
SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF AUX MARÉES

Bulletin astronomique, t, 20, p. 215-229 (juin 1903).

La théorie générale des marées est extrêmement compliquée, et conduit à bien peu de propositions susceptibles d'un énoncé simple; c'est ce qui m'engage à publier quelques formules générales qui me semblent pouvoir être utiles dans certains cas.

Je désigne par W le potentiel générateur des marées, par V le potentiel total, comprenant non seulement les termes provenant de l'attraction de la Lune et du Soleil, termes dont l'ensemble nous donne W , mais aussi les termes qui proviennent de l'attraction de la Terre elle-même, de la force centrifuge ordinaire et de l'attraction des eaux soulevées.

J'appelle p la pression et je pose

$$\varphi = V - p.$$

Je représente par ω la vitesse de rotation de la Terre et je prends l'axe de rotation pour axe des z . J'appelle u, v, w les composantes du déplacement. Les équations du mouvement s'écriront alors :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2\omega \frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 2\omega \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{dy}, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dz}. \end{cases}$$

Pour établir ces équations, je néglige d'une part le carré des déplacements et d'autre part, le frottement. M. Hough a montré en effet dans le tome XXVIII des *Proceedings of the London Mathematical Society* combien sont faibles les effets du frottement.

Aux équations (1), il convient d'adjoindre l'équation de continuité

$$(2) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cela posé, isolons un volume de liquide; soit Ψ ce volume, S la surface fermée qui le limite; soit $d\tau$ un élément de ce volume, $d\sigma$ un élément de la surface S ; soit T la force vive de ce liquide; nous aurons, en prenant pour unité la densité du liquide,

$$T = \int \frac{d\tau}{2} \sum \left(\frac{du}{dt} \right)^2$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} = \int d\tau \sum \left(\frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} \right).$$

En multipliant les équations (1) respectivement par

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt},$$

et ajoutant, on trouve

$$\sum \left(\frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} \right) = \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{dw}{dt} \frac{d\varphi}{dz} = \sum \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx},$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} = \int d\tau \sum \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Nous allons transformer le second membre en intégrant par parties; il vient

$$\int d\tau \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} = \int dx dy dz \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} = \int dy dz \varphi \frac{du}{dt} - \int dx dy dz \varphi \frac{d^2u}{dt dx}.$$

Si nous appelons α , β , γ les cosinus directeurs de l'élément $d\sigma$, on aura

$$dy dz = \alpha d\sigma; \quad dx dz = \beta d\sigma; \quad dx dy = \gamma d\sigma,$$

et par conséquent

$$\int d\tau \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} = \int \alpha d\sigma \varphi \frac{du}{dt} - \int d\tau \varphi \frac{d}{dt} \frac{du}{dx},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \int d\tau \sum \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} \\ &= \int \varphi d\sigma \left(\alpha \frac{du}{dt} + \beta \frac{dv}{dt} + \gamma \frac{d\omega}{dt} \right) - \int \varphi d\tau \frac{d}{dt} \left(\sum \frac{du}{dx} \right). \end{aligned}$$

En vertu de l'équation (2), la dernière intégrale est nulle; si d'autre part je désigne par N la composante du déplacement, normale à l'élément $d\sigma$, de telle sorte que

$$N = \alpha u + \beta v + \gamma \omega,$$

nous pourrions écrire

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} = \int \varphi \frac{dN}{dt} d\sigma.$$

C'est cette équation fort simple qu'il s'agit d'interpréter. Pour cela, je sais que le potentiel W qui engendre les marées est une fonction du temps et que cette fonction est une somme de termes trigonométriques. Nous pouvons considérer isolément l'un de ces termes et la marée partielle qui est due à ce terme. Dans ces conditions W, u, v, ω , φ , N sont des fonctions périodiques de même période. L'équation (3) est évidemment encore vraie quand on se borne à cette marée partielle.

