej poziomej prostopadłę NO, na której bierzemy długość $NA = h$, podług pewnej skali, np. $\frac{1}{n}$; przenosimy następnie punkt A do punktu A' i łączymy te dwa punkta prostą AA', która będzie szukaną *linją ciśnienia*. Spółrzędne poziome Mm, M'm', M''m'',... tej linji będą przedstawiać *długości* lub *wysokości* wyrażające ciśnienie, na jedność powierzchni, w punktach im odpowiednich (jak również we wszystkich punktach płaszczyzn poziomych przez nie poprowadzonych), uważanych na wysokości NA. Długości te będą *proporcyonalne* do rzeczywistych ciśnień wywieranych na te punkta. Ażeby mieć ciśnienia *rzeczywiste*, dosyć jest każdą długość Mm, wziętą z rysunku, przywrócić do jej naturalnej długości, to jest pomnożyć ją przez n, i otrzymany ztąd iloczyn pomnożyć przez Π, — ciężar gatunkowy rozpatrywanej cieczy. Jeśli więc rysunek jest wykonanym na skalę $\frac{1}{n}$, ciśnienie, na jedność powierzchni, w punkcie M wyrazi się przez:

fig. 16.



$$p = \overline{Mm} \times n \times \Pi.$$

Sposób ten przedstawienia ciśnienia prostemi *poziomemi* przystoi szczególniej ścianom *pionowym*; zastosowuje się on często, dla uwydatnienia zmiany ciśnienia w rozmaitych punktach, do murów podpierających (murs de soutenement, digues), rezerwoarów czyli zbiorników, drzwi śluzowych (portes d'écluse) i t. p.

http://rcin.org.pl

ROZDZIAŁ I.

TEORYA CIŚNIENIA CIECZY NA ŚCIANY PŁASKIE.

STRESZCZENIE: Ściany płaskie: poziome, pochyłe, pionowe. Metoda analityczna szukania wypadkowego ciśnienia na te ściany i środka ciśnienia. Dyskussya wzorów dających ciśnienie i środek ciśnienia. — Odpowiedność środka ciśnienia, środka wahania i środka uderzenia. — Zastosowanie ogólnych wzorów do przypadków szczególnych. — Rozmaite przykłady. — Metoda geometryczna szukania ciśnienia i środka ciśnienia — Przykłady. — Porównanie teoryi hydrostatycznego ciśnienia z teoryą ciśnienia statycznego.

37. Cząsteczki cieczy, będąc niezależne jedne od drugich i posiadając, w skutek tego, nadzwyczaj wielką łatwość w zmienianiu wzajemnego ich położenia, nie mogą mieć, same przez się, żadnej formy *stałej*. W pewnej massie cieczy oddanej *samej sobie*, to jest, wystawionej na działanie siły ciężkości, każda cząsteczka, będąc wolną, dąży do zajęcia jak najbliższego położenia względem punktu który ją przyciąga; tak że *padając* na powierzchnię ziemi, rozpościerają się one na niej, tworząc pewną warstwę prostopadłą do kierunku siły ciężkości. Wtedy gdy ciała *stałe* zostawione samym sobie, padając na ziemię, lub na inną powierzchnię stającą im na drodze, zachowują zawsze jeden i ten sam kształt, czyli niezmienność wzajemnego położenia ich cząsteczek, — ciała *ciekłe* tracą natychmiast pierwotny zarys, jaki myślą możemy im nadać; dla nadania więc cieczy formy *stałej*, czyli dla przechowania cieczy, musimy ją zawierać w naczynia, to jest, otaczać ją ciałami *stałemi* (ścianami). Ciecz pod działaniem siły ciężkości będzie wywierać na ściany naczynia pewne ciśnienie; dla zapewnienia wytrzymałości ścian, potrzeba umieć obrachować całkowite natężenie sił na nie działających, by módz nadać ścianom odpowiednie temu natężeniu wymiary. Zadaniem więc naszém jest wyznaczenie wypadkowego ciśnienia na ściany naczynia.

Ściany naczynia, w którem ciecz może być zawartą, są dwojakiego rodzaju: I) *Ściany płaskie*; II), *ściany krzywe*.

Rozpatrzmy najprzód *ściany płaskie*.

Ściany płaskie mogą być rozmaicie położone względem pionowej i, stosownie do ich pozycyi wytrzymywać mniejsze lub większe ciśnienie. Ściany te mogą być podzielone na trzy kategorye:

Ściany płaskie poziome,
« « pochyłe,
« « pionowe.

Ściśle mówiąc, moglibyśmy się ograniczyć rozpatrywaniem ogólnego przypadku ścian pochyłych, to jest czyniących z poziomem pewien kąt, zawarty między 0^0 i 90^0; jednak kwestya ścian poziomych, chociaż prosta, jest zarazem tak ważna, że rozpatrujemy ją zosobna.

38. Sciany poziome. Przypuszczamy, jak poprzednio, że rozpatrujemy ciecz *jednorodną* (to jest ρ, a zatem Π stałe), i że górna powierzchnia cieczy jest *wolną* od wszelkiego na nią ciśnienia

http://rcin.org.pl

(czyli że dla wszystkich jej punktów $p=0$). Przejście od tego przypuszczenia do warunków rzeczywistości nie może przedstawiać najmniejszej trudności.

Niech więc będzie: H wysokość wolnej powierzchni cieczy nad ścianą poziomą,

Π ciężar gatunkowy uważanej cieczy,

Ω powierzchnia ściany poziomej, której kontur (zarys) jest zupełnie dowolny; może on być jakąkolwiek krzywą zamkniętą, lub wielokątem jakimkolwiek;

p ciśnienie, na jedność powierzchni, w jakimkolwiek punkcie ściany,

P ciśnienie wypadkowe na całą powierzchnię Ω tej ściany.

Kwestye, jakie mamy do rozwiązania, są następujące:

1° Znalezienie natężenia ciśnienia wypadkowego na ścianę;

2° Znalezienie na ścianie punktu przyczepienia tej wypadkowej, to jest środka ciśnienia, czyli punktu w którym wypadkowa przebija ścianę.

1° Ciśnienie wypadkowe. Ponieważ wiemy, że ciśnienie na jedność powierzchni jest, co do natężenia — jedno i to samo dla wszystkich punktów znajdujących się na jednej i tej samej płaszczyźnie poziomej, a co do kierunku — normalne do tej płaszczyzny, widocznem jest, że ciśnienie całkowite, wywierane przez ciecz na ścianę Ω, będzie normalne i wyrazi się przez:

(1) $$P = p\Omega.$$

Otoż, na mocy §. 34 mamy:

$$p = \Pi H,$$

więc możemy napisać:

(2) $$P = \Pi H \Omega = \Pi \times \text{objętość } (\Omega H).$$

Ponieważ p oznacza ciśnienie w jakimkolwiek punkcie ściany, możemy więc uważać p jako ciśnienie wywierane w środku ciężkości powierzchni Ω, i wzór (1) wyrazić tak:

Ciśnienie całkowite, wywierane przez ciecz na ścianę płaską poziomą, równém jest iloczynowi z powierzchni tej ściany przez ciśnienie na jedność powierzchni wywierane w jej środku ciężkości.

Wzór zaś (2) może być wysłowiony w sposób następujący:

Ciśnienie całkowite, wywierane przez ciecz na ścianę płaską poziomą, ma za miarę, czyli jest równém ciężarowi cieczy zawartej w kolumnie pionowej, mającej za podstawę tę ścianę, a za wysokość — wysokość cieczy nad tą ścianą; lub jeszcze, co wyjdzie na jedno, — odległość środka ciężkości tej ściany od powierzchni wolnej.

Gdybyśmy teraz zechcieli wziąć w uwagę ciśnienie atmosferyczne p_0, wywierane na górną powierzchnię cieczy, i przekazane całkowicie na wszystkie punkta cieczy i na ścianę Ω, musielibyśmy zastąpić w powyższych wzorach p przez $p_0 + p$, i otrzymalibyśmy najprzód:

(1') $$\mathfrak{P} = (p_0 + p)\,\Omega;$$

następnie, oznaczając piezometryczną wysokość atmosfery przez H_0, to jest kładąc:

$$\frac{p_0}{\Pi} = H_0$$

http://rcin.org.pl

mielibyśmy:

$$(2') \qquad \mathfrak{P} = \Pi\,(H_0 + H)\,\Omega = \Pi \times \text{objętość } (\Omega\,(H_0 + H))\;;$$

wysłowienie tych wzorów (1') i (2') opuszczamy.

2° Środek ciśnienia. Znając natężenie całkowitego ciśnienia na ścianę Ω, szukajmy teraz na ścianie punktu przyczepienia tego ciśnienia.

Ponieważ materya cieczy na ścianie Ω jest ciągłą, a ciśnienia składowe, we wszystkich punktach ściany, są do niej normalne, i stałego natężenia — czyli że te ciśnienia są jednostajnie ułożone (réparties) na całej powierzchni ściany, — więc wypadkowa wszystkich tych sił, do siebie równoległych, będzie przechodzić przez środek ciężkości ściany; a zatem powiadamy: *dla ściany płaskiej poziomej środek jej ciśnienia znajduje się w jej środku ciężkości.*

Uwaga. Wiemy, że wypadkowa pewnego systemu sił jest siłą *idealną* równowartą, *tylko z punktu widzenia analitycznego*, całemu zbiorowi sił uważanych zosobna; punkt jej przyczepienia jest również punktem abstrakcyjnym: w *rzeczywistości*, siły są rozłożone (réparties) na rozmaite punkta ciała, i *fizyczna* wytrzymałość materyalnego punktu (reakcya) może nie być zachwianą tylko wtedy, gdy natężenie siły na niego działającej nie przechodzi pewnej granicy, która byłaby prawie zawsze prześcigniętą, gdyby natężenie siły wypadkowej było rzeczywiście przyczepione do jednego tylko punktu.

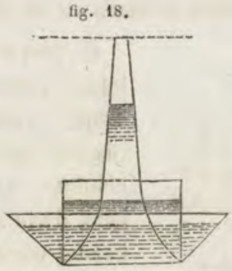
39. Wzór (2) przyprowadza do wniosków bardzo ciekawych: pokazuje on że całkowite ciśnienie na ścianę poziomą zależy jedynie od Ω i H to jest: a) od liczebnej *wartości powierzchni* tej ściany, jakikolwiek zresztą byłby jej kontur; b) od *wysokości* cieczy ponad tą ścianą. Ciśnienie to jest wcale niezależne od formy i położenia innych ścian naczynia, mającego ścianę Ω za podstawę; inaczej mówiąc, *forma cieczy* jest rzeczą obojętną, i w każdym razie ściana pozioma jest ciśnioną tak, jak gdyby naczynie miało kształt walca pionowego na niej wystawionego. Wypada ztąd:

1° Jedno i to samo *ciśnienie* może być wywarte rozmaitym *ciężarem* cieczy (fig 17);

2° Jeden i ten sam *ciężar* cieczy (np. jeden jej kilogram) może wywrzeć rozmaite *ciśnienie* (fig. 18).

fig. 17.

fig. 18.

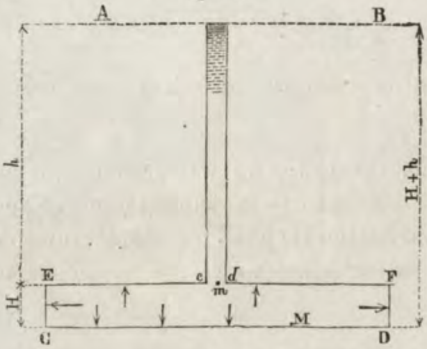


Na fig. 17 ciecz, zawarta w trzech rozmaitych naczyniach, mająca tylko tę samą wysokość H, i jednakową powierzchnię Ω ściany poziomej, będzie wywierać na tę ścianę jedno i to samo ciśnienie ΠΩH, które, jak widzimy, może być albo równe, albo większe lub mniejsze od rzeczywistego ciężaru cieczy, jakibyśmy znalezli za pomocą wagi. To właśnie stanowi tak zwany *paradoks hydrostatyczny*, który rozpatrzymy bliżej przy *ścianach krzywych*, gdzie zobaczymy, że *ciężar* cieczy jest *wypadkową pionową* wszystkich *ciśnień*, wywieranych na *wszystkie* ściany naczynia. Waga daje nam właśnie natężenie tej *wypadkowej* które, widocznie, nie możemy brać, w przypadku ogolnym ścian, za natężenie ciśnienia wywieranego na samą tylko *jednę* ścianę poziomą.

http://rcin.org.pl

Z fig. 18 wnieść można, że bardzo małym ciężarem cieczy możemy wywrzeć ogromne ciśnienie, byleby odległość ciśnionej ściany od powierzchni wolnej była dostatecznie wielką. I tak np. (fig. 19), mając naczynie napełnione wodą i ze wszystkich stron zakryte, jeżeli do górnej jego ściany EF przystosujemy rurkę, o przecięciu cd, bardzo małém stosunkowo do CD, a mającą tylko znaczną wysokość h, i jeżeli tę rurkę napełnimy wodą aż do AB, ciśnienie, na jedność powierzchni, w punkcie M będzie $= \Pi(\mathrm{H}+h)$; otoż, ciśnienie punktu M powtórzy się jeszcze i we wszystkich innych punktach ściany poziomej CD, tak że jeżeli powierzchnię tej ściany nazwiemy Ω, wypadkowe ciśnienie na nią będzie :

fig. 19.



$$\Pi\,(\mathrm{H}+h)\,\Omega,$$

to jest, równe ciężarowi cieczy, gdyby takowa zawartą była w objętości mającej ścianę CD za podstawę, a $(\mathrm{H}+h)$ za wysokość ; inaczej mówiąc, kolumna cieczy : $cd \times h$ zupełnie zastępuje tutaj kolumnę $\mathrm{CD} \times h$.

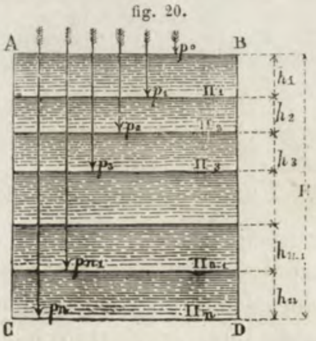
Biorąc wysokość h dostatecznie wielką, możemy na ścianę CD wywrzeć tak znaczne ciśnienie, że nie będzie ona zdolna wytrzymać go, to jest, wywiązać równej mu reakcyi. Ponieważ ciśnienie w punkcie m powtarza się we wszystkich punktach ściany EF z témże samém natężeniem, ściana EF może się znaleźć, przy dostatecznej wielkosci h, w warunkach ściany CD; tak że jeżeli te ciśnienia prześcigną wytrzymałość ścian naczynia, naczynie pęknie. To nam wyjaśnia przyczynę, dla jakiej naczynie znacznych wymiarów może być rozerwaném kilkoma kilogramami wody.

40. Przy wyprowadzeniu wzoru (2) § 38, przypuszczaliśmy ciecz *jednorodną* na całej wysokości H; uważajmy teraz ciecz *niejednorodną*, to jest kiedy Π nie jest stałe dla wszystkich jej punktów. Należy tu odróżnić dwa przypadki :

1° kiedy ciecz składa się z różnych cieczy, mających gęstość rozmaitą, ale stałą we wszystkich punktach jednej i tej samej cieczy, — co ma miejsce dla cieczy jednorodnych złożonych.

2° kiedy gęstość cieczy zmienia się w sposób ciągły, jak np. dla gazów.

fig. 20.



W pierwszym przypadku, wiemy z § 27, że powierzchnie, oddzielające jednę ciecz od drugiej, są płaszczyzny poziome; tak że oznaczając rozmaite wysokości warstw jednorodnych cieczy przez: (fig 20) $h_1, h_2, \ldots h_n$; ich gatunkowy ciężar przez $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$, ciśnienie na jedność powierzchni, w punktach płaszczyzny przedzielającej dwie sąsiednie warstwy, przez $p_1, p_2, \ldots p_n$, i zastosowując do każdej warstwy ogólny wzór :

$$p = p_0 + \Pi h,$$

będziemy mieli na ciśnienia $p_1, p_2, \ldots p_n$ wyrażenia :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Pi_1 h_1 \\ p_2 &= p_1 + \Pi_2 h_2 \\ p_3 &= p_2 + \Pi_3 h_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= p_{n-1} + \Pi_n h_n ; \end{aligned}$$

http://rcin.org.pl

zkąd, po dodaniu, otrzymujemy:

$$p_n = p_0 + \Pi_1 h_1 + \Pi_2 h_2 + \ldots + \Pi_n h_n;$$

czyli:

$$p_n = p_0 + \Sigma \Pi h;$$

albo jeszcze:

$$p_n = \Sigma \Pi h,$$

przypuszczając że AB jest powierzchnią wolną. Otóż p_n jest ciśnieniem, na jedność powierzchni, w jednym jakimkolwiek punkcie dna poziomego CD; jeśli jego powierzchnię oznaczymy przez Ω, ciśnienie wypadkowe na całe to dno wyrazi się tak:

$$P = p_n \Omega = \Omega \Sigma \Pi h = \Sigma \Pi \Omega h = \Pi_1 \Omega h_1 + \Pi_2 \Omega h_2 + \ldots + \Pi_n \Omega h_n.$$

Widzimy, że ciśnienie wypadkowe na dno naczynia wcale nie zależy od formy ścian naczynia, gdyż wyraża się ono przez powierzchnię tylko samego dna.

W przypadku cieczy jednorodnych złożonych, $h_1, h_2, \ldots h_n$ są ilości skończone. Gdybyśmy teraz zechcieli uważać ciecz, której gęstość zmienia się z każdym jej punktem, moglibyśmy jeszcze zastosować ten wzór, uważając w nim $h_1, h_2, \ldots h_n$ za ilości nieskończenie małe, to jest, podzieliwszy całą wysokość cieczy na warstwy poziome nieskończenie cienkie; co właśnie stosuje się do gazów.

41. Sciany pochyłe. Rozpatrzmy teraz przypadek *ogólny*, kiedy ściana płaska naczynia jest *pochyłą* do poziomu, i kiedy jej kształt jest jakikolwiek, ale nam znany. Przypuszczamy zawsze że ciecz jest jednorodna, i że jej powierzchnia spoczynku jest wolną od wszelkiego zewnętrznego ciśnienia.

Kwestye, jakie mamy do rozwiązania, są też same co i w pierwszym przypadku, to jest:

1° Znalezienie natężenia ciśnienia wypadkowego na ścianę;

2° Wyznaczenie na niej środka ciśnienia.

1°. Ciśnienie wypadkowe. Ponieważ wiemy, że ciśnienia indywidualne w rozmaitych punktach ściany są do niej normalne, zatem do siebie równoległe, będą one miały *jednę wypadkowę*, której kierunek również będzie *normalnym* do ściany, a jej natężenie będzie równém summie ciśnień wywieranych we wszystkich punktach ściany. Aby wyrazić analitycznie wartość tej wypadkowej, moglibyśmy cały system odnieść do zwyczajnych trzech prostokątnych osi; ale w naszym przypadku dogodniejszém będzie rozpatrywanie innych spółrzędnych.

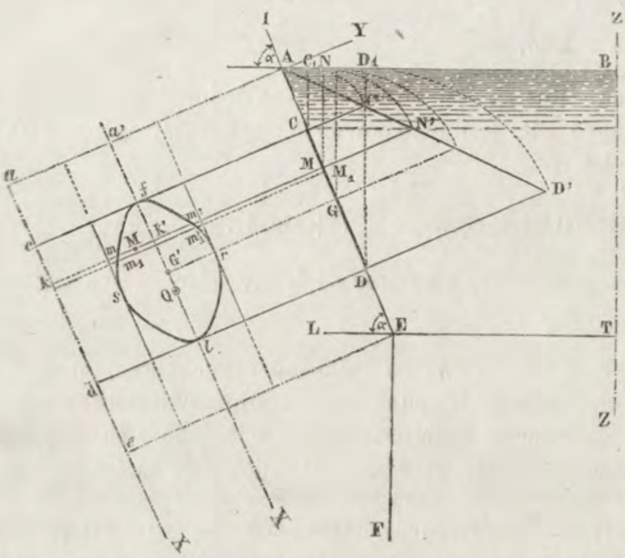
Niech α oznacza kąt, jaki płaszczyzna ściany czyni z płaszczyzną poziomą, i niech EF (fig 21) będzie jej poziomym śladem. Płaszczyzna przeprowadzona prostopadle do prostej EF będzie zarazem płaszczyzną pionową rzutów (za którą bierzemy płaszczyznę papieru) i płaszczyzna prostopadłą do płaszczyzny naszej ściany. Więc profilem ściany na płaszczyznę papieru będzie linja nachylona do LI pod kątem $= \alpha$ i mająca położenie EI, jeśli kąt $\alpha = \mathrm{LEI}$ jest liczony od lewej strony ku prawej. Niech nadto, AB oznacza wolną powierzchnię cieczy, od której liczymy wysokości rozmaitych punktów, podług osi ZZ, i niech CD będzie rzutem danej nam na ścianie AE zamkniętej figury, zawartej między dwiema poziomemi, rzucającemi się w punktach C i D.

Dla jasności połóżmy płaszczyznę ściany naczynia na płaszczyznę pionową rzutów, (to jest na płaszczyznę papieru) obracając takową na 90° około jej śladu EI; pozioma rzucająca się w punkcie A, i oznaczająca przecięcie płaszczyzny ściany z powierzchnią wolną cieczy AB, przedstawi się na kładzie prostą Aa; poziome C i D, ograniczające kontur CD, przyjmą położenia: Cc i Dd. Niech będzie $\varphi(x, y) = 0$ równaniem linji konturu *frlsf* odniesionego do dwóch prostokątnych osi X i Y, wziętych

http://rcin.org.pl

dowolnie. Znając formę tej krzywej, znaną nam będzie powierzchnia nią zawarta; zadaniem naszém jest znalezienie wypadkowego ciśnienia na tę powierzchnię.

fig. 21.



Wiemy, że szukana wypadkowa będzie summą ciśnień, wywieranych na wszystkie elementa powierzchni; szukajmy więc wyrażenia na ciśnienie elementarne.

Uważajmy jakikolwiek punkt M, wzięty na powierzchni CD i znajdujący się na wysokości $MN = z$; ciśnienie p w tym punkcie, na jedność powierzchni, będzie natychmiast nam znane, gdyż natężenie jego wyrazi się iloczynem: $\Pi z = p$, a kierunek będzie MN', normalny do AE; wiemy nadto, że ciśnienie będzie jedno i to samo we wszystkich punktach poziomej rzucającej się w punkcie M, i przedstawionej na kładzie prostą mm'; więc przypuszczając, że to samo ciśnienie p powtórzy się jeszcze we wszystkich punktach, zawartych między poziomemi M i M_1, odległemi od siebie na ilość nieskończenie małą MM_1, ciśnienie na taśmę powierzchni $d\omega$, zawartą między mm' i m_1m', wyrazi się iloczynem: $\Pi z d\omega$ (gdzie z może być uważane za odległość, od powierzchni wolnej AB, środka ciężkości powierzchni $d\omega$), a ciśnienie wypadkowe na całą powierzchnię CD, czyli na $frlsf$, oznaczy się przez: $P = \Sigma \Pi z d\omega$, i będzie jak wiemy normalne do ściany CD.

Wyraźmy teraz z i $d\omega$ w funkcyi spółrzędnych danego nam konturu: $\varphi(x, y) = 0$.

Oznaczając odciętę punktu M, to jest długość $AM = ak$, przez x, mamy:

$$z = x \operatorname{wst} \alpha;$$

co się zaś tyczy wyrażenia $d\omega$ uważajmy, że możemy napisać:

$$d\omega = mm' \times dx;$$

otoż, wartość na mm', to jest na szerokość powierzchni w danym punkcie M, wyznaczymy z równania konturu (*);

(*) Ponieważ kontur: $\varphi(x,y) = o \ldots (1)$ powierzchni CD jest linją zamkniętą, dla każdej wartości nadanej na x, będziemy mieli z równania (1) *najmniej* dwie wartości na y, np. y' i y''; a wogólności, ich liczbę *parzystą*; tak że przy położeniu osi aX wskazanem na fig. 21, mamy:

$$\text{dla } x = ak, \quad y' = km', \quad y'' = km; \qquad \text{więc } mm' = y' - y'';$$

gdyby zaś oś X przecinała kontur $frlsf$, to jest, miała położenie aX', wtedy mm' wyraziłoby się jeszcze różnicą: $y' - y''$; gdyż mamy:

$$\text{dla } x = ak, \quad y' = +k'm', \quad y'' = -k'm; \quad \text{zkąd } y' - y'' = k'm' + k'm = m'm.$$

Wartość ta mm' zawsze będzie nam znaną z równania (1), czyli będzie funkcyą x najzupełniej wyznaczoną; dla skrócenia, możemy ją nazwać jedną literą u, pamiętając że:

$$mm' = u = \psi(x) = y' - y'' = y.$$

http://rcin.org.pl

wyrazi się ona pewną funkcyą x, i jeśli tę funkcyę oznaczymy przez u, będziemy mieli :

$$d\omega = u dx;$$

ciśnienie elementarne przedstawi się zatem :

$$(a) \qquad \Pi z d\omega = \Pi x \,\text{wst}\alpha\, u dx \;;$$

a ciśnienie całkowite na całą powierzchnię objętą konturem *frlsf* wyrazi się :

$$P = \Sigma \Pi z d\omega = \Sigma \Pi x \,\text{wst}\alpha\, u dx = \int_{x=ac}^{x=ad} \Pi x \,\text{wst}\alpha\, u dx;$$

więc, ostatecznie, na ciśnienie wypadkowe wywierane przez ciecz na ścianę płaską pochyłą mamy następujący ogólny wzór :

$$\text{(A)} \qquad P = \Pi \,\text{wst}\alpha \int_{x=ac}^{x=ad} x u dx \,.$$

Uwaga. Wzór (A) daje nam ciśnienie wypadkowe, wywierane na ścianę przez samą tylko ciecz w zetknięciu z tą ścianą, gdyż przypuściliśmy na wstępie naszego zadania, że powierzchnia cieczy AB jest wolną od ciśnienia atmosferycznego. Łatwo jednak widzieć, że wartość P, wyciągnięta z tego wzoru, będzie wyrażać ostateczne wypadkowe ciśnienie cieczy i atmosfery na ścianę CD, z warunkiem, że będziemy uważać ciśnienia nie po jednej tylko *wewnętrznej* stronie ściany CD, — która jest w bezpośredniém z cieczą zetknięciu,— ale jeszcze i po drugiej jej stronie *zewnętrznej*, zostającej w styczności z atmosferą. Istotnie, widzimy naprzód, że zewnętrzną powierzchnię ściany CD możemy uważać za równą i równoległą do jej powierzchni wewnętrznej, tak że normalne do pierwszej powierzchni są zarazem normalnemi do drugiej; następnie, mając wzgląd na małe wymiary naczynia, możemy przypuścić bez znacznego błędu, że ciśnienie wywierane przez atmosferę na powierzchnię cieczy AB będzie, na jedność powierzchni, takie samo, jak ciśnienie atmosferyczne na zewnętrzną powierzchnię ściany CD, znajdującą się w bezpośredniem z atmosferą zetknięciu; wypadnie ztąd, (§ 3) że te dwa ciśnienia, będąc sobie równe i skierowane w przeciwną stronę, wzajemnie się równoważą, czyli dają zero na ich wypadkowę. Wzór więc (A) może być uważany : a) bądź za ciśnienie wypadkowe cieczy, b) bądź za różnicę wypadkowych ciśnień : cieczy i atmosfery, wywieranych po obu stronach ściany.

Nie potrzebujemy wyjaśniać, że gdyby ściana CD była *zanurzona* w cieczy, wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na nią po obu jej stronach byłaby zerem.

2. Środek ciśnienia. Środek ciśnienia, czyli punkt przyczepienia siły P na ścianie CD, znajdziemy za pomocą znanego twierdzenia momentów sił składowych i siły wypadkowej. Spółrzędne x' i y' tego punktu Q zostaną wyznaczone, biorąc momenta, względm osi aY i aX, wszystkich ciśnień elementarnych wywieranych na ścianę, i moment ciśnienia wypadkowego.

Momenta względem osi Y (to jest prostej A wynikłej z przecięcia powierzchni wolnej przez ścianę naczynia) dają :

$$Px' = \Sigma (\Pi z d\omega)\, x,$$

zkąd ze wzoru (A), po skróceniu, otrzymamy :

$$\text{(B)} \qquad x' = \frac{\displaystyle\int_{x=ac}^{x=ad} x^2 u dx}{\displaystyle\int_{x=ac}^{x=ad} x u dx};$$

http://rcin.org.pl

Ta wartość x' wyznaczy nam prostę poziomą, równoległą do Aa, na której znajdować się będzie szukany środek ciśnienia; wyrażając x' przez z otrzymamy odległość środka ciśnienia od powierzchni wolnej AB.

Momenta względem osi X. Ażeby znaleźć drugą spółrzędnę y' środka ciśnienia, dzielimy powierzchnię ściany na taśmy równoległe do osi X; tylko, ponieważ rozmaite punkta jednej i tej samej taśmy znajdują się w różnych odległościach od powierzchni wolnej AB, — a zatem pod różnemi ciśnieniami, — więc tu nie możemy zastosować jednę i tę samą wysokość z do wszystkich punktów takiej taśmy: musimy więc każdą taśmę równoległą do osi X podzielić na elementa nieskończenie małe prostemi poziomemi, to jest równoległemi do osi Y; czyli, co wyjdzie na jedno, każdą taśmę $mm'm_1m'_1$, równoległą do osi Y i rozpatrywaną wyżej, podzielić prostemi równoległemi do osi X. Wtedy element taśmy $mm'm_1m'_1$, mającej za wartość: $d\omega = udx$, wyrazi się przez $dudx$; ciśnienie na niego wywierane — przez $\Pi zdudx$; nareszcie, jego moment względem osi X—przez $(\Pi zdudx)y$; tak że summa momentów wszystkich elementarnych ciśnień wywieranych na powierzchnię *frlsf* wyrazi się symbolem:

$$\int\int \Pi z dudxy;$$

zkąd, wyraziwszy z w funkcyi x, otrzymujemy z równania momentów, po skróceniu:

$$y' = \frac{\int\int xydudx}{\int xudx}.$$

Granice tych całek zostaną wyznaczone przez styczne do konturu *frlsf*, poprowadzone równolegle do osi spółrzędnych aY i aX.

Uwaga. Jeżeli się zdarzy że kontur ciśnionej powierzchni ma *linję średnicową* (diamétrale) *sprzężoną poziomemu* kierunkowi jego cięciw, to jest, jeżeli na ścianie możemy poprowadzić taką linję, któraby dzieliła na dwie równe części poziome cięciwy danego nam konturu, widocznem jest, że ciśnienia będą jedne i te same po obu stronach tej linji, tak że środek ciśnienia będzie się znajdować w pewnym jej punkcie. W tym więc razie, dla wyznaczenia środka ciśnienia, dosyć będzie znaleźć jednę tylko jego spółrzędnę x'.

Jeżeli nadto, jako szczególny przypadek, linja średnicowa, tak określona, będzie *prostopadła* do poziomych cięciw konturu, to jest będzie jego *osią symetryi*, najwłaściwiej wtedy wziąć tę oś za oś X; jak widzimy, taka oś symetryi będzie kierunkiem *największego spadku* (ligne de la plus grande pente) ściany. Ztąd możemy powiedzieć odwrotnie: *jeżeli oś symetryi figury jest linją największego spadku ściany, środek jej ciśnienia znajduje się na tej osi.* Oś taką możemy nazwać *osią symetryi ciśnienia*, gdyż każde dwa odpowiednie sobie punkta względem tej osi, znajdując się na jednej poziomej, pozostają pod jednem i tém samem ciśnieniem. *Oś symetryi* mająca kierunek różny od kierunku największego spadku będzie tylko osią symetryi konturu, lub też osią symetryi *powierzchni*; lecz nie może ona być osią symetryi *ciśnienia*.

W razie np. jeżeli oś symetryi ściany jest *pozioma*, widocznem jest odrazu, że oś taka nie będzie osią symetryi ciśnienia, gdyż piezometryczna wysokość dla wszystkich punktów leżących ponad tą osią będzie mniejsza, jak ta wysokość dla odpowiednich punktów powierzchni leżących pod nią; z czego już wnosić możemy, że *środek ciśnienia będzie położony niżej aniżeli środek ciężkości powierzchni.*

http://rcin.org.pl

42. Dyskussya wzoru (A). Otrzymaliśmy na ciśnienie wypadkowe P, wywierane na powierzchnię ograniczoną danym konturem, wyrażenie:

$$P = \Pi \text{wst}\alpha \int_{x=ac}^{x=ad} xudx;$$

Otoż wiemy że:

$$\int xudx = x_1 \int udx = x_1 \Omega,$$

gdzie Ω oznacza powierzchnię wyrażoną przez $\int_{x=ad}^{x=ad} udx$, to jest zawartą w naszym konturze, a x_1 — odległość srodka ciężkości G tej powierzchni od poziomej (A, Aa), wynikłej z przecięcia ściany przez powierzchnię wolną cieczy; (x_1 oznacza zarazem *odległość* środka ciężkości ciśnionej powierzchni od powierzchni wolnej, *liczoną podług* osi aX, czyli podług *linji największego spadku ściany*); wzór (A) przyjmie więc formę:

$$P = \Pi \text{wst}\, \alpha\, x_1 \Omega.$$

Otoż:

$$x_1 \text{wst}\, \alpha = z_1,$$

oznaczając przez z_1 *odległość pionową* środka ciężkości powierzchni Ω od powierzchni wolnej AB; (z_1 będzie więc *wysokość wyrażająca ciśnienie*, na jedność powierzchni, w środku ciężkości G) a ztąd:

(A′) $$P = \Pi z_1 \Omega.$$

Z tego wzoru wyprowadzamy wnioski następujące:

1°. *Ciśnienie całkowite wywierane przez ciecz na ścianę płaską, nachyloną do horyzontu pod kątem jakimkolwiek, równem jest iloczynowi z powierzchni tej ściany przez ciśnienie, na jedność powierzchni, wywierane w jej środku ciężkości;* albo jeszcze:

2°. *Ciśnienie to jest równe ciężarowi cieczy zawartej w pionowym walcu* (lub pryzmie), *mającym za podstawę powierzchnię ściany, a za wysokość odległość jej środka ciężkości do powierzchni wolnej*. (*)

3°. Wyciągając ze wzoru (A′) wartość na $\frac{P}{\Omega}$, to jest na *ciśnienie srednie*, pod jakiém każdy punkt powierzchni Ω powinienby zostawać, ażeby ciśnienie wszędzie było jednostajne i dało P na wypad-

---

(*) Wzór: $P = \Pi z_1 \Omega$ ... (A′) może być wprost napisany, bez znajomości równania konturu, i bez poprzednich rozumowań; oznaczając bowiem przez p ciśnienie, na jedność powierzchni, w jakimkolwiek punkcie ściany, odległym na z od powierzchni wolnej, ciśnienie na nieskończenie mały element ω, wzięty na ścianie naokoło tego punktu, będzie: $d\omega = \Pi z\omega$. Wszystkie te ciśnienia elementarne będąc do siebie równolegle, ciśnienie wypadkowe P wyrazi się ich summą, tak że:

$$P = \Sigma \Pi z\omega = \Sigma \Pi z\omega.$$

Otóż, $\Sigma z\omega$ wyraża właśnie taką summę, jakąbyśmy znaleźli, chcąc wziąć moment wszystkich elementów powierzchni Ω, względem *jakiejkolwiek* płaszczyzny, od której odległości rozmaitych elementów oznaczylibyśmy przez z; a jak wiemy, summę tę możemy zastąpić wyrażeniem: $\Sigma z\omega = z_1 \Sigma\omega = z_1 \Omega$, nazywając z_1 odległość środka ciężkości całej powierzchni Ω od płaszczyzny momentów. W naszym przypadku tą płaszczyzną momentów jest powierzchnia wolna cieczy.

http://rcin.org.pl

kowę, mamy:

$$\frac{P}{\Omega} = \Pi z_1$$

to jest *ciśnienie średnie* jest równe ciśnieniu *w rzeczywistości* wywieranemu w jednym tylko punkcie ściany: mianowicie w jej *środku ciężkości*. W razie ściany poziomej, ciśnienie średnie, które było idealnem dla ścian pochyłych, staje się tu ciśnieniem rzeczywistém.

Dla skrócenia, wniosek ten wyrażamy w sposób następujący:

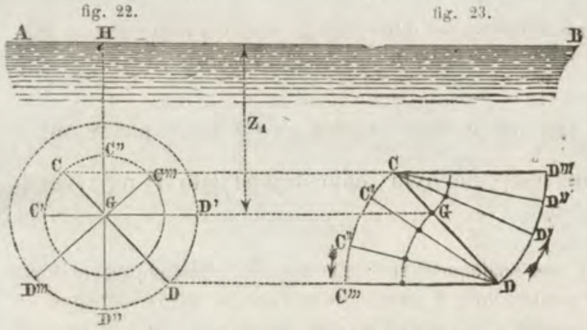
Ciśnienie średnie na ścianę równe jest ciśnieniu wywieranemu w jej środku ciężkości, albo ogólniej,— ciśnieniu jakiegokolwiek punktu wziętego w płasczyznie poziomej przechodzącej przez środek ciężkości ściany.

4°. Wzór (A′) pokazuje, że ciśnienie *całkowite* P wywierane na ścianę Ω, a zatem i ciśnienie *średnie* $\frac{P}{\Omega}$, będzie niezależnem od położenia ściany względem horyzontu, jeśli tylko odległość z_1 środka ciężkości ściany od powierzchni wolnej będzie stałą. Możemy więc powiedzieć:

Jeżeli powierzchnia wolna cieczy pozostaje zawsze na jednej i tej samej wysokości, względem pewnej płasczyzny porównania, *ciśnienie całkowite i ciśnienie średnie, na jednę i tę samą ścianę* Ω, *będzie stałe, jakikolwiek byłby ruch obrotowy lub postępowy tej ściany, byleby tylko w tym ruchu środek jej ciężkości* G *zostawał zawsze na jednej i tej samej płasczyznie poziomej.*

Tak więc, jeżeli wysokość GH $= z_1$ (fig. 22) od powierzchni wolnej AB jest *stałą*, ciśnienie wypadkowe P $\left(\text{i ciśnienie średnie } \frac{P}{\Omega}\right)$ jest niezależne od wartości kąta α, jaki czyni ściana CD $= \Omega$ z horyzontem (a który będzie zarazem kątem tej ściany z powierzchnią wolną), to jest będzie ono *stałem*, czy ta ściana ma położenie *poziome* jak C′D′, czy *pionowe* jak C″D″, czy też inne jakiekolwiek jak C‴D‴; w każdem z nich kierunek wypadkowej zawsze będzie normalnym do ściany. W położeniu *poziomem* C′D′, ciśnienie *średnie* $\frac{P}{\Omega}$ będzie ciśnieniem rzeczywistém w rozmaitych punktach tej ściany i *środek ciśnienia*, jak to widzieliśmy pod § 38, będzie się znajdować w *środku ciężkości* G ściany; w innych zaś położeniach ściany CD, ciśnienie rzeczywiste w rozmaitych jej punktach będzie większe lub mniejsze od ciśnienia średniego, i środek ciśnienia, jak to niżej zobaczymy, nie będzie się znajdować w srodku ciężkości.

fig. 22. fig. 23.



