NUOVI CONTRIBUTI ALLA TEORIA GENERALE DELLE ALGEBRE (*)

Un classico teorema dello WEDDERBURN (1), col quale venne estesa ad algebre definite in un corpo qualsiasi una proposizione che il CARTAN (2) aveva dimostrata per le algebre reali, assicura che ogni algebra semplice A dotata di modulo può considerarsi come il prodotto diretto di un'algebra primitiva B per un'algebra regolare C, B e C avendo entrambe per modulo il modulo di A.

Lo spezzamento di A in un prodotto diretto di tal natura può farsi in generale in più modi; ma per un teorema, stabilito da me nel 1921 (3) e ritrovato dallo WEDDERBURN nel 1925 (4), comunque un tale spezzamento si faccia, le algebre, primitiva e regolare, che concorrono a formarlo, sono individuate di fronte alla relazione di equivalenza.

Per le algebre con modulo dotate di elementi eccezionali e per ognuna delle quali sia semplice l'algebra complementare della sotto-algebra eccezionale — cioè per le algebre che, insieme con quelle semplici, gli autori tedeschi dicono *primarie* — lo WEDDERBURN (5) stabilì pure un teorema simile a quello più sopra ricordato per le

(*) *Rend. Sem. Mat. Univ. Roma,* (4) 1 (1936-37), pp. 59-82.

(1) J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *On hypercomplex numbers* (Proceedings of the London Mathematical Society, s. 2, vol. 6, 1908).

(2) E. CARTAN, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XII, 1898).

(3) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 352. Nel seguito questo volume sarà citato con la sigla *C.N.A.*

(4) J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *A theorem on simple algebras* (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 31, 1925).

(5) Loc. cit. 1).

algebre semplici; ed a questo lo ARTIN apportò nel 1927 la stessa precisazione che io avevo data per quello riguardante le algebre semplici (6).

Lo ARTIN, anzi, rese ancora più stringente il suo enunciato dimostrando che i prodotti diretti, ciascun dei quali eguaglia, secondo i teoremi dello WEDDERBURN, una data algebra primaria (semplice, o non), non sono altra cosa che i trasformati di uno di essi mediante gli automorfismi interni dell'algebra.

Con le pagine che seguono, ricordata la nozione di *segnatura* per un automodulo od un'algebra, da me precedentemente introdotta, (*C. N. A.*, pag. 352 e segg.) intendo mostrare:

1°) come mediante la segnatura si caratterizzino le algebre dette dagli autori tedeschi *primarie* o *completamente primarie*;

2°) come di fronte al gruppo automorfo interno di un'algebra (naturalmente dotata di modulo) un automodulo sia pienamente individuato dalla sua segnatura — fatto che già avevo posto in rilievo per le algebre semi-semplici (*C. N. A.*, pag. 357);

3°) come il teorema dello ARTIN possa essere esteso ad una qualsiasi algebra con modulo, stabilendo che è unica di fronte al gruppo automorfo interno la rappresentazione di una tale algebra A in una certa somma del tipo

$$B_1 \times C_1 \dotplus B_2 \times C_2 \dotplus \dots \dotplus B_m \times C_m + N,$$

dove le $B_1, B_2, \dots, B_m$ sono algebre a modulo primitivo, le $C_1, C_2, \dots, C_m$ sono algebre regolari, il modulo $u^{(s)}$ di B_s $(s = 1, \dots, m)$ coincide con quello di C_s, la somma $u^{(1)} + \dots + u^{(m)}$ è il modulo di A, ed N è un sistema, che o è zero o è contenuto nella sotto-algebra eccezionale. Rappresentazione che io detti nel 1921 (*C. N. A.*, pag. 373 e segg.), e che per il complemento, che ora vi apporto assume, se non erro, una notevole importanza.

§ 1. La segnatura di un automodulo o di un'algebra non pseudonulla

1. Sia A un'algebra non pseudonulla e si indichi con E lo zero o la sotto-algebra eccezionale di A, secondo che A è priva o dotata di elementi eccezionali.

(6) E. ARTIN, *Zur Theorie der hypercomplexem Zahlen* (Abhandlungen aus dem matematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. V, 1927).

Come è noto, l'algebra $A - E\,(= A,$ se $E = 0)$ è allora semi-semplice e con modulo; quindi o è addirittura semplice, o è somma diretta di algebre semplici.

Poniamo

$$(1)\qquad A - E = (A - E)^{(1)} \dotplus (A - E)^{(2)} \dotplus \dots \dotplus (A - E)^{(m)},$$

con $(A - E)^{(i)}$ algebra semplice e con l'intesa che $(A - E)^{(1)}$ stia per $A - E$, se questa è semplice.

Sia ora v un automodulo di A, e sia

$$(2)\qquad v = v_1 + v_2 + \dots + v_t$$

con le v_i automoduli primitivi, a due a due mutuamente nullifici se $t > 1$; allora, se si denota con $[x]$ la classe di A mod E individuata da un elemento che sia stato indicato con x, $[v]$, $[v_1], \dots, [v_t]$ saranno altrettanti automoduli di $A - E$, sarà

$$[v] = [v_1] + \dots + [v_t]$$

e $[v_1], \dots, [v_t]$ saranno automoduli primitivi, a due a due mutuamente nullifici se $t > 1$ (*C. N. A.*, pag. 285].

Per teoremi noti [*C. N. A.*, pag. 317] ognuno degli automoduli $[v_i]$ dovrà esser contenuto in una (ed una sola) delle algebre $(A - E)^{(i)}$; e, se q_i è il numero $(\geqq 0)$ di essi che appartengono ad $(A - E)^{(i)}$ e le algebre $(A - E)^{(i)}$ si considerano nell'ordine in cui i loro simboli si succedono nel secondo membro della (1), l'm-complesso di interi (non negativi)

$$(q_1, q_2, \dots, q_m)$$

è, rispetto al considerato ordinamento delle algebre $(A - E)^{(i)}$, un *carattere* di v in A o di $[v]$ in $A - E$, nel senso che esso non varia, al variare della decomposizione di v in una somma di automoduli primitivi del tipo della (2) [cfr. *C. N. A.*, pag. 352 e segg.]

