TRADUCTION

DU

COMMERCIUM EPISTOLICUM

DE WALLIS.

CORRESPONDANCE

RÉCEMMENT ÉCHANGÉE

SUR CERTAINES QUESTIONS MATHÉMATIQUES

entre les très nobles

LORD WILLIAM VICOMTE BROUNCKER, Anglais,
SIR KENELM DIGBY, chevalier, Anglais,
M. FERMAT, conseiller au Parlement de Toulouse,
M. FRENICLE, gentilhomme, de Paris,

et

SIR JOHN WALLIS, professeur de Géométrie à Oxford,
M. FRANS VAN SCHOOTEN, professeur de Mathématiques à Leyde,

et autres.

—

Éditée par John Wallis, docteur de Théologie, professeur en la chaire de Géométrie de Savile à la très célèbre Académie d'Oxford.

—

Oxford, imprimé par A. Lichfield, typographe de l'Académie,
aux frais de Th. Robinson, 1658.

[Réédité dans le Tome second des Œuvres de Wallis, Oxford, 1693.]

DÉDICACE

DE

JOHN WALLIS

AU TRÈS ILLUSTRE ET TRÈS NOBLE

SIR KENELM DIGBY,

CHEVALIER EN ANGLETERRE.

Très illustre et très noble chevalier,

Chaque fois qu'à part moi je repense aux multiples obligations que je vous ai, je désespère entièrement d'égaler mes titres à vos faveurs; il ne me reste pas même à compter pouvoir, pour de tels bienfaits, acquitter ma dette de remercîments. J'oserais plutôt me croire capable de triompher de toute autre difficulté, que de celle de vous témoigner une reconnaissance digne de vous ou égale à mon devoir. En tout cas, je dois considérer comme un honneur insigne, inappréciable, que votre faveur ait daigné venir me chercher sans que j'aie eu à l'implorer et quand j'étais loin d'y prétendre; mais bien plus, vous m'avez de vous-même recommandé, moi et mes travaux, à d'autres personnages de premier ordre; et pour mes intérêts vous avez montré autant de sollicitude, pour ma renommée, déployé autant de zèle, que s'il se fût agi de vous-même.

Ainsi donc cela est de vous, cela vous est entièrement imputable, que j'aie été appelé à correspondre avec vous et en même temps avec ces autres personnages illustres; que vous ayez obtenu d'elles à mon endroit de tels éloges, qu'ils dépassent tout ce que je pouvais, je ne dis pas me promettre, mais espérer d'elles; qu'il me sera impossible de me les arroger, sans enfreindre les règles de la modestie. Si en effet, pour nous conformer à vos désirs, nous avons, le très honorable Vicomte Brouncker et moi, abordé quelques problèmes, tant d'Arithmétique que de Géométrie, proposés par les célèbres Fermat et Frenicle (que la France, ainsi que vous le dites, estime les premiers en ces sujets); si nous en avons donné la solution, nous ne prétendons point pour cela, je dirai mieux : nous n'avons jamais espéré ni nous faire traiter d'Hercules ou de Samsons, ni vous voir mettre au rang des premiers maîtres de ce siècle ([1]), éloges par lesquels des hommes aussi supérieurs que nos correspondants ont su nous faire rougir. Je parle pour moi du moins; car je ne voudrais en rien rabaisser les titres du très noble et très savant Vicomte.

Mais de telles personnes ont droit, elles aussi, à des remercîments que je vous prie de leur adresser en mon nom, pour avoir daigné m'honorer de leur commerce et me traiter avec tant de bienveillance; car il ne faut nullement tenir compte de quelques expressions, parfois un peu sévères, échappées dans le cours des discussions. Je voudrais les prier à mon tour de vouloir bien excuser ce que nous avons pu, le très honorable Vicomte et moi, écrire de notre côté un peu trop librement; si, de même, nous avons manqué à leur accorder tous les titres auxquels a droit leur rang, c'est que j'ignore les usages et les dignités de leur pays; j'aurai, bien contre mon gré, commis une faute à l'égard de personnes aussi illustres et aussi éminentes.

De vous enfin, très illustre Chevalier, de vous que, rendu toujours plus audacieux par votre faveur même, nous avons tant de fois fatigué, c'est de l'indulgence que je réclame, non pas un éloge. Ne dédaignez pas, je vous en prie, d'accepter l'offre que je vous fais de ce qui vous appartient, car presque tout en a été écrit par vous ou à vous.

Mais vous avez, nous le proclamons, également droit à la reconnaissance publique pour avoir, cette fois comme ailleurs, défendu avec autant d'ardeur la nation anglaise, montré autant de souci pour sa gloire; à part du moins cette erreur pardonnable d'avoir appelé, pour lutter contre de pareils athlètes, un champion aussi chétif, aussi peu exercé que moi. Car si, en cette affaire, je ne m'en suis pas tiré trop malheureusement, je ne voudrais pas qu'on jugeât des forces des Anglais sur l'échantillon de ma faiblesse.

Adieu, très insigne Seigneur, puissiez-vous rester longtemps encore l'actif promoteur des belles-lettres et l'ornement de la nation anglaise.

([1]) Expressions de Frenicle. — *Voir* ci-après les Lettres 41, 42 et 43.

CORRESPONDANCE

RÉCEMMENT ÉCHANGÉE

SUR CERTAINES QUESTIONS MATHÉMATIQUES.

LETTRE I.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS, A OXFORD.

Votre lettre du 22 février/4 mars, clarissime professeur, me fait profondément sentir combien je vous suis redevable et par quels liens, plus forts de jour en jour, vous m'attachez à vous; car la bienveillante acception que vous avez daigné donner à la liberté dont j'ai usé à votre endroit est pour moi un véritable bienfait dont je vous rends grâces du fond du cœur. Vous trouverez dans ce pli un papier que j'ai reçu hier de M. White et qu'il m'a prié de vous faire parvenir. La proposition est, je crois, plus difficile qu'elle ne paraît au premier abord; car, autrement, elle ne mériterait guère le titre que je lui vois donné. En tous cas, je ne doute point que vous n'en trouviez promptement la solution, qu'obtiendra peut-être aussi quelque jour

Votre très fidèle et très respectueux ami,

BROUNCKER.

5/15 mars 1656/7.

Le papier inclus était ainsi conçu :

« *Défi de M. Fermat pour M. Wallis avec les vives recommandations du messager,* *Thomas White.* »

(*Voir* la pièce 79[B] de la *Correspondance de Fermat*, Tome II, page 333; traduction, Tome III, page 311.)

LETTRE II.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER, A LONDRES.

Très honorable Mylord, j'ai reçu la nuit dernière votre lettre datée de la veille, et en même temps le papier inclus de M. Fermat. La question est à peu près du même genre que les problèmes posés d'ordinaire sur les nombres dits *parfaits*, *déficients*, ou *abondants;* ces problèmes, et autres de même espèce, ne peuvent guère ou ne peuvent pas du tout être ramenés à une équation générale, embrassant tous les cas. Quoi qu'il en soit au reste de celui dont il s'agit, il me trouve trop absorbé par de nombreuses occupations, pour que je puisse lui consacrer immédiatement mon attention. Mais je n'en ferai pas moins, pour le moment, cette réponse :

Le seul et même nombre 1 *satisfait aux deux demandes*.

Qu'il me soit également permis de proposer une question semblable :

Trouver deux nombres carrés tels que, si l'on ajoute à chacun d'eux ses parties aliquotes, on ait la même somme.

Par exemple : $16+8+4+2+1=31=25+5+1$.

Il s'agit de trouver un autre couple semblable.

Je souhaite la meilleure santé à Votre Seigneurie, je l'assure de l'empressement de mon respect, et je vous prie de voir en moi,

Très honorable Mylord,

De Votre Seigneurie le très obéissant serviteur,

J. WALLIS.

Oxford, 7/17 mars 1656/7.

Immédiatement après l'échange des lettres qui précèdent, on remit à Mylord vicomte Brouncker une troisième question (¹) *de la part du même*

(¹) La pièce 81 de la Correspondance de Fermat, t. II, p. 334, t. III, p. 312.

M. Fermat, qui semblait ainsi abandonner les premières, résolues dans l'intervalle, paraît-il, par M. Frenicle. Mylord indiqua la solution de cette troisième question, en même temps que celles des deux précédentes, sous une forme très brève, dans un écrit qu'il remit à M. White, lequel lui avait transmis le message; ce fut, je crois bien, dans ce même mois de mars. M. White fit parvenir cet écrit à Paris; mais comme Mylord Vicomte n'en a conservé aucune copie, nous ne pouvons l'insérer ici textuellement; le sens en sera toutefois reproduit ci-après, Lettre IX. Il s'ensuivit que nous ne nous attachâmes plus dès lors à une solution ulterieure des questions précédentes, que leur auteur lui-même nous paraissait négliger, puisqu'il leur avait substitué un troisième problème, dans lequel il mettait plus de confiance; or ce problème avait été, presque aussitôt, résolu par Mylord Vicomte.

LETTRE III.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

La lettre ci-incluse, clarissime professeur, a été écrite par M. Fermat au très illustre chevalier Kenelm Digby et m'a été remise la nuit dernière par M. White; j'ai cru devoir saisir la première occasion pour vous l'envoyer.

Que M. Fermat ne soit pas encore pleinement persuadé de la vérité de votre *quadrature du cercle*, je le crois sans peine; car, si je ne me trompe, il n'a regardé votre Traité qu'à la légère. Autrement il me semble qu'il eût remarqué, dans les propositions 101, 102, 103, 104, 105, le contraire de ce qu'il paraît vouloir donner à entendre, en parlant de ses *hyperboles infinies,* à savoir que vous n'auriez pas considéré ces figures.

Mais ce qu'il dit de leurs *centres de gravité* indique bien qu'il mérite vraiment la réputation qui est venue jusqu'à nous, et je crois qu'il vous sera aussi agréable qu'à moi de voir la démonstration et la règle générale qu'il annonce à ce sujet.

Comme cet envoi est autographe, je crois que M. White s'attend à ce que je le lui rende; je vous prie donc, clarissime professeur, de le retourner à

Votre très fidèle et très respectueux ami,

BROUNCKER.

Londres $\frac{\text{30 mai}}{\text{9 juin}}$ 1657.

LETTRE IV

(incluse dans la précédente).

FERMAT A KENELM DIGBY, CHEVALIER EN ANGLETERRE, A PARIS.

De Castres, le 20 avril 1657.

(Voir la *Correspondance de Fermat*, n° 82, t. II, p. 337.)

LETTRE V.

JOHN WALLIS AU TRÈS ILLUSTRE CHEVALIER SIR KENELM DIGBY.

Ce n'est pas pour moi, très noble et très savant chevalier, une mince récompense de mon travail que de vous voir daigner examiner par vous-même le modeste fruit de mes dernières veilles et, comme s'il en valait la peine, demander à son sujet le jugement d'autrui. Le nom célèbre de Digby, le parfait savoir de celui qui le porte, ne peuvent être ignorés de personne, après les écrits (pour taire le reste) que vous avez donnés au public et qui sont pleins d'une science universelle; ce n'est donc pas une petite gloire que d'avoir pu, sinon satisfaire entièrement un tel homme, au moins accomplir un travail qu'il estime assez pour ne pas le dédaigner entièrement. Mais ce qui rehausse le plus votre insigne clémence, compagne de la véritable noblesse, c'est que vous avez comblé de cet honneur immérité un homme tout à fait obscur et que vous ne connaissiez aucunement d'ailleurs.

Ainsi par cette lettre que vous a écrite le très noble M. Fermat, et que, dans votre parfaite courtoisie, vous m'avez fait communiquer par M. White, obligeance qui me fait votre débiteur, j'apprends que vous avez et demandé et obtenu le jugement de Fermat sur mon Ouvrage. J'en dois également de la reconnaissance à ce très noble savant, qui a daigné parcourir ce Traité, qui en a porté un jugement assez honorable pour moi, enfin qui veut bien estimer et l'œuvre et son auteur; je ne puis qu'apprécier hautement cette faveur d'un tel homme, si habile en mathématiques.

Votre très noble Correspondant pense que je n'ai aucunement eu vent de ce qu'il avait dès longtemps trouvé sur la quadrature des paraboles et des hyperboles; cela est si vrai que, si je m'en souviens, je n'avais même jamais entendu prononcer le nom de Fermat (laissez-moi confesser ingénûment mon ignorance), avant que ce que j'ai publié sur ce sujet n'eût été écrit depuis longtemps ou même déjà imprimé; sans quoi je n'aurais pas dissimulé ce que j'en aurais pu savoir. Je regarde même comme un privilège d'avoir pu, par là, connaître un tel savant, et suis bien loin de vouloir rien diminuer de ses inventions; je voudrais bien plutôt le voir mettre au jour et ne pas cacher jalousement au monde savant les découvertes qu'il garde à part lui, et qui, j'en suis bien persuadé, sont tout à fait excellentes.

Mais pour ce qu'en contient sa présente lettre, j'ai bien peu à dire. *Les nouvelles hyperboles,* comme il les appelle, carrées par lui, ce sont précisément les figures dont, dans mon *Arithmétique des infinis,* j'ai enseigné la quadrature prop. 102; de même celle de ma prop. 103 est une véritable hyperbole, comme je l'ai indiqué prop. 95. Quant à celles qu'il exclut comme n'étant pas susceptibles d'être carrées, je les ai également exclues prop. 104; car lui et moi parlons exactement des mêmes. Toutefois (je ne sais s'il y a suffisamment fait attention), ces courbes de la prop. 104 ne diffèrent point de celles de la prop. 102; elles leur sont au contraire identiques, sauf qu'elles sont prolongées de l'autre côté; ce que j'ai indiqué prop. 105.

J'ai également montré comment il se fait que, parmi de telles figures prolongées à l'infini, les unes sont infinies en grandeur, les autres sont au contraire de grandeur finie et par conséquent peuvent être égalées à des aires finies; le scholie de la prop. 101 donne, si je ne me trompe, la raison naturelle et immédiate de cette merveilleuse propriété; cette raison est-elle bien la même qu'assignait Fermat, écrivant à Torricelli? Je ne pourrais le dire, à moins de connaître ce qu'il disait.

Cependant, si votre très noble Correspondant voulait bien indiquer, soit sa méthode de quadrature des paraboles ou des hyperboles, soit encore ce *criterium* qui distingue dans les figures de ce genre les infinies des finies, j'entends la véritable raison de cette propriété, cela me ferait le plus grand plaisir. Car si ma méthode m'a suffi, comme je l'ai dit, pour ce double objet, je n'ai pas coutume d'avoir pour mes découvertes tant de prétentions, ni tant de partialité non plus, que je croie pour elles devoir négliger celles des autres.

Je ne puis penser autrement pour les spéculations qui concernent le centre de gravité, sujet que j'ai, à dessein, complètement omis. En effet, ces mêmes principes dont je me sers permettent de déterminer sans difficulté le centre de gravité, tant des paraboles de tout genre que de la plupart de toutes les autres figures, planes ou solides; j'ai même eu un moment l'intention de m'y arrêter; mais, pour ne pas me perdre dans les digressions, pour ne pas trop rompre le fil des théorèmes et fatiguer le lecteur par l'excessive variété d'une matière entremêlée, j'ai cru devoir m'abstenir entièrement de cette spéculation comme de bien d'autres qui auraient eu leurs attraits. Je me suis contenté d'indiquer parfois du doigt (dans les scholies) ce que j'omettais à dessein, et souvent je n'ai même pas donné ces indications.

Votre très noble Correspondant veut bien promettre courtoisement, pourvu que j'en exprime le désir, de me communiquer ses découvertes à ce sujet. Qu'il croie bien qu'à moins qu'il y trouve quelque ennui, il me ferait de la sorte le plus grand plaisir; car je ne puis attendre de lui rien que de parfait et de sublime.

Enfin, pour la quadrature du cercle que j'ai donnée, il indique qu'il n'en est pas pleinement persuadé, remarquant particulièrement que ce qui se déduit par comparaison en Géométrie ne procède pas toujours sans s'écarter parfois de la vérité. J'admets sans peine qu'il garde quelque défiance là-dessus, tant qu'il n'aura pas plus soigneusement examiné la question; je n'ignore pas qu'on est là sur une pente glissante et où un faux pas se fait bien vite. Mais précisément parce que je le savais très bien, j'ai été d'autant plus prudent et attentif, j'ai cherché à être aussi clairvoyant que possible tout le long du chemin pour ne pas me laisser surprendre de la sorte et entraîner dans quelque erreur. Aussi, j'en ai la confiance, mes précautions ont été telles que je ne me suis nulle part servi d'aucune comparaison qui ne puisse supporter l'examen géométrique et qui ne soit assise sur le fondement d'une légitime démonstration. J'ai bien pu ne pas toujours en donner les prolixes développements; je cherchais à m'épargner un travail pénible, à éviter l'ennui au lecteur; mais ce qui peut arrêter, je suis en mesure de le suppléer facilement.

Quant au fond de la question, ce qui fait d'ailleurs que je ne suis pas trop inquiet sur la vérité de mes propositions, c'est que le très honorable Seigneur William vicomte Brouncker, si compétent dans la matière et dont j'aurais dû faire mention, dans les termes les plus élogieux, à la prop. 191, ayant entrepris une vérification numérique et conduit son calcul jusqu'au dixième rang, a trouvé que tout allait à souhait. Car il a obtenu pour le rapport de la circonférence au diamètre

$$\left.\begin{array}{ll}\text{plus que de} & 3,14159\,26535\,69\ldots \\ \text{moins que de} & 3,14159\,26536\,96\ldots\end{array}\right\}\text{ à } 1,$$

ce qui concorde avec les nombres de Ludolf Van Keulen et autres; de plus, dans toute la suite du calcul, il a trouvé, comme il le fallait, un rapport alternativement en excès et en défaut; je ne doute donc pas que je ne sois arrivé à un résultat véridique.

Voilà ce que je crois, très noble Chevalier, devoir dire sur la lettre de Fermat; vous pourrez lui en faire part, si vous le jugez à propos. Il me reste, après vous avoir témoigné ma reconnaissance pour l'honneur que vous avez bien voulu me faire, après vous avoir fait mes meilleurs souhaits, à me déclarer,

Très noble Seigneur,

Votre très respectueux et très obéissant

J. Wallis.

Oxford, 6/16 juin 1657.

LETTRE VI.

Kenelm Digby a John Wallis.

Très honoré et illustre Monsieur,

La lettre que vous m'avez fait la faveur et l'honneur de m'écrire le 6 juin est arrivée pour moi dans cette ville quand j'en étais absent, et, immédiatement après mon retour, j'ai été pris d'une maladie (reste d'une plus forte que j'ai eue à Poitiers) et de la sorte empêché jusqu'à présent de vous adresser ces humbles remercîments et de m'acquitter des respectueux égards que je vous dois. Et maintenant que je suis hors d'affaire, je me trouve dans la crainte de rester bien au-dessous ou de ce que je désire ou de ce que je dois faire. Car, à considérer que la mesure de toute civilité ou reconnaissance est à prendre, soit de la dignité de la personne qui la rend, soit du mérite de celui qui la reçoit, je trouve de part et d'autre une disproportion si énorme (pour le cas qui se présente à moi), qu'il n'y a ni obséquiosité de langage, ni politesse d'expressions qui puisse en faire la balance. Je ne m'embarquerai donc pas moi-même dans cette tâche impossible; mais, voyant que c'est simplement votre bonté qui vous a disposé à être ainsi bienveillant et favorable pour moi, j'aurai recours à cette même bonté, en vous suppliant d'accepter la profession que je vous fais ici en toute vérité et sincérité, que, de même que j'honore très hautement vos grands talents et mérites, ainsi que les nobles productions de votre puissant et savant esprit, qui fait de vous l'honneur de notre nation et l'envie de toutes les autres, de même je vous attribue le droit de me commander toujours tout ce qui pourra dépendre de moi pour votre service et en toute occasion je l'accomplirai avec une aussi prompte exactitude que vous pouvez le désirer du plus dévoué ami et serviteur que vous ayez.

Ma santé ne m'a pas permis d'écrire à M. Fermat jusqu'à hier (1) (jour de poste pour Toulouse); je lui ai d'ailleurs envoyé alors copie de la lettre que vous m'avez adressée. Ce que je recevrai de lui en retour, je vous en donnerai aussitôt connaissance, et je me considère comme très heureux et très honoré d'être l'intermédiaire de la communication entre deux aussi grands personnages. Je compte que M. White vous enverra la copie de la dernière lettre de M. Fermat à moi (2), copie que je lui adresse maintenant pour qu'avant de vous la faire parvenir, il la montre à Mylord Brouncker, dont il y est fait mention. Je crois assez que les lettres de Mylord n'ont pas été bien traduites à M. Fermat. Mais quant à son doute, que la solution de son problème par Mylord ne serait pas bonne, parce qu'il l'a traité à la légère, ce n'est pas un bon argument, comme M. de Frenicle l'a montré par expérience. Car, ce même problème lui étant montré comme un défi à tous les mathématiciens de l'Europe, il donna immédiatement à la personne qui le lui apportait quatre solutions (en quatre nombres différents), et il lui en envoya six autres le lendemain matin et, de plus, à résoudre un problème tiré de son fonds, problème où l'autre trouvera, je crois, une rude besogne pour lui.

Je ne dois pas prendre congé de vous, avant de vous avoir dit un mot ou deux de votre digne collègue, le Docteur Ward. Il y a déjà quelque temps que j'avais entendu parler de son livre contre M. Hobbes, et M. White l'avait envoyé par ici pour moi, pendant que j'étais en Languedoc; mais je ne l'avais pas vu jusqu'à présent, où je viens de le dévorer d'un bout à l'autre avec beaucoup de plaisir et de contentement. Seulement, là où il lui a plu de parler avantageusement de moi au delà de mon mérite (excessivement au delà), le sang m'a

(1) Mardi 31 juillet 1657.

(2) N° 83 de la Correspondance de Fermat, t. II, p. 341.

monté aux joues; j'ai rougi de honte de ne pouvoir répondre à l'idée qu'il éveillait de moi, et la honte étant une sorte de chagrin, vous croirez aisément que ces éloges immérités doivent m'être pénibles. Pourtant, à vous confesser la vérité, je ne peux pas me sevrer tellement de la vanité que je ne sois ému et charmé (et cela très profondément) par tout ce que dit favorablement de moi un homme si instruit et si excellent.

Je terminerai ce point qui le concerne en vous suppliant de lui offrir mon très humble service (car, je pense, vous le voyez souvent), avec de très vifs et respectueux remercîments pour son excessive civilité à mon égard, comme aussi avec l'assurance que je l'estime et honore de tout mon cœur. C'est un illustre triumvirat que vous deux et le Docteur Wilkins exercez en littérature et en tout genre de mérite. Vos noms sont fameux au loin; j'entends parler de vous de divers côtés, mais jamais avec plus d'abondance ou plus d'affection que par M. White, que vos bontés ont rendu entièrement vôtre et qui l'exprime amplement en toute occasion. Mais je vous détourne trop de vos grandes et multiples occupations; je vous en demande instamment pardon et vous assure que je suis et me montrerai toujours,

Illustre Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, le 1er août 1657.

LETTRE VII.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très noble Monsieur,

Sur le vu de votre lettre si courtoise du 1er août, que j'ai eu l'honneur de recevoir il y a deux jours, il n'est pas aisé de dire combien je me suis trouvé surpris, sachant combien peu j'ai mérité d'une si noble main et quelle chétive part m'était due de ce que vous vous êtes plu à m'attribuer si libéralement. Je fus honteux, je l'avoue, de penser combien peu je pouvais prétendre à cet honneur que vous me faisiez et j'aurais profondément rougi, si la soudaineté de la surprise ne m'avait pas autant stupéfait. Et quand j'ai pensé à vous répondre, j'ai trouvé que vous m'aviez prévenu de telle sorte, en disant tant de ce que je devrais vous dire, qu'à moins de transcrire et de vous retourner vos propres mots (de meilleurs, je ne pourrais), il ne me reste rien à répliquer. Et même je n'oserais pas, de peur de profaner, avec ma plume trop rude, ce langage, que je ne puis prétendre à imiter. Si vous vouliez seulement me faire assez de faveur pour relire attentivement la copie de votre propre lettre, et en interpréter la plus grande partie comme dite par moi en reconnaissance de ces politesses que je ne pouvais mériter et en désaveu de ces mérites que je ne puis m'attribuer, vous y trouveriez une meilleure réponse, en un langage plus convenable à votre noble personne, que vous ne pouvez certainement l'attendre de moi sous aucun rapport. Car, quoique je ne puisse me vanter d'aucune adresse à la paume, je sens très bien que je ne puis souffrir, fût-ce au plus grand risque pour moi, qu'un langage si obséquieux, de telles expressions d'obligeante bonté, restent devant moi, sans que je les retourne à la même main dont elles me viennent; et, quoique je ne sois pas capable de les retourner avec cette grâce et cette dextérité qui ont accompagné leur envoi, je vous supplie humblement de croire que ce n'est pas par défaut quelconque de réalité d'affection ou de bonne volonté que je reste en dessous de ce que je dois à quelqu'un que j'honore autant.

Je dois avouer que je n'ai pu sans ressentir une agréable satisfaction (*neque enim mihi cornea fibra est*) [1] me voir moi-même si hautement honoré, malgré mon indignité, sous d'aussi beaux traits tracés, quoique si peu ressemblants, par une main si excellente; ainsi parfois les dames se plaisent à voir leurs portraits les flatter. J'en aurais été

[1] « Je n'ai pas des entrailles de corne ».

extrêmement fier, sans la conscience que j'ai du peu de ressemblance de ma propre personne; car l'autorité du si galant homme à qui j'ai cette obligation est capable de donner crédit à son opinion sur moi.

Dès le retour ici des deux autres personnes auxquelles vous voulez bien m'unir dans votre bonne opinion, le docteur Wilkins et le docteur Ward, je leur ferai connaître combien ils vous sont redevables de l'honneur que vous leur faites. Pour le moment, je puis seulement, d'après le grand respect que je sais qu'ils ont pour vous, vous assurer qu'ils sont entièrement vos serviteurs. Et nous devons tous nous reconnaître extrêmement endettés envers M. White qui s'est plu, non seulement à juger si favorablement de nous, mais encore à nous représenter à vous sous des traits assez flatteurs pour qu'ils aient obtenu une place si avantageuse dans votre opinion.

Le problème dont vous parlez, proposé par M. Fermat comme défi à tous les mathématiciens de l'Europe, est, je suppose, celui dont j'ai reçu de Lord Brouncker une copie en ces termes :

(*Voir* Correspondance de Fermat, n° 79 B, t. II, p. 333; t. III, p. 311.)

A ce problème je ne donnai, pour le moment, d'autre solution que : *Le seul et même nombre* 1 *satisfait aux deux demandes;* j'ajoutai d'ailleurs, comme renvoi, un autre problème de même nature, que vous trouverez à l'essai, si je ne me trompe, aussi difficile que les deux de Fermat :

Trouver deux nombres (*voir* plus haut, p. 404, lignes 16 à 19) ... couple semblable.

D'ailleurs j'ajoutais que je regardais des problèmes de cette nature, dont il est aisé d'imaginer un grand nombre en peu de temps, comme demandant plus de travail qu'ils n'offrent d'usage ou de difficulté.

Depuis lors je n'y ai pas davantage repensé; car je fus précisément alors obligé de m'absenter, par la mort d'un ami intime, et, avant mon retour, j'appris que Mylord Brouncker avait résolu les deux questions et aussi une troisième sortie de la même main et à laquelle, laissant aller ses premières demandes, M. Fermat paraissait s'attacher davantage, comme plus importante que les précédentes. Mais ce problème ayant été reçu et ayant trouvé réponse, avant que j'en eusse eu avis, je regardai comme inutile pour moi de m'occuper d'une chose déjà faite. Ce qu'était la solution du dernier problème par Sa Seigneurie, je ne suis pas capable de le dire, ni davantage ce qu'était le problème lui-même; car je n'ai copie ni de l'un, ni de l'autre. Mais je connais si bien Sa Seigneurie et sa dextérité toute spéciale en choses de cette nature, que j'ai une très forte présomption en faveur de l'exactitude avec laquelle il a dû procéder en cette affaire.

Quant à cette autre lettre de M. Fermat à vous-même, de laquelle vous m'informez que je puis attendre une copie de M. White, elle ne m'est pas encore parvenue; il est possible qu'elle se trouve maintenant entre les mains de Mylord Brouncker, à qui elle devait être communiquée en premier lieu. Je ne puis que vous offrir, pour cela comme pour toutes vos autres nobles faveurs, mes très humbles remercîments, n'étant pas capable de vous donner quelque revanche qui vaille; mais vous n'avez comme récompense que la conscience de votre généreuse inclination à combler de faveurs ceux dont vous ne pouvez attendre aucun retour.

J'ajouterai seulement quelques mots avant de baiser vos nobles mains. Ce n'est rien que ceci : puisque vous avez bien voulu vous donner la peine et à nous l'honneur, d'établir communication écrite entre M. Fermat et moi, je ne regarderai pas comme tout à fait incongru d'ajouter ici un théorème que, si vous le jugez à propos, vous pourrez lui envoyer à démontrer; non pas en défi, ni comme une matière de difficulté extraordinaire, je ne le prends pas pour tel; mais la solution, s'il ne la connaît pas déjà, lui suggérera probablement un joli ensemble de spéculations qui seront peut-être bien venues pour lui. Voici ce théorème :

Soit un tronc de pyramide ou de cône, limité entre deux plans parallèles, tel que la plus grande base soit égale au carré de la droite A, la plus petite au carré de la droite E, et dont la hauteur soit F. Je dis que, si avec A et E (ou leurs égales) comme côtés, on construit un angle de 120°, qu'on complète le triangle et qu'on y circonscrive un cercle, le carré du rayon R de ce cercle multiplié par la hauteur du tronc, (R^2F), donnera le volume du tronc.

Quant à la démonstration, comme tout ce en quoi je puis jamais être capable de vous servir, vous pouvez la demander à votre gré à celui qui répute à grand honneur d'être et de compter pour,

Très noble Monsieur,

Votre affectionné et très humble serviteur,

John Wallis.

Oxford, 3/13 septembre 1657.

LETTRE VIII.

Vicomte Brouncker a Sir Wallis.

J'ai reçu hier, clarissime professeur, votre lettre du 5 courant [1], comme aussi celle à Sir Kenelm Digby que je lui ferai parvenir le plus tôt possible. Quant à celle dont vous me parlez comme envoyée par Sir Kenelm Digby à M. White, pour nous la communiquer, je ne l'ai pas encore reçue et je n'en avais jusqu'alors eu aucune connaissance. Dès que je l'aurai entre les mains, j'aurai soin de vous la transmettre.

En attendant voici la troisième question de Fermat que vous me demandez, et aussi le précis de la réponse que j'y ai faite; quant au texte même, je ne puis le reproduire, n'en ayant retenu à part moi aucune copie, comme je l'aurais fait, si j'avais pu croire que M. White enverrait cette réponse telle quelle. Vous pourrez, si vous le jugez à

(1) Cette lettre manque.

propos, transmettre la solution en latin, pour que la langue anglaise ne suscite plus de nouvelles plaintes ou de nouveaux embarras.

Tout en vous remerciant de vos nouvelles faveurs, aussi bien que des précédentes, je veux vous dire combien je suis vraiment,

Clarissime Professeur,

Votre ami très fidèle et votre très humble serviteur,

BROUNCKER.

11/21 septembre 1657.

L'écrit de M. Fermat était ainsi conçu : (je ne l'ai reçu d'ailleurs que plus tard, la lettre précédente n'en contenant que la dernière partie, c'est-à-dire l'énoncé même du problème).

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 81, tome II, page 334; tome III, page 312.)

LETTRE IX.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

TRÈS NOBLE MONSIEUR,

Après vous avoir envoyé ma dernière lettre, datée du 3 septembre, j'ai reçu du très honorable Mylord Vicomte Brouncker, avec la solution qu'il en a donnée, le problème que M. Fermat lui a envoyé. Comme il se peut faire, ainsi que vous le soupçonnez, que cette solution ait été mal exposée à M. Fermat, je crois bon de la reproduire ici, pour l'offrir avec cette lettre à Votre Seigneurie.

Problème de M. Fermat.

Étant donné un nombre quelconque non carré, il y a une infinité de carrés déterminés dont le produit par ce nombre, étant augmenté de l'unité, fait un carré.

Exemple : $3 \times 16 + 1 = 49 = 7 \times 7$.

On demande la règle générale pour trouver les carrés de cette sorte.

Voici deux règles de ce genre : la première est de Mylord Vicomte Brouncker.

Soient n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un autre carré quelconque (entier ou fractionnaire) dont la racine soit r. Soit enfin d la différence entre q et n, à savoir soit $q-n$, soit $n-q$.

Règle : $\frac{4q}{d^2}=\left(\frac{2r}{d}\right)^2$ est un nombre carré, dont le produit par n, étant augmenté de l'unité, fait un carré, $n\frac{4q}{d^2}+1=\frac{4qn+d^2}{d^2}$.

En effet :

$$\frac{4qn+d^2}{d^2}=\frac{4qn+q^2-2qn+n^2}{q^2-2qn+n^2}=\frac{q^2+2qn+n^2}{q^2-2qn+n^2}=\left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2.$$

La seconde règle, qui est de moi, est un peu plus générale quant à la forme du procédé; mais elle revient au même, quant aux nombres à trouver.

Soient n un nombre donné quelconque; a un nombre quelconque arbitrairement choisi; q un carré quelconque et m son quotient par a; p un autre nombre quelconque; enfin d la différence (en valeur absolue) entre $\frac{ma}{4p}$ et pn.

Règle : $\frac{ma}{d^2}$ est un nombre carré dont le produit par n, étant augmenté de l'unité, fait un carré, $n\frac{ma}{d^2}+1=\frac{man+d^2}{d^2}$.

En effet :

$$\frac{man+d^2}{d^2}=\frac{\frac{m^2a^2}{16p^2}+\frac{1}{2}man+p^2n^2}{\frac{m^2a^2}{16p^2}-\frac{1}{2}man+p^2n^2}=\left(\frac{\frac{ma}{4p}+pn}{\frac{ma}{4p}-pn}\right)^2.$$

Il y a lieu de remarquer ce que Mylord Vicomte Brouncker a ajouté à sa solution.

Au sujet des deux premières questions de M. Fermat, il a observé que non seulement le nombre 1 y satisfait également, mais aussi (au cas où les fractions seraient admises) le quotient du nombre 1 par la sixième puissance de tout nombre entier; en effet, ce quotient est à la fois carré et cube et il n'a aucune partie aliquote.

D'autre part, la première question est satisfaite, non seulement par le nombre 343, indiqué par M. Fermat, mais encore par le quotient du même nombre divisé par la sixième puissance de tout entier, par exemple $\frac{343}{64}$. En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties *actuelles* que celles qui sont dénommées comme l'est le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, nombre carré.

Voilà donc, très illustre Seigneur, le précis de ce qu'avait depuis longtemps répondu à ces problèmes le très honorable Vicomte. Il me reste, si ces remarques importunes doivent vous occasionner quelque dérangement, à implorer humblement pardon pour,

Très illustre Seigneur,

Votre très respectueux et tout dévoué

JOHN WALLIS.

Oxford, $\frac{\text{27 septembre}}{\text{7 octobre}}$ 1657.

LETTRE X.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Clarissime Professeur, j'ai reçu hier les deux lettres ci-incluses, apportées par M. White de la part de Sir Kenelm Digby. Il m'en a montré une troisième, où il était dit que M. Frenicle méprise l'Analyse ou du moins l'estime très peu; qu'il a d'ailleurs résolu une des propositions mentionnées dans les lettres ci-incluses.

C'est, si je ne me trompe, cette même question dont nous avions déjà entendu parler, mais que nous n'avions pas vue, à savoir :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

Voici les solutions de M. Frenicle :

$$1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3, \qquad 4104 = 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3,$$
$$13832 = 18^3 + 20^3 = 2^3 + 24^3, \qquad 32832 = 18^3 + 30^3 = 4^3 + 32^3,$$
$$39312 = 15^3 + 33^3 = 2^3 + 34^3, \qquad 40033 = 16^3 + 33^3 = 9^3 + 34^3,$$
$$20683 = 19^3 + 24^3 = 10^3 + 27^3.$$

Mais quant à la dernière partie de la proposition : *Trouver deux nombres cubes dont la somme soit cube,* il n'en est rien dit.

Après avoir lu les lettres ci-jointes, j'ai jugé à propos d'arrêter votre dernière à Sir Kenelm Digby, si toutefois il n'est pas déjà trop tard; j'ai écrit dans ce but à M. White. Je voudrais y substituer une réponse plus complète au problème de M. Fermat, que celui-ci pose maintenant sur les seuls nombres entiers, ce qu'il n'avait pas fait auparavant. Je vous ferai savoir avant peu ce que pense à ce sujet

Votre très fidèle ami et très attaché serviteur

BROUNCKER.

3/13 octobre 1657.

LETTRE XI

(incluse dans la précédente, comme l'était aussi la suivante).

FERMAT A KENELM DIGBY.

De Castres, le 6 juin 1657.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat,* n° 83, t. II, p. 341.)

LETTRE XII.

FERMAT A KENELM DIGBY.

De Castres, le 15 août 1657.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat,* n° 84, t. II, p. 342.)

< *P. S.* (1) >. En relisant ma lettre, j'ai trouvé que je devois ajouter un mot sur le sujet de la descente naturelle des graves.

J'ai toujours cru l'opinion de Galilée très probable et très ingénieuse; elle < n'a > point pourtant < de > démonstration, et la nature, qui est mille fois plus subtile que les esprits des hommes, pourroit parvenir à sa fin < par > une infinité de proportions différentes de celle de Galilée et que l'expérience ne pourroit jamais convaincre de fausseté. C'est ce que je me charge de démontrer quand vous voudrez; mais, parce que la voie de Galilée est la plus simple, il est vraisemblable, non démonstrativement, mais probablement, que la nature suit cette sorte de mouvement.

Cette matière a produit des disputes sans fin entre défunt M. Gassendi et un jésuite nommé le Père Cazré, sur ce que ce dernier soutenoit que les vitesses ou vélocités d'un (2) corps qui descend gardent la proportion des espaces parcourus, contre le sentiment de Galilée, qui soutient que cette proposition est si absurde que, si elle étoit vraie, il s'ensuivroit que le mouvement se feroit en un instant.

Galilée ne se contente pas d'en demeurer là, mais il prétend démontrer que, si cette proposition étoit vraie, le mouvement se feroit en un instant. Le Père Cazré assure que Galilée ne l'a point démontré, et M. Gassendi au contraire que < la > démonstration de Galilée est très parfaite, et, sur cette contestation, ces deux grands personnages ont fait de gros volumes, qui lassent la patience des lecteurs.

J'ai tranché tout ce différend en trois ou quatre pages; et premièrement je fais voir que l'opinion du jésuite est fausse, mais que pourtant Galilée n'a point démontré qu'elle produisît comme une conséquence nécessaire ce mouvement instantané, de sorte qu'en cet article le Père Cazré n'a point de tort. Mais enfin, pour les mettre d'accord

(1) Ce *post-scriptum* qui ne figure pas dans la première édition du *Commercium* a été inséré dans la seconde, avec cette note :

[Sequentem appendicem, cum similibus aliquot, ut quæ rem hîc agitatam non spectabant, in editione prima omisimus, sed hîc utcunque reponimus, ne videar quicquam subticere velle].

(2) D'un] des W.

et rendre en même temps office à ces deux grands hommes (Galilée et Gassendi) et donner du secours à la vérité, je démontre, par la voie légitime et selon la manière d'Archimède, que si la proposition du jésuite étoit vraie, le mouvement se feroit en un instant, et qu'ainsi Galilée a eu raison de dire que cette proposition produiroit par conséquence le mouvement instantané, quoiqu'en effet il n'ait pas démontré la vérité de cette conséquence; ce que j'ai fait dans mon écrit, que j'envoyai à feu M. Gassendi pendant sa vie et dont M. Carcavi (que vous trouverez logé à l'hôtel de Liancourt, rue de Seine, au faubourg Saint-Germain) garda la copie (1). Si vous avez la curiosité de la voir, je ne doute pas qu'il vous la communique, dès que vous lui ferez voir ma lettre. Mon écrit finissoit par ces mots : *Hujus itaque unicæ demonstrationis beneficio tot et tanta præclarorum virorum volumina aut refellentur aut inutilia et superflua efficientur.*

LETTRE XIII.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

La présente lettre, Clarissime professeur, n'a pour objet que de vous informer que le papier de Fermat ci-inclus m'a été apporté par M. White, hier après-midi, pour que je vous le fasse parvenir; il l'avait oublié en envoyant les autres. Il demande au reste qu'on lui rende et ce papier et les autres. Il me reste à vous prier de continuer votre amitié à

Votre très fidèle et très respectueux,

Brouncker.

6/16 octobre 1657.

(1) Il s'agit du n° 62 de la Correspondance de Fermat. Si l'on rapproche de ce passage la lettre de Gassendi à Monsieur de ***, qui a été reproduite tome II, page 267, note 1, il devient clair que c'est à Carcavi que fut adressée cette lettre, et que si ce dernier communiqua l'original de Fermat à Gassendi, il se le fit remettre. La copie que Gassendi s'en fit faire et sur laquelle la lettre a été publiée en premier lieu existe d'ailleurs dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, latin nouv. acq. 1637, f° 261. Elle porte, sous forme de note, l'adresse « De la Poterie, chez Monsieur de Montmor », qui est celle d'un commensal et quasi-secrétaire de Gassendi.

Il semble que Fermat n'avait pas conservé de minute et qu'il cite de mémoire (assez inexactement quant à la forme, ce qui se comprend dès lors) la dernière phrase de son écrit.

REMARQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS DU S. J. WALLIS.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 85, Tome II, page 347.)

LETTRE XIV.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

CLARISSIME PROFESSEUR,

Après avoir reçu la lettre de M. Fermat, que je vous ai récemment adressée, et qui limite aux seuls entiers le problème auparavant proposé, j'y ai quelque peu réfléchi et je trouve que les carrés en nombre infini qu'il demande (ceux dont le produit par un nombre donné non carré, étant augmenté de l'unité, fait un carré) tombent dans une série comme suit :

Savoir $2 \times Q : 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times \ldots,$

de même $8 \times Q : 1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times \ldots,$

$$18 \times Q : 4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$$

$$32 \times Q : 3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} + 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$$

$$3 \times Q : 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times \ldots,$$

$$12 \times Q : 2 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times \ldots,$$

$$27 \times Q : 5 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times \ldots,$$

$$48 \times Q : 1 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times \ldots,$$

$$75 \times Q : 3 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times \ldots,$$

$$5 \times Q : 4 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots,$$

$$20 \times Q : 2 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots,$$

$$80 \times Q : 1 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots,$$

$$6 \times Q : 2 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times \ldots,$$

$$24 \times Q : 1 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times \ldots,$$

$$96 \times Q : 5 \times 97\frac{1}{1} \times \ldots.$$

Dans ces séries, le numérateur de chaque fraction est égal à son dénominateur diminué du dénominateur immédiatement précédent, et le dénominateur est égal au numérateur du terme précédent réduit en fraction impropre.

Si l'on connaît la série correspondant à un nombre quelconque non carré, on peut en déduire la série correspondant au multiple de ce non-carré par un carré quelconque; il suffit de diviser la série trouvée par la racine du carré multiplicateur.

Quant aux deux premiers termes de chaque série, il faut les trouver grâce à notre règle générale $\frac{4q}{d^2}$; j'entends que, toutes les fois que d^2 est une partie aliquote de $4q$, ou d partie aliquote de $2r$, on a un carré entier satisfaisant à la question. Autrement, si l'on substitue $\frac{a^2}{e^2}$ à q ou bien $\frac{a}{e}$ à r et que l'on aie par suite $d = |q - n| = \left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|$, c'est toutes les fois que $\left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|$ ou d est une partie aliquote du nombre $\frac{2a}{e}$ ou $2r$, ou encore, en multipliant de part et d'autre par e^2, toutes les fois que $|a^2 - ne^2|$ est une partie aliquote de $2ae$.

La question est donc ramenée à trouver un carré dont le produit par le nombre donné non-carré diffère d'un certain autre carré d'une partie aliquote du double produit des racines; ce qu'on pourra chercher par une induction convenablement établie.

Voilà ce qui, sur cette question, se présente pour le moment à l'esprit de,

Clarissime professeur,

Votre très fidèle et très respectueux ami,

BROUNCKER.

$\frac{\text{22 octobre}}{\text{1er novembre}}$ 1657.

LETTRE XV.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Voici enfin, très illustre Seigneur, ce qu'après mon retour (car vous savez que j'ai été quelque temps absent) j'ai cru, en somme, devoir rédiger comme réponse aux Remarques et aux Lettres de M. Fermat; si Votre Seigneurie le juge à propos, elle pourra le faire parvenir au très illustre Digby, à qui l'écrit est adressé. Ne vous étonnez pas toutefois ou ne regardez pas comme une faute, si j'y ai omis certaines choses qui peuvent paraître au moins aussi ou même plus importantes que certaines autres qui y sont insérées; je l'ai fait, d'une part, pour que la lettre ne fût pas trop volumineuse, de l'autre, parce que j'ai pensé qu'il ne fallait pas tout dévoiler en même temps.

Ainsi j'ai cru devoir taire (pour commencer par ce qui vous appartient) la série des racines, exposée dans votre dernière lettre du 22 octobre, que vous m'écriviez lorsque je me préparais à partir d'ici. Ce n'est point que je la considère aucunement comme négligeable, alors qu'elle est pleine de subtilité, comme le sont toujours vos inventions, et qu'elle est entièrement digne de la sagacité de votre esprit. Mais c'est que je crois qu'il suffit de ce que j'ai mis sans en parler; car le problème ne demande pas tous les carrés, mais seulement des carrés en nombre infini, et je juge qu'il sera peut-être plus avantageux de réserver pour plus tard l'énoncé de cette série.

Il ne faudrait pas d'ailleurs que Fermat pensât qu'en donnant maintenant des carrés en nombre infini, nous croyons que ce sont là tous ceux que l'on puisse donner; je me suis mis en garde de ce côté, en lui en promettant encore davantage, s'il en demande d'autres.

J'ai jugé bon de taire également les méthodes, soit de vous, soit de moi, pour obtenir par induction le premier carré et sa racine; la partie du problème, relative aux carrés à donner en nombre infini, m'a en effet paru beaucoup plus considérable; d'autre part et surtout je n'ai guère vu de moyen d'exposer clairement ces méthodes, en sorte qu'elles soient facilement comprises par autrui, sans un appareil de mots et d'exemples que cette lettre ne me paraît pas pouvoir comporter. Si Fermat s'arrête là-dessus, nous pourrons faire cette exposition à part [1]. Pour le moment, il suffit de dire en général qu'il faut regarder à ce que d ou $|n-q|$ soit une partie aliquote du nombre $2r$, ou bien $|na^2-e^2|$ partie aliquote du nombre $2ae$. Et, en effet, alors les carrés que donnent nos règles seront entiers.

Quant au centre de gravité et à ce que réclame Fermat de moi à ce sujet [2], vous verrez qu'il manque beaucoup de choses que je vous ai déjà exposées là-dessus. Ainsi vous trouverez une proposition que je vous avais énoncée sous une forme plus générale, limitée ici plus particulièrement, de façon à satisfaire seulement à ce qui était demandé, à savoir le centre de gravité des *hyperboles infinies* de Fermat (pour employer son langage) dans la situation même qu'il leur a donnée.

J'ai omis ce qui concerne le centre de gravité dans les paraboles et les paraboloïdes [3] de tout genre (qu'il ne demande pas); de même dans les hyperboles sous une autre situation; de même dans les semi-paraboles, semi-paraboloïdes et semi-hyperboles (infinies) de même genre.

Je l'ai fait pour ne pas trop m'étendre dans un exposé dépassant ce qui était demandé; d'un autre côté, j'ai préféré énoncer tout d'abord ces questions à Fermat sous forme de problèmes; car elles ne me paraissent nullement inférieures à ses demandes.

(1) *Voir* ci-après la Lettre XVII.

(2) Tome II, page 343 (Lettre XII du *Commercium*).

(3) Wallis entend par *paraboloïdes* les paraboles de degré supérieur.

Au reste tout cela est, en tout cas, laissé à votre jugement, et si vous croyez qu'il faille ajouter ou changer quelque chose, ce sera fait par,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble serviteur, toujours prêt à vous obéir,

J. Wallis.

Oxford, $\frac{21 \text{ novembre}}{1^{\text{er}} \text{ octobre}}$ 1657.

LETTRE XVI,

incluse dans la précédente.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très noble Seigneur,

Depuis que je vous ai envoyé ma dernière lettre du mois de septembre (¹), le très honorable Lord Brouncker m'a communiqué ses solutions des problèmes de Fermat. Après les avoir vues, j'ai été amplement confirmé dans l'opinion que j'ai émise en ma lettre précédente. Quoi qu'il en soit de l'écrit qui aurait été mal traduit à Fermat, comme vous l'avez dit, écrit que je n'ai jamais vu et dont je ne puis aucunement juger, ces solutions sont telles, à mon avis, qu'elles répondent très exactement aux demandes. J'ai donc cru devoir vous les adresser aussitôt, après les avoir mises en latin, afin que désormais une mauvaise interprétation ne puisse tromper personne; je vous ai ainsi fait, le même mois, l'envoi d'une seconde lettre (²), mais je l'ai fait revenir, ayant reçu dans l'intervalle les lettres de Fermat, et désirant répondre à ce qui s'y trouve indiqué à nouveau.

C'est donc dans le mois suivant, en octobre, que j'ai reçu, de la part de votre Seigneurie, les deux lettres que lui a écrites M. Fermat en date du 6 juin et du 15 août, puis quelques jours après ses *Remarques*

(¹) Lettre VII.
(²) Lettre IX.

sur mon *Arithmétique des Infinis;* nouveaux bienfaits dont vous me comblez sans cesse. Mais il ne me reste aucun espoir d'échapper aux liens de la reconnaissance, qui me tient enchaîné à vous; je n'ai plus d'autre refuge que votre clémence; je n'ai, comme unique ressource, que de la supplier d'accepter mes très humbles remercîments pour tant de faveurs, et de me continuer, malgré mon indignité, l'affection que vous voulez bien me montrer. Puis, sans vous arrêter à de trop longs préambules, je me mettrai aussitôt à répondre à ces lettres, après vous avoir cependant demandé excuse si mon importun bavardage interrompt vos sérieuses occupations.

La première lettre de Fermat se plaint de la difficulté de saisir ce qu'a voulu dire le très honorable Vicomte dans sa solution des problèmes; la faute en est attribuée à une mauvaise traduction de l'anglais.

Pour éviter de nouvelles plaintes de ce genre, j'ai cru devoir employer, en m'adressant à vous, la langue latine, qui n'a pas besoin de traduction : je l'ai fait d'ailleurs pour le cas où vous jugeriez à propos de communiquer cette lettre elle-même.

Mais Fermat ajoute qu'autant qu'il peut en juger au travers des nuages de cette obscure traduction, le très honorable Lord n'aurait nullement satisfait à sa question. Je crois précisément le contraire, et, à moins que Fermat n'ait pas bien encore compris ces solutions, je ne vois pas sur quoi il pourrait, soit en douter, soit le dissimuler.

Le premier problème était double.

Trouver un cube (p. 311, lignes 21 à 27) ..... *fasse un cube.*

J'ai répondu sur ce problème que le nombre 1 satisfait aux deux questions; il est, en effet, à la fois carré et cube, et il n'a pas de parties aliquotes.

Lord Vicomte Brouncker a ajouté à cette solution qu'on pouvait également satisfaire aux deux questions (dans le cas où les fractions seraient admises), au moyen du quotient du nombre 1 par la sixième puissance de tout nombre entier; d'autre part, que la première des deux questions seulement pouvait aussi être résolue au moyen du quotient de 343 par un semblable diviseur, par exemple $\frac{343}{64}$.

