UN LEMMA SUL PROLUNGAMENTO NEL CORPO COMPLESSO DI TALUNE ALGEBRE REALI (*)

Per una ricerca sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito che costituirà l'oggetto di una Nota successiva giova stabilire a parte il seguente lemma:

Se $\bar{B}$ *è il prolungamento nel corpo complesso di un'algebra reale* B, *la quale sia il prodotto diretto di un'algebra primitiva* P *di ordine* 2 *e di un'algebra regolare* R *di ordine* p^2, $\bar{B}$ *è la somma diretta di due algebre regolari* $\bar{R}'$ *ed* $\bar{R}''$, *di ordine* p^2; *e, se per un elemento* x *di* B (*indi anche di* $\bar{B}$) *si ha*

$$x = \bar{x}' + \bar{x}''$$

con $\bar{x}'$ *in* $\bar{R}'$ *ed* $\bar{x}''$ *in* $\bar{R}''$, *la traccia di* $\bar{x}'$ *in* $\bar{R}'$ *e quella di* $\bar{x}''$ *in* $\bar{R}''$ *sono numeri complessi coniugati.*

Senza venir meno alla generalità si può supporre che P ed R abbiano entrambe per modulo quello di B e che quindi gli elementi di P ed R siano anche elementi di B.

Allora P ed R saranno certo prolungabili nel corpo complesso, e, detti $\bar{P}$ ed $\bar{R}$ i loro prolungamenti rispettivi, sarà

$$\bar{B} = \bar{P} \times \bar{R} .$$

Giacchè P è un'algebra reale primitiva di ordine 2, $\bar{P}$ è somma diretta di due algebre regolari (di ordine 1) $\bar{P}'$ e $\bar{P}''$ (*C. N.*, p. 397, numero 288) (1); quindi, se si pone

$$\bar{R}' = \bar{P}' \times \bar{R} \qquad \text{ed} \qquad \bar{R}'' = \bar{P}'' \times \bar{R} ,$$

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 4 (1926), pp. 413-15.

(1) Con la sigla *C. N.* si intende di richiamare il trattato: *Corpi numerici e algebre*, da me pubblicato presso la Ditta Principato di Messina nel 1921.

$\overline{R}'$ ed $\overline{R}''$ sono algebre regolari di ordine p^2 ed è

$$\overline{B} = \overline{R}' \dot{+} \overline{R}''.$$

Ciò posto, sia u il modulo di B (P ed R) e v un elemento di P per il quale sia $v^2 = -u$ (*C. N.*, p. 398); inoltre siano $\overline{u}'$ ed $\overline{u}''$ i moduli di $\overline{P}'$ e $\overline{P}''$.

Badando che $\overline{u}'$ ed $\overline{u}''$ sono i soli automoduli di $\overline{P}$, diversi da u (*C. N.*, p. 322), si riconosce subito che $\overline{u}'$ ed $\overline{u}''$ sono dati da

$$\frac{1}{2} u \pm \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot v,$$

quindi possiamo supporre

$$\overline{u}' = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot v \quad \text{e} \quad \overline{u}'' = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot v.$$

Segue che, se

$$y = \alpha u + \beta v,$$

con α e β numeri reali, è un qualunque elemento di P, essendo

$$\alpha u + \beta v = (\alpha - \beta \sqrt{-1})\, \overline{u}' + (\alpha + \beta \sqrt{-1})\, \overline{u}'',$$

le coordinate di y in $\overline{P}$, rispetto ad $\overline{u}'$ e $\overline{u}''$, sono numeri complessi coniugati.

Ciò posto, siano $w_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, p)$ p^2 elementi indipendenti di R.

Essendo $B = P \times R$, per l'elemento x di B (*C. N.*, p. 245) sussisterà un'eguaglianza del tipo

$$x = \sum_{i,j}^{1\ldots p} y_{i,j}\, w_{i,j}\,,$$

con le $y_{i,j}$ elementi di P; e dunque sarà

$$y_{i,j} = \lambda'_{i,j}\, \overline{u}' + \lambda''_{i,j}\, \overline{u}'',$$

con $\lambda'_{i,j}$ e $\lambda''_{i,j}$ numeri complessi coniugati, e

$$x = \overline{u}' \sum_{i,j}^{1\ldots p} \lambda'_{i,j}\, w_{i,j} + \overline{u}'' \sum_{i,j}^{1\ldots p} \lambda''_{i,j}\, w_{i,j}\,.$$

Di qua, badando che x si può decomporre in un modo solo nella somma di un elemento di $\overline{R}'$ ed un elemento di $\overline{R}''$, si trae che

$$\overline{x}' = \overline{u}' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda'_{i,j}\, w_{i,j} \quad \text{ed} \quad \overline{x}'' = \overline{u}'' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda''_{i,j}\, w_{i,j}\,.$$

Ora le $\lambda'_{i,j}$ (le $\lambda''_{i,j}$) sono le coordinate di $\overline{x}'$ (di $\overline{x}''$) rispetto alle unità di $\overline{R}'$ (di $\overline{R}''$) date dai prodotti $\overline{u}' w_{i,j}$ ($\overline{u}'' w_{i,j}$), dunque, dall'essere numeri complessi coniugati $\lambda'_{i,j}$ e $\lambda''_{i,j}$, segue che tali sono pure la traccia di $\overline{x}'$ in $\overline{R}'$ e quella di $\overline{x}''$ in $\overline{R}''$.