Uwagi o pojęciu ciągłości funkcji.

Nader pouczające znaczenie ma nieraz w matematyce proces rozczłonkowywania pojęć, oddzielania od siebie różnych atrybutów, takich nawet, które się zdają pozornie nierozłącznemi. W tym miejscu zamierzam rozpatrzeć dokładnie pewne rozczłonkowanie pojęcia ciągłości funkcji jednej lub wielu zmiennych.

Przypomnę z początku znane określenia, dotyczące funkcji 2-ch zmiennych. Wiemy, że funkcja 2-ch zmiennych $f(x, y)$ jest *ciągła względem* x dla jakichś wartości $x=x_1$, $y=y_1$ czyli: w punkcie (x_1, y_1) *), jeżeli można dla danej, dowolnie małej liczby ε znaleść takie δ_1, iżby przy

$$|x-x_1|<\delta_1$$

zachodziła nierówność

$$|f(x, y_1)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon .$$

Podobnież ciągłość względem y w punkcie (x_1, y_1) polega na możliwości znalezienia takiego δ_2, by przy $|y-y_1|<\delta_2$ było

$$|f(x_1, y)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon .$$

Ciągłość w danym punkcie (x_1, y_1) względem „zespołu obu zmiennych“ (Goursat) czyli ciągłość funkcji $f(x, y)$ rozpatrywanej jako funkcja punktu (x, y) na płaszczyźnie — inaczej ciągłość funkcji dwuch zmiennych w znaczeniu najściślejszym, a zwykle używanym, określa się warunkiem:

Dla dowolnie małego ε można znaleść takie δ, by przy

$$+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}<\delta$$

zachodziła nierówność **)

$$|f(x, y)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon .$$

---

*) Zakładamy, że funkcja jest *określona* nietylko w samym punkcie (x_1, y_1) ale i w pewnym jego otoczeniu, a mianowicie wewnątrz koła o pewnym określonym promieniu i o środku w danym punkcie.

**) Nieraz zamiast warunku: $+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}<\delta$ piszemy: $|x-x_1|<\delta$; $|y-y_1|<\delta$. Łatwo się przekonać, że oba określenia są równoważne; przy drugim koło zastępuje kwadrat o boku $=2\delta$. (Humbert. Cours d'Analyse. I).

www.rcin.org.pl

Inaczej: punkt (x_1, y_1) stanowi środek koła o promieniu $=\delta$, posiadającego tę własność, iż w każdym punkcie (x, y) wewnątrz niego wartość $f(x, y)$ różni się od $f(x_1, y_1)$ mniej niż o ε.

Różnicę pomiędzy temi trzema pojęciami uprzytomnimy sobie najlepiej, mówiąc: 1) funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie (x_1, y_1) względem zmiennej x, jeżeli $f(x_1, y_1)$ stanowi granicę wartości $f(x, y)$ przy zbliżaniu się punktu (x, y) do punktu (x_1, y_1) z jednej lub drugiej strony *wzdłuż prostej, równoległej do osi x-ów*; 2) funkcja jest ciągła w p. (x_1, y_1) względem y, jeżeli $f(x_1, y_1)$ stanowi granicę $f(x, y)$ przy zbliżaniu się punktu (x, y) do p. (x_1, y_1) wzdłuż prostej, równoległej *do osi y-ów*; 3) z ciągłości funkcji w punkcie (x_1, y_1) względem zespołu obu zmiennych wynika, że wartość $f(x_1, y_1)$ stanowi granicę wartości $f(x, y)$ przy zbliżaniu się punktu (x, y) do p. (x_1, y_1) wzdłuż jakichkolwiek krzywych, przechodzących przez ten punkt, w szczególności wzdłuż wszelkich możliwych prostych. Charakter niezbędny tego warunku jest oczywisty — sprawa jego dostateczności wymagałaby bliższego roztrząśnięcia, co po części (w stosunku do linji prostych) czynię w dalszym ciągu.