Cotesto carattere è ciò che io ho chiamato *segnatura* di v *in* A (o di $[v]$ in $A - E$), rispetto a quel detto ordinamento; o *segnatura*, senz'altro, perchè è sempre da sottintendere che quando si parla di segnature di automoduli in un'algebra non pseudonulla esse sono tutte da computare rispetto a un certo ordinamento delle algebre semplici nella cui somma diretta si decompone l'algebra data — se è semi-semplice — o — in caso contrario — l'algebra complementare della sua sotto-algebra eccezionale.

In particolare, la segnatura del modulo di $A - E$ — che coincide con quella del modulo di A, se A ne è dotata, o, in caso contrario, con quella di un qualsiasi automodulo principale di A — è ciò che dicesi la *segnatura* di A (o di $A - E$).

Quest'ultima è un m-complesso

$$(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

di interi tutti positivi; e, qualunque sia l'automodulo v più sopra considerato, per la sua segnatura $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ si ha

$$q_1 \leqq p_1, q_2 \leqq p_2, \dots, q_m \leqq p_m,$$

qui valendo sempre il segno di eguaglianza quando, e solo quando, v sia un automodulo principale (in particolare, il modulo) di A.

Naturalmente, se v è un automodulo primitivo (indi $t = 1$), degli interi della sua segnatura — ove sia $m > 1$ — uno è eguale ad 1, mentre gli altri sono tutti nulli; e l'osservazione è chiaramente invertibile.

2. Ciò premesso, supponiamo che u sia un automodulo principale di A.

Decomponendo A rispetto ad u nella somma di quattro sistemi complementari alla maniera di PEIRCE, e notando che di essi gli ultimi tre sono contenuti in E, si avrà

$$A = uAu + M,$$

con $M \leq E$.

Avendo supposto che la segnatura di A sia $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, u sarà decomponibile nella somma di

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_m$$

automoduli primitivi, a due a due mutuamente nullifici se $p > 1$; dei quali p_i, e siano

$$u_{p_1+\dots+p_{i-1}+1}, \dots, u_{p_1+p_2\dots+p_i}$$

(dove $p_1 + \dots + p_{i-1} + 1$ sta per 1, se $i = 1$), individueranno rispetto al mod E classi appartenenti ad $(A - E)^{(i)}$.

Posto

$$u^{(1)} = u_1 + u_2 + \dots + u_{p_1},$$

$$u^{(2)} = u_{p_1+1} + u_{p_1+2} + \dots + u_{p_1+p_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(m)} = u_{p_1+\dots+p_{m-1}+1} + \dots + u_p,$$

$$A_{i,j} = u_i\, A u_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p),$$

$$H_s = u^{(s)}\, A u^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \dots, m),$$

$[u^{(s)}]$ sarà il modulo di $(A - E)^{(s)}$, uAu sarà la somma di tutti i sistemi $A_{i,j}$, H_s sarà la somma di quelli fra questi sistemi per i quali gl'indici i, j cadono entrambi nella serie

$$p_1 + \dots + p_{s-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{s-1} + p_s,$$

le algebre H_s saranno dotate di somma diretta, e quindi, se N è la somma dei sistemi $A_{i,j}$ non contenuti nelle algebre H_s, sarà

$$uAu = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_m + N,$$

e infine

$$A = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_m + M + N.$$

Per ragionamenti che ho sviluppati altrove [*C. N. A.*, pag. 373 e segg.] ciascun elemento di N, al pari di quelli di M, appartiene ad E; un elemento di H_s è eccezionale per A quando, e solo quando, esso è tale per H_s; e la segnatura di H_s è (p_s), di guisa che H_s è il prodotto diretto di un'algebra a modulo primitivo, B_s, e di un'algebra regolare, C_s, di ordine p_s^2, B_s e C_s avendo lo stesso modulo, $u^{(s)}$, di H_s.

3. — Ricordato tutto ciò, dimostriamo che:

Se v è un automodulo di A con la segnatura $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ e degli interi q quelli diversi da zero sono $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_h}$, l'algebra $A' = vAv$ ha per segnatura $(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_h})$.

In altri termini: *la segnatura di A' si ricava da quella di v sopprimendo in questa gli eventuali interi nulli.*

Senza venir meno alla generalità si può supporre, in primo luogo, che nella segnatura di v gli h interi diversi da zero siano precisamente i primi h, q_1, q_2, ..., q_h, giacchè, ove ciò non fosse basterebbe fare degli opportuni scambi di denominazioni fra le algebre $(A - E)^{(i)}$ per ottenere che una tale ipotesi si verificasse; e, in secondo luogo, che, decomposto v in una somma di

$$t = q_1 + q_2 + ... + q_h$$

automoduli primitivi, a due a due mutuamente nullifici se $t > 1$, di essi q_1 siano quelli indicati nel n^0 precedente con

$$u_1, u_2, ..., u_{q_1},$$

q_2 siano quelli ivi indicati con

$$u_{p_1+1}, u_{p_1+2}, ..., u_{p_1+q_2}$$

e così di seguito, fino a che gli ultimi q_h di essi siano quelli più sopra indicati con

$$u_{p_1+...+p_{h-1}+1}, ..., u_{p_1+...+p_{h-1}+q_h},$$

giacchè [*C. N. A.*, pag. 276] è sempre possibile sommare con v degli automoduli primitivi mutuamente nullifici fra loro e con v, sì che la somma riesca un automodulo principale, ed è evidentemente lecito supporre che codesto automodulo principale sia precisamente quello indicato nel n^0 prec.te con u.

Allora, posto

$$v^{(1)} = u_1 + u_2 + ... + u_{q_1},$$

$$v^{(2)} = u_{p_1+1} + u_{p_1+2} + ... + u_{p_1+q_2}.$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$v^{(h)} = u_{p_1+...+p_{h-1}+1} + ... + u_{p_1+...+p_{h-1}+q_h},$$

$$K_l = v^{(l)} A v^{(l)} \qquad (l = 1, 2, ... h)$$

sarà

$$A' = vAv = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} ... + K_h \dot{+} Q,$$

dove K_l sarà una sotto-algebra di H_l e Q sarà la somma dei sistemi $A_{i,j}$ per ciascun dei quali uno degli indici i, j cade in una delle serie

$$1, 2, \dots q_1,$$

$$p_1 + 1, p_1 + 2, \dots, p_1 + q_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_1 + \dots + p_{h-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{h-1} + q_h,$$

e l'altro in un'altra diversa da essa.

