TEORYA
BIEGU PROSTOLINIJNEGO CIECZY
I
JEJ ZASTOSOWANIE DO BIEGU WODY
W RURACH WODOCIĄGOWYCH

PRACE

P. MAURYCEGO LÉVY

Francuzkiego Inżyniera Dróg i Mostów,

WYŁOŻONE I ROZEBRANE

PRZEZ

FELIKSA KUCHARZEWSKIEGO

Inżyniera, dawnego ucznia Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

(Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 15 Marca 1872 r.)

WSTĘP

1. Bieg wody w rurach i kanałach zbliża się zwykle do ruchu idealnego bardzo prostego, w którym wszystkie cząsteczki biegną wzdłuż prostych równoległych; a jeżeli w rzeczywistości, bieg wody o którym mówimy, nie jest ściśle prostolinijny, to jednak prawa takiego ruchu idealnego raz poznane, badanie biegów naturalnych ułatwić mogą i umożebnić. Na tem polega ważność teoryi prostolinijnego biegu cieczy, teoryi mało uprawianej dotychczas, a której się tyczące nowe poszukiwania P. Lévy, właśnie tu przedstawić chcemy. Przed rozpoczęciem jednak ich wykładu, w krótkości o historycznym rozwoju tej kwestyi powiedzieć nie zawadzi.

2. Ciecze uważane w Mechanice analitycznej, złożone są z cząsteczek nadzwyczajnie ruchomych jedne względem drugich, między któremi przypuszcza się zupełną nieobecność tarcia. Na tem polega własność *płynności doskonałej*, w skutku której w cieczy tak w ruchu jak i w spoczynku, ciśnienia są stałe i normalne do elementów płaskich zewnętrznych i wewnętrznych, na które działają. Ale ciecze doskonałe nie istnieją w naturze i ciśnienia nie są normalne do elementów płaskich a tylko pochylone. Rozkładając każde z tych działań na dwie składowe, jednę normalną a drugą styczną do uważanego elementu, otrzymujemy : *działanie normalne* czyli *ciśnienie*, i *działanie styczne*, czyli *tarcie*. To ostatnie ma miejsce w cieczach naturalnych w ruchu, a jego obecność jest powodem charakterystycznej własności tych cieczy, zwanej *lepkością*.

Wzajemne tarcie dwóch warstw cieczy w ruchu uznane już zostało przez Descartes'a, a Newton'owi winniśmy bardzo proste przypuszczenie co do prawa, jakiemu też siła podlega. Ale jakkolwiek Mariotte, a po nim Pitot ([1]), Couplet, D. Bernouilli i Coulomb, wspominali już o tarciu opóźniającem bieg cieczy w rurze lub w kanale, a spowodowanem przez opór ścian stałych; to jednak znakomici geometrzy XVIIIgo wieku oparli równania ogólne Hydrodynamiki na przypuszczeniu ciśnień stałych w około jednego punktu we wszystkich kierunkach, w cieczy tak w ruchu jak i w spoczynku, i normalnych do elementów powierzchni, na które działają. Było to pominięciem składowej stycznej działania, uznanej i nazwanej tarciem przez ich poprzedników, składowej której istnienie wyświecone zostało w końcu XVIIIgo stulecia przez uczonych hydraulików Dubuat'a i Venturi'ego ([2]). Toteż d'Alembert i Euler, stosując swe równania do działania wywieranego przez ciecz w ruchu, na ciało stałe w niej zanurzone, doszli w tym przedmiocie do rezultatów zupełnie paradoxalnych, i uznawszy je za takie, przekazali przyszłości dojście do racyonalnych w tym względzie wyników ([3]).

3. Do odkrycia praw prostolinijnego biegu cieczy w rurach prowadziły dwie drogi: doświadczalna i analityczna, uzupełniające jedna drugą. W obu tych kierunkach pracować zaczęli uczeni bieżącego stulecia. W ubiegłem, widzieliśmy że prace analityczne żadnego nie wydały rezultatu; poszukiwania zaś na drodze doświadczalnej, w małej liczbie prowadzone, a co do swych wypadków żadną nieoświecane teoryą, nic więcej także przynieść nie mogły. W roku 1732, Couplet zrobił kilka doświadczeń nad rurami wodociągowemi w Wersalu, a oto w jaki sposób wyraziła się o nich naówczas Akademia umiejętności w Paryżu :

([1]) Pitot uczony Inżynier francuzki z pierwszej połowy XVIIIgo stulecia, członek Akademii umiejętności w Paryżu, przedstawił tej ostatniej wiele rozpraw w przedmiocie Hydrauliki. Jedna z nich podana w Pamiętnikach Akademii za rok 1728 zawiera ciekawe i jak naówczas nader ścisłe poglądy na tarcie wody o ściany rury. Ale najznakomitszym wynalazkiem Pitot'a jest *rurka piezometryczna*, która udoskonalona następnie przez H. Darcy, należy do najznakomitszych przyrządów służących do oznaczania prędkości w danych punktach wody bieżącej. Opis tej rurki podał Pitot w Pamiętnikach Akademii paryzkiej za rok 1732 (*Histoire de l'Acad. Royale des Sciences, avec les mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, tirés des registres de cette Académie*) na str. 363.

([2]) Venturi zauważył pierwszy dążność żyły cieczy w ruchu do pociągania za sobą cząsteczek cieczy w spokoju żyłę otaczającej. Dążność ta służyć może za dowód istnienia tarcia między strugami cieczy w ruchu a cieczą w spokoju. Uwidocznił ją Venturi wieloma doświadczeniami, na których zbudował *teoryą bocznego udzielania się ruchu w płynach*, w swojem dziele: *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides. Paris, an* VI = 1798. Na początku bieżącego stulecia, zasada bocznego udzielania się ruchu w płynach, zajmowała wiele umysłów wynalazczych, z pomiędzy których wymienić tu musimy Generała Michała Sokolnickiego, przyjaciela Mongolfier'a, proponującego w swem dziełku: *Opuscules sur quelques parties d'Hydrodynamique*, (*Paris*, 1811, in-4o), na tejże samej zasadzie opartą *trąbę hydrauliczną*, mającą służyć do osuszania bagien.

([3]) Patrz o tym przedmiocie wyjątek z rozprawy *sur la résistance des fluides* pana Barré de Saint-Venant, podany w *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, z dnia 15 Lutego 1847 r. w tomie 24ym, na str. 243.

« Przystępuje następnie (Couplet) do najtrudniejszego punktu w tym przedmiocie, to jest do zmniejszenia wydatku wody, z przyczyny przeszkód fizycznych, takich jak tarcie wody o ściany wewnętrzne rur, nierówności tychże, lub powietrze w rurach zawarte.

« O tych wszystkich rzeczach mało mamy wiadomości, z braku doświadczeń na wielką skalę. Rury krótkie dają wypadki zbliżone do zwykłych praw i do teoryi, w rurach zaś długich wypadki te oddalają się od nich, często bardzo wiele. Na szczęście p. Couplet robił doświadczenia w Wersalu, gdzie co do wielkości nic nie zostaje do życzenia, ale trzeba mu było jeszcze robić ich dość dużo, by z nich wyciągnąć wnioski ogólniejsze z niejaką pewnością. Wyjmujemy z jego obserwacyj i uwag te tylko, które się nam wydają najznakomitsze, nie wchodząc bynajmniej w szczegółowe opisywanie miejscowości i rur (4).

« Prawo, że prędkości wody mają się do siebie w stosunku pierwiastków kwadratowych z wysokości z jakich woda spada, czyli co na jedno wychodzi z wysokości słupów wody, których ciążenie (5) sprawia bieg wody pod niemi się znajdującej, prawo to jest nadzwyczaj mylne dla wielkich rur, takich jak wersalskie, które dochodzą czasami do 2,000 sążni (toises) długości. Jeżelibyśmy według tego prawa oceniali ilość wody mającej dojść do pewnego punktu, to jest jeden przypadek, w którym znaleźlibyśmy 407 *cali wody* (6) w miejsce 10 1/2, które otrzymał p. Couplet robiąc doświadczenia. Różnica prawie o całą ilość.

« Często ilość wody jest dwadzieścia lub trzydzieści razy mniejsza od tej jaką prawo obiecuje. To dziwne zmniejszenie pochodzi z tarć, przynajmniej w większej swej części. Widzi się, i odgadnąćby można bez doświadczenia, że ich skutek jest tem większy im rury są dłuższe, ich średnice mniejsze, nierówności lub zagięcia rur częstsze, kąty tych zagięć ostrzejsze, lub prędkość większa; ale wiele będzie trudności w oznaczeniu każdego z tych powodów zmniejszenia i wypadków ich różnych kombinacyj » (7).

Jeżeli przytaczamy tu ten ustęp, to tylko w celu wyciągnięcia z niego wniosku, że w r. 1732 nie tylko prawa doświadczalne biegu wody w rurach nie były znane, ale zaledwie wierzono w możebność ich odkrycia. Możebność ta jednak dowiedzioną została przez uczonych i ukazały się najprzód wzory praktyczne, doświadczalnie wywiedzione, a następnie rozumowana teorya.

4. De Prony uważany być powinien za prawdziwego twórcę tej części Hydrauliki. W swem dziele:

(4) *Wydatkiem* rury, nazywamy objętość wody jaka w przeciągu jednej sekundy przepływa przez pewne oznaczone przecięcie poprzeczne rury. Wydatek jest równy iloczynowi z powierzchni przecięcia poprzecznego, któremu odpowiada, przez prędkość średnią na tem przecięciu.

(5) Nazywamy w Hydraulice *ciążeniem* (francuzkie *charge*, niemieckie *Druck-hoehe*) w danym punkcie strugi cieczy w ruchu, summę

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\Pi},$$

wysokości odpowiadającej prędkości V i wysokości ciśnienia p w tymże punkcie; g jest przyspieszeniem siły ciężkości a Π ciężarem gatunkowym cieczy.

(6) *Cal wody* (*pouce d'eau*) jest to objętość wody wypływająca w przeciągu jednej sekundy przez otwór w cienkiej ścianie, którego średnica jest równa $0^{m},027$, pod ciążeniem $0^{m},0022$ na środek otworu. W dwudziestu czterech godzinach, otwór taki daje $19^{m.sz}1953$, to jest objętość jaką Francuzi nazywają *pouce de fontainier*.

(7) To zdanie Akademii przytacza p. Darcy w swych: *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, podanych w *Mémoires des savants étrangers*, tomie XVym. Znaleźć je można na str. 142 tegoż tomu.

Recherches physico-mathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes, w r. 1804 wydanem, podjąwszy ideje Coulomb'a i opierając się na wypadkach doświadczeń jakie zostawili :

Couplet w liczbie 7, w swej rozprawie pod tytułem : *Recherches sur le mouvement des eaux*, podanej w *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, *année* M.DCCXXXII, *avec les mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, tirés des registres de cette Académie*, (*Paris*, 1735), in-4° na str. 113,

Bossut w liczbie 26, w dziele : *Traité théorique et expérimental d'Hydrodynamique*, (Paris, 1787, 2 vol. in-8°), w którem pierwszy we Francyi wprowadził całą naukę Hydrauliki na drogę doświadczalną, wskazaną przez Michellotti'ego we Włoszech,

Dubuat w liczbie 18, w drugiem (1786) i trzeciem (1816 r.) wydaniu swych *Principes d'Hydraulique*, które wyszły pierwotnie w r. 1779 w Paryżu, w jednym tomie, zawierając zasady Hydrauliki nie poparte żadnemi doświadczeniami. Wydanie drugie w dwóch tomach, przedstawia już znaczny zbiór tych ostatnich; a wydanie trzecie, pod tytułem : *Principes d'Hydraulique et de Pyrodynamique vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement; ouvrage en trois volumes par M. Dubuat* (Paris 1816), stanowi w Hydraulice dzieło prawdziwie klassyczne, wysoko cenione przez uczonych współczesnych,

doszedł do postawienia wzorów, które przeszło przez lat pięćdziesiąt, aż do chwili nowszych poszukiwań Henryka Darcy, były jedyną podstawą rachunków inżynierskich. W roku 1825, zebrał de Prony praktyczne rezultaty pierwszej swej pracy i ogłosił sławny : Zbiór pięciu tablic (*Recueil de cinq tables*), nadzwyczaj przez praktyków ceniony. Pan Darcy mówiąc o pracach jakie dokonał de Prony, nazywa je « uwieńczeniem » dzieła rozpoczętego przez jego poprzedników i dodaje że « imie de Prony pozostanie na zawsze wyryte w pamięci inżynierów i wszystkich zajmujących się kwestyami hydraulicznemi » ([8]).

5. Na drodze teoretycznej pierwszy krok współcześnie postawił Navier, którego *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, czytany na posiedzeniu Akademii umiejętności w Paryżu dnia 28 Marca 1822 roku, jest pracą najważniejszą i do ostatnich prawie czasów, można powiedzieć, jedyną posiadającą charakter ścisłości, jakie w przedmiocie ruchu płynów ogłoszone zostały ([9]). Navier starał się w nim pierwszy uzupełnić ogólne równania różniczkowe ruchu płynów, przypuszczając że ten ruch jest ciągły, to jest bez raptownej zmiany prędkości, przechodząc od jednego punktu płynu do drugiego dostatecznie bliskiego. Przyjął on w tym celu, że między dwiema cząsteczkami bardzo bliskiemi, oprócz działania hydrostatycznego ma jeszcze miejsce działanie dynamiczne, którego wyrażenie jest funkcyą ich odległości, pomnożoną przez prędkość, z jaką się te cząsteczki zbliżają lub oddalają jedna od drugiej w danej chwili. Otrzymał tym sposobem wyrazy, dające na tarcie dwóch warstw wyrażenie zgodne z przypuszczeniem Newton'a, to jest proporcyonalne do ich prędkości względnej ślizgania. Wyrażenie to jest :

$$\varepsilon \frac{dV}{dn},$$

czyli iloczyn współczynnika liczebnego ε zależnego od natury płynu, przez pochodną $\frac{dV}{dn}$ względem współrzędnej normalnej n prędkości bezwzględnej V płynu, liczonej równolegle do linii

([8]) Tamże, str. 143.

([9]) Rozprawa ta podaną została w *Mémoires de l'Institut*, tom VI ; wyszła także w oddzielnym oddruku pod podanym wyżej tytułem.

nakreślonej na powierzchni, która przedziela dwie warstwy o jakich mowa. Wzory, jakie podał Navier, a do których Poisson, Cauchy, Stokes doszli innemi drogami, zgadzają się w zadowalniający sposób z obserwacyami czynionemi nad ruchem powolnym i regularnym wody płynącej przez rurki włoskowate, jak to zostało stwierdzone w ostatnich czasach przez młodych geometrów francuzkich : Boussinesq ([10]) i Emile Mathieu ([11]). Co się tyczy biegu wody w rurach wodociągowych, wzór Navier'a zgadza się z dawnym wzorem empirycznym Girard'a ([12]), który właśnie nowszemi pracami Prony'ego został zastąpiony. To też Navier nieomieszkał dodać, że jego teorya « przydać się nie może w zwykłych okolicznościach praktyki, gdzie niewprowadzając zupełnie w rachunek ruchu więcej skomplikowanego jaki płyn w tych razach przybiera, nie mamy innego przewodnika, jak tylko wypadki doświadczeń » ([13]).

6. Tym czasem w praktyce wzór Prony'ego uważany był ciągle za klassyczny, tak dla niezaprzeczonej zręczności obserwatorów, których wypadki służyły mu za podstawę, jak i dla powagi imienia autora. Biegły w kwestyach praktycznych tyczących się Hydrauliki, professor Szkoły Dróg i Mostów Mary, upewniał Inżynierów co do jego dokładności, mówiąc : « Wzór ten daje wypadki mniejsze od otrzymywanych z rurami nowemi i różnica dla dużych średnic dojść może do $\frac{1}{3}$; tym sposobem posługując się temi tablicami (ułożonemi przez p. Mary według wzoru Prony'ego), nietrzeba się zajmować skutkiem lekkich osadów, mogących zmniejszyć średnicę rur a powiększyć tarcie » ([14]). A jednak nowe doświadczenia przedsiębrane były jednocześnie przez d'Aubuisson'a i Castel'a w Tuluzie i dały nieco odmienne wypadki ([15]). Doświadczenia te doprowadziły d'Aubuisson'a do powiększenia wartości współczynników we wzorze Prony'ego, które Eytelwein ([16]) wprowadzeniem przy ich oznaczaniu szczegółowych ulepszeń poprawił. Wzór Prony'ego przekształcany był następnie przez panów Dupuit ([17]) i Barré de Saint-Venant ([18]). Ten ostatni wstępując nadto na drogę teoretycznych badań, przyjął zasady Navier'a, a stosując jego teoryą do prądów ([19]) pewnej wielkości zauważył, że chcąc

([10]) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tom 67, str. 287, raport z dnia 3 sierpnia 1868 roku.

([11]) *Comptes rendus*, tom 57, str. 300, nota pana Emila Mathieu z dnia 10 Sierpnia 1863 roku.

([12]) Patrz : *Essai sur le mouvement des eaux courantes* i *Mémoires sur le canal de l'Ourcq*. Dzieła te Girard'a, wydane na początku bieżącego stulecia, wielce były cenione w swoim czasie.

([13]) *Résumé des Leçons données par Navier à l'Ecole des Ponts et Chaussées*, część druga, str. 89.

([14]) Te słowa Mary'ego przytacza Darcy w swych *Recherches expérimentales*; patrz *Mémoires des savants étrangers* tom XV, str. 144.

([15]) Wypadki tych doświadczeń podane zostały przez Castel'a w *Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse* (t. IV. 1837); inne podał d'Aubuisson w swej *Histoire de l'établissement des fontaines à Toulouse*, w tychże *Mémoires* (t. II, 1830) umieszczonej. Znaleźć je można także w dziełach d'Aubuisson'a : *Traité du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, à l'usage des ingénieurs* i *Traité d'Hydraulique à l'usage des ingénieurs*.