Alors T est une fonction périodique de t; et comme la dérivée d'une fonction périodique a sa valeur moyenne nulle, nous pourrions écrire

$$(4) \quad \text{val. moy.} \int \varphi \frac{dN}{dt} d\sigma = 0.$$

Nous pourrions d'ailleurs écrire tout aussi bien

$$(4 \text{ bis}) \quad \text{val. moy.} \int N \frac{d\varphi}{dt} d\sigma = 0,$$

et, en effet,

$$\int \varphi \frac{dN}{dt} d\sigma + \int N \frac{d\varphi}{dt} d\sigma = \frac{d}{dt} \int \varphi N d\sigma$$

et $\int \varphi N d\sigma$ est une fonction périodique de T.

La surface S qui limite le volume Ψ se compose de trois parties :

- 1° Une portion du fond de la mer que j'appelle la surface S_1 ;
- 2° Une portion de la surface libre que j'appelle S_2 ;
- 3° Une portion de surface située à l'intérieur des mers et séparant le volume Ψ du reste du volume de l'Océan; c'est ce que j'appellerai S_3 .

Au fond de la mer, on a

$$N = 0,$$

de sorte que la portion de l'intégrale qui se rapporte à la surface S_1 est nulle.

Voyons ce qui se passe sur la surface libre S_2 .

Le potentiel V se compose de trois parties :

1° Le potentiel générateur des marées W ;

2° Le potentiel dû à l'attraction de la partie solide du Globe, à la force centrifuge ordinaire et à l'attraction d'un liquide qui occuperait le volume compris entre le fond des mers et la surface d'équilibre *moyenne* de la mer, telle qu'elle serait sans l'action des astres ; c'est ce que j'appelle V' ;

3° Le potentiel dû à l'action des eaux soulevées, c'est-à-dire à l'attraction d'une masse liquide qui occuperait le volume compris entre la surface d'équilibre *moyenne* et la surface d'équilibre *actuelle* des mers. C'est ce que j'appelle V'' .

On a donc

$$V = W + V' + V''.$$

Sur la surface d'équilibre moyenne, V' est une constante et l'on a $V' = V'_0$.

Comme la surface d'équilibre actuelle diffère très peu de la surface moyenne, on aura

$$V' = V'_0 - g \delta,$$

g étant l'intensité de la pesanteur, et δ la distance des deux surfaces comptée sur la normale à l'une d'elles, c'est-à-dire selon la verticale ; cette distance est ce que nous avons appelé N et ce que j'appellerai N_2 pour rappeler qu'il s'agit d'un élément de la surface S_2 . On a donc

$$V' = V'_0 - g N_2.$$

D'ailleurs p est égal à une constante, à la pression atmosphérique p_0 , de sorte que

$$\varphi = W + V'' + V'_0 - p_0 - g N_2;$$

comme φ et V ne sont déterminés qu'à une constante près, nous pourrions supposer $V'_0 = p_0$ et écrire

$$(5) \quad \varphi = W + V'' - g N_2.$$

L'intégrale $\int \varphi \frac{dN}{dt} d\sigma$ relative à la surface S_2 devient ainsi

$$\int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma + \int V'' \frac{dN_2}{dt} d\sigma - \int g N_2 \frac{dN_2}{dt} d\sigma.$$

La troisième de ces intégrales a sa valeur moyenne nulle, car c'est la dérivée de la fonction périodique

$$\frac{1}{2} \int g N_2^2 d\sigma.$$

La seconde de ces intégrales a également sa valeur moyenne nulle, si l'on suppose que le volume Ψ est le volume total de l'Océan tout entier. En effet, V'' est le potentiel dû à l'attraction des eaux soulevées, c'est-à-dire d'un volume dont chaque élément est un petit prisme de base $d\sigma$ et de hauteur N_2 . L'énergie potentielle due à l'attraction des eaux soulevées sur elles-mêmes est alors au signe près

$$\frac{1}{2} \int V'' N_2 d\sigma$$

et, en vertu d'un théorème bien connu de la théorie du potentiel newtonien, sa dérivée est égale à

$$\int V'' \frac{dN_2}{dt} d\sigma = \int N_2 \frac{dV''}{dt} d\sigma.$$

Notre intégrale est donc encore la dérivée d'une fonction périodique.

Si le volume Ψ n'est qu'une partie des Océans, ce qui précède n'est plus exact, néanmoins notre seconde intégrale peut encore être négligée, et, en effet, dans la plupart des questions relatives aux marées, l'effet du potentiel V'' peut être considéré comme beaucoup plus petit que ceux des potentiels W et V' .