Indichiamo con E' lo zero o la sotto-algebra eccezionale di A' secondo che A' è priva o dotata di elementi eccezionali.

Giacchè, per quanto dianzi è stato ricordato, $Q \leqq E$, sarà *a fortiori* $Q \leqq E'$; inoltre, per un ragionamento simile ad altro già richiamato, un elemento di K_l è eccezionale per K_l quando, e solo quando, sia tale per A'.

Ora, se indichiamo con $\{x\}$ la classe di A' mod E' individuata da un elemento di A' che sia stato denotato con x, la classe di A' mod E' individuata da un elemento di K_l, cioè da un elemento della forma

$$v^{(l)}\, x\, v^{(l)}$$

con x in $(A$, oppure, una volta che

$$v^{(l)}\, x\, v^{(l)} = v^{(l)}\, v \,.\, x \cdot v\, v^{(l)} = v^{(l)} \cdot v\, x\, v \cdot v^{(l)}$$

in) A', sarà

$$\{v^{(l)}\}\,\{x\}\,\{v^{(l)}\},$$

e quindi conciderà con un elemento dell'algebra

$$(A' - E')^{(l)} = \{v^{(l)}\}\,(A' - E')\,\{v^{(l)}\}.$$

Inversamente un elemento di quest'algebra, essendo la classe A' mod E' generata da un elemento del tipo

$$v^{(l)}\, x\, v^{(l)},$$

con x in A', sarà quella generata da un elemento di K_l.

Segue che $(A' - E')^{(l)}$ è equivalente a $K_l - E_l$, se con E_l si indica lo zero o la sotto-algebra eccezionale di K_l, secondo che K_l è priva, o dotata, di elementi eccezionali.

Dico ora che $K_l - E_l$ è *semplice e che per conseguenza tale sarà* $(A' - E')^{(l)}$.

Si è già osservato che K_l è una sotto-algebra di H_l: più precisamente si noti che H_l è la somma dei sistemi $A_{i,j}$ per ciascun dei quali gl'indici i, j cadono entrambi nella serie

$$(3) \qquad p_1 + \dots + p_{l-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{l-1} + p_l,$$

mentre K_l è la somma dei sistemi $A_{i,j}$ per ciascun dei quali gl'indici i, j cadono entrambi nella serie

$$(4) \qquad p_1 + \dots + p_{l-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{l-1} + q_l.$$

Ma allora è

$$K_l = v^{(l)} H_l v^{(l)},$$

perchè, essendo $v^{(l)}$ un nullifico per ciascuno degli automoduli u_i il cui indice i cada nella serie (3), ma non nella serie (4), il prodotto

$$v^{(l)} A_{ij} v^{(l)},$$

con i, j indici della serie (3) è nullo, se i e j non cadono entrambi addirittura nella serie (4).

Ora H_l, come è stato ricordato, è il prodotto diretto dell'algebra a modulo primitivo B_l per l'algebra regolare C_l di ordine p_l^2, i moduli di B_l e C_l coincidendo con quello di H_l, $u^{(l)}$; di più, per fatti noti, è lecito supporre che, se le $c_{ij}^{(l)}$ $(i, j = 1, \dots, p_l)$ sono p_l^2 unità di C_l per le quali si abbia

$$c_{i,j}^{(l)} c_{r,s}^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq r, \\ c_{i,s}^{(l)}, & \text{se } j = r, \end{cases}$$

per gli automoduli $c_{i,i}^{(l)}$ si abbia

$$c_{1,1}^{(l)} = u_{p_1 + \dots + p_{l-1} + 1}, \dots, c_{p_l, p_l}^{(l)} = u_{p_1 + \dots + p_{l-1} + p_l},$$

di guisa che $v^{(l)}$ sarà un automodulo di C_l.

Attesa la permutabilità degli elementi di B_l con quelli di C_l, segue che è

$$K_l = v^{(l)} \cdot B_l \times C_l \cdot v^{(l)} = B_l \times v^{(l)} C_l v^{(l)};$$

ma $v^{(l)} C_l v^{(l)}$, come primo sistema di PEIRCE dell'algebra regolare C_l rispetto al suo automodulo $v^{(l)}$, è un'algebra regolare [*C. N. A.*, pag. 359], dunque K_l è il prodotto diretto di un'algebra a modulo primitivo per un'algebra regolare.

Ciò significa che $K_l - E_l$, indi $(A' - E')^{(l)}$ è, come volevasi, semplice.

Ove si badi che un automodulo di A' è primitivo per A' quando, e solo quando, sia tale per A, e che è

$$A' - E' = (A' - E')^{(1)} \dotplus (A' - E')^{(2)} \dotplus \dots \dotplus (A' - E')^{(h)}$$

con le $(A' - E')^{(l)}$ semplici, si conclude finalmente che la segnatura di A' è proprio, come volevasi, $(q_1, q_2, \dots, q_h)$.

4. Manteniamo tutte le notazioni precedenti e supponiamo che w sia un automodulo primitivo di A appartenente all'algebra $A' = vAv$.

L'automodulo primitivo $\{w\}$ di $A' - E'$ dovrà appartenere ad una delle algebre $(A' - E')^{(i)}$; supponiamo, per fissar le idee, che esso appartenga ad $(A' - E')^{(1)}$.

Allora $\{w\}$ avrà un modulo in $\{v^{(1)}\}$ ed un nullifico in $\{v^{(i)}\}$ per $i \neq 1$.

Ciò porta che l'automodulo $[w]$ di $A - E$ dovrà appartenere ad $(A - E)^{(1)}$, perchè, se ciò non fosse, sarebbe

$$[w]\,[u^{(1)}] = [0],$$

indi

$$[w]\,[v^{(1)}] = [w]\,[u^{(1)}\,v^{(1)}] = [w]\,[u^{(1)}] \cdot [v^{(1)}] = [0];$$

per conseguenza il prodotto $wv^{(1)}$ sarebbe pseudonullo e tale sarebbe anche $\{w\}\,\{v^{(1)}\} = \{w\}$, mentre $\{w\}$ è un automodulo.