([16]) Prace Eytelwein'a, podane w Pamiętnikach Akademii berlińskiej (1814-1815), przełożone na francuzkie znaleść można w *Annales des mines* (t. XI).

([17]) *Etudes pratiques et théoriques sur le mouvement des eaux courantes*.

([18]) *Formules et tables nouvelles*, podane w *Annales des mines*, 4ta serya, tom XX.

([19]) Uważamy tu za stosowne objaśnić znaczenie hydrauliczne kilku wyrazów, jakich często używać będziemy. Znane jest w Hydrodynamice określenie ruchu nieustannego (permanent) cieczy. W ruchu podobnym każda cząsteczka nie zachowuje koniecznie tej samej prędkości, ale różne cząsteczki, przechodzące kolejno przez jeden i tenże sam punkt przestrzeni, nabierają w nim prędkości, ednakich co do wielkości i kierunku. Wszystkie takie cząsteczki następują w tym przypadku uczynić zadość znanym prawom, trzeba powiększyć współczynnik ε, jednocześnie z powiększaniem się przecięcia poprzecznego prądu. Przytaczamy tu słowa p. de Saint-Venant, gdyż na nich następnie opierał się p. Darcy :

« Jeżeli przypuszczenie Newton'a, powtórzone przez panów Navier i Poisson, a polegające na uważaniu tarcia wewnętrznego za proporcyonalne do prędkości względnej strug ślizgających się jedne po drugich, może być zastosowane w przybliżeniu do różnych punktów tegoż samego przecięcia płynnego, to wszystkie znane fakty pozwalają wnioskować, że należy powiększać współczynnik tej proporcyonalności, razem z wymiarami przecięć poprzecznych prądu. Tłumaczy się to do pewnego punktu, uważając że strugi niepostępują równolegle jedne względem drugich, z prędkościami regularnie stopniowanemi od jednej strugi do drugiej, i że przerwy, wzburzenia i inne ruchy złożone lub skośne, które muszą mieć wiele wpływu na natężenie tarcia, tworzą się i rozwijają znacznie więcej na dużych przecięciach » ([20]).

Jakkolwiek zdanie to p. de Saint-Venant przyjął następnie p. Darcy i starał się je stwierdzić przez dyskussyą wypadków swych doświadczeń, to jednak nowsi hydraulicy wcale go nie podzielają. Wpływ promienia rury na lepkość cieczy nazywa p. Bresse «faktem dość niespodziewanym, którego zadowalniające wytłumaczenie zdaje się niepodobnem » ([21]). W każdym razie p. de Saint-Venant przyjął jednak w zupełności przypuszczenie Navier'a, że tarcie jest proporcyonalne do prędkości względnej dwóch strug. Prace Navier'a uzupełnione zostały jeszcze w r. 1845 przez p. Sonnet ([22]), a w 1848 przez p. Dupuit ([23]), ale równie bez zmiany służącego im za podstawę przypuszczenia.

7. Tymczasem inżynierowie uznawać zaczęli powoli, że podstawa doświadczalna wzoru Prony'ego nie była dość pewną. Obserwacye, jakich wypadki zostawili Couplet, Bossut i Dubuat, odnosiły się w części do rur zbyt małej średnicy, a w części do starych rur żelaznych zapchanych osadem. Przybliżona zgodność otrzymanych wypadków, w skutku której de Prony zdołał je objąć wszystkie w jednym wzorze ze stałemi współczynnikami, wydawała się wielu Inżynierom prędzej rezultatem przypadkowej kompensacyi między różnemi przyczynami niezgodności wypadków niż objawem ścisłego prawa. Henryk Darcy, dyrektor wodociągów paryzkich po Mary'm, odznaczywszy się już poprzednio przez założenie wspaniałych wodociągów w rodzinnem swem mieście Dijon ([24]), przedsięwziął w r. 1849 usunąć wszystkie powątpiewania nowemi doświadczeniami, zmieniając w nich naturę rur, ich średnicę, ciśnienia i prędkości. Doświadczenia te, wykonane w liczbie 198, a w r. 1851 ukończone, pozwoliły mu oznaczyć nowe prawa biegu wody w rurach i ułożyć tablicę streszczającą

ciągle jedna po drugiej i przebiegają tęż samą drogę. Ogół ich, rozłożony wzdłuż wspólnej drogi nazywamy *strugą* cieczy (filet). Jest to niejako nić ciekła, o nieskończenie małej średnicy, a w której cząsteczki cieczy są w ciągłym ruchu, ciągle się zmieniają i coraz to nowe na miejsce dawnych następują. Pęk strug, wychodzących przez otwór ze zbiornika, a mający już skończone przecięcie, nazywamy *żyłą* (veine) cieczy; zaś pęk strug biegnących w rurze lub pewnem korycie, nazywamy *prądem* (courant) cieczy. Żyła cieczy i prąd cieczy, oznaczają zatem rzeczy istniejące; zaś struga cieczy jest pojęciem czysto idealnem utworzonem dla zadość uczynienia potrzebom teoryi.

([20]) *Annales des mines*, 4ta serya, tom XX str. 229.

([21]) *Cours de mecanique appliquée, professée à l'Ecole Impériale des Ponts et Chaussées par M. Bresse*. 2me ed. Część druga (*Hydraulique*), str. 124 w przypisku.

([22]) *Recherches sur le mouvement uniforme des eaux, en ayant égard aux différences de vitesse des filets.* (1845).

([23]) Już przytaczane *Etudes pratiques et théoriques.*

([24]) Wszystkie szczegóły tyczące się tych wodociągów, podał Darcy w swem dziele : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, wielce od inżynierów cenionem.

je dla rur żelaznych nowych, przypadku najważniejszego w praktyce. Rozprawę, rezultatem i sprawozdaniem tych poszukiwań będącą, przedstawił Darcy Akademii umiejętności w Paryżu, która ją w *Mémoires des Savants Etrangers*, tomie XV^{ym}, podała ([25]).

Darcy sprawdził niezależność tarcia od ciśnienia i jego proporcyonalność do powierzchni w zetknięciu; ale przekonał się także, że natura ścian rury ma na tarcie wpływ bardzo znaczny, a pominięty zupełnie w teoryi Prony'ego. I tak naprzykład rury z żelaza walcowanego, wysmarowane smołą, i rury szklanne, dają wydatek większy o jednę trzecią od wskazanego wzorem Prony'ego; gdy tymczasem rury żelazne lane, skoro tylko ściany ich pokryte zostaną osadem, dadzą wydatek mniejszy niż przedtem, jakkolwiek średnica widocznej nie ulega zmianie. Tym sposobem współczynniki wzoru Prony'ego, uważane przez tego ostatniego za stałe, są funkcyami średnicy rury i zmniejszają się wraz z jej powiększeniem. Co do samego kształtu wzoru, Darcy przyjął podobnie jak poprzednio Girard, d'Aubuisson i Dupuit, jego dwojakie uproszczenie, stosownie do tego jak prędkość jest bardzo mała, albo większa od 0^m10.

Wypadki praktyczne poszukiwań Henryka Darcy zyskały powszechne uznanie i po dziś dzień służą za podstawę rachunków inżynierskich; teorya jednak, jaką ten znamienity Inżynier wyciągnąć z nich usiłował, stanowczo dziś zaczyna być zaprzeczaną. Darcy, przytaczając uwagę p. de Saint-Venant, wniósł ze swych licznych doświadczeń, mierząc prędkość strug cieczy, że ich tarcie wzajemne wzrasta szybko razem ze średnicą rur, przez które ciecz przepływa; a nadto ze wzorów przezeń podanych wynika, że to tarcie nie jest już jak poprzednio proporcyonalne do prędkości względnej, $\frac{dV}{dn}$, ale do kwadratu z tejże prędkości, $\left(\frac{dV}{dn}\right)^2$. Dla rur kołowych wyrażenie tarcia jest wedle p. Darcy:

$$\varepsilon\left(R\frac{dV}{dr}\right)^2,$$

gdzie ε jest współczynnik zależny od natury cieczy, R promień rury, a r promień warstwy uważanej.

8. Być może że ta niezgoda teoryj Navier'a i Henryka Darcy spowodowaną była nieodłącznemi od doświadczeń tego rodzaju błędami; gdyż wszystko tu polegało na ścisłem oznaczeniu prędkości pojedyńczych strug cieczy, a przyznać trzeba, że nie znamy dotąd żadnego narzędzia, pozwalającego otrzymać te prędkości z pewną dokładnością. Ale może być także, że rury obserwowane niewypełniały dostatecznie przypuszczanych *a priori* warunków, biegu strugami prostolinijnemi i równoległemi do osi. Bądź co bądź, teorya p. Darcy oparta na powadze najznakomitszych dotychczas doświadczeń, zaczynała już równoważyć naukowe znaczenie słów Navier'a; gdy w ostatnich czasach kwestya ta stała się przedmiotem nowych poszukiwań teoretycznych i praktycznych. Pan Bazin, współpracownik Henryka Darcy, a po jego śmierci sam prowadzący dalej te ważne prace, doszedł do wyników zupełnie odmiennych, a bardziej zbliżonych do przypuszczenia Navier'a ([26]); w przedmiocie zaś tarcia, nierozwijając zresztą swej teoryi, wyrzekł zdanie, że wzajemne działanie dwóch strug sąsiednich zależy nietylko od ich prędkości względnej, ale i od ich prędkości bezwzględnej. Jakkolwiek ten wpływ na natężenie tarcia, prędkości bezwzglednej dwóch strug sąsiednich, to jest prędkości względem ścian rury uważanych za stałe, nie zgadza się z przyjmowanem powszechnie pojęciem,

([25]) Rozprawa ta wyszła także w osobnym oddruku, pod tytułem: *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, par Henry Darcy, Inspecteur général des ponts et chaussées*. Paris chez Mallet-Bachelier 1857.

([26]) Darcy et Bazin. *Recherches hydrauliques. Première partie. Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts*. str. 29 i 30.

że działanie wzajemne dwóch ciał zależy wyłącznie od ich ruchu względnego, skoro ich skład, natura i stan fizyczny, pozostają też same; to jednak prawdopodobniejszy jest on zawsze niż wpływ promienia rury, wprowadzonego w wyrażenie tarcia przez p. Darcy. Nadto, doświadczenia p. Bazin nad biegiem wody w kanałach, wykazały niepodobieństwo uznanej przez p. Darcy proporcyonalności tarcia do kwadratu z prędkości względnej, a dały wypadki więcej zbliżone do przypuszczenia Navier'a. Jak mówi p. Bazin :

« Kwestya komplikuje się i zaciemnia coraz bardziej, w miarę pojawiania się nowych doświadczeń, liczniejszych i dokładniejszych, któreby winny na nią rzucić tem większe światło. Co wnosić z tych wypadków, tak różnych i pozornie sprzecznych, jeżeli nie to, że nie posiadamy jeszcze pojęć zdrowych o wewnętrznych ruchach płynów i o wzajemnych działaniach ich cząsteczek? Być może, że ta część tak delikatna umiejętności, ma jeszcze długi czas pozostać pod panowaniem empiryzmu. »

9. To też z prawdziwem zajęciem przyjmowane są wszystkie nowe prace, tyczące się tej części Hydrauliki; a jeżeli żadna z nich nierozwiązała dotychczas w zupełności zadania ruchu prostolinijnego cieczy, są jednak takie, które się rzeczywiście odznaczają, tak swą metodą, jak i ostatecznemi wynikami, mającemi na celu podanie wzorów ścisłych i prostych, za podstawę w rachunkach praktycznych służyć mogących. W rzędzie tych prac, na pierwszem miejscu stoją poszukiwania teoretyczne pana Maurycego Lévy, Inżyniera dróg i mostów (du Corps des Ponts et Chaussées de France). W roku 1866, ubiegając się o stopień doktora umiejętności na uniwersytecie paryzkim, ogłosił p. Lévy drukiem dwie tezy, z których pierwsza z mechaniki praktycznej ma tytuł :

Essai théorique et appliqué sur le mouvement des liquides ([27]).

W tezie tej stosując metody, z których pomocą Lamé i Cauchy utworzyli matematyczną teoryą sprężystości, podał p. Lévy teoryą prostolinijnego biegu cieczy i ogólne równania ruchu płynów naturalnych. Ogłosił następnie w *Annales des Ponts et Chaussées* (2me livraison, 1867) rozprawę pod tytułem :

Théorie d'un courant liquide à filets rectilignes et parallèles, de forme transversale quelconque. Application aux tuyaux de conduite ([28]),

w której teoryą prostolinijnego biegu cieczy zastosował do rur wodociągowych i podał wzory praktyczne. Wreszcie uporządkowawszy wszystkie swe poszukiwania i uzupełniwszy zastosowaniem do biegu wody w kanałach, przesłał p. Lévy w r. 1867 paryzkiej Akademii umiejętności, swą pracę :

Sur l'Hydrodynamique des liquides homogènes, et en particulier sur l'écoulement rectiligne et permanent,

w której nie robiąc już żadnego szczegółowego przypuszczenia co do funkcyi tarcia, przypuszcza tylko, że składowe wzdłuż trzech osi prostokątnych w przestrzeni, działań ponoszonych przez ściany elementarnego równoległościanu, są rozwijalne w szeregi zawierające w pierwszym stopniu wszystkie pochodne składowych prędkości względem współrzędnych i wyraża warunek konieczny aby te szeregi zachowały też same współczynniki, przy jakiejkolwiek zmianie układu współrzędnych. Liczba współczynników nieoznaczonych wprowadzonych w rachunek, pozwala ustalić zgodę między wzorami, a wypadkami obserwacyj. Akademia, na wniosek komissyi złożonej z panów : Combes, Serret,

([27]) Tezy te ogłoszone zostały drukiem pod tytułem : *Thèses présentées à la Faculté des sciences, par M. Maurice Lévy, Ingénieur des ponts et chaussées, ancien répétiteur suppléant de mécanique à l'Ecole polytechnique*. Paris, chez Gautier-Villars. 1876.

([28]) Rozprawa ta wyszła także w osobnym oddruku, pod tym samym tytułem. Paris, chez Dunod 1867.

Bonnet, Philips i de Saint-Venant, i na podstawie raportu, jaki ten ostatni przedstawił ([29]), uznała tę rozprawę godną zamieszczenia w *Mémoires des Savants Étrangers*.

Pan Lévy podał w swych dwóch pierwszych pracach całą teoryą prostolinijnego biegu cieczy, wychodząc z tej powszechnie przyjętej zasady, że tarcie istniejące między różnemi częściami cieczy w skutku ich ruchu, nie zależy od ciśnienia. Co do wyrażenia tarcia w funkcyi prędkości względnej, nie zrobił *a priori* żadnego przypuszczenia; przyjął nawet razem z p. Bazin, że tarcie zależy także od prędkości bezwzględnej strug; i dopiero, porównawszy wzory do jakich doszedł, z wypadkami doświadczeń, znalazł *a posteriori* wyrażenie tej siły. W końcu wyprowadził wzory na bieg cieczy w rurach, bardzo dogodne w użyciu i ułożył krótką tablicę ułatwiającą ich zastosowanie. Niezaprzeczona cecha oryginalności, jaką noszą poszukiwania teoretyczne p. Lévy, a oraz praktyczne ich rezultaty, skłoniły nas do szczegółowego ich rozebrania. Pominąwszy równania ogólne ruchu płynów naturalnych, podajemy tu całą teoryą prostolinijnego biegu cieczy i jej zastosowania do biegu wody w rurach, roztrząsając i objaśniając na każdym kroku, i zamykając każdy z trzech rozdziałów, na jakie podzieliliśmy prace p. Lévy, krytycznemi uwagami. Trzecia rozprawa p. Lévy, przedstawiona Akademii, niezostała jeszcze ogłoszoną drukiem; posiłkowaliśmy się zatem li tylko dwiema pierwszemi, a zwłaszcza drugą, podaną w Rocznikach Dróg i Mostów, i zawierającą w skróceniu całą teoryą, a szeroko opracowane praktyczne jej zastosowania.

I

Własności ogólne prądu cieczy, złożonego z strug prostolinijnych i równoległych, którego przecięcie poprzeczne jest jakiekolwiek.

10. *Równowaga którejkolwiek części płynu.* Weźmy pod uwagę prąd cieczy, złożony ze strug prostolinijnych i równoległych, którego przecięcie poprzeczne jest jakiekolwiek, skończone lub nie, krzywolinijne lub wielokątne. Dla wszystkich cząsteczek tego prądu, znane równanie Hydrodynamiki :

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\,,$$

w którem, w przypadku biegu prostolinijnego wzdłuż osi x, mamy:

$$v=0\,,\quad w=0,$$

a zatem :

$$\frac{dv}{dy}=0\,,\qquad \frac{dw}{dz}=0\,,$$

daje :

$$\frac{du}{dx}=0\,,$$

czyli :

$$u = \text{ilości stałej.}$$

Każda zatem cząsteczka prądu bieży z prędkością stałą, i na mocy twierdzenia d'Alembert'a, siły

([29]) *Comptes rendus* 1869. Tom 68, str. 582.

zewnętrzne, działające na którąkolwiek część płynu, wzajemnie się równoważą. Summa rzutów tych sił na oś jakąkolwiek i summa ich momentów względem jakiejkolwiek osi, są równe zeru. Siły te są :

1) siła ciężkości, działająca na wszystkie cząsteczki uważanej części płynu;

2) ciśnienia normalne i tarcie działające tylko na jej powierzchni.

Wskazane wyżej warunki równowagi, zastosować można do jakiejkolwiek figury wziętej wewnątrz cieczy, i zwykle w mechanice analitycznej stosuje się je do elementarnego równoległościanu. Pan Lévy, idąc w tym względzie za p. Lamé, który w swych *Lekcyach o sprężystości ciał stałych* (30) wykazał cały pożytek uważania w tych okolicznościach czworościanu elementarnego, bierze pod uwagę graniastosłup trójkątny, będący szczególnym przypadkiem czworościanu, i dochodzi tym sposobem do oznaczenia kształtu funkcyi, przedstawiającej tarcie dwóch strug sąsiednich.