Gdy warunek stałości GH $= z_1$ nie jest wypełniony, ciśnienie całkowite P, na jednę i tę samą ścianę Ω, będzie się zmieniać proporcyonalnie do z_1; tak np. obracając ścianę CD około D, jak to wskazuje fig. 23, ciśnienie P będzie się powiększać, gdyż środek ciężkości ściany będzie coraz bardziej oddalonym od powierzchni wolnej AB; rzecz się będzie miała przeciwnie, obracając ścianę około C. W ogólności, mając daną ścianę Ω i jej środek ciężkości G, całkowite ciśnienie P na nią wywierane będzie tem mniejsze, im punkt G będzie bliżej położonym względem powierzchni wolnej.

43. Dyskussya wzoru (B). Rozpatrzywszy wzór (A) dający *natężenie* ciśnienia wypadkowego, przejdźmy do wzoru, za pomocą którego wyznacza się *punkt przyczepienia* tego ciśnienia.

http://rcin.org.pl

Ściany, jakie spotykamy w zastosowaniach, mają albo linję średnicową, albo oś symetryi skierowaną podług największego spadku ściany; tak że *środek ciśnienia* zupełnie będzie wyznaczonym wartością jednej tylko swej spółrzędnej x'. Wartość ta, znaleziona pod § 41, wyraża się ogólnym wzorem:

(B) $$x' = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx};$$

gdzie całki powinny być wzięte między granicami wyznaczonemi przez styczne poziome do danego konturu.

Uważajmy, że $\int x^2 u dx$ jest nic innego jak *moment bezwładności powierzchni* Ω, wzięty względem *poziomej* (A, A*a*), (fig 21,) rzucającej się w punkcie A (którą odtąd będziemy oznaczać AA); zaś $\int x u dx$ jest to *moment powierzchni* Ω, wzięty względem tejże samej poziomej, leżącej w płaszczyznie tej powierzchni; oznaczając moment bezwładności przez I_A, wzór (B) przedstawi się tak:

(B') $$x' = \frac{I_A}{x_1 \Omega};$$

zkąd:

$$I_A = x' x_1 \Omega; \qquad \text{a że jak wiemy:} \qquad I_A = k_A{}^2 \Omega,$$

oznaczając przez k_A *promień wirowania* (rayon de gyration) powierzchni względem poziomej A, więc

(1) $$k_A{}^2 = x' x_1.$$

Z innej strony, oznaczając przez k_G promień wirowania powierzchni Ω względem poziomej poprowadzonej przez jej środek ciężkości G (fig 24), mamy związek:

$$k_A{}^2 = k_G{}^2 + x_1{}^2;$$

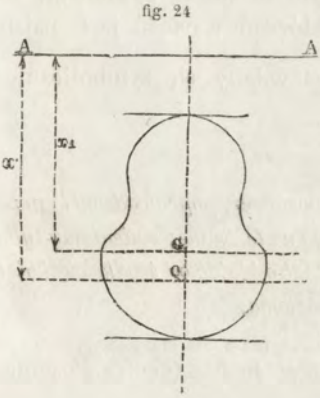
więc na mocy (1) piszemy:

(2) $$x' x_1 = x_1{}^2 + k_G{}^2,$$

zkąd otrzymujemy:

(3) $$x_1 (x' - x_1) = k_G{}^2;$$

fig. 24



więc, jakikolwiek byłby znak spółrzędnych x' i x_1, ich samoista wartość musi być następująca:

(B'') $$x' > x_1.$$

Ztąd wnosimy, że *środek ciśnienia jakiejkolwiek powierzchni płaskiej jest dalej położony od poziomej* AA *aniżeli środek ciężkości tej powierzchni.*

Spółrzędne x' i x_1 oznaczają odległość środka ciśnienia i środka ciężkosci powierzchni Ω od powierzchni wolnej, liczoną podług kierunku największego spadku ściany; nierówność (B'') pociąga za sobą nierówność:

(B''') $$z' > z_1,$$

http://rcin.org.pl

oznaczając z' i z_1 odległości pionowe punktów Q i G od tejże powierzchni wolnej; gdyż:

$$z' = x' \, \mathrm{wst}\alpha \quad \text{i} \quad z_1 = x_1 \, \mathrm{wst}\alpha.$$

Więc, jakbyśmy nie liczyli odległość tych punktów od powierzchni wolnej, *środek ciśnienia jakiejkolwiek powierzchni znajduje się zawsze pod jej środkiem ciężkości.*

Uwaga. Jednakże, w jednym szczególnym przypadku, środek ciśnienia i środek ciężkości zlewają się ze sobą i stanowią jeden punkt; wtedy między ich spółrzędnemi x' i x_1 zachodzi związek: $x' = x_1$ albo $z' = z_1$.

Ażeby zobaczyć, w jakich warunkach nierówność (B″) zamienia się na równość, zwróćmy się do równania (3) z którego znajdujemy:

$$x' - x_1 = \frac{k^2_G}{x_1} = \frac{I_G}{x_1 \Omega}, \tag{4}$$

gdyż $I_G = k_G{}^2 \Omega$. Widzimy ztąd, że dla równości: $x' = x_1$ czyli dla warunku: $x' - x_1 = 0$, potrzeba, ażeby x_1 było ∞; albowiem I_G i Ω są ilości stałe dla jednej i tej samej ściany, zależące tylko od jej konturu, ale nie od jej położenia; a że

$$x_1 = \frac{z_1}{\mathrm{wst}\alpha},$$

gdzie z_1 jest tylko zerem dla powierzchni wolnej, a w każdym innym razie ma wartość wyznaczoną, więc potrzeba ażeby $\mathrm{wst}\alpha = 0$; zatem kąt α powinien być albo 0 albo 180°, to jest ściana powinna być *poziomą*. Przychodzimy ztąd do wniosku: *jeżeli ciśniona ściana jest poziomą, środek ciśnienia ściany zlewa się z jej środkiem ciężkości.* Rezultat ten jest już nam znany z poprzedniego: otrzymaliśmy takowy drogą prostą przy ścianach poziomych, o których była mowa pod § 38.

Mówiąc ogólniej, różnica wyrażona wzorem (4): $x' - x_1$ będzie tém mniejszą, to jest punkt P tem bardziej będzie się przybliżać do punktu G, im mniejszą będzie wartość $\frac{I_G}{x_1 \Omega}$, czyli im większe będzie x_1. Ponieważ $x_1 = \frac{z_1}{\mathrm{wst}\alpha}$, jeżeli przypuścimy z_1 stałe, to jest, jeżeli tylko obracamy ścianę około osi poziomej, przeprowadzonej przez jej środek ciężkości, (wtedy, jak wiemy z § 42, ciśnienie wypadkowe na tę ścianę zawsze będzie jednakowe) x_1 będzie tém większe im kąt α będzie mniejszy; tak że (fig 22) przechodząc od położenia C″D″ do położenia poziomego C′D′, α maleje coraz bardziej, punkt P coraz więcej przybliża się do punktu G, i nareszcie z nim się zlewa w położeniu C′D′. Otrzymujemy wtedy $x_1 = \infty$, co i być powinno, gdyż ściana C′D′, stając się teraz równoległą do powierzchni wolnej, przetnie ją w nieskończoności; co zaś do z_1 (którego wartość jest najzupełniej wyznaczoną) spółrzędna ta, używając wzoru $x_1 = \frac{z_1}{\mathrm{wst}\alpha}$, przedstawiłaby się symbolicznie:

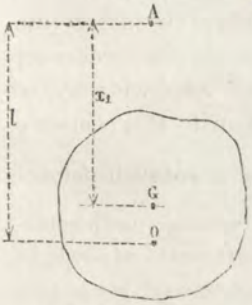
$$z_1 = 0 \, . \, \infty \, .$$

Z tej dyskussyi widzimy że: *obracając daną ścianę* CD $= \Omega$ *około osi poziomej, poprowadzonej przez jej środek ciężkości, nie zmieniamy przezto ciśnienia wypadkowego wywieranego na tę ścianę; zmieniamy tylko punkt przyczepienia tej wypadkowej (środek ciśnienia), który będzie się zbliżać lub oddalać od środka ciężkości, pozostając zawsze pod nim, i dosięgając go tylko wtedy kiedy ściana staje się poziomą.*

44. Odpowiedność środka ciśnienia, (centre de pression) **środka wahania** (centre d'oscillation) i **środka uderzenia** (centre de percussion). Wzór (4) otrzymany ze wzoru (B), i wyrażający związek między środkiem ciśnienia ściany i jej środkiem ciężkości, ma jeszcze inne przenośne znaczenie.

Wiemy z teoryi wahadła złożonego (pendule composé), że jeżeli jakiekolwiek ciało obraca się około osi poziomej *stałej* A (fig 25), to — oznaczając przez x_1 odległość jego środka ciężkości G od osi obrotu A; przez $k_G{}^2$ promień wirowania ciała względem prostej, poprowadzonej równolegle do osi A, przez środek ciężkości G, — ruch tego ciała będzie taki sam, jak ruch wahadła prostego (pendule simple), zostającego z nim w jednakowych początkowych warunkach, i mającego za swą długość l:

fig. 25.



$$(a) \qquad l = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1}.$$

Długość tę l nazwano *długością wahania* (longueur d'oscillation);

Oś obrotu A « *osią zawieszenia* (axe de suspension);

Prostę poprowadzoną na płaszczyznie przechodzącej przez oś zawieszenia A, i przez środek ciężkości ciała G, równolegle do osi A i na odległości od niej $= x_1 + \frac{k_G{}^2}{x_1}$ nazwano *osią wahania* tego ciała (axe d'oscillation).

Nareszcie punkt O, w którym oś wahania przebija płaszczyznę prostopadłą do osi zawieszenia i poprowadzoną przez środek ciężkości ciała, nazwano *środkiem wahania* (centre d'oscillation).

Określenia te stosują się i do tego szczególnego przypadku, kiedy *ciało* staje się *powierzchnią* krzywą lub płaską.

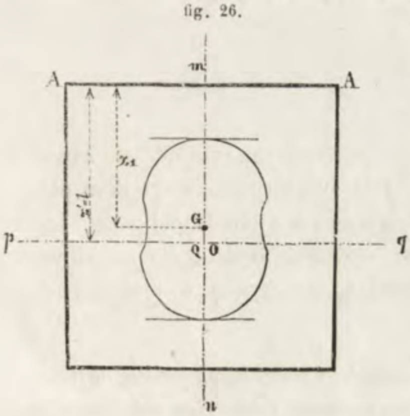
Przedstawiwszy wzór (4) pod formą:

$$(4^{bis}) \qquad x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1},$$

i porównywując (4^{bis}) z (a), możemy powiedzieć:

Środek ciśnienia powierzchni, ograniczonej jakąkolwiek figurą na ścianie naczynia (fig. 26), *znajduje się od poziomej* AA *na odległości x' równej długości l wahania ściany względem tej poziomej, uważanej za oś zawieszenia*; to jest *środek ciśnienia znajduje się na osi wahania pq.*

fig. 26.

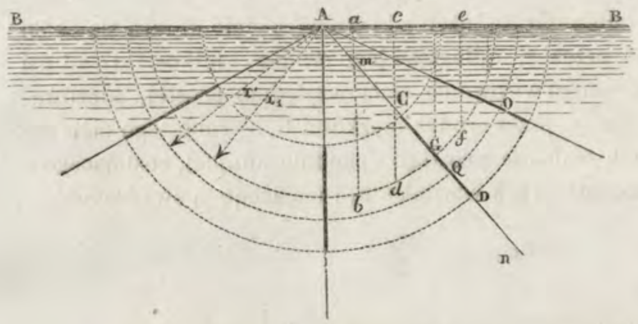


Jeżeli nadto, kontur powierzchni będzie mieć *oś symetryi mn* skierowaną podług największego spadku ściany, wtedy jak wiemy, środek ciężkości G i środek ciśnienia Q będą się znajdować na tej osi; przecięcie się osi *mn* z osią wahania *pq* wyznaczy nam zarazem środek ciśnienia Q i środek wahania O; gdyż możemy uważać oś *mn* jako ślad płaszczyzny, przechodzącej przez G i prostopadłej do osi zawieszenia AA. Tak więc możemy powiedzieć: *jeżeli kontur jest symetryczny względem kierunku największego spadku ściany, środek ciśnienia powierzchni tym konturem ograniczonej znajduje się w jej środku wahania.*

http://rcin.org.pl

Uważając ścianę $CD = \Omega$ (fig. 27) symetryczną względem kierunku największego jej spadku, i obracając takowę około osi poziomej *stałej* AA, — powstałej z przecięcia się przedłużonej ściany CD

fig. 27.



z powierzchnią wolną cieczy, i rzucającej się na płaszczyznę papieru w punkcie A, — środek ciężkości G ściany i jej środek ciśnienia Q,O (środek wahania) opiszą dwa łuki spółśrodkowe, leżące w płaszczyznie prostopadłej do AA i poprowadzonej przez oś symetryi *mn*. Ztąd widzimy, że chociaż ciśnienie całkowite P i ciśnienie średnie $\frac{P}{\Omega}$ będą różne w różnych położeniach ściany (będą się one zmieniać proporcyonalnie do rzędnych *ab*, *cd*, *ef*,... łuku opisanego przez punkt G, i których maximum odpowiada pionowemu położeniu ściany), punkt przyczepienia siły P, to jest środek ciśnienia, zawsze się będzie znajdować na jednej i tej samej odległości od osi obrotu AA ściany, lub od wszelkiej innej poziomej na niej uważanej; tak że *środek ciśnienia będzie punktem stałym na ścianie.*

Otrzymany rezultat jest odwrotny temu jakiśmy znalezli pod §. 43, obracając ścianę około poziomej poprowadzonej przez jej *środek ciężkości*; tam ciśnienie P było stałe, a środek ciśnienia zmienny.

Uwaga. Ponieważ odcięta x' środka ciśnienia ściany i długość l wahania ściany są sobie równe, szukanie pierwszej może być zastąpione szukaniem ostatniej; tak że znając jakimkolwiek sposobem długość wahania ściany względem osi zawieszenia AA, będziemy przezto znać położenie na tej ścianie *poprzecznej osi ciśnienia* (nazywając tak linję, równoległą do osi AA, na której będzie się znajdować środek ciśnienia, i zachowując nazwisko *osi ciśnienia* dla *podłużnej osi symetryi* ściany, jeśli jest ona skierowaną podług największego spadku ściany). W ogólności, własności poprzecznej osi ciśnienia i środka ciśnienia mogą być wyprowadzone z własności osi wahania i środka wahania, znanych z Mechaniki ogólnej. I tak np., wiemy że:

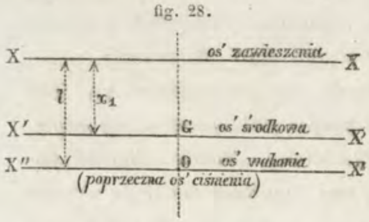
1° Oś wahania X″X″ (fig. 28) i oś zawieszenia XX są sobie wzajemne; to jest, jeżeli teraz weźmiemy X″X″ za oś zawieszenia, znajdziemy, że odpowiednią jej osią wahania będzie oś XX.

2° Oś wahania jakiegokolwiek ciała jest więcej oddaloną od osi zawieszenia, — to jest od osi obrotu tego ciała, — aniżeli oś X′X′ jej równoległa i przechodząca przez środek ciężkości ciała; tak że zawsze mamy:

$$l > x_1; \text{ a że } x' = l, \text{ ztąd } x' > x_1;$$

co wprost wyprowadziliśmy pod § 43.

fig. 28.



3° Środek uderzenia (centre de percussion) znajduje się zawsze na osi wahania; jeżeli zaś ciało jest symetryczne względem płaszczyzny prostopadłej do osi zawieszenia i przechodzącej przez jego środek ciężkości, wtedy *środek uderzenia* będzie się znajdować w punkcie gdzie oś wahania przebija tę płaszczyznę, to jest, *w środku wahania*.

Z tej ostatniej własności wnosimy: że *jeżeli ciśniona ściana ma oś symetryi skierowaną podług największego spadku ściany, środek ciśnienia ściany będzie zarazem jej środkiem wahania i środkiem uderzenia*; *to*

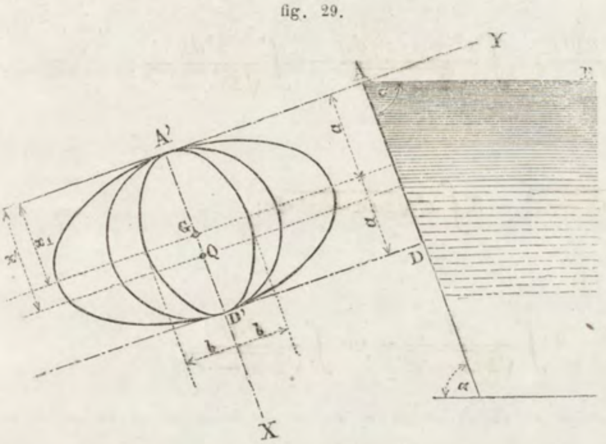
http://rcin.org.pl

jest, środek ciśnienia, środek wahania i środek uderzenia zlewają się w jednym i tym samym punkcie, leżącym pod środkiem ciężkości ściany.

45. Zastosowanie ogólnych wzorów (A) i (B) do przypadków szczególnych. Zastosujmy teraz ogólne wzory (A) i (B), wyprowadzone pod §. 41, do niektórych szczególnych form ciśnionych powierzchni.

I. Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe i środek ciśnienia na powierzchnię ellipsy, której dwie styczne poziome rzucają się w punktach** A i D (fig 29), **a której dwie osie są :** $2a$ **i** $2b$.

fig. 29.



Ażeby zastosować wzory :

$$\text{(A)}\qquad P = \Pi \,\mathrm{wst}\alpha \int xu\,dx = \Pi\,\mathrm{wst}\alpha\, x_1 \Omega = \Pi z_1 \Omega;$$

$$\text{(B)}\qquad x' = \frac{\int (\Pi z\, d\omega)\, x}{\int \Pi z\, d\omega} = \frac{\int (zu dx)\, x}{\int z u dx} = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx};$$

uważamy najprzód, że

$$x_1 = a; \qquad \Omega = \pi a b;$$

więc

$$\text{(A')}\qquad P = \Pi \,\mathrm{wst}\alpha\; \pi a^2 b.$$

Dla znalezienia wartości x' weźmy podłużną oś symetryi, skierowaną podług największego spadku płaszczyzny ellipsy, za oś X i napiszmy równanie ellipsy odniesionej do tej osi i do osi Y; będziemy mieli :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

zkąd znajdziemy :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2};$$

a zatem :

$$u = y' - y'' = 2\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2};$$

więc otrzymujemy :

$$\text{(B')}\qquad x' = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx} = \frac{\int x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx}{\int x \sqrt{2ax - x^2}\, dx};$$

gdzie granice całek są : 0 i $2a$.

http://rcin.org.pl

Całkowanie to nie przedstawia żadnej trudności, gdyż możemy napisać :

$$(1)\qquad \int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\int\frac{x^2(2ax-x^2)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}+2a\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

co podchodzi pod ogólną formę :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{kx-x^2}}.$$

Aby wykonać wskazane działania, piszemy :

$$-\int\frac{x^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{x^3(-x+a-a)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{x^3(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}-a\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

następnie, będziemy mieli :

$$\int\frac{x^3(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=x^3\sqrt{2ax-x^2}-3\int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx;$$

czyli, na mocy (1) :

$$\int\frac{x^3(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=x^3\sqrt{2ax-x^2}+3\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}-6a\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

zatem :

$$(a)\qquad -\int\frac{x^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{x^3}{4}\sqrt{2ax-x^2}-\frac{7a}{4}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

a więc, mamy z (1) :

$$(1')\qquad \int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{x^3}{4}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a}{4}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

W podobny sposób otrzymamy, z kolei, następujące wyrażenia :

$$(b)\qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^2}{3}+\frac{5a}{3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$(c)\qquad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3a}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$(d)\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

Podstawiając (*b*), (*c*) i (*d*) w wyrażenie (1′), otrzymujemy :

$$(1'')\qquad \int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx=$$

$$\frac{x^3}{4}\sqrt{2ax-x^2}-\frac{a^2x}{12}\sqrt{2ax-x^2}-\frac{5a^2x}{24}\sqrt{2ax-x^2}-\frac{15a^3}{24}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{15a^4}{24}\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

http://rcin.org.pl

Otoż, dla znalezienia tej ostatniej całki, możemy napisać :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}};$$

kładąc następnie $(x - a) = ta$, otrzymujemy:

$$(e) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{łuk wst } t = \text{łuk wst } \frac{x-a}{a}.$$

Albo wprost, pisząc :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} = \int \frac{d.\frac{x-a}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} = \text{łuk wst } \frac{x-a}{a};$$

moglibyśmy jeszcze przedstawić to pod inną formą :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{d.\frac{x-a}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} = - \int - \frac{d.\frac{x-a}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} = - \text{łuk dost } \frac{x-a}{a};$$

$$= \int \frac{d\cdot\frac{a-x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-x}{a}\right)^2}} = \text{łuk dost } \frac{a-x}{a}.$$

Podstawiwszy wartość (e) w wyrażenie $(1'')$ i wyprowadziwszy $\sqrt{2ax - x^2}$ za nawias, otrzymamy na licznik w ułamku (B') wyrażenie następujące :

$$\int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \left[\frac{1}{24}(6x^3 - 7a^2x - 15a^3)\sqrt{2ax - x^2} + \frac{15}{24} a^4 \text{ łuk wst } \frac{x-a}{a}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{15}{24} a^4 \text{łuk wst } (1) - \frac{15}{24} a^4 \text{łuk wst } (-1)$$

$$= \frac{15}{24} a^4 \frac{\pi}{2} + \frac{15}{24} a^4 \frac{\pi}{2}$$

$$(\alpha) \qquad = \frac{5}{8} \pi a^4.$$

Pozostaje znaleźć wyrażenie na mianownik. Otoż, mamy :

$$(2) \qquad \int x\sqrt{2ax - x^2}\, dx = \int \frac{x(2ax - x^2)\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = 2a \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} - \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2ax - x^2}};$$

i na mocy (e), (d), (c) i (b) znajdujemy :

$$(f) \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = - \sqrt{2ax - x^2} + a \text{ łuk wst } \frac{x-a}{a};$$

$$(g) \qquad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = - \left(\frac{x + 3a}{2}\right)\sqrt{2ax - x^2} + \frac{3a^2}{2} \text{łuk wst } \frac{x-a}{a};$$

$$(h) \qquad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = - \left(\frac{2x^3 + 5ax + 15a^2}{6}\right)\sqrt{2ax - x^2} + \frac{15}{6} a^3 \text{łuk wst } \frac{x-a}{a};$$

http://rcin.org.pl

Podstawiając w wyrażenie (2) wartości (g) i (h), uprosczając i wyprowadzając za nawias $\sqrt{2ax-x^2}$, otrzymamy :

$$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{6}(2x^2-ax-3a^2)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{2}a^3 \text{łuk wst}\,\frac{x-a}{a}\right]_0^{2a}$$

$$(\beta) \qquad = \frac{1}{2}\pi a^3.$$

Wstawiając we wzór (B′) znalezione wartości (α) i (β), otrzymujemy dla szukanego środka ciśnienia :

$$(B'') \qquad x' = \frac{\frac{5}{8}\pi a^4}{\frac{1}{2}\pi a^3} = \frac{5}{4}a;$$

a ponieważ wiemy oprócz tego, że punkt ten znajduje się na osi symetryi A′X ellipsy, zadanie nasze jest w zupełności rozwiązane.

Wyrażenie (B″) pokazuje, że środek ciśnienia znajduje się pod środkiem ciężkości ellipsy (którego odcięta $x_1 = a$), co zresztą znaném nam jest z poprzedniego.

46. Uwaga. Znając środek ciśnienia ściany, znajdziemy natychmiast moment bezwładności tej ściany względem poziomej przechodzącej przez jej środek ciężkości ; gdyż, na mocy § 44, mamy związek :

$$x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1};$$

zkąd :

$$k^2_G = x'x_1 - x_1^2 = \frac{5}{4}a \times a - a^2 = \frac{1}{4}a^2;$$

a zatem :

$$(1) \qquad I_G = k^2_G\,\Omega = \frac{1}{4}a^2 \times \pi ab = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

Gdybyśmy chcieli mieć moment bezwładności powierzchni ellipsy względem poziomej AA′, napisalibyśmy :

$$I_A = I_G + a^2\Omega = \frac{1}{4}\pi a^3 b + \pi a^3 b = \frac{5}{4}\pi a^3 b;$$

co, zresztą, moglibyśmy otrzymać wprost ze wzoru (α) § 45, zauważywszy tylko, że w formule (B′), wprowadzając wartość na u, skróciliśmy licznik i mianownik na $\frac{2b}{a}$; chcąc więc ażeby licznik ułamku (B′) przedstawiał moment bezwładności ellipsy, potrzeba napisać :

$$(2) \qquad I_A = \frac{2b}{a}\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\cdot\frac{5}{8}\pi a^4 = \frac{5}{4}\pi a^3 b.$$

Wniosek. Wzór (B″) wyznaczający środek ciśnienia ellipsy pokazuje, że położenie tego punktu zależy jedynie od wymiaru osi A′D′, skierowanej podług największego spadku ściany; tak że dla wszystkich

http://rcin.org.pl

ellips, mających A'D' za jedną ze swych osi, środek ciśnienia będzie się znajdować w jednym i tym samym punkcie Q, wyznaczonym wartością $= \frac{5}{4}$ A'D'$= \frac{5}{4}a$. Zmiana wymiaru poziomej osi ellipsy wpływa tylko na zmianę natężenia ciśnienia wypadkowego, które, jak pokazuje wzór (A'), jest funkcyą ilości a i b.

Wynika ztąd, że dla koła mającego A'D' za średnicę, czyli $R = a$ za promień, środek ciśnienia wyznaczy się za pomocą wzoru:

$$x' = \frac{5}{4} R;$$

a ciśnienie wypadkowe P otrzymamy, kładąc w (A') $a = b = R$; co daje:

$$P = \Pi \operatorname{wst}\alpha \, \pi R^3.$$

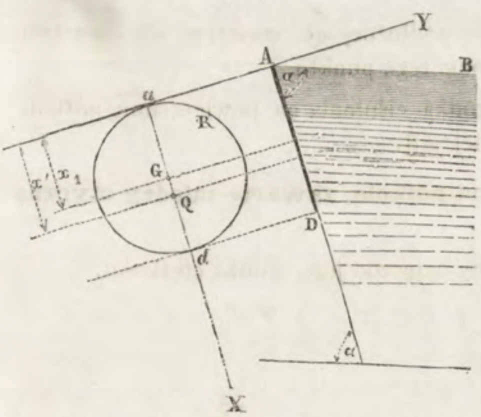
Gdybyśmy chcieli zadanie tyczące się środka ciśnienia powierzchni koła rozwiązać w sposob niezależny, zobaczylibyśmy, że całkowania, jakieby trzeba było wykonać, są takie same jak te któreśmy rozpatrywali w przypadku ściany elliptycznej. I tak, niech będzie:

47. II Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na powierzchnię koła, o promieniu R, którego dwie styczne poziome rzucają się w punktach A i D.** (fig. 30).

Równanie koła, odniesionego do stycznej Aa i średnicy ad, wyrazi się:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2;$$

fig. 30.



zkąd:

$$y = \pm \sqrt{2Rx - x^2},$$

$$u = 2\sqrt{2Rx - x^2};$$

zatem, otrzymujemy:

$$x' = \frac{\int_0^{2R} x^2 \sqrt{2Rx - x^2}\, dx}{\int_0^{2R} x \sqrt{2Rx - x^2}\, dx}.$$

Wzór ten jest wzorem (B'), znalezionym pod § 45 dla ellipsy, z tą tylko różnicą, iż zamiast a wchodzi tu promień koła R; możemy więc dla koła posługiwać się formułami wyprowadzonemi powyżej dla ellipsy, zamieniwszy w nich a na R. Takim sposobem otrzymamy:

$$x' = \frac{\frac{5}{8}\pi R^4}{\frac{1}{2}\pi R^3} = \frac{5}{4} R.$$

Co zaś do ciśnienia wypadkowego P, mamy je natychmiast ze wzoru (A) § 45, kładąc w nim $x_1 = R$ i $\Omega = \pi R^2$; zkąd otrzymujemy:

$$P = \Pi \operatorname{wst}\alpha \, \pi R^3.$$

http://rcin.org.pl

Nareszcie, moment bezwładności powierzchni koła, względem stycznej Aa, wyrazi się :

$$I_A = 2\int_0^{2R} x^2\sqrt{2Rx - x^2}\,dx = 2 \times \frac{5}{8}\pi R^4 = \frac{5}{4}\pi R^4.$$

Uwaga. Zróbmy tu ogólną uwagę, że jeżeli moment bezwładności ciśnionej ściany, wzięty względem poziomej poprowadzonej przez jej środek ciężkości, jest nam znany zgóry, korzystniej jest zamiast formuły (B), użyć wyrażenia :

$$x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1},$$

które daje nam środek ciśnienia daleko prędzej i w sposób dogodniejszy aniżeli wzór ogólny (B). I tak np. dla koła,—którego moment bezwładności łatwym jest do pamiętania,—posiłkując się wyrażeniem dającém *długość wahania koła*, względem poziomej Aa, uważanej za oś zawieszenia, otrzymujemy bardzo prędko wartość x' dla szukánego środka ciśnienia. Istotnie, wiemy że moment bezwładności koła, względem osi znajdującej się w jego płaszczyźnie i poprowadzonej przez jego środek, ma za wyrażenie :

$$I_G = \frac{1}{4}\pi R^4,$$

ztąd :

$$k^2_G = \frac{I_G}{\Omega} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\pi R^2} = \frac{R^2}{4};$$

więc długość wahania l, czyli odcięta x' środka ciśnienia, wyrazi się :

$$l = x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1} = R + \frac{R^2}{4R} = \frac{5}{4}R.$$

A że oprócz tego wiemy, że środek ciśnienia znajduje się na podłużnej osi symetryi aX, wartość, jakąśmy otrzymali na x', wystarcza do zupełnego wyznaczenia tego punktu.

48. Rozpatrzmy teraz przykłady tyczące się ciśnienia i środka ciśnienia na powierzchnię półkola, w rozmaitych jego położeniach względem powierzchni wolnej AB.

III Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na półkole, zawarte między styczną poziomą** Aa **i średnicą** Ce (fig. 31).

Ażeby mieć ciśnienie wypadkowe na półkole acc, szukajmy najprzód jego środka ciężkości.

fig. 31.

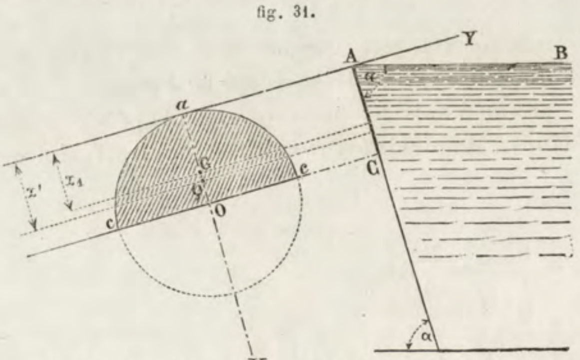
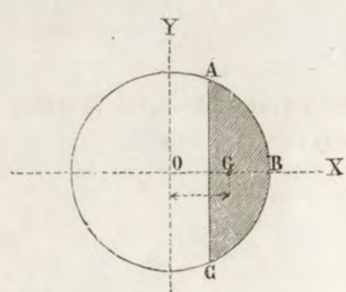


fig. 32.



Wiemy (fig. 32) że odcięta OG środka ciężkości G odcinka kołowego, liczona od środka koła O,

http://rcin.org.pl

wyraża się wzorem :

$$OG = \frac{\frac{1}{3}c^3}{2Rl - c\sqrt{4R^2 - c^2}};$$

gdzie c oznacza cięciwę AC odcinka,

« R promień koła,

« l długość łuku ABC odcinka.

Dla znalezienia OG na figurze 31, połóżmy :

$$c = 2R, \qquad l = \frac{2\pi R}{2};$$

zkąd otrzymujemy :

$$OG = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi};$$

a zatem :

$$aG = x_1 = R - OG = R - \frac{4}{3}\frac{R}{\pi};$$

czyli :

(1) $$x_1 = R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right);$$

a że nadto $\Omega = \frac{\pi R^2}{2}$, więc wszystkie ilości wchodzące we wzór: $P = \Pi \operatorname{wst}\alpha\, x_1\Omega$ są znane.

Szukajmy teraz środka ciśnienia. W tym celu dosyć jest zwrócić się do formuł wyprowadzonych pod § 45, i zważając że granice całek są teraz : 0 i R, napisać :

$$x' = \frac{\int_0^R x^2\sqrt{2Rx - x^2}\,dx}{\int_0^R x\sqrt{2Rx - x^2}\,dx} = \frac{\left[\frac{1}{24}(6x^3 - 7R^2x - 15R^3)\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{15}{24}R^4 \text{łuk wst}\frac{x - R}{R}\right]_0^R}{\left[\frac{1}{6}(2x^2 - Rx - 3R^2)\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{1}{2}R^3 \text{łuk wst}\frac{x - R}{R}\right]_0^R}$$

$$= \frac{\frac{1}{48}R^4(15\pi - 32)}{\frac{1}{24}R^3(6\pi - 8)} = \frac{1}{2}R\frac{15\pi - 32}{6\pi - 8}.$$

Ale temu wyrażeniu możemy nadać jeszcze inną formę, podobną do tej jakąśmy znalezli dla x_1. Możemy napisać :

$$x' = \frac{1}{2}R\frac{15\pi - 32}{6\pi - 8} = \frac{1}{4}R\frac{15\pi - 32}{3\pi - 4} = \frac{1}{4}R\left(5 - \frac{12}{3\pi - 4}\right);$$

zkąd:

(2) $$x' = R\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{3\pi - 4}\right).$$

http://rcin.org.pl

Kształt, pod jakim przedstawiają się ilości x' i x_1, nie jest dogodnym do porównania ich wartości; ale wiemy zgóry że x' musi być większe od x_1. Chcąc mieć dokładniejsze pojęcie o ich liczebnych wartościach, weźmy dla $\pi = 3{,}14$ i wykonajmy wskazane przez (1) i (2) działania. Znajdziemy:

$$x_1 = \mathrm{R}\,(1 - 0,\,4246) = 0,\,5754\ \mathrm{R},$$

$$x' = \mathrm{R}\,(1,\,25 - 0,\,5535) = 0,\,6965\ \mathrm{R};$$

ztąd:

$$x' - x_1 = \mathrm{GQ} = 0,\,1211\,\mathrm{R}.$$

49. IV Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na półkole, którego średnica jest pozioma i znajduje się na odległości promienia od powierzchni wolnej.** (fig 33).

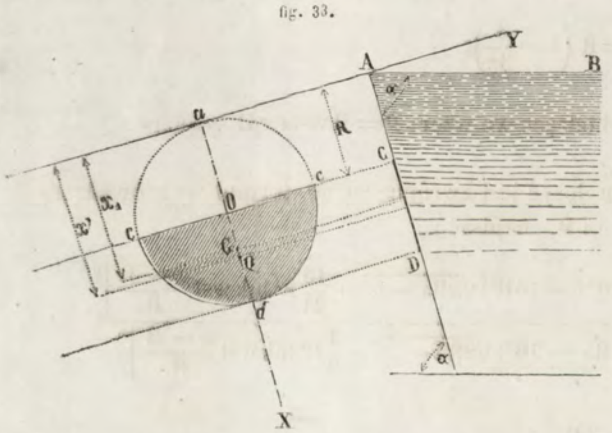
Odległość x_1 środka ciężkości półkola *cdc* od poziomej A*a* znajdzie się natychmiast z wyrażenia:

$$x_1 = a\mathrm{G} = \mathrm{R} + \mathrm{OG} = \mathrm{R} + \frac{4}{3}\,\frac{\mathrm{R}}{\pi};$$

zkąd:

(1′) $$x_1 = \mathrm{R}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right).$$

fig. 33.



Dla znalezienia x' używamy tegoż samego wzoru, co w przykładzie poprzednim; tylko tutaj całkowanie powinno być wykonane między granicami: R i 2R. Wykonawszy działanie, otrzymamy:

$$x' = \frac{\int_{\mathrm{R}}^{2\mathrm{R}} x^2\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}\,dx}{\int_{\mathrm{R}}^{2} x\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}\,dx} = \frac{\frac{1}{48}\,\mathrm{R}^4\,(15\pi + 32)}{\frac{1}{24}\,\mathrm{R}^3\,(6\pi + 8)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{R}\,\frac{15\pi + 32}{6\pi + 8} = \frac{1}{4}\,\mathrm{R}\,\frac{15\pi + 32}{3\pi + 4}$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{R}\left(5 + \frac{12}{3\pi + 4}\right);$$

czyli:

(2′) $$x' = \mathrm{R}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{3\pi + 4}\right).$$

Wykonawszy rachunki liczebne, znajdziemy:

$$x_1 = \mathrm{R}\,(1 + 0{,}4246) = 1{,}4246\ \mathrm{R} = \mathrm{R} + 0{,}4246\ \mathrm{R},$$

$$x' = \mathrm{R}\,(1{,}25 + 0{,}2235) = 1{,}4735\ \mathrm{R} = \mathrm{R} + 0{,}4735\ \mathrm{R};$$

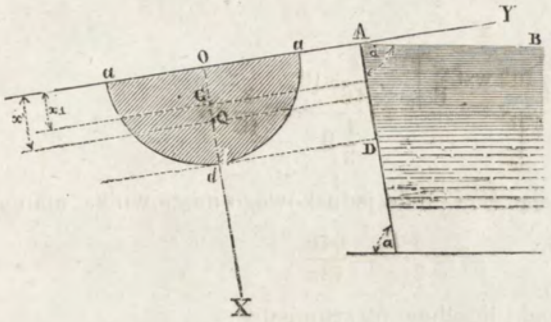
ztąd:

$$x' - x_1 = \mathrm{GQ} = 0{,}0489\mathrm{R}.$$

http://rcin.org.pl

50. V Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na półkole, którego średnica znajduje się na powierzchni wolnej** (fig. 34).

fig. 34.



Przykład ten jest odwrotny przykładowi rozpatrywanemu pod § 48.