Taka prosta interpretacja gieometryczna wskazuje już jasno, że funkcja dwuch zmiennych może być w jakimś punkcie ciągła względem każdej z obu zmiennych, nie będąc jednak ciągłą względem ich zespołu. Prof. Goursat (kurs z r. 1908/9) podaje przykład dość elementarny takiej funkcji. Jest to funkcja, której w początku układu spółrzędnych przypisujemy wartość $=0$, a w każdym innym punkcie płaszczyzny wartość, wyznaczoną odpowiednio przez wzór

$$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że z zależy w gruncie rzeczy jedynie od stosunku $m=\frac{y}{x}$, że więc posiada tę samą wartość we wszystkich punktach prostej, przechodzącej przez początek układu (w ogólności z wyjątkiem samego początku)

$$z=\frac{2\frac{y}{x}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{2m}{1+m^2};$$

Przy $m=0$; i $m=\pm\infty$ *) $z=0$, a więc funkcja posiada wartość stałą $=0$ na obu osiach spółrzędnych; przy $m=1$, czyli na dwusiecznej pierwszej ćwiartki, $z=1$ (prócz początku układu); przy $m=-1$ mamy $z=-1$. Łatwo sprawdzić, że wartości w dwuch punktach, położonych symetrycznie względem jednej z dwusiecznych, są jednakowe (bo zamiana x na $\pm y$ oraz y na $\pm x$ nie zmienia wartości z). Tak np. w punktach, leżących na prostej, prze-

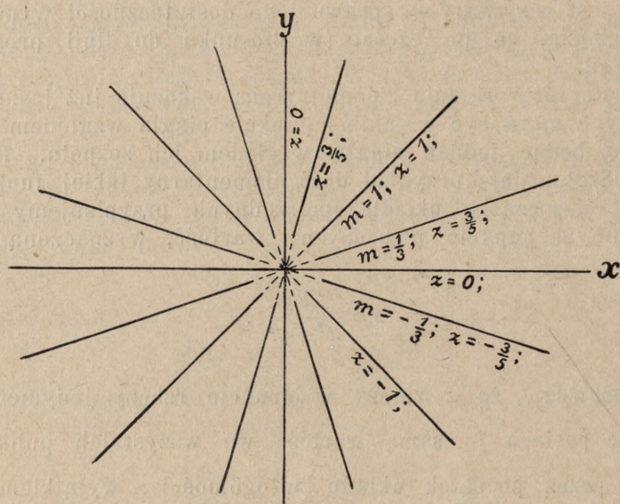
---

*) Jeżeli się komu podoba, można uniknąć procesu przechodzenia do granicy, zakładając z góry, przy samym określaniu funkcji, że przy $x=0$ chcemy mieć $z=0$.

www.rcin.org.pl

chodzącej przez (0,0), której wzniesienie $m=\frac{1}{3}$, mamy $z=0{,}6$ i to samo zachodzi dla prostej, położonej symetrycznie względem dwusiecznej pierwszej ćwiartki.

Powierzchnia, odpowiadająca omawianej funkcji, składa się z dwuch części ponad ćwiartką I i III oraz dwuch innych pod ćw. II i IV płaszczyzny x-ów i y-ów; powierzchnia ta jest „rozdarta“ wzdłuż odcinka osi z-ów równego 2 i mającego za środek początek układu (który jest jedynym punktem osi z-ów, należącym do powierzchni). Już sam ten sposób uplastycznienia zmienności funkcji przekonywa nas najzupełniej, że nie jest ona w punkcie (0,0) funkcją ciągłą dwuch zmiennych w znaczeniu, zwykle używanym, czyli „ciągłą względem ich zespołu”, chociaż jest niewątpliwie ciągła względem każdej z nich z osobna, ponieważ wartości jej w każdym punkcie osi x-ów



Rys. 1.

lub y-ów są takie same, jak w początku układu. Ściślej: nie można znaleść takiego koła, mającego za środek początek układu, aby wartość funkcji w punktach, wewnątrz niego położonych, różniła się dowolnie mało od wartości w samym początku, równej 0, o ile nie szukamy punktów wyłącznie na osiach x-ów i y-ów. Tak np. wewnątrz dowolnie małego koła będą się zawsze znajdowały punkty, leżące na jednej z dwusiecznych, a więc dające $z=\pm1$. Łatwo stwierdzić, że we wszystkich innych punktach płaszczyzny x-ów i y-ów funkcja jest ciągła zarówno względem x i y z osobna, jak i względem ich zespołu—wogóle ciągła bez żadnych zastrzeżeń. Dalej jednak przekonamy się, że ciągłość jej nawet względem x i y z osobna w jakimkolwiek obszarze, zawierającym punkt (0,0) nie jest *jednostajna.* Wprowadźmy atoli nowe określenia.