11. *Tarcie na elemencie płaskim, równoległym do kierunku biegu.* Skoro ciecz jest w spoczynku, każdy element powierzchni uważany wewnątrz cieczy, ponosi same tylko ciśnienia normalne. Lecz gdy ciecz wprawiona zostaje w ruch, każdy element powierzchni wewnątrz niej wzięty, ponosić będzie oprócz ciśnienia normalnego, pewne działanie w kierunku płaszczyzny stycznej do uważanego elementu, które nazwaliśmy (ustęp, n. 2) działaniem stycznem (action tangentielle) czyli tarciem. Co do wielkości i kierunku tej nowej siły, skoro element uważany jest jakikolwiek, nie mamy żadnej wskazówki; ale jeżeli ten element jest równoległy do kierunku prądu, to wiadomo, że tarcie ma kierunek wprost przeciwny kierunkowi prędkości, a nadto jest niezależne od ciśnienia. Uważa zatem p. Lévy, że nie może ono zależeć, jak tylko od prędkości bezwzględnej (absolue) cząsteczki wziętej na uważanym elemencie płaskim i od prędkości względnej dwóch cząsteczek wziętych na normalnej do uważanego elementu, każda z jednej strony jego powierzchni. Nazwawszy zatem :

V, prędkość płynu,

dV, przyrost tej prędkości, odpowiadający przyrostowi dn normalnej do uważanego elementu,

T wartość tarcia odniesionego do jednostki powierzchni,

będziemy mieli :

$$T=\varphi\left(V,\ \frac{dV}{dn}\right),$$

gdzie φ jest funkcyą nieznaną.

W celu dojścia do pewnych wskazówek, tyczących się tej funkcyi nieznanej, przypuśćmy że uważany element płaski obraca się około prostej przedstawiającej prędkość, i może około niej przybierać różne położenia. Weźmy trzy osie współrzędnych prostokątnych, z których jedna x jest równoległa do kierunku prądu, a dwie pozostałe y i z, prostopadłe względem pierwszej i względem siebie a zresztą jakkolwiek położone na przecięciu poprzecznem prądu. Uważmy następnie graniastosłup trójkątny, którego trzy krawędzie są równoległe do osi x, czyli do kierunku prądu i mają długości równe dx, którego dwie ściany są równoległe do osi y i z, a trzecia jakkolwiekbądź położona względem dwóch poprzednich. Wyraźmy wreszcie, że summa rzutów na oś x, wszystkich sił działających na ten graniastosłup, jest równa zeru.

Z pomiędzy tych sił mamy naprzód tarcia na trzech ścianach bocznych, rzucające się na oś x w pra-

(30) Lamé : *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* 1re éd. 1852.

wdziwej swej wielkości i dające następującą summę rzutów :

$$T\omega + T_1\omega_1 + T_2\omega_2.$$

T, T_1, i T_2 są odpowiednie wartości sił tarcia, odniesionych do jednostki powierzchni, a działających na ścianę pochyloną i na ściany równoległe do osi y i z; ω, ω_1, ω_2, powierzchnie tych ścian. Oprócz powyższych, inne siły nie wejdą w równanie równowagi, gdyż rzuty ciśnień na ściany boczne graniastosłupa są równe zeru, a rzecz się ma tak samo i z tarciem na podstawach graniastosłupa. Tarcie to istnieje, jak zaraz zobaczymy, jakkolwiek te podstawy są prostopadłe do kierunku prądu.

Co do ciśnień ponoszonych przez podstawy, to ich różnica jest nieskończenie małą trzeciego rzędu i może być pominiętą w obec sił tarcia, nieskończenie małych rzędu drugiego. Tak samo rzecz się ma z ciężarem graniastosłupa. Równanie równowagi będzie zatem :

$$T\omega - T_1\omega_1 - T_2\omega_2 = 0.$$

W równaniu tem powierzchnie ω_1 i ω_2 są rzutami powierzchni ω na płaszczyzny współrzędnych xy i xz. Nazwawszy przeto β i γ dostawy kątów, jakie normalna do ściany pochylonej ω czyni z osiami y i z, będziemy mieli :

$$\omega_1 = \gamma\omega, \qquad \omega_2 = \beta\omega,$$

a równanie poprzednie, podzielone przez ω, przybierze kształt :

$$T = \gamma T_1 + \beta T_2.$$

Taki jest związek, dający tarcie T na którymkolwiek elemencie płaskim, równoległym do kierunku prądu, skoro tarcia na dwóch podobnych elementach, względem siebie prostopadłych, są znane.

12. *Kształt funkcyi tarcia.* W równanie :

$$T = \gamma T_1 + \beta T_2,$$

wstawiwszy wartości :

$$T = \varphi\left(V, \frac{dV}{dn}\right), \quad T_1 = \varphi\left(V, \frac{dV}{dz}\right), \quad T_2 = \varphi\left(V, \frac{dV}{dy}\right),$$

i pamiętając że rachunek różniczkowy daje :

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dn} = \frac{dV}{dy}\beta + \frac{dV}{dz}\gamma,$$

zkąd :

$$T = \varphi\left(V, \frac{dV}{dy}\beta + \frac{dV}{dz}\gamma\right),$$

otrzymamy :

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dy}\beta + \frac{dV}{dz}\gamma\right) = \beta\varphi\left(V, \frac{dV}{dy}\right) + \gamma\varphi\left(V, \frac{dV}{dz}\right),$$

związek, który powinien mieć miejsce dla wszystkich wartości, jakie nadamy dostawom β i γ. Żeby tak było, trzeba aby funkcya φ miała kształt:

$$\varphi\left(\mathrm{V},\ \frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)=\psi(\mathrm{V}).\frac{d\mathrm{V}}{dn}.$$

Tym sposobem dochodzi p. Lévy do następującego wyrażenia tarcia :

$$\mathrm{T}=\mathrm{A}\frac{d\mathrm{V}}{dn},$$

w którem A jest funkcyą jakąkolwiek prędkości V.

Przypuszczając że A jest stałe, przejdziemy do przypuszczenia jakie zrobił Navier. Ale w żadnym razie wyrażenie p. Lévy nie może się zgodzić z wyrażeniem, jakie podał p. Darcy :

$$\mathrm{T}=\mathrm{K}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)^2,$$

które też niezyskało uznania ani p. Bazin, ani innych uczonych Hydraulików francuzkich.

13. *Tarcie na elemencie płaskim, prostopadłym do kierunku biegu.* Pan Lévy uważa następnie równowagę elementarnego równoległościanu, którego krawędzie : dx, dy, dz, są równoległe do trzech osi współrzędnych prostokątnych w przestrzeni i bierze, idąc za śladem p. Lamé, summę momentów wszystkich sił działających na ten równoległościan, względem prostej przechodzącej przez jego środek i równoległej do jednej z osi, naprzykład do osi y. Ciśnienia normalne i ciężar równoległościanu, jako spotykające oś, dadzą momenty równe zeru. Tak samo rzecz się ma i z tarciem na dwóch ścianach, prostopadłych do osi y. Tarcia na ścianach równoległych do płaszczyzny xy są :

$$\mathrm{T}_1 dx\,dy \quad \text{i} \quad \left(\mathrm{T}_1+\frac{d\mathrm{T}_1}{dz}dz\right)dx\,dy.$$

Summa ich momentów, opuszczając nieskończenie małe czwartego rzędu, w obec nieskończenie małych rzędu trzeciego, będzie:

$$\mathrm{T}_1 dx\,dy\,dz.$$

Potrzeba aby ten moment był zrównoważony; a nie może być inaczej jak tylko wtedy, jeżeli istnieje tarcie albo działanie styczne na ścianach równoległych do yz, to jest prostopadłych do kierunku prądu cieczy, który, jak poprzednio przypuszczamy, zchodzi się z osią x. Jeżeli T′ jest składową tego działania, równoległą do osi z, to ta składowa da, tak samo jak poprzednia, na dwóch ścianach równoległych do yz, summę momentów równą:

$$\mathrm{T}'dx\,dy\,dz.$$

Musi być zatem :

$$\mathrm{T}'=\mathrm{T}_1,$$

równanie, które p. Lévy wyraża jak następuje :

Skoro dwa elementy płaskie są względem siebie prostopadłe, jakiekolwiek byłoby zresztą ich położenie wewnątrz cieczy, składowe tarć mających miejsce na tych elementach, prostopadłe do ich wspólnego przecięcia, są sobie równe.

Tak samo, biorąc momenty względem osi z, doszlibyśmy do wykazania istnienia składowej, równoległej do y, tarcia na elemencie prostopadłym do osi x, i otrzymalibyśmy też składową, równą T_2.

Tym sposobem dowodzi p. Lévy, że tarcie w kierunku równoległym do kierunku prądu nie może istnieć, bez współczesnego istnienia tarcia w kierunku prostopadłym; i dodaje, że samo istnienie tej siły stycznej, między dwiema po sobie następującemi cząsteczkami jednej strugi, jakkolwiek posiadającemi jednakową prędkość, pozwala przewidywać, że tarcie cieczy nie powinno zależeć li tylko od prędkości względnej różnych ich części, ale i od ich prędkości bezwzględnej.

14. *Wykreślenie dające tarcie na elemencie płaskim równoległym lub prostopadłym do kierunku prądu.* Oznaczmy przez τ tarcie na elemencie płaskim prostopadłym do kierunku prądu. Z tego co powyżej powiedzieliśmy wypada, że to tarcie jest co do wielkości wypadkową tarć T_1 i T_2, i ażeby je otrzymać co do wielkości i kierunku, dość jest odciąć tarcie T_1 mające miejsce na elemencie płaskim równoległym do płazczyzny xy, na normalnej do tej płazczyzny; zrobić następnie toż samo z tarciem T_2, mającem miejsce na elemencie płaskim równoległym do xz, i wziąść wypadkową tych dwóch sił.

Że zaś płazczyzny xy i xz są dowolne, zrobić można toż samo wykreślenie dla dwóch innych elementów płaskich, jakichkolwiek a tylko względem siebie prostopadłych. Otrzyma się tym sposobem dwie siły T_1' i T_2', których wypadkową będzie również τ. Każda zatem z tych sił jest rzutem τ na swój kierunek. Wywodzi ztąd p. Lévy twierdzenie następujące:

Uważając różne elementy płaskie równoległe do kierunku prądu i przechodzące przez punkt O, i odcinając, począwszy od tego punktu, na normalnych do uważanych elementów, długości proporcyonalne do tarcia, jakie każdy z nich ponosi; to miejsce geometryczne punktów tym sposobem otrzymanych będzie okręgiem koła, przechodzącym przez punkt O. Średnica tego okręgu koła przechodząca przez punkt O, przedstawi, co do wielkości i kierunku, tarcie ponoszone przez element płaski przez ten punkt przechodzący, a prostopadły do kierunku prądu.

Tak więc, skoro tarcia ponoszone przez dwa elementy płaskie równoległe do kierunku prądu są znane, znaleźć można tarcia mające miejsce na wszystkich innych podobnych elementach, i na elemencie położonym na przecięciu poprzecznem prądu.

15. *Walce największego tarcia.* Tarcie mające miejsce na którymkolwiek elemencie płaskim, równoległym do kierunku prądu, jest promieniem wodzącym okręgu koła, którego płazczyzna jest prostopadłą do tego elementu. Element zatem, styczny do okręgu, ponosi tarcie największe, przedstawione przez średnicę koła i równe tarciu mającemu miejsce na elemencie prostopadłym do kierunku prądu.

Tym sposobem, przez każdy punkt przecięcia poprzecznego prądu, przechodzi jeden element płaski, oznaczonego położenia, ponoszący tarcie większe niż wszystkie inne elementy przez ten punkt przechodzące. Ogół podobnych elementów ponoszących tarcie największe, utworzy pewien szereg krzywych na całem przecięciu poprzecznem prądu; a że rzecz się ma w ten sam sposób na wszystkich innych przecięciach poprzecznych, zatem można podzielić przestrzeń zajmowaną przez ciecz w jej biegu, nieskończoną liczbą powierzchni walcowych, z których każda posiadać będzie w każdym swym punkcie własność ponoszenia tarcia większego, niż tarcie ponoszone przez którykolwiek element, niepołożony na tej powierzchni, a przez ten punkt przechodzący. Walce te nazywa p. Lévy *walcami największego tarcia* (cylindres à frottement maximum).

16. *Walce bez tarcia.* Jeżeli przeciwnie weźmiemy pod uwagę element płaski, przez punkt O przechodzący i normalny do okręgu koła, to promień wodzący do tego elementu prostopadły, a przedstawiający tarcie przez ten element ponoszone, jest równy zeru. Wszystkie elementy podobne utworzą nowy szereg walców, nieponoszących żadnego działania stycznego, a tylko działania normalne, jak gdyby ciecz posiadała własność płynności doskonałej. Walce te nazywa p. Lévy *walcami bez tarcia* (cylindres à frottement nul).

Jak widzimy, walce największego tarcia i walce bez tarcia przecinają się wszędzie pod kątem prostym.

17. *Położenie dwóch grupp walców.* Zobaczmy teraz jak są położone wewnątrz massy cieczy te dwie gruppy walców. Według wyrażenia tarcia, podanego w ustępie n. 12, walce bez tarcia określone są równaniem :

$$\frac{dV}{dn}=0,$$

które wyraża także że normalnie do tych walców prędkość jest stała, czyli że te walce i walce określone równaniem:

$$V = \text{ilości stałej},$$

przecinają się wszędzie pod kątem prostym. Że zaś pierwsze są walcami bez tarcia, zatem drugie są walcami największego tarcia. Tym sposobem otrzymuje p. Lévy twierdzenie :

Walce największego tarcia mają za kierownice krzywe równej prędkości, uważane na przecięciach poprzecznych prądu; a walce bez tarcia mają za kierownice drogi przebieżone przez te krzywe w kierunku prądu, to jest prostopadłe do ich płaszczyzn.

W rurach kołowych prostych, pierwszą gruppę walców stanowią walce współśrodkowe z powierzchnią wewnętrzną rury, a drugą płaszczyzny przechodzące przez oś rury. Tym sposobem istnienie tych dwóch grupp powierzchni, poprzednio przyjęte bez dowodzenia dla rur kołowych, wyprowadzone zostaje analitycznie przez p. Lévy, dla prądu którego przecięcie poprzeczne jest jakiekolwiek.

18. *Tarcie na elemencie jakkolwiek położonym.* Tarcie to otrzymuje p. Lévy, stosując wprost do cieczy rozumowania podane przez p. Lamé, w jego dziele o sprężystości ciał stałych.

Oto są wypadki tych rozumowań :

Wziąwszy wszystkie możliwe elementy płaskie, przez jeden punkt przechodzące, i przedstawiwszy dla każdego z nich, przez prostą przez tenże punkt przechodzącą, wielkość i kierunek całkowitego działania przez element ponoszonego, to jest wielkość i kierunek wypadkowej działań : stycznego i normalnego, czyli tarcia i ciśnienia; to miejscem geometrycznem punktów tym sposobem otrzymanych, to jest końców wszystkich tych prostych, będzie elipsoida, którą p. Lamé nazywa *elipsoidą sprężystości.* P. Lévy, stosując ją do płynów naturalnych, nazywa ją *elipsoidą lepkości* (ellipsoide de viscosité). W przypadku płynów doskonałych, elipsoida ta sprowadza się do kuli, i tym sposobem dochodzimy do zasady równości ciśnień we wszystkich kierunkach w około jednego punktu płynu, zasady wyprowadzonej w Hydrostatyce.

Jeżeli A, B, C, są osie tej elipsoidy, jej równanie odniesione do osi będzie :

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1. \tag{1}$$

Uważmy teraz inną powierzchnią drugiego stopnia, której płaszczyzny główne zchodzą się z płaszczyznami głównemi elipsoidy (1), a której równanie jest :

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z}{C} = \pm K. \tag{2}$$

Kierunek całkowitego działania, ponoszonego przez którykolwiek element płaski, jest jak widzimy sprzężony w tej ostatniej powierzchni, z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek, i ten element płaski na sobie zawierającą. Wielkość zaś tego działania jest przedstawiona odległością od środka punktu, w którym kierunek działania przecina powierzchnię elipsoidy (1).

Tym sposobem, uważanie dwóch powierzchni drugiego stopnia, których równania napisaliśmy co dopiero, daje jasne pojęcie rozkładu działań w około jednego punktu; gdyż pierwsza powierzchnia daje wielkość a druga kierunek działania, ponoszonego przez którykolwiek element płaski.

19. *Potrójny system powierzchni bez tarcia przecinających się wszędzie pod kątem prostym.* Z powyższego wynika, że elementy płaskie skierowane wzdłuż wspólnych płaszczyzn głównych, dwóch powierzchni drugiego rzędu w poprzednim ustępie uważanych, ponoszą same tylko ciśnienia normalne. Ogół tych elementów, uważanych we wszystkich punktach przestrzeni jaką ciecz zajmuje, tworzy trzy gruppy powierzchni, przecinających się wszędzie pod kątem prostym, i posiadających własność nie ponoszenia żadnego działania stycznego. Ponoszą one tylko ciśnienia normalne, tak jakby ciecz posiadała własność płynności doskonałej; z tą tylko różnicą, że w tym ostatnim przypadku, trzy elementy płaskie, względem siebie prostopadłe i przechodzące przez którykolwiek punkt cieczy, ponosiłyby ciśnienia równe; gdy tymczasem tutaj, elementy te ponoszą ciśnienia przedstawione, co do wielkości i kierunku, przez trzy osie elipsoidy lepkości, osie w ogóle nie równe. Istnieją wszakże punkty, dla których dwie z tych osi są równe, a wszystkie te punkty położone są na jednej powierzchni. Podobnie istnieją punkty, dla których wszystkie trzy osie są równe, a punkty te tworzą linią. Na tej linii, rozkład działań ma miejsce w taki sposób, jakby płyn był doskonały, gdyż elipsoida lepkości sprowadza się do kuli, a ciśnienia są normalne i równe dla wszystkich elementów płaskich bez wyjątku, jakie uważać można na tej linii.