Segue da quanto ora è stato dimostrato che se un automodulo di A' ha in A' la segnatura $(q'_1, q'_2, \dots, q'_h)$ la sua segnatura in A è data dall'm-complesso di interi, in cui i primi h elementi sono, ordinatamente, $q'_1, q'_2, \dots, q'_h$ e i rimanenti sono tutti nulli.

E dunque:

Automoduli di A contenuti in $A' = vAv$ hanno la stessa segnatura in A' quando, e solo quando, hanno la medesima segnatura in A.

5. *Osservazione.* Si supponga nei n^{i} prec. che *A sia semi-semplice.*

In tal caso l'algebra H_s $(s = 1, \dots, m)$, riuscendo priva di elementi eccezionali e di segnatura (p_s), è semplice e l'algebra B_s è primitiva. Allora l'algebra K_s, essendo il prodotto diretto di B_s per un'algebra regolare è anch'essa semplice, $Q = 0$ e l'algebra A', al pari di A, è semi-semplice. Che se poi A è addirittura semplice, tale riesce anche A'.

Si ha così il teorema noto:

I primi sistemi di PEIRÇE *di un'algebra semi-semplice* (*semplice*) *con modulo sono anch'essi semi-semplici* (*semplici*).

§ 2. La segnatura delle algebre primarie o completamente primarie.

6. Passiamo ora a far vedere come possano essere caratterizzate mediante la segnatura le algebre che i trattatisti tedeschi dicono *primarie* o *completamente primarie*.

Un'algebra con modulo si dice *primaria*, se ogni sua eventuale sotto-algebra invariante propria è pseudonulla; e si dice *completamente primaria*, se è pseudonulla ogni sua sotto-algebra semi-invariante sinistra (destra) propria.

Ebbene possiamo far vedere che *un'algebra con modulo è primaria quando, e solo quando, la sua segnatura consta di un solo intero; completamente primaria, quando, e solo quando, codesto intero è* 1, *ossia quando, e solo quando, è a modulo primitivo.*

7. Premettiamo la dimostrazione del seguente lemma:

Se per le algebre A, B, C, *aventi tutte lo stesso modulo, è* $A = B \times C$, *con* C *algebra regolare, e* D *è una sotto-algebra invariante di* A, *sussiste per* D *un'eguaglianza del tipo* $D = G \times C$, *con* G *sotto-algebra invariante di* B.

Supposto che C sia dell'ordiue p^2, siano le $c_{i,j}\,(i, j = 1, \dots, p)$ p^2 sue unità per le quali si abbia

$$c_{i,j}\, c_{h,k} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \neq h, \\ c_{i,k} & , \text{ se } j = h. \end{cases}$$

e sia d un elemento di D.

Sarà

$$d = \sum_{i,j}^{1\dots p} b_{i,j}\, c_{i,j}\,, \tag{5}$$

con le $b_{i,j}$ elementi opportuni di B.

Attesa l'invarianza di D, sarà in D, qualunque siano gli interi g, h, k, il prodotto

$$c_{g,h}\, d\, c_{k,g} = \sum_{i,j}^{1\dots p} c_{g,h}\, b_{i,j}\, c_{i,j}\, c_{k,g} = \sum_{i,j}^{1\dots p} b_{i,j}\, c_{g,h}\, c_{i,j}\, c_{k,g} = b_{h,k}\, c_{g,g}\,;$$

quindi sarà pure in D la somma

$$b_{h,k}\,(c_{1,1} + \dots + c_{p,p}) = b_{h,k}\,.$$

Segue che nella (5) le $b_{i,j}$ sono tutte elementi di D.

Inversamente, se nella (5) le $b_{i,j}$ appartengono tutte a D lo stesso accade per d, attesa l'invarianza di D; dunque, posto $G = B \wedge D$, è

$$D = G \times C.$$

Ora, essendo

$$GB = (B \wedge D)\, B,$$

si ha

$$GB \leqq B \quad \text{e} \quad GB \leqq D, \quad \text{indi} \quad GB \leqq G\,;$$

e per ragioni analoghe è

$$BG \leqq G,$$

dunque G è invariante in B e il lemma è dimostrato.

8. Ciò premesso, supponiamo, in primo luogo, che A sia un'algebra primaria, cioè che essa sia dotata di modulo e che ogni sua eventuale sotto-algebra invariante propria sia pseudonulla.

Allora, o A è addirittura priva di sotto-algebre invarianti proprie, indi semplice (con modulo), o tutte le sue sotto-algebre invarianti proprie, essendo pseudonulle, sono contenute nella sotto-algebra eccezionale E ed E è invariante massima in A, ossia $A - E$ è semplice.

In ogni caso la segnatura di A è del tipo (p).

Inversamente sia A un'algebra dotata di modulo e con la segnatura (p).

Sarà

$$A = B \times C,$$

con B algebra a modulo primitivo e C algebra regolare di ordine p^2, aventi entrambe per modulo quello di A; e se D è una sotto-algebra invariante di A sarà

$$D = G \times C,$$

con G sotto-algebra invariante di B.

Ora, o B è primitiva, e allora $G = B$, $D = A$ ed A è semplice; oppure B ammette divisori dello zero, questi sono eccezionali [C. N. A., pag. 264] e le sotto-algebre invarianti proprie di B sono tutte pseudonulle. Ma da G pseudonulla, segue che anche D è tale, dunque in tal caso le sotto-algebre invarianti proprie di A sono tutte pseudonulle.

Ma dunque, come volevasi:

Dire che un'algebra è primaria è quanto dire, che essa è un'algebra dotata di modulo con la segnatura del tipo (p).

9. Supponiamo, in secondo luogo, che A sia un'algebra completamente primaria, cioè che essa sia dotata di modulo e che ogni sua eventuale sotto-algebra semi-invariante sinistra (destra) propria sia pseudonulla.

Per quanto precede la segnatura di A sarà intanto del tipo (p). Dico che è $p = 1$.