Ciśnienie wypadkowe znajdzie się natychmiast, gdyż jak widzieliśmy wyżej,

$$(1) \qquad x_1 = \mathrm{OG} = \frac{4}{3\pi}\,\mathrm{R}\,.$$

Dla znalezienia środka ciśnienia odnieśmy koło do osi OY i OX przechodzących przez jego środek; będziemy mieli:

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2;$$

zkąd:

$$y = \pm\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2};$$

a więc

$$u = 2\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2};$$

zatem:

$$x' = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx} = \frac{\int_0^{\mathrm{R}} x^2\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx}{\int_0^{\mathrm{R}} x\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx}\,.$$

Całkowanie to sprowadza się do ogólnej formy:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

i wykonywa się na mocy wzoru:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m-1)}{m}a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

z którego, jeżeli m jest liczbą parzystą, przyjdziemy do:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{łuk wst}\,\frac{x}{a}\,;$$

« « « nieparzystą, « «

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Pisząc więc licznik pod formą:

$$\int x^2\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx = \int \frac{x^2(\mathrm{R}^2 - x^2)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}} = \mathrm{R}^2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}} - \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}}\,,$$

i wykonywując wskazane działanie, otrzymamy:

$$\int x^2\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx = \frac{x^3}{4}\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} + \frac{\mathrm{R}^2}{4}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} + \frac{\mathrm{R}^2}{2}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{\mathrm{R}}\right) =$$

$$= \frac{2x^3 - \mathrm{R}^2 x}{8}\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} + \frac{\mathrm{R}^4}{8}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{\mathrm{R}}\,.$$

http://rcin.org.pl

W podobny sposób znajdziemy :

$$\int x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2} = -\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}};$$

a zatem :

$$(2) \qquad x' = \frac{\left[\frac{2x^3-R^2x}{8}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^4}{8}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{R}\right]_0^R}{\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R} = \frac{\frac{1}{16}\pi R^4}{\frac{1}{3}R^3} = \frac{3}{16}\pi R.$$

Łatwo jest widzieć ze $x' > x_1$ gdyż, sprowadzając (1) i (2) do jednakowego mianownika, mamy :

$$x' = \frac{3}{16}\pi R = \frac{9\pi^2 R}{48\pi}, \qquad x_1 = \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi} = \frac{64R}{48\pi};$$

otoż $9\pi^2$ jest większe od 64. Wykonawszy rachunki liczebne, otrzymujemy :

$$x_1 = 0{,}4246\,R,$$

$$x' = 0{,}5888\,R;$$

ztąd :

$$x' - x_1 = GQ = 0{,}1642\,R.$$

Porównywując dwa przypadki ścian kołowych, rozpatrywane pod § 48 i § 50, widzimy, że w razie jeżeli półkole zwrócone jest wierzchołkiem swoim ku powierzchni wolnej (fig 31), środek ciśnienia będzie się znajdować niżej, aniżeli w przypadku, kiedy półkole będzie położonem odwrotnie, to jest wierzchołkiem do dołu (fig. 34); to zniżenie się środka ciśnienia równem jest :

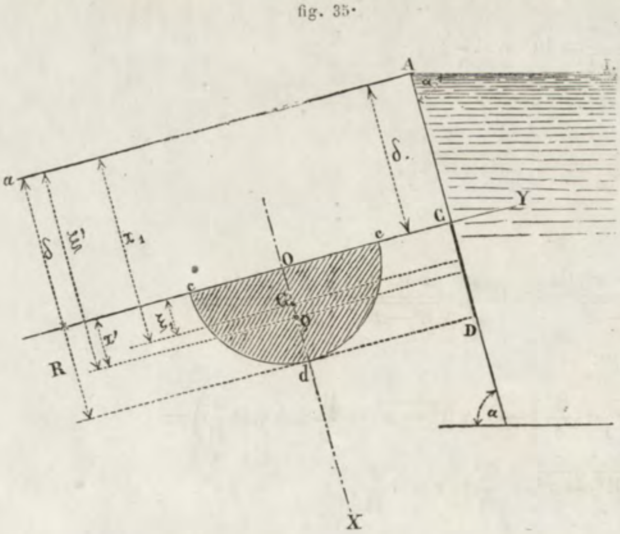
$$0{,}6965\,R - 0{,}5888\,R = 0{,}1077\,R;$$

to jest przechodzi $\frac{1}{10}$ część promienia koła.

51· Rozpatrzmy teraz przykład ogólniejszy od poprzednich, i z którego przykłady § 49 i § 50 wyprowadzą się jako przypadki szczególne. Niech więc będzie następujące zadanie :

VI Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na półkole, którego średnica znajduje się na odległości** $= \delta$ **od poziomej** Aa (fig. 35).

fig. 35·



Wiemy już z poprzedniego, że odcięta ξ środka ciężkości półkola, liczona od jego środka O, wyraża się tak :

$$\xi_1 = OG = \frac{4}{3\pi}R;$$

a więc odległość tego środka ciężkości od poziomej Aa, czyli x_1, będzie :

$$x_1 = \delta + \xi_1 = \delta + \frac{4}{3\pi}R;$$

nadto :

$$\Omega = \frac{1}{2}\pi R^2;$$

http://rcin.org.pl

zatem :

$$P = \Pi \, \mathrm{wst}\alpha \, x_1 \Omega = \Pi \, \mathrm{wst}\alpha \, \frac{1}{6} R^2 (3\pi\delta + 4R).$$

Ażeby znaleźć środek ciśnienia, zwróćmy się do ogólnego wzoru (B) podanego pod § 45 :

$$\text{(B)} \qquad x' = \frac{\int (\Pi z d\omega) x}{\int \Pi z d\omega} = \frac{\int (z u dx) x}{\int z u dx};$$

gdzie z oznacza wysokość pionową, czyli odległość elementu ściany od powierzchni wolnej AB; $\Pi z u dx$ — ciśnienie elementarne; $(\Pi z u dx)x$ — moment tego ciśnienia względem pewnej osi, od której liczymy odcięte x; nareszcie x' — odległość środka ciśnienia od osi względem jakiej bierzemy momenta; tak, że odnosząc dane półkole do jego środka O, i biorąc momenta względem osi OY, otrzymane ztąd x' będzie się liczyć od średnicy koła cY.

Zauważywszy nadto, że dla każdego punktu ściany mamy :

$$z = (\delta + x)\,\mathrm{wst}\alpha,$$

wzór, z którego znajdziemy x', przybierze formę :

$$\text{(B')} \qquad x' = \frac{\int (\delta + x) u x dx}{\int (\delta + x) u dx} = \frac{\int (\delta x + x^2) u dx}{\int (\delta + x) u dx};$$

a że z równania koła, odniesionego do osi OY, OX :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

otrzymujemy :

$$u = 2\sqrt{R^2 - x^2},$$

i całkowanie powinno być wykonane na *całej przestrzeni ciśnionej powierzchni*, to jest od $x = 0$ do $x = R$, piszemy :

$$\text{(B'')} \qquad x' = \frac{\delta \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx + \int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx}{\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx + \delta\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx}.$$

Otoż, widzieliśmy pod § 50 że :

$$\text{(1)} \qquad \int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{2x^3 - R^2 x}{8}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^4}{8}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{R}\right]_0^R = \frac{1}{16}\pi R^4;$$

$$\text{(2)} \qquad \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{1}{3}R^3;$$

Nareszcie, znajdziemy łatwo że :

$$\text{(3)} \qquad \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = R^2 \int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R^2\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{R} - \left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{R}\right)$$

$$= \left[-\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{R}\right]_0^R = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

http://rcin.org.pl

Wprowadzając (1), (2) i (3) do (B''), otrzymamy po uproszczeniu:

$$(B''')\qquad x' = \frac{16\delta R^3 + 3\pi R^4}{16R^3 + 12\delta\pi R^2}.$$

Tak się wyrazi, w funkcyi δ, odległość środka ciśnienia Q od średnicy *cc* koła. Chcąc mieć odległość punktu Q od poziomej A*a*, potrzeba wziąć:

$$\xi' = \delta + x'.$$

Wniosek. Ze wzoru (B''') możemy wyprowadzić, jako szczególne przypadki, następujące przykłady:

1° Jeżeli $\delta = 0$, to jest średnica *cc* znajduje się na powierzchni wolnej, wtedy:

$$x' = \frac{3\pi R^4}{16R^3} = \frac{3}{16}\pi R;$$

co już widzieliśmy pod § 50.

2° Jeżeli $\delta = R$, wtedy dopełniając półkole *cdc* do całego koła, to ostatnie będzie stycznem do poziomej A*a*; będziemy więc w przypadku rozpatrzonym pod § 49.

Wzór (B''') zamieni się na następujący:

$$x' = \frac{16R^4 + 3\pi R^4}{16R^3 + 12\pi R^3} = R\,\frac{16 + 3\pi}{16 + 12\pi};$$

czyli liczebnie:

$$x = 0,4735\,R.$$

Otoż, wartość na x', jakąśmy otrzymali pod § 49, wyraża się tak:

$$x' = R\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{3\pi + 4}\right);$$

ale x' było tam liczonem od poziomej A*a*, (fig 33) względem której brano momenta; gdybyśmy chcieli mieć odległość środka ciśnienia od średnicy *cc*, powinnibyśmy od tej wartości odjąć R, co nam daje:

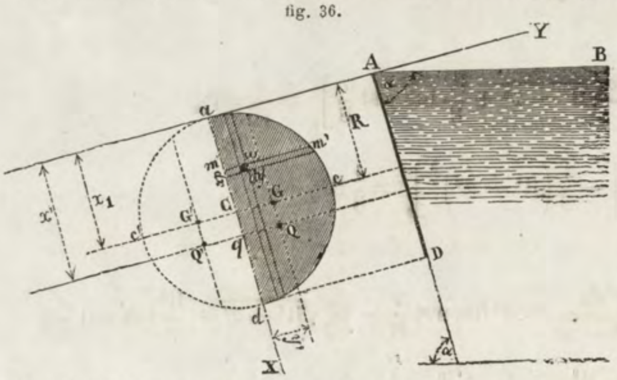
$$R\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{3\pi + 4}\right) - R = R\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{3\pi + 4}\right) = R\left(\frac{3\pi + 4 + 12}{4(3\pi + 4)}\right) = R\,\frac{16 + 3\pi}{16 + 12\pi}.$$

52. VII Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na półkole, którego średnica** *ad* **jest prostopadłą do poziomej** A*a* **(fig 36).**

Niech dane półkole ma położenie *acda*. Mamy najprzód:

$$x_1 = R,$$

fig. 36.



więc:

$$\Pi w st \alpha x_1 \Omega = \frac{1}{2}\Pi w st \alpha \pi R^3.$$

Ponieważ ciśniona powierzchnia nie ma podłużnej osi symetryi, potrzeba więc, dla wyznaczenia środka ciśnienia, mieć dwie jego spółrzędne x' i y' (§ 41).

Równanie koła odniesionego do stycznej *a*Y i do średnicy *a*X:

$$x^2 + y^2 = 2Rx,$$

http://rcin.org.pl

daje dwie wartości na y:

$$y = \pm\sqrt{2Rx - x^2};$$

z których mamy wziąć tylko y ze znakiem $+$; tak że szerokość u ściany w jakimkolwiek jej punkcie będzie:

$$u = y = \sqrt{2Rx - x^2};$$

Zastosujmy teraz wzory (B) i (C) wyprowadzone pod § 41. Mamy:

$$x' = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx}; \quad y' = \frac{\int\int xy\, dx\, du}{\int xu\, dx};$$

Otoż, widzieliśmy pod § 45 i § 47 że:

$$(1) \qquad x' = \frac{\int x^2 u dx}{\int x u dx} = \frac{\int_0^{2R} x^2\sqrt{2Rx - x^2}\, dx}{\int_0^{2R} x\sqrt{2Rx - x^2}\, dx} = \frac{\frac{5}{8}\pi R^4}{\frac{1}{2}\pi R^3} = \frac{5}{4}R;$$

Pozostaje zatem znaleźć wartość na y', która, zważywszy że dla półkoła $u = y$, i $du = dy$, przedstawi się tak:

$$y' = \frac{\int\int xy\, dx\, dy}{\int xy\, dx} = \frac{\int\int xy\, dx\, dy}{\int_0^{2R} x\sqrt{2Rx - x^2}\, dx} = \frac{\int\int x dx\, y dy}{\frac{1}{2}\pi R^3}.$$

Dla znalezienia tej podwójnej całki, uważamy naprzód x i dx za ilości stałe, to jest, bierzemy tylko momenta, względem osi aX, wszystkich elementarnych ciśnień ($\Pi z dx dy$) wywieranych na przestrzeni taśmy poziomej mm' naszej ściany; następnie, zmieniając x, czyli posuwając taśmę mm' wzdłuż osi aX, otrzymamy summę momentów elementarnych ciśnień wywieranych na całą powierzchnię $acda$. Więc piszemy:

$$\int\int x dx\, y dy = \int_0^{2R} x dx \int_0^{y} y dy = \int_0^{2R} x dx\, \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{2R} (2Rx - x^2)\, x dx = \frac{2}{3}R^4;$$

zkąd:

$$(2) \qquad y' = \frac{\frac{2}{3}R^4}{\frac{1}{2}\pi R^3} = \frac{4R^4}{3\pi R^3} = \frac{4}{3\pi}R.$$

Za pomocą wartości (1) i (2) położenie szukanego środka ciśnienia jest najzupełniej wyznaczone. Wartość (2), jaką znajdziemy na y', jest nic innego jak odległość CG środka ciężkości G półkoła od średnicy ad (§ 48); tak że środek ciężkości i środek ciśnienia Q ściany znajdują się na jednej prostej GQ, prostopadłej do poziomej Aa.

Uważając drugą połowę koła $ac'da$, środek jej ciężkości G' i środek ciśnienia Q' znalazłyby się na prostej G'Q', równoległej do osi aX, i odległej od niej na $Q'q = qQ = \frac{4}{3\pi}R$; środki cięż-

http://rcin.org.pl

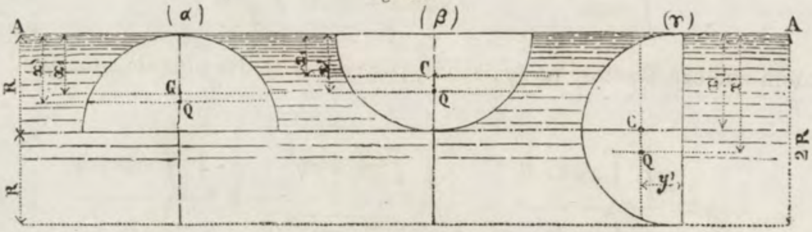
kości, jak również środki ciśnienia, zlewają się, odpowiednio, w punkta C i q, kiedy dwa półkoła są przyłożone do siebie i stanowią jedno koło $acdc'a$. Gdyby ściana $acda$ przewyższała połowę koła, prosta GQ zbliżałaby się do średnicy ad; środek ciężkości G i środek ciśnienia Q, wzajemnie sobie towarzysząc, przybliżałyby się do punktów C i q, pozostając zawsze 1) na równoległych OC i Qq, 2) na jednej i tej samej prostej, skierowanej podług największego spadku ściany.

Wyobrażając drugą połowę koła $adc'a$ jako powstającą z ruchu prostej ad, — której długość zmienia się w taki sposób, aby jej końce a i d znajdowały się ciągle na okręgu $ac'd$, — widzimy, że ruch postępowy prostej GQ będzie powolniejszy aniżeli ruch średnicy ad, gdyż w czasie kiedy ta ostatnia przebiega drogę $Cc' = R$, prosta CQ postąpi tylko o ilość:

$$GC = \frac{4}{3\pi} R = 0{,}4246\, R.$$

Uwaga. Dobrze będzie porównać rezultata jakie otrzymaliśmy dla *ściany półkołowej*, przy rozmaitem położeniu średnicy koła względem poziomej AA. W tym celu przedstawiamy na fig. 37 trzy przykłady (α) (β) (γ), rozpatrzone pod §§. 48, 50, 52 i podajemy liczebne wypadki, otrzymane dla każdego z nich i tyczące się środka ciężkości, ciśnienia i środka ciśnienia.

fig. 37.



$$\Omega = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Przypadek (α), § 48
$$\begin{cases} x_1 = R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) & = 0{,}5754R \\ P_\alpha = \Pi w s t \alpha x_1 \Omega & = 0{,}9034R^3 \\ x' = R\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{3\pi - 4}\right) & = 0{,}6965R. \end{cases}$$

Przypadek (β), § 50
$$\begin{cases} x_1 = R\frac{4}{3\pi} & = 0{,}4246R \\ P_\beta = \Pi w s t \alpha x_1 \Omega & = 0{,}6666R^3 \\ x' = \frac{3}{16}\pi R & = 0{,}5888R. \end{cases}$$

Przypadek (γ), § 52
$$\left\{\begin{matrix} x_1 = R & = & R \\ x' = \frac{5}{4}R & = & 1{,}2500R \\ P_\gamma = \Pi w s t \alpha x_1 \Omega & = & 1{,}9625R^3. \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} y_1 = y' = R\frac{4}{3\pi} = 0{,}4246R.$$

Jedno i to samo półkole, w rozmaitych położeniach wskazanych na figurze, ponosi bardzo różn ciśnienie; ograniczając się jedną cyfrą dziesiętną, stosunek tych cisnień wyrazi się tak:

$$P_\alpha : P_\beta : P_\gamma = 0{,}9R^3 : 0{,}7R^3 : 2R^3 = 9 : 7 : 20.$$

http://rcin.org.pl

Nareszcie, dla porównania przypadku (α) z tym przypadkiem kiedy półkole (β), zniżając się, zajmie położenie dopełniające półkole (α) do całego koła, podajemy wypadki otrzymane pod § 49:

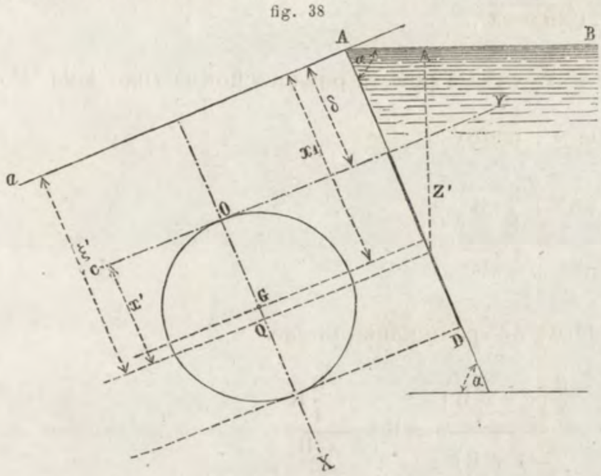
$$x_1 = R\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 1,4246R;$$

$$P = \Pi w \sin\alpha x_1 \Omega = 2,2366R^3;$$

$$x' = R\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{3\pi + 4}\right) = 1,4735R.$$

53. VIII PRZYKŁAD. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na powierzchnię koła zajmującego jakiekolwiek na ścianie położenie** (fig. 38). Zadanie to rozwiązuje się z wszelką łatwością, i podajemy ten przykład jedynie dla tego, że takowy później będzie nam potrzebny.

fig. 38



Niech więc odległość stycznej Cc do koła od poziomej Aa będzie δ. Mamy naprzód:

(1) $P = \Pi w \sin\alpha x_1 \Omega = \Pi w \sin\alpha (\delta + R)\pi R^2.$

Biorąc następnie styczną Cc za oś OY, i oznaczając x' odległość środka ciśnienia od tej stycznej, na mocy wzoru (B') § 51, mieć będziemy:

$$x' = \frac{\int (\delta x + x u d x}{\int (\delta + x) u dx},$$

gdzie wartość na u otrzymujemy z równania koła odniesionego do osi OX i OY:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

które daje:

$$u = 2\sqrt{2Rx - x^2};$$

a że całkowanie powinno być wykonane od $x = 0$ do $x = 2R$, zatem będzie:

$$x' = \frac{\delta \int_0^{2R} x\sqrt{2Rx - x^2}\,dx + \int_0^{2R} x^2\sqrt{2Rx - x^2}\,dx}{\delta \int_0^{2R} \sqrt{2Rx - x^2}\,dx + \int_0^{2R} x\sqrt{2Rx - x^2}\,dx}.$$

Otoż, wszystkie te całki wyprowadzamy natychmiast z § 45, i będziemy mieli:

$$\int_0^{2R} x\sqrt{2Rx - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi R^3;$$

$$\int_0^{2R} x^2\sqrt{2Rx - x^2}\,dx = \frac{5}{8}\pi R^4;$$

$$\int \sqrt{2Rx - x^2}\,dx = 2R\left[-\sqrt{2Rx - x^2} + R\,\text{łuk}\,\text{wst}\,\frac{x - R}{R}\right]$$
$$- \left[-\frac{x + 3R}{2}\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{3R^2}{2}\,\text{łuk}\,\text{wst}\,\frac{x - R}{R}\right];$$

http://rcin.org.pl

zkąd, po uproszczeniu, otrzymujemy:

$$\int \sqrt{2Rx-x^2}\,dx = \frac{x-R}{2}\sqrt{2Rx-x^2} + \frac{R^2}{2}\,\text{łuk wst}\,\frac{x-R}{2},$$

a następnie znajdujemy

$$\int_0^{2R} \sqrt{2Rx-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Wypadek ten moglibyśmy byli napisać odrazu, zauważywszy że równanie koła dając:

$$y = \pm\sqrt{2Rx-x^2},$$

$\int_0^{2R} \sqrt{2Rx-x^2}\,dx$ jest nic innego jak $\int_0^{2R} y\,dx$, — co wyraża połowę powierzchni naszego koła. Po podstawieniu znalezionych wartosci we wzorze na x', mamy:

$$x' = \frac{\delta\,\frac{1}{2}\pi R^3 + \frac{5}{8}\pi R^4}{\delta\,\frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^3};$$

wyrażeniu temu możemy nadać formę prostszą i łatwą do spamiętania, pisząc:

$$(2)\qquad x' = \frac{\pi R^3\left(\frac{1}{2}\delta + \frac{5}{8}R\right)}{\pi R^2\left(\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}R\right)} = \frac{\frac{R}{2}\left(\delta + \frac{5}{4}R\right)}{\frac{1}{2}(\delta + R)} = R\,\frac{\delta + \frac{5}{4}R}{\delta + R};$$

zkąd, wykonywując wskazane dzielenie, znajdujemy ostatecznie:

$$(2')\qquad x' = R\left(1 + \frac{\frac{1}{4}R}{\delta + R}\right) = R + \frac{1}{4}\,\frac{R^2}{R+\delta}.$$

Jeżeli koło jest styczne do poziomej Aa, wtedy we wzorze (2) $\delta = 0$, i otrzymujemy $x' = \frac{5}{4}R$; co jest nam wiadomém.

Wartość x' otrzymana ze wzoru (2) wyraża odległość środka ciśnienia od stycznej Cc, więc odległość tego punktu od poziomej Aa będzie: $\xi' = \delta + x'$, a od powierzchni wolnej AB wyrazi się ona przez: $z' = (\delta + x')\,\text{wst}\,\alpha$.

Porównywując wzór (2') z wartością x', znalezioną dla koła stycznego do powierzchni wolnej:

$$x' = \frac{5}{4}R = R + \frac{1}{4}\,\frac{R^2}{R},$$

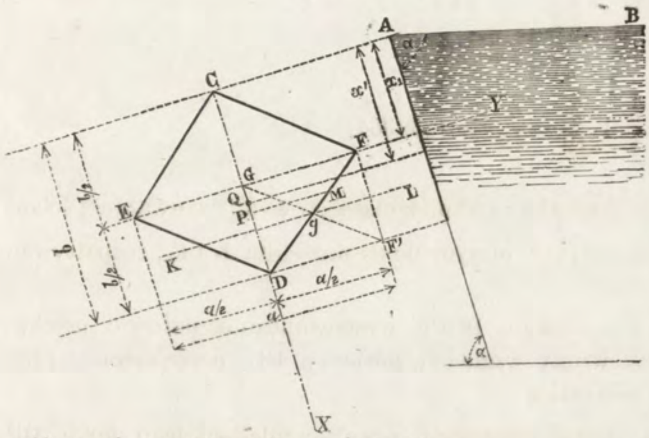
widzimy, że środek ciśnienia Q zbliża się do środka ciężkości G w miarę zwiększania odległości stycznej Cc od poziomej Aa, tak że punkt Q zleje się z punktem G, gdy $\delta = \infty$. Więc mniejsze lub większe zanurzenie koła w cieczy oddala lub zbliża, względem środka ciężkości koła, jego środek ciśnienia; i gdy δ zmienia się od $\delta = 0$ do $\delta = \infty$, odległość środka ciśnienia od środka ciężkości zmienia się od $\frac{1}{4}R$ do zera.

http://rcin.org.pl

54. Dotychczas rozpatrywaliśmy ściany ograniczone linją krzywą ciągłą; przejdźmy teraz do ścian o konturze utworzonym z linij prostych. Niech więc będzie:

IX PRZYKŁAD. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na powierzchnię kwadratu ukośnego, którego jedna z przekątnych jest skierowaną podług największego spadku ściany i ma swój wierzchołek na powierzchni wolnej** AB (fig. 39).

fig. 39



Oznaczmy:

$$EF = a, \qquad CD = b.$$

Punkt G będąc środkiem ciężkości, mamy:

$$x_1 = \frac{b}{2}, \text{ a powierzchnia } \Omega = \frac{1}{2}ab;$$

więc:

$$P = \Pi w \operatorname{st} \alpha x_1 \Omega = \Pi w \operatorname{st} \alpha \; \frac{1}{4}\, ab^2.$$

Ponieważ środek ciśnienia znajduje się na przekątnej CD, dosyć jest znaleźć wartość na x', a w tym celu użyć wzoru:

$$x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1};$$

zadanie będzie rozwiązanem, jeżeli znajdziemy moment bezwładności powierzchni ściany CEDF, względem poziomej EF, przechodzącej przez środek ciężkości G.

Otoż, aby mieć I_G, dosyć będzie znaleźć moment bezwładności trójkąta GFD względem osi GY, i wartość otrzymaną wziąć cztery razy.

Oznaczając $GP = x$, $PM = y$, moment bezwładności nieskończenie cienkiej taśmy PM, względem osi Y, wyrazi się przez: $(ydx)x^2$, a moment całego trójkąta GFD będzie:

$$(1) \qquad I_\Delta = \int x^2 y dx.$$

Idzie o wyrażenie y w funkcyi x i ilości nam danych a i b. Owoż, mamy:

$$PM : GF = PD : DG,$$

czyli:

$$y : \frac{a}{2} = \left(\frac{b}{2} - x\right) : \frac{b}{2};$$

zkąd znajdujemy:

$$y = \frac{ab - 2ax}{2b};$$

a zatem:

$$I_\Delta = \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 \, \frac{(ab - 2ax)}{2b} \, dx = \frac{a}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx - \frac{a}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} x^3 dx =$$

$$(2) \qquad = \frac{ab^3}{48} - \frac{ab^3}{4 \times 16} = \frac{ab^3}{4 \times 48};$$

http://rcin.org.pl

a że $I = 4 I_\Delta$, więc moment bezwładności ściany CEDF, względem poziomej EF, będzie:

$$(3) \qquad I_G = \frac{1}{48} ab^3;$$

zkąd:

$$k^2_G = \frac{I_G}{\Omega} = \frac{\frac{1}{48}ab^3}{\frac{1}{2}ab} = \frac{1}{24} b^2;$$

a następnie:

$$(4) \qquad x = \frac{b}{2} + \frac{\frac{1}{24}b^2}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{2} + \frac{b}{12} = \frac{7}{12} b = 0{,}5833 b;$$

widzimy ztąd że położenie środka ciśnienia jest niezależne od poprzecznego wymiaru uważanej ściany.

Uwaga. Nie trudno jest okazać, że wyrażenia (2) i (3) otrzymane na momenta I_Δ i I_G, rozpatrywane względem osi EF, przedstawiają:

pierwsze, I_Δ — moment bezwładności prostokąta DGFF' wystawionego na połowie przekątnych kwadratu ukośnego, wzięty względem poziomej KL, przechodzącej przez środek ciężkości g tego prostokąta;

drugie, I_G — moment bezwładności tegoż prostokąta wzięty względem jego boku GF.

I w rzeczy samej, możemy (2) i (3) napisać pod formą następującą:

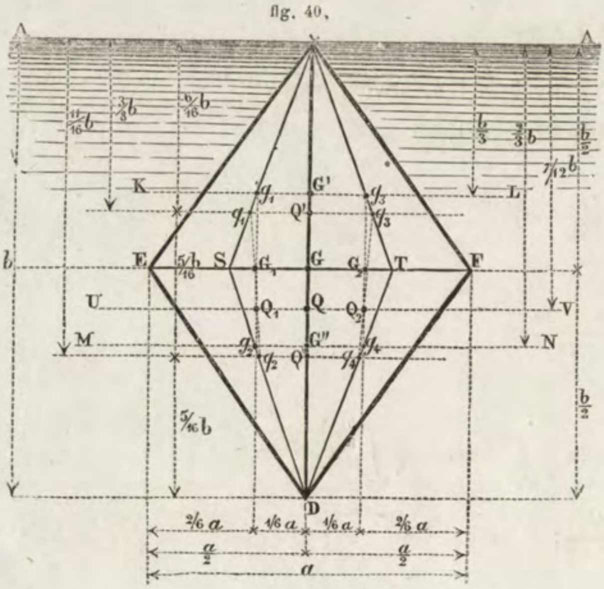
$$I_\Delta = \frac{1}{4 \times 48}\left[ab^3 = \left(2\frac{a}{2}\right)\left(2\frac{b}{2}\right)^3 = 2\,GF \times (2\,GD)^3 = 16.GF.GD^3\right] = \frac{1}{12} GF \cdot GD^3;$$

$$I_G = \frac{1}{48}\left[ab^3 = \left(2\frac{a}{2}\right)\left(2\frac{b}{2}\right)^3 = 2\,GF \times (2\,GD)^3 = 16\,GF.\,GD^3\right] = \frac{1}{3} GF.\,GD^3.$$

Oznaczając przekątne EF i CD przez 2α i 2β, mamy: $GF = \alpha$, $GD = \beta$, i wyrażenia (2) i (3) przyjmują formę powszechnie używaną:

$$I_\Delta = \frac{1}{12}\alpha\beta^3; \qquad I_G = \frac{1}{3}\alpha\beta^3.$$

fig. 40.



55. Uważając ścianę CEDF jako złożoną z dwóch trójkątów: CEF i EDF, lub też z trójkątów: CED i CFD, szukając ciśnienia i środka ciśnienia dla każdego z tych trójkątów zosobna i składając otrzymane rezultata, przyjdziemy do wypadku znalezionego powyżej.

Zajmiemy się teraz tym nowym sposobem rozwiązania zadania, tem bardziej, że to nastręcza nam sposobność rozpatrywania ścian trójkątnych. Niech więc

I) Ściana CEDF (fig 40) będzie uważana jako złożona z dwóch trójkątów: CEF i EDF.

a) Szukajmy naprzód ciśnienia wypadkowego i środka ciśnienia na trójkąt CEF, mający swój wierzchołek C na powierzchni wolnej AB.

http://rcin.org.pl

Wiemy że środek ciężkości G′ tego trójkąta znajduje się na odległości $\frac{2}{3}$ CG od poziomej AA; więc:

(1) $$x_1 = \frac{2}{3}\,\mathrm{CG} = \frac{2}{3}\,\frac{b}{2} = \frac{b}{3};$$

nadto,

(2) $$\Omega = \frac{1}{4}\,ab;$$

zatem:

(3) $$\mathrm{P}' = \Pi w \sin\alpha\, x_1 \Omega = \Pi w \sin\alpha\,\frac{1}{12}\,ab^2.$$

Co do środka ciśnienia, wiemy że takowy będzie się znajdować na podłużnej osi symetryi CG; idzie więc o znalezienie jednej tylko wartości x', i otrzymamy ją używając wzorów:

(α) $$x' = x_1 + \frac{k^2_{\mathrm{G}}}{x_1},$$

(β) $$\mathrm{I_A} = \mathrm{I_G} + d^2\Omega.$$

Otoż, na mocy (2) § 54, mamy natychmiast moment bezwładności trójkąta CEF względem jego boku EF:

$$\mathrm{I_{EF}} = 2\mathrm{I_A} = 2\,\frac{ab^3}{4\times 48} = \frac{1}{2\times 48}\,ab^3;$$

zkąd:

$$k^2_{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{I_{EF}}}{\Omega} = \frac{1}{24}\,b^2;$$

a następnie z (β):

$$k^2_{\mathrm{G}} = k^2_{\mathrm{A}} - d^2;$$

czyli:

(4) $$k^2_{\mathrm{KL}} = k^2_{\mathrm{EF}} - \mathrm{G'G}^2 = \frac{1}{24}\,b^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \frac{1}{3\times 24}\,b^2.$$

Podstawiwszy (1) i (4) do (α) otrzymujemy:

(5) $$x' = \frac{b}{3} = \frac{\frac{b^2}{3\times 24}}{\frac{b}{3}} = \frac{b}{3} + \frac{b}{24} = \frac{3}{8}\,b = \frac{6}{8}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{3}{4}\,\mathrm{CG} = \frac{3}{4}\,h;$$

co pokazuje, że *środek ciśnienia trójkąta* CEF *znajduje się w punkcie* Q′, *odległym od wierzchołka* C *na* $\frac{3}{4}$ *wysokości trójkąta.*

b) Znajdźmy teraz ciśnienie i środek ciśnienia na trójkąt EDF. Podstawa EF tego trójkąta znajduje się na odległości $\frac{b}{2}$ od poziomej AA; ale dla uogólnienia zadania, nie wyznaczajmy tej odległości, i nazwijmy ją przez δ. Ponieważ środek ciężkości trójkąta EDF jest w punkcie G″ takim, że $GG'' = \frac{1}{3}GD$, więc:

$$(1') \qquad x_1 = \delta + GG'' = \delta + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\right) = \delta + \frac{1}{6}b;$$

a zatem na mocy (2) i (3):

$$(3') \qquad P'' = \Pi w st\alpha \left(\delta + \frac{1}{6}b\right)\frac{1}{4}ab.$$

Ponieważ momenta bezwładności trójkątów CEF i EDF, względem EF, są sobie równe, i ich środki ciężkości G′ i G″ znajdują się na jednakowej odległości od poziomej EF, wypada ztąd że $k^2_{MN} = k^2_{KL}$; więc, zastosowując wzór (α) i wartość (4), będziemy mieli:

$$(5') \qquad x' = \left(\delta + \frac{1}{6}b\right) + \frac{\frac{1}{3\times 24}b^2}{\delta + \frac{1}{6}b} = \frac{b^2 + 2(6\delta + b^2)^2}{12(6\delta + b)}.$$

W szczególnym przypadku, kiedy $\delta = 0$, to jest kiedy podstawa EF trójkąta EDF znajduje się na powierzchni wolnej AA, wtedy z (3′) i (5′) otrzymujemy:

$$P'' = \Pi w st\alpha \frac{1}{24}ab^2.$$

Porównanie tej wartości z wyrażeniem (3) pokazuje, że *ciśnienie wypadkowe wywierane na trójkąt którego wierzchołek leży na powierzchni wolnej jest dwa razy większe od ciśnienia, jakieby było wywartem na ten sam trójkąt obrócony wierzchołkiem do dołu, a mający na powierzchni wolnej swoją podstawę.*

Wzór (5′) przyjmie formę:

$$x' = \frac{b^2 + 2b^2}{12b} = \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}2\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}GD = \frac{1}{2}h;$$

to jest, *środek ciśnienia dla trójkąta mającego swą podstawę na powierzchni wolnej znajduje się na połowie wysokości trójkąta.*

W przypadku rozpatrywanym, ażeby mieć ciśnienie wypadkowe i środek ciśnienia na trójkąt EDF w jego rzeczywistém położeniu, potrzeba we wzorach (1′), (3′) i (5′) położyć $\delta = \frac{b}{2}$, w skutek czego otrzymamy:

$$(1^{bis}) \qquad x_1 = \frac{b}{2} + \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}b;$$

$$(3^{bis}) \qquad P'' = \Pi w st\alpha \frac{1}{6}ab^2;$$

tak, że *przy położeniu jakie trójkąty* CEF i EDF *zajmują na figurze, ciśnienie na drugi trójkąt jest dwa razy większe aniżeli ciśnienie na pierwszy.*

http://rcin.org.pl

Co zaś do wartości na x', mamy:

$$x' = \frac{b^2 + 2\left(6\frac{b}{2} + b\right)^2}{12\left(6\frac{b}{2} + b\right)};$$

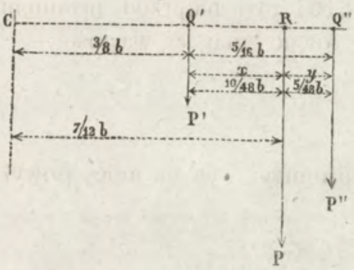
zkąd, po uproszczeniu, znajdziemy:

$$(5^{\text{bis}}) \qquad x' = \frac{11}{16}\,b;$$

co nam wyznacza punkt Q'.

Mając natężenie dwóch sił P' i P'' normalnych do płaszczyzny CEDF, a więc do siebie równoległych, i ich punkta przyczepienia Q' i Q'', znajdziemy punkt przyczepienia i natężenie ciśnienia wypadkowego P na całą powierzchnię ściany. Mamy najprzód:

fig. 41.



$$P = P' + P'' = \Pi \operatorname{wst} \alpha \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) ab^2 = \Pi \operatorname{wst} \alpha \,\frac{1}{4}\, ab^2;$$

Oznaczając x i y odległości od punktów Q' i Q'' (fig 41) szukanego punktu przyczepienia wypadkowej P, będziemy mieli:

$$P' : P'' = y : x,$$

a że $\quad P'' = 2P', \qquad$ więc $\quad x = 2y;$

mamy nadto:

$$x + y = Q'Q'' = \left(\frac{11}{16}b - \frac{3}{8}b\right) = \frac{5}{16}\,b;$$

zkąd wyciągamy:

$$x = \frac{10}{48}\,b, \qquad y = \frac{5}{48}\,b;$$

Zatem odległość od poziomej AA (fig 39) punktu R, w którym jest przyczepiona wypadkowa ostateczna ciśnień wywieranych na cały kwadrat ukośny CEDF, będzie:

$$CR = CQ' + x = \frac{3}{8}b + \frac{10}{48}b = \frac{7}{12}\,b;$$

to jest, punkt R na (fig 41) jest nic innego jak punkt Q na fig 39 i 40, znaléziony inną metodą pod § 54.

