TRADUCTION

DE

L'INVENTUM NOVUM

Du Père Jacques de BILLY.

NOUVELLES DÉCOUVERTES

DANS

LA SCIENCE DE L'ANALYSE,

RECUEILLIES PAR LE RÉVÉREND PÈRE JACQUES DE BILLY,
PRÊTRE DE LA SOCIÉTÉ DE JÉSUS,
DANS LES DIVERSES LETTRES QUI LUI ONT ÉTÉ ENVOYÉES, A DIFFÉRENTES ÉPOQUES,
PAR MONSIEUR PIERRE DE FERMAT,
CONSEILLER AU PARLEMENT DE TOULOUSE.

SAVANT LECTEUR,

Il suffit qu'en tête de cet Ouvrage apparaisse le nom de Fermat, pour que vous attendiez quelque chose de grand; un tel homme n'a rien pu imaginer qui soit petit, rien même qui soit médiocre; son esprit était illuminé de tant de clartés qu'il ne souffrait rien d'obscur; vous eussiez dit un soleil qui en un instant dissipe les ténèbres, et dont les rayons innombrables portent une éclatante lumière au sein même des abîmes. Jusqu'à présent Diophante a provoqué, et cela à juste titre, une admiration universelle; mais, pour grand qu'il soit, ce n'est qu'un pygmée par rapport à notre géant, qui a accompli le tour immense du monde mathématique et parcouru de nouvelles régions inconnues à tout autre; Viète a été célébré par tous ceux qui, pendant notre siècle, se sont occupés des opérations algébriques, et pour la renommée de quelqu'un il suffit qu'on puisse dire de lui que, dans l'Analyse, il a pénétré la pensée de cet auteur; Viète cependant n'a pas atteint le sommet de la Science, comme le montreront les nombreux exemples développés ci-après; si Claude-Gaspar Bachet n'avait pas été pour moi un intime ami, je n'en aurais pas moins une constante admiration pour la singulière subtilité de son analyse; ses travaux sur Diophante montrent assez clairement jusqu'à quel point sa vue était pénétrante dans les questions numériques; cependant elle est encore faible si on la compare à celle de notre *Linceo,* qui lui dévoile ce qu'il y a de plus abstrus.

Mais pour ne pas recommander par son nom seul ce petit Traité, je veux dès maintenant dire en quelques mots quelles récentes découvertes lui sont dues et quelle en est la portée. En premier lieu, il y a certaines équations doubles difficiles pour lesquelles les analystes n'ont pu jusqu'à présent trouver qu'une solution unique; Bachet lui-même affirme qu'on ne peut en trouver deux, tandis que Fermat va en donner tout à l'heure une infinité, sans être arrêté par les nombres faux et plus petits que zéro qui se présentent souvent dans les calculs de ce genre; il les soumettra en effet à un subtil traitement qui les réduit immédiatement à des nombres vrais. En second lieu, personne, que je sache, n'a encore résolu d'équation triple, à moins de l'avoir d'avance formée artificiellement et combinée de telle sorte que la solution en apparaisse immédiatement, même aux yeux des novices; Fermat a trouvé une méthode singulière pour résoudre les équations arbitrairement proposées de ce genre, en exceptant un seul cas que nous indiquerons ci-après. En troisième lieu, qui jamais a donné autant de solutions que l'on veut pour les expressions composées de cinq termes de degrés successifs? Qui, des racines primitives, a su en tirer de dérivées du premier ordre, du second, du troisième, et ainsi de suite indéfiniment? Personne sans doute; à Fermat seul appartient cette découverte. Il n'a pas puisé ces inventions dans les ouvrages d'autrui, comme ont coutume de le faire certains arrangeurs, il les a tirées de son propre fonds, élaborées lui seul; et puisqu'il m'a fait l'amitié de me les communiquer dans ses lettres, je crois devoir les livrer à l'impression, en commençant par reproduire textuellement, pour ne dévier en rien de sa pensée, un abrégé de toute sa méthode, auquel il a donné pour titre : *Appendice à la Dissertation de Claude-Gaspar Bachet sur les doubles équations de Diophante*. Voici ses propres paroles :

« Le subtil et savant analyste Bachet a distingué assez heureusement, à propos de la question VI, 24 de Diophante, les divers modes et cas de l'équation double; cependant il n'a pas moissonné tout le champ ouvert devant lui; en effet, rien n'empêche de donner des solutions en nombre indéfini pour les problèmes auxquels il n'en trouve qu'une ou deux tout au plus. Bien plus, il est aisé d'accomplir ce progrès et d'obtenir ce résultat par une opération facile.

» Soit proposé le sixième mode qu'il détaille assez prolixement pages 439 et 440; tous les cas qu'il a énumérés [1], grâce au procédé que je vais indiquer, sont susceptibles d'une infinité de solutions qui dérivent successivement de la première, si l'on réitère indéfiniment la même analyse.

» Voici ce procédé : Cherchez la solution de la question proposée, selon la méthode ordinaire, c'est-à-dire celle de Bachet ou de Diophante; ayant ainsi obtenu une valeur numérique de l'inconnue, recommencez l'analyse, en prenant, pour valeur de la nouvelle inconnue, x plus le nombre trouvé précédemment comme solution. Le problème se trouvera ainsi ramené à une nouvelle équation double dans laquelle les termes indépendants de x se trouveront carrés, en vertu de l'emploi de la première solution; par suite la différence entre les deux expressions se trouvera composée seulement de termes en x^2 et en x, c'est-à-dire de degrés consécutifs; cette nouvelle équation double pourra donc se résoudre d'après la méthode de Diophante ou de Bachet. La seconde solution ainsi obtenue permettra, par le même artifice, d'en calculer une troisième, celle-ci une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

» Cette remarque, qui a échappé à Diophante, à Bachet et même à Viète, comble la plus grave lacune que présente actuellement l'analyse de ces questions. Mais le principal intérêt de ma découverte res-

(1) Le sixième mode de Bachet correspond à l'ensemble des différents cas pour lesquels il obtient une solution de l'équation double sous sa forme générale :

$$ax^2 + bx + c = \square, \qquad a'x^2 + b'x + c' = \square.$$

sort surtout dans les problèmes, pour lesquels la première analyse donne, comme valeur de l'inconnue, un nombre affecté du signe —, et qu'il faut par suite regarder comme plus petit que zéro. Ma méthode s'applique en effet dans ce cas, non seulement aux problèmes qui se traitent par des équations doubles, mais à tous en général, comme on peut le reconnaître à l'essai.

» Voici la façon d'opérer : Cherchez, suivant le procédé ordinaire, (*voir* page 271, lignes 6 à 16) une solution en nombres vrais. » Ici s'arrête cet *Appendice* de Fermat.

Voici maintenant la matière de mon petit Traité; il est divisé en trois Parties : la première concerne les solutions en nombre indéfini des doubles équations, solutions qui peuvent d'ailleurs se présenter, soit avec le signe +, soit avec le signe —; la seconde Partie s'élève aux triples équations et révélera des secrets dont jusqu'à présent on n'a rien soupçonné; la troisième enfin aborde le problème de rendre égale à un carré une expression formée de cinq ou quatre termes, et donne le moyen d'obtenir des racines en nombre indéfini, qui dérivent successivement des primitives.

PREMIÈRE PARTIE.

DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI DANS LES DOUBLES ÉQUATIONS.

1. Il convient tout d'abord de rappeler brièvement la méthode ordinaire pour traiter une double équation. Voici en quoi consiste cette méthode : On prend la différence des deux expressions qui doivent séparément être égalées à un carré; on choisit deux facteurs dont le produit forme cette différence, puis on égale soit à la plus grande expression le carré de la demi-somme des facteurs, soit à la plus petite expression le carré de la demi-différence des facteurs; on obtient ainsi la valeur de la racine qui, substituée à l'inconnue dans chacune des deux expressions, donnera des nombres carrés. Je vais donner des

exemples pour trois cas seulement, les autres pouvant être aisément ramenés à ceux-là.

2. *Premier cas :* Les expressions à égaler à un carré sont composées seulement d'un terme en x et d'un terme indépendant, comme les deux suivantes :

$$2x + 12 = \square, \qquad 2x + 5 = \square.$$

La différence de ces deux expressions est $7 = 7 \times 1$; la somme des deux facteurs est 8, et le carré de la demi-somme est 16. J'égale donc $16 = 2x + 12$, d'où 2 pour la valeur de x dans chaque expression. Autrement la différence des mêmes facteurs est 6, le carré de la demi-différence est 9, que j'égale à la plus petite expression, $2x + 5$; d'où la même valeur $x = 2$.

Les deux expressions donnent nécessairement, par substitution, les carrés 16 et 9.

3. *Second cas :* Les expressions sont composées de termes en x^2, en x, et indépendants; de plus les coefficients de x^2 sont carrés. Par exemple :

$$4x^2 + 20x + 8 = \square, \qquad 4x^2 + 4x - 8 = \square.$$

La différence est $16x + 16 = 4 \times (4x + 4)$; la somme des facteurs : $4x + 8$, le carré de la demi-somme : $4x^2 + 16x + 16$. En égalant à la première expression, on aura $x = 2$.

Remarquez que dans ce cas, parmi les couples, en nombre indéfini, des facteurs dont le produit donne la différence ci-dessus, il faut choisir celui où le coefficient de x est double de la racine carrée du coefficient de x^2 dans chacune des deux expressions (on le suppose le même dans l'une et dans l'autre); c'est ainsi que nous avons pris $4x$, pour que le carré de sa moitié fasse $4x^2$.

Les deux expressions donnent, après substitution, les carrés 64 et 16.

4. *Troisième cas,* celui qu'il importe surtout de remarquer, car c'est

celui qui nous servira le plus souvent : Dans chacune des deux expressions, le terme indépendant de x est un carré ; ce peut d'ailleurs être le même carré, ou bien il peut différer de l'une à l'autre, comme si l'on a, par exemple,

$$x^2 - 8x + 16 = \square, \qquad 3x^2 - 48x + 64 = \square.$$

Mais alors on divisera le plus grand carré par le moindre, 64 par 16, et l'on multipliera la plus petite expression par le quotient 4 ; on aura ainsi deux expressions, dans lesquelles les termes connus seront des carrés égaux :

$$4x^2 - 32x + 64 = \square, \qquad 3x^2 - 48x + 64 = \square.$$

Leur différence $x^2 + 16x = x(x + 16)$. Remarquez que je prends 16 comme terme connu du second facteur, parce que c'est le double de 8 qui est la racine du carré commun aux deux expressions. La somme des deux facteurs est $2x + 16$; le carré de leur demi-somme est $x^2 + 16x + 64$; je l'égale à $4x^2 - 32x + 64$; et j'obtiens $x = 16$. D'où, en substituant dans les expressions proposées, les carrés 144 et 64.

Règle générale pour obtenir en nombre indéfini des solutions de doubles équations.

5. Prenez la valeur de la racine obtenue par la méthode ordinaire, et joignez-la à x, en lui maintenant son signe, soit $+$, soit $-$; substituez à x cette nouvelle expression de la racine dans les termes de la double équation donnée ; vous aurez de nouvelles expressions à égaler à un carré ; cherchez alors la valeur de x par la méthode ordinaire, suivant le troisième cas que je viens de donner et sur lequel j'ai appelé l'attention ; cette nouvelle valeur, qui rend carrées les nouvelles expressions formées, devra maintenant être jointe à la première valeur obtenue, en tenant compte des signes $+$ ou $-$; on obtiendra

ainsi une seconde valeur de x rendant carrées les expressions primitivement proposées.

6. Soit par exemple la double équation (1)

$$4x + 1 = \square, \qquad x^2 - 2x + 1 = \square.$$

En dehors de la solution immédiate $x = 2$, on trouvera encore, par la méthode ordinaire, $x = \frac{3}{4}$. Je vais me servir de ces deux valeurs pour en tirer de nouvelles solutions; je prendrai, en premier lieu, suivant la règle, comme nouvelle représentation de l'inconnue, $x + 2$. Substituant à x dans la première expression égalée à un carré, c'est-à-dire $4x + 1$, j'ai $4x + 9$ (si en effet x devient $x + 2$, $4x$ deviendra $4x + 8$ et en ajoutant 1, terme connu de l'expression, il vient $4x + 9$). De même, substituant $x + 2$ à x dans la seconde expression, $x^2 - 2x + 1$, on aura à égaler à un carré la nouvelle expression $x^2 + 2x + 9$ (2). Si l'on en retranche la précédente, c'est-à-dire $4x + 9$, et qu'on achève l'application à cette double équation de la règle ordinaire, on obtiendra $x = \frac{27}{4}$; en y ajoutant 2 (puisque la nouvelle représentation de l'inconnue est $x + 2$), on aura $\frac{35}{4}$ comme nouvelle valeur de l'inconnue pour le système proposé.