Używając danej poprzednio interpretacji gieometrycznej, możemy poję-

www.rcin.org.pl

cie ciągłości funkcji postawić na gruncie jeszcze ogólniejszym. Zacznijmy od funkcji jednej zmiennej, więc określonej w punktach jednej prostej. Punkt (x) może się zbliżać do punktu (x_1) z dwuch stron: „lewej“ i „prawej“. Wartość $f(x_1)$ może być granicą zmiennej wartości $f(x)$: 1) w pierwszym wypadku — powiemy, iż funkcja jest ciągła *lewostronnie*; 2) w drugim — mamy funkcję ciągłą *prawostronnie*; 3) w jednym i w drugim — funkcja jest ciągła *obustronnie*, ciągła względem osi x-ów lub poprostu: ciągła w znaczeniu najczęściej używanym. Inaczej:

Dla danego ε, dowolnie małego, można znaleść

1) takie δ_1, by nierówność

$$|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$$

była spełniona przy

$$0<x_1-x<\delta_1 \quad (\text{więc } x<x_1\,!)$$

2) takie δ_2, by ta sama nierówność zachodziła przy

$$0<x-x_1<\delta_2$$

3) takie δ, by wiadoma nierówność była spełniona przy

$$|x-x_1|<\delta\,.$$

Warunek 1-szy określa ciągłość lewostronną; 2-gi—ciągłość prawostronną, trzeci, który stanowi połączenie 1) i 2)—obustronną. Największą z wartości δ_1 (można okazać ściśle, że taka wartość rzeczywiście istnieje, t. j. że liczby δ_1 istotnie osiągają swoje maximum*) nazwiemy *modułem ciągłości lewostronnej* funkcji $f(x)$ dla danej wartości $x=x_1$ (czyli w punkcie (x_1)) i dla danego ε. Podobnież określamy moduł ciągłości prawostronnej i moduł ciągłości obustronnej w danym punkcie i dla danej liczby ε. Łatwo sobie uświadomić, że moduł ciągłości obustronnej równa się mniejszemu z dwu modułów ciągłości jednostronnej.

Większą jeszcze rozmaitość określeń otrzymamy, rozpatrując w podobny sposób funkcję dwuch zmiennych, czyli funkcję punktu (x, y) na płaszczyźnie x-ów i y-ów. Można mianowicie zbliżać się do punktu określonego (x_1, y_1) wzdłuż rozmaitych prostych, przechodzących przez ten punkt—w ten sposób otrzymujemy pojęcie *ciągłości względem pewnej prostej*, czyli, o ile zechcemy użyć języka bardziej analitycznego, dla pewnego określonego stosunku $m=\dfrac{\triangle y_1}{\triangle x_1}$, (stanowiącego wzniesienie tej prostej). Funkcja dwuch zmiennych jest ciągła w jakimś punkcie $M(x_1, y_1)$ dla pewnego określonego stosunku

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{\triangle y_1}{\triangle x_1}=m\,,$$

*) O ile to maximum wogóle istnieje, jako liczba skończona — w przeciwnym razie powiemy, że moduł ciągłości ρ_1 jest nieskończony. To samo się stosuje do dwuch pozostałych modułów, które oznaczymy przez ρ_2 i ρ.

www.rcin.org.pl

jeżeli przy dowolnie małym ε można znaleść takie δ_m, że warunek

$$+\sqrt{\triangle y_1{}^2+\triangle x_1{}^2}<\delta_m$$

czyli

$$|\triangle x_1\sqrt{1+m^2}|<\delta_m$$

daje

$$|f(x, y)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon\ .$$

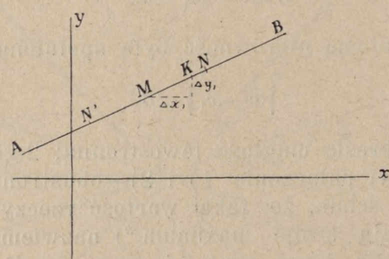
czyli

$$|f(x_1+\triangle x_1, y_1+m\,.\,\triangle x_1)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon\ .$$

Odwołując się do rysunku 2, sformułować możemy to samo nieco inaczej:

Funkcja punktu na płaszczyźnie jest ciągła względem prostej AB w jakimś jej punkcie M, jeżeli można znaleść takie $\delta_m=MN=MN'$, że w każdym*) punkcie K na prostej NN' pomiędzy N a N' mamy

$$|f(K)-f(M)|<\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ dowolnie małe})$$



Rys. 2.