56. II) Uważajmy teraz naszą ścianę jako złożoną z dwóch trójkątów: CDE i CDF. Ponieważ te trójkąty są symetryczne względem spólnego im boku CD, *skierowanego podług największego spadku ściany*, więc rezultata znalezione dla trójkąta CDE będą się stosować i do drugiego trójkąta CDF. A że pozioma EG dzieli pierwszy trójkąt na dwa: CEG i EGD, zadanie więc nasze sprowadza się do szukania ciśnienia i środka ciśnienia dla każdego z tych dwóch trójkątów zosobna.

a) Trójkąt CEG. Środek ciężkości g_1 powierzchni tego trójkąta znajduje się na $\frac{2}{3}$ CS, łączącej

http://rcin.org.pl

wierzchołek C ze środkiem EG; mamy zatem:

(1) $$x_1 = \mathrm{CG}' = \frac{b}{3};$$

(2) $$\Omega = \frac{1}{8}ab;$$

(3) $$\mathrm{P}' = \Pi w \operatorname{st}\alpha x_1 \Omega = \Pi w \operatorname{st}\alpha \frac{1}{24}ab^2.$$

Ponieważ linja CS jest linją *średnicową* odpowiadającą kierunkowi poziomemu prostych prowadzonych w trójkącie CEG, zatem środek ciśnienia znajduje się na CS; pozostaje więc znaleźć wartość na x' za pomocą wzoru:

(4) $$x' = x_1 + \frac{k^2_{g_1}}{x_1}.$$

Otoż, promień wirowania trójkąta CEG, względem poziomej poprowadzonej przez g_1, będzie taki sam jak i promień wirowania trójkąta CEF rozpatrywany pod § 55; gdyż najprzód, promienie wirowania trójkątów CEG i CEF, względem poziomej EF, są sobie równe i mają za wartość:

$$k^2_{\mathrm{EF}} = \frac{1}{24}b^2;$$

powtóre, środki ciężkości G' i g_1 znajdują się na jednej i tej samej poziomej; więc na mocy powyższego, będziemy mieli:

$$k^2_{g_1} = \frac{1}{3\times 24}b^2,$$

i znajdziemy z (1) i (4):

(5) $$x' = \frac{3}{8}b;$$

to jest, środki ciśnienia: q_1 — dla trójkąta CEG i Q'— dla trójkąta CEF, leżą na jednej poziomej.

Wyraźmy teraz, w funkcyi ilości a, odległość $\mathrm{Q}'q_1$ czyli y'. Mamy:

$$\mathrm{Q}'q_1 : \mathrm{GS} = \mathrm{CQ}' = \mathrm{CG},$$

zkąd:

(6) $$\mathrm{Q}'q_1 = y' = \frac{\frac{a}{4}\times\frac{3}{8}b}{\frac{1}{2}b} = \frac{6}{32}a;$$

Wyrażając podobnież odległość $\mathrm{G}'g_1$, otrzymujemy:

(7) $$\mathrm{G}'g_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{6}a.$$

b) TRÓJKĄT EGD. Środek ciśnienia g_2 znajduje się na $\frac{2}{3}$ DS, licząc od punktu D; a zatem, odle-

http://rcin.org.pl

głość tego środka od poziomej AA będzie:

(4') $$x_1 = \frac{b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{2}{3} b;$$

w skutek czego:

(3') $$P'' = \Pi w s t \alpha \frac{1}{12} a b^2;$$

co pokazuje, że ciśnienie na trójkąt EGD jest dwa razy większe, aniżeli na trójkąt jemu równy CEG.

Środek ciśnienia q_2 znajduje się na linji DS, i odległość tego punktu od poziomej AA wyrazi się

(5') $$x' = \frac{2}{3} b + \frac{\frac{1}{3 \times 24} b^2}{\frac{2}{3} b} = \frac{11}{16} b;$$

to jest, q_2 znajduje się na tejże samej poziomej co i środek ciśnienia Q" znaleziony dla trójkąta EFD.

Odległość $Q'' q_2$ otrzyma się z proporcyi:

$$Q'' q_2 : GS = DQ'' : DG,$$

zkąd:

(6') $$Q'' q_2 = y' = \frac{\frac{a}{4} \times \frac{5}{16} b}{\frac{b}{2}} = \frac{5}{32} a;$$

Zważywszy że środki ciężkości g_1 i g_2 znajdują się na linji prostej równoległej do CD, będzie:

(7) $$G'' g_2 = G' g_1 = \frac{1}{6} a.$$

Ażeby mieć ciśnienie wypadkowe P_1 na cały trójkąt CDE, dodajemy (3) i (3') i otrzymujemy:

$$P_1 = P' + P'' = \Pi w s t \alpha \frac{1}{8} a b^2.$$

fig. 42.

Punkt przyczepienia siły P_1 będzie leżeć na linji (fig. 42 i 40) łączącej punkta q_1 i q_2, znajdujące się na poziomych poprowadzonych przez Q' i Q", i odległych od siebie na

$$Q'Q'' = \frac{5}{16} b;$$

a że $P'' = 2P'$, więc szukany punkt przyczepienia Q_1 znajdzie się na poziomej przeprowadzonej na odległości od punktu Q' równej:

$$Q'Q'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} b = \frac{10}{48} b;$$

http://rcin.org.pl

czyli, że odległość X_1 punktu Q_1 od poziomej AA (fig. 40) będzie:

$$(\gamma) \qquad X_1 = CQ' + \frac{10}{48}b = \frac{3}{8}b + \frac{5}{24}b = \frac{7}{12}b;$$

co pokazuje, że punkt Q_1 będzie się znajdować na poziomej poprowadzonej przez punkt Q przyczepienia wypadkowego ciśnienia na całą ścianę CEDF (wzór 4, § 54).

Znajdźmy teraz wyrażenie na długość QQ_1. Trójkąty $q_2Q_1\alpha$ i q_2q_1,β i wzory (6). (6') i (7'), dają:

$$QQ_1 = Q\alpha + \alpha Q_1 = Q''q_2 + \alpha Q_1 = \frac{5}{32}a + \alpha Q_1;$$

$$Q_1\alpha : q_1\beta = q_2\alpha : q_2\beta = \frac{5}{48}b : \frac{15}{48}b = 1 : 3;$$

nadto:

$$q_1\beta = q_1Q' - \beta Q' = q_1Q' - q_2Q'' = \frac{6}{32}a - \frac{5}{32}a = \frac{1}{32}a;$$

zatem:

$$Q_1\alpha = \frac{1}{32}a \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3x32a};$$

w skutek czego:

$$(\delta) \qquad QQ_1 = \frac{5}{32}a + \frac{1}{3\times 32}a = \frac{1}{6}a;$$

a to nam pokazuje że proste: g_1g_2, q_1q_2 i UV, (fig. 40) poprowadzone przez punkt Q, przecinają się wszystkie trzy w jednym i tym samym punkcie Q_1; punkta Q_1 i G_1 znajdują się na jednej i tejże prostej G_1Q_1, równoległej do CD i odległej od niej na:

$$GG_1 = \frac{1}{6}a = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Dla drugiej połowy CDF naszej ściany nie mielibyśmy jak powtórzyć wszystko cośmy znalezli dla trójkąta CED. Złożywszy te dwa rezultata, przyszlibyśmy do wypadku otrzymanego pod § 54. W streszczeniu, rozmaite systema składania rezultatów cząstkowych, z których otrzymujemy rezultat ostateczny dla całej ściany CEDF, mogą być przedstawione w sposób następujący:

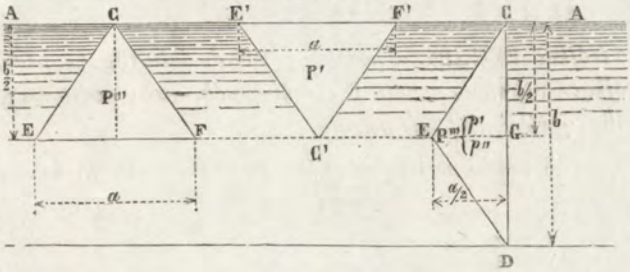
Środek ciężkości: $$\left\{ \underbrace{\underbrace{g_1 \quad g_3}_{G'} \;\Big|\; \underbrace{g_2 \quad g_4}_{G''}}_{G} \;\Bigg|\; \underbrace{\underbrace{g_1 \quad g_2}_{G_1} \;\Big|\; \underbrace{g_3 \quad g_4}_{G_2}}_{G} \right\}$$

Środek ciśnienia: $$\left\{ \underbrace{\underbrace{q_1 \quad q_3}_{Q'} \;\Big|\; \underbrace{q_2 \quad q_4}_{Q''}}_{Q} \;\Bigg|\; \underbrace{\underbrace{q_1 \quad q_2}_{Q_1} \;\Big|\; \underbrace{q_3 \quad q_4}_{Q_2}}_{Q} \right\}$$

http://rcin.org.pl

57. Uwaga. Widzieliśmy pod § 55, że ciśnienie P'' na trójkąt CEF (fig. 40 i 43) jest dwa razy większe aniżeli ciśnienie P' na ten sam trójkąt obrócony wierzchołkiem do dołu i mający położenie C'E'F' (fig. 43), tak że mamy :

fig. 43.



(1) $$P' = \Pi w s t \alpha \frac{1}{24} ab^2,$$

(2) $$P'' = \Pi w s t \alpha \frac{1}{12} ab^2;$$

nadto, na ciśnienie P''' wywierane na trójkąt CDE, otrzymaliśmy pod § 56 wyrażenie :

(3) $$P''' = \Pi w s t \alpha \frac{1}{8} ab^2;$$

gdzie trójkąty : (CEF, E'F'C') i CDE mają jednakową powierzchnię $\Omega = \frac{1}{4} ab$, ale nie są sobie równe.

Widzimy oprócz tego ze wzoru (3) § 56, że ciśnienie na trójkąt CEG jest równe ciśnieniu na trójkąt dwa razy większy E'F'C', czyli że :

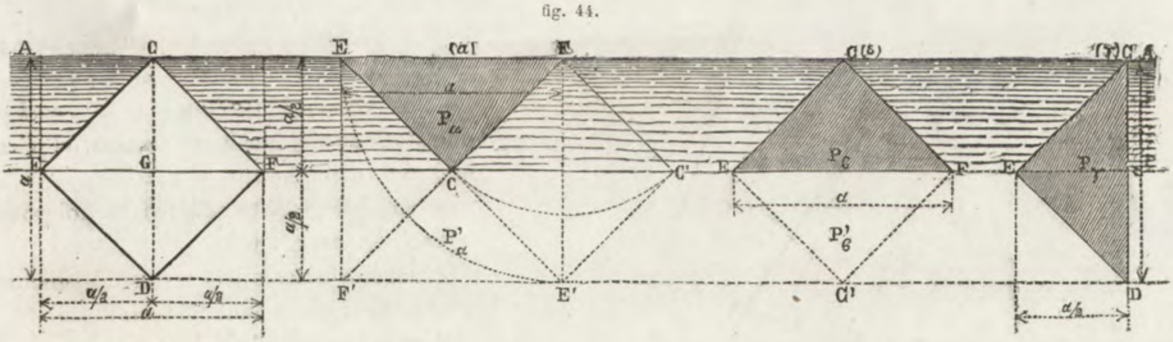
$$p' = P';$$

jak również, ciśnienie na trójkąt EGD jest takież samo jak ciśnienie na trójkąt CEF = dwóm trójkątom EGD, tak że :

$$p'' = P'';$$

czyli że $P''' = p' + p'' = P' + P''$. To przypuszcza, że trójkąty o których mowa zajmują, względem poziomej AA, położenie oznaczone na figurze.

fig. 44.



W szczególnym przypadku, kiedy przekątne CD i EF kwadratu ukośnego (fig. 40) są sobie równe, ten ostatni staje się kwadratem prostym (fig. 44), a trójkąty CEF i CED — trójkątami równymi. Kładąc we wzorach (1) (2) i (3) $a = b$, ciśnienie wywierane na trójkąt CEF, w rozmaitych jego położeniach (α), (β) i (γ) oznaczonych fig. 44, wyrazi się :

$$P_\alpha = \Pi w s t \alpha \frac{1}{24} a^3;$$

$$P_\beta = \Pi w s t \alpha \frac{1}{12} a^3;$$

$$P_\gamma = \Pi w s t \alpha \frac{1}{8} a^3;$$

http://rcin.org.pl

zkąd :

(4)
$$P_\alpha : P_\beta : P_\gamma = \frac{1}{24} : \frac{1}{12} : \frac{1}{8} = 1:2:3.$$

Możemy więc powiedzieć : 1° *przewracając trójkąt* EFC (fig. α) *podstawą* EF *do dołu* (fig. β), *podwajamy jego ciśnienie*; 2° *obracając zaś ten sam trójkąt* EFC *około punktu* F *w taki sposób, ażeby podstawa jego* EF *stała się prostopadłą* FE' *do poziomej* AA, (fig. γ) *ciśnienie to się potraja.*

Wiemy z poprzedniego, § 55 wz.(3) i (3^{bis}), że ciśnienie na trójkąt EFC' jest dwa razy większe jak ciśnienie na trójkąt CEF (fig. β), tak że :

$$\Pi P_\beta' = \Pi w st\alpha \frac{1}{6} a^3;$$

ciśnienie zaś P'_α na trójkąt CFE', (który możemy uważać jako obrócony około wierzchołka C trójkąt EFC (fig. α) ma za wyrażenie :

$$P_\alpha' = \Pi w st\alpha x_1 \Omega = \Pi w st\alpha \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}\frac{a}{2}\right)\frac{a^2}{4} = \Pi w st\alpha \frac{5}{24} a^3;$$

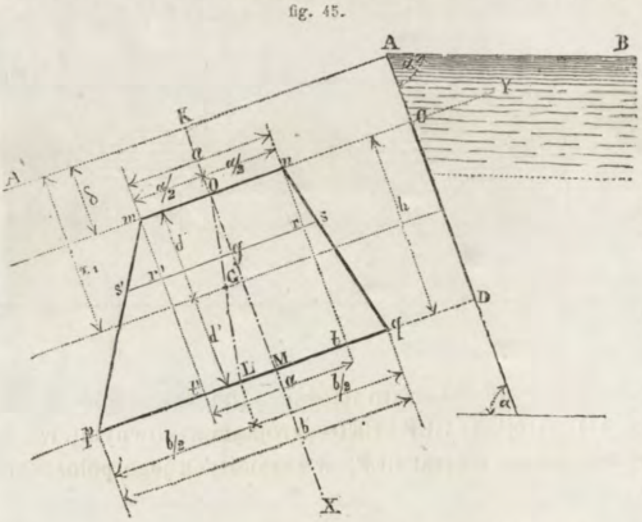
wprowadzając wartości na P_β' i P'_α do (4), będziemy mieli :

(5)
$$P_\alpha : P_\beta' : P_\gamma : P_\beta' : P_\alpha' = \frac{1}{24} : \frac{1}{12} : \frac{1}{8} : \frac{1}{6} : \frac{5}{24} = 1:2:3:4:5.$$

Ze wzoru (4) możemy wyprowadzić wniosek, że *obracając około krawędzi poziomej pryzmę, napełnioną wodą i mającą za podstawę pionową trójkąt* EFC, *ciśnienie wywierane przez wodę na tę podstawę, w trzech różnych jej położeniach przedstawionych na fig. 44 przez* (α), (β), (γ), *zmieniają się w stosunku* : 1 : 2 : 3

58. X Przykład. **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na trapez, którego dwie podstawy są poziome i rzucają się w punktach** C i D (fig. 45).

fig. 45.



Niech nam będzie danem :

podstawa górna trapezu $mn = a$,

« dolna « $pq = b$,

wysokość trapezu $= h$,

odległość górnej podstawy trapezu od poziomej AA niech będzie $OK = \delta$;

a zatem, odległość ta od powierzchni wolnej wyrazi się przez: δ wst α.

Zadaniem naszem jest wyrazić ciśnienie i środek ciśnienia w funkcyi tych ilości.

Wiemy, że środek ciężkości trapezu znajduje się na prostej OL łączącej środki O i L jego podstaw, i związek, jaki zachodzi między odległościami d i d' tego punktu od podstaw a i b, wyraża się stosunkiem :

$$\frac{d}{d'} = \frac{a+2b}{b+2a};$$

zkąd znajdziemy :

$$d = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b};$$

http://rcin.org.pl

a więc:

(1) $$x_1 = \delta + \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b};$$

mamy nadto $\Omega = \frac{a+b}{2} h$; zatem ciśnienie wypadkowe na powierzchnię trapezu wyrazi się:

(2) $$P = \Pi \text{wst}\alpha x_1 \Omega = \Pi \text{wst}\alpha \left[\delta \frac{h}{2}(a+b) + \frac{h^2}{6}(a+2b) \right].$$

Szukajmy teraz punktu przyczepienia siły P, to jest środka ciśnienia. Otoż, środek ciśnienia musi się znajdować na linji średnicowej OL, gdyż ona dzieli na dwie równe części wszystkie *poziome* przeprowadzone w trapezie; własność ta będąc równowartą znajomości jednej spółrzędnej szukanego punktu, pozostaje znaleźć drugą jego spółrzędnę x'.

Weźmy górną podstawę trapezu za oś Y, a prostopadłę do mn, poprowadzoną przez jej środek O — za oś X, i zastosujmy wzór:

$$x' = \frac{\int zuxdx}{\int zu\,dx},$$

gdzie $z = (\delta + x)\text{wst}\,\alpha$, i gdzie całkowanie powinno być wykonanem między granicami zawierającemi ciśnioną powierzchnię, to jest od $x = 0$ do $x = h$. Wartość otrzymana ztąd na x' będzie wyrażać odległość środka ciśnienia od poziomej mn, od której liczymy rozmaite x.

Oznaczając $Og = x$, odpowiednia tej odciętej szerokość trapezu wyrazi się:

$$u = y' - y'' = gs + gs' = a + (rs + r's');$$

otoż, z podobieństwa trójkątów nrs i ntq, jak również, $m'r's'$ i $mt'p$, mamy:

$$rs = tq\,\frac{x}{h},$$

$$r's' = t'p\,\frac{x}{h};$$

kąd:

$$rs + r's' = (tq + t'p)\frac{x}{h} = (b-a)\frac{x}{h};$$

w skutek czego:

$$u = a + \frac{b-a}{h} x;$$

a zatem:

$$x' = \frac{\int_0^h (\delta + x)\left[a + \frac{b-a}{h}x\right] xdx}{\int_0^h (\delta + x)\left[a + \frac{b-a}{h}x\right] dx} = \frac{a\delta \int_0^h xdx + \frac{b-a}{h}\delta \int_0^h x^2dx + a\int_0^h x^2dx + \frac{b-a}{h}\int_0^h x^3dx}{a\delta \int_0^h dx + \frac{b-a}{h}\delta \int_0^h xdx + a\int_0^h xdx + \frac{b-a}{h}\int_0^h x^2dx};$$

wykonawszy rachunek i uprościwszy, otrzymujemy:

(3) $$x' = \frac{h^2(a+3b) + 2\delta h(a+2b)}{2h(a+2b) + 6\delta(a+2b)}.$$

http://rcin.org.pl

Wzory (1), (2) i (3) wyznaczają środek ciężkości, ciśnienie i środek ciśnienia trapezu w funkcyi czterech ilości : odległości δ, wysokości h i podstaw trapezu : a i b; stosują się one do jakiegokolwiek trapezu o podstawach poziomych, a zatem i do trapezu równoramiennego, to jest kiedy $\mathrm{M}p = \mathrm{M}q$.

Ze wzorów tych możemy wyprowadzić rozmaite szczególne przypadki :

1° Przypuszczając że górna podstawa trapezu $mn = a$ coraz bardziej się zmniejsza, w taki sposób, że jej punkta m i n coraz bardziej zbliżają się do punktu O, *środek ciśnienia pozostanie zawsze na prostej* OL, i będzie się znajdować na niej przy granicy, to jest, kiedy górna podstawa trapezu stanie się jednym punktem, czyli kiedy trapez zamieni się na trójkąt $\mathrm{O}pq$ zwrócony wierzchołkiem swym do góry; wartość x' środka ciśnienia tego trójkąta otrzymamy, kładąc w (3) $a = 0$; będziemy mieli :

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = \delta + \frac{2}{3}h; \\ \mathrm{P} = \Pi w \sin\alpha \times b\left(\delta\frac{h}{2} + \frac{1}{3}\cdot h^2\right); \\ x' = \frac{h}{2}\cdot\frac{3h + 4\delta}{2h + 3\delta}. \end{cases}$$

Gdybyśmy przypuścili, że zamiast dwóch punktów ruchomych m i n, jeden z nich np. n, jest stały, a że m zdąża do n, x' otrzymane ze wzoru (3), kładąc w nim $a = o$, stosowałoby się również do trójkąta npq lub mpq, tylko środek ciśnienia znajdowałby się teraz na prostej nL lub też na mL. Wkaażdym razie, wartości x_1 i x' są niezależne od podstawy b.

2° Robiąc podobne przypuszczenie dla dolnej podstawy trapezu $pq = b$, to jest kładąc $b = 0$, otrzymamy trójkąt zwrócony wierzchołkiem do dołu, i mający położenie bądź trójkąta $m\mathrm{L}n$, bądź też mnp lub mnq; dla każdego z nich x' będzie miało jednakową wartość, i środek ciśnienia będzie leżeć bądź na prostej OL, bądź też na Op lub Oq. Wzory (1), (2) i (3) dają dla tego przypadku :

$$(B) \quad \begin{cases} x_1 = \delta + \frac{1}{3}h; \\ \mathrm{P} = \Pi w \sin\alpha \times a\left(\delta\frac{h}{2} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{2}\right); \\ x' = \frac{h}{2}\cdot\frac{h + 2\delta}{h + 3\delta}. \end{cases}$$

3° Jeżeli, zachowując O i L stałe, przypuścimy że punkta p i q zbliżają się do punktu L, (lub też że m i n oddalają się od punktu o), w taki sposob, że pq staje się równem mn, czyli że $a = b$, — trapez staje się równoległobokiem; środek ciśnienia pozostaje zawsze na OL, i wzory ogólne zamieniają się na następujące :

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 = \delta + \frac{1}{2}h; \\ \mathrm{P} = \Pi w \sin\alpha \times ah\left(\delta + \frac{1}{2}h\right); \\ x' = \frac{h}{3}\cdot\frac{2h + 3\delta}{h + 2\delta}. \end{cases}$$

Jeżeli trapez jest równoramienny, to jest jeżeli $p\mathrm{M} = q\mathrm{M}$, wtedy zbliżając jednocześnie punkta p

http://rcin.org.pl

i q do punktu M, w chwili kiedy $b = a$, trapez staje się prostokątem, dla którego wzory na x_1, P i x' są też same co i dla równoległoboku.

Kładąc $\delta = 0$ we wzorach ogólnych (1),(2),(3), jak również we wzorach (A), (B), (C) z nich wyprowadzonych, otrzymamy wartości na x_1, P, x' dla następujących powierzchni :

1) dla trapezu, którego jedna z podstaw leży na powierzchni wolnej;

2) « trójkąta, mającego na powierzchni wolnej swój wierzchołek;

3) « « « « swą podstawę ;

4) « równoległoboku, mającego na powierzchni wolnej jeden ze swych boków.

Trapez i trójkąty mogą być jakiekolwiek, równoramienne lub nie; równoległobok może stać się prostokątem; wzory, jakie niżej podajemy, stosują się do tych przypadków bez żadnej zmiany, byleby tylko warunek przy którym one zostały wyprowadzone był zachowany, to jest, byleby podstawa trójkątów, jak też jedna z podstaw trapezu lub równoległoboku była *pozioma*.

Dla łepszego porównania wzorów, przedstawiamy takowe w następującej tablicy :

	Powierzchnie ciśnione.	x_1	P	x'
Wysokość $= h$	Trapez (o podstawach a i b), którego górna podstawa a leży na powierzchni wolnej......	$\frac{1}{3} h \frac{a+2b}{a+b}$	Πwstϰ. $\frac{1}{6} h^2 (a+2b)$	$\frac{1}{2} h \frac{a+3b}{a+2b}$
	Trójkąt, wierzchołek którego znajduje się na powierzchni wolnej, i którego podstawa b jest pozioma................	$\frac{2}{3} h$	Πwstϰ. $\frac{1}{3} h^2 b$	$\frac{3}{4} h$
	Trójkąt, którego podstawa a znajduje się na powierzchni wolnej....................	$\frac{1}{3} h$	Πwstϰ. $\frac{1}{6} h^2 a$	$\frac{1}{2} h$
	Równoległobok lub prostokąt, którego podstawa a znajduje się na powierzchni wolnej...	$\frac{1}{2} h$	Πwstϰ. $\frac{1}{2} h^2 a$	$\frac{2}{3} h$

Uwaga 1. Wartości na x', znalezione dla trójkątów z rozpatrywania trapezu, są te same jakie wyprowadziliśmy innym sposobem pod § 55.

Uwaga 2. Widzimy odrazu, że dla trójkątów i dla równoległoboku x_1 jest mniejsze aniżeli x'. Wiemy że ta własność jest ogólną dla ścian płaskich jakichkolwiek, i ażeby przekonać się że takowa spraw

http://rcin.org.pl

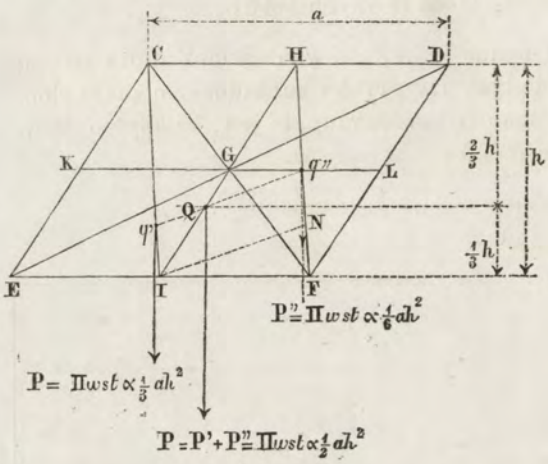
dza się dla trapezu, sprowadźmy wyrażenia na x i na x' do jednakowego mianownika. Otrzymamy :

$$x_1 = \frac{h}{6} \cdot \frac{2a^2 + 8ab + 8b^2}{(a+b)(a+2b)};$$

$$x' = x_1 + \frac{h}{6} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)(a+2b)}.$$

Uwaga 3. Środek ciśnienia na powierzchnię równoległoboku wyprowadziliśmy z rozpatrywania trapezu; otoż możemy wyznaczyć punkt ten niezależnie od trapezu, opierając się na wartościach x' znalezionych dla trójkątów. Rrzczywiście, niech (fig. 46) poziomy bok $CD = a$ równoległoboku znajduje się na powierzchni wolnej; możemy uważać równoległobok CDEF jako figurę złożoną z dwóch trójkątów CEF i CFD, z których pierwszy ma na powierzchni wolnej swój wierzchołek C, a zaś drugi — swą podstawę CD. Łącząc punkta C i F ze środkami I i H podstaw EF, CD, wiemy z poprzedniego, że środek ciśnienia na powierzchnię trójkąta CEF będzie w punkcie q' takim, że :

fig. 46.



$$Cq' = \frac{3}{4} CI;$$

a środek ciśnienia na powierzchnię trójkąta CFD znajdzie się w punkcie q'' na odległości :

$$Hq'' = q''F = \frac{1}{2} HF = \frac{1}{2} CI;$$

więc środek ciśnienia wypadkowego na cały równoległobok będzie znajdować na się prostej $q'q''$; a że oprócz tego wiemy, że musi on znajdować się na linji średnicowej HI, sprzężonej z kierunkiem poziomym prostych przeprowadzonych na ścianie, więc szukany punkt będzie leżeć na przecięciu się $q'q''$ z HI, to jest, środek ciśnienia równoległoboku będzie w punkcie Q. Idzie teraz o wyznaczenie tego punktu rachunkiem.

Uważamy, że ciśnienia P' i P'' wywierane na trójkąty : CEF i CED, są do siebie w stosunku jak $\frac{1}{3}$ do $\frac{1}{6}$, czyli jak 2 do 1; więc będziemy mieć :

$$Qq'' = 2Qq' = \frac{2}{3} q'q'' = \frac{2}{3} IN;$$

A że trójkąty podobne HQq'' i HIN dają :

$$HQ : HI = Qq'' : IN,$$

więc :

$$HQ = \frac{2}{3} HI;$$

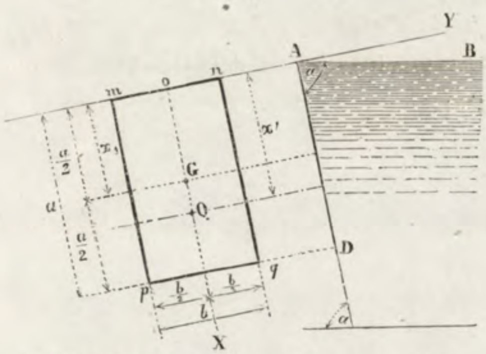
a to pokazuje, że środek ciśnienia równoległoboku znajduje się na $\frac{2}{3}$ prostej łączącej środki jego podstaw, albo jeszcze : na tej prostej i na linji poprowadzonej równolegle do CD na odległośc równej $\frac{2}{3}$ wysokości równoległoboku.

http://rcin.org.pl

59. Chociaż przypadek ściany prostokątnej wynika jako wniosek z ogólnego przykładu powyżej rotrzonego, dobrze jednak będzie rozwiązać wprost to zadanie, bądź za pomocą ogólnych wzorów, bądź też używając wyrażenia na moment bezwładności prostokąta; ten ostatni sposób jest tem dogodniejszy, że moment bezwładności prostokąta, i spotyka się ciągle przy zastosowaniach, z łatwością pozostaje w pamięci. Niech więc będzie:

X Przykład. — **Znaleźć ciśnienie i środek ciśnienia na ścianę prostokątną, której dwa boki są poziome i rzucają się w punktach A i D (fig. 47), a dwa inne są skierowane podług największego spadku ściany.**

Fig. 47.



Niech nam będzie danem: $mp = a$, $pq = b$.

Idzie o wyrażenie, w funkcyi tych dwóch ilości, ciśnienia P i jego punktu przyczepienia.

I) Weźmy podłużną oś symetryi prostokąta za oś oX, i zastosujmy znane nam ogólne wzory (A) i (B).

Co do ciśnienia całkowitego P, będzie ono zależeć od kąta α, czyli od nachylenia ściany względem kierunku pionowego; jeżeli kąta tego nie znamy, piszemy:

$$(1)\qquad P = \Pi \times \mathrm{wst}\,\alpha\, \frac{a}{2}\, ab;$$

Gdyby ściana była pionową, P byłoby maximum i miałoby wartość:

$$P = \Pi \frac{1}{2} a^2 b.$$

Co zaś do x', widzimy odrazu że: $u = b$, gdyż

$$u = y' - y'' = \frac{b}{2} - \left(-\frac{b}{2}\right) = b;$$

mamy zatem:

$$(2)\qquad x' = \frac{\int_0^a bx^2dx}{\int_0^a bxdx} = \frac{\frac{a^3}{3} b}{\frac{a^2}{2} b} = \frac{2}{3} a;$$

II) Przyszlibymy do tego samego wypadku jeszcze innym sposobem, uważając x' jako *długość wahania* prostokąta względem jego boku poziomego mn. W takim razie zastowalibyśmy wzór:

$$x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1},$$

albo jeszcze:

$$x' = \frac{k^2_{mn}}{x_1},$$

oznaczając przez k_{mn} promień wirowania prostokąta względem jego boku mn; gdyż jak wiemy, między k_{mn} i k_G zachodzi związek:

$$k^2_{mn} = k^2_G + x_1^2.$$

Zastosowując pierwszy z tych wzorów, mamy najprzód:

$$x_1 = \frac{a}{2};$$

http://rcin.org.pl

następnie:

$$k^2_G = \frac{I_G}{\Omega} = \frac{\frac{1}{12} ba^3}{ab} = \frac{1}{12} a^2;$$

zkąd:

(2) $$x' = \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{12} a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} + \frac{1}{6} a = \frac{2}{3} a.$$

Zastosowując wzór drugi, i uważając że moment bezwładności prostokąta względem jego boku mn ma za wyrażenie: $I = \frac{1}{3} ba^3$, otrzymalibyśmy ten sam wypadek; i tak:

$$k^2_{mn} = \frac{I_{mn}}{\Omega} = \frac{\frac{1}{3} ba^3}{ab} = \frac{1}{3} a^2;$$

zkąd:

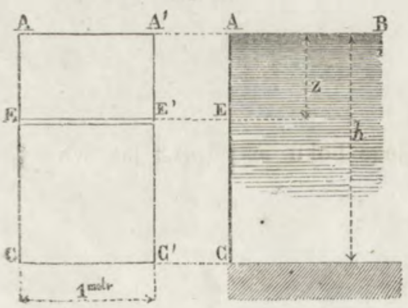
(2″) $$x' = \frac{k^2_{mn}}{x_1} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{\frac{1}{2} a} = \frac{2}{3} a.$$

60. Ściany prostokątne zdarzają się w zastosowaniach nadzwyczaj często; jako przykład, stawiamy: mury wstrzymujące nacisk wody (murs soutenant une charge d'eau), drzwi śluzowe, (portes d'écluse) i t p. Ażeby obliczyć w pierwszym razie — grubość muru, a w drugim — grubość blachy lub drzewa, stosownie do tego, czy drzwi są żelazne lub drewniane, — potrzeba naprzód wiedzieć natężenie i punkt przyczepienia całkowitego na ścianę ciśnienia. Otoż, ponieważ takie ściany zwykle są *pionowe*, wartości P i x' mogą być znalezione bez udawania się do ogólnych wzorów (A) i (B), a wprost, za pomocą zasadniczego wyrażenia: $p = \Pi z$, łatwego do pamiętania.

Jako przykład podobnych rachunków, dajemy obliczenie ciśnienia i środka ciśnienia dla ściany prostokątnej pionowej wystawionej na ciśnienie wody.

Niech (fig 48) wysokość wody będzie $= h^{m.}$, AB jej powierzchnia wolna, a AC profil ściany na płaszczyznę pionową; uważamy na ścianie szerokość $CC' = 1^m$, i bierzemy dla wody $\Pi = 1000^{kg}$.

Fig. 48.



1) Szukajmy całkowitego ciśnienia, wywieranego przez wodę na ścianę AA'CC'.

Wiemy że ciśnienie p, na jedność powierzchni, we wszystkich punktach poziomej EE', znajdującej się na odległości z od powierzchni AB, jest:

$$p = \Pi z = 1000 z^{kg};$$

więc ciśnienie na taśmę nieskończenie cienką powierzchni, mającą za wysokość dz, i 1^m za szerokość, będzie:

$$p \times (dz \times 1^m) = 1000 z dz^{kg}.$$

http://rcin.org.pl

A że wszystkie te elementarne ciśnienia są normalne do ściany, więc ciśnienie wypadkowe na pewną część AA'EE' ściany będzie ich summą, to jest :

$$\mathfrak{P} = \int_0^z 1000\, z dz = 500\, z^{2\,\mathrm{kg}}.$$

Chcąc mieć ciśnienie P na całą ścianę AA'CC', potrzeba wziąć tę całkę między granicami 0 i h lub zamienić z na h; znajdziemy ztąd :

(1) $$\mathrm{P} = 500 h^{2\,\mathrm{kg}}.$$

Otrzymalibyśmy to samo ze wzoru (1) § 59, kładąc w nim : $\Pi = 1000$, $\alpha = 90^\circ$, $a = h$, $b = 1$.

2. Szukajmy teraz punktu przyczepienia tej siły. Dla tego, weźmy momenta ciśnień elemetarnych składowych, i ciśnienia wypadkowego P, np. względem poziomej CC'; będziemy mieli :

Moment ciśnienia elementarnego na jakąkolwiek taśmę poziomą : $dz \times 1^{\mathrm{m}}$ będzie :

$$\mathfrak{M}_c(dp) = 1000 z dz\,(h - z),$$

Moment ciśnienia wypadkowego :

$$\mathfrak{M}_c(\mathrm{P}) = 500 h^2 x';$$

więc :

$$\int_0^h 1000\, z dz\,(h - z) = 500\, h^2\, x'.$$

Otoż :

$$\int_0^h 1000\, z dz\,(h - z) = 1000 \int_0^h (h - z)\, z dz = \frac{1000}{6} h^3;$$

więc x' wyznaczy się z równania :

$$\frac{1000}{6} h^3 = 500\, h^2 x',$$

czyli :

$$\frac{500}{3} h^3 = 500\, h^2 x';$$

ztąd :

$$x' = \frac{1}{3} h;$$

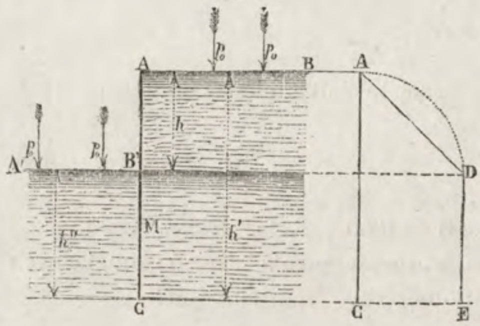
x' jest odległość środka ciśnienia od poziomej CC', więc jego odległość od powierzchni wolnej będzie $= \frac{2}{3} h$; co już wiemy z poprzedniego.

Uwaga. Ściany drzwi śluzowych nie są jednakowo ciśnione po obu stronach, gdyż wysokość wody z każdej strony ściany jest różna (fig 49). W zastosowaniach, gdzie się rozpatruje ciśnienie ostateczne, obrachowuje się w takich razach różnica dwóch ciśnień ; rachunek jest nadzwyczaj prosty, gdyż z obu stron ściany Π jest jedno i to samo ; ciśnienie atmosferyczne na każdą powierzchnię

http://rcin.org.pl

wody AB, A'B', może też być uważane za jednakowe; tak że ciśnienie ostateczne na jedność powierzchni ściany, w jakimkolwiek punkcie M wziętym na jej części B'C, wyrazi się:

Fig. 49.



$$p = p' - p'' = \Pi (h' - h'') = \Pi h = 1000 h = \text{ilość stała},$$

jeżeli różnica poziomu dwóch powierzchni wolnych AB i A'B' jest stałą.

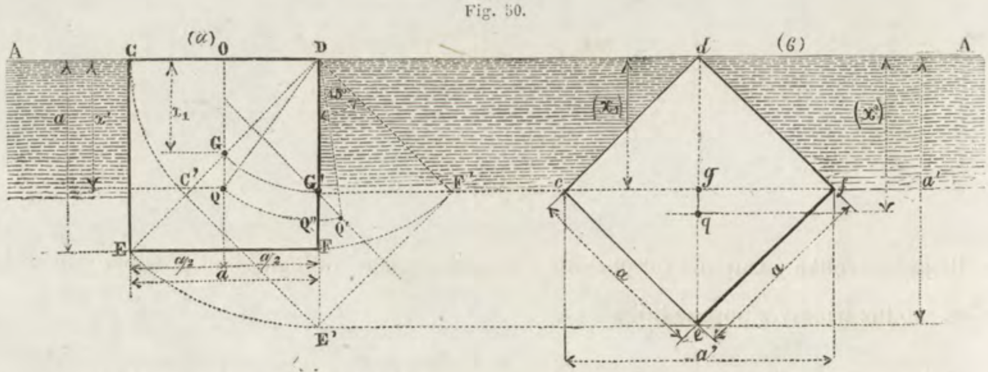
Ponieważ *ciśnienie ostateczne dla wszystkih punktów części B'C jest stałem, linja ciśnienia* wypadkowego na całą ścianę AC będzie linja łamana ADE.