P. Lévy zwraca uwagę, że wszystkie te prawdy, wyciągnięte z dzieła P. Lamé, są matematyczne, nie opierają się na żadnem przypuszczeniu, i istnieją, jakimkolwiekbądź ruchem ożywione są ciecze, i jakiekolwiek mamy pojęcie o wzajemnem działaniu cząsteczek, w ich skład wchodzących. Samo jednak zastosowanie zasad sprężystości ciał stałych do cieczy, zdaje nam się już w pewnym względzie przypuszczeniem. Ale to nie ujmuje wartości teoryi p. Lévy, która, jak zobaczymy niżej, wypadki doświadczeń w zadowalniający sposób tłumaczy.

Z trzech grupp powierzchni o których mówimy, znamy już jednę, to jest gruppę walców, przecinających pod kątem prostym walce równej prędkości. Zatem dwie pozostałe gruppy winny być złożone :

1°) z samychże walców równej prędkości,

2°) z przecięć poprzecznych prądu.

Ale widzieliśmy (ustępy, nº 14 i 15), że właśnie wzdłuż tych walców i ich przecięć poprzecznych, ma miejsce największość tarcia, oznaczona poprzednio przez τ. Ta ilość τ nie może być równą zeru, jak tylko wtedy, gdy wszystkie strugi biegną z jednakową prędkością, (przypadek niemający nigdy miejsca w cieczach naturalnych), albo gdy w wyrażeniu tarcia (ustęp nº 12), współczynnik :

$$A = 0,$$

to jest gdy tarcie zupełnie nie ma miejsca.

20. *Równo-odległość krzywych równej prędkości.* Z poprzedniego zdawałoby się, że tylko płyny doskonałe mogą się poruszać wzdłuż linij prostych i równoległych, i z prędkościami zmiennemi od jednej linii do drugiej; gdyż w płynach lepkich, przypuszczenie podobnego ruchu doprowadziłoby do zaprzeczenia potrójnego systemu powierzchni bez tarcia, przecinających się wszędzie pod kątem prostym, a których istnienie uważa p. Lévy za dowiedzione dla wszystkich prądów. To też p. Lévy dowodzi zaraz, że jest taki przypadek, w którym podobny system powierzchni może istnieć; że ten przypadek ma miejsce wtedy, skoro walce normalne do walców równej prędkości są płaszczyznami, albo co na jedno wychodzi, skoro walce równej prędkości są we wszystkich swych punktach równo od siebie odległe. Wynika ztąd, że ruch strugami równoległemi nie jest niepodobny, że może istnieć, a nadto że skoro ten ruch ma miejsce, jedną z ciekawych jego własności ogólnych jest, że krzywe równej prędkości są we wszystkich punktach równo od siebie odległe, to jest mają wspólną rozwiniętą.

Ażeby usprawiedliwić ten wniosek, że skoro walce normalne do walców równej prędkości i wzdłuż których tarcie nie ma miejsca są płaszczyznami, można znaleźć dwie inne gruppy powierzchni bez tarcia, które te płaszczyzny przecinają pod kątym prostym, uważa naprzód p. Lévy, że mając pewną gruppę płaszczyzn, można znaleźć nieskończoność grupp powierzchni, które z temi płaszczyznami tworzą system potrójnie ortogonalny. Aby otrzymać którąkolwiek z tych grupp, dość jest na jednej z tych płaszczyzn nakreślić jakikolwiek szereg krzywych i ich dróg ortogonalnych, a następnie wyobrazić sobie że ta płaszczyzna toczy się po powierzchni obwijającej uważany system płaszczyzn. Wtedy bowiem dwa systemy krzywych zrodzą dwie gruppy powierzchni, przecinających się wszędzie pod kątem prostym, jedne z drugiemi i obie z gruppą płaszczyzn uważanych. Stawia zatem p. Lévy twierdzenie następujące :

Między wszystkimi systemami powierzchni ortogonalnych, tym sposobem otrzymanych, znajdzie się jeden taki, którego powierzchnie posiadać będą wszystkie żądaną własność ponoszenia samych tylko ciśnień normalnych,

i dowodzi je, biorąc pod uwagę powierzchnie drugiego stopnia (1) i (2), o których była mowa w ustępie nº 18.

W którymkolwiek punkcie M, jedną z płaszczyzn głównych powierzchni (1) i (2), jest płaszczyzna MN normalna do krzywej równej prędkości vv', przez ten punkt przechodzącej. Wynika ztąd że działania całkowite, wypadkowe działań stycznych i normalnych czyli tarć i ciśnień, mające miejsce na różnych elementach powierzchni prostopadłych do płaszczyzny MN, są wszystkie położone na tej płaszczyźnie. Miejscem geometrycznem końców tych sił, jest przecięcie główne, wzdłuż którego płaszczyzna MN przecina elipsoidę (1). Uważając w szczególe dwa elementy płaskie, skierowane wzdłuż osi tego głównego przecięcia, elementy te ponoszą tylko ciśnienia normalne. Biorąc je od punktu do punktu na całej przestrzeni płaszczyzny MN, otrzymamy dwa systemy linij, względem siebie prostopadłych, a będących rodzącemi dwóch grupp powierzchni sprzężonych z płaszczyzną MN, o które właśnie nam chodzi. Ażeby te powierzchnie spotkały rzeczywiście wszystkie płaszczyzny MN pod kątem prostym, trzeba aby przecięcia powierzchni przez płaszczyzny, tworzyły szereg krzywych identycznych. Że zaś te krzywe są z określenia obwijającemi osi przecięcia głównego, jakie uważaliśmy w elipsoidzie (1), przeto kierunek tych osi nie powinien się zmieniać, jak tylko od jednego punktu do drugiego na płaszczyźnie MN, a ma być niezmiennym skoro przechodzimy od jednej z tych płaszczyzn do drugiej, to jest wzdłuż jednej krzywej równej prędkości vv'. W celu dowiedzenia, że ten warunek jest wypełniony, nakreślmy na którejkolwiek z tych płaszczyzn dwie osie prostokątne : Ox, Oy, z których jedna Ox skierowana jest w kierunku prądu, i rzućmy na te osie siły działające na graniastosłup aMc, którego krawędzie są normalne do płaszczyzny MN, a którego trzy ściany boczne są Ma i Mc, równoległe do osi Ox i Oy, a ac do tych osi pochylona.

Rzuty ciśnień normalnych, działających na podstawę graniastosłupa, są równe zeru. Podstawy te zresztą ponoszą tylko tarcia nieskończenie małe trzeciego rzędu, gdyż są one nieskończenie blizkie płaszczyzny bez tarcia MN. Wszystkie siły działające na ściany Ma, Mc i ac, jak to zauważyliśmy powyżej, położone są na tej płaszczyznie, a tarcia na każdej z dwóch ścian względem siebie prostopadłych Ma i Mc, są oba równe τ (ustęp n° 13). Nazwijmy p i p' ciśnienia normalne na ściany Ma i Mc, X i Y składowe siły całkowitej działającej na ac, odniesione do jednostki powierzchni, α i β dostawy kątów jakie ac czyni z osiami Ox i Oy.

Równania równowagi będą :

$$X = p\beta + \tau\alpha, \qquad Y = p_1\alpha + \tau\beta.$$

Elipsa, będąca miejscem geometrycznem końca całkowitego działania na element ac, odniesiona do osi Ma i Mc, ma za współrzędne X i Y, a jej równanie otrzymamy rugując zmienne α i β, między dwoma powyższemi równaniami i równaniem :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Wypadkiem rugowania będzie równanie :

$$(\tau^2 + p^2_1)\,X^2 + (\tau^2 + p^2)\,Y^2 - 2\tau(p + p_1)\,XY = (\tau^2 - pp_1)^2,$$

a jeżeli oznaczymy przez θ kąt jaki jedna z osi uważanej elipsy czyni z osią x, będziemy mieli :

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{2\tau}{p - p_1}.$$

Należy okazać, że kąt θ jest stały wzdłuż jednej powierzchni równej prędkości. A naprzód τ się nie zmienia wzdłuż podobnej powierzchni, gdyż tarcie zależy od prędkości bezwzględnej V i prędkości względnej $\frac{dV}{dn}$. Pierwsza jest stałą wzdłuż powierzchni równej prędkości, na mocy ich określenia ; a druga, stałą również, ponieważ te powierzchnie są równoległe we wszystkich punktach.

Co do różnicy $p - p_1$, to p. Lévy w swej Tezie wywodzi z wzorów, wyjętych z dzieła p. Lamé i zastosowanych do cieczy, że dla prądu prostolinijnego $p = p_1$. W tym przypadku :

$$\text{tang.}\,2\theta = \infty \quad \text{i} \quad \theta = 45^0.$$

Zatem trzy gruppy powierzchni bez tarcia są :

1) płaszczyzny normalne do krzywych równej prędkości ;

2) dwa systemy powierzchni rozwijalnych, utworzonych przez dwie proste, nakreślone na płaszczyznach normalnych do dwóch krzywych równej prędkości, opierające się na tych krzywych i nachylone pod kątem 45° z jednej i z drugiej strony przecięcia poprzecznego prądu.

W swym artykule w Rocznikach Dróg i Mostów rozumuje p. Lévy w sposób następujący. Różnica $p - p_1$ jest różną od zera, w przypadku płynów naturalnych w ruchu, gdyż wtedy elipsoida lepkości ma trzy osie różne. W przypadku płynów doskonałych, albo płynów naturalnych w spoczynku, elipsoida lepkości sprowadza się do kuli, i ciśnienia w około jednego punktu, są sobie równe. Mamy zatem $p - p_1 = 0$, skoro tarcie nie ma miejsca, albo skoro przy istnieniu tarcia ciecz jest w spoczynku. Pan Lévy wnosi ztąd, że ta różnica jest ilością tegoż samego rzędu co tarcie, wynikającą z tej samej przyczyny i zależącą, tak samo jak i tarcie, od prędkości bezwzględnej i względnej w każdym punkcie. Powinna zatem pozostać stałą wzdłuż powierzchni równej prędkości. Tak więc τ jest stałe, $p - p_1$ także stałe, zatem tang. 2θ jest stałe wzdłuż tych powierzchni. Ponieważ kierunek osi przecięcia głównego elipsoidy (1) jest stały, powierzchnie obu grupp uważanych poprzednio są prostopadłe do płazczyzn MN. Tym sposobem, powyżej postawione twierdzenie jest dowiedzione, i w cieczy w ruchu istnieją trzy gruppy powierzchni, przecinających się wszędzie pod kątem prostym i ponoszących same tylko ciśnienia normalne. Warunkiem istnienia tych powierzchni w prądzie, złożonym z strug prostolinijnych i równoległych, jest równo-odległość krzywych równej prędkości.

Skoro ten warunek jest wypełniony, system powierzchni potrójnie względem siebie normalnych może być znaleziony. Pan Lévy wnosi ztąd, że ruch cieczy strugami prostolinijnemi i równoległemi nie jest niepodobny, że może istnieć, jakkolwiek nie jest wtedy koniecznym. Innemi słowy, równo-odległość krzywych równej prędkości jest jego własnością ogólną, ale nie charakterystyczną.

21. Powyższa bardzo ciekawa własność prądu prostolinijnego cieczy, dowiedziona przez p. Lévy, sprawdza się mniej więcej doświadczeniem. Ma ona widocznie miejsce w rurach walcowych, gdzie prędkości rozkładają się symetrycznie względem osi rury. Płazczyzny przechodzące przez oś rury tworzą tam pierwszy z trzech systemów powierzchni bez tarcia. Dwa pozostałe złożone są z ostrokręgów obrotowych, których kąt przy wierzchołku jest równy 90°.

W rurach, których przecięcie jest prostokątne, równoległość krzywych równej prędkości sprawdzoną została mniej więcej doświadczeniami p. Bazin ([31]). P. Bazin poprowadził w prostokącie, stanowiącym przecięcie poprzeczne rury, pewną liczbę prostych poziomych i pionowych, i mierzył prędkości strug w punktach przecięć tych prostych. Rury doświadczane miały wymiary przecięć następujące :

pierwsza	$0^m,80$ na $0^m,50$,
druga	$0^m,48$ na $0^m,30$.

Zmierzywszy prędkości strug i wypisawszy je w punktach odpowiednich na rysunku przecięcia poprzecznego, oznaczył p. Bazin przez interpolacyą, na prostych wewnątrz prostokąta nakreślonych, punkty, w których strugi posiadają prędkości jednakie i równe :

w pierwszej rurze,	$1^m,2$, $1^m,1$, $1^m,0$, $0^m,9$, $0^m,8$,
w drugiej rurze,	$1^m,1$, $1^m,0$, $0^m,9$, $0^m,8$;

łącząc następnie krzywemi, punkty w których strugi posiadają jednaką prędkość, doszedł p. Bazin do nakreślenia krzywych równej prędkości.

Krzywe te zachowują mniej więcej formę prostokątów, których boki są równoległe do boków przecięcia poprzecznego rury, a tylko kąty są nieco zaokrąglone. Jeżeli nie są zupełnie regularne, tak jakby wymagała teorya p. Lévy, to znów nie należy zapominać, że ta teorya stosuje się do prądu ściśle prostolinijnego, gdy tymczasem biegi cieczy w naturze są zawsze mniej więcej nieregularne.

P. Bazin robił dalej doświadczenia nad biegiem wody w kanalikach prostokątnych, których przecięcia były równe połowom przecięć rur powyżej opisanych. Zdawałoby się, że krzywe równej

([31]) P. Bazin podał w swojem dziele : *Recherches expérimentales*, etc., rysunki tych krzywych, które p. Lévy do rozpraw swoich dołączył.

prędkości będą tu odpowiednio podobne i równe połowom krzywych, poprzednio opisanych; ale tak nie jest. W pobliżu powierzchni wolnej cieczy, krzywe równej prędkości przestają być równoległe do ścian kanaliku, zbliżają się ku środkowi i to tem więcej, im kanał jest szerszy. Ta nieregularność jednak potwierdza tylko to, co wyżej powiedzieliśmy, że ruch wody w rurach i kanalikach, nad którемi odbywały się doświadczenia, nie jest ściśle prostolinijny. Teorya p. Lévy, tem się więcej zbliża do wypadku doświadczeń, im ruch doświadczany w większe był ujęty karby i do tem większej zmuszony regularności. W rurach sprawdza się ona mniej więcej, w kanałach zaś odkrytych już tylko bardzo mało. Jeżeli tę teoryą, odnoszącą się do ruchu sciśle prostolinijnego, stosuje się do biegu cieczy w naturze, czyni się to tylko w przybliżeniu; a skoro wzory jakie ona daje, zgadzają się mniej więcej z wypadkami doświadczeń, wszytkie je w sobie obejmują i streszczają, teorya jest już zadowalniającą. To wszystko przedstawione zostanie w następnym rozdziale, gdzie zobaczymy nadto, że sam pan Lévy, stosując swą teoryą do biegu cieczy w rurach, dochodzi do wniosku że ruch nie jest tam ściśle prostolinijny i że wzory teoretycznie wywiedzione opatrzyć należy współczynnikiem poprawki, zależnym w każdym punkcie od strzałki, która mierzy zboczenie strugi od kierunku prostolinijnego w tym punkcie.

W ten sposób pojmujemy znaczenie poszukiwań teoretycznych p. Lévy i to jest, jak nam się zdaje, najsłuszniejszem ich ocenieniem. Prace te, zdając sprawę w sposób bardzo zadowalniający ze wszystkich zjawisk dostrzeganych przy biegu cieczy, pokazują że ruch strugami prostolinijnemi jest tylko przypuszczeniem, uproszczającem kwestyą i prowadzącem do pierwszego przybliżenia. Droga nadto do ściślejszych przybliżeń, jak to niżej zobaczymy, pozostaje otwartą. Podobny sąd wydał o tych pracach P. Collignon, w kursie litografowanym Hydrauliki, wydanym przez Szkołę Dróg i Mostów (32), gdzie także krótkie podał ich streszczenie. W dwa lata później ocenił je odmiennie i surowo w swej Hydraulice, zarzucając wiele rzeczy, które poprzednio w pewnym względzie za zalety poczytał (33).

II

Rozkład prędkości w prądzie złożonym ze strug prostolinijnych i równoległych.

Wzór na tarcie i jego sprawdzenie.

22. *Zasady główne.* Dowodzi się w Hydraulice, mówiąc o biegu wody w rurach i kanałach, że naprzód, ciśnienie, albo w przypadku rur *ciążenie*, zmniejsza się proporcyonalnie do drogi przebieżonej w kierunku prądu; a powtóre, że na jednem i temże samem przecięciu poprzecznem, ciśnienia rozkładają się według praw Hydrostatyki, czyli że w każdym którymkolwiek punkcie uważanego przecięcia, ciśnienie jest proporcyonalne do odległości tego punktu od pewnej stałej płaszczyzny poziomej. Te dwie propozycye są prawdziwe, ale ich dowodzenia opierają się zwykle na zasadzie równości ciśnień, zastosowanej do płynów lepkich, i na nieobecności działania stycznego na przecięciu poprzecznem prądu. Pan Lévy daje ich dowodzenie nieco ściślejsze, ale zawsze w gruncie do innych dowodzeń podobne.

Weźmy trzy osie współrzędnych prostokątnych, z których jedna x skierowana jest w kierunku prądu, druga y wzdłuż prostej poziomej nakreślonej na przecięciu poprzecznem prądu, a trzecia z wzdłuż prostej leżącej na tem przecięciu i mierzącej jego pochylenie względem płaszczyzny poziomej.

(32) *Ecole Impériale des Ponts et Chaussées. Cours d'Hydraulique* 1867-1868. Patrz na str. 162.

(33) *Cours de Mécanique appliquée aux constructions. 2me partie Hydraulique.* Paris 1870. Przypisek na str. 263.