Sia, se è possibile, $p > 1$, e, supposto che sia

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_p$$

una decomposizione del modulo u in una somma di automoduli primitivi a due a due mutuamente nullifici, si ponga

$$A_{i,j} = u_i A u_j \qquad (i, j = 1, \dots, p)$$

ed

$$L = \sum_{i}^{1\dots p} A_{1,i} \, .$$

Sarà $L \neq 0$ ed

$$LA = \sum_{i}^{1\dots p} A_{1,i} \sum_{j,l}^{1\dots p} A_{j,l} = \sum_{i,j,l}^{1\dots p} A_{1,i} A_{j,l} = \sum_{i,l}^{1\dots p} A_{1,i} A_{i,l} = \sum_{l}^{1\dots p} A_{1,l} = L \, ,$$

quindi L sarà una sotto-algebra semi-invariante sinistra propria di A. Intanto L non è pseudonulla, perchè contiene $A_{1,1}$, indi l'automodulo u_1, quindi il supporre $p > 1$ è assurdo.

Si conclude che $p = 1$, ossia che A è a modulo primitivo.

Inversamente, se A è a modulo primitivo, ogni sua eventuale sotto-algebra semi-invariante sinistra propria (essendo costituita di divisori dello zero, indi, per l'ipotesi, di elementi eccezionali) è pseudonulla, dunque:

Dire che un'algebra è completamente primaria è quanto dire, che essa è un'algebra dotata di modulo con la segnatura del tipo (1), *cioè a modulo primitivo.*

10. Per quanto si tratti di osservazione presso che immediata giova rilevare in modo esplicito che:

Un'algebra primaria è necessariamente irriducibile.

Infatti sia A un'algebra primaria e sia $A = B \times C$ con B algebra a modulo primitivo, C algebra regolare, B e C avendo per modulo quello di A.

Se A fosse riducibile, dovrebbe possedere un automodulo v diverso dal modulo e permutabile con ogni suo elemento [*C. N. A.*, pag. 319]; in particolare con ogni elemento di C. Ma allora v apparterrebbe a B [*C. N. A.* pag. 357] e B non sarebbe a modulo primitivo.

§ 3. Criterio di equivalenza per gli automoduli di un'algebra con modulo.

11. Riprendiamo per A ed E le ipotesi del n^0 1 e di più supponiamo che A sia dotata di modulo.

Ciò posto, si supponga che u^* e v^* siano due automoduli equivalenti di A, cioè che u^* sia portato in v^* da un automorfismo interno di A, ossia che esista in A un elemento x dotato di inverso per il quale si abbia

$$x^{-1} u^* x = v^*.$$

Sarà

$$[x^{-1}] [u^*] [x] = [v^*],$$

e siccome $[x^{-1}]$ ed $[x]$ sono evidentemente elementi inversi di $A - E$, $[u^*]$ e $[v^*]$ saranno automoduli equivalenti di $A - E$. Ma $A - E$ è semi-semplice, dunque [*C. N. A.*, pag. 357], le segnature di $[u^*]$ e $[v^*]$ in $A - E$, ossia quelle di u^* e v^* in A, sono eguali.

Come si vedrà la condizione ora riconosciuta come necessaria, perchè u^* e v^* siano equivalenti, è anche sufficiente; ma la dimostrazione non può esser fatta che per gradi.

12. Cominciamo a giustificare codesta asserzione per il caso degli automoduli primitivi, cioè supponiamo che u_1 e v_1 siano due automoduli primitivi di A con la stessa segnatura e dimostriamo che u_1 e v_1 sono equivalenti.

Naturalmente qui dire che u_1 e v_1 hanno la medesima segnatura equivale a dire che $[u_1]$ e $[v_1]$ sono automoduli primitivi di una stessa delle algebre semplici $(A - E)^{(i)}$ in cui si decompone $A - E$, e possiamo supporre, senza toglier nulla alla generalità, che $[u_1]$ e $[v_1]$ appartengono entrambi ad $(A - E)^{(1)}$.

Ora due casi possono presentarsi, e cioè gli automoduli u_1 e v_1:

α) o sono mutuamente nullifici;

β) o non sono tali.

Esaminiamoli separatamente.

13. *Caso* α).

Per l'ipotesi, esiste una decomposizione del modulo u di A in una somma di automoduli primitivi a due a due mutuamente nullifici della quale facciano parte u_1 e v_1.

Adottando per A le notazioni del n^0 2 — naturalmente nel caso attuale sarà $uAu = A$ ed $M = 0$ — possiamo supporre che la decomposizione in discorso sia quella ivi considerata e che si abbia $v_1 = u_2$.

Di più, adottate per le unità dell'algebra C_1 le notazioni del n^0 3 — di guisa che sarà $c_{1,1}^{(1)} = u_1$ e $c_{2,2}^{(1)} = u_2$ — poniamo

$$x = c_{1,2}^{(1)} + c_{2,1}^{(1)} + c_{3,3}^{(1)} + \dots + c_{p_1,p_1}^{(1)} .$$

Sarà

$$x^2 = c_{1,1}^{(1)} + \dots + c_{p_1,p_1}^{(1)} = u^{(1)}$$

ed

$$xu_1 x = c_{2,2}^{(1)} = u_2 = v_1 ,$$

quindi x sarà dotato di inverso in H_1 ed u_1, v_1 saranno equivalenti in H_1.

Ma allora [*C. N. A.*, pag. 244] u_1 e v_1 saranno equivalenti anche in

$$H = H_1 \dotplus H_2 \dotplus \dots \dotplus H_m ;$$

e poichè un elemento di H, che sia ivi dotato di inverso, è dotato di inverso anche in A, una volta che H ed A hanno entrambe per modulo u, u_1 e v_1 saranno, come volevasi, equivalenti in A.

14. *Caso* β).

Poniamo

$$u_1' = u - u_1 , \quad G = u_1' A \wedge A v_1 ;$$

u_1' sarà un automodulo mutuamente nullifico con u_1 e G, se non è zero, sarà un'algebra.

Supponiamo, in prima ipotesi, che G sia un'algebra non pseudonulla, e sia w un suo automodulo.