7. Je veux maintenant, de l'autre valeur $\frac{3}{4}$, en déduire une nouvelle; je prends pour inconnue $x + \frac{3}{4}$, et je substitue cette représentation à x dans les expressions $4x + 1$ et $x^2 - 2x + 1$; il vient $4x + 4$ et $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$. Les termes indépendants de x étant carrés

(1) Billy prend absurdement pour seconde expression : $x^2 - 2x + 1$, qui est identiquement un carré.

(2) Erreur de calcul, le résultat de la substitution étant $x^2 + 2x + 1$. Néanmoins la valeur $\frac{35}{4}$ satisfait à la *double équation,* par suite de la circonstance signalée dans la note précédente.

de part et d'autre, la double équation pourra être résolue comme il a été dit n° 4 pour le troisième cas; on trouvera $x = \frac{72}{289}$, et en ajoutant $\frac{3}{4}$ $\left(\text{puisqu'on a pris } x + \frac{3}{4} \text{ pour représenter l'inconnue}\right)$, on obtiendra $\frac{1155}{1156}$ comme nouvelle valeur de l'inconnue dans le système proposé.

8. Nous avons ainsi des secondes valeurs dérivées des premières; de ces secondes on peut en tirer des troisièmes en employant exactement le même procédé. Ainsi, soit à dériver une troisième valeur de la seconde $\frac{35}{4}$; j'ajoute celle-ci à x, de façon à représenter l'inconnue par $x + \frac{35}{4}$, que je substitue à x dans les expressions $4x + 1$ et $x^2 - 2x + 1$, ainsi que j'ai déjà expliqué; j'obtiens ainsi

$$4x + 36 \quad \text{et} \quad x^2 + \frac{31}{2}x + \frac{961}{16},$$

expressions où les termes indépendants de x sont carrés; j'en déduis $x = -\frac{3245097808}{4528002321}$; j'ajoute $\frac{35}{4}$, d'après la position pour l'inconnue, et j'ai, pour celle-ci, $+\frac{3186240667}{2012445476}$, valeur qui, substituée dans les expressions proposées, donnera des nombres carrés (1).

9. On voit ainsi qu'on peut trouver un nombre indéfini de solutions; les premières en procurent en effet du second ordre, celles du second ordre en procurent du troisième et ainsi de suite indéfiniment. Dans l'exemple donné, nous avons de la sorte obtenu cinq solutions différentes, et des dernières on peut de même en tirer de nouvelles; par conséquent, toute double équation a un nombre indéfini de solutions. C. Q. F. D.

(1) Billy aurait dû supprimer les facteurs communs; il aurait trouvé ainsi pour l'inconnue la valeur : $\frac{35}{4} - \frac{91512}{12769} = \frac{80867}{51076}$. Ces divers exemples ne peuvent être attribués à Fermat.

Il ne faut pas se décourager, si l'on rencontre comme solution des nombres faux ou plus petits que zéro.

10. Il arrive assez souvent que les calculs conduisent à des nombres faux; dès lors, faute d'expérience, on perd aussitôt courage et on se figure être tombé sur un cas d'impossibilité. J'affirme, au contraire, avec notre Fermat, que même alors on peut déduire une solution du résultat obtenu.

11. Soit, par exemple, proposée la double équation

$$-2x+1=\square, \qquad 2x^2-4x+1=\square.$$

La méthode ordinaire conduit à la valeur $x=-4$, qui, substituée dans les expressions, donne effectivement les carrés positifs 9 et 49. Cette solution est, je l'avoue, un faux nombre; cependant elle peut servir à trouver des nombres vrais. Prenez $x-4$ comme nouvelle position de l'inconnue, et substituez dans les expressions proposées; elles deviendront $-2x+9$ et $2x^2-20x+49$ (en effet puisque $2x$ donne $2x-8$, si l'on retranche ce binome de 1, comme l'exige le signe $-$, il viendra pour la première expression transformée $9-2x$; de même $2x^2$ devient $2x^2-16x+32$; $4x$ donne $4x-16$, qu'on doit retrancher de $2x^2-16x+32$ après avoir ajouté 1 à ce trinome, selon la composition de l'expression primitive; on a ainsi $2x^2-20x+49$). Dans les expressions transformées, les termes indépendants de x sont carrés; la méthode de Diophante permet donc de trouver une valeur de x; j'en retrancherai 4, puisque j'ai pris $x-4$ pour représenter l'inconnue; j'aurai ainsi une solution $\frac{5333240}{39150049}$ pour le système proposé. Ainsi le faux nombre a permis d'en trouver un vrai qui satisfait au problème, comme on peut le vérifier.

12. Soit encore proposée la double équation

$$8x^2+16x+4=\square, \qquad 2x^2+4x+4=\square.$$

On trouvera facilement les solutions -2 et $-\frac{24}{7}$; mais, comme ce sont de faux nombres, je prends $x-2$ comme nouvelle position de l'inconnue; je substitue à x dans les expressions proposées et j'ai les transformées

$$8x^2-16x+4=\square,\qquad 2x^2-4x+4=\square,$$

pour lesquelles la méthode de Bachet donne la valeur $x=\frac{24}{7}$; j'en retranche 2 (puisque j'ai posé $x-2$ pour l'inconnue) et j'ai, pour le système proposé, la nouvelle solution, $+\frac{10}{7}$. Un faux nombre en a donc procuré un vrai satisfaisant à la double équation. Il en est de même pour tout autre faux nombre, et l'on peut même obtenir par l'intermédiaire d'un faux nombre une infinité de solutions, au moyen de dérivations successives.

13. Je prendrai pour troisième exemple la double équation

$$2x^2+2x+1=\square,\qquad 2x^2+6x+1=\square.$$

La méthode ordinaire donne la solution -4; il faut donc recommencer l'opération, après avoir substitué $x-4$ à x et avoir ainsi obtenu les expressions transformées

$$2x^2-14x+25 \quad \text{et} \quad 2x^2-10x+9.$$

Comme les termes indépendants de x sont carrés de part et d'autre, la méthode de Diophante fournit une valeur de x pour ces dernières expressions; j'en retranche 4, d'après la position prise pour l'inconnue, et j'ai ainsi pour le système proposé la solution vraie et réelle $+\frac{86421304}{98831999}$. Il ne faut donc pas se décourager s'il arrive que l'on rencontre de faux nombres; les exemples qui précèdent montrent comment on peut en tirer des nombres vrais.

Pour ce procédé de résolution des doubles équations, il faut que la différence des expressions égalées à des carrés soit formée d'un terme en x^2 et d'un terme en x.

14. Il arrive souvent que, dans les doubles équations à résoudre, la différence des expressions soit constituée seulement par un terme en x. Si, par exemple, on a

$$x^2 - x + 1 = \square, \qquad x^2 - 3x + 1 = \square;$$

en retranchant la seconde expression de la première on a, pour différence, $2x$. Il peut arriver aussi que la différence soit formée d'un terme en x et d'un terme connu; si l'on a, par exemple,

$$9x^2 - 21x + 15 = \square, \qquad 9x^2 - 48x + 24 = \square,$$

suivant que l'on supposera que la première expression soit la plus grande ou la plus petite (ce qui est assez souvent indifférent) la différence sera $27x - 9$ ou $-27x + 9$. Mais, pour appliquer la méthode de Fermat, il faut avoir soin que la différence des expressions soit formée d'un terme en x^2 et d'un terme en x, autrement le calcul n'aboutirait nullement à fournir une nouvelle solution; pour que d'ailleurs la différence soit constituée d'un terme en x^2 et d'un terme en x, il faut ramener à l'égalité les termes connus, qui sont carrés, en procédant comme je l'ai montré plus haut (n° 4).

15. Soit proposée, par exemple, la double équation

$$x^2 + x + 2 = \square, \qquad x^2 + 3x + 3 = \square.$$

La méthode ordinaire donne $x = -2$; il faut donc, d'après le procédé de Fermat, substituer $x - 2$ à x, ce qui donnera pour les expressions transformées : $x^2 - 3x + 4$ et $x^2 - x + 1$. Si l'on prend la différence $2x - 3$ ou $3 - 2x$ (suivant que l'on suppose que la première expression est la plus petite ou la plus grande) et si l'on décompose cette différence en facteurs, de quelque façon que l'on s'y prenne, l'on n'avancera en rien. Pour parvenir au but désiré, il est nécessaire de ramener les deux expressions à avoir le même carré pour terme connu; pour cela, on divisera le plus grand carré par le moindre et on multipliera par le quotient l'expression où figure le moindre carré. Ainsi, dans l'exemple proposé, divisez 4 par 1, multipliez par le quotient 4 l'expression $x^2 - x + 1$; vous aurez les deux expressions disposées pour être traitées par notre procédé : $4x^2 - 4x + 4$ et $x^2 - 3x + 4$.

16. Soit encore proposée la double équation

$$x^2 - 8x + 16 = \square, \qquad 3x^2 + 48x + 64 = \square.$$

La méthode ordinaire [1] donne la valeur $x = 16$. Il faut donc substituer $x + 16$ à x dans les deux expressions qui, ainsi transformées, deviennent

$$x^2 + 24x + 256 = \square, \qquad 3x^2 + 144x + 1600 = \square.$$

On ne peut pas prendre pour différence $2x^2 + 120x + 1344$, puisqu'il serait impossible d'arriver ainsi à la solution. Que faut-il donc faire? Ce que nous avons déjà indiqué et répété : divisez 1600 par 256 et multipliez par le quotient $\frac{25}{4}$ l'expression $x^2 + 24x + 256$; le produit $\frac{25}{4}x^2 + 150x + 1600$ avec l'autre expression $3x^2 + 144x + 1600$ donne un système dont la différence sera formée de termes en x^2 et x; il sera donc possible d'obtenir une nouvelle solution.

Ce procédé est applicable à la solution non seulement de la double équation, mais aussi d'autres équations quelconques.

17. C'est un champ très fertile que celui que nous avons commencé à cultiver; car la méthode de Fermat peut fournir une infinité de

[1] Billy s'est encore trompé ici, probablement en prenant la solution du n° 4 pour un système où la valeur absolue des coefficients est la même. Cette solution satisfait ici accidentellement; mais, en opérant la substitution dans la première expression (laquelle au reste est identiquement un carré), Billy a de plus commis une erreur de calcul, puisqu'il aurait dû trouver : $x^2 + 24x + 144$.

solutions non seulement pour les doubles équations, mais encore pour les autres. Soit par exemple proposé de trouver un nombre dont le produit par 12, retranché de la somme de 8 fois son carré et de 8, fasse un cube. Soit x ce nombre; il faut que $8x^2 - 12x + 8$ fasse un cube. Prenons $2 - x$ pour racine de ce cube; on aura

$$8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 8x^2 - 12x + 8, \qquad \text{d'où} \qquad x = -2,$$

faux nombre qui satisfait à la question. Pour en avoir un vrai, substituons $x - 2$ à x dans l'expression proposée $8x^2 - 12x + 8$; la transformée sera $8x^2 - 44x + 64$ à égaler à un cube. On prendra pour racine de ce cube $4 - \frac{11}{12}x$ (4 étant la racine cubique de 64, terme connu de la transformée, $\frac{11}{12}x$ est le quotient obtenu en divisant $44x$, terme en x de la transformée, par 3 fois le carré de la racine cubique 4, c'est-à-dire par 48). En formant le cube du binome ci-dessus, j'ai $64 - 44x + \frac{121}{12}x^2 - \frac{1331}{1728}x^3$ à égaler à la transformée $8x^2 - 44x + 64$, d'où je tire $x = 2\frac{938}{1331}$. Si je retranche 2, puisque j'ai pris $x - 2$ pour représenter l'inconnue, j'aurai pour celle-ci la valeur $\frac{938}{1331}$. C'est le nombre cherché; si l'on forme son produit par 12 et si on le retranche de la somme de 8 fois son carré et de 8, on obtient le cube $\frac{6229504}{1771561}$, dont la racine est $\frac{184}{121}$.

18. Supposons encore qu'on demande un triangle rectangle dont l'aire, ajoutée à l'hypoténuse, fasse un carré. Je forme ce triangle des nombres $x + 1$ et x; les côtés seront $2x^2 + 2x + 1$, $2x + 1$, $2x^2 + 2x$. J'ajoute l'aire $2x^3 + 3x^2 + x$ à l'hypoténuse $2x^2 + 2x + 1$; j'ai $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ à égaler à un carré. En prenant pour racine de ce carré $1 + \frac{3}{2}x$, j'obtiens $x = -\frac{11}{8}$.

Substituons donc $x - \frac{11}{8}$ à x dans l'expression à égaler à un carré;

nous arriverons, pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, à $\frac{2673}{9248}$.

19. De même, si l'on demande un triangle rectangle dont l'aire, ajoutée à l'un des côtés de l'angle droit, fasse un carré, vous formerez ce triangle comme il a été dit sous le numéro précédent; vous ajouterez l'aire $2x^3+3x^2+x$ au côté $2x+1$. On trouvera $x=-\frac{3}{8}$. Substituez donc $x-\frac{3}{8}$ à x dans l'expression à égaler à un carré. La transformée sera

$$2x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{51}{32}x+\frac{49}{256}=\square : \text{soit} =\left(\frac{7}{16}+\frac{51}{28}x\right)^2$$

et la valeur de l'inconnue primitive $\frac{1425}{1568}$, d'où le triangle cherché

$$\frac{10988674}{2458624},\quad \frac{6927424}{2458624},\quad \frac{8530050}{2458624}.$$

Nouvelle méthode pour la solution des doubles équations.