Rzućmy na te osie siły działające na równoległościan nieskończenie mały dx, dy, dz. Tarcia na ścianach prostopadłych do x i do y są oznaczone jak poprzednio (ustęp nº 11) przez T_2 i T_1; wiadomo nadto że działanie styczne, mające miejsce na ścianie prostopadłej do x, ma za składową, wzdłuż osi y, T_2, a wzdłuż osi z, T_1. P. Lévy daje następującą tablicę wszystkich tych sił, działających na uważany równoległościan:

równolegle do x: $T_1, \; T_2, \; p,$

równolegle do y: $T_2, \; p, \; 0,$

równolegle do z: $T_1, \; 0, \; p.$

Należy do nich jeszcze dodać siłę ciężkości, której składowe, odniesione do jednostki massy, są wzdłuż osi x, y, z:

$$\Pi \cos j, \qquad 0, \qquad \Pi \sin j,$$

jeżeli nazwiemy Π ciężar jednostki objętości cieczy, a j nachylenie osi prądu względem poziomu.

Widzimy ztąd łatwo, że trzy równania rzutów będą:

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{na oś } x: & \dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dT_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} = \Pi \cos j, \\ \text{na oś } y: & \dfrac{dp}{dy} = 0, \\ \text{na oś } z: & \dfrac{dp}{dz} = \Pi \sin j. \end{array}\right.$$

Że w dwa ostatnie tarcie nie wchodzi, to dla tego że to tarcie, zależąc wyłącznie od prędkości bezwzględnej i względnej, nie zmienia się od jednego przecięcia do drugiego, i mamy:

$$(b)\qquad \frac{dT_2}{dx} = 0, \qquad \frac{dT_1}{dx} = 0.$$

Z pierwszego z równań (a) widzimy, że wszystkie jego wyrazy, oprócz $\dfrac{dp}{dx}$, są niezależne od x; zatem i ten wyraz $\dfrac{dp}{dx}$ nie zależy od x, i ciśnienie zmniejsza się proporcyonalnie do drogi przebieżonej.

Dwa pozostałe równania (a) pokazują, że na przecięciu poprzecznem prądu, rozkład ciśnień ma miejsce według praw Hydrostatyki. Tarcie nie staje temu na przeszkodzie z powodu dwóch równań (b).

23. *Równanie różniczkowe dające prędkość w którymkolwiek punkcie cieczy.* W celu otrzymania tego równania, wyraża p. Lévy równowagę walca prostego jakiejkolwiek długości l, wziętego wewnątrz massy płynnej, a którego podstawą jest krzywa równej prędkości. Wzdłuż powierzchni tego walca, V i $\dfrac{dV}{dn}$ są stałe, z powodu równej odległości wszystkich podobnych powierzchni, a zatem i tarcie będzie także stałe. Tarcie na jednostce powierzchni oznaczyliśmy przez τ, zatem tarcie całkowite będzie równe:

$$\tau s l,$$

jeżeli przez s oznaczymy długość obwodu krzywej równej prędkości, będącej podstawą walca. Niech będą p i p', ciśnienia normalne w środkach ciężkości powierzchni dwóch podstaw walca, powierzchni sobie równych, z których każdą nazwiemy ω. Na mocy drugiej z propozycyj dowiedzionych w poprzednim ustępie, mamy różnicę ciśnień na podstawach walca równą:

$$\omega(p'-p).$$

Wreszcie, ciężar walca, rzucony na jego oś, będzie :

$$\Pi\omega l\cos j,$$

gdzie j oznacza kąt, jaki oś prądu czyni z pionową.

Otrzymuje zatem p. Lévy równanie :

$$\tau s l+\omega(p'-p)+\Pi\omega s l\cos j=0,$$

albo :

$$\tau s l=\Pi\omega\left(\frac{p-p'}{\Pi}-l\cos j\right).$$

Oznaczmy przez z i z', wzniesienia środków ciężkości dwóch podstaw walca ponad stałą płaszczyzną poziomą, a będziemy mieli :

$$l\cos j=z-z',$$

i równanie poprzednie przybierze kształt :

$$\tau s l=\Pi\omega\left[\left(z'-\frac{p'}{\Pi}\right)-\left(z-\frac{p}{\Pi}\right)\right].$$

Różnica w nawiasie jest różnicą wysokości słupów piezometrycznych (ciśnieniomiernych), a na mocy pierwszej z dwóch zasad, dowiedzionych w poprzednim ustępie, stosunek tej różnicy, do długości l uważanego walca, jest stały. Kładąc zatem :

$$\frac{1}{l}\left[\left(z'-\frac{p'}{\mathrm{H}}\right)-\left(z-\frac{p}{\mathrm{H}}\right)\right]=i,$$

a nadto :

$$\frac{\omega}{s}=\rho,$$

otrzymamy :

$$\tau=\Pi\rho i. \tag{1}$$

Ilość ρ, będąca stosunkiem powierzchni do obwodu, którejkolwiek krzywej równej prędkości, a nazywana zwykle *promieniem średnim*, jest tu zmienna i stanowi *parametr* charakterystyczny krzywych równej prędkości, niejako *współrzędną* tych krzywych.

W równaniu (1), kładzie p. Lévy wartość na tarcie otrzymaną w ustępie nº 12, to jest :

$$\tau=\mathrm{A}\frac{d\mathrm{V}}{dn},$$

gdzie A jest funkcyą prędkości bezwzględnej V, i otrzymuje tym sposobem:

$$A\frac{dV}{dn}=\Pi\rho i, \tag{2}$$

równanie różniczkowe, wyznaczające prędkości V w którymkolwiek punkcie cieczy. dn oznacza w niem długość skierowaną wzdłuż normalnej do powierzchni równej prędkości, której parametr jest ρ.

24. *Całkowanie równania dającego prędkość*. Równanie (2) da się zcałkować, jakikolwiek będzie obwód przecięcia poprzecznego prądu, wielokątny lub krzywolinijny. W tym celu p. Lévy przekształca je w sposób następujący:

Jeżeli funkcya F(V), jest funkcyą taką, że jej pochodna:

$$\frac{dF(V)}{dV}=A,$$

mieć będziemy na mocy równania (2):

$$\frac{dF(V)}{dV}\cdot\frac{dV}{dn}=\Pi i\rho,$$

albo:

$$dF(V)=\Pi i\rho\, dn,$$

albo nakoniec:

$$F(V)-F(V_0)=\Pi i\int_{n_0}^{n}\rho\, dn, \tag{3}$$

gdzie n jest to odległość liczona na normalnej, między którąkolwiek krzywą prędkości V a krzywą stałą równej prędkości, a n_0 podobna odległość dla krzywej prędkości V_0; ρ, promień średni, równy stosunkowi $\frac{\omega}{s}$ powierzchni do obwodu którejkolwiek krzywej równej prędkości, jest funkcyą n. P. Lévy oznacza tę funkcyą, na podstawie równej odległości krzywych równej prędkości, uważając że skoro s jest odległością obwodu jednej z tych krzywych, odległej na n od krzywej stałej, to mamy:

$$s=s_0+e(n-n_0),$$

gdzie s_0 i n_0 są wartościami s i n dla krzywej stałej, a e różnicą kątów utworzonych przez normalne krańcowe z pewną osią stałą. Tak samo dla powierzchni kładzie p. Lévy:

$$\omega=\omega_0+s_0(n-n_0)+\frac{1}{2}e(n-n_0)^2,$$

zkąd:

$$\rho=\frac{\omega}{s}=\frac{\omega_0+s_0(n-n_0)+\frac{1}{2}e(n-n_0)^2}{s_0+e(n-n_0)},$$

a równanie (3) przybierze kształt:

$$F(V)-F(V_0)=\Pi i\int_{n_0}^{n}\frac{\omega_0+(n-n_0)s_0+\frac{1}{2}e(n-n_0)^2}{s_0+e(n-n_0)},$$

i całka drugiej strony, łatwa do znalezienia, da ostatecznie :

$$(4) \qquad F(V) - F(V_0) = \Pi i \left[\frac{1}{4}(n - n_0)^2 + \frac{2e}{s_0}(n - n_0) + \left(\frac{\omega_0}{e} - \frac{s_0^2}{2e^2}\right) \log.\text{nep}.\left(\frac{s_0 + e(n - n_0)}{s_0}\right)\right].$$

Takie jest równanie ogólne, wywiedzione przez p. Lévy, a dające prędkość w którymkolwiek punkcie prądu, ze znanej prędkości V_0 wzdłuż jednej krzywej równej prędkości, której obwód jest s_0 a powierzchnia tym obwodem zamknięta ω_0. Zauważyć trzeba że równanie to nie przestaje istnieć, jakiekolwiek pojęcie robimy sobie co do wynalezienia tarcia. I tak, według przypuszczenia Navier'a, mielibyśmy :

$$F(V) = \varepsilon V,$$

gdzie współczynnik ε winien być oznaczony doświadczeniem. P. Lévy dochodzi do oznaczenia kształtu tej funkcyi, porównywając wypadki jakie daje równanie (4), z wypadkami doświadczeń, i nadmienia, że kształt ten pozostanie ten sam dla danej cieczy, jakiekolwiek zresztą będą szczególne warunki jej biegu. Przyjmując kontur przecięcia poprzecznego prądu za krzywą V_0, prędkość V_0 zależeć będzie od tarcia cieczy o ściany rury lub kanału, i natura tych ścian wpłynie tylko przez pośrednictwo stałej $F(V_0)$.

25. *Różne kształty przecięcia prądu.* Pan Lévy całkuje równanie (3) w przypadkach : obwodu wielokątnego, obwodu zamkniętego jakiegokolwiek, obwodu kołowego, obwodu utworzonego przez wielokąt foremny i prostokąt. Rozważymy wszystkie te przypadki.

1) W przypadku obwodu wielokątnego, krzywe równej prędkości są wielokątami równo odległemi, i całkując równanie (3), doszlibyśmy do równania (4), a tylko e, zamiast przedstawiać kąt między normalnemi krańcowemi, byłoby równe :

$$e = 2\left(\text{tang}\frac{a_0}{2} + \text{tang}\frac{a_1}{2} + \ldots + \text{tang}\frac{a_n}{2}\right) = 2\Sigma\text{tang}\,\frac{a}{2},$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$, są kąty zewnętrzne przy wierzchołkach stałego wielokąta równej prędkości, którego obwód jest s_0, a powierzchnia tym obwodem zamknięta równa ω_0.

2) W przypadku obwodu zamkniętego jakiegokolwiek, to jest rury o jakiemkolwiek przecięciu, jednym z walców równej prędkości jest sama rura, inne są do niej równoległe, i rozkład prędkości da nam równanie (4), kładąc w niem $e = 2\pi$, i upraszczając przez liczenie n począwszy od krzywej V_0, co pozwala położyć $n_0 = 0$.

3) W przypadku rury z przecięciem kołowem, oznaczając przez V_0 prędkość strugi środkowej, i licząc n od tej strugi, mamy :

$$n_0 = s_0 = \omega_0 = 0,$$

a równanie (4) przybiera kształt :

$$(5) \qquad F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi i n^2}{4},$$

gdzie n, jest odległością punktu w którym prędkość jest V, od strugi środkowej.

4) W przypadku rury, której przecięcie jest wielokątne, mamy tak samo jak poprzednio :

$$n_0 = s_0 = \omega_0 = 0,$$

i równanie (5) pozostaje bez zmiany, a tylko n oznacza w niem już nie odległość strug od strugi środkowej, ale promień koła wpisanego w wielokąt równej prędkości, przez który przechodzi uważana struga.

5) W przypadku rury prostokątnej, oznaczając przez a długość większego a b mniejszego boku prostokąta, a przez V_0 prędkość wzdłuż prostokąta środkowego, którego boki są $a - b$ i 0, i licząc n od prostej do jakiej się ten ostatni prostokąt sprowadza, mamy :

$$n_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad s_0 = 2(a-b),$$

i wreszcie

$$e = 2\Sigma \operatorname{tang} \frac{a}{2} = 8.$$

Równanie (4) przybiera kształt :

$$F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi i}{4}\left[n^2 + \frac{(a-b)n}{2} - \frac{(a-b)^2}{8}\log.\,\text{nep.}\left(\frac{a-b+4n}{a-b}\right)\right].$$

26. *Oznaczenie doświadczalne funkcyi* F(V). P. Lévy oznacza kształt funkcyi F(V), z pomocą doświadczeń p. Darcy nad rurami kołowemi. Widzieliśmy że w tym przypadku stosować trzeba równanie :

$$F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi}{4} r^2 i,$$

w którem $r = n$ oznacza odległość cząsteczki, której prędkość jest V_0 od strugi środkowej, a i stratę ciążenia na jednostkę długości.

P. Darcy obserwował rozkład prędkości w pięciu rurach z żelaza lanego, następujących :

1) Rura nowa, średnicy $0^m,188$,

2) Rura pokryta osadem, średnicy $0^m,2432$,

3) Rura podobna do poprzedniej a tylko z lekka oczyszczona, średnicy $0^m,2447$,

4) Rura starannie oczyszczona, średnicy $0^m,297$,

5) Rura nowa, średnicy $0^m,50$.

Dla każdej z tych rur zmieniał p. Darcy spadek albo stratę ciążenia i, między granicami bardzo odległemi i mierzył naprzód prędkość V_0 strugi środkowej, odpowiadającej wartości $r_0 = 0$, a następnie prędkości V' i V'', odpowiadające wartościom $r' = \frac{1}{3}$ i $r'' = \frac{2}{3}$.

P. Lévy stosując wypadki doświadczeń p. Darcy do oznaczenia funkcyi F(V), kładzie w przybliżeniu:

$$F(V) - F(V_0) = (V - V_0)F'(V_0) + \frac{(V-V_0)^2}{1.2}F''(V_0),$$

albo na mocy równania (5) :

$$\frac{\Pi}{4} r^2 i = (V - V_0) F'(V_0) + \frac{(V - V_0)^2}{1.2} F''(V_0).$$

Każde zatem doświadczenie p. Darcy daje dwa równania :

$$\frac{\Pi}{4} r'^2 i = (V' - V_0) F'(V_0) + \frac{(V' - V_0)^2}{2} F''(V_0),$$

$$\frac{\Pi}{4} r''^2 i = (V'' - V_0) F'(V_0) + \frac{(V'' - V_0)^2}{2} F''(V_0),$$

w których wszystkie wyrazy są znane, oprócz $F'(V_0)$ i $F''(V_0)$. Można więc oznaczyć liczebnie te funkcye, dla różnych wartości V_0.

Z wypadków doświadczeń wyjmujemy następujące, odnoszące się do każdego z pięciu wymienionych rodzajów rur.

Średnice ,	i,	r_0,	r',	r'',	V_0,	V',	V'',	$-F'(V_0)$.
1) 0=0,188	0,00368	0,0000	0,0325	0,0637	0,944	0,901	0,810	0,01975
»	0,01340	»	»	»	1,809	1,732	1,561	0,04358
»	0,10980	»	»	»	5,212	5,001	4,451	0,13711
2) 0=0,2432	0,00202	0,000	0,044	0,088	0,575	0,538	0,456	0,0243
»	0,02290	»	»	»	1,883	1,753	1,489	0,0698
»	0,13981	»	»	»	4,593	4,275	3,689	0,1585
3) 0=0,2447	0,00165	0,000	0,044	0,088	0,686	0,602	0,571	0,0243
»	0,02035	»	»	»	2,201	2,078	1,853	0,0773
»	0,113443	»	»	»	5,145	4,872	4,362	0,1587
4) 0=0,297	0,0007	0,000	0,052	0,102	0,420	0,396	0,343	0,0179
»	0,00617	»	»	»	1,515	1,449	1,314	0,0551
»	0,02251	»	»	»	2,834	2,712	2,466	0,1048
5) 0=0,50	0,0006	0,00	0,09	0,17	0,570	0,535	0,477	0,5707
»	0,00125	»	»	»	1,050	0,993	0,910	1,050
»	0,00260	»	»		1,311	1,241	1,126	1,3109

Wyjmując te liczby z rozprawy p. Lévy podanej w Rocznikach Dróg i Mostów, czuliśmy się w obowiązku porównać je z wypadkami doświadczeń, podanemi przez p. Darcy w jego dziele, i tym sposobem zdołaliśmy poprawić kilka oczywistych pomyłek. Oprócz tego jednak zauważyliśmy jeszcze kilka szczegółów. Dla rur 1, 3, 4, 5, p. Lévy bierze wypadki takie, jakie wprost otrzymał p. Darcy, a dla rury 2 wypadki poprawione już przez p. Darcy, to jest pomnożone przez pewien współczynnik poprawki. Nadto, p. Darcy dla każdej wartości r' i r'', mierzył dwa razy V' i V'', raz pod a drugi raz nad osią rury. Zwykle otrzymywał wartości identyczne, ale czasami wartości te są różne. P. Lévy nie brał średniej z dwóch wartości różnych, ale jedną z nich. Wszystko to nie ujmuje bynajmniej dokładności rachunkom p. Lévy, ale zawsze pozwala go posądzać o brak staranności przy wyciąganiu liczb z dzieła p. Darcy.