Poichè w sta in Av_1, w e v_1 sono equivalenti [*C. N. A.*, pag. 281]; e poichè w sta in $u_1' A$ [*C. N. A.*, pag. 279-280], sussiste un'eguaglianza del tipo

$$w = w' + x_1, \tag{6}$$

con w' automodulo di $u_1' A u_1'$ ed x_1 elemento comune a $w'A$ ed $u_1' A u_1$.

Dalla (6) discende

$$wu_1' = w' + x_1 u_1' = w', \tag{7}$$

indi

$$w' = w(u - u_1) = w - wu_1.$$

Ora $[w]$ come $[v_1]$ sta in $(A - E)^{(1)}$, perchè w, essendo equivalente a v_1, ha la sua stessa segnatura; $[wu_1]$ sta in $(A - E)[u_1]$, indi in $(A - E)^{(1)}$, perchè $[u_1]$, appartenendo ad $(A - E)^{(1)}$ è un nullifico per le rimanenti algebre $(A - E)^{(i)}$, di guisa che riesce

$$(A - E)[u_1] = (A - E)^{(1)}[u_1] < (A - E)^{(1)};$$

per conseguenza anche $[w']$ sta in $(A - E)^{(1)}$. Intanto dalla (7) si trae

$$[w'] = [w][u_1'],$$

per modo che la caratteristica (sinistra o destra) di $[w']$ non può superare quella di $[w]$; d'altronde, poichè $[w]$ è, al par di $[v_1]$, automodulo primitivo di $(A - E)^{(1)}$, in $(A - E)^{(1)}$ non esistono automoduli con caratteristica inferiore a quella di $[w]$ [*C. N. A.*, pag. 344], dunque $[w']$ ha la stessa caratteristica di $[w]$; ossia $[w']$ è un automodulo primitivo di $(A - E)^{(1)}$ e w' un automodulo primitivo di A.

Ora w, come w' ed x_1, sta in $w'A$, dunque w e w', indi v_1 e w', sono equivalenti. Ma w', avendo un modulo in u_1', ha un nullifico in u_1 e $[w']$, come $[u_1]$, appartiene ad $(A - E)^{(1)}$, dunque, per il ragionamento del n^0^ 13, w' ed u_1 sono equivalenti; ed allora si conclude, come volevasi, che tali sono pure u_1 e v_1.

Supponiamo, in seconda ipotesi, che G sia zero o un'algebra pseudonulla e indichiamo con Γ l'intersezione delle algebre

$$[u_1'](A - E) \quad \text{ed} \quad (A - E)[v_1] = (A - E)^{(1)}[v_1].$$

Dico che anche *Γ è zero o un'algebra pseudonulla.*

Se è possibile, non sia, e sia $[\overline{w}]$ un suo automodulo.

Per l'ipotesi fatta su Γ sussisteranno per $[\overline{w}]$ delle uguaglianze del tipo

$$[\overline{w}] = [u'_1][x] = [u'_1 x] \quad \text{e} \quad [\overline{w}] = [y][v_1] = [yv_1]$$

con x ed y elementi opportuni di A.

Per un'osservazione nota [*C. N. A.*, pag. 283], nella classe $[\overline{w}]$ esisterà tanto un automodulo $\overline{x}_1$ di A combinazione lineare di potenze di $u'_1 x$, quanto un automodulo $\overline{x}_2$ di A combinazione lineare di potenze di yv_1; quindi $\overline{x}_1$ starà in $u'_1 A$, $\overline{x}_2$ in Av_1 e la differenza

$$(8) \qquad \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = e$$

sarà un elemento di E.

Dalla (8) si trae

$$u_1 \overline{x}_1 - u_1 \overline{x}_2 = u_1 e,$$

con $u_1 e$ elemento di E, al pari di e; ma $\overline{x}_1$, avendo in u'_1 un modulo sinistro, ha in u_1 un nullifico sinistro, dunque resta

$$u_1 \overline{x}_2 = - u_1 e,$$

e per conseguenza

$$u'_1 \overline{x}_2 = (u - u_1) \overline{x}_2 = \overline{x}_2 + u_1 e.$$

Ora $u'_1 \overline{x}_2$ sta non solo in $u'_1 A$, ma anche in Av_1, visto che quivi è $\overline{x}_2$, per conseguenza $u'_1 x_2$ appartiene a G, ossia è nullo o pseudonullo; indi è tale anche

$$[u'_1 \overline{x}_2] = [\overline{x}_2] + [u_1 e] = [\overline{x}_2].$$

Ma ciò è assurdo, perchè $[\overline{x}_2]$ è un automodulo, dunque Γ è, come volevasi, zero o un'algebra pseudonulla.

Ora si osservi che $(A - E)^{(1)}$ è semplice, quindi Γ, essendo contenuta in $(A - E)^{(1)} [v_1]$, è zero, o una zero-algebra [*C. N. A.*, pag. 281-282]. Siccome $[u'_1 v_1]$ sta in Γ, ciò porta che è $[u'_1 v_1] = [0]$, oppure $[u'_1 v_1] \neq [0]$, ma $[u'_1 v_1]^2 = [0]$; quindi o è un elemento di E $u'_1 v_1$, o, in caso contrario è tale $(u'_1 v_1)^2$.

Nel primo caso sarà

$$u_1 v_1 = (u - u'_1) v_1 = v_1 - u'_1 v_1,$$

quindi $u_1 v_1$, al pari di $[u_1 v_1] = [v_1]$, non sarà pseudonullo; ma $u_1 v_1$ è un elemento di $u_1 A \wedge A v_1$, dunque questa intersezione è un'algebra non pseudonulla, ed u_1, v_1 sono equivalenti, perchè entrambi equivalenti ad un automodulo di codesta intersezione.

Nel secondo caso dico che sarà

$$[u_1 v_1] \neq [0] \quad \text{e} \quad [u_1 v_1]^2 \neq [0].$$

Infatti è

$$[u_1 v_1] = [(u - u_1') v_1] = [v_1] - [u_1' v_1],$$

quindi se fosse $[u_1 v_1] = [0]$ sarebbe $[v_1] = [u_1' v_1]$, cioè un automodulo eguaglierebbe un elemento pseudonullo; ed, essendo

$$[u_1 v_1]^2 = [(u - u_1')v_1]^2 = [(v_1 - u_1' v_1)^2] = [v_1 - v_1 u_1' v_1 - u_1' v_1 + (u_1' v_1)^2] =$$
$$= [v_1] - [v_1 u_1' v_1] - [u_1' v_1],$$

se fosse $[u_1 v_1]^2 = [0]$, sarebbe

$$[v_1] - [v_1 u_1' v_1] = [u_1' v_1],$$

e nell'algebra

$$[v_1](A - E)[v_1] = [v_1](A - E)^{(1)}[v_1],$$

indi primitiva, esisterebbe l'elemento pseudonullo $[u_1' v_1]$.