20. Soit proposée la double équation

$$25x^2+4x-6=\square,\qquad 9x^2+20x-6=\square.$$

La méthode ordinaire consiste à ramener à l'égalité, par le procédé indiqué au n° 4, les coefficients de x^2. Toutefois cela n'est pas nécessaire; on peut prendre immédiatement la différence $16x^2-16x$, puis la décomposer en deux facteurs tels que la somme des termes en x soit $10x$ (double de la racine de $25x^2$). Ces facteurs seront $8x$ et $2x-2$; en égalant à la première expression $25x^2+4x-6$, que nous avons supposée la plus grande, le carré de la demi-somme de ces facteurs, on trouvera $x=\frac{1}{2}$.

21. Supposons maintenant la double équation

$$\frac{121}{9}x^2-\frac{1210}{9}x+121=\square,\qquad x^2-26x+121=\square.$$

Les termes connus sont des carrés égaux; la différence, $\frac{112}{9}x^2 - \frac{976}{9}x$, doit d'après la méthode ordinaire, être décomposée en deux facteurs $\frac{488}{99}x$ et $\frac{154}{61}x - 22$, ce qui fournit une solution. Fermat prend les facteurs $\frac{8x}{3}$ et $\frac{14}{3}x - \frac{122}{3}$, dont la somme est $\frac{22}{3}x - \frac{122}{3}$. Le carré de la moitié de cette somme étant égalé à $\frac{121}{9}x^2 - \frac{1210}{9}x + 121$, on obtient $x = \frac{658}{33}$.

22. Soit encore à résoudre la double équation

$$169x^2 + 5746x + 169 = \square, \qquad x^2 + 10x + 169 = \square.$$

On peut en obtenir trois solutions; la première en prenant la différence des deux expressions, qui est $168x^2 + 5736x$, et en la décomposant en deux facteurs dont le binome aura pour terme connu 26, c'est-à-dire le double de la racine de 169; c'est là la méthode ordinaire. En second lieu, on peut ramener à l'égalité les coefficients carrés de x^2, en multipliant par 169 les trois termes de la seconde expression, comme je l'ai expliqué au n° 4. En troisième lieu, on peut prendre comme facteurs $14x$ et $12x + \frac{2368}{7}$, dont la somme, comme terme en x, aura $26x$, c'est-à-dire le double de la racine de $169x^2$. C'est là la méthode de Fermat qui donne la valeur $x = \frac{2048075}{20566}$.

23. On pourra dire que cette méthode est ingénieuse, mais inutile, en tant qu'elle procède seulement avec des facteurs trouvés par artifice et combinés de telle façon que leur produit donne la différence des expressions à égaler à des carrés et que dans leur somme figure un terme double de la racine du terme en x^2 de la plus grande des deux expressions. Mais on ne peut faire cette objection que si l'on ignore que c'est cette méthode qui a fourni la solution d'un très beau et très difficile problème, lequel a fait le tourment de tous les analystes et qui serait demeuré sans réponse, si par son procédé Fermat ne fût arrivé à délier le nœud gordien. Celui qui accuserait cette méthode d'inutilité peut au reste voir la solution de divers problèmes donnés ci-dessous nos 45, 47, 48, 50. Il est d'ailleurs facile de reconnaître comment on doit former les facteurs en question; il suffit en effet de prendre le double de la racine du coefficient de x^2 dans la plus grande des deux expressions, et de partager ce double en deux nombres dont le produit fasse la différence des coefficients de x^2. Ainsi dans le premier exemple on prend 10; on le partage en deux nombres dont le produit est 16. On trouve ainsi 8 et 2; de même pour les autres cas.

Après que l'Analyse a trouvé les solutions primitives, on en obtient de nouvelles en réitérant l'opération.

24. Il arrive assez souvent que dans un problème le calcul conduise à de faux nombres; j'ai déjà montré ci-dessus comment l'artifice analytique de Fermat remédie à cet inconvénient, mais je vais donner aussi un moyen singulier dont les résultats sont innombrables : ce moyen c'est l'opération réitérée; toutefois, pour qu'elle aboutisse, il faut emprunter à l'Analyse les nombres primitifs à prendre dans la seconde opération.

25. Soit, par exemple, à chercher un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit. Je forme ce triangle des nombres simples $x+1$ et x; les trois côtés seront dès lors : $2x^2+2x+1$, $2x+1$, $2x^2+2x$. Il faut égaler à des carrés, d'une part l'hypoténuse $2x^2+2x+1$; de l'autre, la somme des côtés de l'angle droit : $2x^2+4x+1$. La méthode ordinaire donne la valeur $x=-\frac{12}{7}$. Les deux nombres générateurs du triangle seront donc $-\frac{5}{7}$ et $-\frac{12}{7}$, ou, si l'on prend les numérateurs seulement, pour avoir des entiers, -5 et -12, d'où le triangle : 169.119.120. J'infère de là que, pour résoudre le problème, il fallait d'abord trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse fût un carré,

en même temps que la *différence* des côtés de l'angle droit. Cette conclusion résulte forcément de l'analyse qui précède et ce triangle est : 169.119.120, formé de -5 et -12 ou de $+5$ et $+12$. Je réitère donc l'opération et je forme le triangle cherché des nombres $x+5$ et 12. J'arrive ainsi, grâce à ce triangle primitif, comme on le verra plus clairement sous le n° **45**, à une double équation qui ne donnera plus de faux nombres, mais bien des nombres vrais.

26. Soit encore à chercher un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse et de la somme de l'un des côtés de l'angle droit et de la moitié de l'autre fasse un carré, après que de ce produit on aura retranché l'aire du triangle. Je le forme des nombres simples 1 et $x+1$; les côtés seront x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. J'ai donc à multiplier x^2+2x+2 par x^2+3x+1, et à retrancher du produit : $x^4+5x^3+9x^2+8x+2$, l'aire : x^3+3x^2+2x. Le reste

$$x^4+4x^3+6x^2+6x+2$$

est à égaler à un carré; je prends pour ce carré

$$(x^2+2x+1)^2 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$

et j'obtiens $x=-\frac{1}{2}\cdot$ Si nous nous arrêtions ici, le second côté du triangle, x^2+2x, serait plus petit que zéro et la solution inacceptable. Je réitère donc l'opération en formant le triangle des nombres $x+1$ et 2; les côtés sont dès lors : x^2+2x+5; x^2+2x-3; $4x+4$; le produit de l'hypoténuse par la somme de l'un des côtés et de la moitié de l'autre, donne, après retranchement de l'aire, $x^4+4x^3+6x^3+20x+1$ que j'égale au carré $(1+10x-x^2)^2$; j'obtiens ainsi un nombre vrai, $x=\frac{23}{6}\cdot$ D'après les positions, il faut donc former le triangle des nombres $\frac{29}{6}$ et 2, ou, en prenant des entiers, 29 et 12. Les côtés du triangle cherché seront 985.697.696. Nous serions arrivés au même résultat en substituant $x-\frac{1}{2}$ à x dans l'équation $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = \square$, qui devient par cette substitution $x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{16} = \square$, soit $\left(\frac{1}{4} + 5x - x^2\right)^2$; d'où $x = \frac{23}{12}$. En retranchant $\frac{1}{2}$, j'ai $\frac{17}{12}$ pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, d'après lesquelles j'aurai en conséquence à former le triangle des nombres entiers 29 et 12.

27. Soit enfin à chercher un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit. Si je prends les nombres $x + 1$ et 1 pour générateurs du triangle, les côtés seront : $x^2 + 2x + 2$; $x^2 + 2x$; $2x + 2$. Retranchez le dernier $2x + 2$ du moyen $x^2 + 2x$; j'ai la différence : $x^2 - 2$ qui doit être égalée à un carré, aussi bien que l'hypoténuse $x^2 + 2x + 2$. Cette double équation me donne $x = -\frac{17}{12}$; par suite, d'après les positions, les nombres générateurs du triangle seront $-\frac{5}{12}$ et 1, ou, en faisant disparaître le dénominateur, -5 et $+12$. On pourrait réitérer l'opération pour trouver le triangle demandé, mais on remarquera qu'il est immédiatement fourni par la formation de 5 et 12. On a en effet ainsi le triangle rectangle 169.119.120 dans lequel l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit.

Bachet trouve une impossibilité là où Fermat donne une solution facile.

28. Je dois avouer qu'à la vérité la méthode ordinaire donne une infinité de solutions pour nombre de questions, quand, par exemple, dans la double équation, les expressions sont formées de termes en x différents et d'un même terme connu carré; il est aisé, en effet, dans ce cas de trouver autant de solutions que l'on veut; c'est pourquoi Bachet, dans ses remarques sur Diophante, VI, 24, après avoir donné une solution unique par son second mode de solution des doubles équations, en fournit une infinité par son quatrième mode. Mais il y a d'autres doubles équations moins maniables pour lesquelles les mé-

thodes ordinaires ne fournissent qu'une solution ou deux au plus; et par suite, le célèbre commentateur de Diophante dit, au même endroit, qu'on ne peut obtenir qu'une solution unique lorsque les expressions sont composées de trois termes et que leur différence n'en comporte qu'un seul; ou bien lorsque les expressions sont formées l'une de trois termes, l'autre de deux seulement, le terme carré étant d'ailleurs le même de part et d'autre; ou enfin lorsque les expressions sont seulement formées de deux termes, l'une d'un terme en x^2 et d'un connu, l'autre d'un terme en x et d'un connu; il ajoute encore qu'il y a deux solutions lorsque les coefficients de x^2 et les termes connus sont des carrés. Tout en respectant ce grand mathématicien, je puis dire que dans tous les cas qu'il a ainsi énumérés la méthode de Fermat procure une infinité de solutions; les exemples suivants vont le faire voir clairement.

29. Soit tout d'abord la double équation

$$x^2+3x+7=\square, \qquad x^2-5x+7=\square.$$

La différence des expressions ne comprend qu'un seul terme, $8x$; et l'on trouve $x=3$. Bachet, avec sa méthode, chercherait inutilement une autre solution. Mais qu'on substitue $x+3$ à x, les expressions transformées deviennent $x^2+9x+25$ et x^2+x+1; les termes connus étant carrés, on peut toujours résoudre cette double équation; si l'on rencontre de faux nombres, il n'y a pas à s'en effrayer, car j'ai déjà donné plus haut le moyen d'en déduire des vrais.

30. Comme second exemple, je prendrai la double équation

$$4x^2-x-4=\square, \qquad 4x^2+15x=\square,$$

où il n'y a que deux termes dans la seconde expression, et que Bachet a résolue en donnant la valeur unique : $x=\frac{5}{4}$. Substituez $x+\frac{5}{4}$ à x; les expressions transformées sont $4x^2+9x+1$ et $4x^2+25x+25$; les termes connus étant carrés, on peut trouver une seconde solution qui sera $\frac{4205}{1344}$.

31. Soit, pour troisième exemple, la double équation

$$x^2 + 9 = \square, \qquad 24x + 9 = \square;$$

vous trouverez deux solutions, qui sont $\frac{45}{8}$ et $\frac{816}{225}$; on peut en déduire une infinité d'autres en substituant $x + \frac{45}{8}$ ou $x + \frac{816}{225}$ à x; je me contente de donner cette indication.

32. Enfin Bachet dit que l'on trouve deux solutions pour les doubles équations où les coefficients de x^2 et les termes connus sont des carrés, comme dans celle-ci :

$$x^2 + 12x + 1 = \square, \qquad x^2 + 1 = \square.$$

Les méthodes ordinaires donnent en effet les solutions $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Mais si l'on en demande davantage, Bachet s'arrête, tandis que notre Fermat se dégage aisément de la difficulté, et fournit une infinité de valeurs. J'ajoute que, même dans ce cas, Bachet ne donnera pas toujours deux solutions; sa méthode n'en fournit, en effet, qu'une seule pour telle double équation, comme

$$x^2 + 3x + 1 = \square, \qquad x^2 + x + 1 = \square.$$

Bien plus, il arrivera souvent qu'il ne pourra même en donner une seule comme pour la double équation

$$x^2 - 6x + \frac{1}{4} = \square, \qquad x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \square,$$

où la valeur sera affectée du signe $-$. J'ai déjà dit comment la méthode de Fermat donne toujours une infinité de solutions, même quand on tombe sur de faux nombres.