En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties *actuelles* que celles qui sont dénommées comme l'est le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}, \frac{7}{64}, \frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, carré de $\frac{20}{8}$.

A la vérité, Fermat s'explique maintenant en disant qu'il ne sera satisfait que par un nombre entier. Mais, même ainsi, on ne peut nier qu'il ne lui ait été donné satisfaction. Car, en dehors du nombre 343 énoncé dans le problème, il n'en demande qu'*un seul autre*, et il ne promet d'en donner lui-même qu'*un seul autre*. (*Je demande un autre, etc.; et s'il répond qu'en entiers il n'y a que le seul nombre* 343, *je vous promets de le désabuser en lui en exhibant un autre*) ([1]). Or nous avons donné un entier satisfaisant au problème, à savoir le nombre 1.

Si je n'en donne pas d'autres, ce n'est pas que j'estime qu'il n'en existe point; mais c'est qu'il n'en demande pas davantage et que je ne juge pas l'affaire de telle conséquence (car à quoi bon?) qu'elle soit digne d'une recherche minutieuse, et encore moins que l'Angleterre tout entière, avec les Gaules Celtique et Belgique, qu'il provoque toutes ensemble, se livrent exclusivement à cette étude. La question n'est pas plus importante, du moins à mon sens, que celle que je pourrais poser avec une pareille ostentation, en donnant deux nombres carrés, 16 et 25, qui font la même somme, si à chacun d'eux on ajoute ses parties aliquotes :

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1,$$

et en demandant deux autres carrés jouissant de la même propriété. Fermat peut, s'il le veut, s'attaquer à ce problème, ou, s'il le préfère, le négliger; mais je n'y attache pas une telle importance que je l'en juge plus habile, s'il réussit, ou moins, dans le cas contraire.

([1]) Lettre de Fermat à Digby du 6 juin 1657. Tome II, page 342, ligne 3 à 7.

L'autre problème était ainsi conçu :

Étant donné un nombre (page 312, ligne 3 en rem., à page 313, ligne 7) ..... *qui peut être donné.*

Lord Vicomte Brouncker a fait usage d'une règle de ce genre, qu'il a munie de sa démonstration.

Soient n un nombre (page 418, lignes 3 à 10) ..... $=\left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2$.

J'ai voulu en ajouter une autre de mon crû, un peu plus générale quant au mode de procéder, mais revenant au même, pour le fond. Elle est également munie de sa démonstration.

Soient n un nombre donné (page 418, lignes 14 à 20) .....

En effet,

$$\frac{man+d^2}{d^2}=\frac{man+\frac{m^2}{16p^2}a^2-\frac{1}{2}man+p^2n^2}{\frac{m^2}{16p^2}a^2-\frac{1}{2}man+p^2n^2}$$

$$=\frac{\frac{m^2}{16p^2}a^2+\frac{1}{2}man+p^2n^2}{\frac{m^2}{16p^2}a^2-\frac{1}{2}man+p^2n^2}=\left(\frac{\frac{ma}{4p}+pn}{\frac{ma}{4p}-pn}\right)^2.$$

Fermat peut choisir de ces deux règles celle qu'il lui plaira; il est clair qu'elle répondra à la question proposée. S'il en désire davantage, nous lui en promettons autant qu'il en voudra, mais elles coïncideront avec les deux ci-dessus, qui fournissent, en effet, non seulement des carrés en nombre infini, mais tous les carrés possibles qui jouissent de la propriété demandée.

On doit d'ailleurs lui faire remarquer que la limitation, que le nombre donné ne soit pas carré, est superflue, dans les termes où la question est posée. Car la règle s'applique aussi bien aux nombres carrés qu'aux non carrés.

Enfin il n'y aurait pas plus de difficulté s'il avait dit, en général, *en ajoutant un nombre carré quelconque,* et non pas *en ajoutant l'unité.* Il ne resterait, en effet, qu'une simple opération à faire, qui serait de multiplier, par ce carré à ajouter, le nombre carré donné par les règles précédentes.

Ainsi soit b^2 le carré à ajouter.

Avec la première règle, au lieu de $\frac{4q}{d^2}$, il faut prendre $\frac{4b^2q}{d^2}$.

Avec la seconde, au lieu de $\frac{ma}{d^2}$, il faut prendre $\frac{mab^2}{d^2}$.

On a, en effet, de la sorte, d'une part $\frac{4qnb^2}{d^2}+b^2$, de l'autre $\frac{manb^2}{d^2}+b^2$, nombres carrés.

Voilà ce que je vous avais écrit dans cette lettre dont je vous ai parlé, mais que j'ai cru devoir faire revenir, en raison des nouvelles indications que Fermat donne seulement aujourd'hui. Il y a, en effet, lieu de compléter quelque peu ce qui précède, eu égard à la nouvelle limitation requise, dont il n'était nullement fait mention dans l'énoncé antérieur.

Fermat dit maintenant qu'il a voulu parler des seuls carrés entiers, non des fractionnaires; qu'en fractions, les solutions sont si faciles qu'elles peuvent être fournies *a quolibet de trivio arithmetico* (1).

En tout cas c'est déjà quelque chose que votre très noble correspondant reconnaisse enfin que la question qu'il avait posée est de celles que peut facilement résoudre *quilibet de trivio arithmeticus;* il n'y a guère qu'il en jugeait tout autrement et pensait même qu'elle n'avait pas été résolue par le très honorable Vicomte, parce que celui-ci ne l'avait pas trouvée difficile (2). Cependant on pourrait peut-être se demander si Fermat lui-même, pour ne pas parler de *quilibet de trivio arithmeticus,* avant l'énoncé de nos règles, en connaissait une générale, donnant non seulement des carrés en nombre infini, mais tous les carrés possibles, tant entiers que fractionnaires; s'il pouvait démontrer que cette règle était telle.

(1) « Par le premier venu des calculateurs de la rue. »

(2) Il est singulier que Wallis oppose entre elles, comme successives, deux déclarations de Fermat contenues dans la même lettre du 6 juin 1657 (*Pièce* n° 83 de la *Correspondance*).

Mais je ne sais si nous ne pourrions nous plaindre avec quelque raison de ne pas avoir été loyalement traités. Qu'il s'agît d'entiers, il n'en était pas soufflé mot dans l'énoncé de la question; rien ne nous pouvait faire deviner que nous avions à la comprendre ainsi. Dans le long préambule mis en tête, Fermat cite Diophante et égale au moins, s'il ne les préfère, ses questions arithmétiques aux problèmes géométriques des autres; il se donne comme imitant Diophante dans la question qu'il propose. Mais partout, chez Diophante, comme nombres carrés on entend indifféremment les entiers et les fractionnaires. Qui donc, même après avoir regardé Diophante plus ou moins rapidement, pouvait soupçonner ou bien qu'il n'y a pas de carrés, à part les entiers, ou bien qu'une question ainsi proposée devait être entendue des seuls entiers? Nous avons donc résolu la question proposée au sens de ses termes, tout à fait comme ils devaient être compris, et ce n'est pas notre faute, si, quand Fermat entendait les seuls entiers, il s'est exprimé autrement [1].

Mais puisqu'il propose maintenant sur les entiers cette question qu'il avait auparavant proposée simplement sur les carrés; en d'autres termes, puisque, cette question étant résolue, il en pose une nouvelle, nous voulons bien le suivre encore sur ce terrain. Nous allons donc aborder ce

Nouveau problème : Faire la même chose pour les nombres entiers.

Nous remarquons d'abord que la question ainsi limitée est moins générale qu'auparavant, et il est immédiatement clair qu'il faut, ainsi que le fait Fermat, la restreindre au moins à des nombres donnés non carrés.

Si en effet, d'une part n, de l'autre $\frac{4q}{d^2}$, sont des nombres carrés entiers, $\frac{4qn}{d^2}$ sera aussi un carré entier, et comme $\frac{4qn}{d^2}+1$ doit être

[1] Wallis semble de fait avoir à peine regardé le préambule du second défi (*Pièce* n° 81 de la *Correspondance*). Dans le deuxième alinéa, en effet, Fermat pose très clairement la question comme concernant les nombres entiers et comme différant en cela des problèmes conservés de Diophante.

carré, on aurait deux nombres carrés entiers qui ne différeraient que de l'unité, ce qu'on sait être absolument impossible.

Dans le cas où la chose est possible, nos règles donnent non pas les *seuls*, mais cependant *tous* les carrés entiers. Elles donnent en effet tous les carrés demandés possibles, tant entiers que fractionnaires. Pour ne pas paraître parler au hasard, je vais le démontrer.

Soit f^2 un carré quelconque satisfaisant à la condition proposée; on aura nf^2+1 égal à un carré, soit l^2.

Prenons maintenant $r=\frac{l\mp 1}{f}$, je dis que f^2 sera $\frac{4q}{d^2}$, que donne la règle ci-dessus exposée. On a en effet : $q=r^2=\frac{l^2\mp 2l+1}{f^2}\cdot$ Mais $nf^2+1=l^2$. Donc $l^2-1=nf^2$ et $n=\frac{l^2-1}{f^2}\cdot$ Par conséquent,

$$d=|q-n|=\left|\frac{l^2\mp 2l+1}{f^2}-\frac{l^2-1}{f^2}\right|=\frac{2l\mp 2}{f^2}$$

et par suite, comme $2r=\frac{2l\mp 2}{f}$,

$$\frac{2l\mp 2}{f}:\frac{2l\mp 2}{f^2}=f=\frac{2r}{d}, \qquad \text{ou bien} \qquad f^2=\frac{4q}{d^2}.$$

Ainsi la règle précitée fournit le carré f^2, c'est-à-dire un carré quelconque satisfaisant à la condition proposée.

(La démonstration se ferait de même, *mutatis mutandis,* pour l'autre règle.)

La règle précitée fournit donc une infinité de nombres carrés satisfaisant à la condition proposée et d'ailleurs, dans le cas où la chose est possible (c'est-à-dire si le nombre donné est non-carré), une infinité de carrés entiers.

Il faut, de plus, que $\frac{4q}{d^2}=f^2$ soit entier et il faut fournir une infinité de tels carrés.

Pour cela, parmi le nombre infini que donne la règle, on choisira arbitrairement un carré entier quelconque, satisfaisant à la condition proposée, et qu'on peut d'ailleurs trouver de toute autre façon ; grâce à ce seul carré, on en fournira une infinité d'autres, comme suit :

Soit f^2, par exemple, ce carré ; par conséquent $nf^2 + 1 = l^2$.

$2fl$ sera la racine d'un autre carré satisfaisant à la condition proposée. De la même manière, connaissant ce second carré, on trouvera la racine d'un troisième carré, puis d'un quatrième, d'un cinquième, etc., à l'infini.

Exemple : Le nombre 3, multiplié par le carré 1, si l'on ajoute l'unité, fait un carré.

$$3 \times 1 + 1 = 4.$$

Le double produit de 1 et 2, racines des carrés 1 et 4, est $2 \times 1 \times 2 = 4$, qui sera racine du nouveau carré 16 satisfaisant à la condition proposée.

Et comme $$3 \times 16 + 1 = 49,$$

$2 \times 4 \times 7 = 56$ sera racine d'un nouveau carré 3136 satisfaisant également à la condition.

Comme d'autre part $$3 \times 3136 + 1 = 9409, \quad \text{carré de } 97,$$

$2 \times 56 \times 97 = 10864$ sera encore la racine d'un nouveau carré satisfaisant à la condition,

Et ainsi de suite. On aura donc une infinité de carrés entiers satisfaisant à la condition.

Je n'ignore pas d'ailleurs qu'en dehors de ces carrés on en peut encore trouver d'autres ; par exemple

$$3 \times 225 + 1 = 676 = 26^2,$$

et autres que nous pouvons également fournir en nombre infini. Ainsi tous ne peuvent pas être immédiatement induits de la sorte d'un seul ; mais on ne demandait pas cela ; car il n'a pas été proposé de fournir *tous* les carrés entiers satisfaisant à la condition, mais d'en fournir *en nombre infini,* ce que nous avons fait.

Fermat voudra-t-il changer encore les termes de sa question pour la proposer sous une troisième forme? demandera-t-il que les carrés entiers satisfaisant à la condition soient fournis, non pas seulement en nombre infini, mais absolument tous? Cela, nous pouvons également le faire.

Qu'il en soit d'ailleurs ainsi que je l'ai dit, pour ne pas parler vainement, je vais le démontrer.

Il a déjà été prouvé que $\frac{4q}{d^2}$ satisfait à la condition; reste donc à faire que $\frac{4q}{d^2} = f^2$ soit un nombre entier, par suite que sa racine $\frac{2r}{d} = f$ soit un nombre entier, ou autrement, que $d = |n - q|$ soit une partie aliquote du nombre $2r$.

Or il peut se faire que $2r$, et dès lors $4q$, ne soit pas entier; substituons donc à q, $\frac{a^2}{e^2}$, et à r, $\frac{a}{e}$. Nous aurons

$$f = \frac{2r}{|q - n|} = \frac{2\frac{a}{e}}{\left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|} = \frac{2ae}{|a^2 - ne^2|}.$$

Ainsi, f sera un nombre entier toutes les fois que $|a^2 - ne^2|$ sera une partie aliquote du nombre $2ae$; en d'autres termes, toutes les fois que la différence entre un carré et le produit d'un autre carré par le nombre donné sera partie aliquote du double produit des racines de ces carrés.

Or ceci peut arriver de mille manières différentes, mais a évidemment toujours lieu en particulier, si cette différence est 1 ou 2; car 1 est partie aliquote de tout nombre entier, et 2 l'est du nombre $2ae$.

C'est ce qui arrive évidemment dans notre cas. Puisqu'en effet, suivant la condition exigée, $nf^2 + 1 = l^2$, la différence $l^2 - nf^2$ sera 1; si donc par cette différence on divise $2fl$, le quotient sera le nombre entier $2fl$, et ce sera par suite un nouveau nombre f satisfaisant à la condition. Et ainsi de suite indéfiniment. C. Q. F. D.

Je crois superflu d'en dire plus long sur cette question, quoique j'aurais beaucoup de choses prêtes à ajouter; mais je crains déjà de m'être trop étendu.

Une autre question proposée par Fermat [1] n'est parvenue que tardivement entre mes mains. L'énoncé en est :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à celle de deux autres nombres cubes.

Il me suffira d'en dire quelques mots. Elle a été, à ce que j'apprends, résolue de diverses façons par M. Frenicle; j'ai vu quelques-uns de ses nombres; Fermat les ayant déjà reçus, il est inutile que je les répète. J'en ajouterai d'autres qui viennent d'ici.

$$3^3 + 36^3 = 27^3 + 30^3,$$
$$1^3 + 8^3 = \left(4\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(7\tfrac{1}{2}\right)^3,$$
$$6^3 + 10^3 = \left(1\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(10\tfrac{2}{3}\right)^3,$$
$$1^3 + 17^3 = \left(7\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^3,$$
$$5^3 + 11^3 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \left(11\tfrac{1}{3}\right)^3,$$
$$\left(4\tfrac{1}{2}\right)^3 + 17^3 = 8^3 + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^3,$$
$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \left(5\tfrac{1}{3}\right)^3 = 3^3 + 5^3,$$
$$8^3 + 64^3 = 36^3 + 60^3,$$
$$6^3 + 48^3 = 27^3 + 45^3,$$
$$3^3 + \left(11\tfrac{1}{3}\right)^3 = 11^3 + \left(5\tfrac{1}{3}\right)^3$$

$$10^3 + 80^3 = 45^3 + 75^3,$$
$$5^3 + 40^3 = \left(22\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(37\tfrac{1}{2}\right)^3,$$
$$32^3 + 66^3 = 18^3 + 68^3,$$
$$20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3,$$
$$30^3 + 66^3 = 4^3 + 68^3,$$
$$60^3 + 132^3 = 8^3 + 136^3,$$
$$4^3 + 48^3 = 36^3 + 40^3,$$
$$8^3 + \left(6\tfrac{1}{3}\right)^3 = \left(3\tfrac{1}{3}\right)^3 + 9^3,$$
$$30^3 + 81^3 = 57^3 + 72^3,$$
$$48^3 + 99^3 = 27^3 + 102^3,$$
$$5^3 + 60^3 = 45^3 + 50^3,$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 6^3 = \left(4\tfrac{1}{2}\right)^3 + 5^3.$$

Si ces nombres ne suffisent pas, j'en fournirai autant qu'il le voudra; et cela si facilement qu'en une heure de temps j'en promettrais bien cent, entiers ou fractionnaires, à son gré. Ce que j'ajoute pour qu'il ne dise pas encore qu'il ne veut que des nombres entiers, alors que l'énoncé de la question ne fait nullement mention d'entiers.

Après avoir résolu ces questions, et si du moins votre très noble

(1) *Voir* ci-avant la Lettre X du *Commercium,* page 419. — Wallis se contente ici de donner des nombres proportionnels à ceux de cette Lettre, calculés par Frenicle, sur le vu de la question de Fermat (Lettre du 15 août 1657, n° 84 de la *Correspondance,* 7).

correspondant trouve qu'il ait désormais suffisamment éprouvé nos forces, je voudrais le prier de ne pas trouver mauvais et de ne pas, non plus, attribuer à quelque épuisement de notre vigueur là-dessus, que nous ne nous montrions pas à l'avenir très préoccupés de résoudre des questions de ce genre. Il semble les aimer singulièrement, mais j'avoue (à dire ce qui en est) que, pour mon compte du moins, elles n'ont pas un attrait si puissant que je sois porté à leur consacrer beaucoup de temps ou de travail, et que je ne les estime pas assez importantes, pour que, négligeant les autres recherches en Géométrie, qui me plaisent davantage, je me détourne vers ces spéculations sur les nombres. Qu'il ne croie pas toutefois qu'en parlant ainsi je veuille en rien diminuer la juste gloire que mérite son habileté dans la poursuite de ces mêmes spéculations; je voudrais plutôt l'exhorter, s'il trouve dans ces matières quelque secret intéressant pour l'avancement général de la Science, à le publier ouvertement dans un Traité méthodique. Mais ce que je veux faire comprendre est seulement ceci que, ne pouvant m'occuper également de tous les sujets, je m'attache de préférence à ceux qui me séduisent davantage et me semblent avoir une utilité, tandis que je laisserai aux autres ce qui peut leur plaire au contraire plus qu'à moi; ainsi les uns et les autres pourront jouir chacun de son domaine.

Ce sera ma réponse aux nouvelles questions qu'il propose maintenant [1], par exemple :

Partager un nombre cube en deux cubes rationels;

Et partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes rationels.

Si le très honorable Vicomte Brouncker veut s'y essayer (et, s'il essaye, je ne doute pas qu'il n'obtienne un heureux succès, en tant du moins que la nature de la chose peut le permettre) ou si quelque autre a le même désir, je ne veux aucunement l'en détourner; mais moi du moins, je n'en ai ni le temps, ni l'intention.

[1] Lettre du 15 août 1657, n° 84 de la *Correspondance*, 4 et 8, ci-avant, p. 343.

Il ne m'a certes pas été désagréable, sur le désir exprimé par votre très noble correspondant, d'engager une, deux fois la lutte avec lui et de descendre dans son arène; mais cet illustre savant n'attend pas, sans doute, que je continue toujours le même exercice, et que, comme si je n'avais rien autre chose à faire, j'aborde sans cesse de nouvelles questions, perpétuellement renaissantes.

J'en dis autant pour ses récentes propositions négatives, que : en dehors de 25, il n'y a aucun autre nombre carré entier qui, augmenté de 2, fasse un cube; ni, en dehors de 4 et 121, aucun qui, augmenté de 4, fasse un cube. Si cela est vrai ou non, je ne m'en soucie pas extrêmement, alors que je ne vois pas quelle grande conséquence peut en dépendre. Je ne m'appliquerai donc pas à le rechercher. En tout cas, je ne vois point pourquoi il en fait montre comme de choses d'une hardiesse étonnante et qui doivent stupéfier soit M. Frenicle, soit aussi les Anglais; car de telles déterminations négatives sont très fréquentes et nous sont familières. Les siennes n'avancent rien de mieux ou de plus fort que si je disais :

Il n'y a pas (en entiers) de *cubocube* (j'entends une sixième puissance) ou même de carré qui, ajouté à 62, fasse un carré.

Ou : En dehors de 4, il n'y a aucun carré qui, ajouté au nombre 12, fasse un bicarré.

Ou : En dehors de 16, il n'y a pas de bicarré qui, ajouté à 9, fasse un carré.

Ou : Il n'y a pas en entiers de cubes dont la différence soit 20, ni, à part 8 et 27, dont la différence soit 19.

Ou : Il n'y a pas de bicarrés entiers dont la différence soit 100, pas plus (pour le dire en une fois) qu'aucun autre nombre pair, à moins qu'il ne soit divisible par 16.

Il est facile d'imaginer d'innombrables déterminations négatives de la sorte.

Pour ce qui concerne mon *Arithmétique des Infinis,* dont il parle dans la même lettre, il avoue que les propositions que j'ai découvertes sont les mêmes que les siennes; sauf donc que je n'ai pas parlé du centre de gravité, remarque sur laquelle je reviendrai tout à l'heure, j'aurais ainsi produit ce que, dans la première lettre que j'ai vue de lui (¹), il vantait comme miracles de la Géométrie. Il n'y a en effet rien de ce qu'il indiquait dans cette lettre que l'on ne puisse voir dans mon Traité, comme je l'ai montré en citant les endroits.

Mais, à ce qu'il semble, il regrette (reproche que je n'aurais jamais présumé devoir être dirigé contre moi) que la méthode dont je me sers ne soit pas celle qui prouve seulement la vérité des découvertes par démonstrations *apagogiques* ou réductions à l'impossible (comme elles sont fréquentes chez Archimède et comme il convient d'en user si l'on veut moins se faire comprendre qu'admirer du lecteur); que ce soit au contraire cette méthode qui montre en même temps la marche des recherches.

S'il me rappelle l'exemple d'Archimède, exemple qui, à vrai dire, m'eût suffisamment justifié, si j'avais voulu employer la même méthode de démonstration, je ne crois pourtant pas que votre savant correspondant ignore que les hommes les plus sérieux et les plus doctes regrettent précisément, et sont bien près de considérer comme un défaut, qu'Archimède ait caché de la sorte les traces de ses procédés de recherche, comme s'il avait voulu par jalousie priver la postérité des moyens de découvertes, tout en voulant lui arracher l'aveu de ce qu'il avait trouvé. Mais Archimède n'a pas été le seul; la plupart des anciens ont tellement dérobé aux yeux de la postérité leur Analytique (car il est hors de doute qu'ils en avaient une) qu'il a été plus facile pour les modernes d'en inventer une nouvelle de toutes pièces (ce qui a été fait dans le dernier siècle et dans celui-ci) que de retrouver les traces de l'ancienne.

J'aurais certes plutôt attendu des remercîments qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement non seulement où j'étais

(¹) Dans la Lettre du 20 avril 1657 (n° 82 de la *Correspondanec,* T. II, p. 339), Fermat n'applique précisément cette expression de *miracles* qu'aux propositions relatives aux centres de gravité des aires comprises entre les hyperboles et leurs asymptotes. Il est d'ailleurs le premier à dire que ses énoncés sur la quadrature des mêmes aires peuvent se tirer de l'Ouvrage de Wallis.

arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie; pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve; d'autres peuvent le faire, mais on s'en plaint assez.

Votre très noble correspondant avance encore que certaines de mes propositions peuvent être démontrées par la méthode d'Archimède. Je n'en doute nullement; j'ai même indiqué plusieurs fois (*Arithm. Infin.*, pag. 38, 83 et ailleurs) qu'il était facile de le faire; mais j'ai dit aussi pourquoi je ne l'avais pas fait moi-même; il n'a donc pas sujet de s'enquérir des raisons du choix de ma méthode, quand je les ai indiquées dans le cours de mon Ouvrage.

Il n'y a guère, je crois, personne, je ne parle pas des arithméticiens *de trivio,* mais aucun géomètre un peu exercé (à plus forte raison quelqu'un de tel que lui) qui ne puisse facilement, sur mes démonstrations, en forger d'*apagogiques* et semblables à celles d'Archimède. Aussi, pour sa promesse de le faire lui-même, je n'ai certes pas à dédaigner son travail là-dessus, mais aucune nécessité ne l'oblige à se charger d'une telle entreprise, alors que ce qu'il annonce devoir faire a déjà été précisément accompli par Cavalieri, dans son Traité *De l'usage des indivisibles dans les puissances cossiques* (1). Cependant, s'il veut apporter son suffrage, je n'ai pas à le récuser.

Si enfin il repousse comme une forme de preuve illégitime l'induction, qui a été suffisamment employée tant par les Anciens que par les Modernes, plus souvent peut-être qu'il pourrait le penser de prime abord; s'il veut même écarter l'emploi des notes algébriques, partout répandues aujourd'hui, je n'ai certes pas à être aucunement préoccupé de rédiger une apologie sur ce chef. J'ai agi dans mon droit, suivant la voie qui me plaisait; il a de même le plein droit d'en suivre une autre, s'il le préfère; mais je ne doute pas que ce qu'il blâme, d'autres le loueront.

Il reste encore un point que je dois prendre surtout à cœur; j'ai, à propos du centre de gravité, à dégager ma parole et à détruire l'accu-

(1) *De usu eorundem indivisibilium in potestatibus cossicis* est le titre de la quatrième des six *Exercitationes geometricæ* publiées par Cavalieri en 1647.

sation de fausseté qu'à la vérité votre très subtil correspondant ne porte pas vraiment contre moi, mais qu'il semble réserver dans ses doutes.

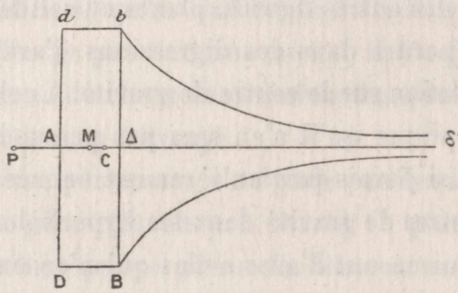
J'avais dit, dans ma lettre du 6 juin, que les mêmes principes dont je me sers dans l'*Arithmétique des Infinis* permettent de déterminer sans difficulté le centre de gravité tant des paraboles de tout genre, que de la plupart des autres figures, planes ou solides; que, toutefois, pour ne pas me perdre dans des digressions, j'avais à dessein omis toute cette spéculation sur le centre de gravité. A cela votre très noble correspondant réplique qu'il n'en sera pas persuadé, et qu'il désire dès lors (comme si j'avais particulièrement énoncé ce point) que je détermine les centres de gravité dans les hyperboles infinies, en distinguant celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas. Il demande qu'au moins j'envoie la proposition générale, même sans démonstration. Sinon, il laisse penser qu'il me regardera comme ne connaissant nullement une chose que pourtant, d'après lui, j'aurais avancé connaître; enfin il n'enverra pas auparavant ses spéculations qu'il a promises depuis longtemps, de peur sans doute que je n'y trouve quelque chose que je ne sache pas déjà.

Je ferai donc ce que demande votre très noble correspondant, tant pour ne pas paraître accusé justement de mauvaise foi, que pour qu'il voie que ce qu'il considère comme des merveilles, dont il se croit peut-être le seul possesseur, m'appartient en fait également. Bien plus, ce qu'il ne demande pas, j'ajouterai, suivant mon habitude, et la méthode de recherche et la démonstration; il verra ainsi qu'elles procèdent directement de l'art d'invention que j'ai exposé. Je ne suis pas pour moi si jaloux de mes découvertes que je ne les communique pas aux autres, et je ne serai nullement fâché si le très savant Fermat y apprend quelque chose qu'il n'aurait pas remarquée. Je le laisse d'ailleurs libre de faire ou non connaître les spéculations auxquelles il fait allusion et ses procédés de démonstration; je ne réclamerai pas l'exécution de sa promesse, s'il la regrette.

Ses *hyperboles infinies* ne sont autres que les figures construites suivant les séries que j'appelle *réciproques,* et dont j'ai enseigné la quadrature prop. 102, 103, 104, 105 *Arithm. Infin.;* j'ai déjà montré cette identité et il la reconnaît lui-même.

Soit donc, par rapport à la droite infinie $A\Delta\delta$ (*fig.* 1), une figure de ce genre répétée, de part et d'autre, de telle manière qu'il y ait con-

Fig. 1.



gruence entre $A\delta BD$ et $A\delta bd$, par exemple. La figure double ainsi formée est celle que Fermat appelle *hyperbole infinie* [1] et dont il demande le centre de gravité.

Comme les droites parallèles à $A\delta$ (en dessous et au-dessus) forment une série réciproque, dont par conséquent l'indice est négatif, soit $-p$; comme, d'autre part, les moitiés sont proportionnelles aux lignes entières, et que par conséquent les milieux de ces droites, ou leurs centres de gravité, doivent être regardés comme suspendus à la balance $A\delta$ à des distances du point A (supposé le centre de la balance) proportionnelles aux grandeurs des droites elles-mêmes; les moments, dont la raison est composée de celle des grandeurs et de celle des distances, formeront une série ayant pour indice $-2p$.

Ainsi la figure totale est au parallélogramme inscrit Db, comme 1 est à $-p+1$, et la somme des moments de l'une est à la somme des moments de l'autre, comme 1 à $-2p+1$. Mais le centre de gravité du

(1) Fermat ne s'est pas en réalité exprimé d'une façon si impropre; mais la figure de Wallis n'en répond pas moins à celle du Tome II, page 338. — Le nombre p de Wallis est l'exposant de y dans l'équation $y^p x = A$ de l'hyperbole $b\delta$ rapportée aux axes $A\delta$ (des x) et Ad (des y). D'autre part sa *figure totale* comprend le rectangle $DBbd$.

parallélogramme est, comme on sait, en son point milieu; le parallélogramme Db doit donc être regardé comme suspendu en M, milieu de AΔ, dont la distance à A est $AM = \frac{1}{2}A\Delta$.

Mais le poids de la figure totale, dans sa position (¹), étant au poids du parallélogramme, dans sa position, comme 1 à $1-2p$, si l'on prend sur l'autre bras de la balance, la droite AP étant à AM comme 1 à $1-2p$, le parallélogramme suspendu en P fera équilibre à la figure totale suspendue comme auparavant. D'autre part, la grandeur de la figure totale étant à celle du parallélogramme comme 1 à $1-p$, si l'on fait $\frac{1}{1-p} = \frac{AP}{AC}$, C étant sur l'autre bras que P, et les distances étant réciproquement proportionnelles aux grandeurs, ce point C sera le centre de gravité de la figure infinie, si toutefois il y en a un.

Mais, dans le cours de l'opération, on a dû prendre $\frac{1}{1-2p} = \frac{AP}{AM}$; il est donc clair que, pour qu'il y ait un point P, il faut que l'on ait

$$2p < 1 \quad \text{ou} \quad p < \frac{1}{2}.$$

Autrement $1-2p$ serait nul ou moins que rien, et dès lors il n'y aurait nulle part ni point P, ni point C.

Ainsi nous avons trouvé, pour toutes les hyperboles infinies de Fermat, qui en ont, le centre de gravité, et nous avons distingué celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont point. Ce qui était demandé.

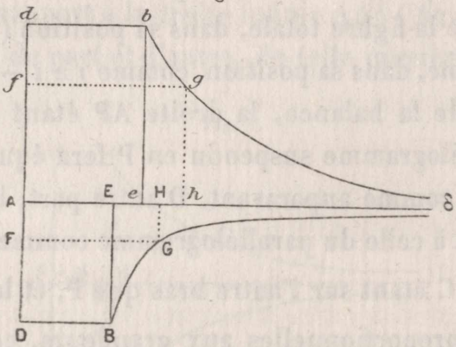
J'ajouterais bien davantage sur le centre de gravité, tant de ces figures, que d'autres formées de différentes façons; n'était que Fermat borne là sa demande, et que je dois me souvenir que j'écris une lettre, non un volume.

Mais, si jusqu'à présent je me suis conformé à ses ordres, je lui demanderai en retour de traiter la même question sur ses hyperboles, dans le cas où les courbes, de part et d'autre de l'axe, ne seraient pas des hyperboles de même espèce, et cela en général.

(¹) C'est-à-dire le moment par rapport à A.

Par exemple : Que, dans la figure $A\delta BD$ (*fig.* 2), infinie au sens de Fermat, on inscrive autant de parallélogrammes AG que l'on voudra;

Fig. 2.



de même, dans la figure $A\delta bd$, autant de parallélogrammes Ag que l'on voudra ; mais que d'un côté on ait

$$\overline{FG}^3 \times GH = \overline{BD}^3 \times BE,$$

et de l'autre

$$\overline{fg}^5 \times \overline{gh}^2 = \overline{bd}^5 \times \overline{be}^2.$$

On demande de trouver le centre de gravité de la figure totale, si toutefois il en a un, et de déterminer, en général, quelles figures de ce genre en ont un et lesquelles n'en ont pas.

S'il avoue qu'il ne le peut faire, je m'engage à donner la réponse.

Enfin, et après ses autres lettres, j'ai reçu à part du même Fermat quatre *Remarques* sur mon *Arithmétique des Infinis*. Je pourrais sans inconvénient les passer sous silence, si votre illustre correspondant ne pouvait penser que je le dédaigne; en tout cas, je suis porté à croire qu'il a écrit ces Remarques à la hâte et sans grande réflexion, que peut-être même, s'il a lu aujourd'hui le reste de l'Ouvrage, il préférerait ne pas les avoir faites; tant on y reconnaît mal la pénétration d'un si grand homme, tant tout y est ἀπροσδιόνυσα (¹).

I. Dans l'Épître, en tête de l'*Arithmétique des Infinis*, j'expose l'his-

(¹) Ne touchant pas à la question dont il s'agit. — Les *Remarques* en question forment la pièce n° 85 de la *Correspondance de Fermat*.

toire de mes recherches et notamment comment j'ai appliqué à mon sujet la Méthode des Indivisibles de Cavalieri. En effet, de même que :

La raison de la somme de tous les cercles dont se compose (au sens de Cavalieri) le conoïde parabolique à la somme d'autant de cercles du cylindre est la raison du conoïde lui-même au cylindre; et que la raison des sommes respectives de tous les diamètres de ces cercles est la raison de la parabole au parallélogramme; raisons qui sont connues l'une et l'autre;

Que la raison de la somme de tous les cercles dans le cône à celle de tous les cercles dans le cylindre est la raison du cône au cylindre, et que la raison des sommes respectives des diamètres de ces cercles est la raison du triangle au parallélogramme; raisons qui sont encore connues l'une et l'autre;

De même, la raison de la somme de tous les cercles dans la sphère à la somme de tous les cercles dans le cylindre est la raison de la sphère au cylindre, et la raison des sommes respectives des diamètres de ces cercles est la raison du cercle au parallélogramme; ce que Fermat d'ailleurs ne nie aucunement.

Mais ici la première raison est connue depuis longtemps, la seconde ne l'est pas. J'ai donc dit que je me proposais de chercher si par quelque moyen je pourrais, en partant de celle qui est connue, arriver à celle qui est inconnue jusqu'à présent.

Fermat réplique : « Mais elle ne peut être connue, à moins de connaître la quadrature du cercle. » Ce qui est parfaitement juste; carrer le cercle c'est précisément trouver cette raison, et du moment où je me proposais de la chercher, je me proposais de chercher la quadrature du cercle. Au reste, je l'ai dit là-même en propres termes.

II. J'avais dit, après avoir indiqué la formation de la série des nombres

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad 630, \quad \ldots,$$

que je cherchais quel terme moyen devait être intercalé entre 1 et 6.

Il répond que le moyen géométriquement proportionnel ne satisfait pas à la question, comme n'ayant pas correspondance avec les autres termes de la progression. Ce qui est juste, puisque la série exposée n'est pas formée de termes en proportion géométrique; le moyen terme cherché ne peut donc être un moyen géométriquement proportionnel.

Mais quand il infère, de ce que le moyen géométriquement proportionnel ne convient pas, qu'aucun autre ne peut convenir, il n'y a pas même là une ombre de raison; pas plus que s'il avait avancé la même chose sur la série

$$1, \ 6, \ 11, \ 16, \ \ldots.$$

Personne n'ignore qu'entre 1 et 6 on doit intercaler le moyen terme $3\frac{1}{2}$, non pas comme moyen géométriquement proportionnel, mais comme le moyen que comporte la série d'après sa nature, c'est-à-dire le moyen arithmétiquement proportionnel.

De même, dans la série des nombres triangulaires

$$1, \ 6, \ 15, \ \ldots,$$

si quelqu'un affirmait qu'entre 1 et 6 il ne peut y avoir de moyen terme comporté par la série, par ce motif que ni le moyen arithmétique, soit $3\frac{1}{2}$, ni le moyen géométrique, soit $\sqrt{6}$, ne conviennent, il est certain qu'il se mécompterait puisqu'il y a un terme intermédiaire, le nombre triangulaire 3 que comporte la série; de même qu'entre 6 et 15 on doit intercaler 10.

Si maintenant dans la série

$$1, \ 3, \ 6, \ 10, \ 15, \ \ldots$$

on demande quel terme intermédiaire convient entre 1 et 3, j'ai montré, page 175, que c'est $1\frac{7}{8}$.

Mais, comme l'interpolation dans de pareilles séries revient très fréquemment dans tout le Livre, surtout depuis le scholie de la proposition 165 jusqu'à la fin; comme c'est, en fait, l'objet principal de tout l'Ouvrage, il eût été impossible, s'il l'avait lu entièrement et qu'il eût tant soit peu réfléchi, qu'il pensât que je voulais parler de moyen géométrique proportionnel.

Au reste, j'ai entrepris, entre autres, l'interpolation de cette même série

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad \ldots,$$

et j'ai montré, proposition 167, que le terme moyen à intercaler entre 1 et 6 est $2\square$; ce que signifie ce symbole, je l'ai complètement expliqué sur la proposition 191 (¹).

III. J'avais dirigé la recherche dans le premier lemme (prop. 1) de telle sorte qu'elle fût conforme à la marche à suivre dans les autres lemmes semblables, mais plus compliqués, des propositions 19, 39, 43, etc., et qu'ainsi elle pût les éclairer.

Fermat montre, par une longue discussion, qu'il est capable de donner une autre démonstration. Je n'en aurais douté en aucun cas; car qui donc, même arithméticien *de trivio* (à plus forte raison un tel homme) peut ne pas savoir prendre la somme d'une progression arithmétique? Je ne pense pas qu'il se figure que je serais dans ce cas; je le renverrais à la *Prop.* 2 *Con. Sect.* et à la proposition 45 du Chapitre XXVII de ma *Mathesis Universalis*.

Je dois faire remarquer à votre très subtil correspondant que, dans l'endroit dont il s'agit, je ne m'occupe pas de démontrer la proposition que j'ai énoncée, mais du moyen de découvrir la chose demandée, comme si elle était inconnue; je veux, par cet exemple de recherche dans une question facile, préparer à des recherches semblables dans des questions plus difficiles.

S'il avait voulu que sa remarque portât, il aurait dû montrer qu'il n'y avait pas là une méthode légitime de chercher une chose inconnue; il ne l'a point fait; il avoue même qu'elle est utile pour chercher des choses cachées, toutefois avec les précautions nécessaires. Mais il ne niera pas, je pense, que la quadrature du cercle, que je cherchais

(¹) Le symbole $\square$ de Wallis signifie le rapport du carré du diamètre à la circonférence : *voir*, Tome II, la note de la page 348.

entre autres, ne soit chose assez cachée; il n'indique nullement, d'autre part, que j'aie employé cette méthode avec assez peu de précaution pour commettre une erreur; je ne vois donc pas à quel titre il peut justement blâmer ma méthode de recherche.

Voulait-il qu'après avoir légitimement découvert la chose, je la confirmasse *a posteriori* par des démonstrations apagogiques? J'ai suffisamment dit pourquoi je ne le faisais pas, tant à la proposition 2, *Con. Sect.* qu'à la proposition 43, *Arith. Infin.* et ailleurs. C'est que je n'en sentais pas le besoin, et je ne le sens pas encore.

IV. Enfin, lorsque, sur la proposition 2, il indique que la restriction serait faite à tort, votre clarissime Correspondant se trompe absolument sur le sens de ce que j'ai dit; il n'a pas assez fait attention à mes paroles.

J'ai affirmé cette proposition dans toute sa généralité, et je crois l'avoir démontrée généralement, en tant que besoin était; en tous cas, elle ressort de la recherche précédente. Oui, il est universellement vrai, et je l'ai universellement affirmé, qu'une somme de termes arithmétiquement proportionnels, commençant à o (série qui sera toujours comme o, 1, 2, 3, ...) quel que soit le second terme, sera toujours, comme 1 est à 2, à la somme d'autant de termes égaux au plus grand. Et cela est vrai sans aucune restriction.

Mais j'avais ajouté, à titre d'explication ou, si l'on veut, comme corollaire :

Si l'on pose a pour le nombre des termes, l pour le dernier, quel que soit le second, la somme de tous les termes sera $\frac{1}{2}al$, c'est-à-dire la moitié du nombre des termes $\left(\frac{1}{2}a\right)$ multipliée par le dernier terme (l).

Cela est encore affirmé sans restriction. Mais j'ajoutais :

Si d'ailleurs le second terme est 1 (et autrement, il n'en serait pas de même), le nombre des termes sera $l+1$, c'est-à-dire supérieur d'une unité au dernier terme. Dès lors la somme des termes sera $\frac{l+1}{2}l$; car dans ce cas $\frac{l+1}{2}$ vaudra autant que $\frac{1}{2}a$, la moitié du nombre des termes, laquelle, multipliée par l, le dernier terme, doit donner la somme totale.

Or que dans ce cas, le seul que j'aie énoncé sous restriction, il faille bien en faire une, votre très savant Correspondant ne peut le nier. S'il est vrai que, par exemple, dans la progression

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4,$$

dont le second terme est 1, le nombre des termes est $l+1$, c'est-à-dire $4+1=5$, dans une autre, dont le second terme ne soit pas 1, comme

$$0, \ 2, \ 4, \ 6, \ 8,$$

le nombre des termes n'est pas $l+1$, c'est-à-dire $8+1$, mais bien $\frac{8}{2}+1=5$.

Or mes expressions ne peuvent avoir aucun autre sens, et on ne peut les interpréter autrement sans leur faire une violence excessive. Car, après avoir affirmé en général qu'*une somme de termes arithmétiquement proportionnels et commençant à* 0 *est à la somme d'autant de termes égaux au plus grand comme* 1 *est à* 2, j'ai immédiatement ajouté en toutes lettres : *A savoir, si le premier terme est* 0, *le second* 1 (*car autrement la conclusion devrait être modifiée*), *et si le dernier est l, la somme sera $\frac{l+1}{2}l$ (car, en ce cas, le nombre des termes sera $l+1$); ou autrement (en posant a pour le nombre des termes, quelle que soit d'ailleurs la valeur du second) $\frac{1}{2}al$.*

Cela est dit si clairement qu'il est étonnant que quelqu'un, pourvu qu'il y fasse suffisamment attention, puisse le mal comprendre. On ne peut donc qu'attribuer à la précipitation qui l'a entraîné, que votre illustre Correspondant ait pu se méprendre sur ce que je voulais dire, alors qu'il a d'ordinaire une telle pénétration et une telle finesse d'esprit.

Voilà ce que je pense devoir dire sur ces Remarques, pour ne pas paraître les mépriser. Mais si Fermat a depuis trouvé assez de loisir pour examiner à nouveau ces questions et pour y réfléchir un peu plus attentivement, je ne doute pas qu'il n'ait déjà de lui-même trouvé satisfaction.

Votre très noble Correspondant a pris plaisir à provoquer en champ clos (on peut le voir dans ses lettres), non pas un ou deux mathématiciens du commun, mais et l'Angleterre tout entière, et la Belgique et le reste de la Gaule, sauf la Narbonnaise; il ne trouvera dès lors pas mauvais, je crois, que nous lui rendions la pareille; et cela, non pas sur une bagatelle, mais sur une question où personne ne puisse nier que le nœud ne soit digne d'une telle main, ni, s'il le dénoue, que la chose en valait la peine. Je ne veux donc pas parler de la question par laquelle j'ai répliqué à sa première et qui est de même nature; ce n'est pas un sujet qui me semble mériter une anxieuse application. Je ne pense pas davantage à la question du tronc de cône; comme je l'ai dit alors, je ne l'ai pas proposée comme difficile, mais comme élégante. Pas davantage à celle qu'il a rappelée dans sa lettre, à savoir :

Étant donnée la série des nombres

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630,\quad \text{etc.},$$

trouver entre 1 *et* 6 *le terme intermédiaire que comporte la série.*

Cependant c'était là, à le proposer pour la première fois, un problème suffisamment ardu, puisque même encore votre très noble Correspondant le considère comme insoluble. Mais puisque j'en ai déjà donné la solution dans un livre publié par moi, je n'ai pas à le proposer de nouveau.

Toutefois j'en choisirai un tout semblable; à savoir :

Étant donnée la série des nombres

$$1,\quad \frac{5}{6},\quad \frac{31}{30},\quad \frac{209}{140},\quad \frac{1471}{630},\quad \frac{10625}{2772},\quad \text{etc.},$$

trouver entre 1 *et* $\frac{5}{6}$ *le terme intermédiaire que comporte la série.*

Qu'il ne pense pas là-dessus, comme il semble l'avoir fait pour l'autre série, que je demande une moyenne géométrique pas plus qu'une moyenne arithmétique; je ne lui demande pas de tant s'appliquer pour trouver $\frac{11}{12}$ ou $\sqrt{\frac{5}{6}}$; il s'agit d'un terme convenant à la nature de la série et ayant correspondance avec tout l'ensemble. Il ne lui suffira pas non plus de dire que ni la moyenne géométrique, ni la moyenne arithmétique ne conviennent à la série; car on ne demande pas quel terme ne convient point, mais quel est celui qui convient.

Qu'il ne croie pas non plus que je lui propose cela comme plaisanterie, et que ce soit une bagatelle; s'il résout légitimement cette question, je promets en retour un enjeu assez précieux, la quadrature de l'hyperbole. Et si la Gaule Narbonnaise ne le peut, ce sera fourni à quelque jour par l'Angleterre, grâce à la faveur divine.

Mais il y a déjà trop longtemps que j'ennuie votre Seigneurie, et que, rendu trop audacieux par votre clémence, j'enfreins les lois de l'urbanité; et cela à tel point que je ne pourrais, sans une faute nouvelle, implorer le pardon de celle que j'ai commise. Mais du moins il me reste l'espoir que, dans votre insigne complaisance, vous daignerez interpréter avec assez de bienveillance ce que j'ai pu mal faire, pour que je ne sache pas trouver auprès de vous un meilleur avocat que vous-même, un meilleur défenseur, soit de moi, soit de notre nation. C'est dans cet espoir que j'ose encore, m'appuyant sur votre faveur, me dire,

Très insigne Seigneur,

Votre très obéissant et très respectueux,

J. Wallis.

Oxford, $\frac{\text{21 novembre}}{\text{1}^{\text{er}}\text{ décembre}}$ 1657.

J'ai cru à propos d'ajouter ici, pour que la question tout entière soit plus complètement exposée au lecteur, ce qui a été indiqué ci-dessus comme omis ou changé dans la lettre précédente, au sujet du centre de gravité (*voir* page 441, ligne 4, à page 444, ligne 11 : suit une première rédaction).

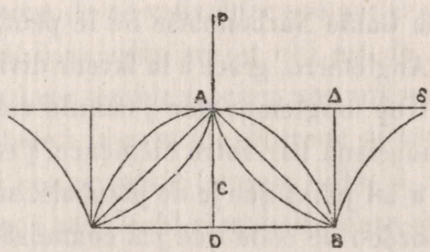
Fermat exige de moi que je fournisse le centre de gravité dans toutes les hyperboles infinies qui peuvent en avoir un, et que je distingue celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas. Il désire qu'au moins j'envoie la proposition générale, même sans démonstration.

Je ferai ce que demande votre très noble Correspondant, et même, ce qu'il ne demande pas, j'ajouterai la démonstration ; il verra ainsi qu'elle procède directement de l'art d'invention que j'ai exposé.

Voici la proposition :

Si à l'axe AD (*fig.* 3), dont le sommet est A, se trouve rapportée (des deux côtés), une figure soit plane, soit solide, dont les ordon-

Fig. 3.



nées (soit des droites, soit des surfaces planes semblables) forment une série de termes soit égaux, soit suivant les premières, secondes, troisièmes, etc. puissances, soit suivant les sous-secondes, sous-troisièmes, etc., soit quelque autre série formée de tels termes combinés entre eux comme on voudra, soit enfin une série *réciproque* de l'une quelconque des précédentes (ce qui comprend ce qu'il appelle *hyperboles infinies*) ; que l'on divise l'axe AD au point C, en sorte que $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}$ soit égal au rapport de l'unité à l'indice de la série augmenté de l'unité ; C sera le centre de gravité de la figure.

Si la série est telle que l'axe puisse être divisé de la sorte, la figure aura un centre de gravité ; autrement, non.

Pour que l'axe puisse être ainsi divisé, il faut que l'indice de la série soit plus grand que -1 ; autrement non.

Suit la démonstration :

Supposons d'abord que le point A du sommet soit au centre de suspension de la balance, et que l'axe AD soit dirigé suivant les bras de cette balance.

Soit p l'indice de la série suivant laquelle procèdent les ordonnées (droites ou surfaces planes); cette série sera donc, comme 1 à $p+1$, à la série des termes égaux correspondants, en partant de A.

Il est clair, d'autre part, que leurs distances au sommet, donc au centre de la balance, sont proportionnelles aux abscisses (ou plutôt sont ces abscisses même); c'est donc une série de termes de la première puissance, dont l'indice est 1.

Or la raison des moments entre eux est composée de la raison des grandeurs et de celle de leurs distances au centre de la balance. La série des moments, composée dès lors des deux séries correspondantes, aura donc pour indice $p+1$, qui est la somme des indices des séries composantes.

Par conséquent, la somme de tous les moments (c'est-à-dire le poids de la figure entière ainsi suspendue) sera à la somme d'autant de moments égaux au dernier (c'est-à-dire à la figure correspondante formée de termes égaux, et suspendue en D) dans le rapport $\frac{1}{p+2}$.

Si donc, sur l'autre bras de la balance, on prend le point P en sorte que $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{p+2}$, et qu'on y suspende cette figure correspondante formée de termes égaux, elle fera équilibre à la figure proposée, suspendue comme auparavant, et le centre de gravité des deux poids ainsi suspendus sera le point A.

Si donc on supprime le poids suspendu en P et qu'on prenne C, en sorte que $\frac{1}{p+1} = \frac{AP}{AC}$ (c'est-à-dire les distances dans le rapport inverse des grandeurs), ce point sera le centre de gravité du second poids.

Mais $AP = \frac{1}{p+2}AD$; donc $AC = \frac{p+1}{1}AP = \frac{p+1}{p+2}AD$; dès lors $CD = \frac{1}{p+2}AD$ et $\frac{AC}{CD} = \frac{p+1}{1}$. C. Q. F. D.

Si maintenant p est -1 ou < -1 (comme -2, -3, etc.), $p+1$ (c'est-à-dire alors $-1+1$, $-2+1$, $-3+1$, etc.) sera soit 0, soit moins que 0; il n'aurait donc aucun rapport avec l'unité.

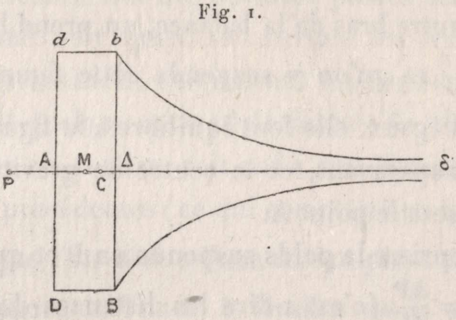
D'où ressort la distinction.