61. Wróćmy do § 59 i połóżmy $b = a$, to jest, że prostokąt staje się kwadratem; będziemy mieli dla ściany kwadratowej CDEF (fig 50, α) następujące wzory:

(I) $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} a; \\ P = \Pi w s t \alpha \ \frac{1}{2} a^3; \\ x' = \frac{2}{3} a. \end{cases}$$

Przypuśćmy teraz, że kwadrat CDEF został obrócony na 45° około punktu D: nowe jego położenie będzie DC'E'F'; środek ciężkości G przejdzie do punktu G', a środek ciśnienia Q do punktu Q'. Pnukt G' będzie środkiem ciężkości kwadratu DC'E'F', gdyż środek ciężkości powierzchni zależy tylko od układu jej elementów, który pozostaje tu bez żadnej zmiany, bo ściana swej formy nie zmieniła. Ale tak nie możemy powiedzieć o środku ciśnienia: położenie tego punktu zależy od sposobu zanurzenia elementów ciśnionej powierzchni; punkt więc Q' nie jest bynajmniej środkiem ciśnienia dla ściany DC'E'F'. Wiemy zgóry, że środek ciśnienia na powierzchnię DC'E'F' będzie się znajdować na przekątnej DE'; na mocy zaś § 54 wnosimy, że punkt ten leży od poziomej AA na odległości $dq = \frac{7}{12} de$ (fig 50, β).

Fig. 50.



Łatwo jest znaleźć związek jaki zachodzi między wartościami: x_1, P, x' dla jednej i tej samej kwadratowej ściany w dwóch jej położeniach: CDEF, (α) i $dcef$, (β). Oznaczając na figurze 39 przekątne FF i CD przez a' i b', a następnie kładąc $a' = b'$, znajdziemy się w przypadku figury (50, β) dla którego, na mocy § 54, będziemy mieli :

$$(x_1) = \frac{1}{2} a' ,$$

$$(\mathrm{P}) = \Pi \mathrm{wst}\alpha \frac{1}{4} a'^3 ,$$

$$(x') = \frac{7}{12} a' ;$$

gdzie użyliśmy nawiasu dla odróżnienia wartości na x_1 P i x' od tych, jakie się stosują do kwadratu CDEF (fig 50 α).

Wyrażając a' w funkcyi boku kwadratu, to jest w funkcyi a, mamy :

$$a' = a\sqrt{2} = 1,4142\,a ;$$

w skutek czego powyższe wzory przybierają formę :

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1) = \frac{1}{2} a\sqrt{2} , \\ (\mathrm{P}) = \Pi \mathrm{wst}\alpha \frac{1}{4} \left(a\sqrt{2}\right)^3 = \Pi \mathrm{\ wst}\alpha \frac{1}{2} a^3\sqrt{2} , \\ (x') = \frac{7}{12} a \sqrt{2} ; \end{cases}$$

i porównywając (1) z (2) otrzymujemy związek następujący :

$$\left. \begin{matrix} x_1 : (x_1) \\ \mathrm{P} : (\mathrm{P}) \end{matrix} \right\} = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1,4142 ;$$

czyli, przez przybliżenie, $= 2 : 3$;

$$x' : (x') = 8 : 7\sqrt{2} = 8 : 9,8994 ;$$

czyli, przez przybliżenie, $= 4 : 5$;
Wyciągamy ztąd :

$$(\mathrm{P}) = \mathrm{P}\sqrt{2};$$

co pokazuje, że *obracając kwadrat* CDEF *na* 45° *około punktu* D *zwiększamy jego ciśnienie w stosunku* $\sqrt{2} : 1$.

Wyrażając wartości na x_1 P x' , i (x_1) (P) (x') liczebnie, znajdujemy :

$x_1 = 0,500\,a$	$\mathrm{P} = \Pi \mathrm{wst}\alpha \times 0,500\,a^3$	$x' = 0,667\,a$
$(x_1) = 0,707\,a$	$(\mathrm{P}) = \Pi \mathrm{wst}\alpha \times 0,707\,a^3$	$(x') = 0,825\,a$.

Porównajmy teraz długość DQ″ = DQ′ = DQ z długością $dq = (x')$. Dla tego wyraźmy DQ″ w funkcyi a, a następnie w funkcyi DE′ $= de = a'$; będziemy mieli :

$$\mathrm{DQ}'' = \sqrt{\mathrm{OD}^2 + \mathrm{OQ}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{5}{6} a = \frac{5}{6} : \frac{a'}{\sqrt{2}} = 0,5893\,a',$$

wtedy gdy odległość

$$dq = (x') = \frac{7}{12} a' = 0,5833\,a' ;$$

http://rcin.org.pl

więc:

$$DQ'' > dq, \text{ i } DQ'' = (x') + 0{,}006\, a';$$

co pokazuje, że łuk zakreślony środkiem ciśnienia ściany kwadratowej CDEF, obróconej na 45° około wierzchołka D, przecina prostę DE′,—na której znajdzie się środek ciśnienia przy ostatecznem położeniu ściany — w punkcie Q″, leżącym pod *rzeczywistym* środkiem ciśnienia obróconej ściany; i odległość między tymi dwoma punktami jest równą około 0,006 długości przekątnej DE′; tak że jeżeli np. DE′ = 1 metrowi, błąd popełniony, biorąc punkt Q″ za środek ciśnienia ściany DC′E′F′, byłby = 6 millimetrów; jeżeli DE′ = 0^m,500 błąd ten byłby = $3^{millim.}$ i t. d.

62. Jest rodzaj obrotu, w skutek którego możemy przejść (fig. 50) od położenia (α) do położenia (β) nie zmieniając ani ciśnienia wypadkowego na ścianę, ani też jej środka ciśnienia; ale dla tego potrzeba ażeby bok CD kwadratu znajdował się nie na powierzchni wolnej, jak na fig. 50, lecz na pewnej od poziomej AA odległości, wartość której, jak to natychmiast zobaczymy, wyznaczy się sama przez się.

fig. 51.

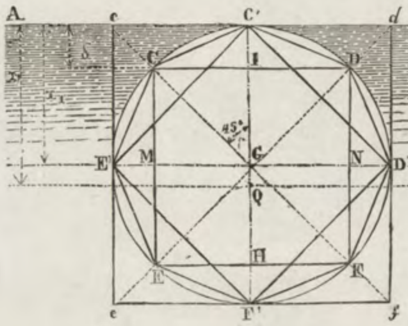
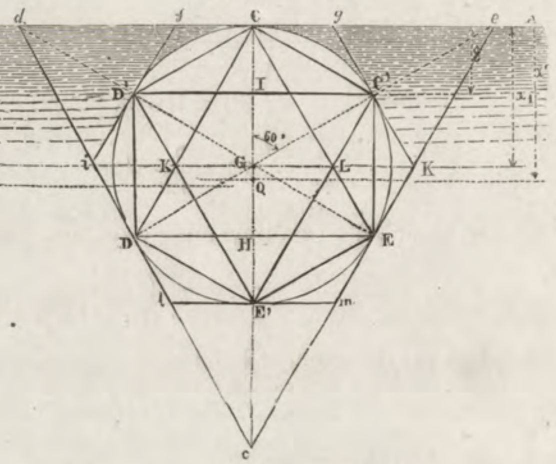


fig. 52.



Niech AA (fig 51) oznacza przecięcie powierzchni wolnej płaszczyzną ściany; poprowadźmy na płaszczyźnie ściany koło styczne do poziomej AA w punkcie C, i wpiszmy w to koło kwadrat CDEF. Jeżeli promień koła oznaczymy przez R, to jak wiadomo:

$$CD = IH = R\sqrt{2};$$

zatem:

$$GI = GH = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

więc:

$$\delta = IC' = HF' = \frac{2R - R\sqrt{2}}{2} = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}293R = 0{,}293\frac{CD}{\sqrt{2}} = 0{,}208\,CD.$$

Odległość boku CD kwadratu od poziomej AA jest więc wyrażoną bądź w funkcyi promienia koła, bądź też w funkcyi samego boku.

Ciśnienie wypadkowe na kwadrat CDEF znajdujemy odrazu, gdyż:

(1) $$x_1 = GC' = R;$$

(2) $$P = \Pi wst\alpha x_1 \Omega = \Pi wst\alpha \times 2R^3.$$

http://rcin.org.pl

Ażeby mieć środek ciśnienia, używamy wzoru (C) wyprowadzonego pod §58:

$$x' = \frac{h}{3} \cdot \frac{2h+3\delta}{h+2\delta},$$

który da nam odległość środka ciśnienia od poziomej CD; chcąc więc mieć tę odległość od poziomej AA, weźmiemy:

$$x' = \delta + \frac{h}{3} \cdot \frac{2h+3\delta}{h+2\delta}.$$

We wzorze tym mamy do podstawienia:

$$\delta = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$h = R\sqrt{2};$$

co daje:

$$x' = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{R\sqrt{2}\left[2R\sqrt{2} + 3R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{3\left[R\sqrt{2} + 2R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}$$

$$= R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + R\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{6}\right) = R\left[\frac{1+3\sqrt{2}+6}{6} - \frac{6}{6\sqrt{2}}\right];$$

otoż:

$$\frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{6};$$

wiąc ostatecznie mamy:

$$x' = \frac{7}{6}R = \frac{7}{6\sqrt{2}}(CD). \tag{3}$$

Obróćmy teraz kwadrat CDEF, w swej płaszczyznie, na 45° około jego *środka ciężkości* G. Kwadrat przyjmie położenie C'D'E'F', dla którego na mocy § 54 będziemy mieli:

$$(x_1) = GC' = R; \tag{1bis}$$

$$(P) = \Pi\,\mathrm{wst}\alpha 2R^3; \tag{2bis}$$

$$(x') = \frac{7}{12}(C'F') = \frac{7}{12}(2R) = \frac{7}{6}R; \tag{3bis}$$

wartości identyczne z (1), (2) i (3) znalezionemi dla kwadratu CDEF.

I tak, obracając *kwadrat* CDEF, około jego środka ciężkości G, na $45^0 = \frac{180^0}{4}$ nie zmieniamy przez to ani ciśnienia wypadkowego ani środka ciśnienia.

Łatwo jest przekonać się, że dla *trójkąta równobocznego* CDE (fig 52) powyższa własność również bę-

http://rcin.org.pl

dzie mieć miejsce, jeśli obrocimy ten trójkąt, około jego środka ciężkości G, na $60^0 = \frac{180^0}{3}$.

Rzeczywiście, wyrażając wszystkie wartości w funkcyi promienia koła, mamy najprzód:

$$DE = R\sqrt{3}; \quad GH = \frac{R}{2}; \quad CH = \frac{3}{2}R; \quad HE' = \frac{R}{2}.$$

następnie, dla trójkąta CDE będziemy mieli:

$$x_1 = \frac{2}{3}CH = R \tag{4}$$

$$P = \Pi wst\alpha x_1 \Omega = \Pi wst\alpha R\left(\frac{DE}{2} \times CH\right) = \Pi wst\alpha \frac{3R^3\sqrt{3}}{4}; \tag{5}$$

$$x' = \frac{3}{4}CH = \frac{9}{8}R. \tag{6}$$

Po obróceniu na 60°, trójkąt CDE przyjmie położenie trójkąta D'C'E', dla którego mamy:

$$x_1 = CI + \frac{1}{3}IE' = R; \tag{4bis}$$

$$P = \Pi wst\alpha \frac{3R^3\sqrt{3}}{4}; \tag{5bis}$$

nareszcie, dla otrzymania x' używamy wzoru (B) § 58, dodając tylko do tej wartości odległość $CI = \delta$.

Więc będzie:

$$x' = \delta + \frac{h}{2} \cdot \frac{h + 2\delta}{h + 3\delta},$$

gdzie:

$$\delta = \frac{R}{2}; \quad h = IE' = \frac{3}{2}R;$$

wykonawszy rachunek, otrzymujemy:

$$x' = \frac{1}{2}R + \frac{5}{8}R = \frac{9}{8}R; \tag{6bis}$$

to jest, dla trójkąta D'C'E' mamy te same wartości na x_1, P i x' co i dla trójkąta CDE.

Uwaga. Zwróciwszy się do wzoru:

$$x' = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1}, \tag{α}$$

widzimy natychmiast przyczynę tożsamości otrzymanej na wartość x' dla obu trójkątów CDE i D'C'E', gdyż prosty rzut oka na figurę 52 pokazuje, że w obydwóch tych położeniach moment bezwładności powierzchni trójkąta względem poziomej KL, poprowadzonej przez jego środek ciężkości G, jest jednakowy; albowiem dla trójkąta CDE, elementa dwóch powierzchni: CKL i DEKL znajdują się

http://rcin.org.pl

odpowiednio w tych samych odległościach od poziomej KL, jak i elementa dwóch powierzchni : E'KL i D'CKL składających trójkąt D'CE'.

Co zaś do kwadratów : CDEF i E'C'D'F' (fig. 51) — równość momentów bezwładności, względem poziomej E'D', prostokąta CDMN i trójkąta E'C'D' może być podobnież z łatwością sprawdzoną, a przez to otrzymana tożsamość wartości x' dla obu kwadratów wytłomaczoną. W rzeczy samej, oznaczając bok CD kwadratu przez a, boki C'G=GD trójkąta C'GD' wyrażą się przez $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; moment bezwładności I_p prostokąta CDMN, względem jego boku MN, jest jak wiadomo:

$$I_p = \frac{1}{3}CD \times CM^3 = \frac{1}{3}a\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}a^4;$$

moment bezwładności I trójkąta C'GD względem boku GD' wyrazi się (biorąc C'G za oś X, a GD' za oś Y) w sposób następujący:

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{2}} x^2 y dx,$$

gdzie za y wypadnie podstawić:

$$y = \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2}.x}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} - x;$$

a że moment bezwładności I_t trójkąta E'C'D', względem poziomej E'D', jest równym 2I, mamy:

$$I_t = 2\int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)x^2 dx = \frac{a\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^4 = \frac{1}{24}a^4;$$

więc $I_p = I_t$, co było do sprawdzenia.

63. Niezmienność wartości x', dla kwadratu obróconego na 45° i trójkąta na 60°, nastręcza pytanie, czy oprócz tych kątów niema jeszcze innych, dla których x' zostaje to samo; a w ogólności, jak się zmienia wartość x' ze zmianą kąta, na jaki te figury zostaną obrócone w ich własnej płaszczyznie i koło ich środka ciężkości G. Otóż, opierając się na pewnych własnościach tyczących się powierzchni, i znanych z Mechaniki zastosowanej, kwestya ta rozwiązuje się za pomocą wzoru (α). I tak wiadomo jest że (*):

1) momenta bezwładności powierzchni płaskiej jakiejkolwiek, uważane względem rozmaitych osi poprowadzonych w płaszczyznie tej powierzchni i przez jej środek ciężkości, zmieniają się odwrotnie proporcyonalnie do kwadratów z promieni wodzących pewnej ellipsy, mającej swój środek w środku ciężkości powierzchni, i zwanej *ellipsą środkową bezwładności*;

2) w przypadku szczególnym, kiedy dana powierzchnia ma dwie osie symetryi tworzące z sobą kąt różny od kąta prostego, ellipsa środkowa bezwładności staje się *okręgiem bezwładności*, — co

(*) E. Collignon : *Cours de Mécanique appliquée aux constructions*. Paris, 1869. str. 75-76.

http://rcin.org.pl

znaczy, że dla takiej powierzchni, momenta bezwładności wzięte względem wszelkiej prostej przechodzącej przez jej środek ciężkości i znajdującej się w jej płaszczyźnie są sobie *równe*; (tak że przy obliczaniu momentu bezwładności powierzchni posiadającej tę własność, kierunek osi do której ten moment odnosimy jest rzeczą zupełnie obojętną, byleby tylko oś leżała w płaszczyznie powierzchni i przechodziła przez jej środek ciężkości).

To nam daje Mechanika. Geometrya przychodzi w pomoc do rozwiązania naszego zadania, gdyż z niej wiemy (*), że wielokąt foremny ma tyle osi symetryi ile boków, i że pomiędzy temi osiami są takie, które nie są do siebie prostopadłe. Ztąd wypada, że *dla wielokąta foremnego jakiegokolwiek ellipsa bezwładności staje się okręgiem bezwładności*; więc moment bezwładności wielokąta foremnego, wzięty względem osi poprowadzonej w płaszczyznie wielokąta i przez jego środek ciężkości, jest ilością najzupełniej wyznaczoną, bo mającą jednę tylko wartość, bez względu na kierunek tej osi.

We wzór (α) dający wartość na x' wchodzi promień wirowania ciśnionej powierzchni, wzięty względem *poziomej* poprowadzonej przez jej środek ciężkości; ale dla *figur foremnych*, ten *kierunek stały* — jaki mamy ciągle uważać przy szukaniu x' w rozmaitych położeniach ściany — nie zmienia powyżej wypowiedzianej własności; gdyż objęte tem wysłowieniem: 1) stałość położenia powierzchni, 2) obrót około punktu G osi momentów, możemy zastąpić: 1) stałością tej osi, i 2) obrotem około punktu G samej powierzchni: — albowiem te dwie rzeczy są równowarte w tym razie.

Wypada ztąd, że obracając wielokąt foremny w swej płaszczyznie około jego środka ciężkości i biorąc, w rozmaitych położeniach tego wielokąta, momenta bezwładności jego powierzchni względem prostej *stałej*, poprowadzonej przez jego środek ciężkości, znajdziemy że wszystkie te momenta są sobie równe; a zatem na mocy wzoru (α) powiadamy że: *dla figur foremnych zanurzonych w cieczy wartość x' jest niezależna od kąta, na jaki te figury mogą być obrócone w swej płaszczyznie i koło ich środka ciężkości*; więc dla takich powierzchni i dla ruchu o którym mowa, *środek ciśnienia* jest albo punktem *stałym* na ścianie, albo się też porusza po jednej i tej samej *linji poziomej*. Otóż, zobaczymy poniżej (§ 81) że środek ciśnienia znajduje się zawsze na średnicy ellipsy środkowej bezwładności, sprzężonej z kierunkiem linij jednakowego ciśnienia (linij poziomych); więc w naszym przypadku będzie on ciągle pozostawać na prostej poprowadzonej przez środek ciężkości figur prostopadle do kierunku poziomego; a zatem dla uważanych figur środek ciśnienia będzie *punktem stałym*.

Wiemy nadto, że ponieważ x_1 jest ilością stałą z samego założenia, ciśnienie wypadkowe P na ścianę będzie również, dla wszystkich jej położeń, ilością stałą; więc dla wielokątów foremnych, postawionych w powyższe warunki, wszystkie trzy wartości: x_1, P, i x' są *stałe*.

Uwaga. Zróbmy tu uwagę tyczącą się pryzmy napełnionej wodą, aby dopełnić to, cośmy powiedzieli o takiej pryzmie pod § 57. Fig. 52 nam pokazuje, że obracając pryzmę CDE około osi poziomej poprowadzonej przez jej środek ciężkości, ciśnienie na ścianę CDE będzie się zmieniać ze zmianą jej położenia; tak np. ciśnienie w położeniu CDE będzie większe jak wtedy kiedy ściana przyjmie położenie D'C'E'.

64. Ciśnienie na sześciokąt foremny. Wyraziwszy ciśnienie i środek ciśnienia na powierzchnię trójkąta równobocznego i kwadratu w funkcyi promienia koła na tych figurach opisanego, szukajmy podobnego wyrażenia dla foremnego sześciokąta. Zadanie to rozwiązuje się za pomocą wzorów wyprowadzonych pod § 58. I tak (fig. 52) sześciokąt CC'EE'DD' może być uważany jako złożony: 1) z trójkąta CD'C', 2) prostokąta D'C'DE i 3) trójkąta DEE'; znalazłszy dla każdej z tych trzech powierzchni ciśnienie i środek ciśnienia, i złożywszy takowe podług prawidła składania sił równoległych, otrzymamy ciśnienie wypadkowe na całą ścianę i punkt przyczepienia tego ciśnienia.

(*) G. H. Niewęgłowski: *Geometrya*, wydanie drugie. Paryż i Lwów, 1869. str. 249 i 526.

http://rcin.org.pl

Ponieważ jedne i te same litery we wzorach § 58 będą mieć rozmaite wartości dla rozmaitych części sześciokąta, podajemy, obok wzorów odpowiadających uważanej ścianie, wartosci jakie tym wzorom przysługują i wypadki otrzymane po wykonaniu wskazanych rachunków. Dodajemy, że wszystkie x_1 i x' liczone są od poziomej AA.

1°. Ściana CD'C' (*Trójkąt o podstawie poziomej i o wierzchołku na powierzchni wolnej*).

Wzory do zastosowania:	*Wartosci do podstawienia*:	*Wypadki z wykonanego rachunku*:
$x_1=\frac{2}{3}h$	$h=\mathrm{CI}=\frac{\mathrm{R}}{2}$	$x_1=\frac{\mathrm{R}}{3}$
$\mathrm{P}=\Pi \mathrm{wst}\alpha\frac{1}{3}h^2b=\Pi\mathrm{wst}\alpha x_1\Omega$	$b=\mathrm{D'C'}=\mathrm{R}\sqrt{3}$	$\mathrm{P'}=\Pi\mathrm{wst}\alpha\frac{1}{12}\mathrm{R}^3\sqrt{3}$
$x'=\frac{3}{4}h$		$x'=\frac{3}{8}\mathrm{R}.$

2°. Ściana D'C'DE (*Prostokąt o boku poziomym*).

$x_1=\delta+\frac{1}{2}h$	$\delta=\mathrm{CI}=\frac{\mathrm{R}}{2}$	$x_1=\mathrm{R}$
$\mathrm{P}=\Pi\mathrm{wst}\alpha ah\left(\delta+\frac{1}{2}h\right)=\Pi\mathrm{wst}\alpha x_1\Omega$	$h=\mathrm{IH}=\mathrm{R}$	$\mathrm{P''}=\Pi\mathrm{wst}\alpha\mathrm{R}^3\sqrt{3}$
$x'=\delta+\frac{h}{3}\cdot\frac{2h+3\delta}{h+2\delta}$	$a=\mathrm{D'C'}=\mathrm{R}\sqrt{3}$	$x'=\frac{13}{12}\mathrm{R}.$

3° Ściana DEE' (*Trójkąt o podstawie poziomej i o wierzchołku obróconym do dołu*).

$x_1=\delta+\frac{1}{3}h$	$\delta=\mathrm{CH}=\frac{3}{2}\mathrm{R}$	$x_1=\frac{5}{3}\mathrm{R}$
$\mathrm{P}=\Pi\mathrm{wst}\alpha a\left(\delta\frac{h}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{2}\right)=\Pi\mathrm{wst}\alpha x_1\Omega$	$h=\mathrm{HE'}=\frac{\mathrm{R}}{2}$	$\mathrm{P'''}=\Pi\mathrm{wst}\alpha\frac{5}{12}\mathrm{R}^3\sqrt{3}$
$x'=\delta+\frac{h}{2}\cdot\frac{h+2\delta}{h+3\delta}$	$a=\mathrm{DE}=\mathrm{R}\sqrt{3}$	$x'=\frac{67}{40}\mathrm{R}.$

Dodając P', P'' i P''' otrzymujemy ciśnienie wypadkowe P, wywierane przez ciecz na całą powierzchnię sześciokąta CC'EE'DD':

$$\mathrm{P}=\mathrm{P'}+\mathrm{P''}+\mathrm{P'''}=\Pi\mathrm{wst}\alpha\frac{3}{2}\mathrm{R}^3\sqrt{3}; \tag{1}$$

co zresztą moglibyśmy mieć wprost, używając wzoru:

$$\mathrm{P}=\Pi\mathrm{wst}\alpha x_1\Omega,$$

w którym x_1 oznacza odległość środka ciężkości sześciokąta od poziomej AA, a Ω powierzchnię sześciokąta. Otoż, zważywszy że $x=\mathrm{R}$, i że powierzchnia wielokąta foremnego ma za miarę iloczyn z obwodu przez połowę apotemy, a ta ostatnia, dla sześciokąta, ma za wyrażenie:

$$a=\sqrt{\mathrm{R}^2-\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3},$$

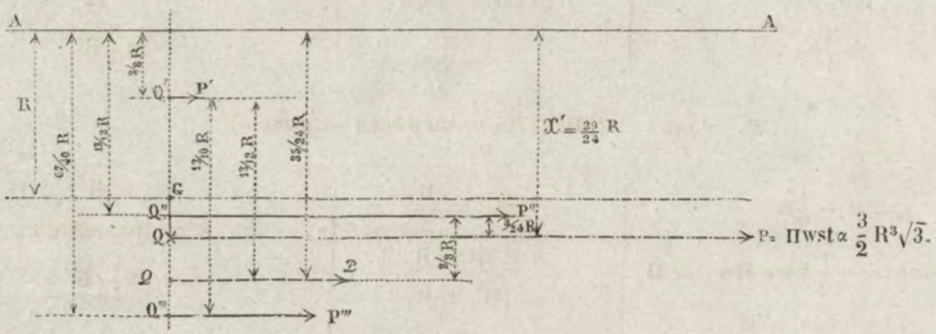
http://rcin.org.pl

będziemy mieli:

$$P = \Pi wst\alpha R \times \left(6R \times \frac{1}{4} R\sqrt{3}\right) = \Pi wst\alpha \frac{3}{2} R^3\sqrt{3}.$$

Ażeby znaleźć punkt przyczepienia ciśnienia wypadkowego P, szukamy naprzód punktu przyczepienia wypadkowej $\mathfrak{P}$ dwóch jakichkolwiek ciśnień, np. P' i P''', a następnie, punktu przyczepienia wypadkowej P z dwóch sił: $\mathfrak{P}$, zastępującej P' i P''', i z pozostałej trzeciej siły P''. Punkta te znajdziemy za pomocą znanego twierdzenia momentów, a ich obrachowanie opuszczamy, z powodu że rachunki nie przedstawiają żadnego interesu i są powszechnie znane. Ograniczamy się więc podaniem figury 53, pokazującej złożenie sił: P', P'' i P''' w jednę P, i wypadki liczebne otrzymane w skutek tego złożenia.

Fig. 53.



I tak widzimy, że środek ciśnienia na powierzchnię sześciokąta foremnego $CC'EE'DD'$ znajduje się na odległości, od poziomej AA, równej $\frac{29}{24}$ promienia koła na tym sześciokącie opisanego, a zatem, o $\frac{5}{24}$R czyli około 0,2R niżej, aniżeli środek ciężkości sześciokąta.

Przyszlibyśmy daleko prędzej do tego samego rezultatu, biorąc wprost momenta sił składowych P', P'', P''' i siły wypadkowej P względem poziomej AA. Będziemy mieli:

$$P' \times \frac{3}{8} R + P'' \times \frac{13}{12} R + P''' \times \frac{67}{40} R = x' \times P,$$

czyli:

$$\frac{1}{12} R^3\sqrt{3} \times \frac{3}{8} R + R^3\sqrt{3} \times \frac{13}{12} R + \frac{5}{12} R^3\sqrt{3} \times \frac{67}{40} R = x' \times \frac{3}{2} R^3\sqrt{3};$$

zkąd, po skróceniu i uproszczeniu, znajdujemy:

$$\left(32 + \frac{13}{12} + \frac{67}{96}\right) R = \frac{3}{2} x',$$

albo:

$$\frac{174}{96} R = \frac{3}{2} x';$$

co daje:

$$x' = \frac{29}{24} R.$$

65. Ciśnienie na trójkąt, kwadrat i sześciokąt opisany na kole w funkcyi promienia tego koła. Znalazłszy ciśnienie i środek ciśnienia na powierzchnię trójkąta, kwadratu i sześciokąta

http://rcin.org.pl

wpisanych w koło styczne do powierzchni wolnej, rozwiążmy tę kwestyę dla podobnych figur opisanych na temże kole. Zacznijmy od trójkąta *dec* (fig. 52).

Wiemy, że bok trójkąta równobocznego opisanego na kole jest dwa razy większy od boku podobnego trójkąta wpisanego, to jest $=2R\sqrt{3}$; a że nadto, środek ciężkości trójkąta *dec* znajduje się w środku koła G, więc GC będąc $=\frac{1}{3}Cc$, wysokość trójkąta Cc będzie 3R.

I. Trójkąt opisany *dec*.

$$x_1=\frac{1}{3}h=R;$$

$$\left.\begin{aligned}P&=\Pi wst\alpha\frac{1}{6}h^2a=\Pi wst\alpha\frac{1}{6}(3R)^2 2R\sqrt{3}\\&=\Pi wst\alpha x_1\Omega=\Pi wst\alpha R.R\sqrt{3}.3R\end{aligned}\right\}=\Pi wst\alpha\, 3R^3\sqrt{3};$$

$$x'=\frac{1}{2}h=\frac{3}{2}R.$$

Rozpatrując następnie kwadrat opisany *cdef* (fig. 51) mamy:

II. Kwadrat opisany *cdef*.

$$x_1=R;$$

$$P=\Pi wst\alpha R\,(2R)^2=\Pi wst\alpha 4R^3;$$

$$x'=\frac{2}{3}(2R)=\frac{4}{3}R.$$

Przejdźmy teraz do sześciokąta opisanego *filmkg* (fig. 52) Pozioma *ik* dzieli sześciokąt na dwa trapezy: *fgik* i *iklm;* więc zadanie nasze sprowadza się do znalezienia ciśnienia i środka ciśnienia dla każdego z trapezów zosobna, a następnie do złożenia otrzymanych wypadków.

Wiadomo jest, że bok sześciokąta foremnego opisanego na kole równa się: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$; mamy nadto $ik=\frac{4R}{\sqrt{3}}$; znamy więc wszystkie wartości we wzorach jakich się używa dla trapezu. Będziemy mieć:

III. Sześciokąt opisany *fgiklm*.

A) Trapez *fgik*.

Wzory do zastosowania.	*Wartości do podstawiania.*	*Wypadki z rachunku.*
$x_1=\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$	$h=R$	$x_1=\frac{5}{9}R$
$P=\Pi wst\alpha\frac{1}{6}h^2(a+2b)$	$a=\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$P'=\Pi wst\alpha\frac{5R^3}{3\sqrt{3}}$
$x'=\frac{1}{2}h\frac{a+3b}{a+2b}$	$b=\frac{4R}{\sqrt{3}}$	$x'=\frac{7}{10}R$

B) Trapez *iklm*.

Wzory do zastosowania.	*Wartości do podstawiania.*	*Wypadki z rachunku.*
$x_1=\delta+\frac{h}{3}.\frac{a+2b}{a+b}$	$\delta=R$ $h=R$	$x'=\frac{13}{9}R$
$P=\Pi wst\alpha\left[\delta\frac{h}{2}(a+b)+\frac{h^2}{6}(a+2b)\right]$ $=\Pi wst\alpha\, x_1\Omega.$	$a=\frac{4R}{\sqrt{3}}$	$P''=\Pi wst\alpha\frac{13R^3}{3\sqrt{3}}$
$x=\delta+\frac{h^2(a+3b)+2\delta h(a+2b)}{2h(a+2b)+6\delta(a+b)}$	$b=\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$x'=\frac{3}{2}R.$

http://rcin.org.pl

Więc ciśnienie wypadkowe na powierzchnię sześciokąta opisanego będzie:

$$P = P' + P'' = \Pi w s t \alpha \frac{6R^3}{\sqrt{3}}; \tag{1}$$

co zresztą otrzymujemy wprost ze wzoru ogólnego : $P = \Pi w s t \alpha\, x_1 \Omega$, zważywszy że x_1 dla całej ściany jest $= R$, a powierzchnia sześciokąta opisanego ma za miarę : $\left(6 \times \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)\frac{R}{2}$.

Oznaczając przez x' odległość punktu przyczepienia ciśnienia wypadkowego P od poziomej AA, wartość x' znajdzie się z równania momentów:

$$\frac{5R^3}{3\sqrt{3}} \times \frac{7}{10}R + \frac{13R^3}{3\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}R = x' \times \frac{6R^3}{\sqrt{3}};$$

zkąd, po skróceniu i uproszczeniu, otrzymujemy:

$$x' = \frac{23}{18}R. \tag{2}$$

66. Zebrawszy wypadki otrzymane dla koła (stycznego do poziomej AA), trójkąta wpisanego CDE (fig. 52), kwadratu wpisanego C'E'F'D (fig. 51) i sześciokąta wpisanego CD'DE'EC' (fig. 52); jak również, wypadki dla podobnych figur opisanych na kole (fig. 51 i 52), układamy następującą tablicę, w której opuszczamy w wyrażeniu na P czynnik stały $\Pi w s t \alpha$, i gdzie oprócz ilości: x_1 P i x', podajemy, w funkcyi promienia koła, boki i apotemy tych wielokątów. Wartości x' i x' wszędzie są liczone od poziomej AA leżącej na powierzchni wolnej.

	Powierzchnie ciśnione.	x_1	P	x'	bok	apotema
1	Koło styczne do poziomej AA.	R	πR^3	$\frac{5}{4}R$	»	»
2	Trójkąt wpisany	R	$\frac{3}{4}R^3\sqrt{3}$	$\frac{9}{8}R$	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
3	Kwadrat wpisany	R	$2R^3$	$\frac{7}{6}R$	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
4	Sześciokąt wpisany	R	$\frac{3}{2}R^3\sqrt{3}$	$\frac{29}{24}R$	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
5	Trójkąt opisany	R	$3R^3\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}R$	$2R\sqrt{3}$	R
6	Kwadrat opisany	R	$4R^3$	$\frac{4}{3}R$	$2R$	R
7	Sześciokąt opisany	R	$\frac{6R^3}{\sqrt{3}}$	$\frac{23}{18}R$	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	R

http://rcin.org.pl

Z tablicy tej wyprowadzamy następujące spostrzeżenia:

(1) Wziąwszy promień R za jedność i napisawszy ciśnione powierzchnie w porządku.......... :	trójkąt opisany	kwadrat opisany	koło.
znajdujemy na odpowiednie wartości x'..... :	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$

to jest liczniki, i mianowniki są liczby kolejno po sobie idące .... : 3, 4, 5 i 2, 3, 4.

(2) Pisząc te same powierzchnie naodwrót, tylko teraz wpisane............................ :	koło.	kwadrat wpisany	trójkąt wpisany
znajdujemy na odpowiednie wartości x'.........	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{8}$

gdzie liczniki są liczby kolejne nieparzyste: 5, 7, 9; a mianowniki — liczby kolejne parzyste: 4, 6, 8.

(3) Napisawszy teraz powierzchnie w porządku .... :	trójkąt wp.	kwadrat wpis.	sześciokąt wpis.	koło.
mamy na wartości x'	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{29}{24}$	$\frac{5}{4}$
czyli, po sprowadzeniu do jednakowego mianownika..............................	$\frac{27}{24}$	$\frac{28}{24}$	$\frac{29}{24}$	$\frac{30}{24}$
tak że rozmaite x' odpowiednie tym figurom są proporcyonalne do...................	27	28	29	30

To nam pokazuje, że *przechodząc od trójkąta równobocznego wpisanego — przez kwadrat i sześciokąt — do koła, środek ciśnienia dla każdej z figur uważanych w takim porządku zniża się kolejno i stale o* $\frac{1}{24}$R.

(4) Idąc dalej, od koła do figur opisanych i w porządku odwrotnym .... :	sześciokąt opis.	kwadrat opis.	trójkąt opis.
środek ciśnienia ciągle się zniża, lecz jednostajność w tem zniżaniu się ustaje, gdyż mamy na x' wartości następujące........................	$\frac{23}{18}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
czyli, po sprowadzeniu do spólnego mianownika:	$\frac{23}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{27}{18}$

(5) Pisząc nareszcie powyższą tablicę w porządku.............................. :	3 wp.	4 wp.	6 wp.	koło.	6 op.	4 op.	3 op.
odpowiednie wartości na x' po sobie następujące są..............................	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{29}{24}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{23}{18}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
albo, po sprowadzeniu do jednakowego mianownika..............................	$\frac{81}{72}$	$\frac{84}{72}$	$\frac{87}{72}$	$\frac{90}{72}$	$\frac{92}{72}$	$\frac{96}{72}$	$\frac{108}{72}$
czyli że są proporcyonalne do.......... ...	81	84	87	90	92	96	108

67. Ciśnienie na ośmiokąt foremny. W myśli dopełnienia naszej tablicy szukaliśmy ciśnienia i środka ciśnienia dla ośmiokąta foremnego wpisanego w koło. Rachunki ztąd powstające są nie-

http://rcin.org.pl

równie dłuższe od tych jakich wymagały figury rozpatrywane poprzednio; nie przedstawiają jednak one żadnej trudności i sposób ich wykonania podajemy wraz z otrzymanymi wypadkami. Uważając ośmiokąt C′CE′EF′FD′D (fig. 51) jako złożony z dwóch trójkątów i dwóch trapezów, będziemy mieli :

Ośmiokąt foremny wpisany w koło.

a) Trójkąt C′CD.

Wzory do zastosowania.	*Wartości do podstawienia.*	*Wypadki z wykonanego rachunku.*
$x_1 = \frac{2}{3} h$	$h = \mathrm{C'I} = \frac{\mathrm{R}}{2}(2-\sqrt{2})$	$x_1 = \frac{\mathrm{R}}{3}(2-\sqrt{2})$
$\mathrm{P} = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{1}{3} h^2 b$	$b = \mathrm{CD} = \mathrm{R}\sqrt{2}$	$\mathrm{P}' = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{1}{6}\mathrm{R}^3(3\sqrt{2}-4)$
$x' = \frac{3}{4} h$		$x' = \frac{3}{8}\mathrm{R}(2-\sqrt{2})$

b) Trójkąt EFF′.

$x_1 = \delta + \frac{1}{3} h$	$\delta = \mathrm{C'H} = \mathrm{R}\sqrt{2} + \frac{\mathrm{R}}{2}(2-\sqrt{2}) = \frac{\mathrm{R}}{2}(2+\sqrt{2})$	$x_1 = \frac{\mathrm{R}}{3}(4+\sqrt{2})$
$\mathrm{P} = \Pi\,\mathrm{wst}\alpha\, a\left(\delta\frac{h}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{2}\right)$	$h = \mathrm{HF'} = \frac{\mathrm{R}}{2}(2-\sqrt{2})$	$\mathrm{P}'' = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{1}{6}\mathrm{R}^3(3\sqrt{2}-2)$
$x' = \delta + \frac{h}{2}\cdot\frac{h+2\delta}{h+3\delta}$	$a = \mathrm{EF} = \mathrm{R}\sqrt{2}$	$x' = \frac{5}{4}\mathrm{R}\frac{5+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

c) Trapez CDE′D′.

$x_1 = \delta + \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$	$\delta = \mathrm{C'I} = \frac{\mathrm{R}}{2}(2-\sqrt{2})$	$x_1 = \frac{2}{3}\mathrm{R}$
$\mathrm{P} = \Pi\mathrm{wst}\alpha \times \left[\delta\frac{h}{2}(a+b) + \frac{h^2}{6}(a+2b)\right]$	$h = \mathrm{IG} = \mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}}{2}(2-\sqrt{2}) = \mathrm{R}\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\mathrm{P}''' = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{1}{3}\mathrm{R}^3(\sqrt{2}+1)$
$x' = \delta + \frac{h^2(a+3b) + 2\delta h(a+2b)}{2h(a+2b) + 6\delta(a+b)}$	$a = \mathrm{CD} = \mathrm{R}\sqrt{2}$	$x' = \frac{1}{8}\mathrm{R}\frac{10+7\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
	$b = \mathrm{E'D'} = 2\mathrm{R}$	

d) Trapez E′D′EF.