L'intégrale relative à la surface S_2 peut donc s'écrire

$$\text{val. moy.} \int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma.$$

Envisageons maintenant la surface S_3 . Soit L la ligne fermée qui limite la surface S_2 . La surface S_3 pourra être considérée comme engendrée par une droite normale à S_2 , c'est-à-dire verticale, qui se déplace en s'appuyant sur la ligne L . Dans les questions relatives aux marées, on regarde la profondeur de la mer comme très petite, et elle l'est en effet par rapport aux longueurs d'onde et aux dimensions horizontales des Océans. Nous pourrions donc supposer que le long d'une de ces droites, la fonction φ et le déplacement N (que nous appel-

lerons N_3 pour rappeler qu'il s'agit d'un élément de la surface S_3) sont sensiblement constants depuis la surface jusqu'au fond de la mer.

Alors si ds est un élément de la ligne L et h la profondeur de la mer, l'élément $d\sigma$ de la surface S_3 sera $h ds$, de sorte que notre intégrale pourra s'écrire

$$\int h \varphi \frac{dN_3}{dt} ds,$$

et que l'équation (4) deviendra

$$(6) \quad \text{val. moy.} \int h \varphi \frac{dN_3}{dt} ds = - \text{val. moy.} \int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma.$$

La première intégrale doit être étendue à tous les éléments ds de la ligne L et la seconde à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S_2 limitée par cette ligne.

Il nous reste à interpréter cette équation. Si d'abord la surface S_2 comprend l'Océan tout entier, la profondeur h est nulle tout le long de la ligne L qui n'est plus autre chose que le bord des mers, et notre équation se réduit à

$$(6 \text{ bis}) \quad \text{val. moy.} \int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma = 0,$$

d'où l'on déduit aisément comme nous l'avons vu plus haut

$$(6 \text{ ter}) \quad \text{val. moy.} \int N_2 \frac{dW}{dt} d\sigma = 0.$$

De là nous pouvons déjà déduire une conséquence importante. On sait qu'on a cherché à expliquer certains phénomènes astronomiques par le ralentissement de la rotation terrestre dû à l'action des marées.

La réalité de ce ralentissement ne saurait être douteuse; car le frottement des marées absorbe de l'énergie qui ne peut être empruntée qu'à la force vive de rotation du Globe. Quant au mécanisme de ce ralentissement, on en rend compte de la façon suivante : par suite du frottement la marée est en retard sur le passage de la Lune au méridien et le bourrelet formé par les eaux soulevées ne se trouve pas dans le même méridien que la Lune; il s'ensuit que la résultante des actions de la Lune sur ce bourrelet ne va pas rencontrer l'axe de la Terre et possède par rapport à cet axe un *moment* qui tend à ralentir la rotation.

Mais alors on est conduit aux réflexions suivantes : le frottement n'est pas la seule cause du retard des marées; ce n'est pas uniquement de lui que dépend l'établissement des ports. Ce n'est même pas la cause principale de ce retard et j'ajouterai que, sauf pour certains ports situés au fond d'un canal peu profond,

le frottement n'exerce sur l'établissement qu'une influence inappréciable. Dans ces conditions on peut se demander si, *alors même qu'il n'y aurait pas de frottement*, l'action de la Lune sur le bourrelet ne va pas avoir une résultante ne rencontrant pas l'axe et ne va pas tendre à faire varier la vitesse de rotation de la Terre. *La réponse doit être négative.*

En effet l'action de la Lune sur un élément du bourrelet, qu'on peut assimiler à un prisme de base $d\sigma$ et de hauteur N_2 , a pour moment par rapport à l'axe terrestre

$$\frac{dW}{d\psi} N_2 d\sigma,$$

en appelant ψ la longitude du lieu; de sorte que le moment total est

$$(7) \quad \int \frac{dW}{d\psi} N_2 d\sigma.$$

Je dis que la valeur moyenne de cette intégrale est nulle. Supposons d'abord, en effet, que W se réduise à l'un de ses termes trigonométriques. On sait quelle est la forme des différents termes trigonométriques de W . Chacun d'eux est égal à une fonction de la latitude multipliée par le cosinus ou le sinus d'un multiple de

$$\psi - \alpha t,$$

α étant une constante. Ainsi chacun des termes de W satisfait à une équation de la forme

$$\frac{dW}{d\psi} = -\alpha \frac{dW}{dt}.$$

On aurait donc, si W se réduisait à un seul terme,

$$\int \frac{dW}{d\psi} N_2 d\sigma = -\alpha \int \frac{dW}{dt} N_2 d\sigma.$$

Donc en vertu de l'équation (6 *ter*), l'intégrale (7) aura une valeur moyenne nulle.