[$f(M)$ oznacza $f(x_1, y_1)$, ponieważ M ma za spółrzędne x_1, y_1 — w dalszym ciągu będę używał tego sposobu oznaczania funkcji jednej lub wielu zmiennych, jako nader dogodnego]. *Moduł ciągłości* w danym punkcie (x_1, y_1) względem prostej o wzniesieniu $=m$, przechodzącej przez ten punkt (i dla danego ε) określimy, podobnie jak poprzednio, jako największą z wartości δ_m, (odpowiadających danemu ε); oznaczymy go przez ρ_m. O ile niema maximum skończonego, powiemy, że moduł ρ_m jest nieskończony. Odłóżmy na każdej z prostych, przechodzących przez punkt $M(x_1, y_1)$ w obie strony od tego punktu odpowiednie moduły ciągłości. Końce otrzymanych odcinków utworzą pewien zbiór punktów, symetryczny względem punktu M, który nazwiemy „*krzywą ciągłości 1-go rodzaju*“ funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_1, y_1). „Krzywą ciągłość 2-go rodzaju“ otrzymamy, rozróżniając na każdej z prostych ciągłości lewo — i prawostronną, czyli innemi słowy, ciągłość względem wszystkich *promieni* wychodzących z punktu M. Ogólnie biorąc, krzywa ciągłości 2-go rodzaju nie będzie symetryczna względem punktu $M(x_1, y_1)$.

*) Takim, iż funkcja jest w nim określoną, t. j. należącym do otoczenia punktu M, o którym mówiłem w odsyłaczu 1-ym.

www.rcin.org.pl

Badając którąkolwiek z krzywych ciągłości, przekonamy się, że ciągłość względem wszystkich prostych, przechodzących przez dany punkt, czy też względem wszystkich promieni, wychodzących z niego, co jest zresztą zupełnie *równoważne* (jak łatwo przekonywa krótkie rozumowanie), nie pociąga za sobą bynajmniej ciągłości „względem zespołu obu zmiennych“ czyli inaczej: względem płaszczyzny x-ów i y-ów. [Ten nowy termin: „ciągłość względem płaszczyzny“ wydaje mi się bardziej celowy i plastyczny, niż dawniej używane—zasada użycia jego w danym miejscu jest dość zrozumiała]. Istotnie, można np. przypuścić a priori, że moduł ciągłości względem jakiegoś promienia równa się jakiejś określonej skończonej liczbie, gdy tymczasem wewnątrz dowolnego kąta, mającego wierzchołek w punkcie M i zawierającego pomiędzy ramionami ów dany promień, znajdują się promienie o module ciągłości dowolnie małym, ale nie równym zeru. W takim razie punktu M nie można otoczyć kołem bodaj najmniejszym, wewnątrz którego byłby spełniony warunek ciągłości: $|f(K)—f(M)|<\varepsilon$. Inne otrzymujemy wyniki, jeżeli moduły ciągłości względem wszystkich promieni (*lub* wszystkich prostych, przechodzących przez punkt) posiadają t. zw. „kraniec dolny“ *) ρ, czyli jeżeli obie krzywe ciągłości nie zbliżają się w żadnym miejscu nieograniczenie do punktu $M(x_1, y_1)$. Jeżeli ten warunek jest spełniony, t. j. jeżeli ciągłość względem wszystkich promieni (lub prostych i t. d.) jest *jednostajna*, to wa-

---

*) Przy badaniu dowolnego zbioru liczb rzeczywistych, w liczbie skończonej lub nieskończonej, mamy do czynienia z następującemi wartościami szczególnemi:

1) Wartości graniczne czyli granice—są to liczby, posiadające tę własność, iż wśród liczb danego zbioru można znaleźć wartości, dowolnie mało różniące się od nich. Jeżeli liczby są przedstawione zapomocą punktów na prostej, to wartościom granicznym odpowiadają „punkty skupienia“ (Schönfliess. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten), inaczej: miejsca skupienia. Oczywiście zbiory skończone nie posiadają wartości granicznych.

2) Pomiędzy wartościami granicznemi odróżniamy w szczególności: granicę najmniejszą i największą (Borel). Można zauważyć ogólnie, iż obie te granice zawsze istnieją, o ile zbiór jest nieskończony i składa się z liczb nie większych co do wartości bezwzględnej od pewnej określonej liczby dodatniej; w szczególności są równe, gdy zbiór posiada tylko jedną wartość graniczną (czyli „granicę“ w znaczeniu węższym, niż wyjaśnione poprzednio—p. Janiszewski. Sur les continus irréductibles entre deux points st. 16).