33. Diophante, IV, 29, étant arrivé à l'équation

$$9x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1 = \square,$$

Bachet dit qu'elle ne peut être résolue que de deux manières, en choisissant la racine du carré de façon à éliminer avec les termes en x^4 et les termes connus, soit les termes en x, soit les termes en x^3, de façon que dans l'équation finale il ne reste soit que des termes en x^3 et en x^2, soit que des termes en x^2 et en x. Il trouve ainsi seulement les valeurs $\frac{8}{9}$ et $\frac{15}{13}$ pour x. Fermat en trouve au contraire une infinité, et en premier lieu il élimine aussi les termes en x^2 de façon à laisser subsister dans l'équation soit seulement les termes en x^4 et x^3, soit le terme en x et le connu. D'autre part, Bachet remarque que si l'on prend pour racine du carré : $3x^2 + 6x - 1$, on tombe dans l'inconvénient d'égaler à zéro $24x^2 + 40x^3$. Cet inconvénient n'arrête pas Fermat. En troisième lieu, chaque valeur trouvée est pour lui la source d'une infinité d'autres, comme je l'ai déjà expliqué.

34. Enfin Bachet, sur Diophante, IV, 28, dit qu'il est impossible d'égaler à un cube $8x^3 - x^2 + 8x - 1$; il en donne comme raison que l'on ne pourrait prendre que le cube $(2x - 1)^3$ afin d'éliminer le terme en x^3 et le terme connu; mais, avec tout le respect que je lui dois, cela est inexact; car tout d'abord on peut prendre le cube $\left(\frac{8}{3}x - 1\right)^3$ et trouver ainsi $x = \frac{549}{496}$. En second lieu, rien n'empêche de prendre le cube $(2x - 1)^3$, car, si l'on trouve ainsi $x = -\frac{2}{11}$, on peut faire une substitution en partant de cette solution. Au reste, je développerai plus longuement ces questions dans ma troisième Partie.

Fermat a dépassé Viète.

35. Viète a nié trop précipitamment qu'il fût possible de partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes; Fermat ([1]) enseigne comment ce problème peut être résolu d'après le commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 2 (ce dont pourtant Bachet lui-même ne s'était pas aperçu). Soit en effet 9, somme des deux cubes 8 et 1, à partager en deux autres cubes. On cherchera d'abord deux cubes ayant

([1]) *Voir* ci-dessus, *Observations sur Diophante,* 8 et 9, pages 246 et suiv.

pour différence 9; à cet effet, on appliquera la règle suivante : Faire le produit de chacun des deux cubes 8 et 1 par trois fois la racine de l'autre; diviser les deux produits par la différence des cubes; ajouter la plus grande racine au plus petit des deux quotients; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient; la somme et la différence ainsi obtenues donneront les racines des cubes cherchés. Dans l'exemple choisi, ces racines seront donc $\frac{20}{7}$ et $\frac{17}{7}$; les cubes $\frac{4913}{343}$ et $\frac{8000}{343}$. En second lieu, deux cubes étant donnés, on peut en calculer deux autres ayant la même différence; voici la règle à cet effet : Faire le produit de chacun des deux cubes donnés par trois fois la racine de l'autre; diviser les deux produits par la somme des deux cubes; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient et la plus grande racine du plus petit quotient; les restes seront les racines des cubes cherchés. Mais ceux qu'on a trouvés en dernier lieu ont pour différence 9; les autres cubes ayant la même différence 9 auront donc pour racines $\frac{188\,479}{90\,391}$ et $\frac{36\,520}{90\,391}$, et ces cubes seront $\frac{6\,695\,590\,842\,626\,239}{738\,542\,637\,646\,471}$ et $\frac{48\,707\,103\,808\,000}{738\,542\,637\,646\,471}$. Enfin il y a une troisième règle pour trouver deux cubes dont la somme soit égale à la différence de deux cubes donnés; la voici : Faire le produit de chacun des deux cubes donnés par trois fois la racine de l'autre; diviser ces deux produits par la somme des deux cubes; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient et le plus petit quotient de la plus grande racine; les restes seront les racines des cubes cherchés. Or nous avons trouvé en dernier lieu deux cubes ayant 9 pour différence; si l'on cherche, par la règle ci-dessus, deux cubes dont la somme soit égale à cette différence, on trouvera pour leurs racines les nombres $\frac{1\,243\,617\,733\,990\,094\,836\,431}{609\,623\,835\,676\,137\,297\,449}$ et $\frac{487\,267\,171\,714\,352\,336\,560}{609\,623\,835\,676\,137\,297\,449}$.

36. Viète a résolu très habilement le problème proposé par Adrien Romain à tous les mathématiciens de l'univers, mais il ne l'a fait que dans le cas où le nombre auquel doit être égalée l'expression proposée est inférieur à 2; il a d'ailleurs employé les sections angulaires, ce en quoi il a montré toute la puissance de son génie et ce qui lui a attiré une renommée immense et universelle. Mais notre Fermat [1] a résolu le même problème dans le cas où le nombre donné est supérieur à 2, et où alors les sections angulaires ne peuvent être d'aucun secours. Soit, en effet, à égaler à un nombre donné quelconque l'expression $45x - 3795x^3 + 95\,634x^5$ etc., telle que l'a proposée Adrien Romain; c'est bien là en effet à quoi revient le problème, ainsi que Viète l'a reconnu et a corrigé l'énoncé. Soit $6 + \sqrt{8}$ le nombre donné, supérieur à 2 par conséquent; Fermat affirme que la valeur protogène de l'inconnue peut être facilement représentée au moyen de racines universelles et qu'elle est dans ce cas

$$\sqrt[45]{3 + \sqrt{2} + \sqrt{10 + \sqrt{72}}} + \sqrt[45]{3 + \sqrt{2} - \sqrt{10 + \sqrt{72}}}.$$

Si maintenant le nombre donné est 4, Fermat affirme que la valeur de l'inconnue sera $\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[45]{2 - \sqrt{3}}$, et il obtient ainsi des solutions pour tous les nombres supérieurs à 2, quels qu'ils soient, alors que, même en employant les solutions angulaires, Viète n'en pourrait donner une seule.

37. Viète, *Zetet.* V, 9, a traité peu heureusement le problème de Diophante, VI, 3. Ce problème consiste en effet à trouver un triangle rectangle tel que la somme de son aire et d'un nombre donné fasse un carré, tandis que Viète l'a restreint au cas où le nombre donné est somme de deux carrés.

Fermat a donné une infinité de solutions pour un nombre proposé quelconque. Soit, par exemple, le nombre 3, un des triangles cherchés sera $\frac{2\,441\,889}{416\,160} \cdot \frac{1\,397\,825}{416\,160} \cdot \frac{34}{40}$.

[1] *Voir* ci-dessus pages 164 à 168.

Fermat dépasse Diophante sur nombre de points.

38. Diophante, V, 8, donne le moyen de trouver trois triangles rectangles dont l'aire soit égale; mais, si l'on en demande davantage, il peut d'autant moins satisfaire à la question, qu'il n'a jamais indiqué le procédé pour trouver un triangle rectangle de même aire qu'un triangle rectangle donné. Fermat résout ces deux problèmes par une même opération. Soit, par exemple, à trouver un triangle rectangle dont l'aire soit 6, comme celle du triangle rectangle 3.4.5. Soit 3 un des côtés d'un certain triangle rectangle; $x+4$ l'autre côté; la somme des carrés de ces côtés donne $x^2+8x+25$ pour le carré de l'hypoténuse; cette expression doit donc être égalée à un carré. D'autre part, l'aire de ce triangle, $\frac{3}{2}x+6$, doit être 6 fois un certain carré (puisque l'on demande que l'aire soit 6). Donc le sixième de l'aire ci-dessus doit faire un carré, et il en doit être de même du produit de ce sixième par 36. On doit donc égaler à un carré $9x+36$. On a ainsi une double équation

$$x^2+8x+25=\square, \qquad 9x+36=\square,$$

où les termes connus sont carrés; on trouvera donc facilement pour x la valeur $-\frac{60\,530\,400}{21\,650\,409}$, d'où $x+4=\frac{2\,896\,804}{2\,405\,601}$; l'autre côté de l'angle droit est 3; la somme des carrés de ces côtés fait un carré dont la racine sera l'hypoténuse, $\frac{7\,776\,485}{2\,405\,601}$; nous avons ainsi le triangle rectangle $\frac{7\,776\,485}{2\,405\,601}\cdot\frac{2\,896\,804}{2\,405\,601}\cdot 3$, dont l'aire sera le sextuple d'un certain carré, à savoir $\frac{724\,201}{2\,405\,601}$, dont la racine est $\frac{851}{1551}$. Divisons par cette racine chacun des côtés du triangle rectangle que nous venons de trouver, nous aurons le triangle cherché $\frac{12\,061\,328\,235}{2\,047\,166\,451}\cdot\frac{4\,492\,943\,004}{2\,047\,166\,451}\cdot\frac{4\,653}{851}$, dont l'aire est 6. On remarquera que nous avons trouvé ce triangle en partant du triangle donné 3.4.5; mais celui que nous avons trouvé peut, par le même procédé, nous en fournir un troisième, celui-ci un quatrième, et ainsi de suite indéfiniment. Voici, au reste, quatre triangles rectangles ayant pour aire 840; le premier étant 58.40.42, le second 74.24.70, le troisième 113.15.112, le quatrième sera

$$\frac{22\,606\,096}{19\,024}.\frac{26\,896}{19\,024}.\frac{22\,606\,080}{19\,024}.$$

39. Diophante, VI, 6, tombe sur la double équation

$$x^2+1=\square, \qquad 14x+1=\square.$$

Elle peut être résolue de deux manières, qu'on suppose d'ailleurs que la première expression soit la plus grande ou la plus petite des deux. On trouvera pour x les deux valeurs $\frac{24}{7}$ et $\frac{175}{288}$; demandez-en une troisième à Diophante, il ne la donnera pas. Fermat peut en fournir une infinité; par exemple, substituons $x+\frac{24}{7}$ à x dans les deux expressions x^2+1 et $14x+1$, la transformation donnera les expressions suivantes $x^2+\frac{48}{7}x+\frac{625}{49}$ et $14x+49$, dont les termes connus sont carrés; on peut donc les résoudre par la méthode connue et l'on y trouvera pour x la valeur $-\frac{1\,225\,258\,011\,250}{358\,216\,614\,144}$. Ajoutez $\frac{24}{7}$, vous aurez pour solution de la double équation proposée $+\frac{20\,392\,660\,706}{2\,507\,516\,299\,008}$.

40. Diophante, après les problèmes VI, 15 et 17, a omis un troisième cas, la recherche d'un triangle rectangle tel que si l'on retranche son aire soit de l'hypoténuse, soit de l'un des côtés de l'angle droit, on ait un carré; problème d'une rare subtilité que Diophante n'a omis, comme je l'ai dit, que parce qu'il est arrivé à de faux nombres dont il n'a pu se tirer. Fermat en donne une solution très remarquable; tout d'abord il reconnaît par son analyse qu'il faut trouver un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse par la somme de l'un des côtés de l'angle droit et de la moitié de l'autre, donne un carré, après soustraction de l'aire; il trouve ensuite ce triangle, par le raisonnement et les calculs que j'ai indiqués plus haut, n° 26, où j'ai dit que le triangle 985.697.696 satisfaisait à la condition proposée. En troisième lieu, il multiplie les côtés de ce dernier triangle par l'inconnue, et prend ainsi pour le triangle cherché : $985x . 697x . 696x$, dont l'aire est $242\,556x^2$. Retranchons-la de l'hypoténuse $985x$ et du côté $697x$, et égalons à des carrés les restes : $985x - 242\,556x^2$ et $697x - 242\,556x^2$. Prenons enfin pour ce dernier carré celui de $697x$, et posons en conséquence

$$485\,809x^2 = 697x - 242\,556x^2;$$

on aura $x = \frac{1}{1045}$, et le triangle primitivement cherché sera

$$\frac{985}{1045} . \frac{697}{1045} . \frac{696}{1045}.$$

Voilà où Diophante n'a jamais pu arriver. Nous donnerons encore plus loin nombre d'autres exemples de problèmes qu'il a omis, parce qu'il n'a pu les résoudre.

Douze problèmes sur l'application des méthodes indiquées ci-dessus.

41. Les exemples que nous avons déjà donnés constituent autant de problèmes très difficiles, que l'Algèbre ordinaire est impuissante à résoudre. Ainsi le premier (n° 6) relatif à l'équation double

$$4x + 1 = \square, \qquad x^2 - 2x + 1 = \square,$$

pourrait s'énoncer comme suit : Trouver un nombre plus grand que 8, dont le quadruple ajouté à l'unité, fasse un carré, et dont le carré, augmenté de l'unité, mais diminué du double du nombre, fasse également un carré. Le nombre cherché sera $\frac{35}{4}$.

Le second exemple (n° 11) peut être proposé comme suit : Trouver un nombre dont le double, retranché de l'unité, donne un carré, et dont le quadruple retranché de l'unité ajoutée au double du carré du nombre, fasse également un carré. D'où l'équation double

$$1 - 2x = \square, \qquad 1 - 4x + 2x^2 = \square,$$

et la solution $\frac{5\,333\,240}{39\,150\,049}$.

Enfin le troisième exemple (n° 12), celui de l'équation double

$$8x^2 + 16x + 4 = \square, \qquad 2x^2 + 4x + 4 = \square,$$

peut être proposé comme suit en problème : Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par 16, ajoutant 8 fois son carré et le nombre 4, on ait un carré, et que d'autre part, son quadruple, augmenté du double de son carré et en plus du nombre 4, fasse un carré.