Biorąc wartości V_0 za odcięte, a wartości $-F'(V_0)$ za rzędne, wykreślić można linią zbliżającą się bardzo do prostej. Jeżeli 2ε jest współczynnikiem kątowym tej prostej, mieć będziemy :

$$-F'(V_0)=2\varepsilon V_0,$$

a tak samo :

$$-F'(V)=2\varepsilon V,$$

zkąd

$$F(V)=-\varepsilon V^2+\text{ilość stała},$$

i

$$F(V)-F(V_0)=\varepsilon(V_0^2-V^2)=\frac{\Pi}{4}r^2 i. \tag{1}$$

Taki jest wzór dający rozkład prędkości na przecięciu poprzecznem rury, do jakiego dochodzi p. Lévy. We wzorze tym, pozostaje tylko do oznaczenia współczynnik ε, którego wartość da nam wzór :

$$\varepsilon=\frac{\Pi r^2 i}{4(V_0^2-V^2)}.$$

P. Lévy, biorąc wypadki tychże samych co poprzednio wypadków doświadczeń, oblicza dla każdego z nich ε, które powinnoby być stałe, jeżeliby ruch miał miejsce ściśle strugami prostolinijnemi i równoległemi, gdyż $F(V)$ nie powinna zależeć jak tylko od natury płynu, a nie od rozległości i natury przecięcia zmoczonego. Wypadki doświadczeń dają przeciwnie wartości średnie na ε, dość różne dla pięciu rodzajów rur wyżej przytoczonych. P. Lévy oblicza nadto wartości stosunku $\frac{\varepsilon}{\sqrt{r}}=K$ i wartości średnie K każdego rodzaju rur. Podajemy tu wyjątki z jego tablicy, odnoszące się do wartości i branych poprzednio :

	i,	r,	ε,	ε (średnio),	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{r}}=K$,	K (średnio),
1)	0,00368	0,0325	0,0140			
		0,0637	0,0181			
	0,01340	»	0,0140	0,013855	0,076826	0,072763
		»	0,0165	0,017350	0,0687	
	0,10980	»	0,0141			
		»	0,0159			
2)	0,00202	0,044	0,0237			
		0,088	0,0318			
	0,02290	»	0,0234	0,02238	0,0999	0,1087
		»	0,0333	0,03486	0,1173	
	0,13981	»	0,0234			
		»	0,0361			
3)	0,00165	0,044	0,0223			
		0,088	0,0278			
	0,02035	»	0,0181	0,0195	0,0944	0,09325
		»	0,0272	0,0273	0,0923	
	0,113443	»	0,0194			
		»	0,0287			

	i,	r,	ε,	ε (średnio),	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{r}}=K$,	K (średnio),
4)	0,0007	0,052	0,0224			
		0,102	0,0322			
	0,00617	»	0,0342	0,0232	0,1017	0,1008
		»	0,0332	0,0320	0,0999	
	0,02251	»	0,0243			
			0,0328			
5)	0,0006	0,09	0,0305			
		0,17	0,0440			
	0,00125	»	0,0283	0,0294	0,0981	0,0990
		»	0,0428	0,0426	0,1009	
	0,00260	»	0,0293			
		»	0,0411			

Dla jednej i tej samej rury i dla oznaczonej wartości r, wypadki doświadczeń pokazują że ε zmienia się bardzo mało. I tak dla rury 1) której średnica jest 0,188, a nad którą p. Darcy robił sześć doświadczeń, otrzymuje p. Lévy dla $r=0,0325$, następujące wartości na ε :

$$0,0140,\ 0,0141,\ 0,0140,\ 0,0126,\ 0,0143,\ 0,0141,$$

jak widzimy, bardzo się mało między sobą różniące, jakkolwiek spadek i zmieniał się w granicach dość odległych. Inne rury dają podobne wypadki, pozwalające przypuszczać, że ε nie zależy od spadku, i że dla jednej i tej samej rury zmienia się tylko razem z r. Dla tego też obliczył p. Lévy wartości średnie ε dla każdej rury i dla obu wartości r, które brał pod uwagę p. Darcy, i tak je podaliśmy powyżej. Te wartości średnie zmieniają się od jednej rury do drugiej i zdawaćby się mogło że ε zależy także od średnicy rury. P. Lévy twierdzi, że ε zależy wyłącznie od r i że ani natura ani średnica rur, żadnego na ten współczynnik nie wywierają wpływu. Powyżej podane wypadki doświadczeń sprawdzają mniej więcej to mniemanie. P. Lévy kładzie :

$$\varepsilon = K\sqrt{r},$$

gdzie K jest stałe i oblicza wartości tej stałej, które także co dopiero podaliśmy. Jak widzimy, wartości te zmieniają się bardzo mało, pomimo znacznej zmiany średnicy i natury rur doświadczanych. Jedynie tylko dla rury 1) wartość na K oddala się więcej od innych. Ale właśnie doświadczenia czynione nad tą rurą, odbywały się w nader trudnych warunkach, z powodu małości jej średnicy, i p. Darcy na str. 152 swoich *Recherches Expérimentales*, wspomina o tem, roztrząsając wypadki doświadczeń i stosując do nich swoje wzory. Można zatem razem z p. Lévy, przyjąć na K wartość średnią 0,0947.

Wzór (1) przybiera kształt :

$$K\sqrt{r}\,(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi}{4} r^2 i,$$

albo

$$0,0947\ \sqrt{r}\,(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi}{4} r^2 i,$$

zkąd

$$V_0^2 - V^2 = 2640 r^{\frac{3}{2}} i = air^{\frac{3}{2}},$$

oznaczając przez a współczynnik liczbowy 2640. Wzór ten daje prędkość w którymkolwiek punkcie przecięcia poprzecznego rury, względem prędkości strugi środkowej, i to bez względu na położenie i naturę ścian.

27. *Prawo wzajemnego tarcia dwóch strug.* Z wzoru ostatniego, różniczkując względem r, wypada:

$$-2V\frac{dV}{dr} = \frac{3}{2} air^{\frac{1}{2}},$$

czyli

$$\frac{\Pi ri}{2} = -\frac{2\Pi}{3a} r^{\frac{1}{2}} V \frac{dV}{dr}.$$

Że zaś w ustępie n. 23 widzieliśmy, że tarcie na powierzchni walca równej prędkości, którego promień jest r, jest równe:

$$\tau = \frac{\Pi ri}{2},$$

bo promień średni ρ jest połową promienia koła stanowiącego krzywą równej prędkości czyli połową r, zatem tarcie:

$$\tau = -\frac{2\Pi}{3a} r^{\frac{1}{2}} V \frac{dV}{dr},$$

czyli, dla rur kołowych:

Wzajemne tarcie dwóch warstw współśrodkowych, jest proporcyonalne do iloczynu z ich prędkości bezwzględnej przez ich prędkość względną, a nadto do pierwiastku kwadratowego z ich promienia.

Biorąc zaś pod uwagę że w rurach wodociągowych, ruch nie jest ściśle prostolinijny, wyraża p. Lévy to prawo z całą ścisłością w sposób następujący:

W rurach wodociągowych rozkład prędkości jest taki, jak gdyby ruch był ściśle prostolinijny i jak gdyby tarcie dwóch warstw sąsiednich było proporcyonalne do iloczynu z ich prędkości bezwzględnej przez ich prędkość względną i przez pierwiastek kwadratowy z ich promienia.

Wynika ztąd wniosek, że ponieważ opór w ruchu wody w rurach niezależy od ich spadku, tenże spadek nie ma żadnego wpływu na naturę dróg przebieżonych przez cząsteczki.

28. *Sprawdzenie wzoru dającego rozkład prędkości.* Jakkolwiek wzór:

$$V_0^2 - V^2 = 2640 ir^{\frac{3}{2}},$$

wywiedziony został z samych wypadków doświadczeń, jednakże p. Lévy, biorąc pod uwagę różnicę tego wzoru, od wzoru p. Darcy, sprawdza jego wypadki. W tym celu porównywa prędkości wprost otrzymane przez p. Darcy i prędkości otrzymane z wzoru:

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2640 r^{\frac{3}{2}} i}$$

i wypisawszy je w dwóch kolumnach tablicy, podaje w trzeciej różnice. Różnice te, na 44 doświadczeń, są następujące:

22	mniejsze od	0,01,		
34	» »	0,03,		
40	» »	0,05,		
3	zawarte między	0,05	a	0,06,
1	równa	0,082,		

Ta ostatnia jest dość znaczna, ale p. Lévy zwraca uwagę na tę okoliczność, że odpowiedni wypadek doświadczeń p. Darcy musi być błędny. P. Darcy bowiem, wykonywając swe doświadczenia, mierzył prędkości strugi bieżącej w pewnej stałej odległości od osi rury, dwa razy, raz nad osią, a raz pod osią. Różnica dwóch wypadków była, w doświadczeniu o którem mowa, 0_m,304, jak mówi p. Lévy. Chcąc sprawdzić tę cyfrę, szukaliśmy w wypadkach doświadczeń p. Darcy. Wypadki te są podane, raz wprost tak jak były otrzymane, a następnie pomnożone przez pewien współczynnik poprawki. P. Darcy znalazł naprzód dwie prędkości dla rury średnicy 0^m,2432, w odległości 0^m,088 od osi:

nad osią 3^m,823, pod osią 3^m,990;

a po pomnożeniu przez współczynniki odpowiednie, otrzymał:

nad osią 3^m,689, pod osią 3^m,850.

W pierwszym razie różnica jest 0,167, a w drugim 0,161; zatem liczbę 0^m,304, podaną przez p. Lévy, zmuszeni jesteśmy uważać za błędną, prawdopodobnie z powodu pomyłki w druku.

W ogóle, wypadki tyczące się jednych i tych samych doświadczeń, różnią się u p. Darcy średnio o 0,03, mówi p. Lévy. Taką samą znaleźliśmy różnicę średnią przeglądając zbiór doświadczeń p. Darcy. Liczba ta zdaje się przeto oceniać błąd, mający miejsce przy obserwacyi. Wynika ztąd, że w różnicach $V_0^2 - V^2$, i w rachunku V za pomocą wzoru p. Lévy, błąd 0,06 może być przyjęty. Jak widzieliśmy, jest to rzeczywiście największość różnicy, między wypadkami wzoru p. Lévy, a wypadkami doświadczeń p. Darcy. Zatem wzór p. Lévy obejmuje w sobie w sposób zadowalniający te doświadczenia, a że jest wyprowadzony nierównie racyonalniej niż wzory p. Darcy, i uwzględnia poglądy p.p. Navier i Bazin, sądzimy że na ogólne przyjęcie zasługuje. Różnice między wypadkami tego wzoru, a wypadkami doświadczeń, przypisać można z jednej strony nieregularnie prostolinijnemu biegowi wody w rurach, a z drugiej trudnościom zachodzącym przy mierzeniu prędkości różnych strug wewnątrz rury.

P. Darcy mierzył te prędkości w sposób następujący. Rurka miedziana, 0^m,005 średnicy, przechodziła na wskróś ścian rury, nad którą robiono doświadczenia, przez otwory zrobione w tej ostatniej w kierunku jej średnicy pionowej, a tak urządzone, że rurkę posuwać było można w obu kierunkach, na dół lub pod górę, i to niezmniejszało bynajmniej szczelności zamknięcia otworów. Do rurki miedzianej, w jej części pozostającej wewnątrz wielkiej rury, przystosowaną była prostopadle krótka rurka A, zwężająca się ku końcowi, którą było można ustawić zawsze w kierunku wprost przeciwnym kierunkowi prądu. Widzieć można łatwo że tym sposobem, przesuwając rurkę miedzianą przechodzącą na wskróś rury, rurka A ustaloną być mogła w jakiejkolwiek odległości od osi rury i napotkać strugę, której prędkość chciano ocenić. Rurka miedziana komunikowała z rurką szklanną, a woda wchodząca przez rurkę A, wznosiła się w rurce szklannej do pewnej wysokości ponad stałą płzczyznę poziomą, która jak wiadomo jest równa summie:

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g},$$

gdzie z jest wzniesienie punktu A, a $\frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g}$ ciążenie w tym punkcie. Aby teraz otrzymać dwa pierwsze wyrazy tej summy, przystosowaną została na temże samem przecięciu poprzecznem rury, druga rurka miedziana, z rurą doświadczaną wprost komunikująca, a podobnież rurką szklanną zakończona. Woda wznosiła się w tej rurce do wysokości:

$$z + \frac{p}{\Pi}$$

po nad tęż samą co poprzednio stałą płazczyznę poziomą. Odejmując tę wysokość od poprzedniej, p. Darcy otrzymywał $\frac{V^2}{2g}$ a następnie przez rachunek, prędkość V.

29. *Prawo tarcia na ścianach rury i jego sprawdzenie.* Prawo to, znane powszechnie w Hydraulice, jest następujące:

Tarcie na ścianach rury jest proporcyonalne do kwadratu z prędkości warstwy zewnętrznej cieczy.

Sprawdza się to prawo doświadczeniem, a nawet można je niejako przewidzieć, zważywszy że skoro ciało stałe wprawione zostaje w ruch wewnątrz płynu, to opór jakiego doznaje w swym ruchu jest proporcyonalny do kwadratu z jego prędkości i do powierzchni płaskiej zamkniętej jego konturem pozornym, na płazczyznie prostopadłej do kierunku w jakim bieży. Jeżeli ciało stałe jest w spoczynku a płyn w ruchu, oczywiście opór pozostaje bez zmiany, gdyż wzajemne działania między ciałem stałem a płynem pozostają też same. Na ścianie ciała zwróconej wprost przeciw prądowi, ma miejsce *ciśnienie żywe* (pression vive), jak je nazwał Dubuat, którego uważać można za prawdziwego twórcę tej części Hydrauliki. Na ścianie przeciwnej ma miejsce *nie-ciśnienie* (non pression), a różnica tych dwóch sił, rzucona na kierunek prądu, jest proporcyonalna do kwadratu z prędkości płynu i do przecięcia wzdłuż konturu pozornego. To mając na uwadze, działanie opóźniające bieg cieczy w rurze, jakiego ciecz doznaje od ścian rury, jest równe i wprost przeciwne oddziaływaniu, jakie ciecz na powierzchnią tychże ścian wywiera, albo innemi słowy wprost przeciwne sile, z jaką ciecz dąży do pociągnięcia w swym ruchu ścian rury. Siła ta zaś wytworzona jest podobnie jak dla ciała zanurzonego w cieczy, przez ciśnienia żywe i nie-ciśnienia, wywierane przez ciecz na ścianki pochylone, jakie przedstawiają nierówności istniejące na powierzchni ścian rury. Jest ona zatem proporcyonalna do kwadratu z prędkości warstwy zewnętrznej cieczy i do powierzchni zamkniętej konturem nierówności, powierzchni mierzonej na płazczyznie normalnej do ścian rury. A że nierówności są zmienne razem z większem lub mniejszem wypolerowaniem ścian wewnętrznych rury, zatem tarcie jest proporcyonalne do rozległości powierzchni zmoczonej, i do współczynnika zależnego od natury ścian rury i przedstawiającego stopień ich gładkości. P. Lévy wyraża analitycznie to prawo wzorem:

$$W^2 = \alpha R i,$$

w którym W jest prędkość przy ścianach rury, α współczynnik zależny od jej natury, R jej promień, a i strata ciążenia na jednostkę długości. Iloczyn Ri jest rzeczywiście, jak wiadomo z Hydrauliki, proporcyonalny do tarcia na jednostce powierzchni ścian rury.

Wzór swój sprawdza p. Lévy dowodząc: że $\frac{W^2}{i}$ jest stałe dla tej samej rury, jakakolwiek jest wartość i; i że $\frac{W^2}{Ri}$ jest stałe, jakiekolwiek są R i i, byle tylko natura rury się niezmieniała. W tym celu oblicza W z wzoru:

$$(1) \qquad V_0^2 - W^2 = 2640 R^{\frac{3}{2}} i,$$

dla pięciu wyżej wymienionych rodzajów rur, a przy każdym z nich dla różnych wartości i. I tak naprzykład, do rury żelaznej nowej, której średnica jest $0^m,2432$, otrzymał p. Lévy, dla wartości i:

0,00202, 0,00473, 0,02290, 0,03200, 0,13981,

wartości W^2 następujące:

0,104495, 0,237876, 0,982189, 1,584329, 5,445649;

a ztąd obliczył wartości stosunku $\frac{W^2}{i}$:

54, 50, 43, 51, 39,

jak widzimy mało się między sobą różniące, tak że można śmiało wziąć ich wartość średnią 47, i obliczyć współczynnik:

$$\alpha = \frac{W^2}{Ri} = 402,$$

a

$$\frac{1}{\alpha} = 0,00248.$$

Tym sposobem otrzymuje p. Lévy:

dla rury żelaznej z osadem	$\alpha = 402$	$\frac{1}{\alpha} = 0,00248$
» » oczyszczonej	» 1054	» 0,000948
» » dobrze oczyszczonej	» 1094	» 0,000914
» » nowej	» 1368	» 0,000731.

Ale stosunek $\frac{W^2}{Ri}$, jak się pokazuje z tych wypadków obliczeń p. Lévy, nie jest stały i dla jednej i tej samej natury rury zmienia się razem z promieniem R. Wnosi o tem p. Lévy, otrzymawszy dla rury żelaznej nowej, dla wartości R:

$$\frac{0^m,188}{2}, \qquad \frac{0^m,50}{2},$$

wartości α:

1572, 1368.

Szkoda tylko, że był zmuszony p. Lévy do opierania się na wypadkach doświadczeń tyczących się rury n. 1 (średnica $0^m,188$), gdy na nie, jak sam p. Darcy powiada, niemożna wiele rachować, W braku innych jednak trzeba było na nich poprzestać. W skutku tego uważa p. Lévy, że wzór (1) jest tylko pierwszem przybliżeniem, a stosunek $\frac{W^2}{Ri}$ wyrażony jest szeregiem, i można uczynić zadość wypadkom doświadczeń, biorąc dwa pierwsze wyrazy tego szeregu :

$$\alpha + \beta\sqrt{R},$$

zamiast stałej α, jaką uważaliśmy poprzednio. Kładzie zatem :

$$W^2 = Ri\left(\alpha + \beta\sqrt{R}\right).$$

Tutaj uczynić musimy dwie uwagi.

Naprzód, wartości na W^2, jakie ze swego wzoru otrzymuje p. Lévy, różnią się znacznie od warto dawanych przez wzór empiryczny p. Darcy :

$$V - W = K\sqrt{Ri} = 11,30\sqrt{Ri}.$$

Pominąwszy już wypadki tyczące się rury o średnicy $0^m,188$, o których niedokładności mówiliśmy powyżej, wszystkie prędkości W, otrzymane przez p. Lévy, są mniejsze od prędkości wypadających ze wzoru p. Darcy. Ten ostatni wzór wyprowadzony został z doświadczeń, w których mierzono prędkość strug, bieżących w odległościach od osi rury, równych : $\frac{1}{3}r$ i $\frac{2}{3}r$, i jak słusznie zwraca uwagę p. Bazin ([34]), podobnie jak każdy wzór empiryczny, powinienby być stosowany między granicami, dla jakich został otrzymany; a zatem stosując go do prędkości strug sąsiednich ze ścianami rury, można łatwo otrzymać błędne wypadki. Być bardzo może, że w rurach wodociągowych, zmniejszanie się prędkości przy ścianach jest nierównie większe, niż je daje wzór p. Darcy, a zatem więcej zbliżone do wypadków otrzymanych przez p. Lévy.