Wzory do zastosowania są te same co dla trapezu CDE′D′.	$\delta = \mathrm{GC'} = \mathrm{R}$	$x_1 = \frac{4}{3}\mathrm{R}$
	$h = \mathrm{GH} = \mathrm{R}\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\mathrm{P^{iv}} = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{2}{3}\mathrm{R}^3(\sqrt{2}+1$
	$a = \mathrm{E'D'} = 2\mathrm{R}$	$x' = \frac{\mathrm{R}}{16}\cdot\frac{42+23\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
	$b = \mathrm{EF} = \mathrm{R}\sqrt{2}$	

Ciśnienie wypadkowe na scianę ośmiokątną będzie więc :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P'} + \mathrm{P''} + \mathrm{P'''} + \mathrm{P^{iv}} = \Pi\mathrm{wst}\alpha \frac{1}{6}\mathrm{R}^3\left[3\sqrt{2} - 4 + 3\sqrt{2} - 2 + 2(\sqrt{2}+1) + 4(\sqrt{2}+1)\right] = \Pi\mathrm{wst}\alpha 2\mathrm{R}^3\sqrt{2};$$

http://rcin.org.pl

Co możemy sprawdzić jeszcze za pomocą ogólnego wzoru : $P = \Pi w s t \alpha x_1 \Omega$, zważywszy że :

$$x_1 = R,$$

$$\text{bok ośmiokąta wpisanego} = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\text{a jego apotema} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

będziemy więc mieli :

$$(1) \qquad P = \Pi w s t \alpha R\left(8R\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \frac{R}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = \Pi w s t \alpha\, 2R^3\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} = \Pi w s t \alpha\, 2R^3\sqrt{2}\,.$$

Ażeby otrzymać odciętę X′ środka ciśnienia, piszemy równanie momentów ciśnień składowych P', P'', P''', P^{IV} i ciśnienia wypadkowego P względem poziomej AA :

$$P'x' + P''x'' + P'''x''' + P^{\text{IV}}x^{\text{IV}} = PX';$$

czyli, podstawiając ich wartości :

$$\frac{1}{6}R^3(3\sqrt{2}-4)\,\frac{3}{8}R\,(2-\sqrt{2}) +$$

$$+\frac{1}{6}R^3(3\sqrt{2}-2)\,\frac{5}{4}R\,\frac{5+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{3}R^3(\sqrt{2}+1)\,\frac{1}{8}R\,\frac{10+7\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{2}{3}R^3(\sqrt{2}+1)\,\frac{R}{16}\cdot\frac{42+23\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = X'2R^3\sqrt{2};$$

zkąd, po wykonaniu wskazanego rachunku, uproszczeniu i zamienieniu X′ na x', otrzymujemy :

$$(2) \qquad x' = R\,\frac{1424+1168\sqrt{2}}{1152+960\sqrt{2}} = R\,\frac{89+73\sqrt{2}}{72+60\sqrt{2}} = \frac{R}{12}\cdot\frac{89+73\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}\,.$$

Forma ta jest niedogodną do porównania wartości x' otrzymanej dla ośmiokąta z wartościami znalezionemi poprzednio dla innych figur. Wyraziwszy w tym celu odcięte x' rozmaitych środków ciśnienia pod postacią ułamków dziesiętnych, otrzymujemy następujący szereg liczb :

x' dla	3^a	wpisanego	=	1,125 R
»	» 4^a	»	=	1,167 R
»	» 6^a	»	=	1,208 R
»	» 8^a	»	=	1,226 R
»	koła	»	=	1,250 R
»	» 6^a	opisanego	=	1,278 R
»	» 4^a	»	=	1,333 R
»	» 3^a	»	=	1,500 R.

W podobny sposób moglibyśmy otrzymać środek ciśnienia innych figur foremnych, jak naprzykład : ośmiokąta opisanego, pięciokąta, dziesięciokąta, i t. p; ale rachunki stają się uciążliwszymi, z powodu że boki takich figur wyrażają się w sposób mniej prosty ; tak naprzykład wiadomo że

$$\text{bok ośmiokąta foremnego opisanego} = 2R\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2R\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\,;$$

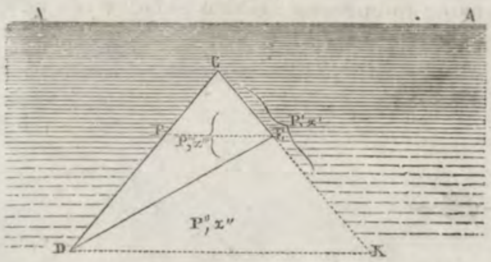
http://rcin.org.pl

» pięciokąta » wpisanego $=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

» dziesięciokąta » » $=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Uwaga. Wzory, wyprowadzone na ciśnienie i środek ciśnienia dla trójkąta i innych figur z trójkątów złożonych, przypuszczają że jeden bok trójkąta jest linją *poziomą*; nie stosują się więc one naprzykład do trójkąta CDE (fig. 54), zajmującego na ścianie położenie jakiekolwiek względem poziomej AA. Ale łatwo jest sprowadzić ten przypadek ogólny do przypadku dla którego powyższe wzory będą mieć miejsce, dzieląc poziomą EF trójkąt dany na dwa trójkąty, z których każdy będzie mieć bok poziomy EF, i wierzchołek jednego C będzie u góry, a drugiego D u dołu. Moglibyśmy jeszcze poprowadzić poziomę DK przez wierzchołek D danego trójkąta, w skutek czego otrzymalibyśmy trójkąty CDK i EDK, o boku poziomym DK i o wierzchołkach C i E zwróconych ku powierzchni wolnej. Używając tego ostatniego sposobu, i oznaczając ciśnienie i odciętę środka ciśnienia dla trójkąta CDK przez P′ i x', dla trójkąta EDK przez P″ i x'', a dla trójkąta danego CDE przez P‴ i x''' mamy:

fig. 54.



$$P''' + P'' = P';$$
$$P'''x''' + P''x'' = P'x';$$

zkąd się wyznaczą wartości szukane P‴ i x'''.

Ta sama metoda stosuje się do innych figur, jak np. do trapezu, prostokąta i t. p., a w ogólności do wszelkiej figury płaskiej, niezależnie od jej położenia względem poziomej AA.

Jeżeli w danej figurze nie są nam znane wszystkie ilości potrzebne do *analitycznego* wyznaczenia wypadkowego na nią ciśnienia i jej środka ciśnienia, możemy zawsze, z pewném przybliżeniem, rozwiązać zadanie to sposobem *graficznym*.

63. Metoda geometryczna wyznaczania ciśnienia wypadkowego i środka ciśnienia. Formuły (A) i (B), wyprowadzone pod § 41, dają nam *analitycznie* wartości na ciśnienie wypadkowe P wywierane na daną powierzchnię Ω, i na środek jej ciśnienia x'. Otóż te dwie ilości mogą być wyznaczone drogą *geometryczną*, i w sposób od powyższych wzorów niezależny.

Geometryczna metoda szukania ciśnienia i środka ciśnienia nastręcza się sama przez się, jako prosty wynik geometrycznego przedstawiania ciśnienia, w jakimkolwiek punkcie cieczy, *wysokością* tego punktu, to jest jego odległością od powierzchni wolnej. Metoda ta sprowadza szukanie *ciśnienia* na szukanie *objętości*, a wyznaczenie *środka ciśnienia* na wyznaczenie *środka ciężkości* tej objętości.

Wracając do figury 21, której pewną część przedstawiamy na fig. 55, widzimy, że ciśnienie na jedność powierzchni w jakimkolwiek punkcie M, wziętym na przestrzeni otoczonej konturem CD, ma za miarę wysokość MN, za wartość — iloczyn ΠMN′, a za kierunek — normalnę Mn do ściany w punkcie M; tak że Mn = MN przedstawia nam zarazem kierunek ciśnienia w punkcie M i jego natężenie. Jeżeli w każdym innym punkcie M′ powierzchni CD = Ω wykonamy podobne wykreślenie, to jest, wyprowadzimy w punkcie M′ normalnę M′n' do ściany AE i weźmiemy na niej długość M′n' = M′N′, — czyli odległość tego punktu od powierzchni wolnej AB, — to otrzymamy nieprzerwany szereg normalnych formujących figurę ograniczoną: z dołu — powierzchnią płaską Ω; z boku — po-

http://rcin.org.pl

wierzchnią walcową, utworzoną obiegiem linji normalnej do ściany po konturze powierzchni Ω; nareszcie z góry—geometrycznem miejscem takich punktów jak C', n, n'... D'. Otóż łatwo jest widzieć,

Fig. 55.

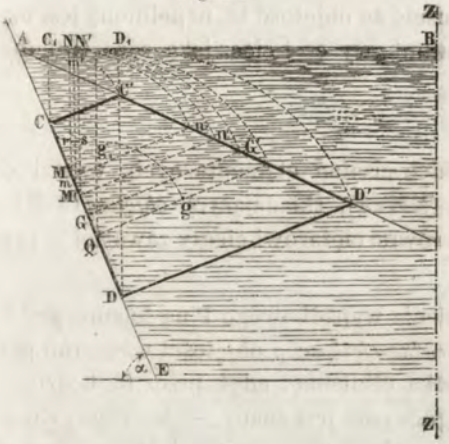
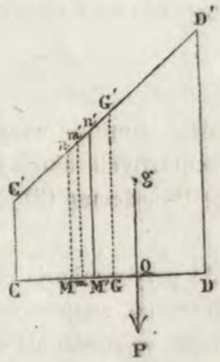


Fig. 56.



że tem miejscem jest płasczyzna utworzona ruchem poziomej, rzucającej się w punkcie A, po linji prostej AD' (której spółrzędne z, liczone wzdłuż normalnych do ściany, są proporcyonalne do spółrzędnych: $x = \frac{z}{\text{wst}\alpha}$ konturu, liczonych wzdłuż samej ściany). Płasczyzna ta (której AD' jest śladem na płasczyznę papieru) przechodzi przez przecięcie AA powierzchni wolnej AB z przedłużoną ścianą CD.

Więc figura, z powyższego wykreślenia wynikająca, jest walec prosty (lub pryzma), ścięty ukośnie płasczyzną C'D'.

Płasczyzna C'D' może być nazwana *płasczyzną wyrażającą ciśnienie na powierzchnię* CD $= \Omega$, gdyż rzędne jej, liczone normalnie do ściany CD, wyrażają natężenie ciśnienia w rozmaitych punktach danej nam powierzchi.

Zobaczmy teraz co wyraża objętość walca ściętego C'CDD'.

Uważając na ścianie CD już nie jeden punkt M, ale nieskończenie cienką taśmę ω powierzchni, ograniczoną poziomemi rzucającemi się w punktach M i M', *natężenie* ciśnienia elementarnego wywieranego na tę taśmę jest równe *ciężarowi* cieczy zawartej w kolumnie pionowej, mającej ω za podstawę, a za wysokość — odległość mm' środka ciężkości m tej powierzchni od powierzchni wolnej AB (*), czyli że $\mathfrak{P} = \Pi\,(\omega \times mm')$; *kierunek* tego ciśnienia jest, jak wiemy, normalny do ściany CD. Rzecz się będzie miała podobnież dla każdego innego elementu ściany.

Otóż, rozpatrywanie dwóch kierunków: jednego pionowego, — z którego wyprowadzamy *natężenie* ciśnienia, — a drugiego normalnego do ściany, — dającego nam *kierunek* tego ciśnienia, — *możemy zastąpić* jednym, który, przedstawiając kierunek ciśnienia, posłuży zarazem do wyznaczenia jego natężenia: mówimy o kierunku normalnym do ściany CD. Istotnie, ponieważ w *rzeczywistości* wszystkie elementa ściany CD są ciśnione normalnie do tej ściany, *możemy*, stawiając kolumnę ($\omega \times mm'$) w położeniu normalnem do CD, *przypuścić*, że siła ciężkości zmieniła swój kierunek pionowy na kierunek normalny do ściany CD; lub co wyjdzie na jedno, pozostawiając sile ciężkości własność być siłą prostopadłą do poziomej, przyjąć kierunek CD za kierunek poziomy. Nowa ta więc siła ciężkości, działając na kolumnę ($\omega \times mm'$) tak postawioną, wywrze na jej podstawę ω ciśnienie równe ciężarowi

(*) Ciężar cieczy zawartej w objętości MM'NN', wznoszącej się pionowo nad powierzchnią $MM' = \omega$, nie przedstawia bynajmniej natężenia ciśnienia wywieranego na tę powierzchnię; gdyż ten ciężar jest równy: $w = \Pi\,(rs \times mm')$, gdzie rs oznacza przecięcie proste pryzmy MM'NN'. Stosunek jaki zachodzi między ciężarem w, a ciśnieniem $\mathfrak{P}$ wywieranem na element MM' jest taki:

$$\frac{w}{\mathfrak{P}} = \frac{rs}{\omega} = \frac{\omega \text{dost}\alpha}{\omega} = \text{dost}\alpha.$$

http://rcin.org.pl

kolumny cieczy wznoszącej się nad tą podstawą: Π ($\omega \times mm'$) gdyż ta ostatnia jest przecięciem prostem pryzmy MM'nn'. W skutek więc takiego przypuszczenia, treść rzeczy zostaje niezmienioną a ściana CD pochyła (fig. 54) może być zastąpiona tą samą ścianą, ale już poziomą (fig. 55). Możemy nawet iść dalej i, zamiast objętości MM'nn' napełnionej cieczą, przypuścić że objętość ta napełnioną jest materyą *ciała stałego*, jednorodnego i mającego ten sam ciężar gatunkowy co i ciecz jaką rozpatrujemy: skutek pozostaje ten sam.

Wyprowadzamy ztąd natychmiast że:

1° *Ciśnienie całkowite* na ścianę CD, równe summie wszystkich ciśnień elementarnych, wyrazi się summą ciężarów wszystkich pryzm elementarnych takich jak (MM'nn'), składających *objętość* CC'D'D'; to jest, natężenie ciśnienia wypadkowego P na ścianę CD jest równe ciężarowi cieczy zawartej w pryzmie ściętej CC'D'D'.

2° Ponieważ *środek ciśnienia*, czyli punkt przyczepienia ciśnienia wypadkowego P na ścianie, jest to punkt w którym kierunek siły P przebija ścianę, znajomość *środka ciężkości* g objętości walca lub pryzmy ściętej CC'D'D wystarcza najzupełniej do wyznaczenia środka ciśnienia: gdyż przez to będziemy wiedzieć jeden punkt siły P; a że oprócz tego jej kierunek zgóry nam jest znany, — będziemy zatem mogli wykreślić tę siłę i przedłużywszy ją do spotkania się ze ścianą CD, otrzymać żądany środek ciśnienia.

W streszczeniu: z punktu widzenia geometrycznego, szukanie ciśnienia wypadkowego P na ścianę CD sprowadza się do szukania objętości ściętego walca lub pryzmy; a szukanie środka ciśnienia Q, — na szukanie środka ciężkości g tego walca (uważanego jak ciało stałe i jednorodne) i na odrzucenie tego punktu g prostopadle do ciśnionej ściany CD.

Otóż wiemy, że objętość walca prostego ściętego ukośnie ma za miarę iloczyn z jego podstawy Ω przez długość prostopadłej GG' do tej podstawy, wyprowadzonej z jej środka ciężkości G, i zawartej między Ω a płaszczyzną którą walec jest ścięty; ogólny więc wzór na P będzie:

$$P = \Pi\,(\Omega \times GG'),$$

za pomocą którego, w wielu przypadkach, ciśnienie wypadkowe z łatwością może być znalezione.

Co zaś do środka ciśnienia,— wyznaczenie tego punktu, w przypadkach jakie się najczęściej zdarzają przy zastosowaniach, również nie przedstawia trudności: dosyć jest wiedzieć środek ciężkości pewnych geometrycznych figur, aby ztąd można było wnieść natychmiast o położeniu środka ciśnienia: pokażemy to na kilku poniżej przytoczonych przykładach.

Uwaga 1. Geometryczna metoda szukania ciśnienia i środka ciśnienia, chociaż prosta w zasadzie, wymaga znajomości środka ciężkości objętości, co mówiąc ogólnie, nie może nas uwolnić od zastosowania rachunku całkowego; jeśli więc rachunki, jakie w tym celu potrzebaby było wykonać, są długie i uciążliwe, szukanie ciśnienia i środka ciśnienia wprost za pomocą wzorów (A) i (B) podanych pod § 41 może być dogodniejszem.

Uwaga 2. Z proporcyonalności elementów MM'NN' do elementów MM'nn' wnosimy, że środek ciężkości objętości walca ściętego CDC_1D_1, o krawędziach pionowych CC_1, DD_1 i podstawach CD i C_1D_1, znajduje się na pionowej Qg_1 wyprowadzonej że środka ciśnienia Q; zkąd, odwrotnie, środek ciśnienia Q na ścianę CD leży na pionowej poprowadzonej przez środek ciężkości g_1 walca ściętego CDC_1D_1.

Uwaga 3. W przedstawieniu ciśnienia objętością ściętego walca widzimy przyczynę, dla której środek ciśnienia na ścianę musi zawsze się znajdować pod środkiem ciężkości powierzchni tej ściany.

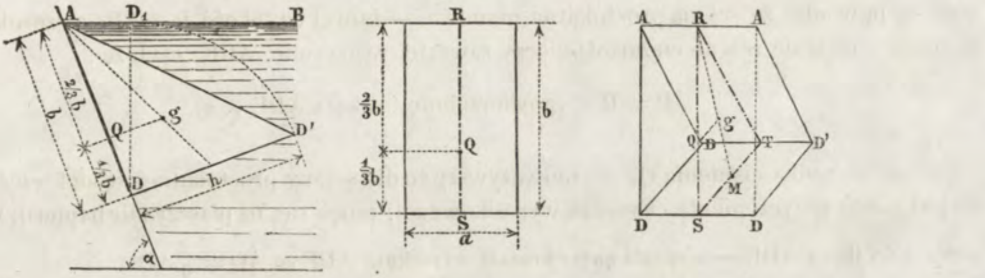
68. Na zastosowanie metody geometrycznej rozpatrzymy przykłady następujące:

http://rcin.org.pl

I PRZYKŁAD. *Powierzchnia ciśniona jest prostokątem; jeden z jego poziomych boków rzuca się w punkcie* A, *drugi — w punkcie* B *ściany* AE (fig. 57).

Ciśnienie wypadkowe. Uważamy że objętość z której się wyprowadza ciśnienie wypadkowe jest pry-

Fig. 57.



zmą, mającą za swe podstawy trójkąt ADD′, a za wysokość DD $= a$; wiemy że ta objętość ma za miarę iloczyn z podstawy przez wysokość, czyli :

$$V = \frac{1}{2} bh \times a;$$

Wzór ogólny : $V = \Omega \times GG'$ daje tę samą wartość, gdy

$$\Omega = ab, \text{ i } GG' = \frac{1}{2} h;$$

więc ciśnienie wypadkowe będzie $P = \Pi \times \frac{1}{2} . abh$,

a że $h = b \text{wst}\alpha$, zatem :

$$P = \Pi \text{ wst}\alpha \frac{1}{2} ab^2.$$

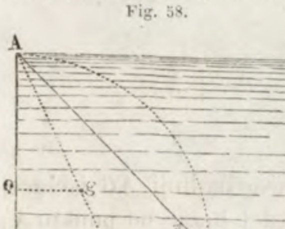
Środek ciśnienia. Wiemy że środek ciężkości pryzmy znajduje się na środku prostej łączącej środki ciężkości dwóch jej podstaw, albo jeszcze w środku ciężkości trójkąta RST, jaki otrzymamy przecinając pryzmę płaszczyzną RS równoległą do podstaw, i przeprowadzoną w równej od nich odległości; a że środek ciężkości g trójkąta RST znajduje się na $\frac{2}{3}$ RM , więc rzut punktu g na ciśnioną ścianę, to jest Q, znajdzie się na linji RS i na odległości $\frac{2}{3}$ punkt b od poziomej AA.

UWAGA 1. Obracając ścianę Ω około poziomej AA, odległość środka ciśnienia od tej poziomej się nie zmieni; więc gdy ściana prostokątna przyjmie położenie pionowe, oznaczając wysokość prostokąta przez h, mamy :

$$P = \Pi \frac{1}{2} ah^2; \qquad x' = \frac{2}{3} h, \text{ licząc od góry}; \qquad \text{lub } \frac{1}{3} h, \text{ licząc od dołu.}$$

UWAGA 2. Mówiąc o geometrycznej metodzie szukania ciśnienia i środka ciśnienia na ścianę pionową prostokątną, nie możemy ominąć opartego na tej metodzie praktycznego traktowania tego przypadku; (analitycznie przypadek ten był rozpatrzony pod § 60) praktyczny pogląd na kwestyę, będąc mniej skrępowanym ścisłością wyrażania się, przedstawia większą łatwość uwydatnienia samej rzeczy i utkwienia jej na dłużej w pamięci.

Fig. 58.



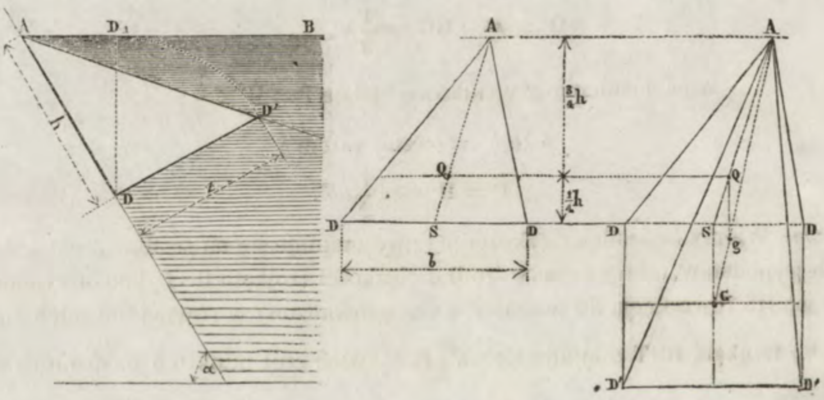
Widzieliśmy pod § 36, że dla ściany pionowej AD (fig. 58), której górna krawędź znajduje się na powierzchni wolnej AB, linja AE poprowadzona pod 45° będzie linją wyrażającą ciśnienie w rozmaitych punktach pionowej AD; możemy więc powiedzieć, że powierzchnia trójkąta ADE, pomnożona przez Π, przedstawia natężenie ciśnienia wywieranego na całą linję AD; właściwiej zaś będzie wyrazić się, że powierzchnia tego trójkąta, pomnożona przez jedność i przez Π, przedstawia natężenie całkowitego ciśnienia wywieranego na prostokąt mający AD za wysokość, a jedność za szerokość. W praktyce więc się powiada, że ściana prostokątna pionowa, — której wysokość jest AD, a szerokość a, — wytrzymuje ciśnienie równe ciężarowi cieczy zawartej w pryzmie ADE, czyli że:

$$P = \Pi \times (\text{powierzchnię trójkąta } ADE \times a).$$

Co zaś do środka ciśnienia Q, — zauważywszy że dla ściany prostokątnej środek ciężkości pryzmy (to jest punkt przyczepienia ciśnienia wypadkowego), rzuca się, na płaszczyznie papieru, w środku ciężkości g trójkąta ADE, — wypada natychmiast z trójkąta ADF że $AQ = \frac{2}{3} AD$.

II PRZYKŁAD. *Powierzchnia ciśniona jest trójkątem, którego wierzchołek znajduje się na powierzchni wolnej, a podstawa jest linją poziomą* (fig. 59).

Fig. 59.



Ciśnienie wypadkowe. Objętość za pomocą której znajdujemy ciśnienie wypadkowe, i która w przypadku ogólnym jest ściętym walcem lub ściętą pryzmą, staje się, dla ściany jaką rozpatrujemy, piramidą mającą swój wierzchołek w punkcie A, a za podstawę prostokąt, którego jednym bokiem jest $DD = b$, a drugim : $DD' = DD_1 = h \operatorname{wst}\alpha$. Otóż, objętość tej piramidy będzie:

$$V = (b \times h \operatorname{wst}\alpha) \times \frac{1}{3} h;$$

a zatem:

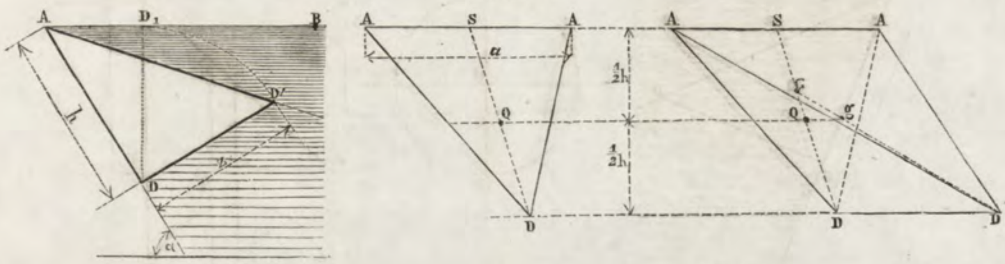
$$P = \Pi \operatorname{wst}\alpha \frac{1}{3} bh^2.$$

Środek ciśnienia. Wiadomo jest, że środek ciężkości g piramidy znajduje się na linji AG łączącej wierzchołek A ze środkiem ciężkości G podstawy piramidy, i na 3/4 tej prostej licząc od punktu A; więc rzut punktu g na ścianę ADD będzie w punkcie Q takim, że AQ = 3/4 AS.

http://rcin.org.pl

III PRZYKŁAD. *Powierzchnia ciśniona jest trójkątem, którego podstawa, rzucająca się w punkcie A, leży na powierzchni wolnej* (fig. 60).

Fig. 60.



Ciśnienie wypadkowe. Aby mieć ciśnienie wypadkowe na trójkąt AAD, uważamy objętość piramidy mającej ten trójkąt za podstawę, a za wierzchołek punkt D′. Wysokość piramidy jest DD′ = h wstα, więc :

$$P = \Pi V = \Pi\left(a \times \frac{h}{2}\right) \times \frac{1}{3}\, h \operatorname{wst}\alpha = \Pi \operatorname{wst}\alpha\, \frac{1}{6}\, ah^2.$$

Środek ciśnienia. Położenie środka ciśnienia otrzymujemy natychmiast z trójkątów GQg i GDD′, gdyż mamy :

$$D'g : D'G = DQ : DG \text{; a że } D'g = \frac{3}{4} D'G,$$

więc :

$$DQ = \frac{3}{4} DG = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} DS\right) = \frac{1}{2} DS.$$

IV PRZYKŁAD. *Powierzchnia ciśniona jest równoległobokiem, którego jeden z boków leży na powierzchni wolnej.* Widzieliśmy pod § 58 jakim sposobem zadanie to może być rozwiązane za pomocą trójkątów; chcąc zaś traktować wprost ten przypadek, spostrzegamy że on w niczem się nie różni od przypadku ściany prostokątnej : objętość, z której wyprowadzamy ciśnienie wypadkowe, jest pryzmą, a jej środek ciężkości rzuca się, jak dla ściany prostokątnej, w środku ciężkości G trójkąta ADD′ (fig. 57); ztąd natychmiast wnosimy, że środek ciśnienia znajduje się na osi średnicowej i na 2/3 tej osi licząc od boku AA leżącego na powierzchni wolnej.

70. Powyższe przykłady,—z których wypadki otrzymaliśmy poprzednio drogą analityczną—aż nadto wystarczają do okazania w jaki sposób kwestya ciśnienia i środka ciśnienia może być rozwiązaną za pomocą geometryi. Dobrze będzie zauważyć, że nawzajem, rozwiązanie tej kwestyi metodą analityczną może przynieść pewną przysługę geometryi. Pokażemy to na następującym przykładzie.

Niech ciśnioną powierzchnią będzie koło AD (fig. 61) styczne do powierzchni wolnej AB.

Wiemy z § 47 że w takim razie :

(1) $$P = \Pi \operatorname{wst}\alpha\, \pi R^3,$$

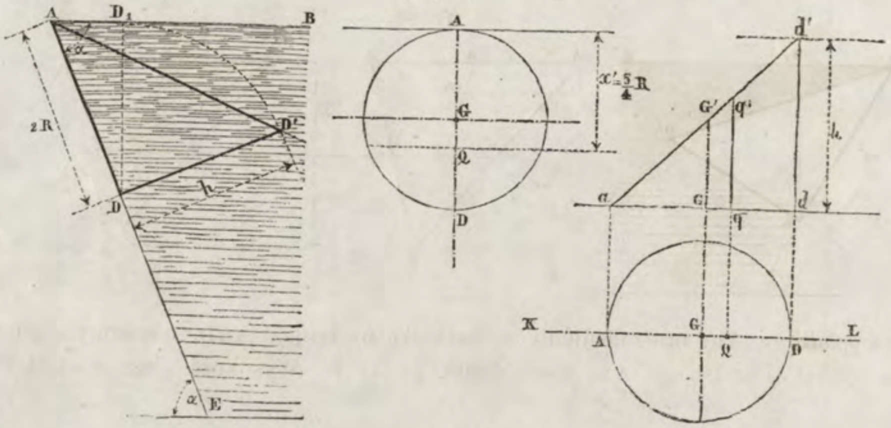
(2) $$x' = \frac{5}{4} R.$$

Metoda geometryczna wyprowadza P z objętości walca prostego, ściętego płaszczyzną aa'; ta objętość jest :

$$V = \Pi R^2 \times GG',$$

gdzie GG' otrzymuje są z trójkąta *ad'd* :

Fig. 61.



(3) $$GG' = \frac{h}{2} = R\,\mathrm{wst}\alpha\,;$$

zatem :

$$P = \Pi V = \Pi\,\mathrm{wst}\alpha\,\pi R^3.$$

Ciśnienie wypadkowe na powierzchnię koła otrzymuje się więc z wielką łatwością; ale wyznaczenie środka ciśnienia tą metodą jest mniej proste, bo wymagające szukania środka ciężkości ściętego walca.

Pominąwszy wszelką kwestyę ciśnienia, gdyby wprost chodziło nam tylko o znalezienie środka ciężkości walca przedstawionego na figurze, otrzymalibyśmy pewne wskazówki co do położenia tego punktu, posiłkując się wzorem (2). I tak, wiedzielibyśmy odrazu, że środek ciężkości walca ściętego *add'* znajduje się na prostopadłej *qq'*, wyprowadzonej w płasczyznie symetryi KL, na odległości $AQ = \frac{5}{4}R$; do zupełnego wyznaczenia tego punktu pozostawałoby zatem znalezienie jednej tylko jego rzędnej z.

Własność ta stosuje się do walca kołowego ściętego jakąkolwiek płasczyzną *ad'* przechodzącą przez punkt A jego podstawy, byleby nachylenie tej płasczyny do płasczyzny koła nie przechodziło 45°; gdyż, jak to pokazuje (3), maximum h do którego objętość walca *add'* zachowuje znaczenie hydrostatyczne jest $h = 2R$,—co odpowiada pionowemu położeniu ściany AE; a chociaż środek ciśnienia nie zmienia swego położenia na ścianie, jakikolwiek byłby kąt α na który ją obrócimy około poziomej A, wysokość h walca wyrażającego ciśnienie wypadkowe, doszedłszy wartości $h = 2R$ dla $\alpha = 90°$, maleje następnie z dalszém powiększaniem się tego kąta.

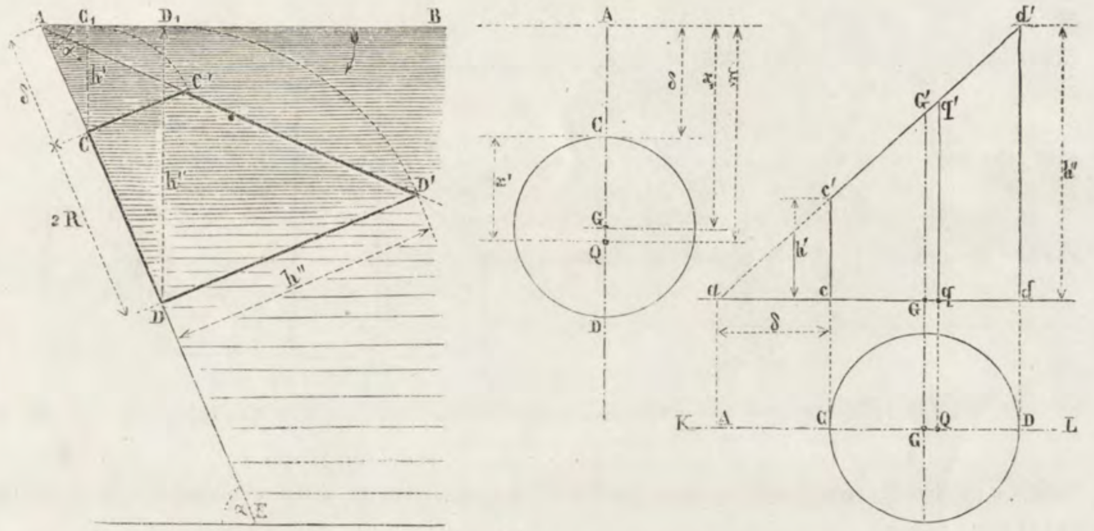
Gdyby płasczyzna *c'd'* (fig. 62) ścinająca walec nie przechodziła przez punkt C jego podstawy, a przeprowadzoną była na pewnej wysokości h' nad tym punktem, objętość walca *cdc'd'* miałaby jeszcze znaczenie hydrostatyczne, czyli wyrażałaby $\frac{P}{\Pi}$, dla każdej płasczyzny *c'd'*, której nachylenie do płasczyzny poziomej *cd* nie przechodzi 45°. Rzeczywiście, uważając koło w położeniu CD na ścianie AE, wartość GG' jaką mamy podstawić we wzorze na V, aby mieć ciśnienie wypadkowe, ma za wyrażenie :

$$\overline{GG'} = \frac{h' + h''}{2} = \frac{\delta\,\mathrm{wst}\alpha + (\delta + 2R)\,\mathrm{wst}\alpha}{2} = (\delta + R)\,\mathrm{wst}\alpha;$$

http://rcin.org.pl

więc maximum GG′, odpowiadające pionowemu położeniu ściany AE, będzie $GG' = \delta + R$; a zatem, maximum objętości walca ściętego o którym mowa, odpowiada płaszczyźnie *ad′* nachylonej pod 45° do płaszczyzny koła *ad*.

Fig. 62.



Więc jeśli płaszczyzna *c′d′* ścinająca walec zadawalnia powyższy warunek, i jeśli znamy środek ciśnienia dla koła mającego na ścianie jakiekolwiek położenie CD, wyznaczone przez odległość δ górnej jego stycznej od poziomej A, będziemy znać przezto prostopadłę na której leży środek ciężkości walca ściętego *cdc′d′*.

Dodajmy, że wysokość $cc' = h' = \delta$ wsta może być jakąkolwiek, gdyż ilość h' ulega jednemu tylko warunkowi, a mianowicie, nie powinna ona przewyższać δ; otóż δ pozostaje ilością niewyznaczoną, dowolną, i możemy ją wziąć taką jaka nam się podoba.

71. Wiemy z § 53, że odległość x' środka ciśnienia dla koła CD od stycznej do tego koła, rzucającej się w punkcie C, wyraża się wzorem :

$$x' = R\frac{\delta + \frac{5}{4}R}{\delta + R} = R + \frac{1}{4}\cdot\frac{R^2}{R+\delta}\,; \tag{1}$$

więc znając δ, a zatem i punkt Q, będziemy w stanie wyprowadzić prostopadłę qq' na której znajduje się środek ciężkości ściętego walca. Otóż ażeby, mając dany walec *cdc′d′*, wyznaczyć ilość δ, dosyć jest przedłużyć płaszczyznę *c′d′* do spotkania się jej z podstawą *cd* tego walca; odległość *ac* będzie ilością szukaną, a jej wprowadzenie we wzór (1) da nam odległość punktu q od punktu c.

Ale linję qq' możemy otrzymać bez wszelkiego rachunku, *graficznie*. Rzeczywiście, wzór (1) możemy przedstawić pod formą :

$$x' = R + \frac{1}{4}\lambda,$$

gdzie λ zadawalnia związek :

$$\delta + R : R = R : \lambda\,;$$

http://rcin.org.pl

czyli że λ jest odcinkiem przeciwprostokątnej trójkąta KLM (fig. 63), otrzymanym, biorąc długość $KN = \delta + R$, wyprowadzając z punktu N prostopadłę $NL = R$, a następnie w punkcie L prostopadłę LM do KL, i przedłużając LM do spotkania się jej z linją KM w punkcie M; długość NM wyrazi nam ilość λ.

fig. 63.

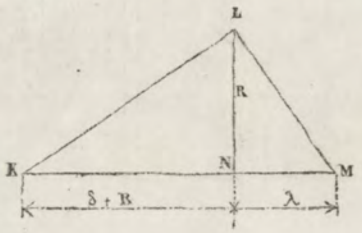


fig. 64.

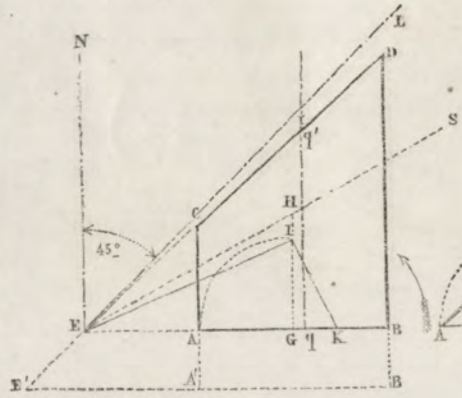
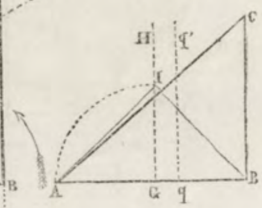


fig. 65.



Dla wykreślenia więc prostopadłej na której się znajduje środek ciężkości walca ściętego płaszczyzną, czyniącą z podstawą jego kąt mniejszy od 45°, lub też równy 45°, wyprowadzamy następujące prawidło :

Mając walec ABCD (fig. 64), przedłużamy płaszczyznę DC do spotkania się z podstawą AB w punkcie E; ze środka G tej ostatniej wyprowadzamy prostopadłę GH, na której bierzemy $GI = AG$, poczem łączymy punkt E z punktem I; wyprowadzamy następnie w tym ostatnim punkcie prostę IK prostopadłą do EI; przedłużamy IK do spotkania się z AB w punkcie K; nareszcie, odcinamy od punktu G długość $Gq = \frac{1}{4} GK$; szukany środek ciężkości będzie leżeć na prostopadłej qq′ wyprowadzonej z punktu q. (*)

(*) Linja qq', na której znajduje się środek ciężkości walca CABD (fig 64), jest bliżej położona względem boku AC trapezu CABD, aniżeli linja zawierająca w sobie środek ciężkości tego trapezu. Rzeczywiście, oznaczając przez d odległość środka ciężkości trapezu od podstawy jego AC; kładąc :

$$AC = a, \qquad BD = b, \qquad AB = h = 2R, \qquad EA = \delta;$$

i uważając że trójkąty EAC i EBD dają :

$$\delta : a = (\delta + 2R) : b,$$

zkąd :

$$\delta = \frac{2aR}{b-a};$$

znajdziemy na odległość d i na odległość linji qq' od boku AC, to jest na $Aq = x'$, następujące wyrażenia :

(1)
$$d = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} = R\,\frac{8a+16b}{12(a+b)};$$

(2)
$$x' = R + \frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{R+\delta} = R + \frac{1}{4} R\,\frac{b-a}{b+a} = R\,\frac{9a+15b}{12(a+b)};$$

które możemy jeszcze przedstawić tak :

$$d = \frac{R}{12(a+b)} \times (8a + b + 15b);$$

$$x' = \frac{R}{12(a+b)} \times (8a + a + 15b);$$

a że $a < b$, więc $x' < d$.

http://rcin.org.pl

Prawidło to stosuje się również do walca ABC (fig. 65) ściętego płaszczyzną CA przechodzącą przez punkt A jego podstawy; jednak dla znalezienia, w podobnym przypadku, linji qq', powyższe wykreślenie jest zbytecznem.