La solution sera $\frac{10}{7}$.

J'omets les autres exemples pour aborder quelques autres questions plus brillantes.

Trouver indéfiniment deux nombres tels qu'en retranchant leur produit soit de l'un quelconque des deux, soit de leur somme, soit de leur différence, on ait toujours un carré.

42. Soient x et $1 - x$ ces deux nombres, positions qui satisfont aux deux premières conditions; reste à satisfaire également aux deux dernières. Je suppose que x soit le plus petit des deux nombres; si l'on retranche leur produit, $x - x^2$, de leur différence $1 - 2x$, on a pour reste : $x^2 - 3x + 1$. Si l'on retranche le produit des deux nombres de leur somme, 1, on a d'autre part le reste $x^2 - x + 1$. En égalant les deux restes à des carrés, on a par la méthode ordinaire : $x = \frac{3}{8}$; les deux nombres cherchés seront donc $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{8}$. Je substitue maintenant $x + \frac{3}{8}$ à x dans les expressions des deux restes ci-dessus; les transformées seront

$$x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{49}{64} = \square, \qquad x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{64} = \square.$$

Comme les termes connus y sont carrés, on peut trouver, pour ces transformées, $x = -\frac{12\,459\,200\,600}{219\,798\,015\,360}$. En ajoutant $\frac{3}{8}$, on aura la valeur de l'inconnue dans les expressions primitives, et on obtiendra ainsi les deux nombres $\frac{249\,875\,197}{784\,992\,912}$ et $\frac{535\,117\,715}{784\,992\,912}$. De la valeur trouvée en dernier lieu, on peut d'ailleurs déduire une troisième valeur, de cette troisième une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

Voici deux autres nombres satisfaisant à la question : $\frac{10\,416}{51\,865}$ et $\frac{41\,449}{51\,865}$.

Trouver indéfiniment trois nombres tels qu'en retranchant leur produit, soit de l'un quelconque d'entre eux, soit de l'une quelconque de leurs différences, soit du produit du moyen par l'un des extrêmes, soit du carré du moyen, on ait toujours un carré.

43. Posons x, 1, $1-x$ pour les trois nombres cherchés. Leur produit, $x-x^2$, laisse un carré si on le retranche, soit du premier, soit du troisième, soit de l'excès du second sur le premier, soit de l'excès du second sur le troisième.

Pour satisfaire aux autres conditions, il suffit d'ailleurs que l'on ait

$$x^2 - x + 1 = \square, \qquad x^2 - 3x + 1 = \square,$$

expressions identiques à celles de la question précédente. On trouvera donc $x = \frac{3}{8}$, et les trois nombres seront 3, 8, 5, en supposant 8 pour dénominateur commun. De même les trois suivants : 10 416, 51 865, 41 449 (avec 51 865 pour dénominateur commun); ou encore les trois : 249 875 197, 784 992 912, 535 117 715 (avec 784 992 912 pour dénominateur commun) satisferont aussi au problème.

On aurait pu le proposer sous cette forme : Partager 2 d'une infinité de façons en trois parties, telles qu'en retranchant le produit des trois de chacune d'elles, de chacune de leurs différences, du produit de la moyenne par chacune des extrêmes, enfin du carré de la moyenne, on ait toujours un carré. En effet, pour chaque ternaire des nombres ci-dessus, la somme des trois nombres est toujours 2. Remarquez d'ailleurs que par *partie moyenne*, je n'entends pas celle qui est plus petite que la plus grande et plus grande que la plus petite, que je tiens seulement compte de l'ordre de situation, tel qu'il a été observé ci-dessus.

Trouver indéfiniment deux nombres tels que si l'on retranche la différence de leurs carrés, soit du plus grand, soit du plus petit, soit de leur différence, on ait toujours un carré.

44. Soit $1 - 2x$ la somme des deux nombres, $2x$ leur différence; ces nombres seront donc $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} - 2x$, et la différence de leurs carrés sera $2x - 4x^2$. Qu'on la retranche, soit de la somme, soit de la différence, elle laissera toujours un carré. Mais il faut encore qu'il en soit de même si on la retranche soit de l'un, soit de l'autre des deux nombres. On aura donc la double équation

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{2} = \square, \quad 4x^2 - 4x + \frac{1}{2} = \square,$$

et l'on trouvera $x = \frac{7}{48}$. Les deux nombres cherchés seront $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{24}$.

Pour en trouver une autre paire, on substituera $x + \frac{7}{48}$ à x dans les deux expressions ci-dessus, et l'on poursuivra l'opération suivant les règles données plus haut, sans se laisser arrêter par la rencontre de faux nombres, car j'ai dit comment on peut les ramener à de vrais nombres.

Trouver deux nombres dont la somme fasse un carré et dont la somme des carrés fasse un bicarré.

45. Ce problème est tout à fait le même que celui que nous avons énoncé ci-dessus : Trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit; notre

Fermat l'a d'ailleurs proposé à nombre de savants mathématiciens sans qu'il ait été résolu par eux. On partira du triangle primitif trouvé ci-dessus (n° 25), à savoir : 169.119.120, qui est formé des nombres 5 et 12. Si l'on forme un nouveau triangle avec les nombres $x+5$ et 12, il aura pour côtés : $x^2+10x+169$, $x^2+10x-119$, $24x+120$. Or il faut égaler à des carrés tant l'hypoténuse : $x^2+10x+169$, que la somme des côtés de l'angle droit : $x^2+34x+1$. Si l'on multiplie cette dernière somme par 169, la double équation sera

$$169x^2+5746x+169=\square, \qquad x^2+10x+169=\square;$$

c'est celle qui a été traitée au n° 22. On a donc $x=\frac{2\,048\,075}{20\,566}$; d'où, d'après les positions prises pour les deux nombres générateurs, on aura le triangle cherché

$$4\,687\,298\,610\,289.\ 4\,565\,486\,027\,761.\ 1\,061\,652\,293\,520,$$

dont l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit. Dès lors les deux côtés de l'angle droit sont deux nombres dont la somme est un carré et dont la somme des carrés est un bicarré. C. Q. F. T.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré et qu'en y ajoutant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit, on ait encore un carré.

46. Soit 3 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront : x^2+2x+2, x^2+2x, $2x+2$. Multiplions ce dernier côté par 3 et ajoutons le produit, $6x+6$, au côté intermédiaire; il vient x^2+8x+6 qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire : x^2+2x. En résolvant la double équation à la manière ordinaire, on trouvera $x=\frac{1}{12}$, et, d'après les positions, le triangle cherché sera, en nombres entiers : 313.25.312.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carre et qu'en en retranchant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

47. Soit encore 3 le multiplicateur donné : on partira, comme triangle primitif, de celui qui a été trouvé dans la question précédente : 313.25.312. Les nombres générateurs en sont 13 et 12; on formera, en conséquence, le triangle cherché des nombres $x - 13$ et 12. Les côtés seront : $x^2 - 26x + 313$, $x^2 - 26x + 25$, $24x - 312$. Multiplions le dernier par 3 et retranchons le produit du côté intermédiaire, il reste $x^2 - 98x + 961$, qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire, $x^2 - 26x + 25$. On a donc une double équation, pour laquelle il convient, suivant ce qui a été dit au n° 4, de multiplier la seconde expression par $\frac{961}{25}$; on aura ainsi

$$\frac{961}{25}x^2 - \frac{24986}{25}x + 961 = \square, \qquad x^2 - 98x + 961 = \square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{936}{25}x^2 - \frac{22536}{25}x = \frac{26}{5}x \times \left(\frac{36}{5}x - \frac{11268}{65}\right).$$

En continuant à l'ordinaire, on trouvera $x = \frac{27\,681\,731}{318\,370}$; les nombres $x - 13$ et 12, si l'on chasse le dénominateur, deviendront en entiers 23 542 921 et 3 820 440. On en formera le triangle cherché :

568 864 871 005 841 . 539 673 367 418 641 . 179 888 634 210 480.

Je donnerai plus loin (Partie III, n° 36) une solution du même problème par une autre méthode.

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse soit un carré et qu'en retranchant d'un des côtés de l'angle droit un multiple donné de l'autre côté on ait un carré.

48. Soient $x + 1$ et 1 les nombres générateurs du triangle; les côtés seront : $x^2 + 2x + 2$, $x^2 + 2x$, $2x + 2$. Si l'on retranche le *double* de ce dernier côté, c'est-à-dire $4x+4$, de x^2+2x, il restera x^2-2x-4 qui devra être un carré, en même temps que l'hypoténuse : x^2+2x+2. Cette double équation donne $x=-\frac{17}{12}$; par suite $x+1$ et 1, en chassant le dénominateur, auront les valeurs entières -5 et 12, dont on forme le triangle : $169.119.-120$. Recommençons donc l'opération, en prenant, pour nombres générateurs du triangle, $x-5$ et 12. Les côtés du triangle seront : $x^2-10x+109$; $x^2-10x-119$; $24x-120$. Si l'on retranche du côté intermédiaire le double du dernier côté, le reste $x^2-58x+121$ devra être un carré, de même que l'hypoténuse $x^2-10x+169$. En multipliant le reste $x^2-58x+121$ par le carré $\frac{169}{121}$, on aura comme expressions ramenées à avoir un même carré pour terme connu :

$$\frac{169}{121}x^2-\frac{9802}{121}x+169=\square, \qquad x^2-10x+169=\square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{48}{121}x^2-\frac{8592}{121}x=\frac{2}{11}x\times\left(\frac{24}{11}x-\frac{4296}{11}\right).$$

En égalant à la plus grande expression le carré de la demi-somme des facteurs, on trouvera $x=\frac{4593455}{46046}$, ce qui, d'après les positions, conduira au triangle

$$19\,343\,046\,113\,329.\ 18\,732\,418\,687\,921.\ 4\,821\,817\,400\,400,$$

lequel satisfait à la question.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en ajoutant à l'hypoténuse un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

49. Soit 2 le multiplicateur donné. Si l'on forme le triangle des nombres $x+1$ et 1, ses côtés seront : x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. Supposons que le côté intermédiaire, x^2+2x, soit un carré, et ajoutons à l'hypoténuse le double, $4x+4$, de l'autre côté;

la somme $x^2 + 6x + 6$ doit être également un carré. On a donc

$$x^2 + 6x + 6 = \square, \quad x^2 + 2x = \square.$$

D'où $x = \frac{1}{4}$. En nombres entiers, $x + 1$ et x deviendront 5 et 4, qui forment le triangle cherché : 41.9.40. On résoudra par là même le problème suivant : Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en ajoutant à l'hypoténuse soit l'autre côté simplement, soit son double, on ait toujours un carré. Ce triangle est, en effet, celui que l'on vient de trouver : 41.9.40. Si l'on faisait ajouter à l'hypoténuse, soit l'autre côté simplement, soit son quintuple, on aurait le triangle 30.16.34, formé des nombres 5 et 3.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en retranchant de l'hypoténuse un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

50. Soit encore donné le multiplicateur 2. Prenons comme triangle primitif celui qui a été trouvé pour la question précédente : 41.9.40, formé des nombres 5 et 4. D'après l'analyse qui précède, on formera le triangle cherché des nombres $x - 5$ et 4. Les côtés seront : $x^2 - 10x + 41$; $x^2 - 10x + 9$; $8x - 40$. Égalons à un carré le côté intermédiaire : $x^2 - 10x + 9$; d'autre part, retranchons de l'hypoténuse le double du dernier côté, $8x - 40$; et égalons à un carré le reste, qui est $x^2 - 26x + 121$. La double équation

$$x^2 - 26x + 121 = \square, \quad x^2 - 10x + 9 = \square$$

semble pouvoir se résoudre de plusieurs manières, mais on n'en trouvera guère qui procure une solution effective, à moins de recourir à la nouvelle méthode exposée, n° **20** et suivants. Si l'on ramène, en effet, à l'égalité les termes carrés connus, en multipliant la seconde expression par $\frac{121}{9}$, on aura la double équation sous la forme

$$\frac{121}{9}x^2 - \frac{1210}{9}x + 121 = \square, \quad x^2 - 26x + 121 = \square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{112}{9}x^2 - \frac{976}{9}x = \frac{8}{3}x \times \left(\frac{14}{3}x - \frac{122}{3}\right).$$

En égalant à la première expression le carré de la demi-somme des facteurs, on trouvera $x = \frac{658}{33}$, et en en retranchant 5, on aura $\frac{493}{33}$. Les nombres générateurs du triangle seront par suite 493 et 132, et dès lors le triangle cherché sera 260473.225625.130152.