3) Kraniec niższy i wyższy („la borne inférieure et la borne supérieure“) — można, jak sądzę, używać również bez zagmatwania sprawy innych przymiotników równoznacznych: dolny i górny, lewy i prawy. Kraniec niższy oznacza taką liczbę, należącą do zbioru lub stanowiącą jego wartość graniczną, iż liczb *mniejszych* od niej, zbiór nie posiada. Podobnież określimy kraniec wyższy. Jeżeli kraniec niższy lub wyższy należy do zbioru, to stanowi:

4) Wartość najmniejszą, minimalną lub największą, maksymalną w danym zbiorze czyli poprostu: minimum lub maximum. Zbiory nieskończone liczb mogą nie posiadać wartości największej, najmniejszej lub obu.

Jeżeli kraniec niższy (lub wyższy) nie należy do zbioru, to stanowi granicę najmniejszą (lub największą), którą w tym razie można jeszcze nazwać inaczej:

5) Granicą niższą (lub wyższą) — albo: dolną (lub górną). (E. Pascal: „Rachunek nieskończonościowy“. Przekład S. Dicksteina).

Zaznaczę tu jeszcze, że terminów: „krzywa ciągłości“, „ciągłość względem prostej“ i innych podobnych, wypływających ze stanowiska, zajętego przezemnie w tej pracy, u nikogo nie spotykałem.

Nazwy „moduł ciągłości“ używa Humbert, ale w nieco odmiennym znaczeniu, niż tutaj przyjęte.

www.rcin.org.pl

runkowi ciągłości czynią zadość wszystkie punkty, zawarte wewnątrz dowolnego koła, posiadającego środek w punkcie M i leżącego wewnątrz jednej lub drugiej z krzywych ciągłości. Istnienie takiego koła stanowi dowód, iż funkcja jest w punkcie M ciągła względem płaszczyzny x-ów i y-ów. Odwrotnie, jest rzeczą jasną, że ciągłość funkcji względem płaszczyzny pociąga za sobą ciągłość jednostajną względem wszystkich promieni (lub prostych i t. d.): krzywa ciągłości 1-go lub 2-go rodzaju nie może posiadać punktów wewnątrz odpowiedniego koła, a więc kraniec dolny modułów zbieżności dla różnych promieni nie może się równać zeru. Roztrząsanie dokładniejsze doprowadza do wyniku, że krańce dolne modułów zbieżności: 1) względem promieni, wychodzących z punktu i 2) względem prostych, przechodzących przez punkt, posiadają tę samą wartość, i że wartość ta stanowi moduł zbieżności względem płaszczyzny.

Otrzymujemy tedy twierdzenie następujące:

Warunek niezbędny i wystarczający ciągłości funkcji $f(x, y)$ w jakimś punkcie (x_1, y_1) względem płaszczyzny x-ów i y-ów (czyli inaczej względem zespołu obu zmiennych) polega na tym, by funkcja była w tym punkcie *jednostajnie* ciągłą względem wszystkich promieni, wychodzących z danego punktu lub wszystkich prostych, przechodzących przezeń. Moduł ciągłości względem płaszczyzny równa się krańcowi dolnemu wartości modułów zbieżności względem promieni (lub prostych).

Dla przykładu znajdziemy krzywe ciągłości 1-go rodzaju dla kilku funkcji.

I. Funkcja wymierna całkowita 1-go stopnia.

$$z = ax + by + c\ ;$$

przyrost

$$\triangle z = a\triangle x + b\triangle y = \triangle x(a + mb)\ ;$$

warunek

$$|\triangle x| . |a + mb| < \varepsilon\ ,$$

daje

$$|\triangle x| < \frac{\varepsilon}{|a + mb|}\ ;\ \delta_m = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = |\triangle x| . \sqrt{1 + m^2}$$

więc wartość maksymalna δ_m czyli ρ_m równa się $\dfrac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{|a+mb|}$. Odróżnić należy tedy 3 przypadki, zależnie od wielkości m, zmieniającej się od $-\infty$ do $+\infty$

$$1)\ m > -\frac{a}{b};\ \rho_m = \frac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{a+mb};\ 2)\ m = -\frac{a}{b}\ ;$$

ρ_m jest nieskończone; 3) $m < -\dfrac{a}{b}$; $\rho_m = \dfrac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{-a-mb}$. Zakładamy przytym, że $b > 0$; dla $b < 0$ zachodzi zupełnie to samo, ze zmianą znaków nierówności na przeciwne. Przenosząc do rozważanego punktu (x, y) początek układu spółrzędnych bez zmieniania kierunku osi i używając spółrzędnych biegunowych ($\rho_m = \rho$, $m = tg\,\theta$), otrzymamy

www.rcin.org.pl

1) w 1-ym wypadku $\rho = \frac{\varepsilon}{a\cos\theta + b\sin\theta}$ czyli, po przejściu do spółrzędnych prostokątnych

$$ax' + by' - \varepsilon = 0 .$$

2) w 3-im wypadku $\rho = \frac{\varepsilon}{-a\cos\theta - b\sin\theta}$ czyli $ax' + by' + \varepsilon = 0$; ($x'$, y'—spółrzędne w nowym układzie).

