SULLE ALGEBRE REALI LEGATE AI GRUPPI DI ORDINE FINITO (*)

La struttura di un'algebra legata a un gruppo di ordine finito è pienamente conosciuta, quando il corpo, nel quale l'algebra è data, sia quello complesso. Nel qual caso, detto t il numero dei sistemi di elementi coniugati del gruppo, l'algebra è irriducibile e regolare, se $t = 1$, è riducibile e somma diretta di t algebre regolari, se $t > 1$.

Qui si vuol stabilire un teorema simile per il caso che il corpo nel quale l'algebra è definita sia quello reale.

Precisamente, si vuol dimostrare che:

Se fra i t sistemi di elementi coniugati del gruppo, $l\,(> 0)$ è il numero di quelli che riescono bilateri e $2m$ il numero (necessariamente pari, ≥ 0) dei rimanenti, ogni algebra reale legata al gruppo è irriducibile e regolare, se $t = 1$ (indi $l = 1$ ed $m = 0$), è riducibile e somma diretta di $l + m$ algebre semplici dotate di modulo, se $t > 1$.

Questo teorema potrebbe esser dedotto per via indiretta ricorrendo a taluni risultati conseguiti dal FROBENIUS e dallo SCHUR in una loro bella Memoria sulle rappresentazioni reali dei gruppi finiti («Berliner Sitzungsb.», 1906); ma, giacchè può essere anche dimostrato utilizzando direttamente la teoria delle algebre, preferisco dedurlo per questa via. Il che faccio tanto più volentieri, in quanto che procedendo a questo modo si vengono implicitamente ad indicare nuove dimostrazioni dei risultati cui or ora è stato alluso.

Chiudo queste poche righe introduttive avvertendo che in quanto segue il mio trattato *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921) e la Memoria del FICHERA: *I caratteri di un gruppo*, ecc. («Atti dell'Accademia Gioenia», serie 5ª, vol. XIII), saranno richiamati brevemente con le sigle rispettive *C. N.* ed *F.*

2. Ciò posto, sia G un gruppo d'ordine finito n, con gli elementi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, e sia A un'algebra reale legata a G (*C. N.*, p.

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 4 (1926), pp. 485-491.

437), di guisa che sarà possibile determinare in essa un aggregato di unità $u_1, u_2, \dots, u_n$, per le quali riesca $u_i u_j = u_k$, ogni qual volta sia $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k$.

Se $\overline{A}$ è un'algebra complessa legata a G ed $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$ è un aggregato di unità di $\overline{A}$ tale che da $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k$ segua $\overline{u}_i \overline{u}_j = \overline{u}_k$, gli elementi di $\overline{A}$ aventi, rispetto ad $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$, coordinate reali costituiscono un'algebra reale equivalente ad A, di cui $\overline{A}$ è il prolungamento nel corpo complesso; quindi, salvo a sostituire ad A, ove occorra, un'algebra equivalente ad essa, possiamo supporre che $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$ coincidano rispettivamente con $u_1, u_2, \dots, u_n$ e che $\overline{A}$ sia il prolungamento di A nel corpo complesso.

3. Giacchè $\overline{A}$ è il prolungamento di A nel corpo complesso, e giacchè $\overline{A}$ è semi-semplice, con modulo (*C. N.*, p. 444), tale è pure A (*ibid.*, p. 397, n. 287); quindi A o è semplice (con modulo), o è somma diretta di algebre semplici (ciascuna dotata di modulo).

In ogni caso, poniamo

$$A = B_1 \dot{+} B_2 \dot{+} \dots \dot{+} B_s, \tag{1}$$

con $s \geq 1$ e con le $B_1, B_2, \dots, B_s$ algebre semplici, intendendo che se $s = 1$, se cioè non vi sia luogo a parlar di somma diretta, la (1) stia per $A = B_1$.

Giacchè ciascuna delle algebre $B_1, \dots, B_s$ è semplice e, al pari di A, dotata di modulo e reale, per un bel teorema del CARTAN (*C. N.*, p. 400), si potrà porre

$$B_j = P_j \times R_j \qquad (j = 1, \dots s), \tag{2}$$

con P_j algebra primitiva di ordine 1, 2 o 4 ed R_j algebra regolare; e i moduli di P_j ed R_j si potranno supporre coincidenti con quello di B_j.