On résoudra de même le problème suivant : Trouver un triangle rectangle tel que l'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en retranchant de l'hypoténuse, soit l'autre côté pris simplement, soit son double, on ait toujours un carré. Ces conditions sont, en effet, satisfaites par les nombres donnés ci-dessus, et il ne faut pas dire que celle que nous venons d'ajouter est sans objet, comme remplie d'elle-même dans tout triangle; car si elle est effectivement remplie pour tout triangle (primitif), il n'en est pas de même pour leurs multiples; ainsi, dans le triangle 624.576.240, l'un des côtés de l'angle droit est bien carré, de même que l'excès de l'hypoténuse sur le double de l'autre côté; mais la somme de l'hypoténuse et de cet autre côté, pris simplement, n'est nullement un carré.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant l'aire du carré de la somme des côtés de l'angle droit.

51. Soient x et 1 les deux côtés de l'angle droit; la somme de leurs carrés, x^2+1, fera le carré de l'hypoténuse et si, du carré de la somme des mêmes côtés, on retranche l'aire du triangle, qui est $\frac{x}{2}$, on a pour reste $x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ à égaler de même à un carré. Cette double équation donne $x = -\frac{55}{48}$. Je substituerai donc $x - \frac{55}{48}$ à x dans les deux expressions égalées à des carrés; les transformées seront

$$x^2 - \frac{19}{24}x + \frac{1369}{2304} = \square, \qquad x^2 - \frac{55}{24}x + \frac{5329}{2304} = \square.$$

En multipliant la première par $\frac{5329}{1369}$, je ramènerai à l'égalité les termes carrés connus, et j'aurai les deux expressions

$$\frac{5329}{1369}x^2 - \frac{101251}{32856}x + \frac{5329}{2304} \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{55}{24}x + \frac{5329}{2304},$$

dont la différence est

$$\frac{3960}{1369}x^2 - \frac{2163}{2738}x = \frac{36}{37}x \times \left(\frac{110}{37}x - \frac{2163}{2664}\right).$$

On en déduira $x = \frac{7622505}{5250744}$; en retranchant $\frac{55}{48}$, on aura, pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, $\frac{39655}{129648}$. Les côtés de l'angle droit, qui ont été posés égaux à x et à 1, seront donc en nombres entiers 39655 et 129648, et l'hypoténuse 135577. C'est le triangle cherché.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côte de l'angle droit soit carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit et que, si l'on retranche le double de l'aire de l'un ou de l'autre des côtés de l'angle droit, on ait toujours des carrés.

52. Soient x et $1 - x$ les côtés de l'angle droit; le double de l'aire est $x - x^2$; si on le retranche de l'un et de l'autre des deux côtés, on a les carrés x^2 et $x^2 - 2x + 1$. D'autre part, la somme des côtés est le carré 1. Il faut encore que le second côté, $1 - x$, soit un carré, aussi bien que la somme des carrés des côtés, c'est-à-dire $2x^2 - 2x + 1$. On trouvera $x = \frac{40}{49}$. Le triangle cherché sera donc $\frac{40}{49} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{41}{49}$.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un cube et que, si l'on en retranche l'aire, il reste un carré.

53. Soient x et 1 les côtés de l'angle droit; de la sorte l'un d'eux sera cube; de ce cube, je retranche l'aire $\frac{1}{2}x$. Il reste $1 - \frac{1}{2}x$ qui doit être égalé à un carré, en même temps que x^2+1. Cette double équation me donnant $x=-\frac{272}{225}$, je substitue $x-\frac{272}{225}$ à x dans les deux expressions égalées à des carrés; les transformées sont :

$$\frac{361}{225}-\frac{1}{2}x=\square, \qquad x^2-\frac{544}{225}x+\frac{124\,609}{50\,625}=\square.$$

Les termes connus y sont carrés; je les ramène à l'égalité et j'ai ainsi

$$x^2-\frac{544}{225}x+\frac{124\,609}{50\,625}=\square, \qquad \frac{124\,609}{50\,625}-\frac{124\,609}{162\,450}x=\square.$$

La différence des deux expressions est

$$x^2-\frac{268\,159}{162\,450}x=x\times\left(x-\frac{268\,159}{162\,450}\right).$$

J'en conclus $x=\frac{187\,917\,462\,543}{80\,970\,928\,200}$; j'en retranche $\frac{272}{225}$ pour trouver la valeur de l'inconnue dans les positions primitives; j'ai ainsi

$$\frac{90\,032\,607\,119}{80\,970\,928\,200},$$

et le triangle cherché sera

$$\frac{121\,087\,412\,881}{80\,970\,928\,200}\cdot 1\cdot \frac{90\,032\,607\,119}{80\,970\,928\,200}.$$

SECONDE PARTIE.

DE LA TRIPLE ÉQUATION ET DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI.

1. Il est vulgaire de rendre égales à des carrés deux expressions remplissant certaines conditions; mais jusqu'à présent il a été inouï de le faire pour trois expressions. Fermat assure cependant hardiment que non seulement cela est possible, mais qu'il est même facile d'y parvenir; il donne à cet égard des règles précises qui, pour être appliquées, demandent seulement qu'il y ait un même carré dans chacune des expressions; elles peuvent d'ailleurs comprendre, soit des termes en x et des termes connus, soit des termes en x^2 et en x.

Règle générale pour résoudre les triples équations.

2. Si vous avez trois expressions à égaler à des carrés, et que le terme carré soit le même dans les trois, prenez pour l'inconnue la somme d'un terme en x^2 et d'un terme en x, dont les coefficients soient déterminés de façon qu'en multipliant cette somme par le coefficient du terme en x dans une des expressions données, et en ajoutant le terme connu de la même expression, on ait identiquement un carré. Substituez à x cette nouvelle position de l'inconnue dans les deux autres carrés, vous aurez ainsi une double équation ordinaire, d'où vous tirerez une valeur de x satisfaisant aux trois équations transformées; substituez cette valeur dans les termes en x^2 et en x que vous avez posés pour représenter l'inconnue, vous aurez ainsi la valeur cherchée satisfaisant à la triple équation proposée.

3. Soit, comme exemple, la triple équation

$$1 + x = \square, \qquad 1 + 2x = \square, \qquad 1 + 5x = \square.$$

Je représente l'inconnue par $x^2 + 2x$, binome qui, si on le multiplie par 1, coefficient de x dans la première expression, fait $x^2 + 2x$, et après addition de 1, donne le carré $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Je substitue $x^2 + 2x$ à x dans les deux autres expressions, $1 + 2x$ et $1 + 5x$; j'ai ainsi les deux transformées

$$2x^2 + 4x + 1 = \square, \qquad 5x^2 + 10x + 1 = \square,$$

que je traite par la méthode ordinaire; la différence des expressions est $3x^2 + 6x = 3x \times (x + 2)$. En égalant le carré de la demi-somme des facteurs, c'est-à-dire $4x^2 + 4x + 1$, à la plus grande expression $5x^2 + 10x + 1$, j'obtiens la valeur $x = -6$ (faux nombre qui donne des carrés dans les trois expressions transformées). Je la substitue dans la représentation de l'inconnue, c'est-à-dire dans $x^2 + 2x$. Pour cela je prends le carré de -6, qui est 36; je l'unis au double de -6, c'est-à-dire à -12. J'ai ainsi $+24$, valeur de x pour les trois expressions primitives, qui donnent en effet les trois carrés : 25, 49, 121, en prenant $x = 24$.

4. Soit encore la triple équation

$$2x + 4 = \square, \quad 3x + 4 = \square, \quad 6x + 4 = \square.$$

Je représente l'inconnue par $\frac{1}{2}x^2 + 2x$, de façon qu'en multipliant par 2 j'aie $x^2 + 4x$ qui, ajouté à 4, fait le carré $x^2 + 4x + 4$. Continuez comme ci-dessus, vous trouverez pour solution de la triple équation $x = \frac{1120}{529}$.

5. De même encore, si l'on propose la triple équation

$$x + 9 = \square, \quad 3x + 9 = \square, \quad 5x + 9 = \square,$$

on substituera $x^2 + 6x$ à x et l'on aura trois expressions transformées dont la première sera identiquement un carré; les deux autres, traitées suivant la méthode ordinaire pour la double équation, conduisent à la solution $\frac{1512}{121}$.

Si les termes connus sont des carrés différents, il n'y a pas plus de difficulté pour résoudre la triple équation.

6. Qu'on donne, en effet, la triple équation

$$x + 1 = \square, \quad 3x + 4 = \square, \quad 2x + 9 = \square,$$

on ramènera les trois carrés à l'égalité, et on poursuivra comme je l'ai expliqué. Il est d'ailleurs facile de ramener les trois carrés à l'égalité en faisant leur produit; la triple équation précédente deviendra de la sorte

$$36x + 36 = \square, \quad 27x + 36 = \square, \quad 8x + 36 = \square.$$

En effet, comme dans la première expression on a multiplié le terme connu, 1, par 36, il faut de même multiplier par 36 le coefficient de x dans la même expression; pour la seconde, le terme connu, 4, est multiplié par 9 pour obtenir 36; il faut donc multiplier par 9 le coefficient 3 de x. Enfin le dernier carré, 9, doit être multiplié par 4 pour donner 36; il faut donc, dans la même expression, multiplier par 4 le coefficient 2 de x, ce qui donne $8x$. D'ailleurs la triple équation transformée conduit à la solution $x = \frac{269\,280}{744\,769}$; la même valeur satisfera dès lors à la question proposée.

La même règle s'étend au cas où des coefficients de x seraient négatifs.

7. Par exemple, soit proposée la triple équation

$$1 + x = \square, \quad 1 - 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square.$$

En substituant $x^2 + 2x$ à x, on aura la transformée

$$1 + 2x + x^2 = \square, \quad 1 - 4x - 2x^2 = \square, \quad 1 + 10x + 5x^2 = \square.$$

La première expression étant identiquement un carré, il suffit de considérer les deux autres, qui conduiront à la valeur $x = \frac{2}{11}$, d'où, pour la triple équation proposée, la solution $\frac{48}{121}$.

On peut obtenir des solutions en nombre indéfini pour les triples équations.

8. Je vais le montrer par un exemple; j'ai dit plus haut (nº 3) que la valeur $x = -6$ satisfait à la double équation

$$2x^2 + 4x + 1 = \square, \quad 5x^2 + 10x + 1 = \square.$$

Je substitue $x - 6$ à x dans les deux expressions ci-dessus et j'obtiens ainsi les transformées

$$5x^2 - 50x + 121 = \square, \quad \frac{242}{49}x^2 - \frac{2420}{49}x^2 + 121 = \square.$$

La méthode ordinaire me donne pour solution un certain nombre, dont j'ai à retrancher 6 (puisque j'ai substitué $x-6$ à x); j'obtiens ainsi $\frac{11\,504\,385\,816}{14\,716\,382\,219}$. Comme les trois expressions primitives (n° 3) étaient $x+1$, $2x+1$, $5x+1$ et qu'on avait substitué x^2+2x à x, il faut maintenant que je prenne le carré du nombre trouvé ci-dessus, et que j'y ajoute le double du même nombre : j'obtiens ainsi la valeur $x=\frac{470\,956\,770\,729\,578\,397\,264}{216\,571\,905\,615\,699\,363\,961}$, qui satisfait aux conditions proposées, car avec cette valeur

$$x+1=\left(\frac{26\,220\,768\,035}{14\,716\,382\,219}\right)^2,$$

$$2x+1=\left(\frac{34\,036\,531\,067}{14\,716\,382\,219}\right)^2,$$

$$5x+1=\left(\frac{50\,708\,537\,341}{14\,716\,382\,219}\right)^2.$$

Lorsque, dans une triple équation, le plus grand coefficient de l'inconnue est égal à la somme des deux autres, la solution est impossible par la méthode ci-dessus (¹).

9. Soit, par exemple, la triple équation

$$2x+1=\square,\quad 3x+1=\square,\quad 5x+1=\square.$$

Substituons $2x^2+2x$ à x, pour que la première expression se transforme dans le carré $4x^2+4x+1$. Les deux autres expressions, après

(¹) Dans une note sur un de ses manuscrits conservés à la Bibliothèque de Dijon (Ms. 266³, folio 21 verso), le Père de Billy revendique pour lui-même en ces termes la remarque de ce cas d'impossibilité :

« Anno 1660 jun. 27, Dominus de Fermat, Senator Parlamenti Tholosani, significavit mihi habere se methodum generalem resolvendi triplicatas æqualitates in quibus occurrunt tantum quadrati et radices et numerus quadratorum est quadratus : ut si æquentur quadrato

$$1AA+2A,\quad 4AA+6A,\quad 9AA+6A,$$

potest variari quomodo libet numerus radicum. Ego correxi Dominum de Fermat et ostendi quod, si duo minores numeri radicum æquentur majori, impossibilis est solutio per ipsius methodum : quod ipse postea fassus est ingenue se non animadvertisse. »

substitution, deviennent

$$6x^2+6x+1=\square,\qquad 10x^2+10x+1=\square.$$

Si l'on traite cette double équation par la méthode ordinaire, on aura, comme solution des transformées, $x=-1$, valeur qui, substituée dans la représentation $2x^2+2x$ de l'inconnue, donne 0, c'est-à-dire la négation de tout nombre positif.