Fermat dira peut-être : « De cette manière on trouve bien le centre de gravité (entre autres) des mêmes figures que j'appelle *hyperboles infinies,* mais non pas dans la même situation. » En effet, il ne les suppose pas prolongées à l'infini des deux côtés du diamètre limité AD, mais des deux côtés du diamètre infini Aδ; or c'est dans cette position qu'il demande le centre de gravité.

J'avoue que cela est vrai; mais je réponds que ma spéculation n'est pas moins curieuse que l'autre, et si je ne me trompe, elle est nouvelle; je ne sache pas du moins que Fermat ou quelque autre l'ait déjà, je ne dis pas atteinte, mais seulement entreprise. Au reste, afin qu'il ne se plaigne pas que je ne lui aie point donné satisfaction, puisqu'il demandait le centre de gravité dans une autre situation, je ne refuserai pas de m'astreindre à lui répondre, même sur ce point.

Les droites parallèles à A$\Delta\delta$ (*fig.* 1) (tant dessous que dessus) forment une série réciproque d'une directe dont l'indice sera p, par

Fig. 1.



exemple. Cette série réciproque aura donc pour indice $-p$. Comme d'autre part les moitiés sont proportionnelles aux entiers, les moitiés de ces droites parallèles formeront de même une série d'indice $-p$; et par conséquent les milieux de ces droites ou leurs centres de gravité devront être regardés comme suspendus à la balance Aδ à des distances du centre de la balance A, proportionnelles aux grandeurs des droites elles-mêmes. Donc les moments, dont la raison est composée de celle des grandeurs et de celle des distances au centre de la balance, seront eux-mêmes en raison double des grandeurs; ils formeront donc une série réciproque d'indice $-2p$.

Ainsi la figure totale sera au parallélogramme inscrit comme 1 à $-p+1$; et la somme des moments de l'une sera à la somme des moments de l'autre (dans cette situation) comme 1 à $-2p+1$. Mais le centre de gravité du parallélogramme est, comme on sait, en son point milieu, le parallélogramme inscrit doit donc être regardé comme suspendu au milieu de $A\Delta$, soit en M, dont la distance au centre de la balance est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$.

Mais le poids de la figure totale, dans sa position, étant au poids du parallélogramme inscrit, dans sa position, comme 1 à $-2p+1$, si l'on prend sur l'autre bras de la balance, au delà du centre A, la droite AP qui soit à AM comme 1 à $-2p+1$, le parallélogramme suspendu en P fera équilibre à la figure totale suspendue comme auparavant. D'autre part, la grandeur de la figure totale étant à celle du parallélogramme comme 1 à $-p+1$, si l'on fait $\frac{1}{-p+1} = \frac{AP}{AC}$, C étant pris sur l'autre bras que P, et les distances étant réciproquement proportionnelles aux grandeurs, ce point C sera le centre de gravité de la figure proposée.

Mais $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$ et $AC = \frac{-p+1}{1} AP = \frac{-p+1}{-2p+1} AM$. Par conséquent,

$$\frac{1-2p}{1-p} = \frac{AM}{AC}.$$

Il faut donc que $1 > 2p$ ou $p < \frac{1}{2}$, autrement $1-2p$ serait nul, ou même moins que rien.

Je dis donc (*seconde proposition*) que :

Si de part et d'autre de l'axe infini $A\delta$, dont le sommet est A, se trouve une figure plane, telle que, par rapport à l'axe conjugué DAd, limité de part et d'autre et également prolongé à partir de son milieu A, les ordonnées forment une série réciproque quelconque (dont l'indice sera, en tout cas, négatif), — c'est là ce que Fermat appelle *hyperboles infinies,* — si l'on prend un point C, tel que le rapport du double de l'indice de la série plus l'unité au même indice, plus l'unité, soit celui de AM (distance du sommet au point milieu du parallélogramme inscrit) à AC (pris du même côté sur l'axe Aδ), ce point C sera le centre de gravité de la figure, si toutefois elle en a un. Or elle en aura un si l'indice de la série est supérieur à $-\frac{1}{2}$, autrement, non.

On peut remarquer au reste que le même mode de raisonner s'appliquerait absolument, même si les deux semi-hyperboles DAδ, dAδ, au lieu d'être disposées des deux côtés de la droite Aδ, de façon à produire une figure hyperbolique infinie en pointe, comme ici, étaient situées de part et d'autre de la droite DB, mise en coïncidence avec db, de façon à produire une figure avec creux. Au lieu de chercher, comme tout à l'heure, le point C sur la droite Aδ, on le chercherait de la même manière, mais sur la droite DB prolongée.

On arriverait encore au même résultat pour une figure composée de deux semi-paraboles ou semi-paraboloïdes, semblables et semblablement placées, soit de façon à être tangentes à Aδ au sommet commun, soit à avoir DB comme base commune. On aura, en effet, toujours $\frac{2p+1}{p+1}$ égal soit à $\frac{AM}{AC}$ soit à $\frac{DM}{DC}$.

De la sorte il est surabondamment donné satisfaction aux demandes de Fermat; mais il eût été facile, en partant des mêmes principes, de déterminer le centre de gravité, non seulement dans les paraboles ou paraboloïdes entières, mais aussi dans les semi-paraboles et semi-paraboloïdes; bien plus, dans la moitié des figures de l'espèce que Fermat appelle *hyperboles infinies;* ce à quoi je ne sais s'il a jamais pensé.

J'entends la figure formée par les droites AD, DB limitées, Aδ infinie, et une seule courbe. En effet, ayant trouvé les points C, tant sur la droite AD que sur la droite Aδ, si l'on en mène des parallèles à AD et à Aδ, leur point de rencontre sera le centre de gravité de cette figure.

D'où l'on conclura facilement de même, si besoin est, le centre de gravité dans une figure formée de semi-paraboles de ce genre ou semi-hyperboles infinies, mais dissemblables.

Ce qui vient d'être montré au sujet des hyperboles planes de ce genre peut être étendu également (*mutatis mutandis*) aux figures solides formées, lorsque les ordonnées sont des surfaces planes semblables parallèles et rapportées à des parallèles soit à AD, soit à Aδ. Mais je dois me souvenir qu'en ce moment j'écris une lettre et non pas un Traité complet.

LETTRE XVII.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Très illustre Seigneur, puisque vous le demandez (et je ne puis qu'obéir à de tels commandements de votre part), je vais formuler, aussi brièvement que possible, la méthode de rechercher les nombres requis pour la solution du problème de Fermat, telle que nous l'avons pratiquée jusqu'à présent; j'indiquerai en même temps et le fondement de cette méthode et, là où il conviendra, les divers abrégés des opérations, puisque, autrement, la recherche peut tourner en longueur.

Le problème demande que : *étant donne un nombre quelconque non carré, soit n, on trouve un nombre carré, soit a^2, tel que son produit par le nombre donné, étant augmenté de l'unité, fasse un carré, soit*

$$na^2 + 1 = l^2.$$

De plus, il faut fournir une infinité de carrés tels que a^2, quel que soit le nombre non carré n qui soit proposé.

Alors qu'il n'était nullement question de nombres entiers, nous avions déjà résolu ce problème en fournissant tous les possibles, tant entiers que fractionnaires. M. Fermat a ajouté après coup qu'il ne voulait que des entiers; ainsi il a demandé qu'on fournisse une infinité de carrés entiers satisfaisant à la condition. C'était changer complètement le problème primitivement proposé en un autre d'une tout autre nature. Néanmoins, j'ai cru devoir admettre ce changement et aborder la question en nombres entiers. Voici le résultat :

J'ai jugé devoir partir de la règle générale précédemment énoncée. A savoir, si nous appelons n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un carré quelconque; d sa différence avec n; $\frac{4q}{d^2}$ sera un carré requis. Nous avons déjà démontré antérieurement que non seulement cette règle est vraie et donne une infinité de carrés satisfaisant à la condition, mais encore qu'elle donne absolument tous les possibles tant entiers que fractionnaires.

Cela posé, pour la nouvelle condition ajoutée, il suffit de faire que $\frac{4q}{d^2}$, et par conséquent sa racine $\frac{2R}{d}$, soit un nombre entier, ou autrement que d soit une partie aliquote du nombre $2R$. Toutes les fois, en effet, qu'il en est ainsi, le carré fourni par la règle est évidemment un nombre entier.

Or, ayant un entier de ce genre, une méthode sûre en donne aussitôt une infinité d'autres, pour ne pas dire tous; ce qui sera exposé plus loin. Cependant, comme il peut se faire, ce qu'il ne faut pas dissimuler, que $2R$ soit un nombre fractionnaire, même quand $\frac{2R}{d}$ est entier, nous poserons

$$R = \frac{s}{r} \qquad \text{et, par conséquent,} \qquad q = \frac{s^2}{r^2},$$

et aussi

$$d = |q - n| = \left|\frac{s^2}{r^2} - n\right|.$$

Ainsi ce sera la même chose de diviser soit $2R$ par d, soit $\frac{2s}{r}$ par $\left|n - \frac{s^2}{r^2}\right|$, ou, en multipliant de part et d'autre par r^2, $2sr$ par $|nr^2 - s^2|$.

Par conséquent, si, d'une manière quelconque, on trouve, entre le produit du nombre n proposé par un carré quelconque et un autre carré, une différence qui soit une partie aliquote du double produit des racines de ces deux carrés (c'est-à-dire si $|nr^2 - s^2|$ est partie aliquote du nombre $2sr$), le quotient de ce double produit par cette différence donne un nombre entier, racine du carré cherché.

Vous direz : Mais comment trouver ce carré dont il faut partir, et qui, multiplié par n, doit différer d'un autre carré d'une partie aliquote de ce double rectangle? C'est ce que je vais exposer maintenant à ma façon.

L'entier n proposé étant non carré, soit le carré entier immédiatement supérieur

$$c^2 = n + b.$$

Si l'on multiplie le nombre n par un carré quelconque, soit a^2, on aura

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = (ca)^2 - b.a^2.$$

C'est-à-dire que le nombre donné n, multiplié par le carré du nombre a, donne pour produit le carré du même nombre a pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la racine du carré immédiatement supérieur au nombre donné, moins le carré de ce même nombre a, après sa multiplication par la différence b entre le nombre donné et le carré immédiatement supérieur.

Par exemple, soient : $n = 7$ et, par suite,

$$c = 3 = \sqrt{9} \quad \text{et} \quad b = c^2 - n = 2.$$

Quel que soit maintenant le nombre pris pour a, on aura

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = (ca)^2 - b.a^2,$$

c'est-à-dire

$$7a^2 = (3a)^2 - 2a^2.$$

Si nous prenons dès lors, pour a, les nombres successifs : 1, 2, 3, 4, etc., on aura un Tableau comme celui ci-contre, où il est clair que les nombres a du premier membre : 1, 2, 3, 4, etc., étant en progression arithmétique, les nombres ca du second membre : 3, 6, 9, 12, suivront également une progression arithmétique, dont la raison constante sera $c = 3$, et enfin les nombres ba^2 qui viennent en troisième ligne, 2, 8, 18, 32, etc. (multiples égaux de nombres carrés consécutifs), auront des différences suivant une progression arithmétique dont la raison sera $2b$:

$$n.a^2 = (ca)^2 - b.a^2$$

$$\begin{array}{lll}
7.1^2 = & 3^2 & - 2 \\
 & & \quad 6 \\
7.2^2 = & 6^2 & - 8 \\
 & & \quad 10 \\
7.3^2 = & 9^2 & - 18 \\
 & & \quad 14 \\
7.4^2 = & 12^2 & - 32 \\
 & & \quad 18 \\
7.5^2 = & 15^2 & - 50 \\
\end{array}$$

. . . .

En effet, on sait que les carrés consécutifs se forment par l'addition continue des nombres impairs $1 + 3 + 5 + 7$, etc.

$$1 = 1,$$
$$4 = 1 + 3,$$
$$9 = 1 + 3 + 5,$$
$$16 = 1 + 3 + 5 + 7,$$

. . . .

Par suite, leurs différences croissent suivant une progression arithmétique de raison 2; dès lors leurs équimultiples auront des différences croissant suivant une progression arithmétique dont la raison sera l'équimultiple de 2. On a, en effet, évidemment

$$1b = 1b,$$
$$4b = 1b + 3b,$$
$$9b = 1b + 3b + 5b,$$

. . . .

De ce fondement dépendent toutes les relations qui suivent pour les progressions arithmétiques, et il sera inutile de le répéter davantage par la suite.

Cela posé, si $b = 1$, il est clair que le nombre $a = 1$ est un des carrés cherchés; car alors

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = c^2 - 1;$$

C'est ce qui arrive pour les nombres 3, 8, 15, etc., inférieurs d'une unité à un carré.

Si maintenant b est supérieur à l'unité, il est clair que ba^2 l'est également, et qu'on chercherait vainement le nombre 1 dans la colonne correspondante des nombres à retrancher (quoique, ainsi qu'on le dira plus loin, il puisse s'y trouver parfois un nombre qui y conduise).

Il faudra donc passer à une seconde colonne et de là à une troisième, une quatrième, etc., suivant les exigences de la question, jusqu'à ce que l'on trouve enfin le nombre 1 dans quelque colonne, ou du moins un autre nombre qui y conduise, comme je l'expliquerai plus loin.

Or on passera à une colonne suivante, dès que, dans la colonne considérée, le nombre à retrancher sera égal ou supérieur au double de la racine du carré adjacent. Alors on prendra la racine immédiatement inférieure, et l'on diminuera le nombre à retrancher de la somme des deux racines :

$$
\begin{array}{llll}
7\cdot 1^2 = 3^2 - 2 & & & \\
\quad\; 6 & & & \\
7\cdot 2^2 = 6^2 - 8 & & & \\
\quad\; 10 & & & \\
7\cdot 3^2 = 9^2 - 18 & = 8^2 - 1 & & \\
\quad\; 14 & \quad 8 & & \\
7\cdot 4^2 = 12^2 - 32 & = 11^2 - 9 & & \\
\quad\; 18 & \quad 12 & & \\
7\cdot 5^2 = 15^2 - 50 & = 14^2 - 21 & & \\
 & \quad 16 & & \\
7\cdot 6^2 = \ldots\ldots & = 17^2 - 37 & = 16^2 - 4, & \\
 & & \quad 14 & \\
7\cdot 7^2 = \ldots\ldots & \ldots\ldots & = 19^2 - 18 & \\
 & & \quad 18 & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots &
\end{array}
$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, relatif au nombre 7, on trouve à la troisième ligne

$$7\cdot 3^2 = 9^2 - 18.$$

Or 18 est double de la racine de l'adjacent 9; par suite dans la colonne suivante, à $9^2 - 18$, je substitue $8^2 - 1$, et je rencontre immédiatement, comme nombre à retrancher, 1 que je cherche. Dès lors, le carré du nombre 3 est un des carrés cherchés; et, en effet,

$$7.3^2 = 7 \times 9 = 63 = 8^2 - 1.$$

Si je continue dans la même colonne, je trouve à la sixième ligne $17^2 - 37$, à quoi je substitue dans la colonne suivante, $16^2 - 4$, puisque

$$17^2 - 16^2 = 17 + 16 = 33 = 37 - 4$$

(et ainsi toujours. Car la différence de deux carrés immédiatement consécutifs est égale à la somme de leurs racines).

Je vois donc ainsi que

$$7.6^2 = 252 = 16^2 - 4.$$

Or, comme le nombre à retrancher, 4, est partie aliquote de la racine adjacente 16, il est clair que ce même nombre 4 est, *a fortiori*, partie aliquote du double produit des racines 6 et 16. Si donc je divise par 4 le nombre $2 \times 6 \times 16 = 192$, le quotient 48 sera racine d'un autre carré cherché. En effet,

$$7.48^2 = 7 \times 2304 = 16128 = 127^2 - 1.$$

On a donc ainsi un autre carré cherché; mais immédiatement au début, nous avions, dans la première colonne,

$$7 \times 2^2 = 6^2 - 8,$$

où il est clair que le nombre à retrancher 8 divise le double produit de 2 et 6;

$$2 \times 2 \times 6 = 24 \qquad \text{et} \qquad \frac{24}{8} = 3,$$

racine d'un carré déjà trouvé.

Encore dans la même colonne, quatrième ligne, on a

$$7.4^2 = 12^2 - 32,$$

et comme le quotient par 32 de $2 \times 4 \times 12 = 96$ est 3, on retrouve pour la troisième fois la racine du même carré déjà connu. En y faisant attention, on reconnaîtra que cette colonne donne souvent coup sur coup le même résultat, car il se présente à toutes les lignes paires ou dont le rang est multiple de deux. Mais bien plus, dès la première ligne où le nombre à retrancher, 2, est partie aliquote du double produit $2 \times 1 \times 3$, le quotient est encore ce même nombre 3; toutes les lignes de la première colonne devront donc fournir cette même racine pour le carré cherché.

Il faut noter que non seulement les différences 6, 10, 14, 18, etc. de la première colonne, mais encore celles de la seconde, 8, 12, 16, 20, etc., de la troisième, 14, 18, 22, 26, etc. et ainsi de suite dans toutes les autres, sont en progression arithmétique, avec la même raison 4 que dans la première; il est donc très facile de prolonger une colonne quelconque, sans avoir à s'embarrasser d'aucune extraction de racine.

D'autre part, ces mêmes différences, prises obliquement, comme 10 et 8, 14 et 12, ou 18, 16, 14, etc. sont toujours en proportion arithmétique, et leur commune différence est toujours 2 (ce qu'on reconnaîtra d'ailleurs, *mutatis mutandis,* quel que soit le nombre n proposé). Il est donc de même facile de passer de colonne à colonne.

Il l'est encore, pour les mêmes raisons, de donner à volonté un nombre quelconque, dans une colonne quelconque, sans calculer les intermédiaires, ou encore, si cela paraît expédient, d'effectuer les opérations par bonds. Mais tout cela se présente de soi-même à qui a une pratique suffisante de la nature de la progression arithmétique, et il n'est pas besoin de le prouver plus longuement.

Au reste, ce que j'ai montré jusqu'à présent, en prenant le carré c^2 plus grand que le nombre n proposé, arrive également en prenant le carré inférieur. Je ne veux pas dire que l'on obtienne immédiatement le nombre cherché (comme dans le premier cas où l'on a $7.3^2 = 8^2 - 1$), mais on a une différence partie aliquote du double produit (comme, quand sur $7.2^2 = 6^2 - 8$, on a trouvé le nombre 8 partie aliquote du double produit $2 \times 2 \times 6$, d'où l'on déduit le quotient 3 comme racine d'un carré cherché). En effet, il est simplement requis que la différence $|nr^2 - s^2|$ divise le double produit $2rs$, sans qu'il y ait nécessité que nr^2 ou s^2 soit le plus grand des deux termes; c'est donc la même chose, pour la question, que nr^2 soit supérieur ou inférieur d'une unité à un carré.

Par exemple, soit proposé le nombre 13,

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{c}{na^2 = (ca)^2 + ba^2} \\
13.1^2 & 3^2 + 4 \\
 & \quad 12 \\
2^2 & 6^2 + 16 = 7^2 + 3 \\
 & \qquad\qquad 14 \\
\text{etc.} & \qquad\qquad 10^2 + 17 \\
 & \qquad\qquad\quad 22 \\
 & \qquad\qquad 13^2 + 39 = 14^2 + 12 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 24 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 17^2 + 36 = 18^2 + 1.
\end{array}
$$

On trouvera, à la cinquième ligne, quatrième colonne (ou troisième à partir de la première),

$$13.5^2 = 18^2 + 1.$$

Or 1, différence des nombres 13.5^2 et 18^2 divise le double produit $2 \times 5 \times 18 = 180$, et donne pour quotient 180. Ce sera donc la racine d'un des carrés cherchés.

En effet,

$$13 \times 180^2 = 421200 = 649^2 - 1.$$

Si enfin, jusqu'à présent, nous avons pris pour c^2 le carré soit immédiatement supérieur, soit immédiatement inférieur au nombre donné, cela est tout à fait arbitraire et sans nécessité; car tout autre carré supérieur ou inférieur eût donné les mêmes résultats; ce qu'il faut également entendre de ce qui suit.

Il semble que de la sorte nous ayons suffisamment traité la première partie du problème, à savoir la recherche d'un au moins des carrés demandés. Car, s'il en existe un, il est impossible qu'on ne le trouve pas ainsi, par l'un ou l'autre mode, ou au moins par le premier.

Mais, comme il peut parfois être long d'y arriver, à moins d'employer un abrégé, il convient, pour faciliter le calcul, d'enseigner, entre beaucoup, quelques abrégés de ce genre.

L'un, qui est excellent, a déjà été indiqué; il se présente lorsque la différence $|nr^2 - s^2|$ divise le double produit $2rs$. Cela arrive toujours quand cette différence est soit 1, soit 2, c'est-à-dire si nr^2 est supérieur ou inférieur, de 1 ou de 2, par rapport à un carré quelconque s^2, car 1 divise tout nombre et 2, tout nombre pair, donc $2rs$. Mais cela se présente souvent aussi pour d'autres différences.

En voici un autre : à moins de rencontrer $ba^2 = 1$ dans la première colonne, ce qui résout immédiatement la question, pour trouver 1 comme nombre à retrancher, il faut passer aux colonnes suivantes et en prendre une ou plusieurs, comme j'ai dit. Mais quel que soit le rang de la colonne où l'on trouvera 1, de ce rang connu on déduira aussitôt la racine du carré cherché. En effet, si, dans la première colonne, la racine du carré essayé est ca, elle sera, dans la seconde, $ca - 1$, dans la troisième, $ca - 2$, etc. Cela est évident dans le premier mode du procédé, où l'on prend le carré c^2 immédiatement supérieur à n; quant au second mode, j'en parlerai plus loin.

Ainsi, il est clair que la racine du carré, dans une colonne quelconque, est inférieure à la racine du carré correspondant dans la première colonne, d'autant d'unités qu'il y a de rangs d'une colonne à l'autre; appelons d cette distance ou différence. La racine du carré dans une colonne quelconque sera $ca - d$ et son carré

$$c^2a^2 - 2cda + d^2$$

étant, par rapport au carré c^2a^2, supérieur du nombre $2cda - d^2$, il faudra diminuer d'autant le nombre à retrancher ba^2 pour retrouver en tous cas la même différence na^2. Ainsi ce nombre à retrancher sera $ba^2 - 2cda + d^2$. Mais je voudrais que ce nombre ainsi déterminé soit 1. Il faut donc poser

$$ba^2 - 2cda + d^2 = 1,$$

et, transposant,

$$d^2 - 1 = 2cda - ba^2,$$

d'où

$$\frac{d^2-1}{b}=\frac{2cd}{b}a-a^2,$$

et résolvant l'équation

$$a=\frac{cd}{b}\pm\sqrt{\frac{c^2d^2-bd^2+b}{b^2}}=\frac{cd\pm\sqrt{c^2d^2-bd^2+b}}{b}=\frac{cd\pm\sqrt{nd^2+b}}{b}$$

à cause de $c^2=n+b$, d'où $c^2-b=n$ et $c^2d^2-bd^2=nd^2$.

Ainsi, connaissant d, on connaîtra a.

Cela posé, pour connaître d, il faut chercher, de la même manière que l'on a montré pour a, un carré dont le produit par le nombre donné, étant augmenté du nombre b qui a été pris, fasse un carré, en sorte que $\sqrt{nd^2+b}$ soit un nombre rationel entier. Cela peut paraître à première vue aussi difficile que la première recherche proposée; mais, en fait, il y aura un grand abrégé, parce que d (nombre des colonnes suivant la première) sera toujours moindre que a (nombre des unités dans la racine du carré cherché), comme cela est évident. On parviendra donc plus tôt au nombre à retrancher b qu'au nombre à retrancher 1.

Par exemple : soit proposé le nombre 13 et, par suite, soit

$$13.1^2=4^2-3.$$

On ne trouvera pas 1 avant la ligne 180, où

$$13.180^2=649^2-1,$$

et par conséquent $a=180$. Mais on retrouvera le nombre à retrancher $b=3$, au moins dès la ligne 71, car

$$13.71^2=256^2-3,$$

et par conséquent $d=71$, d'où l'on conclura $a=180$, comme précédemment. Le calcul est donc abrégé de plus de moitié.

Si cependant il arrivait, ce qui peut se faire parfois, que le nombre d, ainsi trouvé en premier lieu, donnât un nombre a, non pas entier, mais fractionnaire, et par suite impropre à la question proposée, on en chercherait un second, ou même un troisième, enfin quelqu'autre d donnant a entier. Ce qu'il faut aussi entendre pour ce qui suit.

Que si cette réduction des opérations ne paraît pas encore assez satisfaisante, et qu'on ne parvienne qu'avec trop de lenteur au nombre d lui-même, dans ce cas sa recherche peut aussi être abrégée par le même artifice. Précédemment, pour trouver a, nous avons cherché le rang de la colonne renfermant le nombre à retrancher prescrit 1; maintenant il faut chercher le rang de la colonne renfermant le nombre à retrancher b. Or, comme, à cause de $c^2 = n + b$, on a

$$nd^2 = c^2 d^2 - bd^2,$$

et que le nombre à retrancher bd^2 est trop grand (à moins que l'on n'ait $b = 1$) puisque celui qu'on cherche est b, il faut diminuer le carré $c^2 d^2$ (comme nous avons tout à l'heure diminué le carré $c^2 a^2$), de façon que le nombre à retrancher, étant diminué d'autant, devienne égal à b.

Ainsi, de même qu'à la racine ca du carré nous avons substitué $ca - d$, à cd nous substituerons maintenant $cd - e$, e étant le rang de la colonne où l'on trouvera le nombre à retrancher b. La différence des carrés de ces racines sera $2ced - e^2$, et en la retranchant du nombre bd^2, il restera

$$bd^2 - 2ced + e^2 = b,$$

d'où

$$e^2 - b = 2ced - bd^2$$

et

$$\frac{e^2 - b}{b} = \frac{2ce}{b} d - d^2,$$

et, résolvant l'équation,

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{c^2 e^2 - be^2 + b^2}}{b} = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b}.$$

Par exemple : soit proposé le nombre 13, on trouvera à la ligne 28,

$$13.28^2 = 101^2 - 9,$$

et, comme $9 = b^2$, on aura $e = 28$, d'où $d = 71$ et $a = 180$. Ainsi le travail, déjà réduit auparavant de la ligne 180 à la ligne 71, se trouve maintenant réduit à la ligne 28.

Mais la même méthode peut encore le réduire davantage. En effet, on montrera de la même manière, s'il est besoin, comment cette réduction doit se faire, et de même que l'on a trouvé

$$\frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b} = a, \qquad \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b} = d,$$

on trouvera

$$\frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + b^3}}{b} = e, \qquad \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 + b^4}}{b} = f, \qquad \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + b^5}}{b} = g,$$

et ainsi de suite.

Ainsi on est ramené à ceci : en commençant à procéder comme précédemment, on observera si l'on rencontre comme nombre à retrancher, soit 1, soit 2, soit quelque autre diviseur du double produit $2rs$ ci-dessus mentionné (car dès qu'un tel cas se présente, la question est aussitôt résolue, comme il a été dit); soit encore b ou une de ses puissances quelconques, b^2, b^3, etc. Si l'on rencontre ainsi b, on aura d; si l'on rencontre b^2, on aura e; si b^3, f et ainsi de suite.

Un de ces nombres étant connu, on aura évidemment les autres en rétrogradant, à moins que l'on ne trouve ainsi des nombres fractionnaires; dans ce cas, il faudra, comme je l'ai indiqué, poursuivre encore la recherche commencée.

Par exemple, soit proposé, comme auparavant, $n = 13$,

$$\begin{array}{r|llll}
13.1 & 4^2 - 3 & & & \\
2 & 8^2 - 12 & & & \\
3 & 12^2 - 27 = 11^2 - 4 & & & \\
4 & 16^2 - 48 = 15^2 - 17 & & & \\
 & \text{etc.} \quad 19^2 - 36 & & & \\
 & & 23^2 - 61 = 22^2 - 16 & & \\
 & & & 26^2 - 39 & \\
 & & & 30^2 - 68 = 29^2 - 9 & \\
 & & & & 33^2 - 36 \\
 & & & & 37^2 - 69 \\
 & & & & 41^2 - 108 = 40^2 - 27.
\end{array}$$

On trouvera, à la ligne 11, colonne quatrième à partir de la première,

$$13.11^2 = 40^2 - 27,$$

et, comme ici $27 = b^3$, on aura $f = 11$, d'où $e = 28$, $d = 71$, $a = 180$.

Mais nous négligeons, dans la première colonne, tant 3 à la première ligne, que 27 à la troisième; dans la colonne 3 après la première, ligne 8, nous négligeons 9; parce que l'un quelconque de ces nombres donnerait a fractionnaire $\left(\text{de fait } 0 \text{ ou } \frac{8}{3} \text{ ou } \frac{464}{9}\right)$, et par conséquent impropre à la question.

Ainsi l'opération a été réduite de 180 à 11. Avec le nombre proposé, on ne peut d'ailleurs obtenir une nouvelle réduction, à moins de passer à des colonnes antérieures. En effet, puisque l'on a $f = 11$, comme j'ai dit, on doit le trouver à la ligne 11, colonne 4 après la première; car $g = 4$, et l'on a d'ailleurs

$$13.4^2 = 17^2 - 81;$$

mais on ne peut trouver cette puissance dans aucune des colonnes ci-dessus; il faudrait prendre celle qui est immédiatement antérieure à la première, puisque $17 = (ca)^2 + 1$. La même chose est à dire, *a fortiori,* des nombres suivants h, i, etc.

On peut, il est vrai, prendre $g = 84$, puisque

$$13.84^2 = 303^2 - 81,$$

et que ce nombre donne, en effet, aussi bien $f = 11$ que $f = 213$, mais on voit qu'il se trouve plus tard que le f cherché.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de noter que, de même que si l'on connaît d, par exemple, on peut en déduire a, de même réciproquement, si l'on connaît a, on peut en déduire d; de même pour les autres. En effet, comme on l'a montré,

$$ba^2 - 2cda + d^2 = 1;$$

d'où, ordonnant et résolvant l'équation,

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b},$$

comme on l'a déjà vu, et

$$d = ca \pm \sqrt{na^2 + 1}.$$

De même, puisque

$$bd^2 - 2ced + e^2 = b,$$

on aura à la fois

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b} \quad \text{et} \quad e = cd \pm \sqrt{nd^2 + b};$$

et ainsi de suite.

Mais il s'ensuit aussi que

$$ba = e \quad \text{et semblablement} \quad bd = f, \quad be = g, \quad \text{etc.}$$

En effet, puisque

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b},$$

on aura

$$ba = cd \pm \sqrt{nd^2 + b} = e,$$

et de même pour les autres.

Il y a toutefois à faire cette distinction que le signe, qui est double dans les deux cas, doit être pris de deux façons différentes, le supérieur convenant mieux à la question pour l'une des quantités, l'inférieur pour l'autre. Par exemple, si l'on prend

$$ba = cd - \sqrt{nd^2 + b},$$

a sera un nombre fractionnaire, à moins que b ne divise le nombre $cd - \sqrt{nd^2 + b}$, ou bien, s'il est entier, il se trouverait encore plus tard que d ou e, dans la recherche dont il s'agirait. Au contraire, si, pour e, on prenait la plus grande quantité

$$e = cd + \sqrt{nd^2 + b},$$

quoique dans ce cas le nombre soit bien entier, comme il est plus grand que a, il n'arriverait que plus tard, dans la recherche faite pour le trouver le premier.

Ce qu'on vient de dire pour a et e s'applique également à d et f, à e et g, etc.

Ainsi, si par exemple, après avoir trouvé e, on remonte par les égalités ci-dessus à d et à a, il faut prendre les quantités les plus grandes;

si, au contraire, on veut avoir les suivantes *f*, *g*, etc., on prend les moindres, comme mieux appropriées à la question.

Les procédés abrégés, que nous venons d'indiquer pour chercher na^2 inférieur d'une unité à un carré (et en prenant dès lors $c^2 > n$), s'appliquent de même, *mutatis mutandis*, si l'on veut chercher na^2 ou nr^2 supérieur d'une unité à un carré (en prenant pour c^2 le carré immédiatement inférieur) ou encore na^2 ou nr^2, ayant avec un carré une différence de 2, en plus ou en moins. Quoiqu'en effet, dans ce cas, a^2 ne soit pas le carré cherché en premier lieu, il le donnera toutefois, comme j'ai dit plus haut. Les relations se présentent ainsi :

na^2 inférieur d'une unité à un carré.

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b},$$

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b},$$

$$e = \frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + b^3}}{b},$$

$$f = \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 + b^4}}{b},$$

$$g = \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + b^5}}{b},$$

.................,

na^2 supérieur d'une unité à un carré.

$$a = \frac{\sqrt{nd^2 - b} - cd}{b},$$

$$d = \frac{\sqrt{ne^2 + b^2} - ce}{b},$$

$$e = \frac{\sqrt{nf^2 - b^3} - ef}{b},$$

$$f = \frac{\sqrt{ng^2 + b^4} - cg}{b},$$

$$g = \frac{\sqrt{nh^2 - b^5} - ch}{b},$$

....

na^2 inférieur de deux unités.

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + 2b}}{b},$$

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{nd^2 + 2b^2}}{b},$$

$$e = \frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + 2b^3}}{b},$$

$$f = \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 + 2b^4}}{b},$$

$$g = \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + 2b^5}}{b},$$

.................,

na^2 supérieur de deux unités.

$$a = \frac{\sqrt{nd^2 - 2b} - cd}{b},$$

$$d = \frac{\sqrt{ne^2 + 2b^2} - ce}{b},$$

$$e = \frac{\sqrt{nf^2 - 2b^3} - cf}{b},$$

$$f = \frac{\sqrt{ng^2 + 2b^4} - cg}{b},$$

$$g = \frac{\sqrt{nh^2 - 2b^5} - ch}{b},$$

....

On procéderait, de même, pour chercher na^2 différant d'un carré d'un nombre quelconque, en plus ou en moins. J'entends en tant que la chose est possible, car il n'est pas universellement vrai que pour un nombre quelconque, même non carré, son produit par un carré entier puisse avoir, soit en plus, soit en moins, une différence donnée quelconque avec un carré. Mais comme, dans la question posée, il est certain que 1 et 2 divisent toujours $2rs$, que cela n'est pas de même assuré ou universellement constant pour les autres nombres, il suffira de porter son attention sur ce qui suit : à savoir si, en instituant le calcul indiqué, on trouve na^2 ayant avec quelque carré pour différence le nombre 1 ou 2, ou quelque autre partie aliquote du double produit des racines; ou bien inférieur à un carré du nombre b (différence entre le nombre donné et un carré plus grand), ou d'une quelconque de ses puissances, ou du double d'une quelconque de ses puissances; ou encore supérieur à un carré du nombre b (différence entre le nombre donné et un carré plus petit), ou de son double ou d'une puissance quelconque impaire de b ou du double d'une telle puissance; ou enfin, dans le même cas, inférieur d'une puissance paire de b ou de son double.

Si, en effet, quelqu'une de ces circonstances se présente, on aura, soit le nombre a, racine du carré cherché ou qui le fournira immédiatement, soit quelqu'un des nombres d, e, f, qui, par rétrogradation, conduiront à a, à moins que le nombre a ainsi trouvé ne soit fractionnaire, auquel cas il faudra pousser plus loin la recherche, comme il a été dit.

Par exemple, soit proposé le nombre $n = 149$, et soit pris

$$c = 12 \qquad \text{et par conséquent} \qquad b = 149 - 144 = 5;$$

on trouvera, à la ligne 17 de la colonne troisième ou 2 après la première (car il n'est pas nécessaire d'aller plus loin),

$$149 \cdot 17^2 = 206^2 + 625;$$

et dès lors, comme $625 = b^4$, on aura $g = 17$, d'où, en rétrogradant, on trouvera

$$f=82, \quad e=397, \quad d=1922, \quad \text{enfin} \quad a \quad \text{ou} \quad r=9305.$$

Le produit de ce dernier nombre par n dépasse un carré d'une unité; car

$$149 \times \overline{9305}^2 = 12900870725 = \overline{113582}^2 + 1 = s^2 + 1.$$

Le double produit

$$2rs = 2 \times 9305 \times 113582,$$

divisé par

$$nr^2 - s^2 = 1,$$

donnera

$$2113761020,$$

racine du carré cherché dont le produit par n ou 149 sera inférieur d'une unité au carré du nombre

$$25801741449.$$

On aurait obtenu le même résultat si, passant la ligne 17, on était allé jusqu'à la ligne 82 ou 397, etc., où l'on aurait eu $f=82$ ou $e=397$, etc.

Ainsi, dès la ligne 17, nous avons le nombre qui, par la méthode exposée, conduit au nombre cherché, lequel est passablement élevé, puisque le plus petit des carrés satisfaisant à la question doit être écrit avec 19 figures. C'est

$$4467985649671440400,$$

carré de

$$2113761020,$$

comme je l'ai dit; et ce carré, multiplié par 149, est inférieur d'une unité à

$$665729861801044619601,$$

carré du nombre

$$25801741449.$$

En voilà sans doute bien assez sur les procédés d'abréviation de la recherche; je n'ignore pas qu'on peut ajouter encore d'autres remarques, qui abrégeraient cette abréviation même; mais je crains d'être trop prolixe.

J'avais pensé notamment à indiquer une autre méthode abrégée. Il s'agit de montrer comment nous pourrions poursuivre par sauts l'investigation dont j'ai parlé, ce qui peut être utile, quand elle traîne en longueur, comme cela arrive parfois; de la sorte il ne serait pas même besoin, en certains cas, d'examiner une ligne sur 100. Mais cela ne me paraît pas nécessaire, et je ne dois pas en mettre trop; ou bien, si vous désirez que je traite aussi ce point, ce sera pour une autre fois.

Désormais, ayant longuement exposé la méthode de recherche d'un carré quelconque propre à notre objet, c'est-à-dire tel que son produit par un nombre donné, étant augmenté d'une unité, fasse un carré, il reste à montrer comment nous en fournirons ensuite une infinité de même espèce, pour ne pas dire tous les possibles. Là-dessus je serai aussi rapide que possible, car je n'ai pas à être prolixe, en vous exposant ce qui est de vous.

Comme je l'ai déjà dit plus haut, toutes les fois que la différence $|nr^2 - s^2|$ est une partie aliquote du double produit $2rs$, le quotient de ce dernier par cette différence sera la racine d'un carré satisfaisant à la question.

Soit donc déjà connu (par la recherche ci-dessus développée) un carré quelconque satisfaisant à la question et que nous désignerons par r^2. Puisque dès lors, par hypothèse, nr^2+1 est un carré, soit s^2 ce dernier. On a donc

$$nr^2+1=s^2, \qquad \text{d'où} \qquad |nr^2-s^2|=1.$$

Comme 1 divise tout nombre entier, il est clair que cette différence, $|nr^2-s^2|=1$, divise le double produit $2rs$; et le quotient résultant de cette division sera la racine d'un second carré satisfaisant à la question. Grâce à ce second, on en déduira de la même façon un troisième; de celui-ci un autre, et ainsi de suite à l'infini.

Toutefois, si cette solution satisfait largement à la question, de fournir une infinité de carrés de l'espèce, elle ne donne pas absolument tous les possibles.

Par exemple, soit donné le nombre 3, la racine du premier carré sera 1; on en déduira pour celle du second 4, puis successivement

$$56, \quad 10864, \quad 408855776, \quad \ldots,$$

et cependant on passe sur de nombreux carrés intermédiaires, à savoir ceux des racines 15, 209, 780, 2911, 40545, 151316, 564719, 2107560, 7865521, 29354524, 109552575.

Ces racines intermédiaires seront fournies par la règle suivante :

Soient n le nombre donné, r la racine du premier ou plus petit carré satisfaisant à la question, supposée trouvée par la méthode exposée ci-dessus, et $t = 2\sqrt{nr^2+1}$,

la racine du premier sera...		r	ou $r \times 1$,
celle du second	» ...		$r \times t$,
» du troisième	» ...		$r \times (t^2 - 1)$,
» du quatrième	» ...		$r \times (t^3 - 2t)$,
» du cinquième	» ...		$r \times (t^4 - 3t^2 + 1)$,

et ainsi de suite, selon la série ci-contre :

$$\begin{array}{ll}
r \times 1, & r \times 1, \\
t, & t, \\
t^2 - 1, & u, \\
t^3 - 2t, & x, \\
t^4 - 3t^2 + 1, & y, \\
t^5 - 4t^3 + 3t, & z, \\
t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1, & a, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

La construction de cette série se reconnaît de prime abord; il suffit d'indiquer que les coefficients sous-entendus, sinon inscrits, des premiers termes sont les unitaires 1, 1, 1, etc.; ceux des seconds les linéaires 1, 2, 3, etc., engendrés par l'addition successive des unitaires $1+1+1$, etc.; ceux des troisièmes termes sont les triangulaires 1, 3, 6, etc., formés par l'addition successive des linéaires $1+2+3$, etc.; ceux des quatrièmes termes sont les pyramidaux 1, 4, 10, etc., formés par l'addition successive des triangulaires $1+3+6$, etc., et ainsi de suite.

Ou bien si, à t, t^2-1, t^3-2t, etc., nous substituons t, u, x, etc., on aura

$$\begin{aligned} u &= tt - 1, \\ x &= tu - t, \\ y &= tx - u, \\ z &= tx - y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que chaque terme est le produit par t du terme immédiatement précédent, si l'on retranche de ce produit le terme pénultième.

Ou enfin (figuration qui pourra trouver des préférences) la série aura la forme suivante (*voir* Lettre XIV) :

Pour le nombre donné 3 :

$$3 \text{ par le carré de } 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times 3\frac{153}{209} \times \ldots;$$

ou pour 2 :

$$2 \text{ par le carré de } 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \ldots.$$

Ici connaissant, comme précédemment, la première et la seconde racine, on forme les autres de telle sorte que, dans les fractions successives, le numérateur de chacune soit égal à son dénominateur moins le dénominateur immédiatement précédent, et que chaque dénominateur soit égal au numérateur du terme immédiatement précédent réduit en fraction impropre.

Si ce que je viens de dire ne suffisait pas surabondamment pour la question à traiter présentement, on peut encore ajouter ce qui suit.

Si l'on a trouvé une série quelconque comme ci-dessus, convenant pour un nombre non carré donné, par exemple $n=2$, on aura immédiatement les séries convenant aux multiples du même nombre par un carré quelconque, soit à nm^2; pour cela, il suffit de diviser la série des racines déjà trouvées par la racine m de ce carré.

Ainsi l'on a :

2 par le carré de $2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \ldots,$

8 » $1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \ldots,$

18 » $4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

32 » $3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

50 » $14 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \ldots,$

72 » $2 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

98 » $10 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \ldots,$

128 » $51 \times \ldots,$

162 » $1540 \times \ldots,$

200 » $7 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \ldots,$

242 » $1260 \times \ldots,$

288 » $1 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

c'est-à-dire

2	par le carré de	2.	12.	70.	408.	2378.	13860....,
8	»	»	1.	6.	35. 204.	1189.	6930....,
18	»	»	4.	»	136.	»	4620....,
32	»	»	3.	»	102.	»	3465....,
50	»	»	»	14.	»	»	2772....,
72	»	»	2.	»	68.	»	2310....,
98	»	»	»	10.	»	»	1980....,
128	»	»	»	»	51.	»	»
162	»	»	»	»	»	»	1540....,
200	»	»	»	7.	»	»	1386....,
242	»	»	»	»	»	»	1260....,
288	»	»	1.	»	34.	»	1155....

Il est facile de voir que la division en question peut s'effectuer tantôt sur tous les termes, tantôt en les prenant de deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, cinq en cinq, etc. De même pour les autres nombres.

Il ne sera pas mauvais d'avertir de ce que j'ai déjà indiqué plus haut, quoique la chose soit étrangère au sujet à traiter présentement.

Si, dans la question proposée, au lieu de dire, *étant augmenté de l'unité,* on avait dit : *étant augmenté d'un nombre carré quelconque,* soit k^2, les séries des carrés que nous venons de trouver seraient à multiplier par ce carré k^2, ou, ce qui revient au même, les racines des carrés seraient à multiplier par k.

Par exemple : étant donné le nombre $n = 2$, on demande que na^2 soit inférieur d'une unité à un carré. On aura alors

$$na^2 = 2 \text{ par le carré de } 2.12.70\ldots.$$

Mais si l'on demandait que na^2 soit inférieur du nombre 9 à un carré, on aurait

$$na^2 = 2 \text{ par } 9 \text{ fois le carré de } 2.12.70\ldots.$$

Cette série fournit une infinité de carrés satisfaisant toujours à la condition proposée, toutefois elle ne les donne pas toujours tous. Cette remarque doit suffire.

Voilà les principales choses qui m'ont semblé à dire sur ce sujet; je les ai réunies dans ce résumé pour obéir à vos ordres. Il me reste à vous prier d'excuser avec bonté ce qui pourra n'être pas en tout conforme à votre désir, et de ne pas vous lasser de continuer vos faveurs accoutumées,

Très insigne Lord,

au très respectueux serviteur de votre Seigneurie,

John Wallis.

Oxford, 7/17 décembre 1657.

J'avais déjà écrit tout le reste, quand l'idée m'est venue d'ajouter encore, sous une forme tout à fait différente de celle ci-dessus, votre méthode de rechercher le premier carré. (*Voir* Lettre XIX.)

Soit, par exemple, proposé le nombre non carré $n = 13$, et soit a^2 le carré cherché, tel que $13a^2 + 1$ soit carré. On aura

$$13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$$

ou bien

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2;$$

par conséquent

$$2b > a > b.$$

Soit $a = b + c$; et, par suite,

$$4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6b^2 + 6bc + b^2,$$

ou bien

$$2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2;$$

$$2c > b > c.$$

$b = c + d$:

$$2c^2 + 2cd + 4c^2 + 1 = 3c^2 + 6cd + 3d^2,$$

$$3c^2 + 1 = 4cd + 3d^2;$$

$$2d > c > d.$$

$c = d + e$:

$$3d^2 + 6de + 3e^2 + 1 = 4d^2 + 4de + 3d^2,$$

$$2de + 3e^2 + 1 = 4d^2;$$

$$2e > d > e.$$

$d = e + f$:

$$2e^2 + 2ef + 3e^2 + 1 = 4e^2 + 8ef + 4f^2,$$

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2;$$

$$7f > e > 6f.$$

$e = 6f + g$:

$$36f^2 + 12fg + g^2 + 1 = 36f^2 + 6fg + hf,$$

$$6fg + g^2 + 1 = 4f^2;$$

$$2g > f > g.$$

$f = g + h$:

$$6g^2 + 6gh + g^2 + 1 = 4g^2 + 8gh + 4h^2,$$

$$3g^2 + 1 = 2gh + 4h^2;$$

$$2h > g > h.$$

$g = h + i$:

$$3h^2 + 6hi + 3i^2 + 1 = 2h^2 + 2hi + 4h^2,$$
$$4hi + 3i^2 + 1 = h^2,$$
$$2i = h, \qquad i = 1.$$

Par conséquent,

$$i = 1, \quad h = 2, \quad g = 3, \quad f = 5, \quad e = 33,$$
$$d = 38, \quad c = 71, \quad b = 109, \quad a = 180.$$

On procédera de la même façon pour tout nombre donné non carré.

LETTRE XVIII.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très illustre Seigneur,

J'ai reçu avant-hier soir très tard et j'ai parcouru hier le Traité de M. Frenicle sur les problèmes de Fermat, Traité que votre Seigneurie a récemment adressé au très honorable Lord vicomte Brouncker, et que ce dernier a bien voulu me communiquer; je ne l'avais pas vu auparavant et je n'en avais même jamais entendu parler, avant d'avoir reçu à ce sujet la lettre du très honorable vicomte.

Il est certain, d'après ce Traité, que son clarissime auteur, ou bien n'a pas vu, ce que j'aime mieux croire, la lettre que je vous ai adressée à Paris, ou qu'il n'a pas loyalement agi : dirai-je avec nous ou avec notre nation?

Il commence tout d'abord par insulter notre nation, et non pas elle seulement, mais aussi les Belges et même les autres nationaux de France.

« Voici », dit-il, « que Lutèce vous fournit, très illustre Seigneur, » la solution de problèmes que ni vos Anglais, ni les Belges, n'ont » aucunement pu procurer; la Gaule Celtique est fière d'enlever la » palme à la Narbonnaise, etc. »

Et bientôt après, il répète à plusieurs reprises, que « la plupart des

» autres mathématiciens, tant d'Angleterre que de Batavie, s'atta-
» chent à les résoudre », ou même « y dépensent leurs sueurs », mais qu' « il a vainement attendu quelque chose des Anglais ou des Ba-
» taves, quoique la plupart aient sué là-dessus », et autres phrases pareilles.

Pour les Français et les Bataves, ce qu'il convient d'en dire, j'ai d'autant moins à m'en soucier que j'ignore davantage ce qui s'est fait chez eux; mais, pour vos Anglais, je puis en parler.

Tout d'abord, quand les Anglais n'auraient rien fait sur la question, on n'aurait pas pour cela à triompher de notre nation; car il n'y a pas un de ses mathématiciens sur cent qui ait, je ne dis pas, sué à résoudre ces problèmes, mais les ait seulement abordés, ou même qui en ait entendu parler. Je ne sache pas, en effet, à part Lord vicomte Brouncker et moi, qu'il y ait en Angleterre un mathématicien qui y ait dépensé une petite heure, ou même qui y ait pensé tant soit peu; au moins tous ceux que je connais, d'après mes informations actuelles, les ont absolument ignorés ou bien ne s'en sont pas occupés. Si leur très noble auteur a pu dire dans une lettre particulière qu'il les proposait à tous les mathématiciens de l'Europe, il ne faut pas croire que tous, je ne dis pas : se soient aussitôt mis à la besogne, mais même en aient eu immédiatement connaissance.

Quant à nous deux, nous avouons qu'il peut bien se faire que votre clarissime correspondant ait résolu ces problèmes, au moins les deux premiers, avant l'un ou l'autre de nous. A cela, il n'y a rien d'étonnant puisqu'il les aurait résolus deux mois avant qu'il en fût rien parvenu ici. Il dit, en effet, avoir trouvé la solution dès le 23 janvier (nouveau style), alors que ces problèmes, quoiqu'ils semblent m'être adressés personnellement, n'ont pas été vus de l'un de nous deux avant le 4 mars (vieux style), soit huit semaines entières, moins deux jours, plus tard. Ce fut là, au reste, la date de leur arrivée de Paris à Londres, et ils ne parvinrent à Oxford qu'un peu plus tard.

Ce que nous avons fait sur ce sujet, il est inutile de le répéter longuement à nouveau, puisque je vous l'ai déjà exposé à plusieurs reprises dans mes lettres précédentes. Toutefois, comme cela se trouve épars et mêlé à d'autres choses (car le même M. Fermat nous a posé d'autres questions et nous avons répondu sur plusieurs points de plus d'importance), il paraît utile de faire le résumé de ce que j'ai déjà écrit à ce sujet, et de le donner à voir d'ensemble, pour qu'on puisse juger combien à tort on croit triompher de nous ou de notre nation. D'ailleurs, comme on semble parfois accuser notre lenteur, j'ai cru bon de marquer les dates.