Se i prolungamenti di B_j, P_j ed R_j nel corpo complesso si indicano rispettivamente con $\overline{B}_j$, $\overline{P}_j$ ed $\overline{R}_j$, in virtù delle (1) e (2) sarà

$$\overline{A} = \overline{B}_1 \dot{+} \overline{B}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \overline{B}_s \tag{3}$$

e

$$\overline{B}_j = \overline{P}_j \times \overline{R}_j. \tag{4}$$

Quando l'ordine di P_j (e $\overline{P}_j$) è 1, le (2) e (4) mostrano che B_j e $\overline{B}_j$ sono regolari; quando quell'ordine è 4, ossia P_j è equivalente all'algebra dei quaternioni reali, $\overline{P}_j$ è un'algebra regolare (*C. N.*, p. 397, n. 288) e quindi, per la (4), anche $\overline{B}_j$ è un'algebra regolare (*ibid.*, p. 363, n. 256); quando invece il detto ordine è 2, $\overline{B}_j$ risulta la somma di due algebre regolari del medesimo ordine.

Ebbene si supponga, come è lecito, che fra le algebre $P_1, \ldots, P_s$ quelle di ordine 1 o 4 siano $P_1, \ldots, P_\lambda$.

Allora $\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_\lambda$ saranno algebre regolari, e ciascuna delle algebre $\overline{B}_{\lambda+1}, \overline{B}_{\lambda+2}, \ldots, \overline{B}_s$ sarà la somma diretta di due algebre regolari del medesimo ordine; quindi $\overline{A}$ sarà la somma diretta di

$$\lambda + 2(s - \lambda) = 2s - \lambda$$

algebre regolari.

Ma, se t è il numero dei sistemi di elementi coniugati di G, è

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \dot{+} \overline{A}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \overline{A}_t, \tag{5}$$

con le $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_t$ algebre regolari e con l'intesa che, se $t = 1$, la (5) stia per $\overline{A} = \overline{A}_1$; dunque, per un teorema dello SCHEFFERS (*C. N.*, p. 320), è

$$2s - \lambda = t$$

ed è possibile disporre delle denominazioni delle $\overline{A}_i$, sì che riesca

$$\tag{6} \begin{cases} \overline{B}_1 = \overline{A}_1, \overline{B}_2 = \overline{A}_2, \ldots, \overline{B}_\lambda = \overline{A}_\lambda, \\ \overline{B}_{\lambda+1} = \overline{A}_{\lambda+1} \dot{+} \overline{A}_{\lambda+2}, \overline{B}_{\lambda+2} = \overline{A}_{\lambda+3} \dot{+} \overline{A}_{\lambda+4}, \ldots, \overline{B}_s = \overline{A}_{t-1} \dot{+} \overline{A}_t. \end{cases}$$

4. Indichiamo ora con $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_t$ i moduli di $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_t$, di guisa che quelli di $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_\lambda, \overline{B}_{\lambda+1}, \overline{B}_{\lambda+2}, \ldots, \overline{B}_s$ saranno

$$\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_\lambda, \overline{v}_{\lambda+1} + \overline{v}_{\lambda+2}, \overline{v}_{\lambda+3} + \overline{v}_{\lambda+4}, \ldots, \overline{v}_{t-1} + \overline{v}_t; \tag{7}$$

e, detti $S_1, S_2, \ldots, S_t$ i sistemi di elementi coniugati di G, indichiamo con r_j l'ordine di S_j e con w_j la somma delle r_j unità u i cui indici sono quelli degli elementi γ, che costituiscono il sistema S_j.

Giacchè $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_t$ e $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_t$ sono due aggregati di unità della sotto-algebra centrale di $\overline{A}$ (*C N.*, pp. 395 e 440), sarà

$$w_j = \tau_{1,j}\, \overline{v}_1 + \tau_{2,j}\, \overline{v}_2 + \ldots + \tau_{t,j}\, \overline{v}_t \qquad (j = 1, \ldots, t), \tag{8}$$

e

$$\overline{v}_i + \tau'_{i,1}\, w_1 + \tau'_{i,2}\, w_2 + \ldots + \tau'_{i,t}\, w_t \qquad (i = 1, \ldots, t), \tag{9}$$

dove le $\tau_{i,j}$ sono numeri complessi, il determinante $|\tau_{i,j}|$ è diverso da zero, e $\tau'_{i,j}$ è il reciproco di $\tau_{i,j}$ nella matrice $\| \tau_{i,j} \|$.

Se, in conformità della (5), si pone

$$u_k = \overline{x}_{k,1} + \overline{x}_{k,2} + \dots + \overline{x}_{k,t} \qquad (k = 1, \dots, n),$$

con $\overline{x}_{k,i}$ elemento di $\overline{A}_i$, e, detto p_i^2 l'ordine di $\overline{A}_i$, il quoziente della traccia di $\overline{x}_{k,i}$ in $\overline{A}_i$ per p_i si indica con $\chi^{(i)}(\gamma_k)$, la funzione $\chi^{(i)}$ dell'elemento corrente γ_k di G, che così resta definita, è uno dei t *caratteri* di G (*C. N.*, p. 450).