Krzywa ciągłości jest dla wszystkich punktów jednakowa i jednakowo położona względem układu spółrzędnych; składa się z 2-ch prostych równoległych i jednakowo oddalonych od odpowiedniego punktu (x, y), co zresztą łatwo sprawdzić sposobem czysto gieometrycznym, rozważając linje przecięcia się płaszczyzny $z = ax + by + c$ z dwiema płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny x-ów i y-ów i leżącemi powyżej i poniżej danego punktu o odległość $= \varepsilon$. Rzecz oczywista, że krzywa ciągłości 2-go rodzaju składą się w tym wypadku z tych samych prostych.

II. Funkcja drugiego stopnia

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f .$$

Ponieważ $\triangle y = m \triangle x$, więc

$$\triangle z = \triangle x^2 (a + cm^2 + bm) + \triangle x (2ax + by + bxm + 2cym + d + em) ;$$

ogólnie

$$\triangle z = A(m) \, . \, \triangle x^2 + B(m, x, y) \, . \, \triangle x .$$

Oznaczamy dla krótkości: $\triangle x = t$ i badamy nierówność $|At^2 + Bt| < \varepsilon$. Zadanie sprowadza się do tego, by znaleść przedział liczb zawierający 0, *wewnątrz* którego znajdują się rozwiązania układu nierówności

$$\begin{cases} (1) \; At^2 + Bt - \varepsilon < 0 \\ (2) \; At^2 + Bt + \varepsilon > 0 \end{cases}$$

określić jego oba końce *) gdy chodzi o krzywą ciągłości 2-go rodzaju, lub ten, który jest mniejszy co do wartości bezwzględnej, gdy wyznaczamy krzywą ciągłości 1-go rodzaju. Znalazłszy liczbę, określającą szukany koniec dla danego m, wystarczy, jak poprzednio, pomnożyć ją przez $\sqrt{1 + m^2}$, by otrzymać ρ_m t. j. moduł ciągłości względem prostej o wzniesieniu, równym m.

Rozpatrzmy z początku wartości m takie, iż — przy x i y danych — $A(m) > 0$. Wtedy rozwiązania $t_1(z+)$ i $t_2(z-)$ równania

---

*) „Przedział" stanowi właściwie pewien rodzaj zbioru czyli mnogości (mnogość wszystkich liczb t takich, iż $t_0 \leqslant t \leqslant T$, gdzie t_0 i T — wartości dane), a koniec przedziału — wypadek szczególny tego, cośmy nazwali powyżej krańcem.

www.rcin.org.pl

$$1')\ At^2+Bt-\varepsilon=0$$

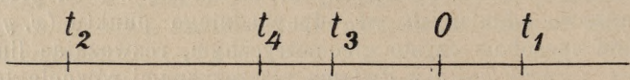
posiadają znaki *różne*, nierówność pierwsza (1) jest spełniona gdy $t_1>t>t_2$.

Załóżmy jeszcze, że $B(m)>0$. W takim razie rozwiązania równania

$$2')\ At^2+Bt+\varepsilon=0\ ,$$

o ile stanowią liczby rzeczywiste, są ujemne; mniejsze co do wartości bezwzględnej będzie

$$t_3=-\frac{B}{2A}+\sqrt{\frac{B^2}{4A^2}-\frac{\varepsilon}{A}}\ ;$$



Rys. 3.

jest ono również mniejsze co do wart. bezwzgl. od rozwiązania ujemnego t_2 równania 1')

$$t_2=-\frac{B}{2A}-\sqrt{\frac{B^2}{4A^2}+\frac{\varepsilon}{A}}$$

i nierówność (2) jest spełniona przy $t>t_3$. Obie nierówności są tedy spełnione przy

$$t_3<t<t_1$$

liczby t_1 i t_3 stanowią końce szukanego przedziału; mniejszą wartość bezwzględną posiada t_1 *).