Jeżeli, nie zmieniając podstawy AB, (fig. 64) przypuścimy że punkt E jest *stały*, metoda nasza da nam jednę i tę samą długość GK, jakakolwiekby była płaszczyzna ES ścinająca walec; ztąd powiadamy że: *dla wszystkich walców, mających spólną podstawę, i ściętych rozmaitemi płaszczyznami zawartemi w kącie LEB i przechodzącemi przez jednę i tę samą prostę, równoległą do stycznej do podstawy walca, środek ciężkości znajduje się na jednej i tej samej prostopadłej.*

Przyczyna tej własności leży w teoryi ciśnienia, gdyż — licząc dla figury 64 kąty od poziomej EB, a dla figury 62 od powierzchni wolnej AB, jak to pokazują strzałki — uważamy, że obrót płaszczyzny ED na 45° (fig. 64) około prostej E odpowiada, w teoryi ciśnienia (fig. 62), obrotowi na 90° około poziomej A, ściany AE, na której koło CD zajmuje położenie *stałe*; przy takich okolicznościach zmienia się tylko ciśnienie na koło, czyli objętość walca; środek zaś ciśnienia, czyli prostopadła qq', żadnej nie ulega zmianie.

Wzór (1) pokazuje, że w miarę zwiększania się δ, ilość λ się zmniejsza, czyli że linja qq' zbliżı się do prostej GG' łączącej środki ciężkości podstaw walca, tak że dla $\delta = \infty$, qq' zlewa się z GG'. Przyczyna tego przedstawi się nam z całą dobitnością zapatrując się na kwestyę geometrycznie: otóż, warunek analityczny: $\delta = \infty$, znaczy geometrycznie że płaszczyzna CD (fig. 64) jest równoległą do podstawy walca AB; ten ostatni jest więc walcem prostym, a zatem jego środek ciężkości znajduje się na linji GG'.

Zwiększanie się ilości δ, czyli zniżanie się koła CD (fig. 62) wzdłuż ściany AE, odpowiada na figure 64 zniżaniu się EB do E'B', E''B'' itd. a jeżeli, jednocześnie ze zniżaniem się koła CD, kąt α zmienia się między granicami $\alpha = 0^0$ i $\alpha = 90^0$, zniżaniu się EB będzie towarzyszyła zmiana w nachyleniu płaszczyzny ED, odbywajaca się między granicami 0^0 i 45^0.

Różnica: $d - x'$ jest funkcyą boków a i b i ma za wyrażenie:

$$d - x' = \frac{R}{12} \cdot \frac{b-a}{b+a}.$$

Jeżeli $a = b$, różnica ta jest zerem, i otrzymujemy:

$$d = x' = R = \frac{h}{2};$$

co być powinno, gdyż trapez staje się wtedy prostokątem, a walec ścięty — walcem prostym.

Jeżeli $a = 0$, to jest jeżeli trapez stanie się trójkątem, a walec będzie ścięty płaszczyzną AC (fig 65), powyższe wzory dają:

$$d - x' = \frac{R}{12};$$

$$d = \frac{4}{3} R = \frac{2}{3} h;$$

$$x' = \frac{5}{4} R.$$

Co jest wiadomem.

http://rcin.org.pl

72. Wykreślenie, za pomocą którego znajdujemy linję qq' dla ściętego walca kołowego, stosuje się jeszcze i do walca elliptycznego, ściętego płaszczyzną poprowadzoną, pod kątem mniejszym lub równym 45°, przez styczną w jednym z wierzchołków ellipsy stanowiącej podstawę tego walca; a w ogólności — przez linję równoległą do takiej stycznej. Zanim jednak to pokażemy, zróbmy niektóre uwagi:

Wiemy z § 45, że odcięta x' środka ciśnienia na powierzchnię ellipsy, stycznej do poziomej AA, (podług której przecina się płaszczyzna ellipsy z powierzchnią wolną AB cieczy) zależy tylko od wymiaru osi skierowanej podług największego spadku ciśnionej ściany; tak że uważając (fig. 66 i 67) jednę i tę samą ellipsę w dwóch różnych jej położeniach (α) i (β), i oznaczając odpowiednie tym położeniom ciśnienia wypadkowe i odcięte środka ciśnienia przez P_α i P_β, x'_α i x'_β,

fig. 66.

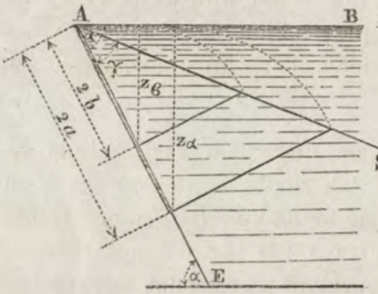
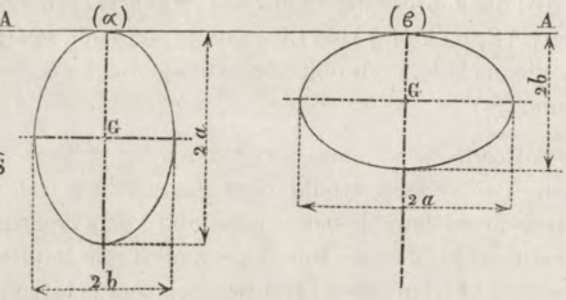


Fig. 67.



będziemy mieli:

$$P_\alpha = \Pi \text{ wst } \alpha \times a \,.\, \pi ab,$$

$$x'_\alpha = \frac{5}{4} a\,;$$

$$P_\beta = \Pi \text{ wst } \alpha \times b \,.\, \pi ab,$$

$$x'_\beta = \frac{5}{4} b.$$

Jeżeli w obu przypadkach kąt α ma jednę i tę samą wartość zawartą między 0° i 90°, to jest, jeżeli nachylenie ściany AE pozostaje tem samem, — albo też, jeżeli na jednej i tej samej ścianie umieścimy, w położeniu figury 67, dwie równe sobie ellipsy, — to mamy:

(1) $$P_\alpha : P_\beta = a : b$$

co pokazuje, że przy warunkach wyrażonych tą figurą, *ciśnienia na ellipsę są proporcyonalne do jej osi.*

Jeżeli dla dwóch ścian AE, na których rozpatrujemy dwie równe sobie ellipsy w położeniach (α) i (β), kąt α ma jednakową wartość, kąt γ jaki czynią płaszczyzny AS ze ścianami AE będzie w obu przypadkach jednakowy; gdyż, z jednej strony, mamy z fig. (66):

$$\left.\begin{array}{l} z_\alpha = 2a \text{ wst } \alpha \\ z_\beta = 2b \text{ wst } \alpha \end{array}\right\} \text{ zkąd: } \frac{z_\alpha}{z_\beta} = \frac{a}{b};$$

zaś z drugiej strony, - uważając dwie ściany AE i przypuszczając że dwie płaszczyzny AS_α i AS_β tworzą z AE kąty różne γ_α i γ_β, — dla ściany na której ellipsa jest w położeniu (α) będziemy mieli:

$$z_\alpha = 2a \text{ stycz } \gamma_\alpha\,;$$

http://rcin.org.pl

dla ściany, gdzie ellipsa jest w położeniu (β), napiszemy:

$$z_\beta = 2b \operatorname{stycz} \gamma_\beta;$$

zkąd:

$$\frac{z_\alpha}{z_\beta} = \frac{2a \operatorname{stycz} \gamma_\alpha}{2b \operatorname{stycz} \gamma_\beta} = \frac{a}{b}, \qquad \text{więc:} \qquad \frac{\operatorname{stycz} \gamma_\alpha}{\operatorname{stycz} \gamma_\beta} = 1;$$

zatem:

$$\gamma_\alpha = \gamma_\beta = \gamma.$$

W skutek tego wyrażenie:

(2) $$V_\alpha : V_\beta = a : b,$$

wynikające z (1), możemy wypowiedzieć w sposób następujący: *ścinając elliptyczny walec płaszczyzną S nachyloną do jego podstawy pod jednym i tym samym kątem γ i przechodzącą, w jednym przypadku,—przez styczną w wierzchołku wielkiej osi ellipsy, a w drugim —przez styczną w wierzchołku małej jej osi, otrzymane ztąd objętości są proporcyonalne do odpowiednich im osi ellipsy.*

Ta proporcyonalność ma miejsce dla wszelkiego kąta γ, i może być wyprowadzoną niezależnie od kwestyi ciśnienia. W samej rzeczy, figury 68 i 69 dadzą:

$$V_\alpha = \pi ab \times G_\alpha G'_\alpha,$$
$$V_\beta = \pi ab \times G_\beta G'_\beta;$$

Fig. 68.

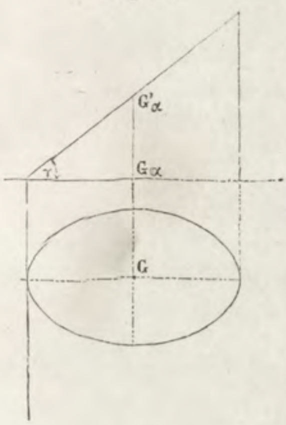
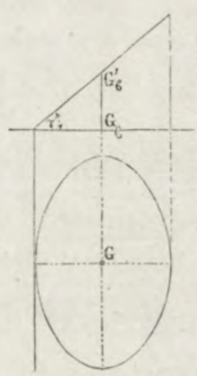


fig. 69.



gdzie:

$$G_\alpha G'_\alpha = a \operatorname{stycz}\gamma; \quad G_\beta G'_\beta = b \operatorname{stycz}\gamma;$$

zkąd:

$$V_\alpha : V_\beta = G_\alpha G'_\alpha : G_\beta G'_\beta = a : b$$

dla wszelkiego γ. Lecz ażeby te objętości przedstawiały ciśnienia na podstawy walców, postawione w położeniach (α) i (β) figury 67, kąt γ nie powinien przewyższać 45°.

Podobną uwagę możemy zrobić co do proporcyi:

$$x'_\alpha : x'_\beta = a : b,$$

istniejącej dla każdego kąta α; lecz w której x_α' i x_β' wyrażają odległości, od stycznych do ellipsy, prostopadłych zawierających środki ciężkości objętości V_α i V_β, (utworzonych sposobem wyżej wymienionym) tylko w tym razie kiedy kąt γ nie przechodzi 45°.

73. Ogólny przypadek ściany elliptycznej, gdzie styczna w jednym z wierzchołków ellipsy najduje się na pewnej odległości δ od poziomej AA (fig. 70), w niczem się nie różni od podobnego przypadku rozpatrzonego pod § 53 dla koła. Wzory na ciśnienie wypadkowe i na odciętę środka ciśnienia, liczoną od stycznej YO, będą:

(1) $$P = \Pi w \operatorname{st}\alpha\, x_1 \Omega = \Pi w \operatorname{st}\alpha (\delta + b) \pi ab;$$

$$x' = \frac{\int z\,(udx)\,x}{\int z\,(udx)} = \frac{\int (x+\delta)\,(udx)\,x}{\int (x+\delta)\,(udx)};$$

gdzie wartość na u wyprowadzi się z równania ellipsy odniesionego do osi OY i OX:

$$\frac{(x-b)^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

z którego otrzymamy:

$$u=\frac{2a}{b}\sqrt{2bx-x^2},$$

i ostatecznie znajdziemy:

$$(2)\qquad x'=\frac{\int_0^{2b}(x+\delta)\,x\sqrt{2bx-x^2}\,dx}{\int_0^{2b}(x+\delta)\sqrt{2bx-x^2}\,dx}=b+\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{b+\delta};$$

a chcąc mieć odległość ξ' środka ciśnienia od poziomej AA, weźmiemy:

$$\xi'=\delta+x'=\delta+b+\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{b+\delta}.$$

fig. 70.

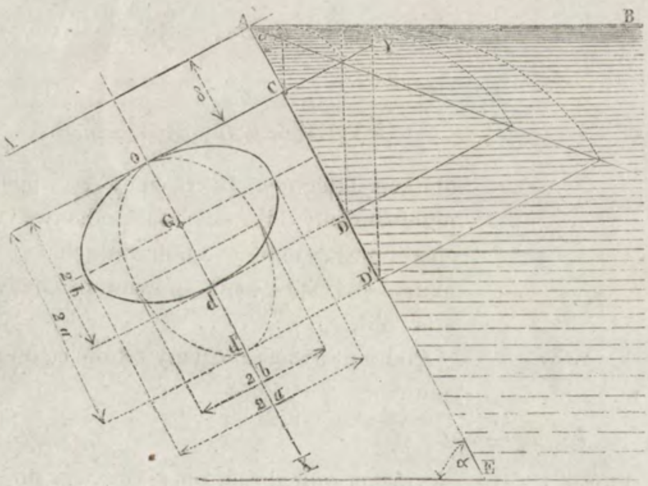
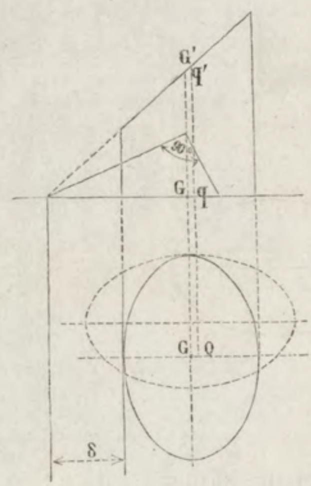


fig. 71.



Gdyby ta sama ellipsa zajmowała na ścianie położenie CD', tobyśmy mieli:

$$(1')\qquad P=\mathrm{H}wst\alpha(\delta+a)\pi ab;$$

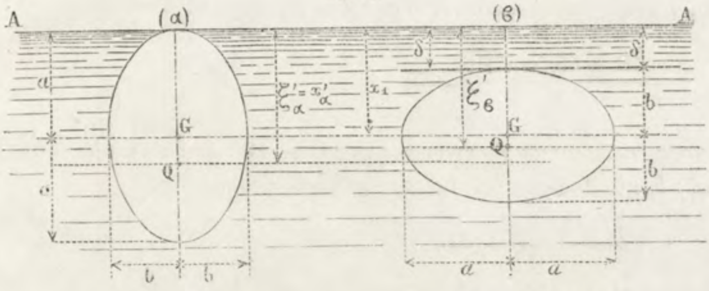
$$(2')\qquad x'=a+\frac{1}{4}\,\frac{a^2}{a+\delta}.$$

Ponieważ wyrażenia (2) i (2') są takiej samej formy jak znalezione pod § 53 wyrażenie dla koła, wypada ztąd, że wykreślenie prostopadłej qq', wyprowadzone pod § 71 dla ściętego walca kołowego, przysługuje również i walcowi o podstawie elliptycznej, ściętemu jakąkolwiek płaszczyzną poprowadzoną przez prostę, równoległą do jednej ze stycznych w wierzchołkach tej podstawy (albo też i przez samą taką styczną), pod kątem nie przewyższającym 45°. Figura 71 przedstawia podobne wykreślenie dla ellipsy, odpowiadającej na fig. 70 położeniu CD.

http://rcin.org.pl

74. Ściany elliptyczne nastręczają nam pewne zadania. Niech naprzykład na jednej i tej samej ścianie dwie równe sobie ellipsy znajdują się w położeniach (α) i (β) przedstawionych figurą 72. Pytanie, jakie najprzód możemy sobie zadać, jest *wyznaczenie odległości δ, przy której ciśnienia na obie ellipsy będą jednakowe*; otoż dosyć jest zauważyć, że ponieważ powierzchnia Ω jest ta sama, zadanie wymaga ażeby środki ciężkości dwóch ellips znajdowały się na jednej poziomej, czyli ażeby:

fig. 72.



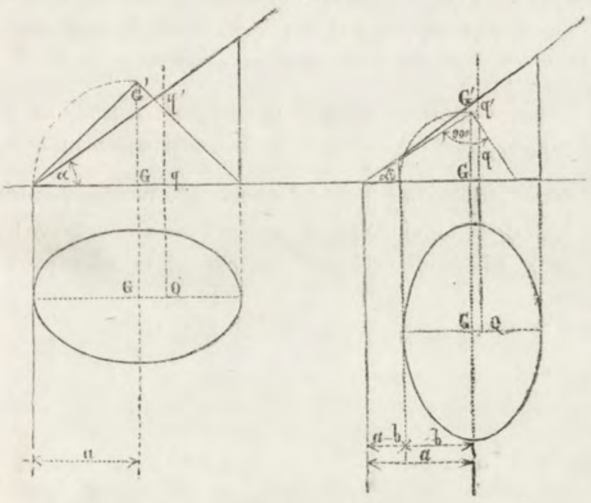
$$\delta + b = a;$$

więc

(1) $$P_\alpha = P_\beta, \quad \text{jeżeli} \quad \delta = a - b.$$

Ztąd wypada: ścinając walec elliptyczny w jednym razie — płaszczyzną czyniącą z podstawą walca jakikolwiek kąt, zawarty między 0° i 90°, i przechodzącą przez styczną w wierzchołku wielkiej osi ellipsy; zaś w drugim — płaszczyzną mającą to samo nachylenie, ale poprowadzoną przez prostę, równoległą do stycznej w wierzchołku małej osi, i na odległości równej $a - b$ od tej stycznej, (to jest na odległości a od środka ellipsy) — objętości, jakie w obydwu razach otrzymamy (fig. 73), będą sobie równe.

fig. 73.



Możemy następnie założyć sobie *znalezienie odległości δ przy której, środki ciśnienia na ellipsy* (α) i (β) fig. 72 *znajdowałyby się na jednej poziomej*.

W takim razie wypadłoby nam rozwiązać równanie: $\xi'_\alpha = \xi'_\beta$, to jest:

$$\frac{5}{4} a = \delta + b + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{b + \delta};$$

po wykonaniu czego, znaleźlibyśmy na szukaną wartość δ wyrażenie następujące:

$$\delta = \frac{(5a - 8b) \pm \sqrt{25a^2 - 16b^2}}{8}.$$

Widocznie, że z dwóch wartości δ zadawalniających to równanie, powinniśmy wziąć tylko δ *dodatne*, to jest liczone wdół od poziomej AA. Otoż łatwo jest zobaczyć, że jeżeli $a > b$, wtedy:

$$\sqrt{25a^2 - 16b^2} > (5a - 8b),$$

i wartością dodatną na δ będzie:

(2) $$\delta = \frac{(5a - 8b) + \sqrt{25a^2 - 16b^2}}{8};$$

http://rcin.org.pl

Co zaś do drugiej wartości δ', ta będzie odjemną, czyli liczoną wgórę od AA, a więc nieodpowiadającą naszemu zadaniu.

Wniosek. Jeżeli ellipsa stanie się kołem, wtedy we wzorze (2) $a=b=R$, w skutek czego:

$$\delta'=\frac{5R-8R+\sqrt{9R^2}}{8}=0;$$

co i być powinno. Widzimy ztąd, że wartość *minimum* pierwiastka: $\sqrt{25a^2-16b^2}=3a$ mając miejce dla koła, w każdym innym razie, kiedy b nie dosięga a, będziemy mieli zawsze:

$$\sqrt{25a^2-16b^2}>3a.$$

Otoż, możemy tę nierówność przekształcić i nadać jej następującą formę:

$$\frac{5a-8b+\sqrt{25a^2-16b^2}}{8}>\frac{3a+5a-8b}{8},$$

która, na mocy wzorów (2) i (1), pokazuje że:

(3) $$\delta'>\delta;$$

to jest: *odległość, przy której dwie równe sobie ellipsy* (α) *i* (β) *mają swe środki ciśnienia na jednej i tej samej poziomej, jest większą od tej przy której te same ellipsy wytrzymują jednakowe ciśnienie*; czyli inaczej: *ażeby środki ciśnienia na ellipsę* (α), *uważaną za stałą, i na ellipsę* (β) *znajdowały się na jednakowej odległości od powierzchni wolnej, potrzeba tę ellipsę zanurzyć w cieczy głębiej, aniżeli w tym razie kiedyby nam chodziło o wystawienie ellips na jednakowe ciśnienie.*

Możemy jeszcze otrzymany wypadek wypowiedzieć w sposób następujący: *równość ciśnienia na dwie ellipsy* (α) *i* (β) *nie może istnieć jednocześnie z równością odległości ich środków ciśnienia od powierzchni wolnej.*

Zauważmy, że do powyższego wniosku moglibyśmy przyjść bez pomocy wzoru (2). W samej rzeczy, szukając wartości ξ'_β dla środka ciśnienia ellipsy (β), odpowiadającego odległości $\delta=a-b$, przy której $P_\alpha=P_\beta$, i porównywając ξ_β' z wartością $\xi_\alpha'=x_\alpha'$ dla środka ciśnienia ellipsy (α), będziemy mieli:

$$\xi_\beta'=\delta+b+\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{b+\delta}=a-b+b+\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{b+a-b}=a+\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{a};$$

z drugiej zaś strony:

$$\xi_\alpha'=x'_\alpha=\frac{5}{4}a=a+\frac{1}{4}a=a+\frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{a};$$

a że $a>b$, zatem $\xi'_\alpha>\xi'_\beta$, czyli $\xi'_\beta<\xi'_\alpha$.

To jest: *dla ellipsy, w dwóch jej położeniach, przy których ciśnienia na nią wywierane są sobie równe, środki ciśnienia tym położeniom odpowiadające nie są jednakowo oddalone od powierzchni wolnej*; nierówność ta pokazuje, że ξ'_β może dosięgnąć ξ_α' tylko po wzięciu odległości $\delta_1>\delta$, co natychmiast pociąga za sobą nową wartość $P_{1\beta}>P_\alpha$, gdyż odległość od poziomej AA środka ciężkości ellipsy (β) zostanie w skutek tego powiększoną.

W streszczeniu, jeżeli:

$$P_\alpha=P_\beta,\quad \text{to}\quad \xi'_\alpha>\xi'_\beta;$$

http://rcin.org.pl

jeżeli zaś : $\xi_\alpha = \xi'_\beta$, wtedy $P_\alpha < P_\beta$.

Figura 72 przedstawia położenie ellipsy (β) i jej środka ciśnienia odpowiadające temu przypadkowi kiedy $P\alpha = P_\beta$.

Uwaga. Podobnie jak rozpatrywanie ciśnienia i środka ciśnienia dla koła i ellipsy podniosło kwestyę geometryczną, tyczącą się objętości i środka ciężkości ściętych walców wystawionych na tych figurach, tak tablica podana pod § 66, roztrząsana z punktu widzenia geometrycznego, dałaby pewne wskazówki co do objętości i środka ciężkości ściętych pryzm, wystawionych na figurach foremnych tą tablicą objętych.

75. Porównanie teoryi hydrostatycznego ciśnienia na ściany płaskie z teoryą ciśnienia statycznego na przecięcia jakiegokolwiek ciała stałego płaszczyznami normalnemi do kierunku sił na to ciało działających. Teorya ciśnienia cieczy na ściany płaskie, oparta na samej własności cieczy, i wchodząca w skład zastosowanej Hydrostatyki, wyznacza jednę idealną siłę równoważną zbiorowi wszystkich rzeczywistych sił elementarnych, działających na rozmaite punkta danej płaskiej powierzchni; daje nam ona kierunek tej siły, jej natężenie i punkt jej przyczepienia. Teorya ciśnienia rozpatrywana w Mechanice zastosowanej do wytrzymałości materyałów, i odgrywająca tak ważną w konstrukcyi rolę, ma punkt wyjścia odwrotny : tutaj, ilością znaną nam z góry, jest siła wypadkowa, idealnie działająca w jednym punkcie powierzchni, a zadanie polega na znalezieniu natężenia rzeczywistych sił składowych, jakie ztąd przypadną na rozmaite punkta tej powierzchni. Jak w jednej tak i w drugiej teoryi siła wypadkowa jest normalną do ciśnionej powierzchni.

Teorya ciśnienia statycznego, zwana *teorya układu ciśnienia* (répartition des pressions), spotyka na samym wstępie, dla braku dostatecznej liczby danych analitycznych, trudność, której naturę wybitnie przedstawia pogląd geometryczny na kwestyę. Geometrya, uwydatniając brak dostatecznego określenia zadania, podaje zarazem myśl uczynienia hypotezy, zdającej się najracyonalniejszą i usuwającej przeszkodę do analitycznego traktowania tej teoryi, sprowadzeniem liczby niewiadomych do liczby równań. Rezultata, zgodne z praktyką, otrzymane w skutek pewnej hypotezy, usprawiedliwiają powszechne takowej przyjęcie; a ich porównanie z wypadkami znalezionymi w teoryi hydrostatycznego ciśnienia pokaże najzupełniejszą harmonję istniejącą między dwiema teoryami, traktowanemi od siebie niezależnie, i zleje takowe w jednę ogólną teoryę ciśnienia.

Ważność teoryi ciśnienia statycznego i porównanie jakie mamy na celu wymaga przytoczenia ogólnego jej zarysu i rozpatrzenia niektórych z niej ustępów.

Uważajmy jakiekolwiek ciało stałe, wystawione na działanie pewnych sił zewnętrznych, i zostające w spoczynku. Zbiór wszystkich sił na każdą część tego ciała działających jest równoważony zbiorem wszystkich sił molekularnych, wywiązanych reakcyą rozmaitych tej części ciała punktów; i jeżeli, — co się zazwyczaj zdarza przy zastosowaniach praktycznych, — siły zewnętrzne są takiej natury, że mogą być zastąpione jedną wypadkową, — siły wewnętrzne mogą być sprowadzone do jednej siły, równej i przeciwnego wypadkowej sił zewnętrznych kierunku.

W zastosowaniach do konstrukcyi, zamiast części ciała mających trzy wymiary, uważają się jego części dwójwymiarowe, a mianowicie, rozpatrują się tu materyalne punkta, znajdujące się na przecięciu tego ciała pewnemi płaszczyznami, których kierunek wynika z samej natury konstrukcyi. Tak naprzykład, dla murów służących za fundament pewnej budowy, jak też dla murów przeznaczonych do wstrzymywania nacisku wody lub naporu ziemi, — płaszczyzny przecięcia są *poziome*; dla arkad lub dla mostów, płaszczyzny te są *normalne* do powierzchni sklepienia (intrados) i t. p; i w ogólności, za płas-

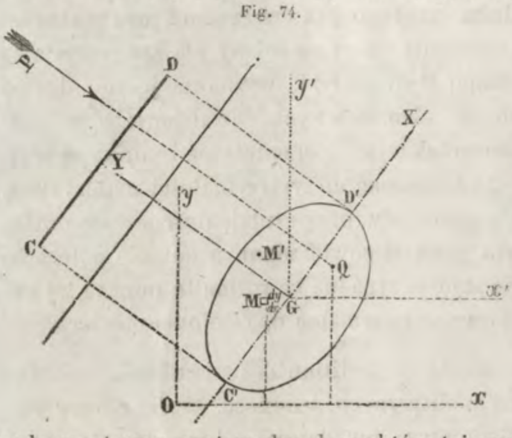
http://rcin.org.pl

czyzny przecięcia biorą się dla murów płaszczyzny według których stykają się z sobą stawy (*joints*) rozmaitych części składających budowę.

Raz obrawszy płaszczyznę przecięcia, i rozkładając wypadkowę zewnętrznych sił na nie działających na dwie siły : jednę — normalną do przecięcia, a drugą — leżącą w samej płaszczyznie, wytrzymałość i stałość budowy, uważane według tego przecięcia, zależeć będą z jednej strony — od natężenia dwóch sił tak otrzymanych, z drugiej — od natury materyału w skład budowy wchodzącego. Rozpatrywanie dwóch sił składowych prowadzi do dwóch oddzielnych studjów ; te które mają na celu składowę normalną i badanie prawa, jakiemu ulega reakcya rozmaitych punktów wywołana tą siłą, stanowią *teoryę układu ciśnienia*. (*)

76. Niech (fig 74) (CD, C′D′) oznacza przecięcie ciała płaszczyzną CD; niech normalna wypadkowa sił zewnętrznych działających na to przecięcie będzie P; a punkt Q, w którym kierunek siły P przebija płaszczyznę CD, niech ma za spółrzędne x' i y', odniesione do dwóch osi prostopadłych Ox, Oy, dowolnie na płaszczyznie przecięcia poprowadzonych.

Fig. 74.



Uważajmy jakikolwiek punkt M (x, y) wzięty na przecięciu C′D′, i oznaczmy przez R ciśnienie, na jedność powierzchni, w tym punkcie; jeśli przyjmiemy że wszystkie punkta nieskończenie małej powierzchni ponoszą jednakowe ciśnienie, to całkowite ciśnienie na powierzchnię $dxdy$ zawierającą w sobie punkt M wyrazi się przez $Rdxdy$, i wywoła ze strony materyalnych punktów tej powierzchni reakcyę, czyli siłę molekularną, tego samego natężenia $Rdxdy$, równoważącą ciśnienie zewnętrznie na powierzchnię $dxdy$ wywierane.

Dla innego punktu M′ ciśnienie na jedność powierzchni będzie inne : R′; w ogólności, R będzie się zmieniać ze zmianą punktu, czyli że R będzie funkcyą spółrzędnych punktów przecięcia C′D′; tak że możemy napisać : $R = \varphi(x, y)$.

Zadanie polega na znalezieniu funkcyi φ, to jest na wyznaczeniu dla każdego punktu M (x, y) wartości, R w funkcyi ilości bezpośrednio danych: P, x', y' i tych, jakie wyniknąć mogą z danego nam przecięcia C′D′.

Otoż, do rozwiązania tego zadania analityczne zasoby, jakimi rozporządzać możemy, są niewystarczające; gdyż, prócz trzech równań statycznych :

(1) równania sił : $\int\int Rdxdy = P$,

(2) równania momentów względem osi Ox : $\int\int Rydxdy = Py'$,

(3) Oy : $\int\int Rxdxdy = Px'$,

sprawdzających równowagę między siłą P i systemem sił równoległych $Rdxdy$, wziętych na prze-

(*) E. Collignon : *Cours de Mécanique appliquée aux constructions*. Paris, 1869. Zob. str. 45 i nast

http://rcin.org.pl

strzeni całej powierzchni C D', — nie mamy żadnego innego związku między temi ilościami; zresztą istnienie podobnych związków, obok powyższych trzech równań, nie wiele by pomogło do rozwiązania naszego zadania : cała bowiem trudność jest w tem, że nie znamy ani *formy* funkcyi R, ani liczby *parametrów* w skład tej funkcyi wchodzących. Widzimy więc, że dla wyznaczenia funkcyi R za pomocą równań (1), (2) i (3), potrzeba, ażeby jej forma była nam znaną à priori; prócz tego, żeby liczba niewiadomych nie przewyższała liczby równań; należy zatem zbadać naturę funkcyi i zobaczyć czy istnienie w niej trzech tylko parametrów jest zgodne z tą naturą. Roztrząsanie tej kwestyi ułatwi nam Geometrya.

77. Ponieważ R jest funkcyą ciągłą dwóch tylko zmiennych niezależnych, możemy ją traktować geometrycznie, i wystawiając oś Or, normalnie do płaszczyzny (Ox, Oy), to jest do płaszczyzny przecięcia CD', uważać R za rzędnę powierzchni : $R = \varphi(x, y)$, odniesionej do trzech osi spółrzędnych : Ox, Oy, Or. Rozmaite wartości R będą, jak zwyczajnie, liczone od płaszczyzny przecięcia (Ox, Oy), wzdłuż normalnych do niej, wystawionych *nad* lub *pod* tą płaszczyzną.

Powierzchni $R = \varphi(x, y)$ nie znamy, lecz wiemy, że musi ona zawsze być taką, ażeby trzy równania (1), (2) i (3) sprawdzały się jednocześnie; otóż, geometryczne znaczenie tych równań jest następujące :

Równanie (1) pokazuje, że objętość zawarta między powierzchnią $R = \varphi(x, y)$, płaszczyzną przecięcia CD' i powierzchnią prostego walca wystawionego na konturze C D', jest równa ilości P; równania zaś (2) i (3) wyrażają, że dwie spółrzędne środka ciężkości tej objętości, liczone w płaszczyznie (Ox, Oy), są spółrzędnemi x' i y' punktu Q, w którym wypadkowa P przebija przecięcie, czyli że ten środek ciężkości rzuca się na płaszczyznę przecięcia w punkcie Q. A że siła P jest normalną do tej płaszczyzny, więc równania (2) i (3) pokazują poprostu, że środek ciężkości objętości znajduje się w pewnym punkcie leżącym na kierunku tej siły.

Jeśli więc wiemy że funkcya : $R = \varphi(x, y)$ wyraża prawo układu ciśnienia na rozmaite punkta przecięcia C D', jesteśmy pewni, iż przedstawiając tę funkcyę geometrycznie, powyższe warunki zostaną zadowolnione; lecz jeżeli funkcyi R nie znamy, zadośćuczynienie warunkom (1), (2) i (3) nie wystarczy do jej wyznaczenia; gdyż, mając dane przecięcie C D', siłę P i punkt $Q(x'y')$, moglibyśmy wystawić nieskończoną liczbę powierzchni zadawalniających, co do objętości i środka ciężkości, wzwyż wymienionym warunkom; — czyli inaczej, mielibyśmy na ciśnienie w jednym i tym samym punkcie przecięcia dowolną liczbę wartości; — a takiego rozwiązania, czysto analitycznego, przyjąć nie możemy, jako wbrew przeciwnego fizycznej naturze zadania.

Istotnie, pojmujemy, że jakiekolwiekby było prawo układu ciśnienia, ciśnienie w danym punkcie przecięcia nie może być ilością dowolną, niewyznaczoną. Możemy nie być w stanie odkrycia tego prawa, lecz nie możemy przypuścić, żeby ciśnienie w jednym i tym samym punkcie miało rozmaite wartości : albowiem reakcya tego samego punktu, uważanego na danem przecięciu, będzie się zmieniać tylko ze zmianą natężenia siły P, lub jej punktu przyczepienia; stałość tych dwóch wartości pociąga za sobą niezmienność ciśnienia.

Ta uwaga posuwa nas nieco na drodze prowadzącej do rozwiązania zadania, jednak nie wystarcza do usunięcia wszystkich przeszkód jakie na niej spotykamy : gdyż nie wiemy teraz jaką, z pomiędzy rozmaitych funkcyi, czyli powierzchni, zadowalniających (1), (2) i (3), mamy wziąć za funkcyę szukaną. Wiemy wprawdzie, że szukana powierzchnia powinna być taką, ażeby jej rzędne równoległe do osi Or przecinały ją w jednym tylko punkcie; ten warunek nie wyznacza jednak samej powierzchni, i tą może być naprzykład powierzchnia sferyczna, elliptyczna i t. p.

Na pokonanie tej trudności nie mamy żadnych danych ścisłych : napisaniem trzech równań (1), (2) i (3), wyrażających równowagę wszystkich punktów przecięcia C D', i wprowadzeniem

http://rcin.org.pl

fizycznej strony zadania, sprowadzającej rozmaite abstrakcyjne jego rozwiązania do jednego tylko, zgodnego z samą istotą rzeczy, wyczerpaliśmy wszystkie zasoby. Chcąc iść dalej, musimy wejść na drogę hypotez.

Najprostsza hypoteza jaką zrobić możemy, — jest wziąć za szukaną powierzchnię : $R = \varphi(x, y)$ najprostszą ze wszystkich powierzchni — to jest płaszczyznę; otoż równanie płaszczyzny odniesionej do trzech osi Ox, Oy, Or, jest :

$$ax + by + cR + d = 0;$$

zatem funkcya R przedstawi się pod formą :

$$R = Ax + By + C, \tag{4}$$

i hypoteza nasza jest poprostu przypuszczenie, że *ciśnienie w danym punkcie przecięcia* C′D′ *jest funkcyą linijną spółrzędnych : x, y tego punktu.*

Raz przyjąwszy taką hypotezę, zadanie ciśnienia rozwiązuje się bez żadnej dwóznaczności, gdyż trzy niewiadome : A, B, C wyznaczą się z trzech równań (1), (2), (3), pierwszego względem nich stopnia, albowiem funkcya R wchodzi w powyższe równania tylko w pierwszym stopniu.

Po wstawieniu w równanie (4) wartości otrzymanych na A, B, C, położenie płaszczyzny (której rzędne normalne do przecięcia C′D′ będą wyrażać ciśnienie w rozmaitych jego punktach) najzupełniej zostanie wyznaczonem; w ogólności, płaszczyzna (4) jest pochyłą do płaszczyzny przecięcia C′D′, to jest, objętość P jest objętością ściętego walca (lub pryzmy); w przypadku szczególnym, walec ścięty może się stać walcem o podstawach równoległych i to, jak zobaczymy pod §. 80, nastąpi wtedy gdy punkt Q znajdzie się w punkcie G — środku ciężkości powierzchni przecięcia C′D′.

Geometryczne przedstawienie cisnienia wynikające z hypotezy (4) zgadza się więc najzupełniej z przedstawieniem cisnienia hydrostatycznego, rozwiniętém na innych podstawach pod §. 68.

Przecinając płaszczyznę (4) płaszczyznami równoległemi do (Ox, Oy), otrzymamy szereg prostych, równoległych do przecięcia C′D′; rzut ich na C′D′ wyznaczy linje, których wszystkie punkta będą się znajdować pod jednakowém ciśnieniem. Linje te zowią się *izopiezycznemi* (izopiziques, — lignes d'égale pression); są one równoległe do siebie, i ich spólny kierunek — zmienny ze zmianą przecięcia, natężenia i punktu przyczepienia siły na nie działającej — zostanie w każdym danym razie wyznaczony przez wartości na A, B, C, znalezione z równań (1), (2), (3) i (4).

W teoryi ciśnienia hydrostatycznego linjami izopiezycznemi są, jak wiadomo, linje *poziome*; teorya ciśnienia statycznego jest ogólniejsza, gdyż linje jednakowego ciśnienia mogą mieć rozmaite względem horyzontu nachylenie, stosownie do położenia na przecięciu C′D′ punktu przyczepienia wypadkowej siły P (§. 81).

Dalsze porównanie, uzasadniające jeszcze bardziej przyjęcie hypotezy (4), podamy niżej, a teraz zajmiemy się wyznaczeniem funkcyi R.

78. Zastąpiwszy w równaniach (1), (2), (3) funkcyę R przez jej wartość $Ax + By + C$, otrzymamy, do wyznaczenia A, B, C, następujące trzy równania :

$$A\int\int x\,dx\,dy + B\int\int y\,dx\,dy + C\int\int dx\,dy = P; \tag{1′}$$

$$A\int\int xy\,dx\,dy + B\int\int y^2\,dx\,dy + C\int\int y\,dx\,dy = Py; \tag{2′}$$

$$A\int\int x^2\,dx\,dy + B\int\int xy\,dx\,dy + C\int\int x\,dx\,dy = Px. \tag{3′}$$

http://rcin.org.pl

Granice całek będą wyznaczone przez styczne do konturu przecięcia CD′, poprowadzone równolegle do osi Ox i Oy.