Les deux premiers problèmes étaient conçus en ces termes :

Proposez (*voir* page 311, n° 79, à page 312, ligne 4) .... *d'une amitié naissante.*

Pour qu'on ne nous accuse pas de lenteur, je dirai que M. White, qui devait nous apporter ce papier de Paris, l'a remis à Londres à Lord vicomte Brouncker, le 4 mars (vieux style); celui-ci l'envoya le lendemain à Oxford, où il arriva le 6 mars, le soir à une heure avancée. J'y fis aussitôt une réponse, en sorte qu'elle pût être emportée par le courrier partant le lendemain de grand matin pour Londres. Voici le résumé de cette réponse :

Les questions proposées sont à peu près du même genre que celles que l'on pose sur les nombres dits parfaits, déficients ou abondants, et ne peuvent guère dès lors, ou ne peuvent pas du tout être ramenées à une équation générale embrassant tous les cas. Mais le seul et même nombre 1 satisfait aux deux questions, puisqu'il est à la fois carré et cube, et que d'ailleurs il n'a pas de parties aliquotes. J'ajoutais en même temps un problème très semblable à ces questions, et pour lequel je n'ai encore rien reçu comme réponse,

Trouver deux (*voir* p. 404, lignes 16 à 19) .... *semblable.*

A ma solution, le très honorable vicomte ajouta ensuite la sienne, à savoir : non seulement le nombre 1, mais (au cas où les fractions seraient admises) le quotient du nombre 1 par la sixième puissance de tout nombre entier; et, de plus, pour la première question, le quotient du nombre 343 divisé de la même façon, par exemple, $\frac{343}{64}$. En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties actuelles que celles qui sont dénommées comme le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, nombre carré. Ainsi ni M. Frenicle, ni M. Fermat ne peuvent dire qu'aucun Anglais n'ait satisfait aux questions, puisqu'au contraire les seuls qui les aient abordées, au moins que je sache, les ont résolues.

Comme cette solution était immédiate et qu'on ne demandait qu'un seul nombre de l'espèce, je n'ai pas jugé à propos de poursuivre des recherches dans l'infinité des nombres. La question ne me paraissait pas d'assez grande importance pour l'exiger, et l'eussé-je voulu faire, je n'en aurais pas eu le loisir. Car le problème me surprenait au milieu des occupations les plus pressantes et alors que je me disposais à partir pour assister à l'enterrement d'un frère que je venais de perdre.

Je n'étais pas encore de retour (mon absence dura deux semaines, si je me souviens bien) que, dans un entretien à Londres avec le lord vicomte, j'appris de lui que, dans l'intervalle, il avait déjà reçu, du même M. Fermat, une autre question, dans laquelle l'auteur avait une plus grande confiance, tandis qu'il semblait abandonner les autres, déjà résolues, à ce qu'on sait maintenant, par M. Frenicle; le lord avait répondu à cette question et donné, avec les précédentes, cette réponse à M. White; celui-ci les envoya immédiatement à Paris, comme on peut le reconnaître, et l'on ne peut non plus sur ce point nous reprocher un retard.

Or cette troisième question, après le préambule (*Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre, etc.*), était conçue en ces termes :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés, tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux *par le nombre donné, on ait un carré.... Mais je demande la règle générale s'appliquant à tout nombre non carré quelconque qui peut être donné,* etc.

Cette règle générale qu'on demandait fut fournie par le très honoré vicomte, et appuyée de sa démonstration.

Soient n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un autre carré quelconque (entier ou fractionnaire); d la différence entre n et q; à savoir soit $n-q$, soit $q-n$.

Règle : $n\frac{4q}{d^2}+1$ est un nombre carré. En effet,

$$n\frac{4q}{d^2}+1=\frac{4qn+d^2}{d^2}=\frac{q^2+2qn+n^2}{q^2-2qn+n^2}=\left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2.$$

Que cette solution soit légitime, personne n'en doutera, à moins qu'il ne la comprenne pas; et la démonstration, qui n'était pas réclamée, est certainement tout aussi régulière. Cependant, pour qui serait embarrassé des notations analytiques, la voici en d'autres termes :

Si le quadruple d'un carré quelconque est divisé par le carré de sa différence avec le nombre proposé, le quotient sera le carré cherché; car son produit par le nombre proposé, étant augmenté de l'unité, fera un carré.

J'ai envoyé moi-même à Paris une autre règle semblable, mais plus tard, car alors je n'avais pas eu pleine connaissance de la question.

Soient n un nombre donné quelconque; a un nombre quelconque arbitrairement choisi, par lequel on divise un carré q quelconque, ce qui donne le quotient m. Soit, d'autre part, o le quotient de m par $4p$ (c'est-à-dire par le quadruple d'un nombre quelconque); soit enfin d la différence entre oa et pn.

$\frac{ma}{d^2}$, disais-je, est le carré cherché. En effet,

$$\frac{man}{d^2}+1=\frac{man+d^2}{d^2}=\frac{o^2a^2+\frac{1}{2}man+p^2n^2}{o^2a^2-\frac{1}{2}man+p^2n^2}=\left(\frac{oa+pn}{oa-pn}\right)^2.$$

Que Fermat prenne l'une ou l'autre de ces règles, il n'aura pas seulement une infinité de carrés, mais bien tous les carrés possibles entiers ou fractionnaires, dont le produit par le nombre donné (d'ailleurs carré ou non carré, car il n'y a pas de raison pour restreindre aux seuls non-carrés la question ainsi posée), étant augmenté de l'unité, fera un carré. Et cela même a déjà été démontré par nous, comme suit :

Soit f^2 un carré possible quelconque (satisfaisant à la question); on aura donc, par hypothèse, $nf^2 + 1$ égal à un nombre carré, soit l^2. Prenons maintenant

$$\sqrt{q} = r = \frac{l \mp 1}{f},$$

on aura, disais-je pour la première règle,

$$\frac{4q}{d^2} = f^2.$$

Et, en effet,

$$q = r^2 = \frac{l^2 \mp 2l + 1}{f^2}.$$

Mais

$$nf^2 + 1 = l^2;$$

par conséquent,

$$l^2 - 1 = nf^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{l^2 - 1}{f^2} = n.$$

Dès lors

$$d = |q - n| = \left|\frac{l^2 \mp 2l + 1}{f^2} - \frac{l^2 - 1}{f^2}\right| = \frac{2l \mp 2}{f^2}.$$

Mais, comme $2r = \dfrac{2l \mp 2}{f}$,

$$\frac{2l \mp 2}{f} : \frac{2l \mp 2}{f^2} = f = \frac{2r}{d},$$

c'est-à-dire

$$f^2 = \frac{4q}{d^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La même chose peut être prouvée de même, s'il est besoin, pour l'autre règle.

Ainsi nous avons donné la règle générale demandée pour obtenir, étant donné un nombre quelconque, une infinité de nombres carrés dont le produit par le nombre donné, étant augmenté d'une unité, fasse un carré. On ne peut donc nous accuser de ne pas avoir résolu le problème.

Je montrais encore, par surcroît, que la question se serait résolue avec la même facilité si, au lieu de l'unité, on eût proposé d'ajouter un nombre carré quelconque, par exemple, b^2. Il eût suffi, au lieu de $\frac{4q}{d^2}$, de prendre $\frac{4q}{d^2}b^2$. Mais c'était là un hors-d'œuvre, puisqu'on ne demandait que ce qui est donné par la première règle; or celle-ci fut envoyée à Paris, aussitôt après la réception de la question, toujours dans le mois de mars, si je ne me trompe; on ne peut donc nous reprocher ni de ne pas avoir résolu le problème, ni d'y avoir mis quelque retard.

La vérité est que ce fut seulement au mois d'octobre que j'eus communication d'une Lettre écrite par Fermat à Votre Seigneurie, où il faisait entendre, d'une part, qu'il n'avait pas bien saisi ce qu'avait voulu dire le Lord Vicomte (car il n'avait pas bien compris les solutions, écrites en anglais, puisqu'elles étaient adressées à M. White, un Anglais, et il n'avait pu trouver quelqu'un assez au courant de ces questions pour lui faire une traduction fidèle); d'autre part, il voulait que les questions proposées fussent entendues des seuls nombres entiers; c'était là changer absolument l'état de la question, car jusqu'alors il n'avait pas été soufflé mot d'*entiers;* enfin il proposait nombre d'autres questions, tout à fait étrangères à la précédente, et auxquelles il demandait une réponse, qui lui a été donnée. Mais à cette époque j'étais occupé d'autres affaires, et sur le point de faire un voyage, en sorte qu'il ne m'était pas possible de me mettre à cette besogne avant mon retour, en novembre; ce fut donc dans ce mois (par la lettre que je vous adressai le 21 novembre) qu'il fut longuement répondu sur les uns et les autres points, tant en mon nom qu'en celui du très honoré Vicomte. Pourvu donc qu'on nous fasse grâce sur ce délai si court et en tous cas indispensable, il n'y a encore là aucun reproche à nous faire.

Si d'ailleurs votre illustre correspondant a mal compris notre langue, le problème n'en a pas été, pour cela, moins résolu, et on ne peut pas plus reprocher au très honoré Vicomte d'avoir écrit en anglais à un Anglais qu'à votre illustre correspondant d'avoir rédigé en français presque tout ce que nous avons vu de lui.

Qu'enfin il limite maintenant aux seuls carrés entiers ce qu'il avait proposé sur les carrés en général, cela ne peut nullement nous faire tort. Car nous ne pouvions deviner qu'il fallait entendre ainsi la question, surtout quand il disait qu'il y cherchait à imiter Diophante, chez lequel par nombres carrés il faut toujours entendre indistinctement les entiers et les fractionnaires.

Admettons pourtant qu'il s'agisse de nombres entiers. Nous disons que, même dans ce cas, les questions sont résolues. Car pour la première et la seconde nous avons donné le nombre 1, entier qui satisfait à l'une et à l'autre. Quant à la troisième, nous avons donné la règle générale demandée, qui fournit tous les carrés satisfaisant à la question, soit entiers, soit fractionnaires.

Fermat peut nous dire qu'il voulait seulement des entiers et qu'il les voulait en nombre infini; mais quoique auparavant je n'en eusse rien su ni rien pu soupçonner, il lui a été donné satisfaction même sur ce point, comme il ressort de ma lettre de novembre.

Nous avons, en effet, montré que la proposition ainsi entendue est moins générale que dans les termes où elle était proposée tout d'abord, et qu'il faut la limiter au moins aux nombres non carrés, ainsi que l'a fait Fermat. Car si, en effet, n est carré entier, comme $\frac{4q}{d^2}$, $\frac{4qn}{d^2}$ sera aussi un carré entier, et sa différence avec un autre carré entier ne pourra être la seule unité.

Nous avons montré de même que, dans le cas où l'on peut donner un certain carré remplissant la condition prescrite, on peut aussi en trouver une infinité d'autres, et nous avons indiqué comment, d'un seul connu, les autres se déduisent en nombre infini. C'est là un point qui ne paraîtra pas à négliger, même, je crois, à M. Frenicle, qui a passé tout cela sous silence (quoique ce semble être la principale partie du problème); qui n'a donné aucune démonstration de théorème, ni aucune construction de problème se rapportant à ces carrés à fournir en nombre infini; or nous avons donné et démonstration et construction.

De même nous avons montré comment, dans l'infinité des nombres carrés que donnent nos règles ci-dessus, nous distinguons les entiers des fractionnaires.

En effet, toutes les fois que $\frac{4q}{d^2}$ est un nombre entier, c'est-à-dire toutes les fois que d^2 est une partie aliquote du nombre $4q$, et dès lors en prenant les racines, d ou $|q-n|$ une partie aliquote du nombre $2R$, ou encore, si l'on pose $q=\frac{s^2}{r^2}$ et $R=\frac{s}{r}$, puisqu'il peut se faire que q et R soient des nombres fractionnaires, toutes les fois que $\left|n-\frac{s^2}{r^2}\right|$ est une partie aliquote du nombre $\frac{2s}{r}$, ou, en multipliant de part et d'autre par r^2, toutes les fois que la différence $|nr^2-s^2|$ est une partie aliquote du double rectangle $2rs$; toutes les fois, disais-je, que cela arrive, le carré donné par la règle énoncée est un nombre entier, dont la racine est $\frac{2sr}{|nr^2-s^2|}$.

Or ceci a lieu de diverses façons et en particulier de la suivante : $|nr^2-s^2|$, différence entre le produit par le nombre donné d'un carré quelconque et un autre carré quelconque, sera soit 1, soit 2. Car 1 divise tout nombre entier et 2 tout nombre pair, tel que $2rs$.

Et cette seule règle renferme l'ensemble de tout ce qu'a donné là-dessus M. Frenicle. Car le nombre de la quatrième colonne de sa Table est précisément le nombre r, puisque son carré, multiplié par le nombre n, diffère en plus ou en moins d'avec un autre carré (qui sera s^2), soit de 1 ou de 2, soit au moins d'une partie aliquote du nombre $2rs$. Ainsi trouver le nombre de sa quatrième colonne, c'est justement trouver notre nombre r; or il n'enseigne nulle part comment on peut le faire et il laisse ainsi toute la question non résolue; il ne donne que des exemples sur les nombres particuliers non carrés jusqu'à 150, mais ne donne nullement ce qu'exige le problème, c'est-à-dire la règle applicable à un nombre donné quelconque. Quant aux préceptes que renferment les dix pages suivantes, et qui enseignent à trouver, d'après le nombre de la quatrième colonne, celui qu'on cherche dans la seconde colonne, nous les renfermons tous ensemble dans celui-ci : que $\frac{2rs}{|nr^2 - s^2|}$ est le nombre cherché, c'est-à-dire celui dont le carré remplit la condition proposée.

Quant à l'abrégé qu'il indique comme particulier aux nombres pairement pairs, c'est-à-dire divisibles par 4 (cas où il n'a pas recours aux nombres de la quatrième colonne), nous avons montré en général que cet abrégé s'applique aux nombres divisibles non seulement par 4, mais encore par tout carré quelconque.

Tout cela, avec d'autres choses se rapportant au même sujet, a été déjà longuement exposé soit dans ma dernière Lettre de novembre à Votre Seigneurie, soit dans celle (XVII) que j'ai écrite peu après au Lord Vicomte Brouncker, avant d'avoir en tout cas, remarquez-le bien, vu le Traité de M. Frenicle; vous recevrez une copie de cette Lettre en même temps que la présente.

Je ne voudrais pas au reste que vous pensiez que, dans ce qui précède, j'aie voulu manquer en rien aux très illustres et très nobles Fermat et Frenicle, rabaisser leurs travaux ou leurs connaissances en la matière; je respecte, comme il convient, des personnages aussi éminents, mais j'ai voulu vous montrer que vous n'avez pas non plus à rougir des Anglais vos compatriotes. Je laisse à Votre Seigneurie à apprécier ce qui a été fait sur la question tant par le très honoré Vicomte, qui a joué le rôle principal dans l'affaire, que par moi qui suis intervenu comme suppléant et qui reste

De Votre Seigneurie le très respectueux

JOHN WALLIS.

Oxford, 16/26 décembre 1657.

LETTRE XIX.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Voici, très illustre Seigneur, ce que je pense sur la seconde méthode de l'induction à instituer, méthode que je crois devoir développer un peu plus longuement que je ne l'ai déjà fait (*voir* l'Appendice à la Lettre XVII). Ce n'est pas que vous n'ayez suffisamment saisi mes brèves indications (un mot vous aurait suffi); mais puisque la chose doit être soumise à d'autres yeux, qui peuvent être moins familiers avec ces questions, je crois utile, et il me semble que vous-même le réclamez, de donner une explication un peu plus développée.

Je reprends donc le même exemple qu'auparavant : étant donné un nombre non carré $n = 13$, dont le produit par un carré a^2 doit être inférieur à un carré d'une unité, il s'agit de trouver ce carré a^2.

Puisque, par hypothèse, $13a^2 + 1$ est un carré entier (le problème étant désormais posé pour des nombres entiers), il est clair que ce carré doit être inférieur à $(4a)^2 = 16a^2$, supérieur à $(3a)^2 = 9a^2$. Si en effet a est entier, on a évidemment

$$16a^2 > 13a^2 + 1 > 9a^2.$$

Soit donc ce carré ou bien $(3a + b)^2$ ou bien $(4a - b)^2$, en sorte que b soit la différence de la racine du carré cherché avec celle du carré immédiatement supérieur ou inférieur.

Il est indifférent de prendre l'une ou l'autre expression; choisissons la première.

Ainsi

$$13a^2 + 1 = (3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$$

et, supprimant de part et d'autre les termes égaux,

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2.$$

Cela posé, il est évident que la quantité b est inférieure à a, supérieure à $\frac{1}{2}a$, c'est-à-dire que

$$2b > a > b.$$

Si, en effet, l'on avait $b = a$, on aurait $3a + b = 4a$, nombre déjà reconnu comme trop fort; donc $b < a$. Si, au contraire, on avait $b = \frac{1}{2}a$ et dès lors $a = 2b$, on aurait, à cause de l'équation $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$ posée ci-dessus,

$$16b^2 + 1 = 12b^2 + b^2 = 13b^2,$$

ce qui ne peut avoir lieu en aucun cas. Par conséquent $b > \frac{a}{2}$ et

$$2b > a > b.$$

Puisque l'on a donc $2b > a > b$, on peut arbitrairement de la même façon poser

$$\text{soit} \quad a = 2b - c, \qquad \text{soit} \quad a = b + c,$$

en sorte que c soit la différence entre a et soit $2b$, soit b. Le choix entre ces deux positions étant libre, prenons $a = b + c$ et par suite, en raison de l'équation

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2$$

posée ci-dessus,

$$4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6b^2 + 6bc + b^2$$

et, supprimant les termes égaux,

$$2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2.$$

D'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$2c > b > c.$$

De même, posant $b = c + d$, on conclura

$$2d > c > d.$$

Posant $c = d + e$,

$$2e > d > e,$$

ainsi qu'on peut le voir en opérant suivant l'exemple déjà donné.

Posant enfin $d = e + f$, on a

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2,$$

d'où, évidemment,

$$7f > e > 6f.$$

Si, en effet, on avait $e=7f$, on aurait

$$(6ef+4f^2)=46f^2=49f^2+1=(e^2+1),$$

tandis que le premier membre de l'égalité est plus petit. Au contraire, dans le cas de $e=6f$, on aurait

$$(6ef+4f^2)=40f^2=36f^2+1=(e^2+1);$$

le premier nombre est au contraire plus grand. Dès lors e est supérieur à $6f$ et inférieur à $7f$. De même pour les autres relations.

Il ne faut pas d'ailleurs croire qu'il faille de nombreux essais pour reconnaître ces limites, comme $7f$ et $6f$, entre lesquelles doit être compris le nombre e, il ne faut pas redouter que cette recherche ne devienne fastidieuse. Cette crainte s'évanouira si l'on remarque que l'une des limites est pour ainsi dire toujours obtenue en divisant le coefficient du produit par le coefficient du carré dont on cherche les limites. Ainsi, dans l'exemple en question,

$$e^2+1=6ef+4f^2,$$

en divisant 6 par 1, on a le quotient 6; par conséquent $6f$ sera une limite ou au moins le nombre immédiatement voisin de celle-ci. Si l'on fait l'essai en remplaçant e par $6f$, d'où $6ef$ par $36f^2$, on aura

$$6ef+4f^2=40f^2, \quad \text{nombre plus grand que} \quad 36f^2+1=(e^2+1);$$

il est donc clair que $\frac{1}{6}e$ est plus grand que f, ou $e>6f$. Que de même $e>7f$, cela est aussi évident; car, posant $e=7f$,

$$6ef+4f^2=46f^2 \quad \text{plus petit que} \quad 49f^2+1=(e^2+1).$$

Ainsi on connaîtra les limites

$$7f>e>6f,$$

et de même dans les autres cas.

Mais il est évident que les différences b, c, d, etc. sont des nombres entiers et qu'elles décroissent continuellement; on arrivera donc nécessairement à une certaine différence de cette suite (au plus tard si elle se réduit à 1) qui sera une partie aliquote de la précédente. C'est tout de même ainsi que, dans la réduction des fractions à leur plus simple expression, c'est-à-dire dans la recherche du plus grand commun diviseur, suivant la proposition VII, 2 des Éléments d'Euclide, en divisant successivement les diviseurs par les restes, on arrive au même résultat; cette recherche est, en effet, tout à fait voisine de celle dont il s'agit ici. Dès qu'on sera arrivé à ce point, au lieu de limites comme

$$7f > e > 6f,$$

on aura une égalité. Ainsi dans l'exemple proposé, lorsqu'on arrive à

$$4hi + 3i^2 + 1 = 3h^2,$$

si l'on prend $h = 2i$, car h est évidemment, d'après cette équation, supérieur à i,

$$4hi + 3i^2 + 1 = 8i^2 + 3i^2 + 1 = 11i^2 + 1 = (3h^2) = 12i^2,$$

équation qui peut évidemment avoir lieu, si l'on pose $i = 1$. La valeur du nombre i est ainsi déterminée. En revenant sur nos pas, on en déduira la valeur des différences h, g, f, e, d, c, b, et enfin de $a = 180$, racine du carré qu'on se proposait de chercher.

Ceci doit suffire pour expliquer la forme du procédé.

Il est facile de conclure de là la vérité du théorème : Étant donné un nombre quelconque non carré, on peut déterminer un certain carré, dont le produit par ce nombre, étant augmenté de l'unité, fasse un carré, et l'on déduira de là une infinité de tels carrés, comme nous l'avons antérieurement démontré (XVI). Mais cela est vrai, non pas seulement si l'augmentation est d'une unité, ainsi que l'énonce Fermat, mais si elle est d'un nombre carré quelconque, comme nous l'avons d'ailleurs prouvé antérieurement. Car, de même que, par exemple, en proposant d'égaler à un carré $13a^2 + 1$, on arrive à $11i^2 + 1 = 12i^2$, d'où $i^2 = 1$; si l'on avait posé tout d'abord $13a^2 + 9$, on serait arrivé à $11i^2 + 9 = 12i^2$, d'où $i^2 = 9$, et l'on calculerait a^2 par rétrogradation, comme ci-dessus. De même, pour tout autre carré ajouté au lieu de 1 ou de 9.

Mais si l'on ajoutait *un nombre quelconque,* j'entends *non carré,* le théorème ne serait plus universellement vrai, ainsi que nous l'avons déjà avancé et qu'il est facile de le prouver. Mais, dans le cas où la chose est possible, on résoudrait la question tout à fait de la même façon, en substituant, au lieu de 1, ce nombre possible quelconque.

On doit également remarquer qu'on procéderait encore tout à fait de même, si, au lieu d'ajouter un nombre quelconque, on devait retrancher un nombre quelconque (possible, bien entendu). On substituerait seulement à $+1$, -1 ou tout autre nombre possible. Cette remarque est essentielle pour ce qui va suivre.

Jusqu'ici nous avons sans doute suffisamment mis en lumière ce qui a un rapport nécessaire à la question. Mais nous ajouterons d'autres développements qui peuvent rendre les calculs plus aisés.

En premier lieu, nous avons dit plus haut qu'il est indifférent de poser au début, soit

$$13a^2+1=(4a-b)^2=16a^2-8ab+b^2,$$

ou bien

$$13a^2+1=(3a+b)^2=\ 9a^2+6ab+b^2.$$

Cela est vrai absolument; cependant il est avantageux de choisir la position pour laquelle b est le plus petit. Ainsi dans l'exemple proposé, où il est clair que $13a^2+1$ est plus près de $16a^2$ que de $9a^2$, puisque la différence est d'un côté $4a^2+1$, de l'autre $3a^2-1$, il est plus avantageux de poser

$$13a^2+1=16a^2-8ab+b^2.$$

De même, pour ce que nous avons dit ensuite que, en posant

$$13a^2+1=9a^2+6ab+b^2,$$

on trouve a plus grand que b, mais plus petit que $2b$, et que l'on peut poser indifféremment

$$\text{soit } a=2b-c, \qquad \text{soit } a=b+c;$$

quoique cela soit absolument vrai, il est cependant préférable de choisir la position à laquelle correspond la moindre valeur de c. Et puisqu'ici a est évidemment plus voisin de b que de $2b$, on posera avec plus d'avantage

$$a = b + c \quad \text{que} \quad a = 2b - c.$$

Il faut entendre la même chose pour les autres différences d, e, f, etc.

La raison en est toujours la même; il s'agit de ramener à l'unité ces différences b, c, d, etc., toujours décroissantes. On y arrivera plus vite, en prenant toujours les plus petites différences et non les plus grandes. Ce qui peut s'appliquer aussi à la méthode connue de réduction des fractions à leur plus simple expression par la recherche du plus grand commun diviseur. Cette remarque se présente d'elle-même, si l'on fait la moindre attention, quoique je ne croie pas qu'on ait coutume de s'y conformer.

L'exemple ci-dessous montre suffisamment qu'il résulte du procédé indiqué un abrégé notable. Le calcul est d'un tiers plus court, pour le même nombre 13, que si l'on prend toujours, comme auparavant, les différences les plus grandes. Dans ce cas, on doit le continuer jusqu'à i; ici il suffit d'aller jusqu'à f:

$$n = 13$$
$$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$$
$$8ab - b^2 = 3a^2 - 1$$
$$3b > a > 2b$$
$$a = 2b + c$$
$$16b^2 + 8bc - b^2 = 12b^2 + 12bc + 3c^2 - 1$$
$$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$$
$$2c > b > c$$
$$b = 2c - d$$

$$12c^2 - 12cd + 3d^2 + 1 = 8c^2 - 4cd + 3c^2$$
$$c^2 + 1 = 8cd - 3d^2$$
$$8d > c > 7d$$
$$c = 8d - e$$
$$64d^2 - 16de + e^2 + 1 = 64d^2 - 8de - 3d^2$$
$$3d^2 + 1 = 8de - e^2$$
$$3e > d > 2e$$
$$d = 2e + f$$
$$12e^2 + 12ef + 3f^2 + 1 = 16e^2 + 8ef - e^2$$
$$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1$$

$$e = 2f$$
$$f = 1$$
Donc $e = 2$
$$d = 5$$
$$c = 38$$
$$b = 71$$
$$a = 180$$

Pour prouver maintenant que cette méthode peut servir non seulement pour chercher des nombres petits ou ordinaires, mais même des nombres suffisamment considérables, nous en montrerons l'essai sur le nombre proposé, non carré, 109, qui demande le plus grand carré de tous ceux que traite M. Frenicle, et pour lequel celui-ci avoue n'avoir pu trouver la solution, que M. Fermat lui a communiquée. On aura

$$n = 109,$$
$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$
$$9a^2 + 1 = 20ab + b^2,$$
$$3b > a > 2b,$$
$$a = 2b + c,$$
$$36b^2 + 36bc + 9c^2 + 1 = 40b^2 + 20bc + b^2,$$
$$16bc + 9c^2 = 5b^2 - 1,$$
$$4c > b > 3c,$$
$$b = 4c - d,$$
$$64c^2 - 16cd + 9c^2 = 80c^2 - 40cd + 5d^2 - 1,$$
$$24cd - 5d^2 = 7c^2 - 1,$$
$$4d > c > 3d,$$
$$c = 3d + e,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on conclut

$y =$	1,	$l = 20m + n =$	17 405 432,
$x = 2y =$	2,	$k = 2l + m =$	35 662 389,
$v = 4x + y =$	9,	$i = 4k + l =$	160 054 988,
$t = 3v - x =$	25,	$h = 3i - k =$	444 502 575,
$s = 5t + v =$	134,	$g = 5h + i =$	2 382 567 863,
$r = 7s - t =$	913,	$f = 7g - h =$	16 233 472 466,
$q = 7r + s =$	6 525,	$e = 7f + g =$	116 016 875 125,
$p = 5q - r =$	31 712,	$d = 5e - f =$	563 850 903 159,
$o = 3p + q =$	101 661,	$c = 3d + e =$	1 807 569 584 602,
$n = 4o - p =$	374 932,	$b = 4c - d =$	6 666 427 435 249,
$m = 2n + o =$	851 525,	$a = 2b + c =$	15 140 424 455 100.

Nous voyons ainsi que le nombre a, racine du carré cherché, a au moins 14 figures, que son carré en a au moins 27 (nombre passablement élevé) et qu'il a réclamé 22 positions. On ne peut guère nier que sa détermination ne soit passablement abrégée, eu égard à la nature de la question.

Mais il y a encore un autre abrégé qui peut souvent supprimer au moins la moitié du travail, grâce à la règle antérieurement énoncée, à savoir que si la différence entre le produit du nombre proposé par un certain carré et un autre carré quelconque est une partie aliquote du double produit des racines de ces carrés, le quotient de cette division sera la racine du carré cherché. Or cela arrive nécessairement toutes les fois que la différence est 1 ou 2; si donc on trouve un carré dont le produit par le non-carré donné soit, par rapport à un autre carré, en excès de l'unité ou de 2, ou en défaut de 2, il est évident que l'on pourra en déduire le carré cherché. Or cela arrive très souvent dans les opérations, surtout quand il s'agit de nombres un peu forts, pour lesquels surtout il y a besoin d'abrégés.

Par exemple, prenons, comme tout à l'heure, $n = 13$; puisqu'en posant

$$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2,$$

on arrive à l'équation

$$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2,$$

d'où l'on conclut

$$2c > b > c,$$

si l'on avait posé tout d'abord $13a^2 - 1$, on serait arrivé à

$$3b^2 - 1 = 4bc + 3c^2;$$

d'où l'on aurait conclu

$$2c = b, \qquad c = 1, \qquad b = 2, \qquad a = 5.$$

Le carré de ce dernier nombre donnant avec 13 un produit supérieur d'une unité au carré du nombre 18, il s'ensuit que $180 = 2 \times 5 \times 18$ est le véritable nombre a cherché, celui dont le produit du carré par 13 sera inférieur d'une unité à un carré, à savoir $\overline{649}^2$.

De même, pour le nombre proposé 109, en opérant comme ci-dessus, c'est-à-dire en posant

$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

on arrive à

$$16kl + 5l^2 = 9k^2 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad 3l > k > 2l;$$

mais il est clair que si l'on eût posé en commençant $109a^2 - 1$, on serait arrivé à

$$16kl + 5l^2 = 9k^2 + 1, \qquad \text{d'où} \qquad k = 2l, \qquad l = 1,$$

et, en rétrogradant, $a = 851\,525$, nombre dont le carré, multiplié par 109, sera supérieur d'une unité à un carré. On en conclura, de la façon expliquée, que le nombre a cherché, dont le carré multiplié par 109 est inférieur d'une unité à un carré, a pour valeur $15\,140\,424\,455\,100$. Ainsi le calcul, qui a été poussé jusqu'à y, pouvait être arrêté à l.

De même, pour le nombre non carré proposé 433, si l'on pose

$$433a^2 + 1 = 441a^2 - 42ab + b^2,$$

en poursuivant les opérations suivant la marche prescrite, on arrivera à l'équation

$$8o^2 + 1 = 38op + 9p^2, \qquad \text{d'où} \qquad 5p > o > 4p.$$

Par conséquent, si au début j'avais posé $433a^2 - 1$, j'aurais

$$8o^2 - 1 = 38op + 9p^2, \qquad \text{d'où} \qquad 5p = o, \qquad p = 1, \qquad o = 5, \qquad \text{etc.;}$$

$$\begin{array}{llllll}
p = & 1, & k = 4l - m = & 601, & e = 4f + g = & 2\,309\,442, \\
o = 5p = & 5, & i = 13k + l = & 7\,975, & d = 3e - f = & 6\,361\,385, \\
n = 4o + p = & 21, & h = 2i + k = & 16\,551, & c = 2d + e = & 15\,032\,212, \\
m = 2n + o = & 47, & g = 3h - i = & 41\,678, & b = 4c + d = & 66\,490\,233, \\
l = 3m + n = & 162, & f = 14g - h = & 566\,941, & a = 5b + c = & 347\,483\,377;
\end{array}$$

d'où $a = 347\,483\,377$, nombre dont le carré $120\,744\,697\,291\,324\,129$, multiplié par 433, donne $52\,282\,453\,927\,143\,347\,857$ qui surpasse d'une unité le carré du nombre $7\,230\,660\,684$. Par conséquent,

$$5\,025\,068\,784\,834\,899\,736,$$

double produit des racines $347\,483\,377$ et $7\,230\,660\,684$, est le nombre a primitivement cherché, dont le carré

$$25\,251\,316\,292\,322\,095\,858\,983\,939\,617\,172\,869\,696,$$

multiplié par 433, donne

$$10\,933\,819\,954\,575\,467\,506\,940\,045\,854\,235\,852\,578\,368,$$

qui est inférieur d'une unité au carré de 104 564 907 854 286 695 713. Ainsi le carré cherché, d'au moins 38 figures, se découvre après 15 positions, en continuant les opérations jusqu'à p seulement.

Je m'arrêterais ici, sans une ou deux remarques qu'il me reste à ajouter comme bon poids; non qu'elles soient en rien nécessaires au sujet, mais parce qu'elles n'en seront peut-être pas moins intéressantes.

En premier lieu, quoique l'abrégé qui vient d'être exposé tout à l'heure pour trouver a au moyen d'un α ou a accessoire (dont le carré, multiplié par n, soit supérieur d'une unité à un carré), d'où l'on passe à l'a vrai (dont le carré, multiplié par n, soit inférieur d'une unité à un carré); quoique cet abrégé soit absolument valable et pratique, si, néanmoins, il plaisait de le négliger et de poursuivre le travail commencé jusqu'à ce que l'on arrive à l'a véritable, il sera facile d'y parvenir sans calculs pénibles parce que les mêmes équations reviennent dans le même ordre. Par exemple, pour le nombre pris ci-dessus 109, après avoir trouvé les équations qui concernent a, b, c, d, etc. jusqu'à m (qui a pour valeur 851 525, c'est-à-dire celle de l'α ou a succédané), on retrouvera les mêmes équations pour m, n, o, p, etc. qu'auparavant pour a, b, c, d, etc., en exceptant toutefois les deux dernières pour x et y, auxquelles on s'arrêtera, mais qui, si l'on ne veut pas s'arrêter là, n'en seront pas moins reconnues conformes à celles pour k et l. Ainsi le calcul institué pour trouver les équations pourra être arrêté dès que l'on sera arrivé à l ou m (c'est-à-dire au point où l'on déterminerait l'α ou a accessoire). Celui qui voudra employer ce moyen pourra donc, sans grande perte de temps, négliger l'abrégé qui a été indiqué en dernier lieu.

L'autre remarque que je voudrais faire est celle-ci. Nous avons jusqu'à présent exposé le mode de recherche de la racine du premier carré, grâce à laquelle on peut très facilement, suivant la série antérieurement exposée, trouver successivement les racines de tous les carrés en nombre infini. Mais, si l'on ne voulait pas employer cette série, on pourrait obtenir les racines de ces autres carrés par le même procédé qui sert à déterminer la première (toutefois avec un travail un peu plus long). Il suffirait de continuer les opérations commencées jusqu'à ce que l'on arrive à la racine du second, troisième, quatrième carré.

Ainsi, par exemple, prenons, comme ci-dessus, $n = 13$. Étant arrivés à l'équation

$$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1,$$

nous en avons conclu ci-dessus que l'on pouvait poser $e = 2f$, en supposant d'ailleurs $f = 1$, et de là en rétrogradant, nous en avons déduit les autres valeurs jusqu'à celle de a, racine du premier carré. Mais si, au contraire, on pose $f > 1$, on aura $e < 2f$ et, par suite, posant $e = 2f - g$, il faudra poursuivre jusqu'à ce que l'on retombe de nouveau sur une équation semblable, ce qui aura lieu quand on arrivera à l, m, et, en effet, on trouvera

$$4lm + 3m^2 = 3l^2 - 1.$$

Posant alors $m = 1$, on aura $l = 2m = 2$, d'où, en rétrogradant, $a = 233\,640$, racine du second carré. Mais si, au contraire, on pose encore, non pas $m = 1$, mais $m > 1$, on aura $l < 2m$. Posant donc $l = 2m - n$, il faudra poursuivre jusqu'à ce que l'on retombe encore sur une équation semblable, savoir

$$4rs + 3s^2 = 3r^2 - 1,$$

d'où posant $s = 1$, on aura $r = 2$ et $a = 303264540$. Si l'on posait autrement $s > 1$, procédant toujours de même, on aurait la racine du quatrième carré, puis celle du cinquième, etc., *ad libitum*,

$$n = 13;$$

$s =$	$1,$		$m = 8n - o =$	$1\,369,$		$f = 8g - h =$	$1\,776\,961$	
$r =$	$2,$		$l = 2m - n =$	$2\,558,$		$e = 2f - g =$	$3\,320\,282$	
$q = 2r + s =$	5	$\alpha.$	$k = 2l + m =$	$6\,485$	$\beta.$	$d = 2e + f =$	$8\,417\,525$	$\gamma.$
$p = 8q - r =$	$38,$		$i = 8k - l =$	$49\,322,$		$c = 8d - e =$	$64\,019\,918,$	
$o = 2p - q =$	$71,$		$h = 2i - k =$	$92\,159,$		$b = 2c - d =$	$119\,622\,311,$	
$n = 2o + p =$	180	A.	$g = 2h + i =$	$233\,640$	B.	$a = 2b + c =$	$303\,264\,540$	C.
....			....			....		

Au reste, pour ce calcul, comme auparavant, dès que l'on aura obtenu le premier a, les opérations seront facilitées par le retour constant des équations semblables, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, où l'on a tant les a vrais (que j'appellerai A, B, C, etc.) que les a succédanés (que je désigne par les lettres α, β, γ, etc.), c'est-à-dire tous ceux dont les carrés, multipliés par le non-carré donné, sont soit inférieurs, soit supérieurs d'une unité par rapport à un carré. Si, en effet, là où par exemple se trouve $s=1$, on pose $f=1$, on aura a, la première racine, là où est n; si, au contraire, au lieu de $s=1$, on pose $m=1$, on aura, là où est g, $a=\mathrm{B}$ racine du second carré, de même que l'on a maintenant $a=\mathrm{C}$ racine du troisième carré. Au contraire, en répétant toujours les mêmes opérations, on obtiendra D, E, F, etc., tant que l'on voudra. Ce qui, *mutatis mutandis*, doit aussi être entendu de α, β, γ, δ, etc.

On peut cependant remarquer que de même que de α, lorsqu'il est connu, on peut, par la règle donnée ci-dessus, déterminer A (puisque de $13\times 5^2 - 18^2 = 1$, on conclut $2\times 5\times 18 = 180 = \mathrm{A}$), l'on pourra par A connaître B; par β, C; par B, D; par γ, E; par C, F, etc. Le plus souvent, il en est absolument de même; il n'y a que parfois une légère différence. Ainsi par exemple si l'on prend le non-carré 21, et par conséquent

$$21a^2+1 = 25a^2-10ab+b^2$$
$$\text{ou bien } = 16a^2+\ 8ab+b^2,$$

nous aurons dans un cas les nombres 1.2.5.12 ou bien 1.2.3.5.12, dans l'autre 1.2.7.12 ou 1.2.5.7.12 ou bien encore 1.2.3.5.7.12, suivant que nous prendrons de différentes façons les différences soit additives, soit soustractives, soit des deux sortes. Mais en tout cas on aura $a=12$ pour la première racine; et les autres s'obtiendront successivement en poursuivant comme ci-dessus. On remarquera cependant que non seulement les carrés des nombres A, B, C, etc., multipliés par le donné 21, sont inférieurs d'une unité par rapport à un carré, mais que les produits par 21 des nombres α, β, γ, etc. sont supérieurs à un carré, non pas cette fois d'une unité, mais du moins d'une partie aliquote du double produit des racines des deux carrés, partie qui peut servir, comme on l'a vu, à trouver la racine d'un carré cherché. Par exemple,

$$n\alpha^2 = 21 \times 2^2 = 84 = 81 + 3 = 9^2 + 3.$$

Donc

$$\frac{2 \times 2 \times 9}{3} = 12 = \text{A racine cherchée},$$

et de même pour les autres. Ainsi α fera connaître A; A, B; β, C; B, D; γ, E, etc. Et il en sera ordinairement de même pour les autres nombres. Toutefois il peut arriver que l'on ait seulement A, B, C, etc. Mais il n'y a pas à s'arrêter plus longuement à ce sujet.

$$n = 21;$$

$d = 1,$	$e = 10a - b = 115,$	$i = 10h - g = 12649,$
$c = 2d \quad = 2 \ \alpha.$	$f = 2e - a = 218 \ \beta.$	$k = 2i - h = 23978 \ \gamma.$
$b = 2c + d = 5,$	$g = 2f + e = 551,$	$l = 2k + i = 60605,$
$a = 2b + c = 12 \ \text{A}.$	$h = 2g + f = 1320 \ \text{B}.$	$m = 2l + k = 145188 \ \text{C}.$
....	....	....

Voilà, très illustre Lord, ce qui m'a paru devoir être dit pour expliquer cette solution du problème de Fermat.

Ainsi le très noble Fermat (pour en finir) a son problème résolu par une méthode si multiple à la fois et si heureuse que je ne crois pas qu'il ait pu être traité plus complètement, je ne dis pas par M. Frenicle, lequel a déjà publié ce qu'il a fait là-dessus, mais par Fermat lui-même. Je ne veux pas aller plus loin, car je ne pense point que ni l'un ni l'autre prétende triompher soit de nous (au moins de Votre Seigneurie), soit de notre nation. Mais il me reste à féliciter Votre Seigneurie qui, provoquée par le très noble Fermat à un *coup de lance* littéraire, a su maintenir sans tache l'ancienne gloire acquise autrefois par les Anglais contre les Français, qui a su prouver que les champions de l'Angleterre sont aussi puissants dans la science que dans la guerre. Votre très noble adversaire a pu croire que ces matières lui étaient réservées et qu'elles seraient inaccessibles pour les autres (car toute terre ne porte pas tout fruit); il avoue cependant qu'*il sera pourtant ravi d'être détrompé par cet ingénieux et savant Seigneur;* il aura donc, lui aussi, à vous féliciter. Pour moi, je ne puis que vous rendre très humblement grâces d'avoir jugé digne d'être appelé à prendre part à cette victoire,

Très insigne Lord,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 20/30 janvier 1657/8.

LETTRE XX.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Monsieur, j'ai reçu hier de Sir Kenelm Digby, avec les deux cijointes, une lettre à mon adresse qui ne renfermait que des compliments et un renvoi aux deux autres. Je ne suis pas fâché de voir qu'en somme le désir que M. Frenicle a évidemment de nous faire toute l'opposition possible, n'aboutit qu'à des objections aussi triviales que celles que renferme sa Lettre. Mais je regrette que sa passion l'ait égaré au point qu'il se soit exprimé aussi incivilement. Ses arguments sont si faibles qu'ils méritent à peine une réponse. Sa chicane sur votre solution par le nombre 1 est bien mauvaise; car chacun sait que quelques-uns sont de l'opinion que 1 n'est pas un nombre; mais ceux-là même savent tout aussi bien que, dans l'opinion des autres, il en est un. Et que soit M. Fermat qui a proposé le problème, soit M. Frenicle, qui fait maintenant cette objection, aient pris 1 comme nombre, cela est évident d'après leurs écrits. Mais que 1 fût une solution telle que l'attendait l'auteur du problème, personne ne peut le supposer, et cette solution n'était pas donnée comme telle, mais plutôt pour montrer combien le problème, tel qu'il était énoncé, pouvait être facilement résolu; il aurait dû être conçu autrement ou bien il fallait faire l'exception. Quant à la chicane contre ma solution, elle provient de ce qu'il n'en a pas saisi le sens que vous avez pleinement exprimé; car autrement il n'aurait aucun motif pour son objection, les parties aliquotes étant restreintes aux parties actuelles exclusivement. Que je ne me sois à aucun égard mis d'accord avec l'exemple 343, cela est parfaitement vrai; mais le problème ne le demandait nullement et il est tout aussi vrai qu'aucune de ses solutions ne s'y rapporte davantage. Car si le cube 1 n'a pas de parties aliquotes, aucun des siens n'est cube de nombre premier, comme dans l'exemple donné 343 est cube de 7 nombre premier. Quelques amis, en compagnie desquels je suis maintenant, ne me permettent pas de vous dire autre chose, sinon que je suis,

Monsieur, votre très fidèle ami et serviteur,

BROUNCKER.

18/28 février 1657/8.

LETTRE XXI

(jointe, ainsi que la suivante, à celle qui précède).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très honoré Monsieur, je puis sembler être un de ces débiteurs qui se sont mis si fort en retard qu'ils ne peuvent espérer satisfaire leurs créanciers ni oser se présenter devant eux; car il y a maintenant près de quatre mois que j'ai reçu votre très obligeante Lettre du 3 septembre dernier (vieux style). Je pourrais m'excuser, et avec vérité, sur ce que j'ai longtemps été hors de la ville, et imputer ainsi mon silence à ce motif. Mais il n'y a là qu'une excuse qui, pas plus que l'embarras des déplacements ou le dérangement des voyages, ne peut être alléguée pour justifier suffisamment la vingtième partie du retard que je mets à reconnaître humblement, comme je le dois, l'excessive faveur et les politesses infinies de cette noble et généreuse Lettre. Le plus sage pour moi est aussi le moyen le plus candide; c'est d'avoir recours à la pleine et absolue vérité, qui ne manquera jamais de soutenir qui l'aime, aussi longtemps que ses intentions sont sincères et respectueuses. Qu'elle fasse donc valoir ce moyen en ma faveur! Les obligeantes expressions de votre Lettre étaient tellement hors de proportion ou de possibilité pour mon mérite que je jugeai que des remercîments purs et simples seraient un trop mince retour pour une si haute faveur. Je fus désireux de mettre en compte avec moi quelque autre qui pût vous offrir quelque chose d'assez agréable pour pouvoir rendre bienvenue ma Lettre y servant d'introduction. D'après cela, j'envoyai à M. Fermat votre ingénieux et noble théorème sur le segment d'une pyramide ou d'un cône, le priant de m'en donner la démonstration pour que je pusse vous la transmettre. Et là-dessus, jusqu'à ce que j'eusse sa réponse, je différai de vous écrire, car je pensais qu'il me l'enverrait par le premier ou le second courrier. Mais, depuis ce temps, je n'ai rien eu de lui que des excuses successives, me remettant toujours à la prochaine fois. Il est vrai que j'étais précisément tombé sur l'époque du déplacement des juges de Castres à Toulouse, où il est juge suprême à la Cour souveraine du Parlement; et depuis, il a été occupé par des causes capitales de grande importance, dans lesquelles il a fini par donner une sentence qui a fait beaucoup de bruit et a été très applaudie; il s'agissait de la condamnation au feu d'un prêtre ayant abusé de ses fonctions. Cette affaire vient seulement de finir et l'exécution s'en est ensuivie. Mais ce qui peut être une excuse pour un autre ne l'est pas pour M. Fermat, qui est incroyablement vif et pénétrant en tout ce qu'il entreprend. Aussi, si pendant tout ce temps il n'a pas donné la démonstration de votre théorème (ni aucune autre réponse, mais seulement de grands éloges et applaudissements, toutes les fois que je lui ai écrit à ce sujet), ce m'est maintenant une preuve évidente qu'en fin de compte je ne dois pas en attendre de lui. Je ne dois donc pas espérer de voir ma soif sur ce point satisfaite autrement que par votre obligeance; et pour cela, quand j'aurai le plaisir de vous rendre mes devoirs à Oxford, je vous demanderai humblement cette démonstration. Car certainement, dès que je serai de retour en Angleterre (ce qui, je l'espère, ne sera pas long), un des premiers voyages que j'ai l'intention de faire est celui de ce célèbre séjour des Muses et des sciences les plus profondes, afin que je puisse vous témoigner de vive voix la grande estime et l'extrême respect que j'ai pour vous, afin que je puisse également recevoir la faveur de saluer, sur votre présentation, vos dignes et nobles collègues et amis les Docteurs Wilkins et Ward, que j'honore infiniment.

Comme j'étais ainsi désespéré de recevoir ce que j'attendais de M. Fermat, et que je me résolvais donc à rompre mon silence, et à vous supplier humblement de l'excuser, en vous en disant la véritable cause, j'ai reçu de vous une nouvelle faveur : votre très obligeante Lettre du 21 novembre dernier, qui ne m'est arrivée que très tardivement, par suite, à ce que j'ai compris, de l'absence de Londres de Mylord Brouncker et aussi par le fait de M. White; car elle n'est parvenue ici que par la dernière poste. M. Frenicle était à dîner avec moi lorsqu'on me l'apporta; là-dessus quelques affaires indispensables me forcèrent à m'absenter pour quelques heures; pendant ce temps, je la lui laissai à sa disposition, après l'avoir seulement parcourue rapidement à part moi. A mon retour, je trouvai qu'il avait écrit à la hâte et dans ma chambre, où je l'avais laissée, quelques réflexions sur la première partie de votre Lettre, et sous forme d'une épître adressée à moi-même; il se réservait d'ailleurs de m'envoyer ou m'apporter ses considérations sur la seconde partie de ce jour-là en huit; car il allait quitter la ville le lendemain matin pour quatre ou cinq jours. J'ai longtemps discuté avec moi-même pour savoir si je vous enverrais ou non son écrit, où il exprime des sentiments si différents des vôtres. En dernier lieu deux raisons m'ont convaincu que le mieux serait de vous l'envoyer; d'une part, il désirait très sérieusement que je le fisse; si je ne l'avais pas fait et que dès lors vous n'eussiez pas su quoi y répondre, il aurait pu mal juger votre silence et se complaire dans la croyance à son avantage dont, je ne doute pas, vous ne serez pas longtemps à le détromper. D'un autre côté, la variété des opinions entre des hommes éminents et savants ne fait pas peu pour le progrès de la Science, en donnant occasion de découvrir de profondes et abstruses vérités. J'ai donc fait copier par mon secrétaire cette Lettre adressée à moi (car elle était écrite tellement à la hâte par une main française que vous n'auriez jamais été capable de la lire) et je vous l'envoie ci-incluse, comme je ferai pour sa prochaine, aussitôt que je l'aurai reçue.

Après vous avoir si longtemps importuné à ce coup, je serais trop blâmable, si je prolongeais davantage votre ennui, en vous faisant une apologie de mon procédé. Je ne puis mieux l'amender qu'en ne continuant pas à mal faire; je coupe donc court, en marquant moi-même que je suis vraiment,

Noble et illustre Sir,

Votre très humble et très affectionné serviteur et admirateur,

Kenelm Digby.

Paris, 6 février 1658.
(Nouveau style.)

LETTRE XXII

(jointe à la précédente)

de Frenicle a Kenelm Digby.

Il me paraît véritablement étonnant, très illustre Seigneur, que des mathématiciens, d'ailleurs éprouvés, aient pu se méprendre dans leur réponse aux deux problèmes numériques du clarissime M. Fermat, sur les cubes et carrés à ajouter à toutes leurs parties aliquotes; qu'ils n'aient pas hésité à présenter pour la seconde et la troisième fois l'unité comme une solution, ainsi qu'on peut le voir dans la lettre du clarissime Wallis, datée d'Oxford le 21 novembre, que vous avez bien voulu me donner à lire. Car quel arithméticien, même du vulgaire, même des apprentis les plus novices, ne rougirait pas de donner cette solution, quand bien même l'unité résoudrait parfaitement la question? C'est qu'elle contient en soi tous les degrés et toutes les figures des nombres, en sorte que, sans être nombre elle-même, elle les représente tous en quelque sorte; mais aux problèmes dont il s'agit, l'unité elle-même ne peut satisfaire. En voici les énoncés :

I. Trouver un cube (p. 311, lignes 21 à 25).... propriétés.

II. On demande aussi (p. 311, lignes 26 à 27).... cube.

Ainsi on demande un nombre qui ait des parties aliquotes; mais un nombre est une pluralité d'unités, et l'unité elle-même n'est pas un nombre; elle ne résout donc pas la question, où l'on demande un nombre, non pas quelconque, mais qui ait des parties aliquotes qui puissent lui être ajoutées et qui soit de même nature que le nombre 343, dont les parties sont énumérées. Mais quelles sont les parties de l'unité? Il est clair que si elle n'en a pas, ainsi que l'avoue Wallis lui-même, elle n'est aucunement de la même nature que le nombre 343, cube ayant des parties aliquotes, qui, ajoutées à ce nombre, en donnent un autre carré.