Rappelons en passant que, dans ce cas, l'équation (6 *ter*) est rigoureuse, car, lorsque la surface S_2 s'étend à l'Océan entier, nous avons vu que celle de nos intégrales qui dépend de V'' a sa valeur moyenne rigoureusement nulle.

Supposons maintenant que W se compose de plusieurs termes; et pour fixer les idées supposons deux termes seulement, le raisonnement qui va suivre s'étendant sans peine au cas d'un nombre quelconque de termes. Soient W' et W'' ces deux termes :

$$W = W' + W''.$$

Soient N' et N'' les termes correspondants de N_2

$$N_2 = N' + N'';$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \int \frac{dW}{d\psi} N_2 d\sigma &= \int \frac{dW'}{d\psi} N' d\sigma + \int \frac{dW''}{d\psi} N'' d\sigma \\ &+ \int \frac{dW''}{d\psi} N' d\sigma + \int \frac{dW'}{d\psi} N'' d\sigma. \end{aligned}$$

La première et la quatrième intégrale du second membre ont leur valeur moyenne nulle, d'après ce qu'on vient de voir, puisqu'elles ne sont autre chose que ce que deviendrait l'intégrale (7) si W se réduisait, soit au terme unique W' , soit au terme unique W'' .

Je dis maintenant que la deuxième intégrale (de même que la troisième) a également sa valeur moyenne nulle. Supposons, en effet, que W' soit proportionnel à $\cos(\alpha't + \beta')$ et W'' à $\cos(\alpha''t + \beta'')$; alors N' sera proportionnel à $\cos(\alpha't + \gamma')$, de sorte que notre deuxième intégrale se présentera sous la forme d'une somme de deux termes, le premier proportionnel à une ligne trigonométrique de $(\alpha' + \alpha'')t$, le second à une ligne trigonométrique de $(\alpha' - \alpha'')t$. Comme ni $(\alpha' + \alpha'')$, ni $(\alpha' - \alpha'')$ ne sont nuls (sans quoi les deux termes W' et W'' ayant même argument devraient être réunis en un seul), les valeurs moyennes de ces deux termes seront nulles.

C. Q. F. D.

Donc le moment de la résultante de l'action de la Lune sur les eaux soulevées a toujours sa valeur moyenne nulle, de sorte qu'il ne peut y avoir aucun changement dans la durée de la rotation de la Terre. Le principe de la conservation de l'énergie pouvait nous permettre de prévoir ce résultat, bien qu'on eût toujours pu se demander s'il n'y avait pas compensation entre l'énergie de rotation perdue par la Terre et l'énergie de translation gagnée par la Lune.

Ainsi le frottement seul peut produire l'effet en question, mais comme nous savons par les calculs de M. Hough que le retard des marées produit par le frottement est presque négligeable, nous devons conclure que cet effet est beaucoup plus petit qu'il ne le serait si on le calculait en partant, par exemple, de l'établissement observé dans les ports de la Manche, qu'il est beaucoup trop petit par conséquent pour produire des effets astronomiques tels que l'accélération séculaire de la Lune.

L'influence des marées océaniques sur la durée du jour est donc tout à fait minime et n'est nullement comparable à l'effet des marées dues à la viscosité

et à l'élasticité de la partie solide du Globe, effet sur lequel M. Darwin a insisté dans une série de Mémoires du plus haut intérêt.

Revenons à l'interprétation de notre équation (6); et d'abord quelle est la signification d'un élément quelconque $W \frac{dN_2}{dt} d\sigma$ de l'intégrale du second membre.