Oznaczając powierzchnię przecięcia przez Ω, jej moment bezwładności względem osi Ox przez I_x, a względem osi Oy przez I_y; nareszcie, spółrzędne środka ciężkości G tej powierzchni przez x_1 i y_1, mamy :

$$\int\int dxdy = \Omega \quad \int\int xdxdy = x_1\Omega, \quad \int\int ydxdy = y_1\Omega;$$

$$\int\int y^2dxdy = I_x, \quad \int\int x^2dxdy = I_y;$$

kładąc nadto :

$$\int\int xydxdy = t;$$

równania (1′) (2′) i (3′) przybiorą postać :

$$(A x_1 + B y_1 + C)\Omega = P; \tag{1''}$$

$$A t + B I_x + C y_1\Omega = P y'; \tag{2''}$$

$$A I_y + B t + C x_1\Omega = P x'. \tag{3''}$$

Rozwiązując takowe, otrzymamy na A, B, C następujące wyrażenia :

$$C = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{(x_1y'\Omega - t)(x_1t - y_1I_y) - (x_1x'\Omega - I_y)(x_1I_x - y_1t)}{(x_1y_1\Omega - t)(x_1t - y_1I_y) - (x_1x_1\Omega - I_y)(x_1I_x - y_1t)}; \tag{γ}$$

$$B = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{(x_1y'\Omega - t)(x_1x_1\Omega - I_y) - (x_1x'\Omega - I_y)(x_1y_1\Omega - t)}{(x_1I_x - y_1t)(x_1x_1\Omega - I_y) - (x_1t - y_1I_y)(x_1y_1\Omega - t)}; \tag{β}$$

$$A = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{P - y_1B\Omega - C\Omega}{x_1}; \tag{α}$$

którym nadamy formę dogodniejszą, kładąc :

$$\begin{aligned} x_1x'\Omega - I_y &= a' \\ x_1x_1\Omega - I_y &= a_1 \\ x_1y'\Omega - t &= b' \\ x_1y_1\Omega - t &= b_1 \\ x_1I_x - y_1t &= c \\ x_1t - y_1I_y &= d; \end{aligned}$$

wskutek czego będziemy mieli :

$$C = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{a'c - b'd}{a_1c - b_1d}; \tag{γ'}$$

$$B = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{a_1b' - b_1a'}{a_1c - b_1d}; \tag{β'}$$

$$A = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{1}{x_1} \frac{c(a_1 - a') + d(b' - b_1) + y_1(a'b_1 - a_1b')}{a_1c - b_1d} \tag{α'}$$

Taką funkcyą ilości znanych wyrażą się wartości na A, B, C; będziemy więc wiedzieć sposób

http://rcin.org.pl

układu ciśnienia na każdem przecięciu C'D' i dla każdéj siły danej przez P i Q(x', y'), używając wzorów (α), (β), (γ), i podstawiając otrzymane ztąd wartości liczebne w równanie (4).

Uwaga. Istnienie linij jednakowego ciśnienia, wyprowadzone w poprzednim § z poglądu *geometrycznego*, znajduje się wsposób również prosty z roztrząsania *analitycznego*. Rzeczywiście, jeśli znalezione z (4) ciśnienie na jedność powierzchni w jakimkolwiek punkcie przecięcia C'D' oznaczymy przez R', spółrzędne x, y punktów przecięcia, znajdujących się pod tém samém ciśnieniem R', powinny czynić zadość warunkowi :

$$Ax + By + C = R',$$

czyli, geometryczném ich miejscem będzie linja prosta, dana przez równanie :

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{R' - C}{B};$$

zobaczymy podobnież, że punkta, w których ciśnienie jest R'', znajdą się na prostej :

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{R'' - C}{B};$$

więc linje jednakowego ciśnienia, jako mające spółczynnik kątowy : $-\frac{A}{B}$ spólny, są proste równoległe, i ich kierunek wyznaczy się z wartości na A i B, otrzymanych z wyrażeń (α) i (β).

79. Zastosowanie równania : $R = Ax + By + C$ można uczynić dogodniéjszém, wybierając przyzwoicie osie spółrzędne; otóż, mogą one zawsze być wzięte tak, żebyśmy mieli :

$$(a) \qquad \int\int xdxdy = 0; \quad \int\int ydxdy = 0; \quad \int\int xydxdy = 0.$$

Rzeczywiście : 1) dla zadośćuczynienia pierwszym dwom warunkom, dosyć jest przenieść pierwotny system osi Ox, Oy tak, żeby ich początek O znalazł się w środku ciężkości G powierzchni C'D'; gdyż wtedy mieć będziemy : $x_1 = 0$ i $y_1 = 0$;

2) istnieje zawsze kąt $\alpha = XGx'$ (fig. 74), na który obracając osie Ox', Oy', spółrzędne x', y' zamienią się na spółrzędne x, y sprawdzające warunek trzeci (*).

W przypadku szczególnym — a często spotykanym w zastosowaniach — kiedy przecięcie C'D' posiada oś symetryi, nie potrzebujemy szukać kąta α i uczynimy $\int\int xydxdy$ zerem, biorąc tę oś naprzykład za oś GX. Istotnie, z powodu symetryi, każdemu elementowi $dxdy$ wziętemu nad osią X, będzie odpowiadać, po drugiej jej stronie, element równy $dxdy$, mający tę samą odciętę x, a za rzędnę : $-y$; summa więc elementów symetrycznych $xydxdy$, wziętych po dwa, będzie zero, przez co i summa całkowita $\int\int xydxdy$ sprowadzi się do zera.

W przypuszczeniu że poprowadzone na płaszczyznie przecięcia osie GX, GY czynią zadość powyższym trzem warunkom, i że x_1, y_1 i x', y' oznaczają spółrzędne punktów G i Q przy tym systemie osi, zobaczmy jakie wartości na A, B, C, wypadnie wtedy podstawić w równanie (4).

W tym celu zwróćmy się wprost do równań : (1'), (2'), i (3'), gdyż wyznaczenie spółczynników za

(*) E. Collignon : *Cours de Mecanique appliquée aux constructions*. Paris. 1869. Str. 48.

http://rcin.org.pl

pomocą formuł : (α), (β) i (γ) nie jest w tym razie dogodném : przybierają one bowiem dla $x_1=0$, $y_1=0$, $t=0$, postać :

$$C=\frac{0}{0};\quad B=\frac{0}{0};\quad A=\frac{0}{0}\cdot\infty.$$

Warunki (a) wprowadzone do (1'), (2') i (3') dadzą :

$$C=\frac{P}{\Omega}= \text{ciśnienie średnie na jedność powierzchni danego przecięcia,}$$

$$B=\frac{Py'}{I_x}=\frac{\text{Moment ciśnienia całkowitego}}{\text{Moment bezwładności przecięcia}}\Bigg\}\ \text{względem osi GX,}$$

$$A=\frac{Px'}{I_y}=\qquad \text{»}\qquad\Bigg\}\qquad \text{GY;}$$

wskutek czego otrzymujemy z (4) wzór następujący :

$$R=P\left(\frac{x'}{I_y}x+\frac{y'}{I_x}y+\frac{1}{\Omega}\right), \tag{4'}$$

który może być zastąpiony wzorem (4''), oznaczając przez ρ_x i ρ_y promienie wirowania powierzchni C'D' względem osi GX i GY :

$$R=\frac{P}{\Omega}\left(\frac{x'}{\rho_y^2}x+\frac{y'}{\rho_x^2}y+1\right). \tag{4''}$$

Zastosowanie jednak ostatniego wzoru nie przedstawia żadnéj korzyści; przeciwnie, rachunek byłby nieco dłuższym jak dla wzoru (4'); gdyż, ilości wprost znajdowane są to momenta bezwładności I_x i I_y, — wzór więc (4''), prócz działań wskazanych wzorem (4'), wymagałby nadto dwóch dzieleń: I_x i I_y przez Ω.

80. Znając siłę P i punkt jej przyczepienia $Q(x', y')$, będziemy mogli, za pomocą wzoru (4'), wyznaczyć ciśnienie, na jedność powierzchni, w każdym punkcie danego przecięcia. Nie wyszczególniając formy powierzchni C'D', własności pewnych jej punktów natychmiast się wyprowadzają; tak np, jeśli chcemy mieć ciśnienie w środku ciężkości G przecięcia C'D', kładziemy w (4') $x=0$, $y=0$ i otrzymujemy :

$$R_G=\frac{P}{\Omega};$$

to jest, *ciśnienie w środku ciężkości przecięcia jest niezależne od punktu przyczepienia wypadkowej* P *i zawsze się równa ciśnieniu średniemu.*

Taki sam wypadek znaleźliśmy pod § 42 dla ciśnienia hydrostatycznego.

Wiemy z poprzedniego, że środek ciężkości nie jest jedynym punktem zostającym pod ciśnieniem średniém : ciśnieniu temu będą ulegać wszystkie punkta przecięcia leżące na prostej :

$$\frac{P}{\Omega}=P\left(\frac{x'}{I_y}x+\frac{y'}{I_x}y+\frac{1}{\Omega}\right);$$

wiemy więc a priori, że ta prosta musi przechodzić przez początek spółrzędnych, i że jej równanie będzie formy : $y=ax$; znajdujemy też na *linję średniego ciśnienia* równanie następujące :

$$y=-\frac{x'I_x}{y'I_y}x; \tag{G}$$

http://rcin.org.pl

a to pokazuje, że dla danego przecięcia CD', *kierunek linji średniego ciśnienia zależy tylko od punktu przyczepienia wypadkowej* **P**.

Rozpatrzmy niektóre szczególne przypadki.

1) Jeżeli $x'=0$, to jest *jeśli punkt przyczepienia* Q *siły* P *leży na osi* GY, równanie (G) daje : $y=0$; co znaczy, że *linja średniego ciśnienia będzie oś* GX; wypada ztąd, że linje izopiezyczne są w tym razie równoległe do osi GX. Wynik ten otrzymalibyśmy wprost z równania (4), kładąc w niém $x'=0$; staje się ono bowiem :

$$R=P\left(\frac{y'}{I_x}y+\frac{1}{\Omega}\right)=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{y'}{\rho^2_x}y\right),$$

i wyraża, że ciśnienie R będzie jedno i to samo dla wszystkich punktów mających tę samą rzędnę y, czyli że równoległe do osi GX są linjami izopiezycznemi, a sama ta oś jest linją średniego ciśnienia, gdyż dla niej $y=0$.

2) Jeżeli $y'=0$, to jest punkt Q znajduje się na osi GX, równanie (G) staje się : $y=\infty$; w tym więc razie nie wyznacza ono linji średniego ciśnienia; zwracamy się zatem do (4'), które, dla $y'=0$, sprowadza się do :

$$R=P\left(\frac{x'}{I_y}x+\frac{1}{\Omega}\right)=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{x'}{\rho^2_y}x\right),$$

i pokazuje, że *jeśli punkt przyczepienia siły* P *leży na osi* GX , *linjami izopiezycznemi są proste równoległe do osi* GY, — *która wtedy będzie linją ciśnienia średniego.*

3) Jeżeli $x'=0$ i $y'=0$, to jest siła P przebija powierzchnię CD' w jej środku ciężkości, równanie (G) linji średniego ciśnienia przedstawia się pod formą niewyznaczoną : $y=\frac{0}{0}$; co i być powinno, gdyż równanie (4') daje wtedy na ciśnienie we wszystkich punktach przecięcia ilość stałą i równą ciśnieniu średniemu $\frac{P}{\Omega}$. Ztąd widzimy, że *jeżeli punkt przyczepienia wypadkowej* P *znajduje się w środku ciężkości powierzchni* CD', *powierzchnia ta jest ciśniona jednostajnie we wszystkich swych punktach*; równanie (4) staje się (§77) równaniem płaszczyzny równoległej do płaszczyzny (GX, GY), i walec ścięty ukośnie — walcem o podstawach równoległych.

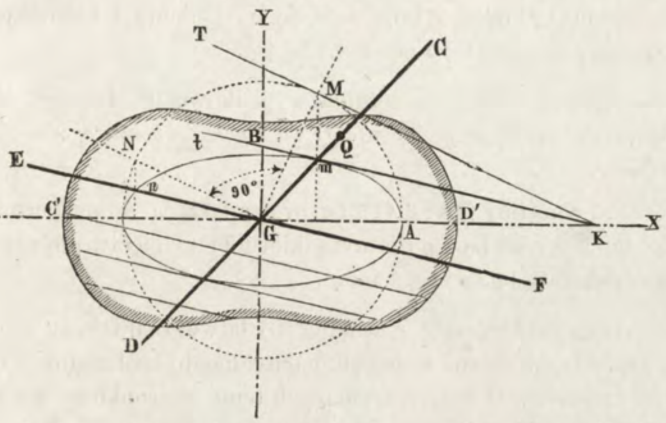
Teorya ciśnienia statycznego obejmuje przypadek ogólny : powierzchnia CD' może mieć położenie jakiekolwiek w przestrzeni, i jednostajność ciśnienia we wszystkich jej punktach będzie mieć miejsce skoro siły zewnętrzne tak będą dobrane, ażeby ich wypadkowa przebijała powierzchnię w jej środku ciężkości; płaszczyzna zanurzona poziomo w cieczy ważkiej, czyniąc zadość temu warunkowi jest tylko szczególnym rozwiązaniem zadania jednostajności ciśnienia. Srawdzamy tutaj, że ponieważ przy pochyłem położeniu ściany ciśnienie cieczy nie będzie stałem w rozmaitych jej punktach, — punkt przyczepienia ciśnienia wypadkowego nie może się znajdować w środku ciężkości ściany.

81. W teoryi ciśnienia hydrostatycznego linjami izopiezycznemi — a zatem i linją średniego ciśnienia — mogą być tylko linje poziome; w teoryi ciśnienia statycznego linje jednakowego ciśnienia zawsze są do siebie równoległe, ale ich kierunek względem poziomej bywa rozmaity, stosownie do wartości, jakie mogą przybierać spółczynniki A i B ze zmianą punktu przyczepienia Q (x', y') wypadkowej P. Wyznaczenie tego kierunku może być, w każdym razie, uskutecznione za pomocą rachunku, ale łatwo nam będzie wyprowadzić ogólne prawidło, dające *graficzne* rozwiązanie takiego zadania. W tym celu rozpatrywanie linji średniego ciśnienia będzie najwłaściwsze.

http://rcin.org.pl

Jeśli dane przecięcie $C'D'$ (fig. 75) posiada oś symetryi, to biorąc takową za oś X, a środek ciężkości G powierzchni $C'D'$ za początek spółrzędnych, równanie linji średniego ciśnienia będzie:

fig. 75.



(G) $$y=-\frac{x'I_x}{y'I_y}x=-\frac{x'}{y'}\cdot\frac{\rho^2_x}{\rho^2_y}x;$$

Wiadomo, że dla ellipsy odniesionej do swego środka i do swych osi, (których długość jest $2a$ i $2b$), równanie średnicy odpowiadającej cięciwom mającym m za spółczynnik kątowy — jest następujące:

$$Y=-\frac{b^2}{a^2m}X;$$

więc równanie (G) jest równaniem średnicy ellipsy odniesionej do osi GX i GY, mającej swój środek w punkcie G, a za długość swych osi:

(α) $$a=\rho_y \quad \text{i} \quad b=\rho_x;$$

średnica ta jest sprzężona z kierunkiem cięciw, których spółczynnik kątowy m ma za wyrażenie:

$$m=\frac{y'}{x'};$$

czyli jest ona sprzężona ze średnicą $y'=mx'$, otrzymaną przez połączenie punktu przyczepienia siły P ze środkiem ciężkości G.

Wykreślenie kierunku izopiezycznych linij dla każdego punktu Q (x', y'), wymaga więc poprzedniego nakreślenia ellipsy wyznaczonej przez (α). Zauważmy, że ellipsa (α) jest to *środkowa ellipsa bezwładności* odpowiadająca powierzchni $C'D'$; gdyż, jak wiadomo, osie a' i b' takiej ellipsy są odwrotnie proporcyonalne do promieni wirowania powierzchni względem osi GX i GY, to jest że:

$$a'=k^2.\frac{1}{\rho_x}, \qquad b'=k^2\cdot\frac{1}{\rho_y},$$

gdzie k jest liczbą dowolną; kładąc $k=1$, osie a' i b' ellipsy bezwładności stają się *odwrotnościami* promieni ρ_x i ρ_y; będziemy więc mieli:

$$a':b'=\frac{1}{\rho_x}:\frac{1}{\rho_y}=\rho_y:\rho_x=a:b.$$

Moglibyśmy położyć od razu: $k^2=\rho_x\rho_y$,

i w skutek tego otrzymać: $a'=\rho_y=a; \quad b'=\rho_x=b.$

Z tego cośmy powiedzieli, do wykreślenia kierunku linij jednakowego ciśnienia wyprowadzamy następujące prawidło:

Znalazłszy I_x i I_y, wystawiamy ellipsę bezwładności, w której $GA=a=\rho_y$, $GB=b=\rho_x$; łączymy dany punkt Q (x', y') ze środkiem ciężkości G, i prowadzimy w ellipsie średnicę EF sprzężoną ze średnicą CD: linja EF będzie geometrycznem miejscem punktów zostających pod ciśnieniem

http://rcin.org.pl

średniem $\frac{P}{\Omega}$, a jej kierunek — kierunkiem linij izopiezycznych punktowi Q odpowiadającym. (*)

Wniosek. Z geometrycznej własności średnic sprzężonych wnosimy natychmiast, że gdyby punkt Q znalazł się na średnicy EF, średnica jej sprzężona CD byłaby linją średniego ciśnienia i kierunkiem izopiezycznych linij odpowiadającym nowemu położenie tego punktu.

Wynika ztąd również, że dla danej powierzchni i danego natężenia wypadkowej P, *kierunek linij jednakowego ciśnienia pozostaje bez zmiany, jeśli punkt przyczepienia Q nie wychodzi z prostej dowolnie przez środek ciężkości powierzchni poprowadzonej.*

Zwracając się do ciśnienia hydrostatycznego wnosimy (uw. § 41), że prosta łącząca środek ciśnienia ściany z jej środkiem ciężkości jest średnicą sprzężoną z poziomym kierunkiem cięciw poprowadzonych w środkowej ellipsie bezwładności odpowiadającej tej ścianie.

Uwaga. Jeżeli punkt Q jest do naszego rozporządzenia, z równania (G) łatwo znajdziemy związek, jaki powinien istnieć między x' i y', ażeby izopiezyczne linje były nachylone do spółrzędnych osi pod kątem danym α; geometryczne miejsce punktów Q zadość czyniących temu warunkowi wyrazi się równaniem :

$$\text{stycz}\alpha = -\frac{x' I_x}{y' I_y},$$

czyli, punkta te powinny być wzięte na prostej :

$$(Q) \qquad y' = -\frac{1}{\text{stycz}\alpha}\cdot\frac{\rho^2_x}{\rho^2_y}x',$$

przechodzącej przez środek ciężkości powierzchni i mającej za spółczynnik kątowy :

$$m' = -\frac{1}{\text{stycz}\alpha}\cdot\frac{\rho^2_x}{\rho^2_y};$$

a że ten spółczynnik dla linji średniego ciśnienia jest :

$$m = \text{stycz}\alpha,$$

więc:

$$mm' = -\frac{\rho^2_x}{\rho^2_y} = -\frac{b^2}{a^2};$$

czyli że linje (G) i (Q) są średnicami sprzężonemi ellipsy; co już wiemy.

Jeśli chcemy ażeby linje jednakowego cisnienia czyniły z osiami kąt równy 45°, spółrzędne punktu Q powinny sprawdzać równanie :

$$y' = -\frac{I_x}{I_y}x' = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}x';$$

(*) Fig 75 przedstawia dwa sposoby wykreślenia średnicy EF : 1) za pomocą stycznej do koła wystawionego na wielkiej osi ellipsy; 2) za pomocą średnic w tém kole prostopadle do siebie poprowadzonych.

1 *Sposób.* Wystawiamy rzędnę punktu m przecięcia się ellipsy z prostą GQ; przedłużywszy tę rzędnę do spotkania się jej w punkcie M z kołem wystawionêm na wielkiej osi ellipsy, prowadzimy w tym punkcie styczną MK do koła, i połączywszy punkt K z punktem m, prowadzimy przez środek G ellipsy równoległę do Km; linja EF będzie szukaną.

2 *Sposób.* Otrzymawszy jak poprzednio punkt M, łączymy GM i prowadzimy promień GN prostopadły do GM; odrzuciwszy punkt N na ellipsę, i połączywszy otrzymany na niej punkt n ze środkiem G, proste Gn i Gm będą średnicami sprzężonemi.

http://rcin.org.pl

czyli, bez względu na znak tych spółrzędnych, potrzeba aby:

$$x' : y' = a^2 : b^2;$$

to jest, punkt Q powinien się znajdować na przeciwprostokątnej trójkąta, którego boki są proporcyonalne do kwadratów z osi ellipsy bezwładności, odpowiadającej powierzchni C'D'.

Jeżeli ciśniona powierzchnia C'D' jest koło, lub też wielokąt foremny jakikolwiek, w takim razie ellipsa bezwładności sprowadza się do okręgu, to jest moment bezwładności takich figur jest ten sam dla każdego kierunku prostej poprowadzonej w ich płaszczyznie i przez ich środek ciężkości: więc $I_x = I_y$, a zatem linja GC zawierająca punkt Q będzie nachylona do osi pod 45°, czyli kąt EGC będzie kątem prostym.

Ztąd wnosimy: ażeby dla koła i figur foremnych linja nachylona pod 45° do osi symetryi wyrażała kierunek linij jednakowego ciśnienia, potrzeba aby punkt przyczepienia wypadkowej P znajdował się na prostopadłej do tej linji.

To było do przewidzenia, gdyż w kole średnice sprzężone są do siebie prostopadłe.

82. Roztrząsanie wypadków otrzymanych z zastosowania równania (4') do powierzchni najczęściej w praktyce spotykanych, i porównanie ich z rezultatami znalezionymi z teoryi ciśnienia hydrostatycznego dotykalnie uzasadni hypotezę, z której równanie (4') powstało, i pokaże jak z tego równania punkt przyczepienia ciśnienia wypadkowego cieczy mógłby być wprost wyznaczony.

Rozpatrzymy w tym celu przykłady następujące: 1) przykład powierzchni elliptycznej lub kołowej, 2) rostokątnej lub kwadratowej, 3) powierzchnię mającą formę ukośnego kwadratu, i nareszcie 4) foremnego trójkąta.

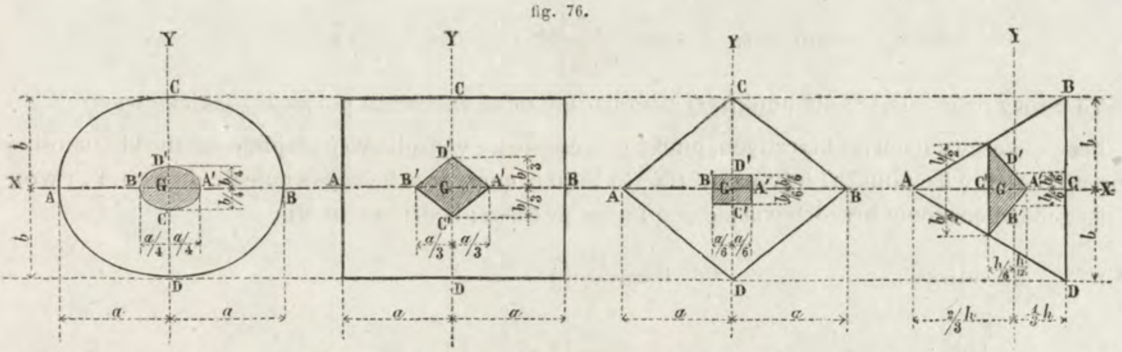
Znając momenta bezwładności tych powierzchni, ciśnienie R w każdym ich punkcie zostanie wyznaczonem za pomocą jednego ze wzorów:

$$R = P\left(\frac{x'}{I_y}x + \frac{y'}{I_x}y + \frac{1}{\Omega}\right); \tag{4'}$$

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{x'}{\rho_y^2}x + \frac{y'}{\rho_x^2}y\right). \tag{4''}$$

Dla ich zastosowania, nazwiemy (na podobieństwo oznaczania zwykle używanego dla osi ellipsy) bok trójkąta przez $2b$ (fig. 76), a przekątne ukośnego kwadratu i boki prostokąta przez $2a$ i $2b$. Wyrażoną

fig. 76.



w funkcyi tych ilości powierzchnię Ω, jej promienie wirowania i momenta bezwładności— względem osi, mających swój początek w środku ciężkości figur i skierowanych tak, ażeby oś X zlewała się z ich osią symetryi, — umieszczamy w następującej tablicy:

http://rcin.org.pl

Kształt powierzchni	Ω	ρ^2_x	ρ^2_y	I_x	I_y
Ellipsa	πab	$\frac{b^2}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	$\frac{1}{4}\pi ab^3$	$\frac{1}{4}\pi ba^3$
Koło ($a=b=R$)	πR^2	$\rho^2_x=\rho^2_y=\frac{R^2}{4}$		$I_x=I_y=\frac{1}{4}\pi R^4$	
Prostokąt	$4ab$	$\frac{b^2}{3}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{4}{3}ab^3$	$\frac{4}{3}ba^3$
Kwadrat ($a=b$)	$4a^2$	$\rho^2_x=\rho^2_y=\frac{a^2}{3}$		$I_x=I_y=\frac{4}{3}a^4$	
Kwadrat ukośny	$2ab$	$\frac{b^2}{6}$	$\frac{a^2}{6}$	$\frac{1}{3}ab^3$	$\frac{1}{3}ba^3$
Trójkąt foremny	$b^2\sqrt{3}$	$\rho^2_x=\rho^2_y=\frac{b^2}{6}$		$I_x=I_y=\frac{1}{6}b^4\sqrt{3}$	

Formuły, jakie ztąd otrzymamy, będą:

(1) dla ellipsy: $$R=\frac{P}{\pi ab}\left[1+\frac{4x'}{a^2}x+\frac{4y'}{b^2}y\right]$$

(1^{bis}) » koła: $$R=\frac{P}{\pi R^2}\left[1+\frac{4}{R^2}(x'x+y'y)\right]$$

(2) » prostokąta: $$R=\frac{P}{4ab}\left[1+\frac{3x'}{a^2}x+\frac{3y'}{b^2}y\right]$$

(2^{bis}) » kwadratu: $$R=\frac{P}{4a^2}\left[1+\frac{3}{a^2}(x'x+y'y)\right]$$

(3) » kwadratu ukośnego: $$R=\frac{P}{2ab}\left[1+\frac{6x'}{a^2}x+\frac{6y'}{b^2}y\right]$$

(4) » trójkąta foremnego: $$R=\frac{P}{b^2\sqrt{3}}\left[1+\frac{6}{b^2}(x'x+y'y)\right].$$

Te wzory mają miejsce dla punktu Q zajmującego na powierzchni położenie jakiekolwiek

Przy zastosowaniach praktycznych, punkt przyczepienia wypadkowej znajduje się zwykle na osi symetryi; jeżeli więc punkt Q leży na osi GX, to linje izopiezyczne będą równoległe do osi GY, i wzory dające układ ciśnienia przedstawią się pod formą prostszą; będziemy mieli:

(1') dla ellipsy: $$R=\frac{P}{\pi ab}\left(1+\frac{4x'}{a^2}x\right)$$

($1'^{bis}$) » koła: $$R=\frac{P}{\pi R^2}\left(1+\frac{4x'}{R^2}x\right)$$

(2') » prostokąta: $$R=\frac{P}{4ab}\left(1+\frac{3x'}{a^2}x\right)$$

http://rcin.org.pl

(2'bis) » kwadratu: $R = \frac{P}{4a^2}\left(1 + \frac{3x'}{a^2}x\right)$;

(3') » kwadratu ukośnego: $R = \frac{P}{2ab}\left(1 + \frac{6x'}{a^2}x\right)$

(4') » równobocznego trójkąta: $R = \frac{P}{b^2\sqrt{3}}\left(1 + \frac{6x'}{b^2}x\right)$.

Wszystkie te wzory mogą być ujęte w formę ogólną, łatwą do zapamiętania:

(X) $$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{kx'}{a^2}x\right);$$

gdzie spółczynnik k powinien być wzięty stosownie do kształtu ciśnionej powierzchni; tak że:

dla prostokąta lub kwadratu $k = 3$,

» ellipsy lub koła.......... $k = 4$,

» kawadratu ukośnego ....
» trójkąta foremnego ..... } $k = 6$,

Ω oznacza powierzchnię rozpatrywanej figury, a $2a$ wymiar odpowiadający osi X w ellipsie, prostokącie i ukośnym kwadracie; w trójkącie zaś foremnym $2a$ oznacza długość jego boku.

Gdyby punkt przyczepienia wypadkowej znalazł się na osi Y, mielibyśmy wzór ogólny:

(Y). $$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{ky'}{b^2}y\right),$$

w którym wymiar $2b$ odpowiadałby osi Y, a spółczynnik k miałby wartość poprzednio wymienioną.

83. Za pomocą wzorów (X) i (Y) porównanie wypadków teoryi statycznej i teoryi hydrostatycznej wykonywa się bez trudnosci. W tym celu zauważmy najprzód, że przy ciśnieniu cieczy, dla wszystkich punktów ściany ciśnienie p jest dodatne, i staje się zerem tylko dla punktów leżących na powierzchni wolnej; w teoryi zaś ciśnienia statycznego, R może być tak dodatne jak odjemne. Ogólne równanie linji prostej odgraniczającej punkta *ciśnione* od punktów *rozciąganych* jest:

$$0 = Ax + By + C.$$

Spółczynniki A i B zależą od wartości spółrzędnych x' i y'; możemy więc szukać takich punktów Q, przy których ta prosta byłaby styczną do konturu naszej powierzchni. Geometryczne miejsce punktów Q zadość czyniących temu warunkowi może być nazwane *linią środków ciśnienia dodatnego*: albowiem wszystkie punkta powierzchni zostawałyby wtedy pod ciśnieniem dodatnem. Kształt takiej linji środków zależy jedynie od konturu ciśnionej powierzchni; za pomocą wzorów (1')...(4') pewne punkta tej linji zostaną natychmiast wyznaczone dla figur wyżej uważanych (fig. 76), a jej zupełne wykreślenie może być uskutecznione na zasadzie prawideł podanych w kursach Mechaniki zastosowanej, a mianowicie:

1° Łukowi krzywej 2go stopnia w konturze powierzchni odpowiada łuk krzywej 2go stopnia dla linji środków ciśnienia dodatnego;

2° Prostej w konturze powierzchni odpowiada wierzchołek kąta w linji środków;

3° Wierzchołkom kąta odpowiadają linje proste.

Zastosujmy te prawidła do powierzchni przedstawionych na fig. 76.

Ellipsa. Jeżeli wypadkowa P jest przyczepioną w jakimkolwiek punkcie osi GX, — punkta ellipsy

http://rcin.org.pl

dla których ciśnienie jest zerem będą się znajdować na prostej :

$$1+\frac{4x'}{a^2}x=0;$$

więc, ażeby ta prosta była styczną w wierzchołkach A i A′ ellipsy, potrzeba ażeby jej równanie sprowadziło się do równania :

$$x=\pm a;$$

potrzeba zatem ażeby :

$$x'=\mp\frac{a}{4};$$

tym więc sposobem dla szukanej linji środków otrzymujemy dwa punktu A′ i B′ leżące na osi X.

Jeżeli teraz przypuścimy że punkt Q znajduje się na osi Y, — z równania :

$$R=\frac{P}{\pi ab}\left(1+\frac{4y'}{b^2}y\right),$$

przyjdziemy do równania : $1+\frac{4y'}{b^2}y=0$, a ztąd, rozumując jak poprzednio, do wyznaczenia na osi Y dwóch nowych punktów C′ i D′ dla szukanej linji. Odległość GC′ = GD′ ma za wyrażenie :

$$y'=\mp\frac{b}{4};$$

linja środków ciśnienia dodatnego będzie więc ellipsą, której osie są równe $\frac{1}{4}$ odpowiednich osi ellipsy nam danej.

Wnosimy ztąd, że linją środków dla koła będzie koło spółśrodkowe mające za promień $\frac{1}{4}$ promienia koła danego.

Prostokąt. Punkta linji środków ciśnienia dodatnego, leżące na osiach X i Y, wyznaczą się równaniami :

$$1+\frac{3x'}{a^2}x=0 \qquad \text{i} \quad 1+\frac{3y'}{b^2}y=0,$$

i warunkiem, ażeby proste niemi wyrażone nie wchodziły w obręb prostokąta, to jest, żeby ich skrajnem położeniem były jego boki :

$$x=\pm a, \qquad y=\pm b;$$

ztąd znajdujemy :

$$x'=\mp\frac{a}{3}, \qquad y'=\mp\frac{b}{3};$$

łącząc 4 punkta : A′, B′, C′, D′ wyznaczone temi wartościami, otrzymamy kontur mający formę ukośnego kwadratu i przedstawiający szukaną linję środków.

Jeżeli prostokąt zamieni się na kwadrat, — linja środków stanie się również kwadratem, którego przekątna będzie mieć za długość $\frac{2a}{3}$.

http://rcin.org.pl

Kwadrat ukośny. Równania :

$$1+\frac{6x'}{a^2}x=0 \quad \text{i} \quad 1+\frac{6y'}{b^2}y=0,$$

dadzą 4 punkta, wyznaczone wartościami :

$$x'=\mp\frac{a}{6}, \quad y'=\mp\frac{b}{6};$$

punkta te odpowiadają wierzchołkom danej figury; więc w linji środków przez te punkta przechodzą proste, które z powodu symetryi powinny być poprowadzone prostopadle do osi, co nam daje na szukaną linję prostokąt A'B'C'D'.

Trójkąt równoboczny. Jeżeli wysokość AC trójkąta oznaczymy przez h, to b^2 będzie $=\frac{h^2}{3}$, i równanie :

$$1+\frac{6x'}{b^2}x=0$$

może być zastąpione równaniem :

$$1+\frac{18x'}{h^2}x=0,$$

z którego natychmiast znajdziemy dwa punkta linji środków leżące na osi X. Istotnie, ażeby wszystkie punkta trójkąta zostawały pod ciśnieniem dodatnem, punkta mające za ciśnienie zero mogą się znajdować tylko na linji BD, dla której $x=\frac{1}{3}h$, lub też na równoległej do niej prostej poprowadzonej przez punkt A, to jest wyznaczonej wartością $x=-\frac{2}{3}h$; a to wymaga :

żeby w pierwszym przypadku: $x'=-\frac{1}{6}h$, co da punkt C',

a w drugim żeby $x'=\frac{1}{12}h$, zkąd się otrzyma punkt A'.

Ażeby znaleźć punkta leżące na osi Y, uważamy że punkta ciśnionej powierzchni których rzędna y jest mniejszą od b ciśnienia 0 mieć nie powinny, gdyż ciśnienie takie przystoi tylko dwom wierzchołkom trójkąta B i D; więc warunek $y=\pm b$, wyznaczający dwie równoległe do osi X poprowadzone przez B i D, da na odpowiednie wartości y' wyrażenie :

$$y'=\mp\frac{b}{6};$$

zkąd otrzymamy punkta B' i D', a następnie, na linję środków ciśnienia dodatnego — trójkąt A'D'C'B'.

84. Jeżeli hypoteza służąca za punkt wyjścia do teoryi ciśnienia statycznego jest racyonalną, wypadki z niej otrzymane powinny się zgadzać z wypadkami teoryi hydrostatycznej, i punkt przyczepienia wypadkowego ciśnienia cieczy na wyżej uważane powierzchnie powinien się znaleźć na linji środków ciśnienia dodatnego, jakąśmy dla każdej z tych powierzchni otrzymali.

Otóż przypomnijmy sobie że dla ellipsy, której styczna w jednym z wierzchołków znajduje się na powierzchni wolnej, środek ciśnienia jest wyznaczony wartością :

$$x'=\frac{5}{4}b, \quad \text{lub też:} \quad x'=\frac{5}{4}a;$$

http://rcin.org.pl

stosownie do położenia ellipsy;

dla koła stycznego do powierzchni wolnej: $x' = \frac{5}{4} R.$

dla prostokąta którego boki są a i b: $x' = \frac{2}{3} b,$ albo $x' = \frac{2}{3}$

a jeżeli długość boków nazwiemy $2a'$ i $2b'$, to: $x' = \frac{4}{3} b',$ albo też $x' = \frac{4}{3} a'$

dla kwadratu: $x' = \frac{2}{3} a,$

albo też: $x' = \frac{4}{3} a';$

dla kwadratu ukośnego którego przekątne były a i b: $x' = \frac{7}{12} b,$ lub $x' = \frac{7}{12} a;$

albo też: $x' = \frac{7}{6} b',$ lub $x' = \frac{7}{6} a';$

dla trójkąta mającego h za wysokość i którego wierzchołek leży na powierzchni wolnej: $x' = \frac{3}{4} h;$

a jeśli na powierzchni wolnej leży jego podstawa, wtedy: $x' = \frac{1}{2} h.$

Ponieważ *linja środków ciśnienia dodatnego* jest tak wyznaczoną, że ciśnienie zero będzie mieć miejsce w wierzchołkach powierzchni lub też na jej bokach, które, przy rozpatrywaniu ciśnienia cieczy, znajdowały się na powierzchni wolnej,—więc punkta tej linji, odpowiadające takim wierzchołkom lub bokom, powinny być punktami przyczypienia wypadkowego na te powierzchnie ciśnienia cieczy.

Tak się ma rzecz istotnie, i widzimy to porównywając wzory przytoczone z teoryi hydrostatycznej — w której x' oznacza odległość środka ciśnienia od powierzchni wolnej — z tymi jakie otrzymaliśmy wyżej z teoryi statycznej, — gdzie x' wyraża tylko odległość środka ciśnienia od środka ciężkości. Dla ellipsy, prostokąta i ukośnego kwadratu prosty rzut oka wystarcza; dla trójkąta, w razie ciśnienia zero wzdłuż jego boku BD, mamy na odległość środka ciśnienia C′ od tego boku wyrażenie:

$$C'C = GC + \frac{1}{6} h = \frac{1}{3} h + \frac{1}{6} h = \frac{1}{2} h = x';$$

gdy zaś ciśnienie 0 ma miejsce w wierzchołku A, odległość środka ciśnienia A′ od tego punktu będzie:

$$A'A = AG + \frac{1}{12} h = \frac{2}{3} h + \frac{1}{12} h = \frac{3}{4} h = x'.$$

Na tem porównaniu kończymy teoryę ciśnienia cieczy na *ściany płaskie*; teorya ciśnienia na *ściany krzywe* stanowić będzie przedmiot następnego rozdziału.

KONIEC TOMU TRZECIEGO.

http://rcin.org.pl