I valori di $\chi^{(i)}$ per elementi coniugati di G sono, notoriamente, eguali. Ebbene, se il valore di $\chi^{(i)}$ per uno qualsiasi degli r_j elementi di G contenuti in S_j si denota con $\psi_j^{(i)}$, si ha (*F.*, n. 25

$$\tau_{i,j} = \frac{r_j}{p_i} \psi_j^{(i)}. \tag{10}$$

Da questa eguaglianza discende che, se $\varphi_j^{(i)}$ è il reciproco di $\psi_j^{(i)}$ nella matrice $\| \psi_j^{(i)} \|$ (dove si suppone che i sia costante lungo una riga e j lungo una colonna), si ha

$$\tau'_{i,j} = \frac{p_i}{r_j} \varphi_j^{(i)}.$$

D'altronde, se il sistema di elementi coniugati costituiti dagli inversi degli elementi di $S_j\, (j = 1, \dots, t)$ si indica con $S_{j'}$ — di guisa che sarà $r_{j'} = r_j$ — si ha pure (*F.*, n. 31)

$$\varphi_j^{(i)} = \frac{r_j}{n} \psi_{j'}^{(i)},$$

quindi è

$$\tau'_{i,j} = \frac{p_i}{n} \psi_{j'}^{(i)}, \tag{11}$$

e, per le (10) e (11), le (8) e (9) divengono

$$w_j = r_j \sum_i^{1\dots t} \frac{1}{p_i} \psi_j^{(i)} \overline{v}_i \tag{12}$$

e

$$\overline{v}_i = \frac{p_i}{n} \sum_j^{1\dots t} \psi_{j'}^{(i)} w_j. \tag{13}$$

5. A proposito delle $\psi_j^{(i)}$ giova osservar quanto segue.

Essendo u_k un elemento di A, per $i = 1, \dots, \lambda$, $\overline{x}_{k,i}$ riesce un elemento di B_i, quindi la sua traccia in $\overline{A}_i = \overline{B}_i$ è un numero reale; ossia

α) I valori di $\psi_j^{(i)}$, per $i = 1, \dots, \lambda$ e $j = 1, \dots, t$, sono tutti reali.

Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$, è

$$\overline{A}_i \dotplus \overline{A}_{i+1} = \overline{B}_{\frac{1}{2}(\lambda+i+1)},$$

ed, essendo u_k un elemento di A, $\overline{x}_{k,i}$ ed $\overline{x}_{k,i+1}$ hanno per somma un elemento di $B_{\frac{1}{2}(\lambda+i+1)}$; dunque, per il lemma del n. 1, la traccia di $\overline{x}_{k,i}$ in $\overline{A}_i$ e quella di $\overline{x}_{k,i+1}$ in $\overline{A}_{i+1}$ sono numeri complessi coniugati. D'altronde, essendo eguali gli ordini di $\overline{A}_i$ e $\overline{A}_{i+1}$, è pure $p_i = p_{i+1}$, dunque:

β) Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = 1, \dots, t$, $\psi_j^{(i)}$ e $\psi_j^{(i+1)}$ sono numeri complessi coniugati.

I valori di un carattere di G per elementi inversi sono numeri complessi coniugati, quindi:

γ) Per $i, j = 1, \dots, t$, $\psi_j^{(i)}$ e $\psi_{j'}^{(i)}$ sono numeri complessi coniugati.

Adesso si supponga, come è lecito, che tra i sistemi di elementi coniugati di G quelli bilateri siano $S_1, S_2, \dots, S_l$ e che i rimanenti si distribuiscano in m coppie di sistemi inversi date da

$$S_{l+1} \text{ ed } S_{l+2}, S_{l+3} \text{ ed } S_{l+4}, \dots, S_{t-1} \text{ ed } S_t.$$

Ciò significa che, per $j = 1, \dots, l$, è $j' = j$, e, per $j = l + 1, l + 3, \dots, t - 1$ è $j' = j + 1$.