Następnie, jak wyżej widzieliśmy, stosunek współczynnika $\frac{1}{\alpha}$, dla rur żelaznych z osadem i nowych, jest blizki $\frac{2}{7}$, według p. Lévy. P. Darcy znalazł ten stosunek równy $\frac{1}{2}$, a powodem tej różnicy jest : że p. Darcy nazywa *współczynnikiem oporu*, stosunek iloczynu Ri do kwadratu z prędkości średniej, a p. Lévy, stosunek Ri do kwadratu z prędkości warstwy zewnętrznej. Ten sposób uważania jest może i stosowniejszy.

30. Widzieliśmy że według p. Lévy, wzór dający rozkład prędkości na przecięciu poprzecznem prądu w rurze, jest następujący :

$$V_0^2 - V^2 = air^{\frac{3}{2}},$$

gdzie $a=2640$. Dla warstwy zewnętrznej mamy $r=R$ a $V=W$, zatem:

$$V_0^2 - W^2 = aiR^{\frac{3}{2}};$$

([34]) *Recherches hydrauliques.* Część I, str, 243.

a dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie, otrzymamy :

$$\frac{V_0^2 - V^2}{V_0^2 - W^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Wzór ostatni jest niejako obrazem rozkładu prędkości na jednem i tem samem przecięciu poprzecznem. Według p. Darcy, rozkład ten przedstawiony jest wzorem :

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

a według czysto hypotetycznych pojęć Navier'a :

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^{2}.$$

Te dwa ostatnie wzory mają jeden i tenże sam kształt następujący :

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}},$$

gdzie $m = 2$ według p. Darcy, a $m = 1$ wedle Navier'a. Wzoru p. Lévy niemożna tu podciągnąć, właśnie z powodu prawa na tarcie, na którem się opiera, a wedle którego, tarcie niezależy od samej tylko prędkości względnej dwóch warstw współśrodkowych, ale i od ich prędkości bezwzględnej. Jak widzimy, prawo to jest zupełnie odmienne od prawa p. Darcy, wedle którego, tarcie w którymkolwiek punkcie prądu w rurze, jest proporcyonalne do kwadratu z prędkości względnej i do kwadratu z promienia rury. Zbliża się ono zato więcej do przypuszczenia Navier'a, na mocy którego wzajemne tarcie dwóch strug, jest proporcyonalne do ich prędkości względnej, a oraz do pojęć panów de Saint-Venant i Bazin, o jakich już wspominaliśmy. Ten powrót do dawnych, ale zdrowych idei Navier'a, z pewnem ich wszakże zmienieniem, jest ogólną dążnością nowszych prac na tem polu. P. Kleitz, inspektor główny dróg i mostów, wychodząc z innego punktu niż p. Lévy, ale opierając się także na matematycznej teoryi sprężystości, otrzymał równie w ostatecznym wypadku, że tarcie jest proporcyonalne do pierwszej potęgi z prędkości względnej, a tylko opatrzonej współczynnikiem zmiennym, od jednego punktu do drugiego. Współczynnik ten jednak, wbrew ideom panów Bazin i Lévy, zależy wedle p. Kleitz, nie od prędkości bezwzględnej, ale od sposobu w jaki się zmienia w około jednego punktu i we wszystkich kierunkach, prędkość z jaką cząsteczka w danej chwili w tym punkcie będąca, oddala się lub przybliża do innych, które ją otaczają, w ciągu pierwszego elementu czasu, jaki po danej chwili następuje ([35]).

Prawo p. Lévy wydaje się nam racyonalniejszem od prawa p. Darcy, głównie z tego powodu, że w wyrażenie wzajemnego tarcia warstw, nie wchodzi wcale promień rury. Biorąc bowiem za pewnik, wpływ promienia rury na wzajemne tarcie dwóch którychkolwiek warstw współśrodkowych cieczy, musielibyśmy wnioskować że cząsteczki cieczy działają jedne na drugie w pewnych odległościach, albo że działanie wzajemne dwóch cząsteczek bardzo blizkich, nie zależy jedynie od ich własnego ruchu i stanu. P. Darcy wprowadził promień rury w wyrażenie tarcia, chcąc nagiąć równania wywiedzione w przypuszczeniu ruchu ściśle prostolinijnego, do ruchu niezupełnie regularnego, jaki ma

([35]) *Comptes rendus* r. 1866, t. II. str. 988. Rapport o pracy p. Kleitz : *O siłach cząsteczkowych cieczy w ruchu z zastosowaniem do Hydrodynamiki.*

miejsce w rurach wodociągowych. Ale. jak słusznie uważa p. Lévy, jeżeli drogi przebieżone przez cząsteczki nie są prostolinijne, to tarcie zależeć powinno od wielkości zboczeń tych dróg od kierunku prostolinijnego, to jest od strzałek krzywych przebieżonych przez cząsteczki; a że te strzałki, równe zeru w środku rury, zwiększają się w miarę zbliżania do ścian, tarcie zwiększać się powinno razem z r, to jest z odległością warstw uważanych od środka rury, a nie razem z promieniem tej rury. Postawienie wzorów, streszczających w sobie jak najzupełniej doświadczenia p. Darcy, a niezawierających w wyrażeniu na tarcie promienia rury, będącego elementem prawie zupełnie obcym, stanowi główną zasługę prac p. Lévy.

III

Prędkość średnia i wzory praktyczne.

31. *Wzór na prędkość średnią i jego sprawdzenie.* Wydatek warstwy cieczy w rurze, zawartej między dwoma walcami, których promienie są r i $r+dr$, a bieżącej z prędkością V jest:

$$V.2\pi r dr;$$

wydatek rury będzie zatem:

$$Q=2\pi\int_0^R Vr dr,$$

a że

$$Q=\pi R^2 U,$$

jeżeli przez U oznaczymy prędkość średnią strug w rurze, więc

$$U=\frac{2}{R^2}\int_0^R Vr dr. \tag{1}$$

Chcąc zcałkować wyrażenie powyższe, należy wstawić wartość V w funkcyi r z wzoru:

$$V_0^2-V^2=air^{\frac{3}{2}},$$

który, jak uważa p. Lévy, może być bez wielkiego błędu zastąpiony w tym przypadku następującym:

$$V_0-V=\frac{air^{\frac{3}{2}}}{V_0+U}.$$

I rzeczywiście, dla wszystkich prędkości bliższych środka rury niż prędkość średnia, wzór ostatni da wartości za wielkie; przeciwnie zaś, dla wszystkich prędkości więcej oddalonych od środka rury niż prędkość średnia, wzór ten da wartości za małe; przy całkowaniu wreszcie błędy te zkompensują się nawzajem mniej więcej. Oczywiście, między prędkościami krańcowemi V_0 i W istnieje prędkość pośrednia taka, że wstawiwszy ją za U we wzór ostatni, uczynilibyśmy kompensacyą, o której mowa, ściśle matematyczną. Jak zobaczymy przy sprawdzaniu doświadczalnem wzorów, do jakich dochodzi następnie p. Lévy, ta prędkość pośrednia mało się bardzo różni od U, i można bez wielkiego błądu podstawić U na jej miejsce. Tym sposobem otrzymamy :

$$V = V_0 - \frac{air^{\frac{3}{2}}}{V_0 + U},$$

co wstawiwszy w równanie (1), będziemy mieli :

$$U = V_0 - \frac{4aiR^{\frac{3}{2}}}{7(V_0 + U)},$$

albo

(2) $$V_0^2 - U^2 = \frac{4}{7} aiR^{\frac{3}{2}}.$$

Jeżeli x jest odległość od osi rury, strugi której prędkość jest U, mieć będziemy z wzoru :

$$V_0^2 - V^2 = air^{\frac{3}{2}},$$

kładąc $V = U$, a $r = x$, równanie :

$$V_0^2 - U^2 = aix^{\frac{3}{2}},$$

które wraz z wzorem (2), daje :

$$\frac{4}{7} aiR^{\frac{3}{2}} = aix^{\frac{3}{2}}$$

zkąd :

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{7} R^{\frac{3}{2}},$$

a :

$$x = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} R = 0{,}689R.$$

Tak więc, struga ożywiona prędkością średnią, leży według p. Lévy, w odległości od osi rury, równej 689 tysiącznych promienia rury, to jest więcej jak dwie trzecie promienia. Do tegoż samego wypadku, doprowadziły p. Darcy, jego wzory empiryczne. Dowód w tem, że wzór przybliżony jakiego użył p. Lévy do oznaczenia prędkości średniej, jest dostatecznie blizki ścisłości.

Widzieliśmy w ustępie n. 29, że prędkość przy ścianach rury, dana jest wzorem :

$$V_0^2 - W^2 = aiR^{\frac{3}{2}},$$

który wraz z wzorem (2), daje :

$$V_0^2 - U^2 = \frac{4}{7}(V_0^2 - W^2);$$

zkąd

$$U^2 = \frac{3V_0^2 + 4W^2}{7}.$$

Taki jest wzór p. Lévy, dający związki między prędkościami krańcowemi a prędkością średnią.

p. Darcy znalazł:

$$U=\frac{3V_0+4W}{7},$$

a według Navier'a mielibyśmy:

$$U=\frac{V_0+W}{2}.$$

Pan Darcy sprawdza swój wzór doświadczeniami, p. Lévy czyni tak samo i do równie zadowalniających dochodzi wypadków. Powodem tego jednoczesnego istnienia i sprawdzania się dwóch wzorów ró żnych jest okoliczność wskazana już w ustępie n. 30; to jest że wartości W u p. Lévy są różne od tychże wartości u p. Darcy, ale więcej zbliżone do doświadczalnych przewidzeń p. Bazin.

Wzór praktyczny na prędkość średnią otrzymuje p. Lévy uważając wzór (2) i wzór:

$$V_0^2-W^2=aiR^{\frac{3}{2}},$$

które razem dają:

$$U^2-W^2=\frac{3}{7}aiR^{\frac{3}{2}}.$$

Że zaś w ustępie n. 29 widzieliśmy że:

$$W^2=\alpha Ri,$$

zatem:

$$U^2=Ri\left(\alpha+\frac{3}{7}a\sqrt{R}\right).$$

Wzór ten zawiera dwa współczynniki: jeden α zależny od natury ścian rury, a którego wartość podaliśmy już w ustępie n. 29; drugi a, zależny wyłącznie od natury cieczy, a dla wody równy 2640 (ustęp n. 26), tak że $\frac{3}{7}a=1131$ i ostatecznie:

$$U^2=Ri\left(\alpha+1131\sqrt{R}\right). \tag{3}$$

Wzór ten sprawdza p. Lévy za pomocą wypadków doświadczeń p. Darcy, odnoszących się do rur różnej średnicy i natury. Wypadki te pokazują, że stosunek:

$$\frac{U^2}{i}$$

jest zależny od spadku i, i że wyrażenie:

$$\frac{U^2}{Ri}-1131\sqrt{R}=\alpha,$$

jest stałe dla rury tej samej natury, a różne wartości tego wyrażenia są też same, jak znalezione już poprzednio (ustęp n. 29). Z wypadków, jakie podaje p. Lévy w swej rozprawie, wyjmujemy tu następujące, które się odnoszą do trzech rur.

1) Rura żelazna lana pokryta osadem :

$$D = 0{,}0359, \qquad R = 0{,}1795.$$

$i =$	$U =$	$\frac{U}{\sqrt{i}} =$	wartość średnia $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R} =$
0,00025	0,051	3,2255		
0,00071	0,081	2,8460		
0,00183	0,130	3,0389		
0,00670	0,253	3,0909	3,0649	372
0,15250	0,381	3,0852		
0,03240	0,551	3,0611		
0,04153	0,633	3,1062		

Taż sama rura oczyszczona daje :

$$D = 0{,}0364, \qquad R = 0{,}0182.$$

$i =$	$U =$	$\frac{U}{\sqrt{i}} =$	wartość średnia $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R} =$
0,00071	0,113	4,2409		
0,00180	0,188	4,4312		
0,00651	0,387	4,8520		
0,01441	0,601	5,0069	4,8685	1151
0,03018	0,892	5,1346		
0,03966	1,034	5,1921		
0,04650	1,126	5,2217		

2) Rura żelazna lana pokryta osadem :

$$D = 0{,}2432, \qquad R = 0{,}1216.$$

$i =$	$U =$	$\frac{U}{\sqrt{i}} =$	wartość średnia $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R} =$
0,00094	0,307	10,1329		
0,00202	0,452	10,0568		
0,00473	0,707	10,2793		
0,01150	1,106	10,3186		
0,02290	1,547	10,2228	10,5511	520,93
0,03200	1,833	10.2462		
0,04105	2,073	10,2315		
0,13981	3,833	12,9259		

Taż sama rura oczyszczona daje :

$$D = 0{,}2447, \qquad R = 0{,}12235.$$

$i =$	$U =$	$\frac{U}{\sqrt{i}} =$	wartość średnia $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R} =$
0,00052	0,278	12,1514		
0,00165	0,537	13,3731		
0,00498	0,949	15,0434		
0,01155	1,420	13,2122		
0,02035	1,904	13,3473	13,4058	1072
0,02735	2,206	13,3394		
0,03730	2,572	13,3129		
0,11343	4,4997	13,4679		

3) Rura żelazna lana nowa :

$$D = 0{,}50, \qquad R = 0{,}25.$$

$i =$	$U =$	$\frac{U}{\sqrt{i}} =$	wartość średnia $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R} =$
0,00045	0,4207	19,8312		
0,00045	0,4488	21,1568		
0,00060	0,4752	19,3992		
0,00120	0,7932	22,7980		
0,00125	0,7951	22,4881	21,8020	1335
0,00210	1,0412	22,7200		
0,00230	1,1135	23,2184		
0,00260	1,1197	21,9594		
0,00250	1,1278	22,5560		

Jak widzimy, stosunek $\frac{U}{\sqrt{i}}$ zmienia się bardzo mało dla jednej i tej samej rury, a zwłaszcza jeżeli średnica nie jest bardzo mała. Co do stałego współczynnika α, to wypadki jakie otrzymał p. Lévy są następujące :

Rury żelazne lane :	Wartości α dla różnych rur tej samej natury :	Wartości średnie α:
pokryte osadem	372 456 521	446
oczyszczone	1151 1029 1072	1084

Rury żelazne lane:	Wartości α dla różnych rur tej samej natury:	Wartości średnie α:
dobrze oczyszczone	1197	1197
nowe	1167 1483 1366 1335	1335

Widzimy ztąd, że wartości α dla różnych rur tej samej natury, różnią się między sobą bardzo mało, wyjąwszy wartość 372, dla rury pokrytej osadem. Ale średnica tej rury była tylko $0^m,035$, a w rurach tak małej średnicy, do sił które braliśmy pod uwagę, przyłącza się jeszcze siła przylegania cieczy do ścian rury, którą zupełnie pominęliśmy. Że jednak rury tak małej średnicy, rzadko są używane w praktyce, nie ma co zatrzymywać się nad tą jedyną anomalią. Z drugiej strony, niemożna było tu liczyć na zupełną zgodność wypadków, gdyż wzór (3) wywiedziony został z wzoru:

$$W^2 = \alpha R i,$$

a zaś, jak powiedzieliśmy w ustępie n. 29, to wyrażenie W^2 nie może być jak tylko pierwszym wyrazem szeregu, i zbliżyć się można więcej do ścisłości, kładąc:

$$W^2 = Ri\,(\alpha + \beta\sqrt{R}).$$

W tym razie wzór (3) przybrałby kształt:

$$U^2 = Ri\,\big(\alpha + (1131 + \beta)\sqrt{R}\big),$$

a raczej, właściwie mówiąc, zachowałby swój kształt dawny, a tylko współczynnik przy $\sqrt{R}$ niebyłby już ściśle niezależny od ścian rury, i wartość 1131 byłaby za małą. Tak więc podane dopiero co wartości α są trochę za duże, jak się zresztą przekonać można o tem porównywając je z wartościami znalezionemi w ustępie n. 29:

Dla rur żelaznych lanych:	Wartości α otrzymane z pomocą prędkości średnich:	Wartości α otrzymane z pomocą prędkości przy ścianach rury:
pokrytych osadem	446	402
oczyszczonych	1084	1054
dobrze oczyszczonych	1197	1094
nowych	1335	1368

Tak małe różnice zachodzące między wartościami α, do których p. Lévy doszedł zupełnie różnemi drogami, dowodzą że jego wzory są bardzo blizkie ścisłości; a to że wartości α otrzymane w ustępie n. 29 są z wyjątkiem ostatniej mniejsze od wartości powyżej otrzymanych, świadczy że wyrażenie:

$$W^2 = Ri\,(\alpha + \beta\sqrt{R})$$

jest bliższe prawdy od wyrażenia:

$$W^2 = \alpha R i.$$

Jeżeli teraz weźmiemy wartośći α dopiero co otrzymane i będziemy je wstawiać we wzór (3), otrzymamy nowe wartości prędkości średniej U, które nam dadzą średnie wartości α tem więcej zbliżone do ścisłości. Przez podobne stopniowe przybliżenia, dochodzi p. Lévy do ścisłego oznaczenia współczynnika α dla rur z osadem i rur nowych.