Supposons que W est proportionnel à $\cos(\alpha t + \beta)$; s'il n'y avait pas de retard de la marée, N_2 serait également proportionnel à $\cos(\alpha t + \beta)$ et $\frac{dN_2}{dt}$ à $\sin(\alpha t + \beta)$. Alors le produit $W \frac{dN_2}{dt}$ serait proportionnel à $\sin 2(\alpha t + \beta)$ et sa valeur moyenne serait nulle.

Si, au contraire, il y a un retard de la marée, N_2 sera proportionnel à $\cos(\alpha t + \gamma)$ et la différence $\gamma - \beta$ mesurera le *décalage* de la marée, positif s'il y a avance, négatif s'il y a retard; nous supposons bien entendu α positif; on aura alors

$$W \frac{dN_2}{dt} d\sigma = -M \alpha \cos(\alpha t + \beta) \sin(\alpha t + \gamma),$$

où M est une quantité positive indépendante du temps.

La valeur moyenne de notre élément sera donc

$$-M \frac{\alpha}{2} \sin(\gamma - \beta)$$

et aura, par conséquent, signe opposé à celui de $\sin(\gamma - \beta)$. Elle sera positive s'il y a retard, et négative s'il y a avance.

Il importe de préciser ce que, dans un pareil énoncé, nous entendons par *retard* et par *avance*. Supposons une onde de marée se propageant avec une certaine vitesse, par exemple dans le sens du méridien; si au départ il y a accord entre la pleine mer et le passage de la Lune au méridien, un peu plus loin la marée va se trouver en retard sur la Lune, puisque la propagation de l'onde n'est pas instantanée; le retard va s'accroître à mesure qu'on s'éloignera du point de départ; il finira par dépasser une demi-période; à ce moment nous dirons que la marée est en avance; c'est ainsi qu'une horloge qu'on ne remettrait jamais à l'heure finirait par avancer quand elle retarderait de plus de 6 heures.

Nous convenons donc de dire que *la marée est en avance quand $\sin(\gamma - \beta)$ est positif et en retard dans le sens contraire.*

Les points où la marée est en retard sont ceux où le travail moyen de

l'attraction de la Lune sur la molécule d'eau envisagée est positif; en effet la mer étant en retard, la Lune tend à accélérer son mouvement pour le ramener à la position d'équilibre pour laquelle il y aurait concordance de phase. Si, au contraire, la marée est en avance, le travail moyen de l'attraction lunaire est négatif; car la Lune tend à retarder le mouvement de la mer pour le ramener à la position d'équilibre, position qu'elle a pour ainsi dire dépassée.

Cherchons maintenant à interpréter le premier membre de (6).

Ici une courte digression est nécessaire. Reprenons les équations (1), le volume Ψ et la surface S qui le limite. L'équation de continuité appliquée à l'ensemble du volume Ψ nous donne

$$\int N d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface fermée S . Le long de S_1 , on a $N = 0$ et les éléments correspondants de l'intégrale sont nuls; le long de S_2 , notre intégrale peut s'écrire $\int N_2 d\sigma$, et comme un élément $d\sigma$ de S_3 est égal, comme nous l'avons vu, à $h ds$, cette partie de l'intégrale peut s'écrire $\int h N_3 ds$, de sorte que nous avons finalement

$$(8) \quad \int h N_3 ds = - \int N_2 d\sigma,$$

la première intégrale étant étendue à tous les éléments ds de la ligne fermée L et la seconde à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S_2 limitée par cette ligne.

Écrivons maintenant les équations (1) mais avec des axes quelconques et désignons par λ, μ, ν les trois composantes de la rotation terrestre

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2\nu \frac{dv}{dt} + 2\mu \frac{dw}{dt} = \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} - 2\lambda \frac{dw}{dt} + 2\nu \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{dy}, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} - 2\mu \frac{du}{dt} + 2\lambda \frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{dz}. \end{cases}$$

Si nous supposons que l'axe des z est la verticale au point considéré, nous voyons que la composante w est très petite au fond de la mer; car si la profondeur est très petite, la pente est aussi très petite et la normale à la surface du fond est sensiblement verticale. Cette composante, très petite au fond, sera partout très petite, puisque la profondeur est très petite. Dans les deux premières équations (1 bis) nous pourrions donc négliger les termes en $\frac{dw}{dt}$.