Si d'ailleurs on veut, pour les parties des nombres, aller jusqu'aux fractions, l'unité, comme aussi bien tout nombre quelconque, a une infinité de parties (si l'on prend les fractions comme des parties) que dès lors on ne peut additionner. On est donc si loin de la question que je suis stupéfait et honteux de voir un pareil savant, non seulement accepter cette réponse comme une solution, mais encore la louer et l'approuver; bien plus, oser affirmer que cette prétendue solution répond très exactement aux questions.

Venons maintenant à l'autre solution du très noble mylord Brouncker, par des nombres fractionnaires, et examinons si elle peut être admise.

J'ai dit plus haut que si l'on reçoit les fractions comme parties, on peut à tout nombre, entier ou fractionnaire, assigner une infinité de parties.

On ne peut donc faire aucune addition de ces parties. Si, par exemple, on prend pour le cube $\frac{343}{64}$, pourquoi, à côté des parties énumérées, $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, ne pas compter tout aussi bien $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, etc., $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, etc., ou même $\frac{343}{128}$? Car il n'est nullement besoin, pour avoir des parties, de conserver toujours le même dénominateur. En regard de celles qui sont données, $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, il en ressort nécessairement, pour le même nombre $\frac{343}{64}$, d'autres : $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{49}$, $\frac{1}{343}$ qui, ajoutées aussi avec ce nombre, ne donneront pas un carré.

Mais quand il n'y aurait pas pour $\frac{343}{64}$ d'autres parties à considérer légitimement que celles qui ont été données et qui gardent le même dénominateur, qui ne voit qu'il n'y a là que ce même nombre 343 donné par M. Fermat, sauf un tout petit changement, et que la solution est absolument dérivée de la sienne? Si, étant donné le triangle rectangle 3.4.5, on en cherchait un autre pareil, suffirait-il, comme solution légitime et digne d'un homme de science, de fournir son multiple 6.8.10? Pourquoi aussi ne pas, de même, donner avec des fractions un nombre carré qui, ajouté à ses parties, fît un cube? Il n'y a pas évidemment d'autre motif, si ce n'est que M. Fermat n'a pas, pour le carré, donné d'exemple comme pour le cube. Mais maintenant que, dans l'opuscule écrit en latin et qui, très noble Seigneur, vous est dédié, se trouve un carré satisfaisant à la question, il sera facile, par le même moyen, en divisant ce carré par des carré-cubes, d'en fournir autant qu'on voudra.

Je ne suis pas plus satisfait du motif allégué pour ne pas fournir plusieurs cubes : parce que Fermat, dit-on, n'en demande pas plusieurs. Quant à regarder ce problème comme ne valant pas la peine de recherches ultérieures, cette dernière excuse pourrait être admise, si l'on n'avait pas consacré ses veilles à la question avant de feindre qu'on la néglige. Il y a dans cette ville de très éminents mathématiciens, qui, quoique nommément provoqués par M. Fermat à la solution de ces problèmes, ont préféré se taire plutôt que de faire quelque réponse déplacée (seul Frenicle les a abordés et en a obtenu la solution ; chacun peut se glorifier de ce qui lui est particulièrement donné ; il a cela, d'autres ont autre chose ; il faut reconnaître qu'on peut dire franchement : Nous ne pouvons pas, tous, faire toutes choses) ; mais ce silence n'a causé aucun préjudice à leur réputation. Mais quand Wallis présente à plusieurs reprises l'unité comme étant le cube cherché, et qu'il néglige d'en rechercher d'autres, parce que Fermat n'en demande pas plusieurs, il est inexcusable, puisqu'en donnant l'unité, il ne donne en fait aucun cube. Il est d'ailleurs aisé de déprécier ce à quoi on ne peut atteindre; mais il ne convient guère à un professeur de Mathématiques de demander à quoi peuvent être utiles ces problèmes; on pourrait tout au plus nous pardonner ce langage à nous, qui ne faisons pas profession de ces sciences, mais nous y exerçons pour notre seul plaisir.

On aurait aussi bon droit de demander à Wallis à quoi bon, et pour quel profit, la peine qu'il a prise si longtemps à la recherche malheureuse de la quadrature du cercle, ou même à la composition de son *Arithmétique des infinis;* rien de tout cela ne peut servir à aucun usage mécanique; mais à quoi bon presque toute la Géométrie et l'Arithmétique, si l'on excepte quelques faibles parties, d'ailleurs les plus vulgaires, et que méprisent les savants, tandis qu'elles servent aux calculs des géodètes, des arpenteurs, des marchands, ou des praticiens des deux architectures, et autres pareils? Car tout le reste, plus secret et plus précieux, ne regarde que la subtilité et la perfection de la Science; mais c'est le propre de l'intellect humain que de rechercher la vérité, il n'y a pas d'autre motif qui ait engagé tant d'hommes éminents à s'adonner à l'étude, et l'on ne peut traiter d'inutile, en Science, l'acquisition d'aucune vérité.

Allant plus loin, je vois qu'il propose un problème assez élégant; il demande, en effet, les nombres carrés qui ajoutés, chacun à la somme de ses parties aliquotes, font le même nombre; comme sont 16 et 25, dont chacun, ajouté à la somme de ses parties, fait 31. Mais il semble avoir proposé là, à peu près au hasard, la première question qui lui venait à l'esprit, comme s'il avait cru que Fermat eût procédé de la sorte en posant ses problèmes; je demande donc à Wallis s'il a de tels carrés, ou du moins s'il sait d'une façon certaine et démonstrative qu'il y a ou qu'il n'y a pas, dans toute la multitude des nombres, d'autres tels carrés premiers entre eux que 16 et 25. Après cela, il aura une réponse; car il ne doit pas ignorer si ce qu'il propose est impossible ou non, et un mathématicien ne propose pas à la légère et sans mûr examen ce qui lui passe tout d'abord à l'esprit, à moins qu'il ne le fasse, pour son instruction, sur des questions qu'il aurait vainement essayé de résoudre.

Au reste, si, dans cette première partie, Wallis n'a guère réussi, il n'a guère été plus heureux dans le reste; il l'a même été encore moins, alors qu'il donne comme solutions différentes des nombres multiples, et que n'ayant rien fait que multiplier par 2, 3 ou un autre nombre, il se vante d'avoir montré là-dessus une suffisante preuve de ses forces. Il me serait très facile de le faire ressortir avec nombre d'autres absurdités; mais je n'ai pas maintenant le loisir de tout discuter en particulier; cependant votre bonté et vos faveurs me font tellement votre esclave que je ne puis refuser aucun travail pour accomplir vos ordres ou me prêter à vos désirs; vous me trouverez donc toujours tout prêt à vous obéir. Je vous salue.

Paris, 3 février 1658.

LETTRE XXIII.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très illustre Seigneur, votre lettre datée de Paris, 6 février style nouveau, m'est arrivée le 19 février vieux style, au moment où j'allais me coucher, envoyée par le très honoré vicomte Brouncker, qui l'avait reçue la veille, en même temps que la lettre y incluse de M. Frenicle à vous : dès le lendemain, je préparais ma réponse, mais j'ai différé de l'envoyer jusqu'à présent, parce que vous me faisiez espérer, pour la semaine suivante, l'envoi d'une autre lettre que nous n'avons pas encore reçue; je croyais donc pouvoir répondre à tout ensemble, et cela d'autant plus que, quand vous avez écrit votre dernière, vous n'aviez pas encore reçu, comme il semble bien, la mienne datée du 26 décembre, ni même celle que vous a envoyée un peu auparavant le vicomte Brouncker. Je ne puis faire autrement que de vous remercier très humblement de la très grande faveur dont vous continuez à m'honorer, et me féliciter, en même temps que notre Oxford, de l'espoir que vous nous donnez de dissiper bientôt par votre présence la tristesse que nous cause la mort de votre si savant ami Longbain; perte presque irréparable, survenue le 9 février à la suite d'une pleurésie. Voilà, en bien peu de temps, trois hommes incomparables, Armagh, Selden, Longbain, disparus au grand dommage de la Science et aux amers regrets de l'Angleterre.

Quant à la lettre du très noble Frenicle, que renfermait la vôtre, je suis embarrassé pour répondre. Car s'il s'agit d'injures, j'aime mieux me taire que de donner la réplique.

Que le nombre 1 n'ait pas de parties aliquotes, cela n'est pas nouveau et je ne l'ignorais pas. Mais que 1 ne soit pas cube, qu'il ne soit pas nombre, j'aurais bien pu croire que quelque autre l'eût dit, mais non pas Frenicle, qui l'a déjà donné et comme nombre et comme cube. Car, si la renommée ne m'a pas trompé, il a fourni, pour un autre problème de Fermat, 1 et 1728 comme deux nombres cubes dont la somme est égale à celle des deux cubes 1000 et 729. Il l'appelle encore nombre dans le livre qu'il a publié et que j'ai la reconnaissance de devoir à votre obligeance. Page 6 : « *Soient posés*, dit-il, *les deux nombres* 1 *et* 7 » à un endroit où il parle de cette même question. Il l'appelle carré, page 17, en reproduisant les paroles de Fermat, dans l'exposition de la seconde question : « *Le carré* 1, *multiplié par* 3, *après addition de l'unité, fait* 4. » Et Frenicle, page 21 à la fin, confirme cette expression par ses propres termes, qui énoncent la même chose. De même, page 23, « *produit de* 5 *par le carré* 1 »; page 25, ligne 19 : « *Le nombre* 7 *multiplié par le carré* 1 », et, ligne 23 : « *Le plus petit nombre sera donc carré, à savoir* 9, *et le plus grand,* 11, *multiplié par le carré* 1. » De même, en d'autres nombreux endroits. Comment donc, s'il avoue qu'il est carré, niera-t-il qu'il soit cube? ou bien si, pour les clarissimes MM. Fermat et Frenicle, il est aussi bien nombre que carré et cube, je ne vois pas pourquoi il ne le serait pas pour nous.

Quand nous ne serions, moi et le très honoré Vicomte, que des *arith-*

méticiens du vulgaire ou même *des apprentis les plus novices,* nous ne pouvons bien comprendre ce qui peut *étonner,* faire *rougir* ou rendre *stupéfait et honteux* votre clarissime Correspondant. Le problème proposé était bien de trouver un cube tel qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes il fît un carré. Or je dis que 1 est cube, qu'au moins Frenicle doit le tenir pour tel, et qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes, qui sont nulles, il vient toujours 1, qui est aussi carré. On demande aussi un carré tel qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes, il fasse un cube. Or je dis que 1 est encore carré (du moins il doit être carré pour Fermat et pour Frenicle, puisqu'ils l'ont assez souvent affirmé comme tel), et qu'ajouté à la somme de ses parties aliquotes, qui sont nulles, il vient toujours 1, qui est cube. Pourquoi donc craindrions-nous d'affirmer non pas deux, trois fois, mais quatre, cinq, s'il le faut, qu'un seul et même nombre 1 satisfait aux deux questions?

J'ignore absolument ce qui peut émouvoir la bile de votre clarissime Correspondant, qui n'a pas été mis en cause, je ne dis pas provoqué, et avec qui, quand j'ai écrit la lettre qu'il attaque, je n'avais jamais eu aucune affaire; dont je n'avais jamais vu le Livre, dont je n'avais rien entendu dire; que je suis donc bien loin d'avoir blessé en quoi que ce soit. Ce n'est pas parce que, soit lui, soit Fermat, ce dont je ne puis douter, attendaient quelque autre nombre, ou parce que lui-même (ce que j'ignorais alors) en avait donné d'autres, qu'ils doivent être fâchés de voir qu'on leur fournit ce nombre inattendu, que Fermat, proposant le problème, n'avait pas prévu, et contre lequel il ne s'était donc pas précautionné, ou que Frenicle, dans sa solution, n'a pas aperçu et n'a donc pas produit. C'est de même que Fermat n'a sans doute pas prévu et que Frenicle n'a pas découvert que la troisième question pouvait être résolue par des fractions; que, par suite, il demandait simplement des *carrés,* alors qu'il ne voulait que des *carrés entiers.*

Pour ce que dit votre clarissime Correspondant des parties aliquotes d'un nombre fractionnaire, sur ce que nous avions seulement avancé hypothétiquement (à savoir si Fermat y admettait aussi des parties aliquotes), je ne veux pas déterminer s'il faut l'attribuer à la chaleur de sa passion ou plutôt à sa hâte; mais j'ai bien peine à croire qu'il ait réfléchi posément, lorsque, comme parties aliquotes du nombre $\frac{343}{64}$, il demande qu'on compte $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, etc., ou encore $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, etc., non moins que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$.

Que ces parties ne doivent pas être regardées comme aliquotes (pas même pour la quantité continue, et non seulement pour la discontinue), cela est certain tant par Euclide, VII, déf. 3 et 4, que par V, déf. 1, où, pour la nature de la partie (aliquote), il est spécifié qu'elle doit mesurer le tout, c'est-à-dire que, prise un certain nombre de fois, elle doit lui devenir égale; or cela n'a pas lieu pour celles qu'il propose. Par exemple, le nombre $\frac{7}{8}$, pris 6 fois, est inférieur au nombre $\frac{343}{64}$; mais, pris 7 fois, il lui est supérieur. Il n'en est donc pas une partie aliquote, mais bien aliquante, ou, autrement, il en est plusieurs parties, suivant le langage d'Euclide; de même pour les autres. Quant à $\frac{343}{128}$, qu'il prétend de même être une partie aliquote du même nombre $\frac{343}{64}$, on peut, à vrai dire, soutenir cela sous un meilleur prétexte, puisqu'il faut au moins l'admettre pour la quantité continue, au même titre que $\frac{1}{2}$ sera tenu pour partie aliquote du nombre 1, ou $\frac{3}{2}$ pour partie aliquote du nombre 3. Mais pour la quantité discontinue, on ne doit pas l'admettre. De même, en effet, que celui qui compte comme unités 343 $\left(\text{ou } \frac{343}{1}\right)$ suppose séparées en acte ces unités, mais non pas les moitiés ou autres parties des unités, de même pour $\frac{343}{64}$, celui qui compte les 64^{mes} suppose ces 64^{mes} (en tant que comptés) séparés en acte et dénombrables; mais il ne fait pas cette supposition pour les 128^{mes} qu'on peut bien dire exister en puissance et comme mesurables (de même que les moitiés dans les unités), mais non pas distingués en acte.

Si j'ai négligé de pousser plus loin la solution du problème proposé, j'en ai donné plusieurs fois les motifs. Si votre clarissime Correspondant n'y ajoute point de foi, on ne peut guère croire qu'il le fasse alors que je les répéterais encore à nouveau.

Mais, puisqu'il insiste d'une façon si importune, en allant presque jusqu'aux injures, pour le cas où je ne le ferais point, je veux bien (pour la première fois) lui donner satisfaction en abordant sérieusement cette question du cube dans le sens où il la prend. Il verra ainsi que ses mystères des parties aliquotes ne nous sont pas inaccessibles et il n'aura pas à répéter son : « Il est facile de déprécier ce que l'on ne peut atteindre. » Nous disons donc :

1. Il est clair qu'une puissance quelconque d'un nombre premier, ajoutée à la somme de ses parties aliquotes, est la somme d'une progression géométrique (soit $1 . R . R^2 . R^3$. etc.), dont le premier terme (A) est 1, tandis que la racine ou raison commune de la progression (R) est ce nombre premier, et que le nombre des termes (T) est supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance en question.

2. On sait également qu'en général (*voir* notre *Mathesis universalis*, prop. 68, Chap. 33) la somme d'une progression géométrique est $\frac{R^T - 1}{R - 1} A$; que, par conséquent, dans le cas présent, où $A = 1$, elle sera $\frac{R^T - 1}{R - 1}$.

3. De même, puisqu'il s'agit d'une puissance cubique, et dès lors 3^{me}, 6^{me}, 9^{me} ou autre, dont l'exposant est divisible par 3, il est clair que le nombre T des termes, en tant que supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance proposée, sera 4, 7, 10 ou quelque autre nombre supérieur d'une unité à un multiple de 3.

4. Si donc nous divisons la puissance 4^{me}, 7^{me}, 10^{me}, etc. d'un nombre premier quelconque, diminuée d'une unité (à savoir $R^T - 1$), par l'excès sur l'unité du même nombre premier (soit $R - 1$), nous

aurons la somme d'une certaine puissance cubique (3^{me}, 6^{me}, 9^{me}, etc.) de ce nombre, et des parties aliquotes de cette puissance.

5. Traitant d'après cette règle tous les nombres premiers plus petits que 100, je trouve que, pour le nombre 2, le cube ajouté à ses parties aliquotes est $15 = 3 \times 5$; que son cubocube (ou puissance 6^{me}), augmenté de même, est 127 nombre premier; que la 9^{me} puissance, augmentée de même, est $1023 = 3 \times 11 \times 31$.

De même pour les autres, suivant le Tableau ci-dessous, où les sommes avec les parties aliquotes sont décomposées en facteurs premiers.

Racine.	Cube ajouté à la somme de ses parties aliquotes.	Racine.	Cube augmenté.	Racine.	Cube augmenté.
1	1	7	2×2×2×2×5×5	47	2×2×2×2×2×3×5×13×1
2	3×5	11	2×2×2×3×61	53	2×2×3×3×3×5×281
2×2	127	13	2×2×5×7×17	59	2×2×2×3×5×1741
2×2×2	3×11×31	17	2×2×3×3×5×29	61	2×2×31×1861
2×2×2×2	8191	19	2×2×2×5×181	67	2×2×2×5×17×449
2×2×2×2×2	3×5×17×257	23	2×2×2×2×3×5×53	71	2×2×2×2×3×3×2521
3	2×2×2×5	29	2×2×3×5×421	73	2×2×5×13×37×41
3×3	1093	31	2×2×2×2×2×2×13×37	79	2×2×2×2×2×5×3121
3×3×3	2×2×11×11×61	37	2×2×5×2603 (1)	83	2×2×2×3×5×7×13×53
5	2×2×3×13	41	2×2×3×7×29×29	89	2×2×3×3×5×17×233
5×5	19531	43	2×2×2×5×5×11×37	97	2×2×5×7×7×941
5×5×5	2×3×11×71×521				

Celui qui le jugera utile pourra, de la même manière, faire cette détermination pour les cubes de davantage de nombres premiers ou pour d'autres puissances cubiques de ceux-ci.

6. Il est clair, d'après un tel examen de ces cubes, qu'il n'y en a aucun qui seul puisse satisfaire à la condition proposée, à l'exception de 1 et du cube du nombre 7. Comme en effet il n'y a pas de nombre premier, sauf 1, qui puisse être carré, on ne peut attendre un autre carré, si ce n'est là où tous les facteurs sont par paires; ce qui a bien lieu pour le nombre 7, où l'on a 2.2.2.2.5.5; mais nulle part ailleurs.

(1) Dans la seconde édition, 2603 est remplacé par le produit 19×137.

7. Ainsi, pour avoir un autre carré égal à la somme d'un cube et de ses parties aliquotes, à moins d'examiner les cubes d'autres nombres premiers ou d'autres puissances de ceux-ci, il faut prendre un cube formé par les puissances cubiques de deux ou plusieurs nombres premiers.

8. Si l'on multiplie entre elles des puissances quelconques de deux ou plusieurs nombres premiers, le produit augmenté de ses parties aliquotes est égal au produit des puissances composantes, augmentées chacune de ses parties aliquotes. Si, par exemple, on multiplie $a^3 + a^2 + a + 1$ par $b^2 + b + 1$, on aura la somme du nombre $a^3 b^2$ et de ses parties aliquotes; en multipliant par $c + 1$, on aura la somme du nombre $a^3 b^2 c$ et de ses parties aliquotes. Ce qui peut d'ailleurs s'étendre en général à deux nombres quelconques premiers entre eux.

9. Par conséquent, un cube formé de deux ou plusieurs des cubes ci-dessus (pourvu qu'ils ne proviennent pas du même nombre premier), après addition de ses parties aliquotes, sera égal au produit des cubes composants, augmentés de même. Par exemple, le cube du nombre 2, ainsi augmenté, est $15 = 3 \times 5$; celui du nombre 3 est $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; donc le cube du nombre 6 ou 2×3, ainsi augmenté, sera égal au nombre $600 = 15 \times 40 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$. De même pour les autres.

10. Dès lors, pour qu'un cube ainsi composé, augmenté de ses parties aliquotes, fasse un carré, il faut prendre des cubes composants tels qu'en prenant tous les facteurs premiers de ces cubes ainsi augmentés, ils soient doubles, ou autrement que chacun de ces facteurs premiers se présente un nombre pair de fois.

11. Or, parmi les facteurs des cubes augmentés ci-dessus, les nombres premiers 41, 71, 127, 137, 181, 233, 257, 281, 421, 449, 521, 941, 1093, 1741, 1861, 2521, 2603 [1], 3121, 8191 et 19531 ne se pré-

[1] Ce nombre 2603 a été supprimé dans la seconde édition, qui a ajouté 137.

sentent qu'une fois; il est donc clair que les cubes où ils figurent, c'est-à-dire les cubes des nombres 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 89, 97, le second, le quatrième et le cinquième cube du nombre 2, le second cube de 3, et le second et le troisième cube de 5 doivent être immédiatement éliminés comme impropres à la question (tant que l'on ne fera pas le calcul pour encore plus de cubes), puisqu'il ne pourra y avoir de paire de ces facteurs dans aucune combinaison des cubes ci-dessus. Mais si l'on élimine le cube du nombre 61, il faudra aussi éliminer le troisième cube du nombre 2, puisque le facteur 31 ne se rencontre pas ailleurs. A la suite de cette dernière élimination, il faudra faire celle du cube de 43, dont le facteur 11 n'aura plus de pareil; car il ne se rencontre nulle part ailleurs que dans le troisième cube du nombre 3, où il est déjà en double. Après cette élimination, on fera encore celle du cube du nombre 31, où 37 sera désormais solitaire. Enfin on éliminera le cube de 17, car nulle part ailleurs on ne trouve 29 solitaire (car il est double pour le cube de 41).

12. Des cubes qui restent, il est clair que celui de 1, qui ne change rien dans la multiplication, est inutile pour la composition. De même celui du nombre 7, où les facteurs de la somme sont tous par paires; toutefois quand nous aurons trouvé un autre cube satisfaisant au problème, ce cube de 7 pourra nous servir, puisque son produit avec l'autre satisfera également, un carré, multiplié par un carré, donnant un carré (remarque qui doit d'ailleurs s'entendre de deux cubes quelconques premiers entre eux et satisfaisant au problème); en attendant toutefois cet autre cube, il faut écarter celui de 7, dont les facteurs étant tous par couple, ne peuvent s'accoupler avec aucun autre facteur solitaire.

13. Examinons donc les autres cubes séparément. Le facteur 53 ne se rencontre que pour les nombres 23 et 83; il est donc clair qu'il faut combiner les cubes de ces nombres ou bien les éliminer tous deux. Mais, en réunissant les facteurs en regard de chacun d'eux, on trouve, en dehors de 2 pris six fois, 3, 5, 53 pris chacun deux fois, les solitaires 2, 7, 13; on cherchera donc ailleurs des facteurs pour les coupler. Comme 13, parmi les facteurs déjà éliminés, ne se rencontre que pour 47 et 5, essayons ces deux nombres; si aucun ne réussit, il faudra éliminer 83 et 23.

Au nombre 47, on trouve, outre les paires 2, 3, 5, 13, 17 qui, réunis aux trois solitaires précédents 2, 7, 13, couplent bien 2 et 13, mais donnent désormais comme solitaires 3, 5, 7, 17. Réunissons-les aux facteurs en regard de 13, où l'on peut seulement espérer de coupler 17, comme là 5, 7, 17 sont solitaires, il ne reste plus que 3 d'isolé. Si nous lui cherchons un double dans les facteurs au nombre 41, 7 restera solitaire sans espoir désormais de compagnon; si nous prenons les facteurs pour 5, 13 sera de même cette fois abandonné à lui seul. Allons au nombre 11, il restera comme solitaires 2 et 61; pour le dernier de ceux-ci, nous pouvons bien trouver un compagnon dans le troisième cube du nombre 3, mais 2 n'en restera pas moins isolé sans espoir d'appareillage. Au premier abord, on pourrait croire qu'on peut recourir au premier cube de 3, mais on doit se l'interdire, puisque le troisième cube du même nombre 3, qui a déjà été pris, comprend le premier. Si enfin (seul espoir qui nous reste), pour trouver un compagnon au solitaire 3, nous allons au nombre 2, il viendra comme solitaire 5; et cherchant, pour coupler celui-ci, au premier cube de 3 (le seul qui, n'ayant pas encore été rejeté, puisse nous donner espoir), il restera le nombre 2 solitaire et sans espoir de compagnon; car, pour la raison déjà indiquée, on ne peut recourir au troisième cube de 3 pour trouver le second de la paire. Ainsi il ne reste aucun moyen, comme le prouve l'inspection du tableau; donc, des nombres 47 et 5, le premier ne réussit pas.

Il reste donc à essayer le nombre 5 pour trouver, s'il est possible, des compagnons aux solitaires 2, 7, 13 ci-dessus mentionnés. Or on y trouve, outre les doubles, les solitaires 3, 13 qui, réunis aux solitaires 2, 7, 13, laissent encore comme solitaires 2, 3, 7. D'ailleurs 7 ne se trouve nulle part ailleurs qu'aux nombres 13 et 41, dont aucun des deux ne peut satisfaire. 13, en effet, laisserait solitaire sans espoir de compagnon le nombre 17, qui nous rejetterait inutilement au nombre 47 déjà écarté. 41, au contraire, permettrait de doubler les nombres 3 et 7, mais 2 resterait toujours solitaire sans espoir de compagnon, si ce n'est par les nombres 3 ou 11, séparément et non ensemble; or 3 laisserait comme solitaire 5, auquel on ne peut trouver de compagnon que par 2, qu'il faut abandonner sans espoir, car il laisse à son tour le solitaire 3, et nous renvoie inutilement à 11 comme seul moyen de trouver le compagnon cherché. On ne peut davantage prendre 11 au lieu de 3 pour coupler le facteur 2; car il resterait alors comme solitaires 3 et 61, et si pour le dernier on peut se procurer un double au troisième cube de 3, pour le premier, 3, il n'y en aura pas; car on ne peut l'espérer de 2 qui laisserait 5 à abandonner solitaire. Ainsi, tout pesé, il est certain qu'on ne peut trouver de ressources ni par 5 ni par 47; il faut donc éliminer et le nombre 83 et tout aussi bien le nombre 23.

14. Prenons maintenant le nombre 47; on y trouve, outre les doubles, les facteurs solitaires 2, 3, 5, 13, 17; or 13 ne se rencontre pas dès lors ailleurs qu'au nombre 5, ni 17 ailleurs qu'au nombre 13; il est donc clair qu'il faudra soit combiner ensemble les cubes de 5, 13 et 47, soit les éliminer tous ensemble.

Or 5 fournit les facteurs solitaires 3, 13, et le nombre 13, les facteurs solitaires 5, 7, 17, tandis que 47 nous donnait les facteurs solitaires 2, 3, 5, 13, 17. Réunissant tous ces facteurs, il reste, en dehors de ceux qui se doublent par la réunion, les solitaires 2 et 7. Parmi les nombres non éliminés, 41 est désormais le seul où l'on trouve 7; il faut donc combiner ce nombre avec les trois autres, ou les éliminer tous quatre ensemble.

Mais 41, outre les doubles, donne les facteurs solitaires 3 et 7, qui, réunis aux précédents 2 et 7, permettent de doubler 7, mais laissent encore comme solitaires 2 et 3, auxquels il faut désormais chercher des compagnons. On peut les trouver de deux manières différentes, sans plus.

En premier lieu, le nombre 11 fournit, outre les doubles, les facteurs solitaires 2, 3, 61 qui, unis aux précédents 2 et 3, les doublent, en ne laissant comme solitaire que 61, pour lequel on trouvera un compagnon au troisième cube de 3, où 61 est le seul facteur solitaire. Par conséquent, si avec les quatre cubes des nombres précités 5, 13, 41, 47, on combine celui du nombre 11 et le troisième cube ou la neuvième puissance du nombre 3, le cube formé par cette combinaison, étant augmenté de la somme de toutes ses parties aliquotes, fera un carré dont les facteurs premiers seront les mêmes que ceux des cubes composants augmentés de même; ces facteurs premiers seront donc : 2 seize fois, 3 quatre fois, 5, 7, 11, 13, 17, 29, 61 deux fois.

D'ailleurs si ce même cube, ainsi trouvé, est multiplié par le cube du nombre 7, le produit sera encore cube et, augmenté de ses parties aliquotes, il fera un carré qui aura de plus que le précédent les facteurs 2 quatre fois, et 5 deux fois.

D'ailleurs le cube ainsi composé ne laisse d'intact, parmi ceux du Tableau ci-dessus, que le cube 1 qui ne change rien, et le cube du nombre 2 qui, augmenté de ses parties aliquotes, fait 3×5, nombre non carré; en effet, le premier cube du nombre 3 se trouve compris dans le troisième et ne peut rentrer dans la combinaison; dès lors il est clair que le cube ainsi composé ne peut plus être combiné avec aucun de ceux du Tableau, en sorte que le produit ainsi formé, étant augmenté de ses parties aliquotes, fasse un carré.

En second lieu, on peut cependant compléter autrement le cube formé par la combinaison de ceux des nombres 5, 13, 41, 47, qui, comme j'ai dit, laissent comme solitaires les facteurs 2 et 3; mais il faut cette fois laisser de côté le cube du nombre 11 et dès lors le troisième cube de 3, qui doivent être, comme ci-dessus, pris ensemble ou écartés ensemble, à cause du facteur 61 qui ne se trouve pas ailleurs. Le cube du nombre 2 fournira les facteurs solitaires 3 et 5, et le premier cube du nombre 3 les facteurs solitaires 2 et 5; de la sorte, les facteurs solitaires précédents 2 et 3 trouveront des compagnons, et 5, rencontré de part et d'autre, sera doublé. Ainsi, en combinant avec les cubes des nombres 5, 13, 41, 47 ceux de 2 et de 3, on aura un cube qui, augmenté de ses parties aliquotes, fera un carré dont les facteurs premiers, les mêmes que ceux des cubes composants augmentés de même, seront : 2 quatorze fois, 3 et 5 quatre fois, 7, 13, 17 et 29 deux fois.

Le même cube, multiplié par celui de 7, donnera encore un cube jouissant de la même propriété, et aux facteurs du carré déjà énumérés, il faudra ajouter 2 quatre fois et 5 deux fois.

D'ailleurs le cube ainsi composé ne laisse d'intact dans le Tableau que celui du nombre 11, à écarter, comme on l'a dit, à moins que l'on en prenne en même temps le troisième cube de 3, ce que l'on ne peut, puisque le premier cube de 3 est déjà entré dans la combinaison. Il est donc clair que le cube ainsi formé ne peut plus être combiné avec aucun de ceux du Tableau de manière à en donner un nouveau satisfaisant à la condition imposée.

Mais il est également manifeste que les facteurs solitaires 2 et 3 qui restent, comme j'ai dit, après la combinaison des cubes de 5, 13, 41, 47, ne peuvent trouver de compagnons que par le cube de 11 avec le troisième cube de 3, ou par le cube de 2 avec le premier cube de 3; car il n'en reste après ceux-là plus d'autres que les cubes de 1 et 7, dont ni l'un ni l'autre ne peuvent satisfaire. Ainsi il n'y a pas d'autres manières de compléter ce cube, en dehors de celles qui ont été indiquées.

15. En écartant d'ailleurs les cubes des nombres 5, 13, 41, 47 qui, comme on l'a montré, doivent être soit pris ensemble soit mis de côté ensemble, il est impossible de composer avec ceux qui restent le cube demandé. En effet, si l'on écarte, pour les raisons précitées, les cubes de 1 et de 7, il ne reste que ceux de 2 et de 11, avec le premier et le troisième cube de 3. Si l'on prend le cube de 11 et le troisième cube de 3, puisqu'on doit les prendre ou les écarter ensemble, à cause de 61 qui s'y trouve des deux côtés et n'est nulle part ailleurs, il restera comme solitaires 2 et 3, qui ne peuvent être doublés tous deux par le cube de 2, tandis que le premier cube de 3 ne peut être admis, puisqu'on a déjà pris le troisième. Qu'on écarte au contraire le cube de 11 et le troisième cube de 3, les deux qui restent, celui de 2 et le premier de 3, ne peuvent évidemment, par leur combinaison réciproque, satisfaire à la condition imposée; les facteurs 2 et 3 resteraient en effet solitaires.

16. Ainsi, tout considéré, il est établi que, parmi les cubes du Tableau, il n'y en a pas de simples, sauf ceux de 1 et de 7, qui, ajoutés à la somme de leurs parties aliquotes, fassent des carrés. Il n'y en a pas non plus de composés de ces mêmes cubes, qui jouissent de ladite propriété, si ce n'est les quatre déjà indiqués, dont le premier est formé du produit des cubes des nombres 5, 13, 41, 47, 11.3, 3, 3; le second, des mêmes et du cube de 7; le troisième, des cubes de 5, 13, 41, 47, 2.3; le quatrième, des mêmes et du cube de 7.

Celui qui voudra davantage de cubes de ce genre et le croira utile pourra, de la même façon que nous avons fait pour les nombres premiers inférieurs à 100, examiner davantage de nombres premiers, ou du moins davantage de leurs puissances. Qu'il me suffise en tout cas d'avoir donné la véritable méthode de recherche, afin que Frenicle apprenne que, si j'ai négligé cette question plus tôt, ce n'est point par impuissance.

Ayant d'ailleurs effectué les calculs, je trouve que les quatre cubes, composés ci-dessus, sont identiquement les mêmes que les quatre donnés par M. Frenicle, et peut-être trouvés par le même procédé.

La méthode exposée pour la question du cube, qui, ajouté à ses parties aliquotes, fait un carré, peut, *mutatis mutandis*, s'appliquer entièrement à l'autre question du carré, qui, ajouté à ses parties aliquotes, fait un cube. On examinera, à cet effet, aussi loin que l'on voudra, les puissances quadratiques (2^{me}, 4^{me}, 6^{me}, etc.) des nombres premiers pour voir quel nombre on obtient, pour chacune d'elles, en l'ajoutant à ses parties aliquotes, et comment ce nombre est composé en facteurs premiers; puis, on combinera ces puissances quadratiques en sorte que les facteurs premiers qui leur correspondent puissent se grouper, non plus par 2, comme tout à l'heure, mais par 3.

Enfin la même clef, maniée avec intelligence, révélera d'autres mystères semblables sur les parties aliquotes; je les laisse à ceux qui se plaisent à s'exercer sur ce sujet.

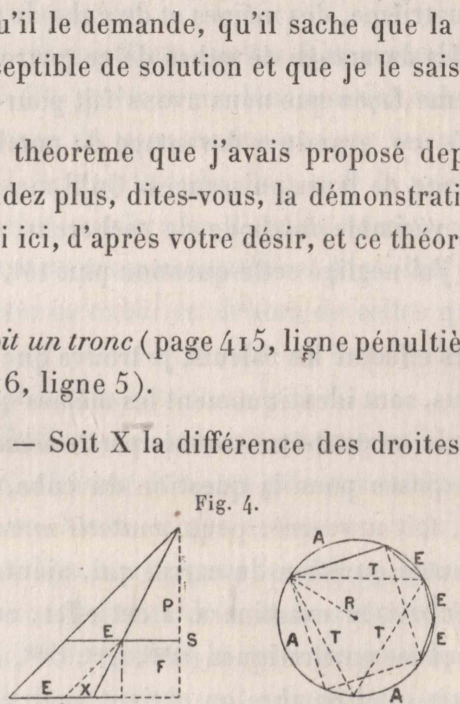
Quant à la question que j'ai proposée, d'ailleurs en passant, et non pas à M. Frenicle, mais à M. Fermat, à savoir de deux nombres carrés qui, ajoutés à leurs parties aliquotes, fassent le même nombre (par exemple 16 et 25), je dirai que, quand M. Frenicle s'informe de la possibilité, il s'informe de ce qui est demandé. Il m'est indifférent ou bien qu'il résolve le problème, ou qu'il le montre insoluble (les deux cas compteront également pour une solution légitime), ou encore qu'il le néglige entièrement; car je n'y attache pas grande importance et, qu'il le résolve ou non, il n'y gagnera, ni n'y perdra grande gloire. Cependant puisqu'il le demande, qu'il sache que la question que j'ai proposée est susceptible de solution et que je le sais d'une façon certaine.

Enfin, pour le théorème que j'avais proposé depuis longtemps et dont vous n'attendez plus, dites-vous, la démonstration d'ailleurs que de moi, je mettrai ici, d'après votre désir, et ce théorème et sa démonstration.

Théorème. — *Soit un tronc* (page 415, ligne pénultième) .... *le volume du tronc* (page 416, ligne 5).

Démonstration. — Soit X la différence des droites A et E (*fig.* 4),

Fig. 4.



c'est-à-dire $X = A - E$. Posons $\frac{X}{F} = \frac{A}{S} = \frac{E}{P}$; S sera la hauteur totale de la pyramide (ou du cône), P celle de la partie retranchée du côté du sommet. Par suite, SA^2 sera le triple de la pyramide ou du cône, PE^2 le triple de la partie retranchée; enfin $SA^2 - PE^2$ sera le triple du tronc restant.

Mais on a $S = \frac{FA}{X}$, $P = \frac{FE}{X}$; donc le triple du tronc

$$SA^2 - PE^2 = \frac{FA^3 - FE^3}{X} = \frac{A^3 - E^3}{A - E} F.$$

Or $A^3 - E^3 = (A^2 + AE + E^2) \times (A - E)$; donc

$$\frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2,$$

et le triple du tronc sera $(A^2 + AE + E^2) \times F$.

Mais, si l'on forme le triangle comme il a été dit, soient T sa base et R le rayon du cercle circonscrit, on aura T^2 égal d'une part à

$$A^2 + AE + E^2,$$

de l'autre à $3R^2$, égalités qui seront démontrées tout à l'heure. Par conséquent le triple du tronc sera T^2F ou $3R^2F$; donc R^2F sera le volume du tronc. C. Q. F. D.

Quant à ce qui reste à prouver, à savoir que

$$A^2 + AE + E^2 = T^2 = 3R^2,$$

voici comment je procède :

Si le triangle est inscrit dans le cercle, comme on l'a dit, l'angle formé par les côtés A, E est un angle à la circonférence de 120°; il comprend donc un arc de 240°, et la droite T qui ferme le triangle est corde d'un arc de 240°, donc d'un de 120° (différence avec le cercle entier); c'est donc le côté du triangle équilatéral inscrit; donc $T^2 = 3R^2$.

Mais, d'autre part, on montrera que

$$A^2 + AE + E^2 = 3R^2.$$

Si la droite A est considérée comme sous-tendant l'arc simple, la sous-tendante de l'arc triple sera $3A - \frac{A^3}{R^2}$. Si, au contraire, E est la sous-tendante de l'arc simple, celle de l'arc triple sera $3E - \frac{E^3}{R^2}$. Mais c'est une seule et une même corde, soit C, qui sous-tend, soit l'arc 3A, soit l'arc 3E. Puisqu'en effet $A + E$ forme le tiers du cercle, $3A + 3E$ fera le cercle entier. Dès lors la corde, qui d'un côté sous-tend 3A, sous-tendra de l'autre 3E, différence entre le cercle entier et 3A. On aura donc

$$3A - \frac{A^3}{R^2} = C = 3E - \frac{E^3}{R^2};$$

d'où

$$3R^2A - A^3 = 3R^2E - E^3,$$

$$3R^2A - 3R^2E = A^3 - E^3,$$

$$3R^2 = \frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut abréger comme suit, sans employer la droite T, dont il n'a été fait usage que pour plus de clarté.

Puisque $\frac{A - E}{F} = \frac{A}{\frac{FA}{A-E}} = \frac{E}{\frac{FE}{A-E}}$, on a, pour le triple du tronc de cône,

$$\frac{FA^3 - FE^3}{A - E} = \frac{A^3 - E^3}{A - E} \times F.$$

Mais, à cause de l'angle de 120°, la somme des arcs $A + E$ fait le tiers du cercle; donc $3A + 3E$ fera le cercle entier, donc 3A et 3E auront la même sous-tendante, et, par suite,

$$3A - \frac{A^3}{R^2} = 3E - \frac{E^3}{R^2}.$$

Donc $3R^2A - A^3 = 3R^2E - E^3$ ou $3R^2A - 3R^2E = A^3 - E^3$, et

$$3R^2 = \frac{A^3 - E^3}{A - E}.$$

Donc le triple du tronc de cône sera $3R^2F$, et le tronc de cône R^2F.

C. Q. F. D.

Il me reste à vous demander pardon de ma prolixe importunité et à vous supplier, si vous le voulez bien, de ne pas dédaigner de continuer votre amitié à celui que vous vous êtes gagné, et qui est,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble et très dévoué serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 4/14 mars 1657/8.

Pour l'allusion de votre très noble Correspondant *à ma recherche malheureuse* de la quadrature du cercle, je ne saisis pas bien ce qu'il prétend. Voici la quadrature que j'ai donnée :

Le produit des carrés des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, etc. à l'infini est au produit des mêmes carrés diminués chacun d'une unité, comme le carré du diamètre est à l'aire du cercle.

En quelque point d'ailleurs que l'on veuille arrêter cette multiplication de carrés, on tombera entre les limites suivantes : Si le produit des carrés est multiplié par la racine carrée de la somme de l'unité et de la partie aliquote de celle-ci, qui a pour dénominateur la racine du dernier carré, on a une quantité trop forte; si, au contraire, le dénominateur est la même racine augmentée d'une unité, on a une quantité trop faible. Ainsi

$\dfrac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{9}}}{8 \times 24 \times 48 \times 80}$ est plus grand que le rapport du carré au cercle,

$\dfrac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{10}}}{8 \times 24 \times 48 \times 80}$ est, au contraire, plus petit.

J'ajoute que ce rapport est également celui du rectangle des axes conjugués ou d'un parallélogramme quelconque circonscrit à l'aire de l'ellipse.

Si votre très noble Correspondant regarde cette quadrature comme fausse, qu'il la réfute, s'il en est capable. Qu'il montre, veux-je dire, que le rapport du cercle au carré du diamètre est plus grand ou plus petit que ce que j'ai assigné. Mais s'il n'a voulu faire qu'une insinuation moins grave, parce que cette quadrature ne lui plaît pas ou qu'il la juge indigne de son estime; je veux lui rappeler ses paroles : « Il est facile de déprécier ce qu'il n'est pas possible d'atteindre », ou plutôt celles-ci : « Si vous savez quelque chose de mieux, donnez-nous-le de bon cœur. »

LETTRE XXIV.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

Sir, je vous envoie ci-joint une copie (lettre XXVII) de ce que j'ai écrit à sir Kenelm Digby, après avoir lu attentivement les autres lettres, qui viennent de lui; je désirerais que ma réponse partît avec votre dernière, ou au moins la suivît, si vous avez déjà fait l'expédition. Je n'ai pas le temps de vous rien dire, si ce n'est, ce que je ne puis oublier, de vous assurer encore que je suis,

Sir, votre très fidèle ami et serviteur,

Brouncker.

13/23 mars 1657/8.

LETTRE XXV

(jointe ainsi que la suivante à celle qui précède).

Kenelm Digby a John Wallis.

J'espère que vous avez déjà reçu ma lettre que je vous envoyais le 6 de ce mois, et dans laquelle j'avais enfermé copie d'un écrit à moi adressé, que M. Frenicle avait rédigé à la hâte, immédiatement après avoir vu la lettre dont vous m'avez fait le plaisir de m'honorer le 21 novembre dernier, et qui est restée si longtemps en route. Cet écrit ne contenait que ses réflexions sur la première partie de votre lettre, le temps ne lui permettant pas d'en mettre davantage. Le lendemain matin, il quitta la ville pour quelques jours; mais, à son retour, il me demanda à étudier de nouveau votre lettre, et le matin suivant me la rapporta avec le papier ci-inclus, en réponse à la seconde partie. Il l'a rédigé comme s'il était écrit par une personne tierce, et il désirait me voir cacher son nom; c'est pour qu'on ne puisse pas croire qu'il fasse vanité de posséder des connaissances extraordinaires dans une Science dont il prétend être très ignorant, n'y ayant jamais eu aucun maître et ne l'ayant même que peu étudiée, mais s'en étant seulement occupé pour se récréer et satisfaire à la propension de son génie. Mais moi qui fais profession de candeur et manières franches en toutes choses et pour toute personne, je ne voudrais pas que vous restiez à ignorer qui est votre antagoniste, du moment où je le connais. Or, quoiqu'il ne soit, à son idée, qu'un très mince mathématicien, aujourd'hui, pour la partie qui concerne les nombres, toute la France (même M. Roberval et M. Fermat, de même que M. Descartes quand il vivait) le reconnaît comme le maître, supérieur aux autres à une énorme distance. Et surtout, ce qu'ils font avec beaucoup de travail, nombre de circuits et d'opérations, il le fait immédiatement au vu de la question, sans opération, comme s'il avait une connaissance intuitive de ces choses, et tout son embarras est pour le mettre sur le papier. Cependant j'ai longtemps débattu en moi-même si je vous enverrais ou non ces deux derniers papiers; car, quoique les expressions y soient modestes et courtoises en comparaison de ce que les savants hommes de ce pays écrivent l'un contre l'autre (comme vous pouvez le voir dans les disputes entre Gassend et Descartes, Morin et Gassend, Descartes et Fermat, Fermat et Frenicle), je réfléchis qu'elles sont plus aigres qu'il n'est d'usage en Angleterre, et que celles que j'emploierais certainement, dans un cas semblable, pour une différence d'opinion. Mais ce qui a principalement fait pencher la balance pour me décider a été la considération que, si je ne vous faisais pas voir ce que ces personnes disent contre vous, et que par suite vous ne leur répliquiez pas, elles pourraient penser qu'elles triomphent de notre nation et de notre Université, ce que, j'en suis sûr, vous empêcherez bien, dès que vous saurez ce qu'on objecte contre vous. D'autre part, j'ai pensé qu'il rentre dans les égards que je vous dois et que je professe à votre endroit, que vous soyez informé de quoi que ce soit que j'apprends et qui vous concerne.

Il m'est dur d'arrêter ma plume quand je cause avec vous, tant j'ai de plaisir à garder, présente à ma pensée, une personne aussi éminente. Mais je ne dois pas tant m'aimer moi-même que j'abuse, pour ma satisfaction, de votre patience et de votre fatigue. Je ne veux donc pas vous incommoder plus longtemps aujourd'hui, si ce n'est pour prendre congé de vous en vous baisant les mains, et en restant

Votre très humble et très affectionné serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 20/10 février 1657/8.

M. Frenicle désire beaucoup savoir quelle solution vous donnez au problème que vous proposez vous-même; vous pourrez voir alors ce qu'il pense à ce sujet.

LETTRE XXVI.

FRENICLE A KENELM DIGBY.

J'aurais préféré, très illustre Seigneur, garder le silence sur ce qui reste encore, dans la Lettre du Clarissime Wallis, à discuter touchant les nombres, et ne pas avoir à m'arrêter à chaque détail; mais, puisque vous attendez de moi que je vous fasse connaître mon opinion sur ces questions, il ne serait pas juste d'éluder vos désirs.

Il s'agit maintenant d'un autre problème du Clarissime Fermat.

Tout d'abord Fermat (comme le dit la Lettre de Wallis) expose en ces termes un certain théorème :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré.

Il donne comme exemple le nombre 3 dont le produit par le carré 1 ou 16, étant augmenté d'une unité, fait le carré 4 ou 49; il affirme qu'il y a une infinité d'autres carrés dont le produit par 3 satisfait à la même condition. Or, pour trouver ces carrés, Wallis donne une méthode légitime.

A la vérité, pour les carrés servant au nombre 3, il a mis un nombre pour un autre; mais cette erreur est excusable, car elle vient non de l'ignorance, mais d'une inadvertance; il a en effet multiplié 56×97 non par 2 suivant la règle, mais par 3. Il faut donc, au lieu de

$$3 \times 56 \times 97 = 16296, \quad \text{lire} \quad 2 \times 56 \times 97 = 10864 \ (^1).$$

Mais, soit dit sans le fâcher, cette affirmation, qu'il y a une infinité de carrés dont le produit, par 3 ou un autre nombre non carré, donne ainsi un carré, c'est le théorème énoncé que Fermat dit avoir démontré et qu'il n'avance que pour l'exemple et le préambule; ce n'est point le problème qu'il demande de résoudre. Car ce qu'il s'agit de trouver, ce sont les carrés qui, multipliés par un nombre quelconque non carré, donnent, par l'addition de l'unité, des carrés, de même que les produits par 3 des carrés 1 et 16, après addition de l'unité, donnent des carrés. Il est d'ailleurs assez clair par là que les carrés demandés doivent être entiers.

Certainement Wallis pourrait s'excuser si Fermat n'avait proposé aucun exemple ou s'il avait indiqué des nombres fractionnaires aussi bien que des entiers. Mais l'exemple n'étant donné qu'en entiers, il était assez compréhensible que la question portait sur des entiers, ainsi que Fermat l'a plus tard expressément déclaré. Ne demandait-il pas des nombres tels que 3 et 16? Il est donc bien clair que Wallis cherche des équivoques pour éluder le problème, qu'il a choisi ce qui était le plus facile et s'est dérobé devant ce qui était le plus ardu.

Mais on demandait des nombres carrés et je ne vois rien dans la solution que des *species*, lettres ou caractères, dont plusieurs ne me sont pas familiers, et qui représentent les nombres et les carrés, sans que les carrés demandés soient aucunement exprimés; tous, au contraire, restent inconnus; je ne vois donc pas qu'on ait satisfait à la question qui demandait certains carrés déterminés. En effet, Fermat proposait, comme exemple pour les autres à chercher, de donner les

(1) *Voir* page 434, ligne 18, où je n'ai pas conservé dans la traduction l'indication du lapsus ultérieurement corrigé.

carrés dont le produit par les nombres 61, 109 ou 127, étant augmenté d'une unité, fait un carré. Et certainement, si tous les carrés quelconques étaient également faciles à trouver, comme cela arrive pour les fractionnaires, il n'eût pas choisi ces nombres-là plutôt que d'autres.

Maintenant, pour les entiers, que nous donne Wallis? En tout cas, aucun carré de ceux qui sont demandés, à savoir dont le produit par un nombre autre que 3, pris comme exemple par Fermat, étant augmenté de l'unité, fait un carré. Il reconnaît que la règle donne non pas les seuls carrés entiers, mais tous indistinctement, tant entiers que fractionnaires. Sans doute, s'il avait trouvé une méthode pour séparer les entiers des fractionnaires, il aurait résolu la question. Mais il y a une infinité de fractionnaires pour chaque entier, et les carrés entiers sont en très petit nombre par rapport aux fractionnaires; si donc il n'y a pas une méthode quelconque pour opérer la séparation et qu'il faille livrer au hasard une pareille recherche, c'est comme si l'on donnait à chercher une perle ou un diamant dans tout le sable de la mer, ou comme on dit communément, une aiguille dans une meule de foin. Si, au contraire, Wallis a une certaine méthode qui puisse servir à trouver les carrés pour les différents nombres, puisque dans l'opuscule latin de Frenicle ces carrés sont donnés pour chaque nombre non carré jusqu'à 150, qu'il poursuive jusqu'à 200, ou s'il n'a pas le loisir de pousser aussi loin, que le clarissime savant s'exerce seulement sur le suivant 151; je ne parle pas de 313 qui, peut-être, serait au-dessus de ses forces; autrement je ne serai jamais persuadé qu'il a obtenu la solution du problème, qu'il a en général tous les carrés pour chaque nombre ou du moins un carré pour un nombre quelconque; car je n'en demande qu'un soit pour 151, soit pour 313. Il dit qu'il démontre que sa méthode donne tous les carrés; mais il n'y a pas de meilleure démonstration que de fournir les nombres eux-mêmes, surtout quand on en demande aussi peu.