10. On doit dire la même chose pour toute autre triple équation de même sorte. Remarquez cependant que j'ai dit que, dans ce cas, la solution est impossible par la méthode que j'expose, car on peut proposer nombre de triples équations du même genre qui, en elles-mêmes, ne seront pas impossibles; par exemple la suivante

$$5x+1=\square,\qquad 16x+1=\square,\qquad 21x+1=\square,$$

où, en substituant la valeur $x=3$, on trouve les carrés 16, 49, 64.

11. Il faut encore observer avec notre Fermat que la triple équation

$$x+1=\square,\qquad 2x+1=\square,\qquad 3x+1=\square$$

est impossible à la fois dans son essence et au point de vue de la méthode; dans son essence, parce qu'on démontre qu'il ne peut y avoir quatre nombres carrés en progression arithmétique, ce qui, dans le cas d'une solution, aurait pourtant lieu, en prenant l'unité comme le premier de ces quatre carrés; au point de vue de la méthode, parce que, quand bien même la triple équation serait possible en elle-même, on ne peut la résoudre par la méthode exposée ci-dessus, puisque le plus grand coefficient de l'inconnue est égal à la somme des deux autres.

12. Enfin, il faut entendre l'exception comme n'ayant lieu que si le terme connu est un même carré dans les trois expressions; car autrement, si les termes connus étaient des carrés différents, le plus grand coefficient de x peut très bien être la somme des deux autres; par exemple, pour la triple équation

$$x + 1 = \square, \quad 2x + 9 = \square, \quad 3x + 4 = \square,$$

notre méthode donne la valeur $x = \frac{269\,280}{744\,769}$.

Une triple équation peut encore se résoudre si les expressions sont exclusivement composées de termes en x^2 et en x, pourvu que les coefficients de x^2 soient des carrés (positifs).

13. Soit, par exemple, la triple équation

$$x^2 + x = \square, \quad x^2 + 2x = \square, \quad x^2 + 5x = \square;$$

on peut ramener les expressions à ne renfermer que des termes en x ou connus, et l'on obtient ainsi la triple équation déjà traitée plus haut

$$x + 1 = \square, \quad 2x + 1 = \square, \quad 5x + 1 = \square,$$

pour laquelle $x = 24$. En divisant l'unité par cette valeur, j'aurai la solution cherchée pour la question proposée, savoir $\frac{1}{24}$. La raison en est que si, dans la triple équation primitive, je substitue $\frac{1}{x}$ à x, la première expression, $x^2 + x$, deviendra $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$; la seconde, $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$; la troisième, $\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}$. Mais, en les égalant à des carrés, je puis les multiplier par x^2, ce qui me donne

$$x + 1 = \square, \quad 2x + 1 = \square, \quad 5x + 1 = \square.$$

En effet, le produit d'un carré par un carré est toujours un carré. De la sorte, la triple équation constituée avec des termes en x^2 et en x a été ramenée à une triple équation constituée avec des termes en x ou connus; comme d'autre part on a substitué $\frac{1}{x}$ à x, il y a lieu de diviser l'unité par la valeur obtenue pour x dans la transformée.

14. Soit proposée la triple équation

$$4x^2 + 2x = \square, \qquad 4x^2 + 6x = \square, \qquad 4x^2 + 9x = \square;$$

on la convertira en la suivante :

$$2x + 4 = \square, \qquad 6x + 4 = \square, \qquad 9x + 4 = \square,$$

pour laquelle on trouvera $x = \frac{2080}{2209}$; divisant l'unité par cette valeur, on aura $\frac{2209}{2080}$ comme solution de la triple équation proposée. De même, si l'on a

$$x^2 + 2x = \square, \qquad 4x^2 + 3x = \square, \qquad 16x^2 + 9x = \square,$$

la conversion donnera

$$2x + 1 = \square, \qquad 3x + 4 = \square, \qquad 9x + 16 = \square,$$

d'où $x = \frac{110656}{529}$; si l'on divise l'unité par cette valeur, $\frac{529}{110526}$ sera la solution cherchée. Soit enfin

$$x^2 + x = \square, \qquad 4x^2 + 3x = \square, \qquad 9x^2 + 2x = \square,$$

la conversion donnera

$$x^2 + x = \square, \qquad 3x + 4 = \square, \qquad 2x + 9 = \square,$$

d'où $x = \frac{269\,280}{744\,769}$; divisant l'unité par cette valeur, on aura $\frac{744\,769}{269\,280}$ comme solution de la triple équation proposée.

15. Remarquez que l'on peut abréger les calculs dans le cas où les coefficients des termes en x^2 sont les mêmes, mais diffèrent de l'unité, en les ramenant précisément à l'unité sans toucher aux coefficients des termes en x; on n'aura qu'à diviser plus tard la valeur trouvée pour x par le carré donné comme coefficient des termes en x^2. Ainsi, soit proposé

$$9x^2 + 9x = \square, \qquad 9x^2 + 24x = \square, \qquad 9x^2 + 72x = \square;$$

substituons x^2 à $9x^2$ sans toucher aux termes en x, il vient

$$x^2 + 9x = \square, \qquad x^2 + 24x = \square, \qquad x^2 + 72x = \square,$$

d'où $x = 3$. Divisant par le carré 9, nous aurons $\frac{1}{3}$ comme solution de la triple équation proposée. Si l'on divisait la même valeur 3 par le carré 16, on aurait $\frac{3}{16}$ comme solution de la triple équation

$$16x^2 + 9x = \square, \qquad 16x^2 + 24x = \square, \qquad 16x^2 + 72x = \square;$$

il en sera de même dans les autres cas semblables.

Au moyen de la triple équation, on peut résoudre des équations quadruples, quintuples, etc. à l'infini.

16. Soit proposée, par exemple, la quadruple équation suivante

$$20x + 64 = \square, \qquad 12x + 16 = \square, \qquad 8x + 4 = \square, \qquad 2x + 1 = \square.$$

Si l'on ramène à l'égalité, comme il a été dit, les termes carrés, on a, comme nouvelles conditions,

$$20x + 64 = \square, \qquad 48x + 64 = \square, \qquad 128x + 64 = \square;$$

substituez $\frac{1}{2}x^2 + x$ à x et traitez par la méthode indiquée la double équation qui restera à satisfaire, vous obtiendrez, comme solution, 8320 (en dehors de 4, solution immédiate).

17. On peut de même combiner une quintuple équation avec des coefficients différents pour les termes en x et divers carrés comme termes indépendants, en s'arrangeant de façon que, les carrés étant ramenés à l'égalité, on ait trois expressions identiques et deux autres distinctes, comme par exemple :

$$2x + 1 = \square, \quad 8x + 4 = \square, \quad 32x + 16 = \square, \quad 20x + 64 = \square, \quad 36x + 256 = \square;$$

on aura comme valeurs 4 et $\frac{10\,177\,024}{1\,018\,081}$.

On combinera de la même façon une équation centuple et ainsi de suite indéfiniment.

D'après ce qui précède, il est facile de résoudre d'une infinité de façons des questions que Diophante et Bachet ne résolvent que par des procédés très compliqués.

18. Soit proposé

$$x+16=\square,\qquad 2x+16=\square.$$

Substituez x^2+8x à x, ce qui, pour la première expression, donnera le carré $x^2+8x+16=(x+4)^2$. La seconde deviendra $2x^2+16x+16$ qu'on égalera, par exemple, au carré de $4-2x$ (le coefficient de x pouvant être pris arbitrairement). On trouvera $x=16$; comme on a substitué x^2+8x, on prendra $16^2+8\times 16=384$, et l'on aura la solution cherchée.

19. Soit proposé encore

$$16-x=\square,\qquad 16-5x=\square.$$

Substituez $8x-x^2$, les transformées seront $x^2-8x+16$ et $5x^2-40x+16$: la première est un carré; il reste donc seulement à égaler la seconde à un carré, soit à celui de $4-7x$; d'où $x=\frac{4}{11}$. Comme on a substitué $8x-x^2$, on prendra $8\times\frac{4}{11}-\left(\frac{4}{11}\right)^2=\frac{336}{121}$.

20. Soit encore, comme troisième cas :

$$16+x=\square,\qquad 16-x=\square.$$

Substituez x^2+8x; les transformées sont : la première $16+8x+x^2$, qui est un carré; la seconde $16-8x-x^2$ à égaler à un carré, soit celui de $4-2x$; d'où $x=\frac{8}{5}$. Puisqu'on a substitué x^2+8x, on prendra, pour la solution cherchée : $8\times\frac{8}{5}+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{384}{25}$.

Douze questions concernant ce qui a été exposé jusqu'ici dans cette seconde Partie.

21. Tous les exemples que nous avons donnés sont autant de problèmes résolus. J'en indiquerai un seul : Trouver un nombre, différent de 24, et tel qu'en ajoutant l'unité à son simple, à son double et à son quintuple, on ait trois carrés. On trouvera ci-dessus, sous le titre des solutions en nombre indéfini (nº 8) le nombre $\frac{470\,956\,770\,729\,578\,397\,264}{216\,571\,905\,615\,699\,363\,961}$ satisfaisant à ces conditions. Bien plus, si l'on veut proposer la question en nombres entiers, on pourra l'énoncer comme suit : Trouver un carré entier autre que l'unité, tel qu'en y ajoutant le simple, le double ou le quintuple d'un certain nombre entier, on ait trois carrés. Mais j'ajouterai encore ici d'autres problèmes nouveaux.

Trouver trois cubes tels qu'en ajoutant leur somme à des nombres proportionels à ces cubes on ait trois carrés.

22. Prenez les trois premiers cubes 1, 8, 27, dont la somme est 36; ajoutez-la aux produits par x de chacun des trois cubes; vous aurez

$$36+x=\square,\qquad 36+8x=\square,\qquad 36+27x=\square;$$

remplacez x par x^2+12x, ce qui donnera, pour transformée de la première expression, le carré $(x+6)^2$. En achevant l'opération, on aura $\frac{220\,320}{5329}$ comme valeur de l'inconnue.

Trouver un nombre différent de 4 *et tel qu'en ajoutant à cinq carrés en progression géométrique ses produits par* 2, 8, 32, 20, 36, *on ait des carrés.*

23. Prenez les carrés 1, 4, 16, 64, 256; vous aurez une quintuple équation

$$1+2x=\square,\quad 4+8x=\square,\quad 16+32x=\square,\quad 64+20x=\square,\quad 256+36x=\square.$$

Ramenez à l'égalité les termes carrés, les transformées des expressions sont

$$256+512x,\quad 256+512x,\quad 256+512x,\quad 256+80x,\quad 256+36x;$$

c'est donc comme si l'on avait seulement une triple équation; la méthode ci-dessus (nº 17) donne $x = \frac{10177024}{1018081}$, solution de la quintuple équation posée tout d'abord.

Trouver trois nombres carrés tels qu'en ajoutant leur somme à chacune de leurs racines on ait des carrés.

24. Choisissez trois carrés dont la somme soit un carré et tels que la plus grande racine soit supérieure à la somme des deux autres; tels sont 4, 36, 81, dont la somme est 121. Prenez pour les trois carrés cherchés $4x^2$, $36x^2$, $81x^2$; leur somme, ajoutée séparément à chacune des racines, donne

$$121x^2 + 2x = \square, \quad 121x^2 + 6x = \square, \quad 121x^2 + 9x = \square.$$

On trouvera $x = \frac{2209}{62920}$ (*voir* nº **14**); en substituant cette valeur dans les expressions ci-dessus, on trouvera des nombres carrés, et le problème sera résolu.

Trouver trois carrés différents tels qu'en leur ajoutant trois nombres en proportion harmonique, on ait trois autres carrés.

25. Il faut avoir soin que le plus grand des trois proportionels harmoniques soit supérieur à la somme des deux autres; on pourra de la sorte poser

$$1 + 2x = \square, \quad 4 + 3x = \square, \quad 16 + 6x = \square;$$

ou, en réduisant les termes carrés à l'égalité suivant la méthode ci-dessus,

$$16 + 32x = \square, \quad 16 + 12x = \square, \quad 16 + 6x = \square.$$

Remplacez x par $\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x$ et achevez l'opération comme nous l'avons indiqué (*Cf.* nº **14**), vous trouverez pour solution de la première équation triple $\frac{995904}{4761}$.

Trouver trois nombres tels que la différence des deux plus grands soit dans un rapport donné à la différence des deux moindres, et que, d'autre part, leurs sommes deux à deux fassent des carrés. On donne le rapport de 3 *à* 1.