Ma allora l'intersezione delle algebre

$$[u_1](A - E) = [u_1](A - E)^{(1)} \quad \text{e} \quad (A - E)[v_1] = (A - E)^{(1)}[v_1],$$

che, se fosse zero o pseudonulla, sarebbe o zero o una zero-algebra, contenendo $[u_1 v_1]$ non sarà pseudonulla.

Segue che non sarà nè zero, nè pseudonulla l'intersezione di $u_1 A$ ed $A v_1$, perchè altrimenti sarebbero pseudonulli $u_1 v_1$ ed $[u_1 v_1]$; ed allora u_1 e v_1 saranno equivalenti, perchè entrambi equivalenti ad un qualsiasi automodulo di quell'intersezione.

15. — Con ciò l'affermazione fatta alla fine del n° 11, per il caso degli automoduli primitivi, è pienamente stabilita; ossia è dimostrato che:

Due automoduli primitivi dell'algebra A sono equivalenti quando e solo quando hanno la medesima segnatura.

16. — Per estendere questa proposizione agli automoduli non primitivi supponiamo, in primo luogo, che v e v' siano due automoduli di A aventi entrambi per segnatura la seguente:

$$(p_1 - 1, p_2, \dots, p_m),$$

Le differenze $u - v$ ed $u - v'$ risulteranno due automoduli primitivi con la segnatura comune

$$(1, 0, \dots, 0),$$

quindi saranno equivalenti ed esisterà in A un elemento x dotato di inverso, per il quale sarà

$$x^{-1}(u - v)\, x = u - v'.$$

Segue

$$x^{-1}\, v\, x = v',$$

cioè, come volevasi, che v e v' sono equivalenti.

17. — Supponiamo, in secondo luogo che sia $p_1 > 1$ e che v e v' siano due automoduli di A aventi entrambi per segnatura

$$(p_1 - 2, p_2, \dots, p_m).$$

Allora esisteranno certo due automoduli primitivi v_1 e v_1' con la segnatura comune

$$(1, 0, \dots, 0),$$

sì che v_1 riesca mutuamente nullifico con v, v_1' con v' e che le somme $v + v_1$ e $v' + v_1'$ risultino due automoduli con la segnatura

$$(p_1 - 1, p_2, \dots, p_m).$$

Per quanto or ora è stato dimostrato, $v + v_1$ e $v' + v_1'$ saranno allora equivalenti, e quindi esisterà un automorfismo interno di A, che diremo σ, atto a mutare $v + v_1$ in $v' + v_1'$.

Per effetto di σ l'algebra $(v + v_1)\, A\, (v + v_1)$ si muterà nell'algebra $(v' + v_1')\, A\, (v' + v_1')$ e l'automodulo v di quella si muterà in un automodulo v'' di questa equivalente a v ed avente per segnatura, come v e v',

$$(p_1 - 2, p_2, \dots p_m).$$

Ma $(v' + v_1')\, A\, (v' + v_1')$ contiene anche v' ed è (n^0 3) un'algebra con la segnatura

$$(p_1 - 1, p_2, \dots, p_m),$$

nella quale v'' e v' hanno la stessa segnatura che in A, dunque *in essa*, per quanto precede, esiste un automorfismo interno τ' atto a mutare v'' in v'.

Ora, come è noto ([7]), esiste in A un automorfismo interno τ che muta in sè l'algebra $(v' + v_1') A (v' + v_1')$ ed ivi subordina l'automorfismo τ', dunque per effetto del prodotto $\sigma \tau v$ si muta in v' e v, v' sono equivalenti.

18. — Con ragionamento perfettamente simile a quello or ora sviluppato si dimostra che, se $p_1 > 2$, sono equivalenti due automoduli di A che abbiano per segnatura

$$(p_1 - 3, p_2, \dots, p_m);$$

e così proseguendo si perviene a dimostrare che sono equivalenti due automoduli che abbiano per segnatura

$$(q_1, p_2, \dots, p_m)$$
$$\text{con} \quad 0 \leqq q_1 \leqq p_1.$$

Ma allora, sempre con un ragionamento del tipo indicato nel n^0 17 dall'equivalenza di automoduli con la segnatura

$$(0, p_2, p_3, \dots, p_m)$$

si dedurrà quella di automoduli con la segnatura

$$(0, p_2 - 1, p_3, \dots, p_m);$$

e dopo ciò non v'è bisogno di insistere ulteriormente perchè possa asserirsi che, in ogni caso:

Due automoduli dell'algebra A sono equivalenti quando, e solo quando, hanno la stessa segnatura.

§ 4. Maggiore determinazione del teorema precedente.

19. — Siano v e v' due automoduli equivalenti di A non primitivi e siano

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_t,$$
$$v' = v_1' + v_2' + \dots + v_t'$$

([7]) G. Scorza, *Alcune proprietà delle algebre regolari* (Note e Memorie di Matematica, pubblicate dal Circolo Matematico di Catania, vol. 1^0, 1921).

due loro decomposizioni in somme di automoduli primitivi a due a due mutuamenti nullifici.

Poichè le segnature di v e v' coincidono, bisognerà che per ogni automodulo v_i ve ne sia uno fra gli automoduli v'_j avente la sua stessa segnatura. In conformità di ciò, supporremo di aver disposto delle notazioni in modo che, per $i = 1, \ldots, t$, abbiano la stessa segnatura v_i e v'_i.

Ebbene, vogliamo dimostrare che:

È sempre possibile trovare in A un automorfismo interno che non solo muti v in v', ma anche $v_1, \ldots, v_t$, ordinatamente, in $v'_1, \ldots, v'_t$.