Ou bien qu'il fasse, par quelque méthode certaine, la déduction des carrés qui servent pour les nombres 61 et 109 et qui sont dans les colonnes 2 et 3 du Tableau de l'opuscule précité de Frenicle; ou encore qu'il recherche les nombres de la colonne 4 dudit Tableau, nombres grâce auxquels il est très facile de construire les carrés; ceux-ci se trouvant dans le Tableau, il y a certainement beaucoup moins de difficultés pour ce que je lui propose ici.

Reste la dernière solution de Wallis, dans laquelle il donne, de nombreuses manières différentes, deux cubes dont la somme est égale à celle de deux autres cubes. Cette question doit être très facile, car vous savez qu'elle a été résolue de diverses façons aussi aisément; cependant, quoique Wallis ait donné de nombreux couples de cubes, il n'en a pas fourni d'autres que ceux qu'il a déduits, par une simple multiplication ou division, de ceux que vous lui avez communiqués comme venant de Frenicle. Pourvu que vous ayez un original de votre Lettre à Wallis qui renfermait ces cubes, vous reconnaîtrez aisément qu'on trouve, parmi eux, les cinq combinaisons suivantes sur lesquelles repose toute la série des cubes donnée par Wallis :

Racines des cubes.

1°	$1 + 12 = 9 + 10,$
2°	$2 + 16 = 9 + 15,$
3°	$10 + 27 = 19 + 24,$
4°	$2 + 34 = 15 + 33,$
5°	$9 + 34 = 16 + 33.$

Les vingt-deux autres, en effet, qui suivent ci-après sont celles que Wallis dit différer de celles de Frenicle; or, à côté de chacune d'elles, a été indiqué le numéro de celle des combinaisons ci-dessus qui lui a donné naissance et le nombre par lequel, pour la construction de ses cubes, Wallis a multiplié ou divisé les cubes qu'il avait reçus de votre main; le mot *en* marque la multiplication, le mot *par* la division.

C. 3 + C. 36 = C. 27 + C. 30,	1° en 3,	C. $\frac{1}{2}$ + C. 6 = C. $4\frac{1}{2}$ + C. 5,	1° par 2,
1 + 8 = $4\frac{1}{2}$ + $7\frac{1}{2}$,	2° par 2,	6 + 10 = $1\frac{1}{3}$ + $10\frac{2}{3}$,	2° en $\frac{2}{3}$,
1 + 17 = $7\frac{1}{2}$ + $16\frac{1}{2}$,	4° par 2,	5 + 11 = $\frac{2}{3}$ + $11\frac{1}{3}$,	4° par 3,
$4\frac{1}{2}$ + 17 = 8 + $16\frac{1}{2}$,	5° par 2,	$\frac{2}{3}$ + $5\frac{1}{3}$ = 3 + 5,	2° par 3,
8 + 64 = 36 + 60,	2° en 4,	6 + 48 = 27 + 45,	2° en 3,
3 + $11\frac{1}{3}$ = 11 + $5\frac{1}{3}$,	5° par 3,	10 + 80 = 45 + 75,	2° en 5,
5 + 40 = $22\frac{1}{2}$ + $37\frac{1}{2}$,	2° en $2\frac{1}{2}$,	32 + 66 = 18 + 68,	5° en 2,
20 + 54 = 38 + 48,	3° en 2,	30 + 66 = 4 + 68,	4° en 2,
60 + 132 = 8 + 136,	4° en 4,	4 + 48 = 36 + 40,	1° en 4,
8 + $6\frac{1}{3}$ = $3\frac{1}{3}$ + 9,	3° par 3,	30 + 81 = 57 + 72,	3° en 3,
48 + 99 = 27 + 102,	5° en 3,	5 + 60 = 45 + 50,	1° en 5.

Vous n'avez donc pas à vous étonner s'il s'engage si facilement à fournir jusqu'à cent combinaisons pareilles dans l'espace d'une heure. Quoi de plus facile que de multiplier ou de diviser ainsi de petits nombres? Une seule combinaison de cubes en fournira très aisément plus de mille sans aucun embarras. Car, dans cette opération, il n'y a pas d'autre fatigue, il n'y a pas d'autre recherche subtile ou d'autre habileté que de multiplier les termes d'une combinaison donnée quelconque, soit par exemple la première 1, 12 = 9, 10, par chaque nombre 2, 3, 4, 5, successivement aussi loin qu'on voudra aller; ou bien, ce qui est encore plus facile, que de diviser par chaque nombre les racines des cubes, ainsi que l'indique le Tableau suivant, et cela à l'infini; sans qu'il y ait aucun besoin de multiplication ou de division, si l'on ne veut pas faire les réductions.

$$\frac{1}{2},\ \frac{12}{2} = \frac{9}{2},\ \frac{10}{2},$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{12}{3} = \frac{9}{3},\ \frac{10}{3},$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{12}{4} = \frac{9}{4},\ \frac{10}{4},$$

$$\frac{1}{5},\ \frac{12}{5} = \frac{9}{5},\ \frac{10}{5},$$

$$.,\ \ldots\ldots.,\ \ldots$$

Il n'y avait donc pas besoin d'embrouiller de telle façon ces cinq combinaisons de cubes, à moins qu'il ne voulût déguiser davantage ses solutions factices et dérivées d'autres connues. Il eût mieux fait ou de garder absolument le silence ou de donner quelques combinaisons nouvelles et non multiples d'autres connues; ce qui était d'ailleurs très facile à trouver, comme les suivantes, données aussi par Frenicle et dans lesquelles les termes n'ont aucune commune mesure :

C. 17 +	C. 39 =	C. 26 +	C. 30,	C. 30 +	C. 67 =	C. 51 +	C. 58,
12 +	40 =	31 +	33,	42 +	69 =	56 +	61,
12 +	51 =	38 +	43,	17 +	76 =	38 +	73,
8 +	53 =	29 +	50,	5 +	76 =	48 +	69,
17 +	55 =	24 +	54,	15 +	80 =	54 +	71,
9 +	58 =	22 +	57,	51 +	82 =	64 +	75.
3 +	60 =	22 +	59,				

Il ne lui convient donc pas de se vanter d'avoir prouvé ses forces dans des choses aussi insignifiantes, qui mériteraient à peine quelque éloge à de petits enfants, ou du moins il n'a pas à les faire prendre pour un effort gigantesque.

Au reste, il me paraît avoir reculé devant la solution de ces problèmes où il n'y a aucune ambiguïté sur la nature des nombres entiers ou fractionnaires, comme : *Diviser un nombre cube donné en deux cubes rationels,* et *Diviser un nombre, somme de deux cubes, comme* 28, *en deux autres cubes rationels,* problèmes où il est assez clair qu'on ne peut toujours satisfaire à la question en nombres entiers, où il faut donc aussi employer les fractions.

Voilà, très noble Seigneur, ce qui m'est venu à l'esprit au sujet des solutions données par Wallis aux questions numériques de Fermat; voilà ce que j'en pense, mais que je n'aurais jamais entrepris d'exposer, si je n'avais pas voulu obéir à vos ordres, auxquels vous me trouverez toujours absolument préparé. Je vous salue.

LETTRE XXVII.

Vicomte Brouncker a Kenelm Digby.

Sir, il y a environ quinze jours ou trois semaines que j'ai reçu la lettre du 6 février, dont vous vous êtes plu à m'honorer, et pour laquelle je vous remercie très humblement. Et hier j'ai eu votre lettre du 20/10 février 1658/7 au Dr Wallis, dont, avec la liberté que vous me donnez, j'ai pris connaissance en même temps que de celle de M. Frenicle qu'elle renferme. J'ai appris de la sorte que vous n'aviez pas encore reçu la dernière lettre du Dr Wallis, écrite, je crois, très peu de temps après la mienne, qui a eu la bonne fortune d'arriver entre vos mains; cependant à l'absence de M. White, le Dr Farrar s'était chargé de vous faire sûrement parvenir cette lettre du Dr Wallis.

Autrement je suis assuré que M. Frenicle aurait omis au moins la plus grande partie de ce qu'il lui a plu de dire dans ses deux écrits; car cette lettre vous présente une méthode bien aisée, claire et certaine pour la solution en entiers du problème en question; car, quoique M. Frenicle se plaise à dire : « Puisque dans l'opuscule latin de Frenicle ces carrés sont donnés pour chaque nombre non carré jusqu'à 150, qu'il poursuive jusqu'à 200, ou, s'il n'a pas le loisir de pousser aussi loin, que le clarissime savant s'exerce seulement sur le suivant 151; je ne parle pas de 313, qui peut-être serait au-dessus de ses forces; autrement, etc. », dans l'espace d'une heure ou deux au plus ce matin, en employant la méthode exposée dans cette Lettre, j'ai trouvé que

$$313 \times \overline{7170685}^2 - 1 = \overline{126862368}^2,$$

et ensuite que

$$313 \times \overline{(2 \times 7170685 \times 126862368)}^2,$$

c'est-à-dire

$$313 \times \overline{1819380158564160}^2 + 1 = \overline{32188120829134849}^2,$$

ce que je crois pouvoir me contenter de vous écrire, afin que M. Frenicle puisse savoir par là qu'il ne manque rien pour la parfaite solution de ce problème. Il ne me reste maintenant, noble Sir, qu'à vous assurer que mon père et ma mère ne peuvent pas, qu'aucun autre ne peut qlus vous honorer et vous estimer, ou être plus fier de votre amitié que ne le fait celui qui est,

Sir, votre très humble et très fidèle serviteur,

BROUNCKER.

13/23 mars 1657/8.

LETTRE XXVIII.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

Très illustre Seigneur, j'avais déjà répondu à la Lettre en date du 6 février, dont vous m'avez honoré, et en même temps à celle de Frenicle qui s'y trouvait renfermée, avant de recevoir les suivantes du 20/10 février, qui m'arrivent à cette heure. Je reconnais en même temps et à mon grand regret que, lorsque vous avez envoyé ces dernières, vous n'aviez pas encore reçu celle que je vous avais adressée en date du 26 décembre. Si M. Frenicle l'avait vue, il n'aurait certainement pas écrit, sinon sa première lettre, au moins sa dernière, ou en tout cas la plus grande partie de celle-ci.

En ce qui regarde le problème de M. Fermat, sur les carrés en nombre infini, dont le produit par un non-carré est inférieur d'une unité à un carré, et quant au théorème préliminaire, nous avons et démontré le théorème et résolu le problème; tous les deux étaient proposés, du moins à nous; je ne sais pas s'ils l'ont été de même à Frenicle, mais il n'a pas à me reprocher d'avoir traité ce théorème hors de propos. En tout cas, nous avons résolu le tout, non seulement en fractions, mais aussi en entiers. Une fois, en effet, que Fermat a eu précisé sa question, en la bornant aux entiers, nous avons enseigné à séparer ceux-ci des nombres fractionnaires, et nous avons fait tout ce que réclame aujourd'hui Frenicle; ce qu'il ne niera plus, une fois qu'il aura vu cette lettre du 26 décembre. Nous n'avons pas donné seulement les règles, ce qui pourtant eût suffi, mais nous en avons aussi montré l'application, non pas à la vérité sur les nombres 61, 109, 127, qui avaient été, ce semble, proposés à Frenicle, mais bien sur d'autres qui ne sont en rien plus faciles, 109, 149, 433, que Fermat nous avait proposés. Lord vicomte Brouncker vient également d'appliquer ces règles au nombre 313, que Frenicle nous a proposé comme insurmontable. On le fera avec autant de facilité pour 151 et pour tout autre. Frenicle ne doutera plus, quand il aura reçu la lettre ci-dessus mentionnée, que nous ne soyons parfaitement maîtres de toute difficulté là-dessus.

Quand il avance que, pour fournir diverses combinaisons de cubes, par couples dont les sommes fussent égales, je me suis borné à multiplier ou à diviser par un même nombre quelques autres combinaisons de ce genre, il dit une chose qui est parfaitement vraie, mais il n'a pas à me la reprocher, puisque lui-même m'a précédé dans cette voie. Voici, en effet, les nombres qui m'étaient communiqués comme venant de lui.

(1) $$1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3,$$

(2) $$4104 = 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3,$$

(3) $$13832 = 18^3 + 20^3 = 2^3 + 24^3,$$

(4) $$32832 = 18^3 + 30^3 = 4^3 + 32^3,$$

. . . .

Il est clair que les nombres des combinaisons 3 et 4 ne sont autre chose que des équimultiples de ceux des combinaisons 1 et 2. Si Frenicle n'ignore pas que la chose est facile, il ne voudra pas, je l'espère, prétendre que je ne pouvais le savoir. Si l'on connaît de fait une seule combinaison de ce genre, déduite de l'inspection de la Table des cubes, ou choisie parmi celles que Frenicle a indiquées, ou enfin obtenue de quelque autre manière, il est certain que l'on pourra immédiatement en fournir une infinité. Que l'on ait, en effet, par exemple,

$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3,$$

on aura aussi

$$a^3e^3+b^3e^3=c^3e^3+d^3e^3,$$

quel que soit le cube e^3, entier ou fractionnaire. De même, si un cube quelconque peut être partagé en deux autres, un cube donné arbitraire pourra l'être également; car si, par exemple,

$$b^3=c^3+d^3,$$

on aura

$$b^3e^3=c^3e^3+d^3e^3.$$

J'ajoute qu'il en est de même pour la question que j'ai proposée. Ainsi, par exemple, 16 et 25, ajoutés chacun à ses parties aliquotes, donnent des sommes égales; il en sera dès lors de même de $16e^2$ et de $25e^2$, quel que soit e^2, pourvu que, d'une part, e^2 et 16, de l'autre, e^2 et 25, soient des nombres premiers entre eux; chose que, j'en suis persuadé, M. Frenicle sait parfaitement.

Quant à la faute de calcul qu'il signale, je la reconnais; je l'avais déjà remarquée depuis longtemps et corrigée sur ma minute; si elle ne l'a pas été sur la lettre même, il n'y a là qu'un lapsus dû à la trop grande précipitation de ma plume, et n'importe qui peut le corriger d'après le contexte. S'il en trouve d'autres pareils, j'espère qu'il les excusera de même, à charge de revanche. Car il a commis une semblable erreur, si je ne me trompe, page 4 de son *Inquisitio*. Pour le second cube, il met 653359 au lieu de 655359 pour le compte des parties aliquotes. Or là le lecteur n'est pas averti par le sens de la phrase, et l'erreur ne peut être remarquée que par quelqu'un qui sache calculer les parties aliquotes d'un grand nombre et reprenne l'opération dès le début.

Enfin, pour le problème de Fermat, du nombre cube qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fait un carré, je l'ai débrouillé dans ma dernière lettre en date du 4 mars; votre très noble Correspondant n'a donc plus à insister sur ce sujet. Pour que d'ailleurs il ne me reproche pas encore de donner seulement les méthodes, et non des nombres qui, au moins, soient différents des siens, j'ai mis ci-dessous six cubes tels que, ajoutés chacun avec leurs parties aliquotes, ils donnent des carrés :

Racines des cubes.	Racines des carrés.
$2\times3\times5\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{12}\times3^{3}\times5^{2}\times7\times13\times17\times29^{2}\times37$
$2\times3\times5\times7\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{14}\times3^{3}\times5^{3}\times7\times13\times17\times29^{2}\times37$
$3^{3}\times5\times11\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{13}\times3^{3}\times5\times7\times11\times13\times17\times29^{2}\times37\times61$
$3^{3}\times5\times7\times11\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{15}\times3^{3}\times5^{2}\times7\times11\times13\times17\times29^{2}\times37\times61$
$17\times31\times47\times191$	$2^{10}\times3^{2}\times5\times13\times17\times29\times37$
$7\times17\times31\times47\times191$	$2^{12}\times3^{2}\times5^{2}\times13\times17\times29\times37$

J'ajoute que le second et le quatrième de ces cubes satisfont à la question des deux cubes posée par Frenicle, au bas de la page 3 de son *Inquisitio*.

Ce que je pense des recherches de ce genre sur les nombres, je l'ai déjà dit, et je ne répète pas à quel point c'est malgré moi que je m'y laisse entraîner. C'est là, il est vrai, une excuse que je ne devais pas invoquer quand il s'agissait de satisfaire aux sollicitations pressantes de deux clarissimes savants, et, avant tout, d'exécuter vos ordres. Mais cependant, si je puis le dire sans les blesser, je ne vois pas ce qui pourrait mieux profiter réellement à la Science que l'exposé méthodique qu'ils pourraient faire au monde savant de ce qu'ils regardent comme leur appartenant en propre, plutôt que de proposer à d'autres, ainsi qu'ils l'ont fait, de trouver à nouveau ce qu'ils pensent avoir inventé; ils ne retireraient pas moins de gloire d'une façon que de l'autre. Je vous salue, très noble Seigneur, et je vous prie de continuer à accorder vos faveurs à

Votre très humble et très obéissant serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 15/25 mars 1657/8.

Sir, je vous demande la permission d'ajouter un mot. Nous avons pensé à publier toute cette Correspondance que nous venons d'avoir en France, si toutefois vous donnez votre approbation à cette idée et si vous la croyez bonne (l'avance prise sur nous par M. Frenicle nous fait juger la chose nécessaire); toutefois, il peut convenir d'omettre dans vos lettres un ou deux passages, où vous établissez une comparaison entre ... et ..., et dont je ne sais pas si vous ne regretteriez pas la publication. Si vous voulez bien m'honorer de vos ordres, j'aurai soin de m'y conformer exactement.

LETTRE XXIX.

Wallis a Vicomte Brouncker.

Il y a quatre jours, très illustre Seigneur, que je vous ai envoyé une réponse à la seconde lettre de M. Frenicle; j'ai écrit cette réponse à la hâte après dîner le jour même où j'ai reçu la lettre, le courrier devant partir dès le lendemain matin; je n'ai donc eu le temps de vous rien dire à ce sujet. A quel point M. Frenicle épluche, rabaisse, raille et méprise tout ce qui vient de nous, vous n'avez pas besoin qu'on vous le fasse remarquer, et qu'il le fasse d'ailleurs sans motif, vous le savez très bien. Faut-il l'attribuer au caractère de l'homme ou à celui de sa nation, je ne le rechercherai pas; je pense même qu'il est préférable de ne pas faire attention à ce qui regarde ses procédés; car aux yeux des hommes sérieux, au moins en Mathématiques, tout cela n'a aucune signification, et tout cela s'évanouira, de son propre aveu, dès qu'il aura vu nos lettres précédentes, si du moins vous avez transmis celle que je vous ai adressée le 20 janvier, et qui développe amplement l'appendice de celle du 17 décembre.

Vous vous souvenez, je pense, de la chaleur qu'il a mise, dans sa première lettre, à repousser notre réponse aux deux premières questions de Fermat; il soutenait qu'en indiquant l'*unité*, je ne donnais ni un *carré* ni un *cube*. Vous pouvez donc voir combien il est peu d'accord avec lui-même, quand dans sa seconde lettre, comme s'il avait oublié sa cavillation, il donne à son tour l'unité comme un cube, puis comme un carré, une et deux fois.

Vous n'ignorez pas non plus avec quelle confiance il se persuade que nous n'avons pu, que nous ne pouvons encore résoudre *à son sens* ni ces deux questions de Fermat, ni même la troisième; comment il nous insulte en vérité, triomphant de nous et s'en jouant comme d'enfants.

Mais vous savez aussi combien vaine est cette confiance, puisque nous avons satisfait, même à son sens, à toutes ces questions. Pour ma part, j'attendrai en silence qu'il sonne sa retraite, quand il aura reconnu qu'il a sonné la marche triomphale avant la victoire. Cependant vous pourrez ajouter à ma dernière lettre, si vous ne l'avez pas encore expédiée, ces deux nombres qu'il demande, dans le cas où votre lettre antérieure se serait perdue par quelque hasard :

$$313 \times \overline{1\,819\,380\,158\,564\,160}^2 + 1 = \overline{32\,188\,120\,829\,134\,849}^2,$$

$$151 \times \overline{140\,634\,693}^2 + 1 = \overline{1\,728\,148\,040}^2.$$

Mais vous pouvez voir que les soupçons du clarissime savant ne se rapportent pas seulement aux questions de Fermat, mais aussi aux nôtres. Il désire absolument savoir ce que j'ose affirmer sur le problème que j'ai proposé en passant, *des deux carrés qui, étant ajoutés chacun avec ses parties aliquotes, font la même somme;* il nous croit peut-être assez peu dégrossis pour ne pas comprendre nos propres questions. Il ne fait pas seulement cette réclamation dans sa première lettre, mais il y revient par l'intermédiaire du très noble Digby. Vous voyez ce que j'ai dit là-dessus, quoique je pense qu'il est à la charge de celui qui résout le problème, de déterminer si la question est susceptible ou non de l'être; mais comme il m'interrogeait là-dessus, j'ai répondu qu'elle est soluble; j'ajouterai même, s'il le veut, qu'elle est soluble à son sens. De plus j'ai montré que non seulement 16 et 25, nombres que j'avais donnés, satisfont à la question, mais qu'il en est de même des équimultiples de ces nombres par un carré quelconque premier avec chacun d'eux, comme, par exemple, 16×9 et 25×9, ou encore 16×49 et 25×49, etc.

Il répondra peut-être que cette solution n'est pas légitime et ne convient pas à un homme de science. Mais pourquoi cela? Parce qu'elle est facile et qu'elle revient simplement à multiplier par 2, 3 ou quelqu'autre nombre, etc. Mais un problème n'en est pas moins résolu, pour être facilement résolu. Il dit qu'étant donné le triangle rectangle 3, 4, 5 (c'est-à-dire un triangle dont les côtés soient respectivement proportionels aux nombres 3, 4, 5), si l'on en demandait un autre pareil (entendant dont les côtés fussent exprimables en nombres rationels), il ne suffirait pas de fournir le multiple 6, 8, 10 : peut-être bien, car alors ce ne serait pas un triangle d'espèce différente, mais bien identique, puisque si les côtés sont respectivement proportionels aux nombres 3, 4, 5, ils le sont également à 6, 8, 10, etc. : cependant si, étant donnés les trois nombres 3, 4, 5, dans lesquels le carré de l'un est égal à la somme des deux autres, on en demandait d'autres pareils, on répondrait très bien et tout à fait en mathématicien, que les doubles, les triples, les quadruples et les autres équimultiples quelconques de ces nombres ont la même propriété; car on ne peut nier que ce ne soient là d'*autres nombres*. Et celui qui ne voudrait pas de cette réponse devrait l'exclure par une condition expresse, ou autrement on le regarderait comme ayant proposé sa question d'une façon imparfaite et peu exactement; car les problèmes mathématiques sont de droit strict, comme le sait bien le clarissime savant. Il est certain qu'au contraire celui qui saisit la possibilité d'une réponse aisée ne doit pas être accusé de l'avoir fait; il faudrait plutôt le traiter de peu clairvoyant, s'il ne le faisait pas. Et en vérité, si le clarissime savant ne reconnaît pas la vérité de ce que je dis, je ne puis que m'étonner de sa subtilité. Quant à moi, s'il avait ainsi répondu à mon problème, comme je n'avais pas exclu cette réponse, je serais si loin de ne pas la considérer comme satisfaisante, qu'au contraire j'attribuerais à une simple inadvertance qu'il ne la fît pas. C'est absolument comme si, à qui demanderait un nombre divisible par 2 et par 3, il donnait 126, 132, en négligeant 6 et 12.

Mais si vous me demandiez vous-même s'il n'y a pas encore d'autres carrés, en dehors de 16, 25 et leurs équimultiples, qui jouissent de la même propriété, je vous répondrais ouvertement, très illustre Seigneur, et même si vous jugez bon de ne pas le tenir plus longtemps dans l'incertitude, je ne refuse nullement que vous informiez Frenicle qu'il y en a encore d'autres et en très grand nombre, en sorte que je ne suis nullement tenu de les donner. Mais, pour ne pas paraître dire cela sans preuve, j'ajoute que les carrés des nombres $8 \times 3 \times 37$ et $2 \times 19 \times 29$, ajoutés chacun à ses parties aliquotes, font la même somme; ce qui sera de même également vrai pour leurs multiples par un carré quelconque premier avec chacun d'eux.

Racines des carrés.	Somme des carrés et de leurs parties.
$8 \times 3 \times 37$,	$127 \times 13 \times 3 \times 7 \times 67$,
$2 \times 19 \times 29$,	$7 \times 3 \times 127 \times 13 \times 67$.

De même

$3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$,	$13 \times 31 \times 7 \times 19 \times 3 \times 127 \times 3 \times 7 \times 67$,
$7 \times 8 \times 29 \times 67$,	$3 \times 19 \times 127 \times 13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Si Frenicle se plaint encore que ces carrés ne soient pas deux à deux premiers entre eux, je ne vois pas ce que cela peut faire pour la question dont il s'agit, en tant qu'ils ne sont pas équimultiples de 16 et 25, et ce sont, je crois, les seuls qu'il prétendait exclure; mais en voici deux autres, premiers entre eux :

$(2 \times 3 \times 5 \times 37)^2$,	$7 \times 13 \times 31 \times 3 \times 7 \times 67$,
$(29 \times 67)^2$,	$13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Deux autres encore, premiers de même entre eux :

$(3 \times 5 \times 11 \times 19 \times 37)^2$,	$13 \times 31 \times 7 \times 19 \times 3 \times 127 \times 3 \times 7 \times 67$,
$(7 \times 8 \times 29 \times 67)^2$,	$3 \times 19 \times 127 \times 13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Si, en dehors de ceux-là et de leurs multiples (comme je l'ai dit), on en désire encore d'autres, on peut les chercher à peu près par la même méthode (*mutatis mutandis*) que celle que j'ai employée pour rechercher un cube qui, ajouté à ses parties aliquotes, fît un carré. Si jamais ceci tombe sous les yeux de Frenicle, il donnera, je crois, son assentiment et à l'avenir, ses jugements seront plus réservés; il ne pensera plus que ce qui lui appartient soit tellement à lui que d'autres ne puissent y parvenir; c'est ainsi que, si je ne me trompe, Fermat a déjà reconnu ce qui en est.

Quant à ce qui regarde ces deux très nobles savants, Fermat et Frenicle, et les relations que nous avons jusqu'ici eues avec eux, relations dans lesquelles leur première attente a sans doute été trompée, ils me paraissent, autant que j'en puis juger par leurs lettres, d'un caractère opposé. Pardonnez-moi, si je vous exprime librement ma pensée, confiant dans votre indulgence accoutumée. Je crois Frenicle plus adonné à l'Arithmétique, recherchant les questions particulières (qui ne se ramènent que très difficilement ou même ne peuvent se ramener à une équation universelle, embrassant tous les différents cas), et spécialement celles qui concernent les parties aliquotes; aussi a-t-il laissé sans y toucher tout ce que nous avons fait en Géométrie. Fermat au contraire n'est pas moins habitué aux questions géométriques; il recherche des règles générales ou des théorèmes universels; et peut-être reconnaîtrait-il plus volontiers le mérite d'un adversaire. Peut-être l'un a davantage la gravité des Espagnols, dont il est voisin, l'autre la vivacité française. Je reconnais volontiers la pénétration de leur esprit et leur haute valeur; cependant (quoi qu'on puisse penser de moi), je ne crois pas qu'ils aient à dédaigner notre nation, si ce n'est en ce que nous serions moins fanfarons.

Vous voyez, très insigne Seigneur, avec quelle liberté j'en use avec vous, grâce à votre bonté qui me le permet. Mais il ne faut pas que cette liberté semble dégénérer en une trop grande licence, et je cesserai de vous importuner plus longtemps, quand j'aurai fait profession d'être,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble, très obéissant
et très respectueux

John Wallis.

Oxford, 19/29 mars 1657/8.

LETTRE XXX.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

Sir, les papiers que je vous adresse ci-joint m'ont été envoyés, depuis un jour, par le Dr Scarbrough. J'imagine, à les voir, que M. Frenicle a chez lui une grande Table de nombres (carrés, cubes, etc.) avec la décomposition en facteurs premiers de la somme de chacun d'eux et de ses parties aliquotes; ce qui lui rend aisées de pareilles solutions, presque à la simple inspection, en suivant d'ailleurs la méthode que vous avez dernièrement indiquée pour résoudre ces problèmes et qui est universellement applicable à tous ceux de même nature. Mes hommages à votre femme, et soyez bien assuré que je suis,

Sir, votre très fidèle ami et
humble serviteur,
Brouncker.

6/16 avril 1658.

LETTRE XXXI.

Frenicle a Kenelm Digby.

Voici, comme vous me l'avez demandé, très honoré Chevalier, quelques solutions du problème du clarissime savant Wallis; il n'y a pas là toutes celles qui se sont présentées à moi, car elles sont si nombreuses que je ne serais pas parvenu à les écrire. Pour plus de brièveté, j'avais jugé à propos de réduire le calcul à peu de nombres qui devaient me les fournir; mais de ce peu de nombres j'ai vu sortir tant de solutions si variées que j'ai été obligé d'y mettre une borne, car les premières en faisaient naître toujours de nouvelles, indéfiniment diversifiées; de la sorte, je n'ai pu, en aussi peu de temps, les ranger dans l'ordre que je m'étais proposé, ce que je ferai, avec l'aide de Dieu, au premier jour.

Voici quel était le problème : *Trouver deux carrés, tels que chacun* *d'eux, ajouté avec toutes ses parties aliquotes, fasse une même somme.* Comme exemple étaient donnés les carrés 16 et 25, dont chacun, ajouté à ses parties aliquotes, fait 31. On en demande d'autres semblables.

Ainsi on ne demande qu'un couple d'autres carrés, ce qui ne présente évidemment aucune difficulté, si, pour ce problème, on admet les carrés multiples. Or Wallis n'aurait pas, pour lui, le droit de les refuser, puisque pour un certain problème de M. Fermat, relatif à un nombre, somme de deux cubes, à décomposer en deux autres cubes (comme 1729, somme des deux cubes 1 et 1728, peut être décomposé en deux autres cubes 729 et 1000); puisque, dis-je, pour la solution de ce problème très facile, il s'est contenté de fournir des multiples de nombres communiqués.

Voici donc une règle qui permettra de résoudre facilement le problème de M. Wallis. Qu'on multiplie les carrés 16 et 25 par un autre carré quelconque impair et non divisible par 5; on aura deux nouveaux carrés satisfaisant à la question. Ainsi les carrés des nombres 12 et 15, 28 et 35, 36 et 45, 44 et 55, 52 et 65, etc., forment des solutions. Qu'on ajoute, en effet, à ses parties aliquotes chacun des carrés 144 et 225, on a pour somme 403. Les carrés 784 et 1225 font, de même, 1767. Les carrés 1296 et 2025 feront, toujours chacun avec les parties aliquotes, la somme 3751; et ainsi des autres. Mais cette solution est indigne d'un mathématicien, et la question, entendue dans ce sens, est telle qu'elle n'aurait pas dû être proposée. Il faut donc croire que, dans son problème, M. Wallis a eu une autre intention, et qu'il s'attend à une autre solution, sans pouvoir consentir à celle-ci.

Supposons donc le problème proposé comme suit :

Trouver deux carrés premiers entre eux, tels que chacun d'eux, ajouté avec ses parties aliquotes, fasse une même somme.

Voici maintenant les côtés de carrés satisfaisant à la question.

Si, en effet, on ajoute à ses parties le carré du nombre 326, on a pour somme 187131; de même, le carré du nombre 407, ajouté à ses parties, donne la même somme 187 131. Après les six premiers couples, cette somme est donnée par ses facteurs.

[N. B. — *Il a paru désirable, pour la commodité du lecteur, de résoudre en leurs facteurs les nombres composés donnés par Frenicle, et, en même temps, de faire disparaître quelques fautes; on pourra ainsi, plus aisément, se rendre compte de tout le procédé et en examiner l'application.*]

Côtés des carrés.	Somme.	Côtés des carrés.	Somme.
326 (= 2.163) 407 (= 11.37)	187131 (= $3.7^2.19.67$)	146 311 (= 11.47.283) 147 823 (= 13.83.137)	24 126 447 513 (= 3.7.19.37.61.73.367)
627 (= 3.11.19) 749 (= 7.107)	658 749 (= 3.7.13.19.127)	361 232 (= $2^4.107.211$) 497 173 (= 19.137.191)	$3, 31, 37, \overset{7^2}{49}, 73, 127, \overset{13^2}{169}$
1510 (= 2.5.151) 1809 (= $3^3.67$)	4 980 801 (= $3.7^2.31.1093$)	111 408 (= $2^4.3.11.211$) 183 169 (= 7.137.191)	$3, 19, 31, 37, \overset{7^2}{49}, 73, \overset{13^2}{169}$
13 066 (= 2.47.139) 14 001 (= 3.13.359)	307 464 339 (= 3.7.13.37.61.499)	343 952 (= $2^4.7.37.83$) 507 419 (= 11.163.283)	$\overset{3^2}{9}, \overset{7^2}{49}, 67, 73, \overset{19^2}{361}, 367$
10 686 (= 2.3.13.137) 17 351 (= 47.373)	314 858 271 (= $3.7^2.13.37.61.73$)	724 152 (= $2^3.3.11.13.211$) 1 193 941 (= 7.19.47.191)	$7, \overset{3^2}{9}, 19, 31, 37, 61, 127, \overset{13^2}{169}$
....	....	....	....

[*suivaient ici 27 autres paires de carrés.*]

On peut trouver davantage de couples de carrés, mais il vaut mieux passer à autre chose; car on peut obtenir la même somme en ajoutant à leurs parties, non seulement des carrés pris deux à deux, mais aussi des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, etc. et d'ailleurs premiers entre eux. J'appelle *premiers entre eux* des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, etc., quand aucun nombre ne peut les diviser tous. Ainsi les carrés 9, 16, 225, 324 seront dits premiers entre eux, parce qu'il n'y a aucune mesure commune aux quatre, quoiqu'il y en ait trois qui aient 9 comme commune mesure.

Assemblages de trois carrés.

Côtés des carrés.	Somme.
245 828 ($=2^2.11.37.151$)	133 151 753 133 ($=3^2.7^3.19.31.67.1093$)
294 867 ($=3^3.67.163$)	
307 285 ($=5.11.37.151$)	

Côtés des carrés.	Somme.
589 734 ($=2.3^3.67.163$)	34 486 304 061 447 [nombre inexact, auquel
614 570 ($=2.5.11.37.151$)	il faut substituer
736 263 ($=3^3.11.37.67$)	932 062 271 931 ($=3^2.7^4.19.31.67.1093$)]

[*suivaient* 26 *autres groupes de* 3 *carrés*.]

Il me reste encore bien d'autres assemblages de trois carrés satisfaisant à la question et que j'ai bien trouvés, mais que le défaut de temps ne m'a pas permis de ranger de façon, très noble Seigneur, à vous les présenter; de même, pour les assemblages de quatre, cinq, six, etc., que vous recevrez, quand ils seront prêts, avec ceux de trois précités; cependant, pour vous donner au moins un ou deux exemples de ce que je vous promets, je mettrai ceux-ci en attendant les autres.

Assemblages de quatre carrés.

Côtés des carrés.	
($2^2.7.107 =$) 2996 [1]	Somme : 20 421 219 $= 3.7.13.19.31.127$
($2^2.3.11.19 =$) 2508	[*suivaient trois autres assemblages par*
($3.5.11.19 =$) 3135	*quatre*.]
($5.7.107 =$) 3745	

Assemblages par cinq.

139 954 381 710 ($=2.3.5.11.13.19.83.137.151$)
165 476 277 890 ($=2.5.7.11.47.107.151.283$)
167 186 334 770 ($=2.5.7.13.83.107.137.151$)
198 242 772 651 ($=3^3.7.11.47.67.107.283$)
200 291 443 443 ($=3^3.7.13.67.83.107.137$)

Somme...... $13.27.31.37.61.73.127.361.367.1093.2401$

(1) Frenicle avait donné, par faute de copie, 2296.

Assemblages par six.

79 588 991 130 (= 2.3.5.11.19.29.47.67.139)
82 718 076 012 (= 2^2.3.11.13.19.37.191.359)
95 075 206 310 (= 2.5.7.29.47.67.107.139)
98 813 140 244 (= 2^2.7.13.37.107.191.359)
103 397 595 015 (= 3.5.11.13.19.37.191.359)
123 516 425 305 (= 5.7.13.37.107.191.359)

Somme....... 19.27.37.61.67.127.499.961.2197.2401

Voici d'autres assemblages de carrés par deux, trois, etc.

[*suivaient ici de nombreux assemblages de carrés envoyés plus tard, à savoir : par deux,* 6; *par trois,* 52; *par quatre,* 20; *par cinq,* 3; *par six,* 5; *puis, par deux,* 5; *par trois,* 5; *par quatre,* 7; *par cinq,* 3; *par six,* 6; *par sept,* 4; *par huit,* 1; *par neuf,* 1; *puis, par cinq,* 1; *par six,* 3; *par sept,* 2; *par huit,* 2; *par neuf,* 3; *par dix,* 2; *par onze,* 1; *par douze,* 2; *par treize,* 2; *par quatorze,* 1; *par quinze,* 1; *par dix-neuf,* 1. *J'ai cru sans intérêt de les reproduire tous, pour ne pas remplir plusieurs feuilles de nombres; cependant, j'en ai relevé le compte, pour ne pas paraître vouloir faire tort à l'auteur.*]

[*Il s'est d'ailleurs, dans la Lettre XLIII, excusé sur la hâte de son travail de nombreuses fautes de calcul ou de plume, qui se sont glissées dans ses chiffres; cette excuse est d'autant plus valable qu'une partie de ces fautes peut être du fait du copiste. Remarquons toutefois que Frenicle s'est écarté de la règle qu'il nous avait proposée, à savoir que les carrés fussent premiers entre eux. Cela n'a pas lieu pour les siens; quand, par exemple, il propose un groupe de six carrés, il regarde comme suffisant qu'aucun même nombre ne divise tous les six, tandis qu'il n'y aura pas un seul couple de deux carrés premiers entre eux (ainsi qu'on le reconnaîtra immédiatement et comme lui-même l'avoue); c'est de la sorte qu'il a pu donner autant de groupes. En ce qui me concerne, dans mes solutions de la Lettre XXIX, pour composer les racines des carrés, je n'ai employé que les nombres premiers inférieurs à* 100, *jugeant inutile d'aller plus loin; et, dans ces limites, il n'y a pas d'autres combinaisons que celles que j'ai données. Toutes celles que Frenicle a données, ainsi que je l'ai vérifié,* *comprennent au moins un facteur premier supérieur à* 100 *et pouvant aller jusqu'à près de* 500 (*comme si pour des nombres inférieurs la combinaison était impossible*). *C'est ainsi qu'il a pu fournir autant de solutions.*]

LETTRE XXXII.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Vous avez eu la bonté de m'envoyer et j'ai reçu la semaine dernière, très illustre Seigneur, les solutions données par Frenicle au problème que j'avais jadis proposé sur les deux carrés qui font la même somme par l'addition avec leurs parties aliquotes. Je vois par là que le très noble savant a non seulement résolu cette question, mais qu'il y a pris beaucoup plus d'intérêt que je n'avais fait moi-même.

Sa première solution est la même que ma première; car un carré *impair non divisible par* 5 est exactement la même chose qu'un carré *qui soit à la fois premier avec* 16 *et avec* 25.

Quant aux autres solutions, je crois qu'elles ont absolument la même origine que les miennes, qu'elles ont été trouvées par une méthode tout à fait semblable ou du moins à peine meilleure.

Si ces solutions sont si nombreuses, il ne faut guère s'en étonner, du moment où il a jugé l'affaire digne de ses peines. Car si je ne me trompe, et comme vous le pensez aussi, il doit avoir à sa disposition une Table suffisamment étendue donnant jusqu'à peut-être 500 ou même au delà les carrés, cubes (peut-être même d'autres puissances) des nombres premiers, avec la décomposition en facteurs de la somme de chacun et de ses parties aliquotes; de la sorte il est facile, de la manière que j'ai indiquée, d'obtenir un certain nombre de solutions. Qu'après en avoir trouvé suffisamment, une personne aussi sagace puisse, en les combinant, transformant et mêlant ensemble de diverses façons, en déduire beaucoup d'autres, on ne peut en douter, dès que l'on sait de combien de manières on peut transposer sept ou huit lettres ou changer les rangs d'autant de cloches. Quoi qu'il en soit, je suis convaincu que la découverte de ce mystère, qui nous appartient, et d'où, avec ces problèmes, en découlent une infinité d'autres, ne sera pas moins agréable aux mathématiciens que ne le serait, sans l'indication de la méthode, l'énoncé de mille nombres de la sorte.

Au reste, je n'ai jamais pensé que Frenicle ne résoudrait pas cette question que j'avais proposée d'ailleurs à un autre que lui. Puisqu'il avait dès longtemps résolu celles de Fermat, il n'était pas douteux qu'il ne réussit aussi facilement sur la mienne, qui dépendait du même principe.

En tout cas, j'aurais préféré qu'il se fût au moins épargné la peine de former en nombres les racines des carrés par la multiplication successive des facteurs qu'il a évidemment trouvés tout d'abord; car il aurait été d'autant plus facile d'examiner, si on l'eût voulu, les nombres qu'il a donnés, ce qui ne peut maintenant se faire qu'en détruisant son travail; mais je ne m'embarrasserai pas de cet examen, qui n'est pas si important. Peut-être a-t-il craint que, s'il avait exposé la chose aussi simplement, j'en eusse conclu sa méthode qu'il croyait que j'ignorais.

D'autre part il lui a plu de changer la question que j'avais proposée, en introduisant la condition que les carrés à donner soient premiers entre eux. Il a voulu ainsi éviter qu'on eût la grande facilité de donner les multiples de 16 et 25, qui satisfont à la question, par un carré quelconque premier avec l'un et l'autre. Je ne regrette pas absolument cette condition, mais j'ai deux motifs pour ne pas la regarder comme tout à fait nécessaire. En premier lieu, la limitation dont il s'agit exclut plus de carrés qu'il ne faut, car il est clair que, même étant connus 16 et 25 comme satisfaisant à la question, il y a beaucoup d'autres carrés, même non premiers entre eux, dont la recherche n'est en rien facilitée par cette connaissance ou même par celle d'autres carrés premiers entre eux. Ainsi je le fais juge s'il est en rien plus facile de trouver $8 \times 3 \times 37$ et $2 \times 19 \times 29$ ou bien $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$ et $7 \times 8 \times 29 \times 67$ que j'ai donnés, quoiqu'ils ne soient pas premiers entre eux, que s'ils l'étaient. En second lieu, quoique la chose soit facile pour Frenicle (en tant qu'il sait qu'un nombre formé de deux ou plusieurs nombres premiers entre eux, si on l'ajoute à ses parties aliquotes, donne une somme égale au produit de ces nombres premiers entre eux, augmentés chacun de ses parties aliquotes; ce qui est le principal mystère dans les questions de ce genre), celui qui ignore ce principe n'aura pas plus de facilité pour reconnaître, comme propres à la question, les équimultiples des nombres donnés plutôt que d'autres carrés premiers entre eux; au contraire, celui qui connaît le principe n'aura pas beaucoup plus de facilité pour trouver la méthode de recherche applicable aux autres carrés premiers entre eux.

Enfin il donne non seulement des assemblages par deux, mais par trois, quatre, cinq, etc. Mais le très noble savant sait très bien que, à part la peine du calcul, il n'y a là rien de nouveau par rapport à la question que j'ai proposée; les assemblages de trois, quatre, etc., voire même de cent, se trouvent en effet par la même méthode absolument que ceux de deux; et même, dans le petit nombre de ceux que j'ai indiqués, il trouvera trois carrés remplissant la condition dont il s'agit; savoir ceux de $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$, de $3 \times 5 \times 11 \times 19 \times 37$ et de $7 \times 8 \times 29 \times 67$, puisque chacun d'eux, ajouté à ses parties aliquotes, donne comme somme

$$3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 13 \times 19 \times 31 \times 67 \times 127.$$

Il n'y aurait non plus rien de nouveau si ce que j'ai proposé pour les carrés l'eût été pour les cubes, bicarrés, etc.; si ce que j'ai proposé pour l'égalité des sommes l'eût été pour leur relation dans un rapport donné (possible). Dans des cas de ce genre, le calcul peut être plus long avant que le but soit atteint, mais les solutions dépendent toujours du même principe, et sont à chercher toujours par le même procédé; ce que sait parfaitement notre si sagace Correspondant. Cela peut au reste s'appliquer aux autres questions de ce genre en nombre infini.

Il me reste encore à vous dire que je viens précisément de recevoir de Hollande une lettre que m'a écrite M. Schooten et que je crois devoir communiquer à V. S. Après l'avoir lue, je suis absolument dans la croyance que la méthode dont s'est servie M. Frenicle pour la solution de la troisième question de Fermat (celle du carré dont le produit par un nombre donné non carré soit inférieur d'une unité à un carré) ne vaut pas celles qui ont été données d'ici, au moins la seconde. Je vois en effet qu'il a hésité sur le donné non carré 109, ce qui est clair même d'après son traité imprimé, où il dit que le carré qui se rapporte à ce nombre lui a été communiqué par M. Fermat; je vois aussi que cette méthode montrée, semble-t-il, à M. Huygens, lui a paru tellement pénible qu'il a reculé devant l'application; la nôtre au contraire est si commode qu'en très peu de temps elle peut fournir des nombres très considérables. Mais de fait je n'ai pas encore vu cette méthode de Frenicle, qu'il a jugé à propos de taire dans son Traité imprimé, et je n'en puis parler que par conjectures; je ne veux donc faire aucune affirmation téméraire. Quant à la lettre de Schooten, s'il plaît à V. S. qu'elle soit jointe aux nôtres lors de l'impression de celles-ci (ce qui me paraît intéressant et ce qu'il désire lui-même), je vous prie de me le faire savoir et m'empresserai d'accomplir, autant que possible, votre vœu, comme,

Très illustre Seigneur,

Votre très obéissant et très respectueux

John Wallis.

Oxford, 13/23 avril 1658.

LETTRE XXXIII.

François Schooten a J. Wallis.

Clarissime savant, l'exemplaire de la première partie de vos Œuvres mathématiques que vous m'avez destiné, en même temps qu'un autre pour Huygens, m'a été parfaitement remis par M. Thrommje; je vous en fais mes meilleurs remercîments, tandis que j'ai le chagrin de voir que mes *Exercitationes* ne vous ont pas été remises, quoique, au moment où elles ont paru, j'en aie donné un exemplaire à l'imprimeur, qui devait l'envoyer à Londres avec d'autres et le faire de là parvenir à Oxford à votre adresse et en mon nom. Je suis très heureux d'apprendre qu'elles ne vous ont pas déplu, et que vous avez également apprécié ce que le très noble Huygens a ajouté à la fin sur les raisonnements dans le jeu de dés. Votre jugement à cet égard nous est, plus que mille autres, un clair garant que nous n'avons ni l'un ni l'autre mal employé nos efforts en essayant soit de rétablir soit de pousser plus avant les Mathématiques. Mais surtout je suis charmé du mutuel accord qu'on peut immédiatement remarquer entre vos écrits et les miens, comme en autres choses sur ce que nous avons dit l'un et l'autre des progressions et où l'on dirait que nous nous étions communiqué nos pensées à l'avance.

Vous me parlez des questions de Fermat proposées l'année dernière à tous les mathématiciens de l'Europe. Voici ce qui m'est arrivé à ce sujet. Ce fut le 26 janvier de l'année passée que le très illustre M. Guillaume Boreel, député auprès du Roi de France Très Chrétien par les Provinces-Unies, envoya de Paris aux professeurs de Mathématiques de l'Académie de Leyde une lettre qui renfermait deux questions numériques avec ce titre (¹) :

« Deux problèmes mathématiques proposés, comme s'ils étaient insolubles, aux mathématiciens de France, d'Angleterre, de Hollande et du reste de l'Europe, envoyés le 3 janvier 1657 par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse, à M. Claude Martin de Laurendière, Docteur Médecin, et reçus par celui-ci le 21 janvier. »

« Premier problème. — *Trouver un cube* (*voir* page 311, lignes 21 à 25) .... *propriété*. »

« Second problème. — *On demande* (*voir* page 311, lignes 26 à 27) .... *un cube*. »

Cette lettre fut reçue par M. Golius le 7 février, la veille du jour où

(¹) *Voir* la Pièce 79 de la *Correspondance de Fermat*, T. II, p. 332.

il devait déposer les fonctions de Recteur Magnifique; il l'ouvrit en ma présence seulement le 11 du même mois. J'y fis alors la réponse suivante et aussitôt après l'avoir communiquée à M. Golius, je l'adressai le 17 février audit M. Boreel à Paris, avec une lettre de transmission et deux problèmes sur le même sujet que je proposais en retour à M. Fermat (¹).

« Réponse aux questions proposées aux mathématiciens de toute l'Europe par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse. »

« Pour résoudre la première question, où il s'agit de trouver un nombre cube dont la somme avec les parties aliquotes fasse un carré, je cherche à partir de l'unité 4, 7, 10, 13 ou davantage de nombres en proportion continue (en augmentant successivement de 3 leur nombre), tels que leur somme fasse un carré; le dernier des termes proportionels sera le cube demandé. Quant au second terme proportionel, je prends successivement les différents nombres premiers, en commençant par les plus faibles. »

« Puisque les proportionels

$$1.2.4.8, \quad 1.3.9.27, \quad 1.5.25.125$$

donnent comme somme les nombres 15, 40, 156, qui ne sont pas carrés, ayant pris pour seconds termes de ces séries les nombres premiers 2, 3, 5, je prends maintenant pour second terme le nombre premier 7 et j'ai les proportionels : 1.7.49.343, dont la somme est 400, carré de côté 20. Je trouve ainsi que 343 est de tous le plus petit cube qui satisfasse à la question; c'est d'ailleurs celui qui a été donné par M. de Fermat. Prenant ensuite toujours quatre proportionels différents, et employant successivement tous les nombres premiers de 2 à 97, je n'ai rencontré aucun autre carré que celui déjà indiqué; et j'ai reculé dès lors devant la poursuite de ces calculs, *ne pouvant*

(¹) La Lettre qui suit se trouve également publiée (en latin) dans le Tome II des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens* (nº 377 de la Correspondance).

d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour parvenir sûrement au but (1). »

» Si l'on prend de même sept proportionels

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.,
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.,
etc.;

les sommes 127, 1093, etc. ne sont pas carrées; mais je n'ai pas eu le courage d'entreprendre de plus longues recherches sur 7 proportionels et la fatigue des calculs m'a de même empêché de les tenter sur 10, 13, 16 ou plus de proportionels. Mais je n'en ose pas moins juger que, quoique les cubes en question doivent être en nombre infini, à ce que je pense du moins, personne ne peut en trouver facilement au delà d'un certain nombre, comme 5 ou 6, eu égard à la grande distance qui les sépare. »

« M. de Fermat reconnaîtra d'ailleurs que le moyen de trouver ainsi ces nombres est infaillible, dès qu'il saura que, pour déterminer les proportionels précités, je me sers des expressions analytiques a^3, a^6, a^9, a^{12}, etc., ou s'il s'agit de nombres ayant 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69 ou 75 etc. parties aliquotes, je me sers, en outre des notations précédentes, de celles-ci : $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, $a^9 b^3$, $a^6 b^6$, $a^{12} b^3$, $a^3 b^3 c^3$ ou $a^{15} b^3$, $a^9 b^6$ ou $a^{18} b^3$, etc., comme pouvant être utiles pour cette affaire, c'est-à-dire pour représenter les nombres cubes à trouver. Mais, comme ces expressions indiquent, pour trouver les nombres cherchés, des calculs encore plus fastidieux, je ne crois guère que cette voie puisse être heureusement tentée. Mais je n'ajouterai rien, car, en dehors des moyens indiqués, il n'en existe pas pour trouver certainement ces nombres, à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé, pour établir les égalités, quelques abrégés qui pourraient diminuer singulièrement l'embarras de cet examen; il ferait certes, en les communiquant, une chose qui me serait très agréable. »

(1) Les mots en italique sont indiqués comme à supprimer.