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wartości m, dla których $B<0$, to podobne rozważania przekonają nas, że końcami szukanego przedziału będą $t_2(<0)$ i $t_4(>0)$ i że

$$|t_2|<|t_4|.\quad \text{(Porządek rozwiązań } t_1>t_3>t_4>t_2\text{)}.$$

Jeżeli wreszcie $A<0$, to, zmieniając znaki, otrzymujemy analogiczny układ nierówności: (2) przechodzi w (3)

$$-At^2-Bt-\varepsilon<0$$

(1) przechodzi w (4)

$$-At^2-Bt+\varepsilon>0\ .$$

Poniewaz $(-A)>0$, więc przy $(-B)>0$ końce szukanego przedziału stanowią rozwiązania zawierające znak $+$ przed $\sqrt{\ }$, czyli t_1 i t_3, $t_3>0$, $t_1<0$; $|t_3|<|t_1|$; przy $(-B)<0$ czyli $B>0$ znajdujemy t_2 i t_4; $t_2>0$, $t_4<0$; $|t_4|<|t_2|$.

---

*) Ponieważ odjęcie jakiejś liczby, w danym razie $\frac{\varepsilon}{A}$, od liczby, stojącej pod znakiem $\sqrt{\ }$, więcej zmienia wartość pierwiastka, niż dodanie tej samej liczby.

www.rcin.org.pl

Otatecznie, o ile chodzi o krzywą ciągłości 1-go rodzaju, można ułożyć tablicę następującą:

$A>0$	$B>0$	$\rho_m = t_1 \cdot \sqrt{1+m^2} = \frac{-B+\sqrt{B^2+4A\varepsilon}}{2A} \cdot \sqrt{1+m^2}$
	$B<0$	$\rho_m = \lvert t_2 \rvert \cdot \sqrt{1+m^2} = \frac{B+\sqrt{B^2+4A\varepsilon}}{2A} \cdot \sqrt{1+m^2}$
$A<0$	$B>0$	$\rho_m = \lvert t_4 \rvert \cdot \sqrt{1+m^2} = \frac{B+\sqrt{B^2-4A\varepsilon}}{2A} \cdot \sqrt{1+m^2}$
	$B<0$	$\rho_m = t_3 \cdot \sqrt{1+m^2} = \frac{-B+\sqrt{B^2-4A\varepsilon}}{2A} \cdot \sqrt{1+m^2}$.

W naszym roztrząsaniu pominęliśmy tę możliwość, iż przy pewnych wartościach m powstają rozwiązania nie rzeczywiste, lecz zespolone. Wniosków co do postaci krzywej ciągłości 1-go rodzaju wzięcie tych możliwości w rachubę zupełnie nie zmieni; istotnie, jeżeli np. rozwiązania równania 2′) przy $A>0$ są zespolone ($B^2<4A\varepsilon$), to nierówność (2) jest spełniona przy dowolnym t. Należy tedy zwrócić uwagę jedynie na nierówność (1), szukanym przedziałem będzie nie przedział określony przez t_1 i t_3, lecz przedział (t_1, t_2); końce o mniejszej wartości bezwzględnej będą, tak samo jak poprzednio: t_1 przy $B>0$, t_2 przy $B<0$. To samo się stosuje do przypadku $A<0$, gdy t_1 i t_2 stają się liczbami zespolonemi. Można dodać jeszcze, że przy $A=0$

1) o ile $B>0$, otrzymujemy: $\rho_m = \frac{\varepsilon}{B}\sqrt{1+m^2}$.

2) o ile $B<0$, otrzymujemy: $\rho_m = -\frac{\varepsilon}{B}\sqrt{1+m^2}$.

3) o ile $B=0$, (co zachodzi tylko wtedy, kiedy równania

$$B(m.x.y)=0\ ;\quad A(m)=0$$

mają przy danych x, y wspólne rozwiązanie) ρ_m staje się nieskończenie wielkie.

Wyznaczenie biegu krzywej ciągłości 2-go rodzaju może być również dokonane na zasadzie otrzymanych już wyników; otrzymamy jeszcze zawilszy podział wartości m na przedziały, do których należy odpowiednio dobierać rozwiązania t_1, t_2, t_3, t_4. Części obu krzywych należą do pewnych krzywych 2-go stopnia. W poszczególnych wypadkach zadanie znacznie się ułatwia.