Per il teorema precedentemente dimostrato esiste intanto un automorfismo interno σ di A che trasforma v in v', indi vAv in $v'Av'$; e allora per effetto di σ, v_1, che è un automodulo di vAv, si muterà in un automodulo v''_1 di $v'Av'$ equivalente a v'_1 tanto in A, quanto in $v'Av'$.

Dicasi ora τ' un automorfismo interno di $v'Av'$ che sia atto a mutare v''_1 in v'_1, e τ un automorfismo interno di A che muti in sè $v'Av'$ subordinandovi l'automorfismo τ'.

I trasformati di v e v_1 mediante il prodotto $\sigma\tau$ saranno v' e v'_1, e quindi $\sigma\tau$ muterà pure

$$w = v_2 + \ldots + v_t \quad \text{in} \quad w' = v'_2 + \ldots + v'_t$$

wAw in $w'Aw'$, e, infine, l'automodulo v_2 di wAw in un automodulo v''_2 di $w'Aw'$ equivalente a v'_2 tanto in A, quanto in $w'Aw'$.

Ciò posto, sia ω' un automorfismo interno di $w'Aw'$ atto a trasformare v''_2 in v'_2, e giacchè $w'Aw'$ è una sotto-algebra di $v'Av'$ si indichino con ω_1 ed ω degli automorfismi interni di $v'Av'$ ed A, rispettivamente, dei quali ω_1 muti in sè $w'Aw'$, subordinandovi l'automorfismo ω', ed ω muti in sè $v'Av'$, subordinandovi l'automorfismo ω_1.

Allora ω muterà in sè $v'Av'$ e $w'Aw'$, subordinando in quest'ultima l'automorfismo ω' e il prodotto $\sigma\tau\omega$ muterà v, v_1 e v_2 in v', v'_1 e v'_2.

Dopo ciò non occorre continuare perchè si veda come in ogni caso si pervenga a giustificar l'enunciato.

§ 5. Estensione del teorema di Artin.

20. — Ed ora siamo in grado di stabilire il teorema che estende ad una qualsiasi algebra con modulo i teoremi dovuti a me ed allo Artin per le algebre semplici e le algebre primarie.

Consideriamo l'algebra con modulo A, di cui si è discorso nei n[i] precedenti, e la sua rappresentazione nella forma

$$A = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_m + N$$

corrispondente allo spezzamento del modulo u nella somma

$$u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(m)}$$

$[u^{(i)}]$ essendo il modulo di $(A - E)^{(i)}$.

Di questi spezzamenti del modulo, se $E \neq 0$, possono esisterne più di uno, perchè nella classe $[u^{(i)}]$ possono esistere più automoduli di A (tutti differenti da $u^{(i)}$ per elementi eccezionali). Ebbene, sia

$$u = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_m$$

un altro spezzamento di u del tipo indicato, con $[u'_i]$ modulo di $(A - E)^{(i)}$, e in corrispondenza di ciò si abbia

$$A = H'_1 \dot{+} H'_2 \dot{+} \dots \dot{+} H'_m + N'.$$

Naturalmente, come è

$$H_s = u^{(s)} A u^{(s)},$$

così supponiamo che sia

$$H'_s = u'_s A u'_s;$$

ed accanto al fatto che H_s si può considerare come il prodotto diretto di un'algebra a modulo primitivo B_s per un'algebra regolare C_s di ordine p_s^2, aventi entrambe per modulo $u^{(s)}$, si avrà l'altro che H'_s si può considerare come il prodotto diretto di un'algebra a modulo primitivo B'_s per un'algebra regolare C'_s di ordine p_s^2, aventi entrambe per modulo u'_s — ciascuna delle coppie B_s, C_s e B'_s, C'_s potendo essere determinata in generale in più modi.

Si hanno così le due rappresentazioni di A:

$$A = B_1 \times C_1 \dot{+} B_2 \times C_2 \dot{+} \dots \dot{+} B_m \times C_m + N,$$

$$A = B'_1 \times C'_1 \dot{+} B'_2 \times C'_2 \dot{+} \dots \dot{+} B'_m \times C'_m + N'.$$

Ebbene dico che:

Esiste in A un automorfismo interno atto a mutare, ordinatamente, le algebre $B_1, \dots, B_m$, $C_1, \dots, C_m$ ed il sistema N nelle algebre $B'_1, \dots, B'_m$, $C'_1, \dots, C'_m$ e nel sistema N'.

Da quanto è stato dimostrato nel n⁰ 19 si deduce intanto che esiste un automorfismo interno σ di A, per il quale gli automoduli $u^{(1)}, \dots, u^{(m)}$ si mutano, rispettivamente, negli automoduli $u'_1, \dots, u'_m$, indi le algebre $H_1, \dots, H_m$ nelle algebre $H'_1, \dots, H'_m$; di più, per esso la decomposizione di H_s $(s = 1, \dots, m)$ nel prodotto diretto $B_s \times C_s$ si muterà in una decomposizione di H'_s nel prodotto di un'algebra B''_s a modulo primitivo per un'algebra regolare C''_s di ordine p_s^2, aventi entrambe per modulo u'_s.

Entro H'_s esiste per il teorema di ARTIN un automorfismo interno τ'_s atto a mutare B''_s in B'_s, C''_s in C'_s: ebbene, sia x'_s l'elemento di H'_s ivi dotato di inverso che genera codesto automorfismo.

Se x'_s è l'inverso di x_s in H'_s si vede subito che

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

ha per inverso in $(H'_1 + H'_2 + \dots + H'_m$, o, ciò che è lo stesso, in) A

$$x' = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m ,$$

e che x genera in A un automorfismo τ subordinante in H'_s (per $s = 1, \dots, m$) l'automorfismo τ'_s, dunque l'automorfismo interno $\sigma\tau$ di A porta le algebre B_s e C_s (per $s = 1, \dots, m$) nelle algebre B'_s e C'_s.

Ma per quanto è stato dimostrato nel n⁰ 19 e per la definizione di N ed N' (cfr. n⁰ 2) si può anche supporre che σ sia stato scelto in modo da mutare N in N', dunque $\sigma\tau$ muta pure N in N' e il teorema è dimostrato.

Roma, 21 maggio 1936