« De même pour résoudre la seconde question, où on demande un carré tel que sa somme avec ses parties aliquotes fasse un cube, je cherche à partir de l'unité 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. ou davantage (en augmentant toujours par 2) de nombres en proportion continue, tels que leur somme fasse un cube, et, pour second terme, j'essaye un nombre premier quelconque, comme il est indiqué par

$$1.a.a^2.1.a.a^2.a^3.a^4.1.a.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6.\text{ etc. »}$$

Si, en effet, cette somme est un cube, le dernier proportionel sera le carré cherché. Ainsi je me sers de a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, etc. pour trouver les nombres ayant 2, 4, 6, 8, 10 parties aliquotes, ou bien encore de a^2b^2 pour ceux qui en ont 8, de a^4b^2 pour 14 parties, a^6b^2 pour 20, a^4b^4 pour 24, $a^2b^2c^2$ ou a^8b^2 pour 26 parties, etc. Mais, comme ces dernières expressions correspondent à des modes de recherches de plus en plus difficiles pour ces carrés, j'ai peine à croire qu'elles puissent servir heureusement pour parvenir au but proposé. »

» En montrant l'existence de tous ces modes, par lesquels il est évident que l'on peut certainement obtenir les nombres cherchés, pourvu qu'on ne recule pas devant le travail d'examiner successivement, comme j'ai dit ci-dessus, tous les nombres premiers en commençant par les plus petits, j'espère avoir satisfait pleinement au désir du clarissime Fermat. »

« Écrit à Leyde, le 17 février 1657, par moi, François van Schooten, professeur de Mathématiques à l'Académie de Leyde. »

Suivent (1) deux problèmes du même genre, proposés en retour à M. de Fermat :

« Premier problème. — *Trouver deux cubes dont la somme fasse un cube ou, s'il ne peut les obtenir, montrer que le problème est impossible.* »

« Deuxième problème. — *Montrer si l'on peut, ou non, trouver d'autres nombres parfaits que ceux que fournit la méthode d'Euclide* (IX, prop. dern.), *c'est-à-dire la progression suivant la raison double.* »

(1) Pièce 378 de la *Correspondance de Huygens*.

Voilà ce que j'ai répondu alors, et les questions que j'ai proposées à mon tour.

En traitant ces questions, je m'étais seulement proposé d'indiquer à leur auteur la façon dont elles devaient être résolues. Il sera facile à votre perspicacité de reconnaître que j'atteignais ce but, puisqu'on ne peut donner aucun nombre qui ne soit pas soumis à quelqu'une des conditions précitées (comme on peut le déduire de mes *Exercitationes,* section 3), ou ne puisse être trouvé par les modes indiqués. Quant aux nombres eux-mêmes, ils ne me paraissaient pas avoir tant de valeur que la méthode pour les trouver certainement ne dût suffire à M. de Fermat. C'est aussi ce que j'avais surtout en vue pour les deux problèmes ajoutés par moi, en sorte que, si les nombres que je demandais ne se rencontraient pas aisément, il suffît de montrer l'impossibilité du premier problème, et de prouver que le second ne peut être résolu par un moyen différent de celui d'Euclide. Mais à tout cela, rien que je sache ne m'a été répondu par M. Fermat, ou du moins aucune réponse ne m'est parvenue; je n'ai pas cru cependant devoir aucunement le presser à ce sujet, afin de ne pas sembler prétendre à une grande gloire pour la solution d'un problème qui n'a évidemment aucun usage, ni aucune utilité. Ainsi je ne sais même pas si M. de Fermat a reçu ou non ma réponse, ni quel jugement il a porté sur elle dans le cas où il l'aurait reçue.

J'avoue d'ailleurs qu'à cette époque il ne m'est venu à l'esprit aucun des abrégés qui auraient pu, comme je le croyais, servir à diminuer considérablement le travail; c'est pour cela que je disais à Fermat, qui, sans aucun doute, devait posséder ces abrégés avant tout autre, que, s'il en connaissait de généraux touchant cette matière, il ferait une chose très digne de reconnaissance s'il voulait bien nous les communiquer.

Après avoir ainsi résolu les questions de Fermat, j'ai cru devoir les communiquer au clarissime M. Hudde et lui proposer de les résoudre. Voici ce qu'il me répondit, le 23 février, d'Utrecht où il était alors :

« Quant aux questions proposées par M. Fermat et à la solution que

» vous en avez donnée, j'avoue que les problèmes ne me déplaisent » pas, mais qu'il n'en est pas de même de la raison par laquelle vous » vous efforcez de me persuader que je dois, moi aussi, m'efforcer » d'en chercher la solution; à mon avis, ce qui est le plus nécessaire » et utile doit passer avant ce qui l'est moins; si donc j'ai encore » quelque loisir à consacrer à la Science, j'ai la confiance de pouvoir » le dépenser sur des questions, non seulement beaucoup plus utiles, » mais aussi beaucoup plus générales et plus intéressantes, et qui » semblent promettre une gloire plus brillante au savant qui les étu- » diera. Aussi je n'ai pu prendre sur moi de m'appliquer à la solution » de ces problèmes; cependant, pour l'amour de vous seul, je me suis » résolu, au détriment de tous mes autres travaux, à leur consacrer la » journée d'hier pour vous faire part de ce que je parviendrais à dé- » couvrir, pour l'abrègement du travail, et cela dans le cas où vous » n'auriez pas encore envoyé votre réponse à Paris.

» Voici la règle que j'ai choisie entre beaucoup et que j'emploierais » pour la solution de la première question, où il s'agit de trouver un » nombre cube, tel qu'ajouté à toutes ses parties aliquotes, il fasse un » carré. Qu'on prenne un carré (en commençant par les plus petits), » tel que son double, moins l'unité, soit un nombre premier; que de » ce dernier nombre on retranche 1, et qu'on multiplie le reste par le » carré que l'on a pris, ou bien, ce qui revient au même, par la plus » grande moitié de ce nombre premier. Si, en ajoutant 1 au produit, » on a un carré, le nombre premier précité sera le côté du cube » cherché.

» Par exemple :

Racine.	Carré.	Double carré moins 1. — Nombre premier.	Nombre premier moins l'unité	par le carré ou la plus grande moitié du nombre premier	donne	qui plus 1 donne
2	4	7	6	4	24	25, carré; donc 7 est le côté du cube demandé.
3	9	17	16	9	144	
4	16	31	30	16	480	
5	25	»	»	»	»	
6	36	71	70	36	2520	
7	49	97	96	49	4704	
8	64	127	126	64	8604	
9	81	»	»	»	»	
10	100	199	198	100	19800	
11	121	241	240	121	29040	
12	144	»	»	»	»	
13	169	337	336	169	56784	ne donnent pas de carré.
14	196	»	»	»	»	
15	225	449	448	225	100800	
16	256	»	»	»	»	
17	289	577	576	289	166464	
18	324	647	646	324	209304	
19	361	»	»	»	»	
20	400	»	»	»	»	
21	441	881	880	441	388030	
22	484	967	966	484	467544	
23	529	»	»	»	»	

» Les places vides dans ce Tableau sont celles qui ne correspondent » pas à des nombres premiers, comme le demande la règle; mais, ce » qui peut-être excitera votre étonnement, tous les nombres corres- » pondant à ces places sont divisibles soit par 7, soit par 17. En tous » cas, si j'ai bien calculé, il est certain par là qu'au-dessous du » nombre cube de 1150, soit 1520875000, il n'y a qu'un seul cube, » 343, qui satisfasse à la question, en ne comptant toutefois que ceux » qui ont trois parties aliquotes, c'est-à-dire ceux auxquels la règle » est appropriée.

» En effet, le premier nombre que nous trouverions ensuite est su- » périeur à 1150, tandis que le côté 7 du cube 343, trouvé par le pre-

» mier carré, est précisément celui du cube donné par l'auteur comme » satisfaisant au problème.

» Maintenant, quand je pèse vos paroles : *Prenant ensuite, etc.* » (p. 556/7) ... *sûrement au but,* je n'ai aucun doute que le procédé » que j'ai indiqué ne soit plus facile pour atteindre le résultat proposé, » puisque je suis arrivé à 1151 en une heure et demie environ; et, si » j'avais eu sous la main votre Catalogue des nombres premiers, je me » serais épargné à peu près la moitié du travail. Aussi il vous sera » facile, si vous le jugez intéressant, de poursuivre la recherche pour » des nombres encore plus grands.

» Le calcul suivant indique comment j'ai trouvé cette règle :

» Soit a^3 le nombre cube à trouver, a étant un certain nombre pre- » mier.

» Les parties aliquotes de ce cube sont 1, a, a^2, dont la somme » avec a^3 fait $1+a+a^2+a^3$, qui doit être égale à un carré.

» Posons donc

$$1+a+a^2+a^3=[(1+a)b]^2;$$

» divisant, de part et d'autre, par $1+a$:

$$1+a^2=(1+a)b^2;$$

» d'où $\dfrac{1+a^2}{1+a}=b^2$ ou $a-1+\dfrac{2}{a+1}=b^2$.

» Mais, puisque a doit être un nombre premier, $\dfrac{2}{a+1}$ pourra être » divisé par 2 (haut et bas). D'ailleurs cette fraction, ajoutée à l'en- » tier $a-1$, ne pourra, comme il le faut, donner un carré, si son dé- » nominateur $\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2}$ n'est pas lui-même un carré. On tire de là une » grande simplification, puisque tout d'abord il suffit de faire que » $\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2}$ soit carré, c'est-à-dire que $a+1=2\square$ ou $a=2\square-1$. C'est » de là que j'en viens à dire dans ma règle : *Qu'on prenne un carré* » *tel que son double moins l'unité soit un nombre premier,* et que je passe » celui qui n'a pas cette propriété, comme ne pouvant servir pour le » but proposé. Cet artifice permet de diminuer singulièrement le tra-

» vail, non seulement pour a^3, mais encore pour les autres expres-
» sions. »

» Voilà, mon très cher ami, à quoi mon temps s'est dépensé, en » sorte que, pour la solution de l'autre problème, je n'ai rien qui vaille » la peine de vous être communiqué, non plus que pour les autres » modes de chercher les cubes, soit par a^6, a^9, a^{12}, etc., soit par $a^3 b^3$, » dans les cas où les parties aliquotes ne forment pas une progression, » comme dans les précédents. »

Quand j'ai reçu cette Lettre, j'avais déjà envoyé la mienne à Paris; mais j'apprenais qu'entre 1 et 1 520 875 000 on ne peut trouver aucun cube, sauf celui déjà connu 343, en se servant de la voie la plus facile, celle de a^3; les autres voies par a^6, a^9, etc. ou $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, etc., devant être regardées comme plus difficiles, nous avons pensé, moi et M. Golius, qui s'était également proposé de résoudre ces problèmes, devoir nous abstenir de recherches numériques ultérieures, jugeant que nous pouvions mieux employer de bonnes heures aux Mathématiques.

Peu de temps après, à savoir le 9 mars, j'ai reçu de la Haye une lettre du très noble Huygens, laquelle en renfermait une autre à moi adressée de Paris par M. Mylon, jurisconsulte, et en même temps une page redemandée depuis par Huygens, qui m'écrivait là-dessus (1) :

« Voici une lettre pour vous de notre ami Mylon, et aussi une page » dont il a voulu que je prisse également connaissance; je vous » prierai, en raison des questions de M. de Fermat, de me la ren- » voyer à votre commodité. »

Voici ce que contenait cette page (2) :

« M. de Fermat a proposé à tous les arithméticiens par M. Digby,

» 1. Trouver un cube (*voir* page 311, lignes 21 à 25) .... la même » propriété.

(1) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 375.
(2) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 374.

» 2. On demande aussi (*voir* page 311, lignes 26 à 27) .... fasse » un cube.

» M. de Frenicle a résolu ces questions et M. Martin, qui en a les » solutions, les fait imprimer, à ce qu'on m'a dit.

» Depuis [1] peu M. de Fermat a écrit ceci à M. de Frenicle.

[Suit la pièce LXXX de la *Correspondance de Fermat*, Tome II, page 333.]

» A quoi M. de Frenicle a envoyé l'ordre qu'il tient pour résoudre » ces questions, dont le calcul est extrêmement long. »

En répondant là-dessus à Huygens et à Mylon, je priai M. Mylon de présenter à M. Frenicle mes très respectueuses salutations et en même temps j'envoyai la page 426 de mes *Exercitationes,* page que je venais d'avoir imprimée et où l'on peut voir combien je lui portais d'égards, à ce point que, pour ces questions auxquelles mes autres études ne m'avaient pas permis de consacrer assez de temps, je témoignais que je lui concédais volontiers la palme. Mylon répondit le 12 avril [2], et le 21 du même mois [3], Huygens m'envoya de la Haye cette réponse, où, entre autres choses, il disait :

« J'envoie à M. de Zuylechem les pensées de M. Frenicle touchant » les propositions numériques de M. de Fermat et vos solutions, et le » prie de vous en faire part. »

Voici quelles étaient ces pensées de M. Frenicle [4] :

« M. Frenicle trouve que c'est plus tôt fait d'examiner tous les » cubes de suite pour voir ceux qui satisfont (qui est la question » proposée par M. de Fermat) que de se servir de la méthode de » M. Schooten. Néanmoins, pour s'en servir, il donne ce théorème :

» Il n'y a aucune puissance dont la racine soit un nombre premier

(1) Correspondance de Huygens, n° 371.
(2) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 382.
(3) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 386.
(4) Correspondance de Huygens, n° 383.

» et l'exposant un nombre impairement pair, qui puisse avoir un » quarré pour la somme de ses parties.

» Donc M. Schooten doit exclure ces nombres de sa méthode. Il en » peut encore exclure beaucoup d'autres, savoir ceux où les propor- » tionelles sont en multitude impaire, car leur somme ne sera point » un quarré et n'a pas besoin d'être examinée, si le nombre de la pro- » portion n'est pareil à 79, 199 et autres dont il se trouve fort peu, » se trouvant plusieurs milliers de nombres où il n'y en a que cinq » ou six.

» Davantage le second nombre de la proportion continuelle doit » être un de cette progression (1)

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & 7. & 41. & 239. & 1393. & 8119. & 47321, \\ & a. & b. & c. & d, & & \end{array}$$

» et entre ceux-là il n'y aura que ceux qui auront ces deux pro- » priétés :

» La première, que ce soit un nombre premier;

(1) En cette progression

$$\begin{aligned} 6 \text{ fois } a - 1 &= b, \\ 6b - a &= c, \\ 6c - b &= d, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les nombres de la précédente progression se trouvent encore autrement par la seule addition, comme en celle qui suit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colonne *h* qui sont vis-à-vis des impairs de la colonne *g* qui soient utiles.

g.	*h*.
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
169	239
408	577
985	1393
2378	3363
5741	8119

La construction de cette Table est aisée par addition, car

$1 + 1$ font 2 en *g*
$2 + 1$ font 3 en *h*
$3 + 2$ font 5 en *g*
$5 + 2$ font 7 en *h*
$7 + 5$ font 12 en *g*
$12 + 5$ font 17 en *h*
etc.

(*Note de Frenicle.*)

» La seconde, qu'il soit moindre de l'unité qu'un double quarré.

» Or, par les lettres finales et autres propriétés des doubles quarrés, » on peut voir aisément qu'il n'y en a aucun qui puisse satisfaire, » outre 7, si le cube n'a plus de 60 lettres. Il se trouve par ces » deux propriétés qu'il n'y a que deux nombres à examiner s'ils » sont doubles quarrés pour aller jusqu'à la racine de ce cube de » 60 lettres. Et cet examen est d'ajouter 1 et prendre la racine » quarrée de la moitié, car les autres ou sont composés ou leurs » finales montrent qu'ils ne sont pas doubles quarrés moins 1.

» M. Frenicle propose ce problème :

» *Trouver un nombre triangulaire, dont le sextuple plus* 1 *soit nombre* » *cube*.

» J'écris de l'autre part ce que j'ai pu tirer sur-le-champ de M. de » Frenicle, touchant les propositions numériques de M. de Fermat; » je vous supplie d'en faire part à M. Schooten, etc.

» Voici la solution de M. de Frenicle pour les nombres suivants :

Pour 13	c'est le quarré de.........		649		Pour 33	c'est le quarré de......		<23>
» 19	»	»	170		» 37	»	»	73
» 17	»	»	33		» 41	»	»	2049
» 21	»	»	55		» 43	»	»	3482
» 23	»	»	24		» 47	»	»	48
» 29	»	quarréquarré de...	99		» 53	»	»	66249
» 31	»	quarré de.........	1520		» 59	»	»	530

» Pour 61, c'est le quarré de 1766319049, lequel quarré, étant » diminué de 1, donne le quarré de 226153980. Or le quarré qui » satisfait à 61 a 19 (1) lettres, quoiqu'il n'étoit besoin, pour le » trouver par la méthode de M. Frenicle, que de 5418, 11418, 23718 » et 29718.

» Pour 109, il n'y en a point au-dessous de 25 lettres.

» Pour 127, c'est le quarré de 4730624. »

Là-dessus, Huygens ajouta ce qui suit :

« Je vous laisse à examiner ce que Mylon m'a écrit des pensées

(1) Lisez 17.

» de M. Frenicle sur la question proposée par M. Fermat. Il paraît » donner, pour la recherche des cubes dont il s'agit, certains abrégés » importants, plus peut-être que vous n'aviez cru qu'on pût les » trouver, mais il conviendrait de rechercher sur quelles raisons il » s'appuie. Quant à l'autre question, proposée par Fermat, trouver » un quarré dont le produit par un nombre donné, étant augmenté » de l'unité, etc., je l'avais résolue par une certaine règle indiquée » pour cela. J'estime que c'est la même dont Frenicle s'est servi pour » trouver les nombres que Mylon m'a envoyés, mais le travail était » immense et tel que je n'aurais pas voulu l'entreprendre. »

Quelque temps après, savoir le 18 mai, Mylon m'écrivait la lettre suivante (¹) :

« Monsieur, j'ai fait voir à M. de Frenicle votre petit papier imprimé » dont il vous remercie. Un de ses amis veut ici faire imprimer le défi » de M. de Fermat et la solution du dit S^r de Frenicle. Il y prétend » joindre la vôtre avec les abrégés, exclusions et théorèmes de son » ami. J'ai prié qu'on ne le fît pas sans savoir votre volonté. Prenez » donc la peine de me mander, par la voie de M. de Zuylechem (puis- » qu'il a cette bonté), si vous trouverez bon d'être nommé ou non, ou » si vous ne désirez pas que votre solution soit imprimée. Je tâcherai » de faire suivre en cela votre intention, étant, etc. »

Au-dessous se trouvait ce qui suit (²) :

« M. de Frenicle vous envoie ces théorèmes sur votre dernière ques- » tion :

« 1. Pour les nombres pairs parfaits, il n'y en a aucun que ceux » qui se trouvent par la méthode donnée par Euclide.

» 2. Pour les impairs, s'il y en a aucun, il doit être multiple d'un » quarré par un nombre premier, pairement pair plus 1.

(¹) *Comparez* Correspondance de Huygens, n° 388.
(²) *Comparez* Correspondance de Huygens, n° 389.

» Théorème. — Il n'y a aucun quarré qui, multiplié par 19, surpasse » de l'unité un quarré multiplié par 7. »

Je répondis par la lettre suivante (1) :

« Monsieur, puisque vous avez eu la bonté de me mander qu'un des » amis de M. Frenicle veut faire imprimer le défi de M. de Fermat et » la solution dudit Sr de Frenicle, et qu'il prétend d'y joindre aussi » la mienne avec ses abrégés, exclusions et théorèmes que M. de Fre- » nicle a inventés pour la raccourcir, je n'ai pas voulu manquer de » vous en remercier et de vous écrire que tout ce qu'on fera me sera » agréable, soit qu'on l'imprime ou non. Car, n'ayant employé guère » de temps pour la chercher et remarquant qu'il eût fallu faire grande » opération pour trouver les nombres requis, je me suis contenté d'y » enseigner seulement les chemins par lesquels je voyois clairement » que les mêmes nombres, s'il y en avoit plusieurs tels, se dussent » trouver infailliblement, en cas qu'on voulût prendre la peine d'exa- » miner généralement de suite tous les nombres qui y pourroient » aucunement servir, sans penser particulièrement quels nombres en » fussent exempts, de même comme a fait M. de Frenicle; de sorte » que ma méthode n'étant que analytique, c'est-à-dire expliquant » comment on peut par le moyen de l'Algèbre découvrir les chemins » par lesquels ces nombres peuvent être cherchés, je serois d'avis » que, si on la veut faire imprimer, l'on y ajoutât ces mots :

» *Moyen analytique de chercher ces nombres, trouvé par François de* » *Schooten,* ou bien

» *Suit le mode de recherche de ces nombres par l'Algèbre, comme l'a* » *trouvé Fr. de Schooten.*

» Ce qui la feroit plus recommandable, seroit d'y ajouter de plus » les abrégés, exclusions et théorèmes de M. de Frenicle, afin que » cela ne semble pas être trouvé pour rien, mais y serve pour embel- » lissement et plus grande perfection de cette matière. Je vous en

(1) Cette Lettre de Schooten est en français, sauf les mots imprimés en italique.

» laisse tout le pouvoir. Dans ma solution, je voudrois bien que ces
» mots en fussent effacés :

» *ne pouvant d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour par-*
» *venir sûrement au but,*
» et au lieu de ces mots
» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les*
» *égalités quelques abrégés*, etc.
» j'aimerois plutôt ceux-ci :
» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les éga-*
» *lités quelques abrégés généraux* (*qui en tout cas ne se sont pas pre-*
» *sentés à mon esprit*).

» En finissant, je demeure, etc. »

De Leyde, ce 29 de mai 1657.

Les choses en étaient là quand enfin parut à la lumière le Traité intitulé : *Solution de deux problèmes, etc.*, et qui est, je pense, le même que celui dont vous m'avez parlé dans votre Lettre ; le susdit ambassadeur prit soin de nous en faire expédier deux exemplaires, le 26 octobre, l'un pour moi, l'autre pour Huygens. Dès que je l'eus vu, je ne pus que m'étonner de l'orgueil de l'auteur, qui, dans son avant-propos, adressé à M. Digby, ne rougit pas de s'exalter en ces termes :

Très illustre Seigneur, voici que Paris donne cette solution de problèmes que ni vos Anglais, ni les Belges n'ont aucunement pu trouver; la Gaule celtique est fière d'enlever la palme à la Narbonnaise, etc.

et autres semblables plus loin ; comme si ce fût une affaire d'État que de connaître ces nombres et que chacun dût attacher tant d'importance à cette solution qu'il ne sût où employer plus utilement son temps. A voir le titre même, je n'ai pu ne pas ressentir une certaine indignation en voyant l'auteur de ce Traité y amener une certaine *Inquisition* sur ma solution ; car je n'avais jamais attendu de France aucune *Inquisition ;* et je croyais même l'auteur trop sensé pour faire ou laisser faire, sur une chose aussi indifférente et de si faible importance, rien de pareil contre quelqu'un qui ne lui avait, que je sache, fait aucune offense; qui, au contraire, avait témoigné des plus grands égards pour lui.

Peu après que ce Traité fut parvenu dans mes mains, je reçus de la Haye une lettre de l'illustre Huygens, à qui, comme je l'ai dit plus haut, un autre exemplaire avait été envoyé de Paris. Dans cette lettre, il me disait entre autres choses (1) :

« Les problèmes de Frenicle vous ont été, je n'en doute pas, en-
» voyés par l'auteur. En les voyant, je ne puis que m'étonner de la
» diversité des goûts des humains. »

Mais, quant à ce qu'y affirme l'auteur, que la plupart des mathématiciens tant d'Angleterre que de Hollande s'occupent de la solution de ces problèmes, en ce qui concerne les Hollandais, je ne connais guère personne qui ait jugé intéressant de les aborder; au contraire, les plus exercés, à qui je les avais proposés, n'ont semblé y reconnaître aucun usage ni aucun profit, et personne ne s'est trouvé parmi eux qui ait estimé assez la gloire à en retirer pour vouloir prendre la peine de rechercher la solution.

Vous me demandez, très honorable Monsieur, à quel point on s'est franchement comporté avec moi dans cette affaire; je crois que ce qui précède suffit pour vous le faire connaître. J'ai cru devoir vous tout exposer, avec plus de longueurs peut-être que n'en réclamait le sujet, surtout parce que j'ai compris à votre lettre que vous aviez l'intention de faire imprimer tant vos solutions que les lettres que vous avez reçues à cette occasion. J'estime que la mienne, ou au moins une partie, rentrera dans votre plan et dans votre narration. Si donc vous croyez devoir en imprimer quelque chose, vous ne le ferez certainement pas contre mon gré.

J'ai cru devoir communiquer à Huygens ce que vous avez remarqué sur la lune de Saturne et sur l'aspect de cette planète; il y pourra

(1) Le 23 novembre 1657 (Correspondance de Huygens, n° 431).

reconnaître votre soigneuse et excellente application sur cette matière, de laquelle il est lui-même, je crois, attentivement occupé pour le moment. Mais, pour ne pas vous retenir trop longtemps, je mets fin à cette lettre, en vous souhaitant tout bonheur et toute prospérité. Adieu,

Votre très affectueux et très respectueux,

FR. DE SCHOOTEN.

Leyde, le 18 mars 1658.
St. grég.

Je suis heureux que vos remarques sur le texte de Pappus, d'après les manuscrits grecs, correspondent exactement à mes conjectures. Si je les avais connues plus tôt, j'aurais pris soin de faire imprimer en même temps ce véritable sens de Pappus, ce qu'il faut maintenant réserver pour la prochaine édition, s'il y a lieu d'en donner une. Cependant je vous remercie à cette occasion et vous recommande de tout cœur au Dieu qui peut tout donner. Encore une fois adieu.

LETTRE XXXIV

(à laquelle étaient jointes les quatre suivantes).

VICOMTE BROUNCKER A SIR JOHN WALLIS.

Sir, étant pressé, je ne puis que vous adresser les lettres ci-jointes comme elles me sont arrivées, et vous dire qu'ayant résolu, dans le propre sens qu'il lui donne, cette proposition qu'il semblait estimer la plus difficile, je ne me regarde pas comme obligé en aucune façon d'essayer la solution de ces autres qu'il envoie, comme présumant que la précédente aurait dépassé mes forces. Autrement, je ne les regarde pas comme si difficiles, et je crois que si j'en avais le désir et le loisir, il pourrait aussi là-dessus recevoir pleine satisfaction de,

Sir, votre fidèle et humble serviteur,

BROUNCKER.

1/11 mai 1658.

Quant à ce qu'il dit concernant vous-même, je ne pense pas que cela mérite la moindre réplique. Le lecteur sera sans doute pleinement satisfait par ce que vous avez déjà dit.

LETTRE XXXV.

KENELM DIGBY A VICOMTE BROUNCKER.

Mylord, j'ai reçu il y a deux jours la lettre que votre Seigneurie a bien voulu m'écrire le 13 mars, et, en même temps, deux autres du docteur Wallis à moi, et une du même à votre Seigneurie. Je vous fais mes très humbles et très sincères remercîments pour la vôtre, que j'ai reçue avec un excès d'allégresse, de joie et de respect; en premier lieu, pour votre excessive civilité et bienveillance à mon égard; ensuite, pour votre noble et savante réponse à la requête de M. Frenicle. Maintenant, ni lui, ni M. Fermat n'auront plus à chicaner ni votre Seigneurie, ni le docteur Wallis; j'écris, à ce dernier, longuement (eu égard à la difficulté que j'éprouve maintenant pour écrire beaucoup), et je prends la liberté de vous demander de bien vouloir lui faire remettre ma lettre, que je laisse ouverte, pour que vous puissiez y jeter les yeux à votre fantaisie.

Mais surtout, Mylord, je vous félicite de tout cœur pour l'heureuse étoile qui a présidé à votre naissance, et qui, dans une qualité et un rang si élevés, vous a gratifié aussi d'une part si excellente d'intelligence que vous pouvez être justement envié par les plus éminents de ceux qui font leur tâche de l'étude et de la Science. Ma lettre ci-jointe pourra faire connaître à votre Seigneurie avec quel retard j'ai reçu la dernière lettre du docteur Wallis. Si vous voyez le Dr F., je vous prie de lui reprocher la précaution hors de propos qui lui a fait garder si longtemps cette lettre. Si je n'étais pas tout à fait épuisé (tant je suis débile maintenant) par ma lettre au Dr Wallis, votre Seigneurie ne serait pas si facilement délivrée à cette fois de l'embarras que je lui cause; mais la raison que je viens de dire m'empêche de poursuivre plus longtemps, si ce n'est pour baiser humblement votre main et me dire,

Mylord, votre très humble et très obéissant serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVI

(jointe à la précédente).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très digne et très honoré Monsieur, la lettre que vous m'avez fait la faveur de m'écrire le 26 décembre ne m'est parvenue que tout dernièrement, en même temps qu'une autre écrite, vers la même époque, par vous à mylord Brouncker; celui-ci semble les avoir remises au Dr F. pour me les envoyer, par ce motif que M. White n'était pas alors à Londres. Le docteur (comme toujours quand on se met à négliger) garda la lettre par devers lui jusqu'à ce que, plusieurs mois après, ayant été informé de la chose, je lui écrivis, le priant d'aller trouver Mylord et s'accuser devant lui de son oubli, pour me disculper moi-même, et en même temps de m'envoyer immédiatement la lettre.

Il me la fit, en effet, parvenir par le premier courrier, en me disant qu'il avait été voir Mylord pour me décharger de tout blâme de négligence ou de manque de respect. Je vous déclare, ainsi que je le fais à tout autre, quand l'occasion s'en présente, que j'admire singulièrement le grand fonds qui vous fournit (comme il ressort de votre réponse immédiate) une si étonnante abondance de matière que, dans l'espace d'une nuit, vous écrivez plus que n'aurait fait un autre en un mois entier. On admire justement saint Jérôme, pour avoir achevé en une nuit le Traité qu'il nous a laissé contre Jovinien; mais vos réponses numériques étaient sur tel sujet, demandaient telle méthode pour le traiter, qu'un effort beaucoup plus prolongé eût dû être attendu. On peut comparer cela à un fil qui est couramment et aisément tiré du lin qui le donne tout prêt; ce fil glisse et se tord par le facile travail de la simple rotation du rouet. Mais chaque trait de votre plume demandait, dans cette occasion, une nouvelle taille de pierre en forme dans le bloc brut, pour assembler la voûte que vous bâtissiez; assemblage qui, pour la moindre partie, réclamait l'exactitude la plus stricte et la plus parfaite dans le tout et dans le détail. Là-dessus l'admiration est justement acquise à l'aisance avec laquelle vous avez accompli ce travail d'Hercule, en vous jouant vraiment. Quand je le considère sous ce rapport, je suis en vérité troublé d'avoir quelque peu contribué à vous en charger (quoique je n'aie été qu'un instrument passif); mais à le voir sous une autre lumière, à reconnaître ce qui en est en vérité, je veux dire combien peu il vous a coûté, quel progrès il a réalisé et quel honneur en rejaillira sur notre nation, j'avoue alors que je suis heureux de l'opposition qu'on vous a faite; non que j'approuve l'aigreur qui, parfois, accompagne les disputes, et spécialement en Mathématiques (où l'on ne doit considérer que la démonstration, les parties ne devant s'occuper que du seul sujet en question). Mais le genre et le style de ce pays leur fournit une excuse; on y est d'ordinaire dans les discussions très aigre ou plutôt méchant (à mon sens), de part et d'autre, et si vous n'aviez pas été un étranger, et, de fait, quelqu'un pour qui ils ont une grande estime, ils auraient encore été moins sans gêne à votre égard, car, à leur compte, tout ce qu'ils disent dans ce goût n'est qu'une ronde et habituelle familiarité, loin de toute injure ou offense. M. Fermat m'a envoyé, il y a quelque temps, une lettre où il revient sur quelques points de vos envois antérieurs; il s'en rapportait à ma discrétion pour vous communiquer ce qu'il écrivait.

Aussi longtemps qu'il m'a laissé le choix, je ne vous en ai point envoyé copie; mais maintenant, par le dernier courrier, il me demande de le faire; je vous adresse donc une transcription de cet écrit. Certainement vous avez la satisfaction d'avoir affaire en même temps aux deux plus grands hommes de France (de l'aveu de tous les plus éminents), et je ne doute pas que vos dernières lettres des 4 et 15 mars (que j'ai reçues précisément ce matin, en même temps qu'une de vous du même temps à Mylord Brouncker) ne vous assurent de leur part et de celle de tout le monde une pleine et entière déférence. Quoique, depuis que j'ai reçu ces lettres, je n'aie eu que le temps de les parcourir rapidement, tandis que de tels morceaux ont besoin d'être examinés sérieusement et à loisir (spécialement pour un joueur aussi faible que moi dans ces parties), je vois assez la lumière qui y éclate pour la saluer comme un Soleil, non pas à son lever, mais à son midi en culmination, au plus haut point du zénith. J'ai la confiance que ces derniers écrits ne susciteront plus de chicanes contre eux; je vais tout aussitôt m'empresser de les envoyer à M. Fermat et à M. Frenicle, et je vous transmettrai de même immédiatement ce qu'ils m'en diront.

Votre précédente lettre, celle qui est restée si longtemps dans les mains du Docteur F., a été envoyée par le dernier courrier à M. Frenicle, qui est dans cette ville, mais que mon indisposition ne me permet pas d'aller voir moi-même. Il m'a répondu un mot par mon homme, me disant qu'il écrirait à cette occasion quelque chose que j'aurais aujourd'hui avant le départ de la poste pour Londres. Je vais garder mon paquet ouvert jusqu'au dernier moment, qui n'est pas bien éloigné, et si quelque papier me vient de M. Frenicle, je le comprendrai dans l'envoi.

Je vous fais donc mes très humbles et sincères remercîments pour la belle démonstration que vous avez bien voulu m'envoyer. En vérité, elle m'a infiniment plu et je suis sûr qu'elle plaira de même à tous ceux qui la verront. Je vous aurais demandé la permission de la rendre *publici juris* en la faisant imprimer, mais le post-scriptum de votre lettre du 15 mars me fait connaître que vous avez l'intention de publier ce qui s'est passé entre vous et ces Messieurs, par mon entremise; si vous le faites, j'espère et désire très vivement que cette excellente production de votre seul cerveau trouve là une place, qui sera certes plus belle et honorable si elle est accompagnée de plusieurs sœurs du même père et assistée d'un cortège venant des familles des deux plus riches seigneurs de cette nation en ce genre de trésors, que si elle se présentait toute seule sans compagnie ni entourage. Quant à ce que vous avez bien voulu me demander très civilement et très obligeamment mon avis à l'occasion de la publication de ces lettres, je ne puis que vous remercier très humblement de votre égard par moi. Si j'avais imaginé qu'elles devaient survivre à leur lecture par vous, moi qui les écrivais, comme si j'avais été à converser avec vous de vive voix, j'y aurais certes marqué avec plus de soin et d'attention le respect que je professe pour vous.

Si ma santé et ma force me le permettaient, je vous entretiendrais de diverses particularités que je suis obligé de remettre à une autre fois, quoiqu'en vérité vous puissiez raisonnablement trouver cette lettre assez longue et fastidieuse pour avoir plutôt besoin de pardon et d'excuse; mais j'ai tant de plaisir à vous entretenir qu'il me coûte beaucoup d'en finir. Comme je viens seulement de me relever d'une maladie qui m'a retenu près d'un mois dans mon lit, je ne suis pas capable d'écrire plus longtemps; c'est d'ailleurs la première fois depuis que je suis levé, que j'emploie ma plume pour une affaire de quelque importance. En envoyant hier votre lettre à M. Fermat, j'ai été obligé d'employer la main de mes secrétaires. Je vous souhaite tout bonheur et, prenant respectueusement congé de vous, je demeure,

Digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVII

(renfermée, avec la suivante, dans la précédente).

Fermat a Kenelm Digby.

Toulouse, 7 avril 1658.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 91, Tome II, page 374.)

LETTRE XXVIII.

Frenicle a Kenelm Digby.

Je m'étais proposé, très illustre et très honoré Seigneur, de ne plus rien écrire à propos de ces disputes qui me sont fastidieuses et auxquelles je répugne grandement; cependant, cette fois encore, j'ai cru devoir vous adresser quelques remarques pour vous faire comprendre que le clarissime Wallis, dont je connaissais déjà la science, me fournit surtout un sujet d'étonnement, quand je vois qu'un homme aussi pénétrant a pu s'oublier assez lui-même pour donner des solutions telles que celles qu'on lit dans sa lettre du 21 novembre et qu'il soutient encore comme légitimes. Il n'a pas d'ailleurs à me reprocher de ne pas avoir d'estime pour lui ou pour ses œuvres; il en est tout autrement; mais si j'ai eu de lui une opinion autre que celle qu'il méritait, qu'il s'en accuse lui-même; car c'est bien lui qui avait été la cause de cette fausse appréciation, en présentant comme choses sérieuses de vraies plaisanteries, s'il m'est permis de le dire. Sans doute il n'avait pas voulu appliquer sérieusement son esprit sur ces matières; car, à voir ses dernières solutions et sa dernière lettre, je le reconnais comme très habile et très perspicace, quoique trop attaché à défendre les opinions qu'il a une fois émises; il ne réfléchit pas combien il est habituel aux hommes de se tromper et combien il est honnête et louable de reconnaître son erreur et de s'abstenir d'un entêtement hors de saison.

Qu'il n'estime pas non plus que j'aie prétendu triompher de lui ou lui faire quelque insulte; mais ma réponse à sa lettre était bien en rapport avec celle-ci; aussi suis-je prêt à lui donner satisfaction pour tout ce que renferment les deux épîtres dont il se plaint et à montrer qu'elles ne contiennent rien qui ne s'appuie sur des raisons qu'il faille admettre, rien qui ne réponde justement à sa lettre précitée du 21 novembre. Il n'a pas à m'objecter que j'ai dû avoir une fausse opinion de lui, puisque je n'ai pu le juger autrement que par ses œuvres : « A leurs fruits vous les connaîtrez ». Et il n'y a pas de mathématicien qui ne juge que, du moment où je ne gardais pas un silence absolu, j'aie fait preuve à son égard de plus de courtoisie qu'il n'était en droit de s'y attendre. Et en vérité, si dans ces réponses il y a quelque chicane, elle a eu au moins cette utilité qu'elle a pu faire connaître en partie ce qu'il vaut vraiment, soit à moi, soit aux autres qui ont vu sa dernière lettre, car ç'a été pour lui un aiguillon qui l'a forcé à examiner plus attentivement les questions et à s'en rendre maître. Il est clair en effet désormais qu'il possède la troisième de Fermat et la sienne; quant aux deux premières de Fermat, il reste un doute jusqu'à ce qu'il ait fourni, en dehors de l'unité, un autre cube et un autre carré qui, ajoutés à leurs parties, fassent l'un un carré, l'autre un cube, ou jusqu'à ce qu'au moins il résolve le problème posé pages 3 et 4 de l'*Inquisition* de Frenicle sur la solution de Schooten et trouve en nombres les trois cubes et le carré exprimés analytiquement.

Le clarissime Wallis doit aussi faire attention à ne pas prendre le silence de Fermat comme la reconnaissance qu'il a eu satisfaction et qu'il admet de pareilles solutions; car il en est tout autrement. Ce silence vient de ce que Fermat le voit seulement attaché à ces solutions non acceptables et qu'il préfère le laisser dans cette fausse estime et dans la vaine joie qu'elles lui donnent plutôt que d'essayer en vain de le détourner d'elles.

Enfin, dans la dernière lettre du clarissime Wallis du 19 mars, il y a un point où il ne me paraît pas agir franchement, quand il soutient que de mes deux épîtres précitées la seconde contredit la première, puisque, dit-il, la seconde reçoit l'unité comme cube et comme carré, la première la rejette. La première en effet ne refuse nullement à l'unité le caractère de cube ou de carré qui lui est communément attribué; mais, comme l'unité n'a pas de parties, on nie qu'elle puisse être présentée comme le cube ou le carré cherché, qui doit être ajouté à ses parties, qui doit donc en avoir. Si donc dans la première on dit que Wallis, en donnant l'unité, n'a pas donné un cube, il est plus clair que le jour qu'il faut entendre, non pas que l'unité n'est pas un cube absolument parlant, mais bien qu'elle n'est pas un cube satisfaisant à la question.

En ce qui concerne ces solutions, qui sont tellement faciles qu'il suffise pour les trouver de multiplier par 2 ou 3 un nombre donné, je ne sais si, dans votre Angleterre, on a coutume de les admettre; mais ici on ne le ferait pas, et s'il est vrai que le problème est imparfaitement proposé quand on peut y satisfaire de la sorte, contre la pensée de l'auteur, cependant nous ne croyons pas qu'il faille astreindre les mathématiciens à faire leurs propositions avec une précaution absolue, surtout quand elles viennent de savants comme l'est hors de doute le très docte Fermat et quand elles sont énoncées seulement à la hâte et pour faire plaisir; c'est à celui qui donne la solution à la fournir juste et digne d'elle-même. Si quelqu'un proposait au contraire un pareil problème, ayant en vue une solution aussi simple, on prendrait cela pour une injure; car le proposant paraîtrait tenir son correspondant pour tout à fait inhabile, à sembler regarder comme suffisant de lui proposer ce qu'on ne devrait pas même demander à un enfant.

Voilà, très illustre Seigneur, ce que j'ai cru devoir vous faire remarquer; vous saurez par là ce que je pense maintenant du clarissime Wallis, comme vous savez que c'est malgré moi, sur votre invitation et forcé par vous (car pour moi vos désirs sont des ordres), que j'ai porté un jugement sur sa lettre, et que je serai d'ailleurs et toujours votre très attaché et tout dévoué. Adieu.

LETTRE XXXIX.

John Wallis a Kenelm Digby.

La lettre que vous m'avez envoyée, très noble Seigneur, en date de Paris 4 mai, style nouveau, a été reçu par nous le 3 mai de notre style; autant j'ai été heureux de cette rapidité, autant j'ai regretté le retard qu'a au contraire subi la lettre que je vous ai adressée. D'autre part, quelque plaisir que devait nécessairement me faire la vôtre, surtout en me témoignant la bienveillance que vous m'accordez et l'honneur que vous me faites, je ne puis vous dissimuler que sur un ou deux points je n'aie été fâché, et surtout en apprenant le mauvais état de votre santé. Qui sait ce que vous valez pour le progrès des Sciences doit nécessairement s'inquiéter vivement de votre santé, car il n'ignore pas ce qui en dépend. Mais la divine Providence sera à remercier de vous avoir conservé sain et sauf pour l'avantage des Belles-Lettres dont vous serez encore l'honneur et l'ornement. Je regrette encore, en lisant les éloges que vous me prodiguez et que je dois à votre bonté, non à mon mérite, d'être incapable non seulement de m'en rendre digne, mais même de vous en remercier comme je le devrais. Car la facilité de votre style, la vivacité de votre esprit dans le rôle de la bienveillance sont de telle nature que je ferais preuve de toute imprudence en voulant lutter là-dessus avec vous, en essayant d'égaler mes expressions aux bontés dont vous me comblez. J'avoue donc à quel point je suis impuissant et je me prosterne vaincu, n'ayant rien à répondre pour témoigner la gratitude de mon cœur humblement dévoué ; croyez bien qu'elle est au-dessus de tout ce que je peux dire, accordez à mon aveu la grâce qu'il implore et daignez me continuer la faveur que vous m'avez jusqu'ici accordée. Je vais rapidement achever ce qui me reste à dire.

Pour la lettre de M. Frenicle, incluse dans la vôtre, je me plais à en reconnaître l'amabilité, mais je n'ai guère à y répondre si ce n'est pour le remercier de l'opinion qu'il a désormais conçue et qu'il professe sur mon compte. J'admets avec joie l'excuse ou la défense qu'il présente pour ses lettres antérieures. Je ne disputerai pas pour le voir encore juger d'entêtement hors de saison ce que j'ai regardé comme une juste défense de moi-même ; ni pour le voir douter encore si je puis répondre aux deux premières questions de Fermat ; quand il aura pesé mes lettres des 4 et 15 mars, ce doute s'effacera. Enfin je n'examinerai plus si dans ses lettres précédentes il a, oui ou non, nié que l'unité fût un carré ou un cube. Tout cela ne vaut pas la peine de contredire ce très noble Seigneur. Enfin notre question (de carrés qui, ajoutés à la somme de leurs parties aliquotes, fassent une même somme), que nous avions jadis proposée en passant à Fermat, je vois, par une lettre récemment reçue, que Frenicle l'a résolue et qu'il y a même attaché beaucoup plus d'importance que je ne l'aurais fait. Mais on devait bien attendre qu'il la résolût très facilement, puisque la solution dépend tout à fait des mêmes principes que celle des questions de Fermat qu'il avait déjà trouvée.

Je ne pense pas non plus devoir longuement répondre à la lettre de M. Fermat. Deux points suffisent. D'une part, il dit que j'aurais avancé, ou au moins que je n'aurais pas douté que mylord vicomte Brouncker ne puisse résoudre, pourvu qu'il veuille s'y essayer, ce problème du cube donné à partager en deux cubes rationels. Maintenant il affirme que la proposition est impossible, et je me serais donc avancé à la légère et bien témérairement. Je répondrai à votre clarissime Correspondant qu'il ne cite pas exactement ce que j'ai avancé; car il passe sous silence ce que j'avais ajouté : *du moins en tant que la nature de la chose peut le permettre.* Si j'avais précisément fait cette addition, c'est que je soupçonnais déjà de prime-abord que la chose était impossible; mais, ne l'ayant pas examinée, je n'avais rien à affirmer. Je ne parlais donc de solution que suivant ce que permettait la nature de la question, c'est-à-dire l'exécution si la chose est possible, sinon, la reconnaissance de l'impossibilité. Au reste, je ne me trompais pas dans mes conjectures, puisque, bientôt après, le très honoré Lord me faisait entendre ce que dit maintenant Fermat. La lettre qu'il m'écrivit particulièrement porte, en effet :

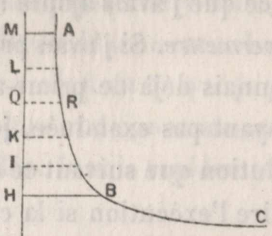
« Sir, cette nuit passée j'ai reçu votre .... Votre opinion concer-
» nant M. Fermat est effectivement la même que la mienne, spéciale-
» ment au sujet de son dernier papier.... Ses déterminations négatives
» sont, à mon avis, sa plus grande gloire, et c'est là où il se regarde
» lui-même comme singulier. Autrement il ne proposerait certaine-
» ment pas une chose impossible comme : *Partager un nombre cube*
» *donné en deux cubes rationels,* ce qui ne se peut. Cette question ne

» doit pas être confondue avec l'autre, déjà résolue au moins de plu-
» sieurs manières, par M. Frenicle, comme vous savez....

Le second point concerne ce que M. Fermat dit des hyperboles; il pense que je n'ai pas foi à ses assertions sur le centre de gravité dans les hyperboles infinies. C'est tout le contraire; je n'avais aucun soupçon que votre très noble Correspondant n'eût pleinement dit la vérité en affirmant qu'il avait approfondi ce sujet depuis de longues années, au moins dans les hyperboles entières et peut-être aussi dans les semi-hyperboles, quoiqu'il n'en eût pas encore parlé. Je ne doute pas davantage qu'il ne puisse résoudre la question ci-dessous qu'il propose; je crois amplement qu'il a nombre d'excellents théorèmes, soit sur les hyperboles, soit sur les autres matières élevées de la Géométrie, soit même en Arithmétique, et il en a déjà donné assez de spécimens.

Voici la question qu'il propose : Étant donnée la vraie hyperbole ABC (*fig.* 5), ayant pour asymptotes NM, NO, à l'une de celles-ci, soit

Fig. 5.



NO, on mène des parallèles MA, HB. On propose de couper la figure AMHB (limitée par la ligne hyperbolique et les trois droites AM, MH, HB) au moyen d'une droite QR parallèle à HB et MA, en sorte que le segment RQHB soit au reste AMQR en raison donnée.

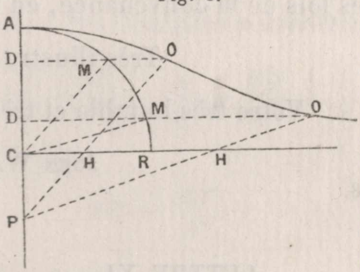
Voici ma solution : Si la raison est énonçable en vrais nombres entiers, soit comme de 3 à 2 ou de a à e; entre les droites NH, HM, on cherchera autant de moyennes proportionelles (du moins celle qui sera utile de ces moyennes) qu'il y a d'unités dans la somme des deux nombres moins 1 (par exemple, $4 = 3 + 2 - 1$ ou $a + e - 1$); soit de ces moyennes NQ la 3^me^ (ou celle dénommée par a) à partir de NH, ou la 2^me^ (ou celle dénommée par e) à partir de NM. Je dis que la droite QR, menée parallèlement par Q à HB ou à MA, résout le problème. Si, au contraire, la raison n'est pas énonçable, on pourra obtenir une approximation au moyen des logarithmes, mais non pas une solution rigoureusement géométrique.

Quant au reste, ou j'en ai déjà suffisamment parlé auparavant, ou bien on peut le passer sous silence. Je n'ai, en effet, pas le loisir et je ne crois pas intéressant de descendre aux minuties de détail.

Cependant, pour donner un retour à votre très noble Correspondant, je désire lui proposer une question qui ressemble à la sienne ci-dessus et qui n'est peut-être pas moins élégante.

Étant donnée la conchoïde AO (*fig.* 6), dont A est le sommet, P le pôle, CRH la règle (coupant à angle droit AP au point C), on décrit de C comme centre le quart de cercle AR du côté OH.

Fig. 6.



On propose de décrire une figure de même genre que la figure conchoïde indéfinie OARH (entre la droite RH indéfinie, la conchoïde AO indéfinie et le quart de cercle AR), telle que cette nouvelle figure $\omega\alpha\rho\eta$ soit en raison donnée avec la proposée.

Ou, s'il préfère un énoncé sous forme de théorème, pour ne pas sembler proposer des énigmes, je dirai :

Le rapport de la figure conchoïde indéfinie OARH à une autre quelconque $\omega\alpha\rho\eta$ du même genre est composé des rapports CA à $\varkappa\alpha$ et CP à $\varkappa\pi$ (les lettres α, $\varkappa$, π, ρ, η, ω dénotant dans une figure les mêmes points que dans l'autre A, C, P, R, H, O), quelle que soit d'ailleurs la variation du rapport des droites AC, CP.

Je lui communiquerai, s'il le désire, soit la recherche, soit la démonstration.

Il me reste encore à vous dire, très illustre Seigneur, que je comprends par votre lettre que les deux personnages avec lesquels nous avons eu affaire sont très considérables. Il se peut donc bien qu'un étranger comme moi, n'étant pas suffisamment au courant des choses et des dignités de ce pays, les ait traités un peu plus familièrement qu'il ne convenait à leur dignité, que j'aie agi d'ailleurs pour mon compte ou pour celui du très honoré Vicomte. Si j'ai fait quelque faute de ce genre, ç'a été contre mon gré et j'espère que vos très nobles Correspondants, qui ont daigné d'eux-mêmes descendre avec moi dans l'arène, ne s'en prendront pas à quelqu'un plus habitué à la poussière des écoles qu'à celle des Cours. Que cette excuse me serve aussi à votre endroit, si j'ai pu me rendre coupable envers vous, car en tout je voudrais avoir observé les lois de la convenance, en tant que je suis,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

John Wallis.

Oxford, 5/15 mai 1658.