32. *Wzory praktyczne i tablica p. Lévy.* Po wykonaniu powyżej wskazanych rachunków, dochodzi p. Lévy do postawienia dwóch wzorów następujących, w których współczynniki zostały lekko zmienione, w celu ich zaokrąglenia i skrócenia :

dla rur z osadem

$$\left(\frac{U}{20,5}\right)^2 = Ri\,(1 + 3\sqrt{R});$$

dla rur nowych

$$\left(\frac{U}{36,4}\right)^2 = Ri\,(1 + \sqrt{R}). \tag{4}$$

Jak widzimy, wzory te różnią się bardzo mało od wzoru (3), który dla dwóch powyższych rodzajów rur daje :

$$U^2 = 1131\,Ri\,(\sqrt{R} + 0,3943),$$
$$U^2 = 1131\,Ri\,(\sqrt{R} + 1,1967)\ ;$$

że jednak wzory (4) są zasadnicze w praktyce, sprawdza je na nowo p. Lévy, porównywając wypadki jakie dają, z wypadkami doświadczeń i wzorów empirycznych p. Darcy. Przytaczamy tu wszystkie te wypadki dla dwóch rur :

1) Rura żelazna lana z osadem, $D = 0,0795$:

$i =$	prędkość zmierzona :	prędkość z wzoru p. Lévy :	prędkość z wzoru p. Darcy :
0,00065	0,123	0,132	0,139
0,00250	0,251	0,259	0,273
0,00725	0,446	0,442	0,466
0,01610	0,678	0,658	0,694
0,03100	0,931	0,913	0,963
0,04535	1,142	1,106	1,165

2) Rura z żelaza lanego nowa, $D = 0,50$:

$i =$	prędkość zmierzona :	prędkość z wzoru p. Lévy :	prędkość z wzoru p. Darcy :
0,00045	0,4207	0,487	0,459
0,00045	0,4488	0,487	0,459
0,00060	0,4752	0,566	0,531
0,00120	0,7932	0,799	0,750
0,00125	0,7951	0,815	0,766
0,00210	1,0412	1,056	0,993
0,00230	1,1135	1,110	1,040
0,00260	1,1197	1,174	1,104
0,00250	1,1278	1,153	1,083

Pan Lévy podaje siedem takich porównań. Z przytoczonych widać już, że wzory p. Lévy obejmują wypadki doświadczeń lepiej jeszcze niż wzory doświadczalne p. Darcy. Po za granicami w jakich te doświadczenia były robione, zdaje nam się że wzory p. Lévy na tem większe zasługują zaufanie, gdyż są wywiedzione racyonalnie, i oparte na prawie tarcia nierównie naturalniejszem. W praktyce, mając zakładać rury, trzeba zawsze prowadzić rachunki w ten sposób, jak gdyby rury były już pokryte osadem i posługiwać się drugim z wzorów (4), który napisać można w kształcie:

$$U = \mu \sqrt{i} ,$$

kładąc:

$$\mu = 20{,}5 \sqrt{R\left(1 + 3\sqrt{R}\right)} .$$

Ponieważ μ zależy wyłącznie od promienia rury, oblicza przeto naprzód p. Lévy jego wartości, i układa tablicę *o wejściu pojedynczem* (à simple entrée) pozwalającą rozwiązać łatwo sześć zasadniczych zadań tyczących się biegu wody w ruruch. Tablica ta zawiera wszystkie średnice co centymetr od $0^m,00$ do $0^m,50$, a co dwa centymetry, od $0^m,50$ do $1^m,00$. W trzech pierwszych jej kolumnach podane są średnice, promienie i przecięcia rur, w czwartej odpowiednie wartości μ, a w piątej wartości iloczynu $\mu \times \pi R^2$, to jest współczynnika μ przez przecięcie rury. Podajemy tu tę tablicę w skróceniu dla średnic od $0^m,00$ do $0^m,10$ co centymetr, dalej do $0^m,50$ co 5 a do $1^m,00$, co 10 centymetrów:

Tablica p. Lévy.

Średnica D 1	Promień R 2	Przecięcia πR^2 3	$20{,}5 \sqrt{R\left(1+3\sqrt{R}\right)} = \mu$ 4	$\mu \times \pi R^2$ 5
0,01	0,005	0,000078	1,578	0,00012308
0,02	0,010	0,000314	2,337	0,00073382
0,03	0,015	0,000707	2,932	0,00207292
0,04	0,020	0,001257	3,444	0,00432911
0,05	0,025	0,001953	3,915	0,00768514
0,06	0,030	0,002827	4,428	0,01251795
0,07	0,035	0,003848	4,776	0,01837805
0,08	0,040	0,005026	5,166	0,02596431
0,09	0,045	0,006361	5,556	0,03533535
0,10	0,050	0,007854	5,804	0,04557562
0,15	0.075	0,017671	7,564	0,13466344
0,20	0,100	0,031415	9,040	0,28399160
0,25	0,125	0,049087	10,399	0,51045571
0,30	0,150	0,070685	11,664	0,82446980
0,35	0,175	0,096211	12,874	1,23852042
0,40	0,200	0,125663	14,022	1,76204658
0,45	0,225	0,159045	15,049	2,39346820
0,50	0,250	0,196345	16,495	3,17980727
0,60	0,300	0,232743	18,245	5,15855603
0,70	0,350	0,384845	20,192	7,77079024
0,80	0,400	0,502654	21,976	11,04632430
0,90	0,450	0,636172	23,802	15,14216594
1,00	0,500	0,785397	25,604	20,24930478

33. *Rozwiązanie sześciu zadań.* Wszystkie zadania, tyczące się biegu wody w rurach, zależą od rozwiązania dwóch równań :

$$U = \mu \sqrt{i},$$

$$\pi R^2 U = Q,$$

gdzie Q jest stały wydatek rury. Z czterech ilości :

$$U,\ Q,\ R,\ i,$$

wchodzących w powyższe równania, można wziąć dwie dowolnie, i chodzi o znalezienie dwóch pozostałych. Tym sposobem otrzymamy sześć zadań, które tu rozwiążemy za pomocą wzorów i tablicy p. Lévy i porównamy wypadki liczebne, z wypadkami wzorów Prony'ego i p. Darcy.

Zadanie I. Znając wydatek rury Q i stratę ciążenia i na jednostce długości, znaleźć promień R i prędkość średnią U.

Z dwóch równań :

$$U = \mu \sqrt{i},$$

$$\pi R^2 U = Q,$$

dzieląc drugie przez pierwsze otrzymamy :

$$\pi R^2 = \frac{Q}{\mu \sqrt{i}},$$

zkąd

$$\pi R^2 \mu = \frac{Q}{\sqrt{i}}.$$

Zatem, dzieląc wydatek R przez pierwiastek kwadratowy ze straty ciążenia i, otrzymamy wartość liczebną iloczynu $\pi R^2 \mu$, którą znajdziemy w tablicy, w kolumnie piątej. W kolumnie drugiej znajdziemy odpowiednią wartość R, a w trzeciej odpowiednią wartość πR^2, która podzielona przez Q, da nam prędkość średnią U.

I tak, jeżeli $Q = 0^{ms},22$ a $i = 0^m,000163$, to $\frac{Q}{\sqrt{i}} = 17 = \mu\pi R^2$. W kolumnie piątej znajdziemy tę wartość, odpowiadającą wartościom $R = 0^m,47$ a $\pi R^2 = 0,693978$, zkąd $U = \frac{\pi R^2}{Q} = 3^m,16$. Według wzorów p. Darcy, mielibyśmy $R = 0^m,50$, a tablica Fourneyron'a dałaby $R = 0^m,475$. Tablica Mary'ego nie stosuje się do rur tak znacznej średnicy.

Zadanie II. Znając wydatek rury Q i prędkość średnią U, znaleźć promień R i stratę ciążenia i.

Dzieląc Q przez U, otrzymamy πR^2, a tablica p. Lévy da nam odpowiednie wartości R i μ. Iloraz $\frac{U}{\mu}$ da nam $\sqrt{i}$, a zatem i i, przy pomocy jakiejkolwiek tablicy pierwiastków kwadratowych.

Przypuśćmy że $Q = 0^{ms},034$ a $U = 0^m,30$; iloraz $\frac{Q}{U} = \pi R^2 = 0,113333$ odpowiada w tablicy

p. Lévy wartościom : R = 0,19 i μ = 8,753. Dzieląc U przez μ, otrzymamy :

$$\sqrt{i}=0{,}032, \quad \text{zkąd} \quad i=0{,}001024.$$

Według dawnej teoryi Prony'ego, otrzymalibyśmy $i = 0{,}0003842$, a według tablicy p. Darcy :

$$i=0{,}00051246.$$

Zadanie III. Q i R są dane, znaleźć U i i.

Mając R, otrzymamy z tablicy πR^2 i μ, a dzieląc Q przez πR^2 otrzymamy U. Prędkość U, podzielona przez μ, da $\sqrt{i}$, zkąd wypadnie i.

Weźmy :

$$Q=0^{ms},050688 \quad a \quad R=0^m,115.$$

Tablica pana Lévy daje odpowiednie wartości

$$\pi R^2=0{,}041547 \quad a \quad \mu=9{,}860.$$

Otrzymujemy ztąd :

$$\frac{Q}{\pi R^2}=U=1^m,22, \quad a \quad \frac{U}{\mu}=\sqrt{i}=0{,}124,$$

zkąd :

$$i=0^m,015376.$$

Tablica p. Darcy daje w tym przypadku $i=0^m,0145802$, a według wzoru Prony'ego mamy $i=0^m,0093$.

Zadanie IV. Znając prędkość średnią U i stratę ciążenia i, znaleźć promień R i wydatek rury Q.

Podzieliwszy U przez pierwiastek kwadratowy z i, otrzymamy μ. Tablica da nam odpowiednie wartości R i πR^2. Tę ostatnią mnożąc przez U, otrzymamy wydatek Q.

Weźmy poprzednie wypadki :

$$U=1^m,22 \quad a \quad i=0^m,015376,$$

które dają :

$$\sqrt{i}=0{,}124, \qquad \frac{U}{\sqrt{i}}=\mu=9{,}860.$$

W tablicy znajdziemy odpowiednie wartości $R=0^m,115$ a $\pi R^2=0{,}041547$, zkąd :

$$U\times\pi R^2=Q=0^{ms},050688.$$

Oczywiście tablica p. Darcy, daje jak poprzednio też same rezultaty, a tylko szukając w niej, trzeba wziąć nie i, ale $\frac{i}{2}$, stosując się do uwagi p. Darcy, poprzedzającej jego tablicę, a o której powiemy jeszcze niżej. Wzór Prony'ego da nam $R=0^m,07$.

Zadanie V. Z danych U i R, znaleźć Q i i.

Tablica daje μ, przez które dzieląc U, otrzymamy $\sqrt{i}$, a następnie i. Nadto, tablica da nam πR^2, które mnożąc przez U otrzymamy wydatek Q.

Weźmy $U = 0^m,98$ a $R = 0^m,25$. Odpowiednie wartości w tablicy są: $\mu = 16,195$, $\pi R^2 = 0,196345$, zkąd $\frac{U}{\mu} = \sqrt{i} = 0,0605$, $i = 0,00369025$, $U\pi R^2 = Q = 0^{ms},1924181$.

Tablica p. Darcy daje $i = 0^m,002471$, które trzeba pomnożyć przez 2, to jest wziąść $i = 0,004942$, $Q = 0^{ms},192423$; a wzór Prony'ego $i = 0^m,00281$.

Zadanie VI. Dane R i i, szukane U i Q. Tablica daje odpowiednią wartość μ, która pomnożona przez $\sqrt{i}$ da nam U. Q znajdziemy jak w poprzedniem zadaniu.

Jeżeli $R = 0^m,50$, $i = 0^m,0005$, to w tablicy p. Lévy znajdziemy $\mu = 25,604$. Mnożąc tę wartość przez $\sqrt{i} = 0,02236$, otrzymamy $U = 0^m,5725$.

W tablicy p. Darcy, podwoiwszy podwójną wartość i, znajdziemy odpowiednią wartość $U = 0^m,50$. Wzór Prony'ego daje $U = 0^m,55$.

Jak widzimy, z pomocą tablicy p. Lévy rozwiązać można łatwo wszystkie sześć zadań, tyczących się biegu wody w rurach. Tablica ta jest krótka, bo w całości zajmuje zaledwie półtory stronnicy, a służąc do rozwiązania wszystkich zadań, pozwala uniknąć tablic specyalnych układanych dla jednego z tychże. Przytem rachunki są bardzo łatwe i nie wymagają wiele czasu. Ze wszystkich więc względów, wzory i tablica p. Lévy zalecają się do częstego użytku.

34. Wzory p. Lévy, których użycie objaśniliśmy powyżej, są prostsze niż wzór dwuwyrazowy p. Darcy, mający kształt:

$$Ri = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) U + \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{R}\right) U^2,$$

a co najmniej tak proste jak wzór jednowyrazowy p. Darcy:

$$Ri = \left(0,000507 + \frac{0,00000647}{R}\right) U^2 = b_1 U^2 .$$

Zauważyć tu trzeba jednak, że wzory p. Darcy stosują się wprost tylko do rur żelaznych nowych. P. Darcy nie podał odrębnego wzoru dla rur okrytych osadem, a tylko względem zastosowań swych wzorów do rur tego rodzaju, uczynił następujące uwagi (str. 228):

1) « Szukając spadku odpowiadającego oznaczonej prędkości, należy znaleziony w tablicach spadek podwoić, albo jeżeli ten spadek jest dany, podzielić go przez dwa i wziąść prędkość odpowiadającą temu ilorazowi. »

2) « Ale niezależnie od tego opóźnienia pochodzącego z nierówności ściany rury istnieje jeszcze inna przyczyna zmniejszająca wydatek, a wynikła z grubości warstwy osadu. Przewidując ją należy stosownie do natury wody przez rurę płynącej, powiększyć znalezione średnice o pewną ilość, tem konieczniejszą do dodania, im średnice są mniejsze. Oczywiście zaś, przy obliczeniu średnic rur wodociągowych, należy postępować jak gdyby rury były już pokryte osadem, gdyż to koniecznie nastąpi po upływie pewnej liczby lat. »

Pierwsza z uwag p. Darcy sprowadza się do zastąpienia w wzorze:

$$Ri = \left(0,000507 + \frac{0,00000647}{R}\right) U^2 = b_1 U^2,$$

spadku i przez $\frac{i}{2}$, a polega na tem że współczynnik $b_1 = \frac{Ri}{U^2}$, który p. Darcy nazywa *współczyn-*

nikiem oporu, jest dla rur żelaznych pokrytych osadem, dwa razy większy niż dla rur nowych. P. Darcy zauważył to na dwóch rurach :

1) rurze nowej, o średnicy $0^m,188$, dla której $b_1 = 0,000584393$,

2) rurze pokrytej osadem, o średnicy $0^m,2432$, dla której $b_1 = 0,0001167770$, to jest prawie dwa razy większe od poprzedniego.

P. Lévy uważa słusznie że jeżeli to jest prawdziwe dla dwóch rur uważanych, to może być nieprawdziwem dla dwóch innych rur tej samej natury, ale różnej średnicy; bo żeby ta własność była niezależną od średnic, trzebaby było żeby dwa współczynniki wchodzące w wyrażenie b_1, zmieniały się w tej samej proporcyi, skoro przechodzimy od jednego rodzaju rur do drugiego. Widzieliśmy zaś w ustępie n. 32, że dla rur żelaznych nowych :

$$\frac{Ri}{U^2} = \frac{1}{(34,4)^2(1+3\sqrt{R})},$$

a dla rur pokrytych osadem :

$$\frac{Ri}{U^2} = \frac{1}{(20,5)^2(1+\sqrt{R})},$$

a stosunek tych dwóch współczynników zależy od promienia i dla rur używanych w praktyce, to jest od $0^m,08$ do $1^m,00$ średnicy, zmienia się od 0,42 do 0,57. Dla rur uważanych przez p. Darcy mamy :

$$R = \frac{0,188}{2}, \quad \frac{Ri}{U^2} = 0,0005776,$$

$$R = \frac{0,2432}{2}, \quad \frac{Ri}{U^2} = 0,001225,$$

i rzeczywiście współczynnik dla rur z osadem jest dwa razy większy od współczynnika dla rur nowych w tym szczególnym przypadku.

W praktyce, uwaga p. Darcy prowadzi do wzięcia zamiast wzoru :

$$\left(\frac{U}{20,50}\right)^2 = Ri\left(1 + 3\sqrt{R}\right),$$

wzór :

$$\left(\frac{U}{36,4}\right)^2 = \frac{Ri}{2}\left(1 + \sqrt{R}\right),$$

a oznaczając przez U' wartości jakie daje ten ostatni, będziemy mieli :

$$\frac{U}{U'} = \frac{20,5\sqrt{2}\sqrt{1 + 3\sqrt{R}}}{36,4\sqrt{1 + \sqrt{R}}},$$

albo

$$\frac{U}{U'} = 0,796\sqrt{\frac{1 + 3\sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}}}.$$

Wartości tego stosunku są:

dla	$R=0,00$	0,796
	$R=0,40$	0,920
	$R=0,25$	1,025
	$R=0,50$	1,122.

Skoro więc średnica jest mniejsza od 0,50, stosunek $\frac{U}{U'}$ jest mniejszy od jedności, i wartość otrzymana według prawidła p. Darcy jest trochę za wielką, co przedstawia pewne niedogodności w zastosowaniu. Znajdując bowiem prędkości za duże zwłaszcza dla rur małej średnicy, które się łatwo zapychają, liczyć będziemy na większą ilość wody niż ta, jaką rury dadzą. Zawsze przeto jest lepiej i pewniej otrzymać prędkości prędzej za małe niż za duże, a wzór p. Lévy dla rur z osadem, daje je z całą dokładnością. Skoro dokonywane z jego pomocą rachunki są ukończone, powiększyć tylko należy otrzymane średnice, bardzo lekko, albowiem utworzone wewnątrz rury osady zajmują pewną przestrzeń, tym sposobem przewidzianą. Ale nie trzeba już, tak jak u p. Darcy, raz mnożyć, drugi raz dzielić przez dwa, otrzymane spadki, co może łatwo być powodem błędów w rachunkach, które same przez się dostatecznie są długie.

Na tem zamykamy nasz przegląd analityczny prac p. Lévy. Zdaje nam się że ich ostateczne wyniki, jeżeli może nie dojdą do tak powszechnego uznania jak wzory p. Darcy na najznakomitszych oparte doświadczeniach, to w każdym razie, wywiedzione z oryginalnych poszukiwań teoretycznych, zasłużą na uwagę Inżynierów i znajdą swe miejsce w wykładzie Hydrauliki.

Paryż dnia 18 Lutego 1872.

F. KUCHARZEWSKI.