Supposons maintenant que près du point considéré la mer se réduise à un canal étroit et qu'on prenne l'axe des x parallèle à la direction de ce canal. Alors v est nul sur le bord du canal, et, comme la largeur est très petite, v sera très petit dans tout le canal. Nous pourrions donc négliger $\frac{dv}{dt}$ dans la première équation (1 bis), qui se réduira à

$$(1 \text{ ter}) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Revenons à notre intégrale (6); la lettre N_3 y désigne la projection du déplacement sur la normale à la surface S_3 , normale dirigée vers l'extérieur du volume Ψ . Si donc nous supposons que l'axe des x positifs est, dans le cas particulier qui nous occupe, dirigé vers l'intérieur de ce volume, nous aurons pour l'élément de l'intégrale (6)

$$h \varphi \frac{dN_3}{dt} ds = - h \varphi \frac{du}{dt} ds.$$

Supposons une onde se propageant dans le canal vers l'intérieur du volume Ψ ; nous aurons

$$\varphi = A \cos(\alpha t - \beta x + \gamma),$$

β et α étant positifs. On aura donc en vertu de l'équation (1 ter)

$$u = - A \frac{\beta}{\alpha^2} \sin(\alpha t - \beta x + \gamma)$$

et

$$- \varphi \frac{du}{dt} = + A^2 \frac{\beta}{\alpha} \cos^2(\alpha t - \beta x + \gamma).$$

La valeur moyenne de notre élément sera donc positive.

Si nous avions eu une onde se propageant vers l'extérieur du volume Ψ , il aurait fallu supposer β négatif et cette valeur moyenne aurait été négative.

Si nous avions eu une onde stationnaire, de telle façon que

$$\varphi = A \cos \alpha t \cos(\beta x + \gamma),$$

nous aurions eu

$$u = A \frac{\beta}{\alpha^2} \cos \alpha t \sin(\beta x + \gamma)$$

et

$$- \varphi \frac{du}{dt} = A^2 \frac{\beta}{4\alpha} \sin 2\alpha t \sin 2(\beta x + \gamma),$$

et cette valeur moyenne aurait été nulle.

Si nous supposons deux ondes simultanées se propageant en sens inverse avec la même vitesse

$$\varphi = A \cos(\alpha t - \beta x + \gamma) + B \cos(\alpha t + \beta x + \gamma')$$

nous aurions eu

$$u = -A \frac{\beta}{\alpha^2} \sin(\alpha t - \beta x + \gamma) + B \frac{\beta}{\alpha^2} \sin(\alpha t + \beta x + \gamma')$$

et

$$-\varphi \frac{du}{dt} = A^2 \frac{\beta}{\alpha} \cos^2(\alpha t - \beta x + \gamma) - B^2 \frac{\beta}{\alpha} \cos^2(\alpha t + \beta x + \gamma'),$$

de sorte que la valeur moyenne serait la somme algébrique des valeurs moyennes que donnerait séparément chacune des deux ondes.

Imaginons maintenant un canal plus large, mais toujours parallèle à l'axe des x .

Nos équations (1 bis) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2\nu \frac{dv}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 2\nu \frac{du}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy}, \end{aligned}$$

où ν est la composante verticale de la rotation, c'est-à-dire ω multiplié par le sinus de la latitude.

Je supposerai de plus pour faciliter le calcul que le potentiel générateur W est nul dans la région considérée, que nous regarderons comme assez petite pour pouvoir être considérée comme plane. Dans ces conditions, en négligeant aussi V'' , l'équation (5) nous donnera

$$N_2 = -\frac{\varphi}{g},$$

et l'équation (8) deviendra

$$-\int gh u ds = \int gh N_3 ds = \int \varphi d\sigma,$$

d'où l'on déduit aisément

$$(9) \quad g \frac{dh u}{dx} + \varphi = 0.$$

Nous supposerons d'ailleurs h constant pour simplifier. Nous voyons alors qu'on peut satisfaire aux équations (1 bis) et (9) ainsi qu'aux conditions aux limites en posant

$$\begin{aligned} \varphi &= A e^{\alpha y} \cos(\alpha t - \beta x), \\ u &= B e^{\alpha y} \sin(\alpha t - \beta x), \quad v = 0 \end{aligned}$$

pourvu que

$$gh\beta B = A, \quad + B\alpha^2 = \beta A, \quad 2\nu B\alpha = \beta a.$$

Les conditions aux limites sont en effet satisfaites, car si $y = b$ et $y = b'$ sont les équations des deux bords du canal, ces conditions aux limites exigent que pour ces deux valeurs de y on ait $v = 0$.