Allora da γ) segue che:

δ) Per $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, l$, $\psi_j^{(i)}$ è un numero reale;

da α) e γ), che:

ε) Per $i = 1, \dots, \lambda$ è

$$\psi_{l+1}^{(i)} = \psi_{l+2}^{(i)}, \psi_{l+3}^{(i)} = \psi_{l+4}^{(i)}, \dots, \psi_{t-1}^{(i)} = \psi_t^{(i)};$$

da β) e δ), che:

ζ) Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = 1, \dots, l$, è

$$\psi_j^{(i)} = \psi_j^{(i+1)};$$

e infine da β) e γ) che:

η) *Per* $i=\lambda+1, \lambda+3, \ldots, t-1$ *e* $j=l+1, l+3, \ldots, t-1$, *è*

$$\psi_j^{(i)}=\psi_{j+1}^{(i+1)} \quad e \quad \psi_j^{(i+1)}=\psi_{j+1}^{(i)}.$$

6. Dico ora che ciascuno degli elementi (7) è una combinazione lineare degli elementi

$$w_1, w_2, \ldots, w_l, w_{l+1}+w_{l+2}, w_{l+3}, + w_{l+4}, \ldots, w_{t-1}+w_t, \tag{14}$$

e che, inversamente, ciascuno di questi è una combinazione lineare di quelli.

Nel sommatorio che trovasi al secondo membro della (13), per $j=l+1$, $l+3, \ldots$, o $t-1$, il coefficiente di w_j è $\psi_{j+1}^{(i)}$, e quello di w_{j+1} è $\psi_j^{(i)}$; ma per un tal valore di j e per $i=1, \ldots, \lambda$ è, grazie alla ε), $\psi_{j+1}^{(i)}=\psi_j^{(i)}$, dunque è chiaro intanto che ciascuno dei primi λ elementi (7) è una combinazione lineare degli elementi (14).

Si supponga adesso che i sia uno degli interi della serie

$$\lambda+1, \lambda+3, \ldots, t-1.$$

Allora per la (13) e per il fatto che p_{i+1} riesce eguale a p_i, si ha

$$\overline{v}_i+\overline{v}_{i+1}=\frac{p_i}{n} \sum_j^{1 \ldots t} (\psi_j^{(i)}+\psi_j^{(i+1)}) w_j .$$

Nel sommatorio che quivi comparisce i coefficienti di w_j e w_{j+1}, per $j=l+1$, $l+3, \ldots$, o $t-1$, sono rispettivamente

$$\psi_{j+1}^{(i)}+\psi_{j+1}^{(i+1)} \quad e \quad \psi_j^{(i)}+\psi_j^{(i+1)};$$

ma questi per η) sono eguali, dunque anche i rimanenti elementi (7) sono combinazioni lineari degli elementi (14).

Nel sommatorio che sta a secondo membro della (12) i coefficienti di $\overline{v}_i$ e $\overline{v}_{i+1}$ sono $\frac{1}{p_i} \psi_j^{(i)}$ e $\frac{1}{p_{i+1}} \psi_j^{(i+1)}$. Ma, per $i=\lambda+1$, $\lambda+$ $+3, \ldots, t-1$ e $j=1, \ldots, l$, è $p_i=p_{i+1}$ e inoltre, grazie alla ζ), $\psi_j^{(i)}=\psi_j^{(i+1)}$, dunque è dimostrato intanto che ciascuno dei primi l elementi (14) è una combinazione lineare degli elementi (7).

Adesso si supponga che j sia uno degli interi della serie $l+1$, $l+3, \ldots, t-1$.

Allora per la (12) e badando che $r_{j+1} = r_{j'} = r_j$, si ha

$$w_j + w_{j+1} = r_j \sum_i^{1\ldots t} \frac{1}{p_i} (\psi_j^{(i)} + \psi_{j+1}^{(i)}) \bar{v}_i .$$

In quest'ultimo sommatorio i coefficienti di $\bar{v}_i$ e $\bar{v}_{i+1}$, sono

$$\frac{1}{p_i} (\psi_j^{(i)} + \psi_{j+1}^{(i)}) \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_{i+1}} (\psi_j^{(i+1)} + \psi_{j+1}^{(i+1)}).$$

Ma questi, ove sia $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \ldots$, o $t - 1$, sono eguali, perchè allora è $p_i = p_{i+1}$ e inoltre vale la η), dunque anche i rimanenti elementi (14) sono combinazioni lineari degli elementi (7).

7. Da quanto or ora è stato dimostrato, giacchè gli elementi (7), al pari degli elementi (14), sono, come è chiaro, indipendenti, si deduce

$$\lambda + \frac{t - \lambda}{2} = l + \frac{t - l}{2},$$

quindi è $\lambda = l$.

Dopo di che, essendo $t = l + 2m$, si ha, come volevasi,

$$s = \frac{t + \lambda}{2} = \frac{l + 2m + l}{2} = l + m.$$