Tak np. rozpatrzmy funkcję

$$z=ax^2+by^2 \text{ w punkcie } (0,0)\ .$$

www.rcin.org.pl

$$\triangle z = a\triangle x^2 + 2ax\triangle x + b\triangle y^2 + 2by\triangle y = \triangle x^2(a+bm^2) + 2\triangle x(ax+bmy) ,$$

przy

$$x = y = 0$$

$$\triangle z = \triangle x^2(a+bm^2) .$$

Warunek

$$|\triangle z| < \varepsilon \text{ daje}$$

$$\triangle x^2 . |a+bm^2| < \varepsilon ;$$

$$|\triangle x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{|a+bm^2|}} ;$$

$$\rho_m = \frac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{|a+bm^2|}} ;$$

Jeżeli $ab > 0$ (a i b mają znaki jednakowe), to otrzymamy

$$\rho_m = \frac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{a+bm^2}} \text{ lub } \rho_m = \frac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{-a-bm^2}} ;$$

ogólnie

$$\rho_m = \frac{\varepsilon\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{|a|+|b|.m^2}} ; \qquad (1)$$

Równanie (1) po zamianie: $\rho_m = \rho$; $m = tg\theta$, daje

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\cos\theta . \sqrt{|a| + |b| . \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}} ;$$

$$\rho . \sqrt{|a| . \cos^2\theta + |b| . \sin^2\theta} = \varepsilon ; \qquad |a| . \rho^2\cos^2\theta + |b|\rho^2\sin^2\theta = \varepsilon^2$$

czyli

$|a| . x^2 + |b| . y^2 = \varepsilon^2$. Otrzymujemy tedy, jako krzywą ciągłości pierwszego i zarazem drugiego rodzaju, elipsę. Przy $ab < 0$ krzywa ciągłości składa się z dwuch hiperbol, odpowiadających dwóm przedziałom wartości m.

III. Przykład prof. Goursata

$$z = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

$$\left(m = \frac{y}{x}\right) .$$

Weźmy jakiś punkt, dla którego $m = m_1$.

$$z = \frac{2m_1}{1+m_1{}^2} .$$

www.rcin.org.pl

Rzecz oczywista, $\left(\text{o ile } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ że krzywa ciągłości 2-go rodzaju będzie się składała z 2-ch promieni wychodzących z początku układu i najbliższych z obu stron, dla których m spełnia któreś z równań: $z = z_1 + \varepsilon$; $z = z_1 - \varepsilon$;

czyli
$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m_1}{1+m_1^2} + \varepsilon\ ;$$
$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m_1}{1+m_1^2} - \varepsilon\ ;$$

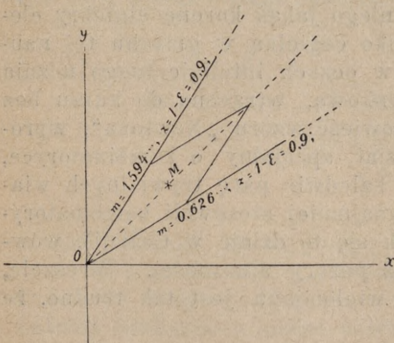
Jeżeli np. $m_1 = 1$, to wystarczy rozpatrzeć tylko drugie równanie, bo pierwsze daje rozwiązania zespolone.

$$\frac{2m}{1+m^2} = 1 - \varepsilon\ ;$$

$$m^2(1-\varepsilon) - 2m + 1 - \varepsilon = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{1-\varepsilon}$$

np. $\varepsilon = 0,1$ daje nam dwie wartości następujące: 1,594 ... i 0,626...



Rys. 4.

Krzywa ciągłości pierwszego rodzaju będzie w tym wypadku ukośnikiem o dwuch bokach leżących na promieniach, stanowiących krzywą drugiego rodzaju, i dwuch innych, symetrycznych z niemi względem danego punktu.

Warto zauważyć, że krzywa ciągłości 2-go rodzaju jest ta sama dla wszystkich punktów o jednakowym m. W punkcie (0,0) mamy ρ_0 (t. j. ρ dla $m = 0$) $= \rho \pm \infty = \infty$; ρ_m dla wszelkich innych wartości m równa się 0, ponieważ na żadnej prostej, przechodzącej przez początek układu, prócz osi x-ów i y-ów, nie można znaleść punktu, w którym z różniłoby się od 0 dowolnie mało. Można się wyrazić, że krzywa ciągłości (1-go i 2-go rodzaju), odpowiadająca punktowi (0,0), składa się z tegoż punktu oraz z punktów w nieskończoności na osi x-ów i y-ów.

(Ciąg dalszy nastąpi). *T. Łazowski.*

www.rcin.org.pl