En adoptant pour φ et u ces valeurs il est aisé de vérifier que la signification de l'élément

$$h\varphi \frac{dN_3}{dt} ds = -h\varphi \frac{du}{dt} ds$$

demeure bien la même que dans le cas simple d'abord traité.

Dans le cas général, il serait plus difficile de donner une définition directe du sens dans lequel se propage une onde de marée. Mais nous pouvons admettre *par définition* que l'élément d'intégrale $h\varphi \frac{dN_3}{dt} ds$ représente la *quantité de perturbation* qui pénètre dans le volume Ψ à travers l'élément $h ds$.

Les exemples simples cités plus haut suffiraient pour justifier cette définition. Mais on peut en donner une autre justification.

Si, en effet, nous reprenons l'équation (3) nous voyons que $\int \varphi \frac{dN}{dt} d\sigma$ représente l'accroissement de la force vive totale, de sorte qu'il est naturel de considérer $\varphi \frac{dN}{dt} d\sigma dt$ comme la quantité de force vive qui entre dans le volume pendant le temps dt à travers l'élément $d\sigma$.

Revenons à l'équation (6) et supposons d'abord que le volume Ψ comprenne l'Océan tout entier; alors elle se réduira à

$$\int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma = 0.$$

Comme les éléments de cette intégrale sont positifs si la marée est en retard et négatifs si elle est en avance, nous devons d'abord conclure qu'il est impossible que la marée soit en retard sur toute la surface des mers, ou en avance sur toute la surface des mers, en donnant aux mots *avance* et *retard* le même sens que plus haut.

Si maintenant nous reprenons l'équation (6) en ne supposant plus que le volume Ψ comprenne l'Océan entier, nous voyons que si l'on considère les ondes de marée qui pénètrent dans ce volume, ou qui en sortent, ces ondes

doivent converger vers les régions où la marée est en avance, et diverger des régions où elle est en retard.

Car, si nous supposons que le volume Ψ soit une région vers laquelle les ondes de marée convergent de toutes parts, dans le premier membre de (6) tous les éléments seront positifs. L'intégrale

$$\int W \frac{dN_2}{dt} d\sigma$$

devra donc être négative, c'est-à-dire que la marée devra être en avance.

On s'étonnera d'abord de ce résultat, car il semble que, si l'on considère la propagation d'une onde, la marée doit être plus en retard en aval qu'en amont. Mais on devra réfléchir que l'avance de la marée ne peut se maintenir qu'à la condition qu'elle soit entretenue par une perturbation venue du dehors.

Examinons à ce point de vue la théorie des marées de Whewell qui, comme on le sait, supposait que les marées prenaient naissance dans les mers antarctiques, produisaient des ondes qui remontaient vers le Nord et suivaient les deux Océans Atlantique et Pacifique à la façon d'une vague qui se propage dans un canal et convergeaient vers les mers arctiques.

Or, si nous reprenons l'équation (6) en l'étendant aux mers arctiques seules, nous voyons que, dans le voisinage du pôle, W est très faible, de sorte que notre équation se réduit sensiblement à

$$\text{val. moy.} \int h \varphi \frac{dN_2}{dt} ds = 0.$$

Or, si les ondes convergeaient toutes vers le pôle, tous les éléments de cette intégrale seraient positifs.

La théorie de Whewell ne serait donc tenable que si l'on attribuait au frottement un effet considérable capable de détruire les marées en 12 heures; or, si l'on s'en rapporte aux calculs de M. Hough, que je citais plus haut, il faudrait 20 ans pour réduire l'amplitude des oscillations à une fraction $\frac{1}{e}$ de sa valeur initiale.