LETTRE XL.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Très illustre Lord,

J'entends que vous avez reçu, en sûreté, ma dernière lettre à envoyer à Paris. Quant aux démonstrations que vous me demandez, les voici :

La solution du problème de Fermat (de l'espace hyperbolique à partager dans un rapport donné) se démontre comme suit (*fig.* 5, p. 582) :

Si l'on prend sur l'asymptote les droites NH, NI, NK, NQ, NL, NM en proportion géométrique, que des points H, I, K, Q, L, M on mène des droites parallèles à l'autre asymptote, l'espace hyperbolique ABHM est divisé en cinq parties égales, comme l'a démontré Grégoire de Saint-Vincent, Livre X, je crois. Par suite, si l'on a d'un côté deux parties, de l'autre trois, il est clair que QR divise dans le rapport 2 à 3. C. Q. F. D.

Quant à mon problème ou théorème de la figure en conque, en voici une brève explication (*fig*. 6, page 583).

Soit la conchoïde AOO, dont P est le pôle, A le sommet, CHH la règle; CAR le quart de cercle, DM une ordonnée quelconque du quart de cercle, DO, de la conchoïde; et le reste construit comme dans la figure. Posons, pour plus de facilité dans le calcul,

$$\mathrm{HO} = \mathrm{CA} = \mathrm{CR} = \mathrm{CM} = r, \qquad \mathrm{CP} = p, \qquad \mathrm{CD} = c \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PD} = p + c = l,$$

par conséquent

$$\overline{\mathrm{PD}}^2 = l^2.$$

A cause des parallèles et des triangles semblables, on a

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{HO}} = \frac{c}{r} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PH}} = \frac{p}{\frac{pr}{c}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PO}} = \frac{l}{\frac{lr}{c}},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \frac{l^2 r^2}{c^2}.$$

D'ailleurs, par Euclide, I, 47,

$$\overline{\mathrm{CM}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{DM}}^2 = r^2 - c^2$$

et

$$\overline{\mathrm{DO}}^2 = \overline{\mathrm{PO}}^2 - \overline{\mathrm{PD}}^2 = \frac{l^2 r^2}{c^2} - l^2 = \frac{l^2 r^2 - l^2 c^2}{c^2} = \frac{r^2 - c^2}{c^2} l^2.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{DO} = \frac{l}{c}\sqrt{r^2 - c^2} = \frac{c + p}{c}\sqrt{r^2 - c^2} = \sqrt{r^2 - c^2} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$

Mais

$$\mathrm{DO} = \mathrm{DM} + \mathrm{MO}, \qquad \mathrm{DM} = \sqrt{r^2 - c^2}, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{MO} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$

Cela posé, si dans des conchoïdes différentes AO, Aω, la quantité CA reste toujours la même et que, par suite, r et c ne changent pas, tandis que PC ou p devient π, on aura toujours

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\omega}=\frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p}{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,\pi}=\frac{p}{\pi}.$$

Par suite, la somme de toutes les MO à celle des Mω, c'est-à-dire, en raison de la hauteur commune de part et d'autre, la figure RMAO sera à la figure RMAω comme p à π.

Si maintenant PC ou p reste, au contraire, sans changement, tandis que CA, donc CD changent, soit r en ρ et c en $\varkappa$, on aura

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\omega}=\frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p}{\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}\,p}=\frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}}{\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}}=\frac{r}{\rho}.$$

En effet, la somme des $\sqrt{r^2-c^2}$ est à celle des $\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}$, c'est-à-dire le quart de cercle est au quart de cercle, comme r^2 à ρ^2, ou en raison doublée des rayons. De même, on a toujours $\frac{c}{\varkappa}=\frac{r}{\rho}$. Par suite, la somme des $\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}$ est à celle des $\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}$, comme $\frac{r^2}{r}$ à $\frac{\rho^2}{\rho}$, c'est-à-dire comme r à ρ.

Si enfin il y a changement tant dans la quantité PC que dans la quantité CA, soit de p en π et de r en ρ, la somme des MO ou $\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p$ sera à celles des $\mu\omega$ ou $\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}\,\pi$, c'est-à-dire la figure RMAO sera à la figure $\rho\mu\alpha\omega$ en raison composée de p à π et de r à ρ, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{pr}{\pi\rho}$ ou du rectangle PCA au rectangle $\pi\varkappa\alpha$. C. Q. F. D.

Cela connu, il sera facile soit de partager dans un rapport donné la figure en conque RMAO, soit de construire une autre figure qui soit avec elle dans un rapport donné.

Enfin, vous me demandez la solution d'un troisième problème qui ne concerne pas les lettres de Fermat, et qu'un de mes amis, au commencement de février dernier, me donna par écrit un soir que je le rencontrai par hasard. J'ai récemment appris du même ami qu'elle a été imprimée sous le titre :

« Les professeurs de Mathématiques les plus en renom et les autres » célèbres mathématiciens d'Angleterre sont instamment priés par » Jean de Montfert de vouloir bien résoudre ce problème. »

» On donne, en nombres, dans une ellipse : les diamètres extrêmes, » la distance du centre à un point de l'axe transverse, et l'angle avec » l'axe d'une ligne qui le coupe en ce point. Trouver en nombres les » segments de cette ligne prolongée, s'il est besoin, et compris entre » l'axe transverse et l'ellipse.

» Étant données (*fig.* 7)

$$\begin{aligned} AC &= 1{,}00000, \\ aC &= 0{,}76604, \\ CB &= 0{,}50000, \\ CBD &= 70^\circ, \end{aligned}$$

» on demande BD et BF. »

Je crus que cette question était de mon ami, car il n'avait donné aucune indication contraire, et je ne lui demandai pas de qui elle était. Je la résolus le lendemain matin un peu plus généralement, à peu près sous la forme qui suit, car je ne m'en souviens pas exactement. Je ne m'en suis plus occupé, la chose ne me paraissant offrir ni grande difficulté, ni grande importance; au reste, à ce que j'apprends, elle a reçu de divers diverses solutions, que, du reste, je n'avais pas encore vues.

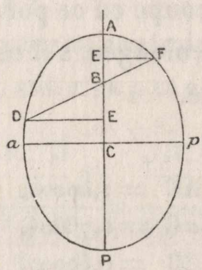
On donne dans une ellipse les diamètres extrêmes (ou bien deux diamètres conjugués quelconques avec l'angle de leur inclinaison) AP, *ap*. L'un d'eux, soit AP, est rencontré en un point donné B (soit en dedans de l'ellipse, soit en dehors sur le diamètre prolongé) par une droite DF qui coupe l'ellipse aux points D et F. Trouver les droites BD, BF.

Des points D, F, au diamètre AP, menez les ordonnées DE, FE. Posons, pour la commodité du calcul,

$$\mathrm{AP} = 2d, \qquad ap = 2\delta, \qquad \mathrm{DE} \text{ ou } \mathrm{FE} = a, \qquad \mathrm{BC} = b, \qquad \mathrm{CE} = c.$$

Par conséquent, $\mathrm{BE} = |c - b|$, différence entre BC et CE. Nous supposons, en effet, que FE et DE tombent au-dessus de la droite ap, en sorte que si DE tombe au-dessous de $a\mathrm{C}p$, il faut réputer CE comme une quantité négative, ou bien, ce qui revient au même, on aura $\mathrm{BE} = c \mp b$, ce qui ne troublera pas le calcul.

Fig. 7.



Dans les triangles DBE, FBE, on donne encore les angles (l'angle en B étant donné et l'angle en E droit ou au moins donné), donc on donne le rapport des côtés, qui est celui des sinus des angles opposés; soit donc $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DE(ou\ FE)}} = \frac{n}{m}\cdot$ Comme $\mathrm{BE} = |c - b|$ et DE (ou FE) $= a$,

$$\frac{n}{m} = \frac{|c-b|}{a}, \qquad a = \frac{|c-b|}{n}m, \qquad a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2}m^2.$$

Or, dans une ellipse, l'ordonnée DF ou FE est, ou bien moyenne proportionelle entre les segments AE, EP du diamètre (si $a\mathrm{C} = \mathrm{AC}$), ou est, à cette moyenne proportionelle, dans le rapport $a\mathrm{C}$ à AC. Donc, les carrés étant proportionels aux carrés,

$$\frac{\mathrm{AC}(=d)}{a\mathrm{C}(=\delta)} = \frac{\sqrt{\mathrm{AE}.\mathrm{EP}}}{\mathrm{DE}(\text{ou } \mathrm{FE} = a)} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{\delta^2} = \frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{EP}}{a^2}.$$

Mais

$$\mathrm{AE}\times\mathrm{EP} = (\tfrac{1}{2}\mathrm{AP} - \mathrm{CE})\times(\tfrac{1}{2}\mathrm{AP} + \mathrm{CE}) = (d-c)\times(d+c) = d^2 - c^2.$$

Donc

$$\frac{d^2}{\delta^2} = \frac{d^2 - c^2}{a^2}, \qquad a^2 = \frac{d^2 - c^2}{d^2}\delta^2.$$

Puis donc que

$$\frac{d^2 - c^2}{d^2}\delta^2 = a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2}m^2,$$

on aura

$$d^2\delta^2 n^2 - c^2\delta^2 n^2 = c^2 d^2 m^2 + b^2 d^2 m^2 - 2cbd^2 m^2,$$

et

$$m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2 \delta^2 = 2m^2 bd^2 c - m^2 d^2 c^2 - n^2 \delta^2 c^2,$$

et

$$\frac{m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2 \delta^2}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} = \frac{2m^2 bd^2}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} c - c^2.$$

Résolvant l'équation :

$$\frac{m^2 bd^2 \pm nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2 \delta^2 - m^2 b^2}}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} = c = \mathrm{CE}.$$

Il faut remarquer que des quantités ainsi désignées avec ambiguïté par les signes $\pm$, la plus grande, correspondant au signe $+$, est la distance CE du point E le plus éloigné du centre; la plus petite, correspondant au signe $-$, est la distance CE du point E le plus proche, lequel est d'ailleurs situé au-dessus du centre vers B (comme le suppose la figure), si la quantité est positive, c'est-à-dire si

$$m^2 bd^2 > nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2 \delta^2 - m^2 b^2}.$$

Il sera, au contraire, au-dessous du centre, si l'inégalité est renversée, et, par suite, la quantité négative, ou enfin si, par suite de l'égalité entre ces deux termes, ils se détruisent réciproquement, E sera au centre. Il peut même arriver, si B est pris en dehors de l'ellipse, que

$$m^2 b^2 > m^2 d^2 + n^2 \delta^2;$$

auquel cas l'équation est impossible, preuve qu'alors la droite rencontrant sous l'angle donné le diamètre prolongé au point donné B, est tout entière en dehors de l'ellipse, et que les points D et F n'existent pas. S'il y avait égalité, que $m^2 b^2$ se détruisît avec $m^2 d^2 + n^2 \delta^2$, la droite ainsi menée toucherait l'ellipse sans la couper, et les points D, F coïncideraient. Tout cela est assez clair, pour qui connaît bien la nature des équations, et n'a pas besoin d'être plus longuement expliqué.

Ayant désormais les points B donné, E trouvé, on aura BE côté du triangle DBE ou FBE et, par suite, connaissant aussi tous les angles, comme on l'a dit, le côté BD ou BF; on aura, en effet,

$$\frac{\sin \mathrm{D}\,(\text{ou F})}{\sin \mathrm{E}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}\,(\text{ou BF})}.$$

C. Q. D. F.

Voilà, très noble Lord, ce que, pour obéir à vos ordres, devait vous présenter

Le fidèle exécuteur de vos volontés,

John Wallis.

11/21 mai 1658.

LETTRE XLI.

Kenelm Digby a M. Th. White.

Très honoré Monsieur, je vous remercie humblement de votre lettre du 1er avril, et je vous assure que j'ai été très charmé de ce que vous m'avez envoyé de la part de mylord Brouncker et du docteur Wallis. Ils se sont maintenant montrés effectivement tous deux de très grands personnages. J'ai rencontré quelques-uns des plus capables mathématiciens, depuis que j'ai reçu leurs lettres; je les leur ai montrées et ils ont maintenant pour eux la plus grande vénération. En fait, c'est M. Frenicle qui a été l'occasion de ces visites, car il parlait si hautement de ces lettres qu'il a donné le désir de les voir; car, quoiqu'il ne veuille rien abandonner de ce qu'il a écrit pour les discuter, maintenant il divulgue à tout le monde l'estime qu'il en fait, ce que je tiens pour la marque d'un noble esprit. Je laisse ouvert mon paquet pour le docteur Wallis; vous pourrez le lire et le donner ainsi à mylord Brouncker, que je prie, une fois qu'il en aura vu le contenu, de le sceller et de l'expédier au Docteur.

J'ai écrit par la dernière poste à sa Seigneurie; aussi ne veux-je pas le déranger encore par une lettre spéciale pour lui; mais je vous prie de lui présenter mes humbles respects. En vérité, ces dernières lettres de sa Seigneurie et du Docteur ont amené un grand changement dans les opinions sur leur compte. On les regarde maintenant comme les plus grands mathématiciens du temps, et laissez-moi vous le dire en particulier, je demandais à M. Frenicle, combien il était estimé dans la balance contre l'un ou l'autre; il répondit aussitôt qu'il ne pesait pas devant eux, qu'il n'était qu'un mauvais écolier en présence des plus grands maîtres du temps. Je ne veux pas vous retenir plus longtemps, mais je reste

Votre très humble et très affectionné serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLII.

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très honoré Monsieur, quoique je vous aie ennuyé d'une longue lettre (la quatrième de ce mois) par le dernier courrier, je ne puis encore m'empêcher de vous en adresser une nouvelle aussi tôt; c'est un effet de l'excessif contentement que m'ont procuré les vôtres des 4 et 15 mars; je suis encore obligé de vous le témoigner en un ou deux mots. En vérité, depuis bien longtemps, rien ne m'a fait autant de plaisir que ces lettres, tant ce que vous avez envoyé en même temps à mylord Brouncker, que ce que sa Seigneurie m'a également écrit, avec tant de science, de profondes et subtiles spéculations. Vous venez de faire paraître ici nos mathématiciens comme des Samsons, qui peuvent aisément rompre et mettre en pièces toutes les cordes et tous les pièges des Philistins qui vous assaillaient chaudement. Et les plus grands hommes d'ici sont maintenant forcés d'avouer que l'Angleterre ne le cède à aucune nation du monde en ces nobles spéculations. M. Frenicle dit maintenant bien haut et bien fort combien il révère vos profondes connaissances; il se plaint seulement que vous l'ayez si longtemps laissé s'enfoncer dans son erreur, en badinant si longuement avec lui comme s'il eût été un joueur trop faible pour vous, avant d'en venir avec lui à votre meilleur jeu et à l'emploi de vos forces.

Il m'a promis de m'envoyer aujourd'hui une lettre pour exprimer ces sentiments dans ce sens. Aussi vais-je garder mon paquet ouvert jusqu'à la dernière heure, si sa lettre n'arrive pas avant, afin que vous puissiez l'avoir par ce courrier. Car je crois qu'il ne vous déplaira pas de voir un aussi grand personnage en cette matière reconnaître la vérité comme il devait le faire et s'y soumettre franchement. J'ai aussi envoyé vos lettres à M. Fermat, et, si je reçois son sentiment sur elles, je vous le communiquerai.

Je baise vos mains et reste, digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLIII.

Frenicle a Kenelm Digby.

J'ai lu les dernières lettres du clarissime Wallis, en date des 4 et 15 mars, que vous m'avez communiquées, très illustre et très honoré Chevalier. Elles m'ont clairement fait connaître maintenant combien Wallis a fait de progrès dans les Sciences mathématiques; mais mon esprit demeure en suspens quand je me demande ce qui a induit un homme aussi savant à vouloir être aussi longtemps méconnu par nous. Quel motif pouvait-il avoir, quand c'est de son devoir et de sa profession de faire connaître la Science? Je l'avoue, j'y ai été quelque peu trompé; mais, si j'ai commis quelque faute, elle doit lui être imputée, non à moi. Tel il se montrait, tel il devait être jugé, et pourtant ce jugement défavorable, je ne le portais pas de mon plein gré, mais à regret. Aussi, tant qu'il y avait lieu de blâmer, je n'aurais pas voulu que le blâme parût venir de moi, j'aurais désiré que mon nom fût caché et que ce que je disais parût un avis plutôt qu'un reproche; je ne voulais pas sembler m'être attaqué, même avec quelque raison, à une personne aussi illustre. Mais puisqu'il faut passer à l'approbation, ce n'est plus en secret et à contre-cœur, mais ouvertement et avec joie, que je paraîtrai, sous mon nom, à la face de tout le public savant. J'avais jugé Wallis endormi, j'ai plaisir à l'apprécier éveillé. J'avais déjà vu un Hercule, mais jouant avec des jeunes filles; aujourd'hui je le contemple triomphant des hydres et des monstres; d'abord poursuivant de frivoles et puérils amusements, il accomplit maintenant des labeurs effrayants et gigantesques. C'est au reste le clarissime Schooten que visaient spécialement les problèmes sur les cubes à ajouter à leurs parties; mais il a été prévenu par la sagacité de l'illustre savant, par la puissance de cet Atlas auquel convenait bien une pareille preuve de sa force, qui doit se consacrer à de tels exercices et non pas à des minuties.

Que la Hollande cède donc à l'Angleterre, Leyde à Oxford; si les Gaules Narbonnaise et Celtique pourraient disputer la palme au Kent et à l'Oxford de la Bretagne, si elles pourraient lutter à forces égales, ou même peut-être supérieures, ce n'est pas à moi à le décider; je laisse à d'autres à le juger. Jusqu'à présent le combat n'a pas été égal et les chances n'étaient pas les mêmes.

Je prie votre clarissime Correspondant de m'excuser si j'ai écrit à son sujet plus librement que je n'aurais dû. Vous savez ce qui m'y a poussé, vous savez que je ne voulais lancer contre lui aucune injure, aucune invective, que je ne voulais rien ternir de sa réputation; j'ai tenu cachées les lettres dont il se plaint, j'ai refusé de les montrer même à mes amis qui les demandaient; j'aurais désiré, s'il eût été possible, que Wallis seul les lût. Vous savez que je n'ai agi que pour le stimuler, afin de pouvoir éprouver son mérite, et certes il l'eût mieux fait paraître, s'il eût donné les solutions des cubes avant d'avoir reçu l'opuscule latin que je vous ai dédié, très noble Seigneur, s'il n'eût eu par suite aucun secours. Car il ne manque pas de gens qui auront des soupçons et qui peuvent dire que le clarissime Wallis s'est fatigué à la recherche de ces solutions, mais que son labeur n'ayant pas réussi, pour produire au moins quelque chose, il a donné comme solution l'unité au lieu des nombres cube et carré qui auraient résolu réellement les questions; il a été facile, ajoutent-ils, à un homme, d'ailleurs sagace, de marcher par un chemin déjà frayé, par une voie battue et aplanie; lorsqu'il a pu voir les parties cubiques des cubes donnés et considérer les parties de la somme des mêmes cubes décomposés, il lui a été aisé de fabriquer sa méthode. Si je répète ces imaginations, ce n'est pas que je veuille rien ôter ni dérober à la gloire due à Wallis, mais tout cela ne paraît pas absolument dépourvu de raison et on conjecture que mon opuscule ne lui a pas été sans utilité pour trouver sa méthode. Mais pour mes lettres, ce qui y a semblé méchant et dur pour Wallis a tourné à son avantage; car si mes piqûres ne l'eussent aiguillonné, si j'avais approuvé sa solution, peut-être, content de celle-ci, n'aurait-il pas été plus loin. Que votre clarissime Correspondant ne continue donc pas à m'en vouloir, comme si mes attaques ne lui avaient pas été vraiment utiles, ainsi qu'à tous les savants avec lui; qu'il avoue au contraire que j'ai bien mérité de lui et des autres, en dissipant par la bourrasque de mes chicanes les nuages qui couvraient encore à nos yeux la brillante lumière que possède Oxford et celle, non moins éclatante, qui resplendit sur Londres. Que le clarissime Wallis ne croie pas davantage que je porte envie à la gloire de quelqu'un, ni que moi, qui vénère le mérite où qu'il soit, méprise quelque nation, la vôtre surtout; car j'ai visité autrefois votre Angleterre et j'ai toujours eu pour elle un penchant particulier. J'ai même eu grande joie de reconnaître enfin l'erreur que je partageais avec quelques autres, si j'ai été tant soit peu fâché que votre clarissime Correspondant ait voulu nous cacher si longtemps ses forces. Qu'il ne pense pas enfin que je prise tant ce que je fais; au contraire, j'en fais d'ordinaire bien peu d'estime, ce qui peut amener que je m'étonne si d'autres, qui s'occupent des mêmes questions, n'y parviennent pas, et que j'aie honte de les voir parfois s'égarer bien loin. Mais assez là-dessus; venons à ce qui regarde la Science.

Je regrette que votre clarissime Correspondant nous présente encore l'unité comme une solution légitime et ne veuille pas faire attention que, comme je l'ai souvent répété, si l'unité n'a pas de parties, elle ne peut leur être ajoutée. L'unité, dit-il, est un cube qui, ajouté à ses parties aliquotes, c'est-à-dire à rien, redonne 1, qui est carré. Je réponds : Si l'unité peut être ajoutée à ses parties, celles-ci sont quelque chose; si elles ne sont rien, comment y aurait-il des parties? Je m'étonne comment un savant aussi perspicace s'en tient à une contradiction aussi évidente, surtout quand il s'agit de nombres, non pas d'irrationels; s'il se refuse à admettre ce que je dis, qu'il reste en paix, je n'insisterai pas davantage. Laissons donc une vaine dispute sans importance et venons à la défense de ce que me reproche votre clarissime Correspondant. J'ai à montrer brièvement comment j'ai pu regarder l'unité comme cube et comme carré, même comme un nombre, mais comment en cela je n'ai pas exercé une tyrannie à l'égard de Wallis en lui refusant le droit d'en faire autant. Que l'unité soit universellement regardée comme un cube et comme un carré, je n'ai pas à le nier, mais il ne s'agit pas de cela, que je n'ai jamais contredit; mais qu'on la prenne pour un nombre, cela n'est pas accordé, et l'on conteste notamment qu'elle puisse recevoir l'appellation de nombre, alors qu'elle est solitaire, quoique, pour plus de brièveté, quand elle se trouve avec un ou plusieurs nombres, il soit préférable de dire nombres au pluriel et non, par circonlocution, tels nombres avec l'unité.

J'arrive désormais à ce qui regarde les parties aliquotes. Dans ce que j'ai avancé à ce propos, je voulais seulement indiquer que pour les nombres fractionnaires il n'y a pas proprement de parties aliquotes en nombre déterminé, qu'elles devraient être considérées comme en nombre infini ou indéfini et que par suite on n'a pas à les admettre. Si donc j'ai énuméré $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$ dans les parties aliquotes du nombre $\frac{343}{64}$, je l'ai fait parce qu'elles ont avec leur entier une relation par nombre de même qualité que le nombre entier lui-même, puisque de part et d'autre on a un nombre joint à des fractions; j'ai donc pensé qu'elles ne devaient pas être écartées. Pour m'expliquer plus clairement, le nombre $\frac{343}{64} = 5\frac{23}{64}$; c'est donc le nombre 5 avec la fraction $\frac{23}{64}$; les relatifs des parties $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ sont d'autre part $\frac{343}{2}$, $\frac{343}{4}$, $\frac{343}{8}$, ou bien $171\frac{1}{2}$, $85\frac{3}{4}$, $42\frac{7}{8}$, c'est-à-dire des nombres entiers avec des fractions ou de même nature que le nombre entier auquel se rapportent ces parties. Ces nombres doivent donc être admis comme parties à aussi bon droit que ceux donnés par le très noble, très savant, et très honoré par moi lord Vicomte Brouncker, ornement de la ville de Londres. Ces derniers ont en effet des relatifs qui diffèrent de leur nombre, savoir 343, 49, 7, nombres entiers alors que le proposé est entier avec une fraction. Si donc chacune des parties assignées par moi n'est pas vraiment une partie, mais fait plusieurs parties, le nombre aussi auquel elles se rapportent n'est pas une, mais plusieurs parties. D'un autre côté, je reconnais dans chaque nombre entier une propriété qui fait défaut aux parties aliquotes données par l'illustrissime Vicomte, c'est que chaque partie aliquote d'un nombre composé quelconque a comme relatif une autre des parties du même nombre ou du moins elle-même (si le nombre est carré), sauf toutefois l'unité qui a pour relatif non une partie, mais le nombre total. Or dans les parties indiquées dont il est question, la première $\frac{1}{64}$ correspond au nombre 343, la suivante $\frac{7}{64}$ au nombre 49, la dernière enfin au nombre 7. Ces relatifs, qui devraient être des parties du nombre, se trouvent plus grande que lui.

Je rends grâces au clarissime Wallis de m'avoir averti d'une faute due à la négligence du typographe; peut-être sans lui ne l'aurais-je jamais remarquée; vous savez au reste que ce lapsus ne m'est pas imputable et que dans l'original vous pouvez lire le nombre exact et tel que le clarissime Wallis l'a corrigé. Cependant je dois craindre d'avoir laissé échapper des fautes du même genre dans les solutions de la question du très savant Wallis, car je les ai données à la hâte, au fur et à mesure que je les trouvais, et sans les revoir; je demande donc qu'on veuille bien m'excuser s'il y a lieu; je substituerai les nombres véritables à ceux qui seraient fautifs.

Puisque enfin le clarissime Wallis a trouvé comme moi, quoique un peu aidé pour les deux premiers, cinq cubes donnant un carré, je lui en envoie un sixième, le plus éloigné de tous, et qui est noté analytiquement page 4 de l'opuscule latin précité; j'y ajoute un second carré. Mais comme il est peut-être occupé à de graves spéculations, pour ne pas le retenir longtemps à leur examen, je les donnerai en parties avec les parties des sommes relatives à chaque cube ou carré partiel.

Racines des cubes partiels.	Parties des sommes des cubes partiels et de leurs parties.									
32	»	3	5	»	»	17	»	»	»	»	257
241	4	»	»	$\overline{11}^2$	»	»	»	»	113	»	257
467	8	9	5	»	13	»	»	»	113	193	»
243	32	»	5	»	»	17	»	41	»	193	»
73	4	»	5	»	13	»	37	41	»	»	»
31	64	»	»	»	13	»	37	»	»	»	»
5	4	3	»	»	13	»	»	»	»	»	»
7	16	»	25	»	»	»	»	»	»	»	»

Racines des carrés partiels.	Parties des sommes des carrés partiels et de leurs parties.						
499	3	7	»	»	»	»	$\overline{109}^2$
263	»	49	13	»	»	»	109
191	»	7	$\overline{13}^2$	»	31	»	»
4	»	»	»	»	31	»	»
5	»	»	»	»	31	»	»
67	3	49	»	»	31	»	»
439	3	»	»	»	$\overline{31}^2$	67	»
37	3	7	»	»	»	67	»
163	3	7	»	19	»	67	»
11	»	7	»	19	»	»	»
7	3	»	»	19	»	»	»

Mais quelque plaisir que je prenne à abuser de votre patience, pour vous occuper si longtemps à cet entretien, très illustre Seigneur, pour qui j'ai autant de respect que d'affection, je n'oserais certes pas le faire si je n'avais pas tant de confiance en votre bienveillance pour,

Très excellent Chevalier,

Votre très dévoué et très obéissant

B. Frenicle de Bessy.

LETTRE XLIV.

John Wallis a Kenelm Digby.

Je vous rends très humbles grâces, illustrissime Seigneur, pour votre lettre du 8 mai, que j'ai reçue avec celle de Frenicle y incluse. Si je ne puis revendiquer comme m'étant dues les louanges dont vous m'accablez (car qui peut les mériter pour la solution de quelques problèmes d'Arithmétique ou de Géométrie?), je ne puis estimer peu de chose de recevoir de vous de tels éloges spontanés. Qu'ils viennent d'une appréciation dont chez de telles personnes le poids est toujours considérable, qu'ils ne soient dus qu'à l'affection, on doit également priser soit l'estime, soit l'amour des grands hommes, et si je puis du moins être assuré de l'une ou de l'autre, je dois le reconnaître avec gratitude. En tout cas je suis heureux, illustrissime Chevalier, d'avoir heureusement répondu, soit à vos désirs, soit aux questions de vos clarissimes Correspondants, et s'il reste encore quelque point où ils ne croient pas avoir encore entière satisfaction, comme j'ai résolu leurs principales propositions, et donné les méthodes de solution (que d'ailleurs le temps me manque), je ne crois pas que le reste vaille la peine de nous embarrasser d'escarmouches sans fin. Je ne doute pas en effet qu'ils ne pensent bien, au vu de nos solutions, que nous pouvons également résoudre le reste, pourvu que nous ayons le désir et le loisir de nous en occuper; et je ne crois pas non plus que vos très nobles Correspondants exigent que nous le fassions. Car ils ont négligé toutes nos questions, sauf celle des deux carrés qui, ajoutés à leurs parties aliquotes, fassent la même somme, point sur lequel j'ai eu ample satisfaction; ils ne doivent donc pas se fâcher si je ne réponds pas à quelques-unes de leurs demandes.

Cependant, pour ne pas paraître tergiverser, voici ce que je dirai à la hâte sur les deux questions qui restent dans la dernière lettre de Fermat.

En premier lieu, il demande deux cubes rationels faisant la même somme que les deux donnés 1 et 8. Je réponds que les cubes du nombre positif $\frac{20}{7}$ et du négatif $\frac{17}{7}$ donnent la même somme que 1 et 8, car

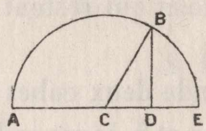
$$\frac{8000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{3087}{343} = 9.$$

Le même moyen qui m'a donné un cube positif et un négatif ou, ce qui revient au même, la différence de deux positifs égale à la somme des deux cubes donnés, ce même moyen fournira aussi deux positifs; mais le couple ci-dessus s'est présenté d'abord. Certes, votre très savant Correspondant ne peut estimer plus difficile de trouver deux cubes rationels qui fassent une somme donnée (possible) que deux qui fassent une différence donnée (possible), quoique le calcul puisse être plus long soit d'une façon soit de l'autre. Au reste, dans le cas proposé, il ne s'agit que de trouver deux cubes dont la somme fasse neuf fois un cube; en prenant une Table de cubes et en employant des abrégés qui se présentent d'eux-mêmes à un homme exercé, et analogues à ceux que nous avons déjà mis en œuvre pour le troisième problème de Fermat, il n'y a pas une grande difficulté pour qui veut entreprendre le calcul, car ces cubes, divisés par le troisième, donneront pour somme le nombre $9 = 8 + 1$. Telle est la méthode à employer pour toute somme ou différence possible de cubes à chercher.

En second lieu, il propose de démontrer ce théorème : *Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire soit un nombre carré.* Voici comment je le prouve :

Dans la figure ci-contre (*fig.* 8), dont le tracé est immédiat, les côtés du triangle rectangle BCD ne peuvent être énonçables en nombres, si AD et DE ne sont pas entre eux comme des nombres plans semblables (autrement leur produit ne sera pas un nombre carré, et la racine BD

Fig. 8.



ne sera pas énonçable) ou comme des nombres carrés. Soient les nombres $2a^2$, $2e^2$. Dès lors CB, CD, BD seront proportionels à a^2+e^2, a^2-e^2, $2ae$, et CD, $\frac{1}{2}$BD le seront à a^2-e^2, ae. Dès lors, comme la différence de deux carrés et leur moyen proportionel ne peuvent être des plans semblables, leur produit ou l'aire du triangle ne peut être un carré. C. Q. F. D.

Au reste, je n'ai rien appris du sentiment de Fermat sur nombre de nos lettres, car pour toutes celles qui ont suivi la date du 5 novembre, le silence est complet.

Quant à votre dernière lettre et à celle de Frenicle, je n'ai qu'à vous remercier pour mettre enfin un terme à ces discussions et aussi à l'ennui qu'elles vous ont occasionné hors toute mesure et dont je demande pardon pour,

Très illustre Chevalier,

Votre très humble, très obéissant

et dévoué serviteur,

John Wallis.

Oxford, 20/30 juin 1658.

APPENDICE AUX LETTRES PRÉCÉDENTES [1].

LETTRE XLV (47).

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Très illustre Lord, les lettres qui précèdent étaient déjà imprimées et commençaient à être distribuées quand j'ai reçu aujourd'hui, par votre intermédiaire, une lettre de l'illustrissime chevalier Digby, datée du 19 juin, qui en renfermait une autre de M. de Fermat. Celle du 25 mai dont il parle doit être perdue avec ce qu'elle pouvait renfermer, ou du moins rien ne m'est parvenu. Mais pour celles que je viens de recevoir, en raison de plusieurs propositions de Fermat, élégantes et dignes de lui, je les ai aussitôt envoyées à l'imprimerie, pour les joindre comme appendice aux autres, au moins dans les exemplaires qui ne sont pas encore parus. Ainsi le public pourra connaître des spécimens d'un tel génie, bien dignes d'un homme aussi supérieur, et ce sera une raison pour forcer cet illustre savant de mettre au jour ce qu'il garde jusqu'à présent pour lui. Il est bien établi que dans ces matières il est au premier rang, qu'il s'est particulièrement occupé de questions sur les nombres généralement négligées jusqu'à présent, qu'il a fait aussi en Géométrie des recherches d'une admirable subtilité; on ne peut donc permettre qu'il garde pour lui et les siens tout ce trésor qui serait d'un si grand prix pour l'univers savant. Je suis sûr que là-dessus votre Seigneurie est entièrement de mon avis, comme elle le sera pour les remercîments à lui faire en raison de l'affabilité qu'il nous témoigne et de l'éloge dont il nous honore, éloge que nous avons plaisir à lui retourner. Mais il faut ou ne pas répondre à sa

[1] Dans la seconde édition du *Commercium,* la distinction comme appendice a été supprimée, et les lettres suivantes sont imprimées dans l'ordre XLVI, XLVII, XLV; leur nouveau numérotage est indiqué entre parenthèses et en chiffres modernes.

lettre ou différer de le faire, puisque nous avons eu à peine le temps de la lire avant de l'envoyer à l'imprimerie, pour suivre le reste déjà terminé. D'ailleurs ce qu'il a déjà fait lui-même, il n'est pas nécessaire que nous le fassions à notre tour; là où il peut être arrêté, si notre aide pouvait lui être utile, nous ne la refuserons pas. Après vous avoir écrit à la hâte, il me reste à me dire,

Très illustre Lord,

Votre très respectueux et très obéissant

John Wallis.

Oxford, 3/13 juillet 1658.

LETTRE XLVI (45).

Kenelm Digby a John Wallis.

Noble Sir, j'ai dernièrement reçu de M. Fermat le papier ci-inclus avec prière de lui de l'envoyer à Mylord Brouncker et à vous-même. J'espère que vous aurez reçu mes lettres des 8 et 25 mai. Mais le principal objet de celle-ci sera de prendre congé de vous pour plusieurs mois; car je vais entreprendre un long voyage qui me prendra au moins tout cet été. Si je retourne à Paris, je vous en informerai en vous présentant mes humbles respects. En même temps je cesse de vous importuner et je reste,

Noble Sir,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

que vous honorez grandement,

Kenelm Digby.

Paris, 19 juin 1658.

LETTRE XLVII (46)

(jointe à la précédente).

Fermat a Kenelm Digby.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 96, Tome II, page 402; Tome III, page 314.)

RÉPLIQUE ANONYME AU COMMERCIUM.

[A la suite de l'exemplaire V913 du *Commercium Epistolicum* de Wallis à la Bibliothèque Nationale, et dans l'un des manuscrits de Boulliau (Bibl. Nat. franç. n° 13040) se trouve un imprimé anonyme de trois pages sur une demi-feuille petit in-4°. Cette pièce, qui constitue une réplique au *Commercium*, étant très rare (¹), j'en reproduis ci-après le texte latin, suivi de la traduction. Quant à l'auteur, si la question est posée entre Frenicle et Fermat, il ne peut guère, ce semble, y avoir de doute, quoique Libri ait hésité un moment (*voir* Tome I, Avertissement, pages XXIII, lignes 9 à 12), et que, dans ses *Recherches sur les manuscrits de Fermat,* M. Ch. Henry se soit, contre Libri, prononcé en faveur de la seconde hypothèse. J'estime, en effet, que Fermat doit être absolument écarté, si l'on considère le fait même de l'impression, le ton de la réplique, enfin certaines particularités de l'orthographe; tout, au contraire, nous indique Frenicle, si ce n'est qu'en tous cas l'auteur aura voulu déguiser sa personnalité. C'est, en effet, Frenicle lui-même qui est désigné dans la pièce sous l'initiale « F. », tandis que Fermat est indiqué par l'expression « amicus noster ». On ne peut donc exclure absolument la possibilité que l'imprimé anonyme soit dû à un troisième mathématicien français, plus ou moins lié également avec Digby (par exemple, Carcavi, Mylon ou Martin de Laurendière); mais il aurait alors été au moins inspiré par Frenicle; la pièce doit donc valoir comme de ce dernier.]

ILLUSTRISSIMO ET CLARISSIMO VIRO D. K. D (²).

Commercii Epistolici tandem data nobis tuo beneficio est copia, in qua primum illud inquirendum venit an in commercium publicum cadere debuerint epistolæ privatæ, non solum non consentientibus, sed ne suspicantibus illud quidem aut scientibus earum authoribus : hac enim in re aliquam saltem juri gentium vim factam nemo merito inficias eat. Sed nil forsan expedit quæstionibus mathematicis ethicas

(¹) La réédition, donnée par M. Ch. Henry dans ses *Recherches* (pages 178 à 180), a été faite, en réalité, sur une copie d'Arbogast, et présente par suite quelques inexactitudes.

(²) D(omino) K(enelm) D(igby).

immisceri : detur itaque venia illustrissimæ et doctissimæ nationi, quæ gloriam suam intra septa nimis angusta noluit continere. Vicit nempe amor patriæ, cujus famam extendere enixe semper et cupiunt et laborant boni cives. Sed an ipsi satis hac in parte ab illis consultum sit, videntur aliquantulum ambigere nostrates et ad illud poetæ, tentabundi licet ac dubitabundi, quadamtenus respicere.

Quondam etiam victis redit in præcordia virtus,
Victoresque cadunt Danai (1) ....

An autem instaurare ipsis prælium liceat aut, aliqua saltem ratione, victoriæ a se dedecus amoliri, tuum (Vir clarissime), postquam hæc paucissima legeris, erit judicium.

Quæ hactenus viris vestratibus proposita sunt, in duas commode species dividi possunt : vel enim in problemata specialia, vel in theoremata aut problemata universalia et generalia. Ad priorem speciem spectant problemata de partibus aliquotis, et speciales quæstionis de quadratis unitate diminutis casus. Horum legitimam solutionem ab ipsis accepimus : attamen præcesserat libellus Domini F. (2), cujus ope cum facillimum fuerit numeros ab ipso exhibitos ἀναλύειν (3), et constructionis formam et processum inde nullo negotio elicere, ἐπέχουσι (4) nonnulli et, ad removendum, si quis supersit, scrupulum, demonstrationes theorematum generalium, quæ est secunda propositarum quæstionum species, et in qua nullum aut specimen aut auxilium à nostris habuerunt, ab ipsis merito exposcunt : qua in parte quid aut tentaverint aut produxerint vestrates, en accipe :

Theorema præcipuum hoc erat : Dato quovis numero non quadrato in integris, dantur infiniti quadrati in integris, qui in datum numerum ducti, adscita unitate, conficiunt quadratum. Verba autem *in integris* hic addimus; licet enim, ex iis quæ in scripto amici nostri (5)

(1) Virgile, *Énéide*, II, 367–8.
(2) La *Solutio duorum problematum etc.* qui est perdue.
(3) ἀναλύσειν I.
(4) ἐπέχοι I.
(5) Pièce 81 de la *Correspondance de Fermat ;* traduction ci-avant p. 312.

præcesserant, luce clarius sit de integris tantum ibi quæstionem esse, tollere tamen omnino ambigua non gravamur. Hujus theorematis demonstrationem facilem sibi author Commercii asserit paginis 82 et 83; imo hanc ibi contineri diserte innuit; sed analystæ nostri ne vestigium quidem demonstrationis illic agnoscunt.

Secundum theorema negativum hoc erat : Nullus numerus cubus in duos cubos rationales dividi potest. Hujus cum demonstrationem non dederit F. in libello à se anno 1657 edito (¹), — licet in eo quæstionem proposuerit huic consimilem his verbis : Invenire 2 vel 3 vel 4 etc. hexagona (²) centralia quorum latus unitate tantum differat, et eorum summa sit æqualis cubo. Quæstio enim illa ad problema nostrum (³) reduci potest, in quo datum cubum in duos cubos rationales dividendum proposuimus, modo unitas, ut vult ipse F. ex hexagoni (⁴) definitione, inter hæc hexagona (⁵) non computetur; — debuerant vestrates huic statim demonstrationi incumbere. Sed nescio qua ratione factum sit ut neglexerint omnino ea in quibus nostrates ipsis non præiverant.

Tertium theorema generale, quod sub forma problematis concipi potest, hoc erat : Datus quivis numerus de (⁶) duobus cubis compositus in duos alios cubos est divisibilis; — vel, si problema universale proponendum mavis : — Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere; quæ divisio per nos potest infinities variari. Huic autem propositioni non tantum canon nullus generalis datus est, quem tamen inquirebamus, sed in speciali problematis in numero 9 propositione, loco summæ quæ profondæ et abstrusæ est disquisitionis, data est differentia tantum; in quo casu nullam aut Vieta aut Bachetus in Diophantum agnoverant difficultatem,

(¹) La *Solutio* précédemment mentionnée.

(²) Exagona I.

(³) Le problème avait été proposé par Fermat (Lettre LXXXIII, traduction ci-avant p. 313), mais *nostrum* doit s'entendre : « de notre compatriote ».

(⁴) Exagoni I.

(⁵) Exagona I.

(⁶) *Sic* I.

cum problema nostrum ne attingerint (1) quidem, imo illud difficillimum videantur judicasse (2).

Quartum problema negativum hoc erat : Nullum in numeris est triangulum rectangulum cujus area sit numerus quadratus. Hujus demonstrationem existimat author Commercii dedisse in pagina sui libelli ultima : sed ne hîc quidem demonstrationem ullam deteximus. Supponit quippe pro medio demonstrationis theorema sequens : Differentia duorum quadratorum atque eorumdem medius proportionalis non possunt esse plani similes : quod nihil aliud est quam obscurum per obscurius aut saltem æque obscurum probare. Licet enim verum nobis esse constet theorema illud suppositum, cur tamen illud non demonstraverit author non video, cum non minorem ipsius demonstratio, quam demonstratio theorematis, habeat difficultatem.

Vides itaque (Vir Clarissime) quos evelli nostratibus scrupulos ab authore illo operæ pretium sit, ut omni ex parte victoriam consequatur. Major certe (3) viæ pars ab ipso jam peracta est, nec Philistinis ulla satis tuta latebra aut effugium est contra Samsonem. Effice (4) igitur (Vir Clarissime) ut tanti et tam celebres viri fractos jam et labantes adversarios ab his quatuor vix satis fidis propugnaculis actutum dejiciant, quo peracto plenæ vestratium victoriæ, consentientibus vel nostratibus, plenus etiam triumphus accedet. Nec addictum me minus aut jussis vestris obsequentem aut tu, Vir Illustrissime, aut ipsi quoque in posterum experientur. Vale.

A l'illustrissime et clarissime Sir Kenelm Digby.

Grâce à vous, nous avons enfin entre les mains ce *Commercium epistolicum* qui soulève une première question, à savoir si des lettres particulières auraient dû être livrées au public non seulement sans l'aveu

(1) Lisez *attigerint*.
(2) indicasse I.
(3) certæ I.
(4) Effige I.

de leurs auteurs, mais même à leur insu et avant qu'ils en eussent conçu le moindre soupçon; personne ne pourra contester à juste titre que dans cette occasion le droit des gens n'ait au moins subi une certaine atteinte. Mais il ne faut peut-être pas mêler des questions morales à des sujets mathématiques; souffrons donc une pareille licence à une illustre et savante nation, qui n'a pas voulu limiter sa gloire par des barrières trop étroites. C'est l'amour de la patrie qui l'a emporté; les bons citoyens désirent à tout prix étendre sa renommée et consacrent leurs efforts à ce but. Mais a-t-il été, dans ce cas, complètement atteint? Nos compatriotes semblent quelque peu en douter et, quoique avec hésitation et sans assurance, se rappeler ces vers du poète :

> Mais parfois le courage revient au vaincu,
> Et le Grec triomphant succombe à son tour.

Peuvent-ils renouveler la lutte ou, pour quelque motif au moins, éviter le déshonneur de la défaite? Il vous appartiendra d'en juger, quand vous aurez lu ces quelques lignes.

Ce qui, jusqu'à présent, a été proposé à vos compatriotes peut être aisément distingué en deux classes de questions : d'une part, les problèmes particuliers, de l'autre, les théorèmes ou problèmes universels et généraux. Dans la première classe rentrent les problèmes des parties aliquotes et les cas particuliers de la question sur les carrés diminués de l'unité. Nous avons reçu d'Angleterre une solution légitime pour tous les problèmes de cette classe; cependant elle avait été précédée par l'opuscule de M. F(renicle), grâce auquel il était très facile d'analyser les nombres qu'il avait donnés et de déduire ainsi sans aucune peine le mode et le procédé de construction. On peut donc suspendre son jugement et afin d'écarter tout scrupule, s'il en reste, réclamer à bon droit de vos compatriotes les démonstrations des théorèmes généraux qui constituent la seconde classe des questions proposées et pour lesquels ils n'ont eu de notre côté ni modèle ni secours. Or qu'ont-ils tenté ou produit à ce sujet? Je vais le dire.

Le principal théorème était le suivant : Étant donné un nombre entier non carré, on peut déterminer une infinité de carrés entiers, tels que le produit de chacun d'eux par le nombre donné, après addition de l'unité, fasse un carré. J'ajoute ici le mot *entiers;* quoiqu'en effet, d'après ce qui précédait dans l'écrit de notre ami (Fermat), il soit plus clair que le jour que la question portait seulement sur les nombres entiers, je n'ai aucune raison pour ne pas écarter désormais toute ambiguïté. Or l'auteur du *Commercium* affirme, pages 82 et 83 (1), qu'il peut facilement démontrer ce théorème; bien plus il fait entendre que la démonstration est expressément contenue dans ce passage; mais nos analystes ne peuvent en reconnaître aucune trace.

Le second théorème était celui-ci : Aucun nombre cube ne peut être partagé en deux cubes rationels. Dans l'opuscule qu'il a publié en 1657, F(renicle) n'a pas donné la démonstration de ce théorème; cependant il y a proposé une question analogue en ces termes : Trouver deux, trois ou quatre, etc. hexagones centraux, tels que leurs côtés diffèrent seulement d'une unité et que leur somme soit égale à un cube (2). Cette question peut en effet se ramener au problème précédemment énoncé, partage d'un cube donné en deux cubes rationels, pourvu que l'on ne compte pas l'unité parmi les hexagones centraux, ainsi qu'au reste l'entend F(renicle) d'après sa définition de l'hexagone. Vos compatriotes auraient donc dû s'attacher aussitôt à chercher la démonstration désirée; mais je ne sais comment il se

(1) *Voir* ci-avant pages 433 à 435.

(2) Frenicle entend par hexagone central de côté n, le nombre

$$1+\sum_{1}^{n} 6(n-1) = n^3-(n-1)^3.$$

La somme de p hexagones centraux consécutifs (des côtés n à $n+p-1$) sera donc

$$(n+p-1)^3-(n-1)^3.$$

Demander qu'elle fasse un cube, revient donc à proposer de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(n+p-1)^3=(n-1)^3+q^3.$$

Frenicle exclut naturellement la solution $n=1$, $p=q$.

fait qu'ils aient absolument négligé les questions pour lesquelles ils n'ont pas été devancés par les nôtres.

Le troisième théorème général, qui peut être conçu sous forme de problème, était le suivant : Tout nombre donné somme de deux cubes peut être partagé en deux autres cubes; ou si vous préférez la proposition comme problème général : Un nombre somme de deux cubes étant donné, le partager en deux autres cubes. Nous pouvons faire varier ce partage à l'infini. Or pour ce problème aucune règle générale n'a été fournie, comme nous le demandions, et dans le cas particulier du nombre donné 9, au lieu de le donner comme somme, ce qui demande une profonde et abstruse recherche, il n'a été donné que comme différence; chose à laquelle ni Viète ni Bachet sur Diophante n'ont trouvé aucune difficulté, tandis qu'ils n'ont pas même abordé notre problème, qu'au contraire ils semblent l'avoir trouvé très difficile.

Enfin il y avait un quatrième théorème général négatif : Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire fasse un nombre carré. L'auteur du *Commercium* estime qu'il en a donné la démonstration à la dernière page de son Livre (1); mais nous n'avons pas davantage pu y découvrir aucune démonstration. Il suppose, en effet, comme moyen de démonstration le théorème suivant : La différence de deux carrés et leur moyen proportionel ne peuvent être des plans semblables [c'est-à-dire des nombres dans le rapport de deux carrés entiers]. Mais ce n'est là que prouver ce qui est obscur par une autre assertion encore plus obscure ou au moins aussi obscure. Nous reconnaissons à la vérité comme exact ce théorème supposé, mais je ne vois pas pourquoi l'auteur du *Commercium* n'en a pas donné la démonstration qui certainement présente autant de difficulté que celle de l'énoncé proposé.

Vous voyez ainsi quels scrupules cet auteur doit encore écarter pour remporter sur les nôtres une victoire complète. Sans aucun

(1) Lettre XLIV, page 600.

doute il a déjà accompli la plus grande part de la route et, contre ce Samson, les Philistins n'ont plus ni cachette ni refuge assez sûr. Obtenez donc que des héros aussi justement célèbres délogent encore, de ces quatre derniers retranchements à peine solides, leurs adversaires déjà épuisés et chancelants; cela fait, les vôtres auront pleine victoire et plein triomphe, de l'aveu même des nôtres. En tous cas vous me trouverez toujours aussi dévoué et obéissant à vos ordres et je ne le serai pas moins à l'égard de nos adversaires.

ERRATA.

Tome I.

Avertissement, page XII, ligne 20 : La lettre en question porte seulement l'intitulé : « Clarissimo Gassendo P. F. S. T. »; le nom de Fermat n'est donc indiqué que par la phrase de Sorbière citée Tome II, page 268, note.
Avertissement, pages XIX et XX, *voir* Tome III, Avertissement, pages IX-XV.
Page 237, note (1), *voir* Tome III, page 203, note (1).

Tome II.

Page 25, ligne 6 : *au lieu de* B et C, *lire* D et C.
» 26, ligne dernière de la note 2 : *au lieu de* Nicalaus, *lire* Nicolaus.
» 151, titre courant : *au lieu de* XXX, *lire* XXIX.
» 180, ligne dernière : *au lieu de* $3-\sqrt{18}$, *lire* $3-\sqrt{8}$.
» 272, ligne 12 : *au lieu de* B ad O, *lire* O ad B.
» 346 : *ajouter à la lettre* LXXXIV le *Post-scriptum*. Tome III, page 421.
» 359, note 1 : le passage de Galilée dont il s'agit se trouve à la première page de la quatrième journée dans le Dialogue des *Massimi Sistemi*.
» 407, ligne avant-dernière : *corriger* quartam (*texte de Wallis*) *en* quintam.

Tome III.

Page 78, ligne 10 en rem. : *au lieu de* RAB, *lire* RAC.
» 119, ligne 7 : *au lieu de* par, *lire* pour.
» 124, titre courant : *au lieu de* [135, 137], *lire* [136, 137].
» 415, ligne 10 : *au lieu de* il, *lire* Elle.
» 427, ligne 9 : *au lieu de* 1er octobre, *lire* 1er décembre.

FIN DU TOME TROISIÈME.