26. C'est la question IV, 45 de Diophante, et il n'y en a pas que cet auteur ait traitée d'une façon plus prolixe et plus embrouillée. Prenez un carré arbitraire, 4 par exemple, pour somme du nombre moyen et du moindre; soit $2+x$ le moyen, $2-x$ le moindre; leur différence sera $2x$; si on la triple (puisque le rapport donné est de 3 à 1), on aura $6x$ et, en ajoutant le nombre moyen, on aura le plus grand $2+7x$. Il faut de plus que la somme du plus grand et du moyen, c'est-à-dire $4+8x$, et la somme du plus grand et du plus petit, c'est-à-dire $4+6x$, fassent des carrés. Remplacez x par $\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}x$, de façon qu'en multipliant par 6 (coefficient de x dans la seconde expression, on ait x^2+4x, dont la somme avec 4 fera le carré $(2+x)^2$; en multipliant la nouvelle forme de l'inconnue par 8 (coefficient de x dans la première expression), et ajoutant 4, on aura $4+\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}x^2$ à égaler à un carré dont on peut former la racine d'une infinité de façons. Soit par exemple $\left(2+\frac{5}{4}x\right)^2$. On obtiendra une valeur qui, substituée dans l'expression de la première inconnue, donnera $\frac{160}{121}$; les trois nombres cherchés seront $\frac{1362}{121}$, $\frac{402}{121}$, $\frac{82}{121}$.

Trouver deux nombres tels que leur somme, soit augmentée, soit diminuée de la différence de ces nombres ou encore de la différence de leurs carrés, fasse toujours un carré.

27. Soient $\frac{1}{2}+x$ et $\frac{1}{2}-x$ ces deux nombres; leur différence, aussi bien que la différence de leurs carrés, sera $2x$. Il faut donc que la

somme des deux nombres, plus ou moins $2x$, fasse un carré. On a donc la double équation

$$1 + 2x = \square, \qquad 1 - 2x = \square.$$

Remplacez x par $\frac{1}{2}x^2 + x$, de façon qu'en multipliant cette expression de l'inconnue par 2 et en ajoutant l'unité, on ait, d'une part, $1 + 2x + x^2$ qui est un carré; de l'autre, $1 - 2x - x^2$ à égaler à un carré, soit à $(1 - 3x)^2$; d'où $x = \frac{2}{5}$. Comme on a remplacé x par $\frac{1}{2}x^2 + x$, on prendra $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} = \frac{12}{25}$, valeur d'où l'on déduira, pour les nombres cherchés, d'après les positions, $\frac{49}{50}$ et $\frac{1}{50}$.

Trouver quatre nombres dont trois soient carrés et tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré.

28. On cherchera d'abord, d'après Diophante, V, 27, trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré; tels sont $\frac{9}{16}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{256}{81}$. Ces trois carrés étant pris pour le premier, le second et le troisième des nombres cherchés, soit x le quatrième; dès lors, les produits du premier nombre par le second, du second par le troisième, du troisième par le premier donnant des carrés, si on les augmente de l'unité, il suffit qu'il en soit de même pour les produits du quatrième par chacun des trois premiers; on a donc les conditions

$$\frac{9}{16}x + 1 = \square, \qquad \frac{25}{4}x + 1 = \square, \qquad \frac{256}{81}x + 1 = \square.$$

Remplacez, suivant la règle, x par $\frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}$; dans la première expression $\frac{9}{16}x$ devient $x^2 + 2x$, qui, augmenté de l'unité, donne le carré $(x + 1)^2$; effectuant la substitution dans les deux autres expressions, on aura la double équation

$$\frac{400}{36}x^2+\frac{800}{36}x+1=\square,\qquad \frac{4096}{729}x^2+\frac{8192}{729}x+1=\square,$$

où les termes indépendants de x sont carrés (aussi bien que les coefficients de x^2); on pourra dès lors la résoudre par la méthode ordinaire, et en déduire la valeur de l'inconnue ou du quatrième nombre cherché.

Trouver un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse par la somme des côtés de l'angle droit soit un carré, aussi bien que les sommes obtenues en ajoutant au carré de l'hypoténuse, soit le double de celle-ci, soit l'un ou l'autre des côtés de l'angle droit.

29. Prenez un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit (première Partie, n° **45**); multipliez par x chacun des côtés de ce triangle, vous arriverez à ce que vous cherchez.

En effet, le produit de l'hypoténuse par la somme des côtés de l'angle droit sera un carré; si, d'autre part, au carré de l'hypoténuse, on ajoute séparément le double de celle-ci, puis l'un et l'autre des côtés de l'angle droit, on aura une triple équation, qui se résoudra comme il a été dit au n° **16**.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré, en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse.

30. Soit proposé, comme multiple donné de l'hypoténuse, le double; prenons, pour le triangle cherché, $3x$, $4x$, $5x$. On aura

$$144x^2+3x=\square,\qquad 144x^2+4x=\square,\qquad 144x^2+10x=\square.$$

En procédant comme il a été dit au n° **13**, on trouvera $x=\frac{1521}{342144}$ et le triangle cherché sera $\frac{4563}{342144}$, $\frac{6084}{342144}$, $\frac{7605}{342144}$.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant l'hypoténuse par la différence des côtés de l'angle droit, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse. Soit proposé, comme multiple donné, le double.

31. Prenez, pour triangle primitif, 119, 120, 169, dont l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit. Multipliez par x chacun de ces côtés; leur somme sera $408x$; en ajoutant séparément à son carré chacun des côtés de l'angle droit et le double de l'hypoténuse, on aura

$$166\,464x^2 + 119x = \square, \qquad 166\,464x^2 + 120x = \square, \qquad 166\,464x^2 + 338x = \square;$$

le reste est facile d'après le n° **13**.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant un des côtés de l'angle droit par la différence entre l'aire et ce côté, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse.

32. Prenez (première Partie, n° **53**) un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit soit l'unité, et dont la différence entre l'aire et cette unité soit un carré [1]; multipliez par x chacun des côtés, prenez le carré de périmètre et ajoutez-y séparément chacun des côtés de l'angle droit et le multiple proposé de l'hypoténuse; la solution s'achèvera d'après ce qui a été dit au n° **13**.

[1] Cette solution est évidemment erronée; soit $a^2 = b^2 + 1$ le triangle primitif supposé où $1 - \frac{b}{2}$ est un carré; le triangle, cherché d'après les indications de Billy, satisfait à la condition $x\left(x - \frac{bx}{2}\right) = \square$, c'est-à-dire que le produit de l'un des côtés de l'angle droit par la différence entre ce côté et la moitié de l'autre (non pas l'aire) est un carré.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant un des côtés de l'angle droit par la somme de ces deux côtés, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre un quelconque des trois côtés du triangle.

33. Prenez un triangle rectangle dont la somme des côtés de l'angle droit et l'un de ces côtés soient des carrés; par exemple, le triangle 40, 9, 41. Multipliez chacun des côtés par x et ajoutez-les séparément au carré du périmètre; vous aurez

$$8100x^2 + 40x = \square, \qquad 8100x^2 + 9x = \square, \qquad 8100x^2 + 41x = \square.$$

Le problème pourra ainsi être résolu. Il ne faut pas dire au reste qu'il y ait là une contradiction avec la remarque des nos 9 et suivants, d'après laquelle la méthode de Fermat ne s'applique pas au cas où le plus grand des coefficients de x est égal à la somme des deux autres; quelqu'un pourrait croire qu'il y a encore plus impossibilité lorsque le plus grand coefficient est inférieur à la somme des deux autres; mais du moment où il y a inégalité, quelle qu'elle soit, le problème est possible, comme tout patient analyste pourra le reconnaître.

TROISIÈME PARTIE

COMPRENANT LE PROCÉDÉ POUR OBTENIR DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI DONNANT DES VALEURS CARRÉES OU CUBIQUES A DES EXPRESSIONS OÙ ENTRENT PLUS DE TROIS TERMES DE DEGRÉS DIFFÉRENTS.

1. Je traiterai ici particulièrement des expressions comprenant les cinq termes en x^4, x^3, x^2, x et le constant; mais, à cette occasion, je parlerai aussi des expressions de quatre termes. Ces termes pourront d'ailleurs être, soit tous positifs, soit entremêlés de termes négatifs; l'objet proposé est de donner à ces expressions des valeurs carrées (pour celles de cinq termes) ou cubiques (pour celles de quatre), et cela d'une infinité de façons; or, en général, on peut dire qu'il est nécessaire, pour les valeurs carrées, que au moins le coefficient du terme en x^4 ou le terme constant soit un carré ; pour les valeurs cubiques, que le coefficient du terme en x^3 ou le terme constant soit un cube.

Égaler à un carré une expression composée de cinq termes et où le coefficient de x^4 seul soit un carré.

2. Il faut tout d'abord avoir soin que les coefficients de x^4, x^3 et x^2 soient les mêmes dans l'expression proposée et dans le développement du carré qu'on lui égale. Pour cela, on prendra tout d'abord la racine carrée du terme en x^4 pour former le premier terme de la racine du carré cherché ; puis on divisera le coefficient du terme en x^3 par le double du premier coefficient ainsi trouvé, et en multipliant le quotient par x, on aura le second terme de la racine du carré cherché ; après quoi on prendra la différence entre le carré du coefficient de ce second terme et le coefficient de x^2 dans l'expression proposée ; on divisera par le double du coefficient du premier terme, et l'on aura ainsi le troisième terme de la racine du carré cherché, celui qui est indépendant de x. En égalant le carré de cette racine trinome à l'expression proposée, on obtiendra la valeur de l'inconnue. Ainsi soit proposé

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 7 = \square;$$

en observant les règles qui viennent d'être exposées, on prendra, pour le carré à égaler à cette expression,

$$(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1;$$

l'équation donnera $x = 3$, et en substituant dans l'expression proposée, on aura le carré 256 ([1]).

([1]) Les règles de Billy reviennent, étant proposée l'expression

$$a^2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \square,$$

à lui égaler

$$\left(ax^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{c - \frac{b^2}{4a^2}}{2a}\right)^2 = a^2x^4 + bx^3 + cx^2 + \frac{b(4a^2c - b^2)}{8a^4}x + \frac{(4a^2c - b^2)^2}{64a^6}.$$

Les termes en x^4, x^3, x^2 s'éliminant, on a pour x une valeur rationelle,

$$x = \frac{64a^6e - (4a^2c - b^2)^2}{8a^2[b(4a^2c - b^2) - 8a^4d]}.$$

Égaler à un carre une expression composée de cinq termes, et où le terme constant seul soit un carré.

3. Il faut remarquer que dans ce cas, contrairement au précédent, les termes qu'on doit rendre égaux de part et d'autre sont le constant et ceux en x et x^2. On prendra donc, pour premier terme de la racine du carré à égaler, la racine du terme constant de l'expression proposée; on divisera par le double de cette racine : en premier lieu, le coefficient de x dans l'expression proposée, et l'on aura le coefficient du second terme de la racine cherchée; en second lieu, la différence entre le coefficient de x^2 dans la proposée et le carré du dernier coefficient trouvé : on aura ainsi celui de x^2 dans la racine du carré à égaler. En formant ce carré et achevant l'opération, on aura la valeur de l'inconnue. Soit, par exemple, proposée l'expression

$$10x^4+4x^3+19x^2+6x+9=\square;$$

en observant les règles qui viennent d'être exposées, on prendra, pour le carré à égaler :

$$(3+x+3x^2)^2=9+6x+19x^2+6x^3+9x^4;$$

l'équation donnera $x=2$, et en substituant dans l'expression proposée, on aura le carré 289.

Égaler de différentes façons à un carré une expression composée de cinq termes, et où le terme constant est carré en même temps que le coefficient de x^4.

4. Tout d'abord on peut former la racine du carré à égaler, de façon à éliminer les termes constants, ceux en x et en x^4. Ainsi soit proposé

$$x^4+4x^3+10x^2+20x+1=\square.$$

Formez $(1+10x+x^2)^2=1+20x+102x^2+20x^3+x^4$; les termes de trois degrés disparaissant, il restera l'équation $-92x^2=16x^3$, d'où

$x = -\frac{92}{16} = -\frac{23}{4}$. En substituant dans l'expression proposée, on aura le carré $\frac{140\,625}{256}$.

5. En second lieu, on peut former la racine de façon à éliminer les termes constants et ceux en x et x^2. Ainsi soit proposée la même expression

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(1 + 10x - 45x^2)^2$; en développant le carré et en établissant l'équation, il ne restera que les termes en x^3 et x^4, de degrés immédiatement consécutifs; on tirera donc $x = \frac{113}{253}$; la substitution donne le carré $\frac{224706}{64\,009}$.

6. Troisièmement, on peut former la racine de façon à éliminer les termes constants et ceux en x^3 et x^4. Soit toujours la même expression

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(x^2 + 2x + 1)^2$; il ne restera dans l'équation que les termes en x^2 et x; et l'on tirera $x = -4$, d'où la valeur carrée 81 pour l'expression proposée.

7. Quatrièmement, on peut former la racine de façon à éliminer les termes en x^4, x^3, x^2. Soit encore

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(x^2 + 2x + 3)^2$; après élimination, il restera seulement des termes en x ou constants; on en tirera $x = 1$, d'où, pour l'expression proposée, la valeur carrée 36.

8. Cinquièmement, on peut former la racine autrement que nous ne l'avons fait plus haut, de façon à éliminer les termes constants et ceux en x et x^4. Avec la même expression, on pourra égaler

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = (1 + 10x - x^2)^2,$$

et l'on aura $x = \frac{11}{3}$, d'où, pour l'expression proposée, la valeur $\left(\frac{218}{9}\right)^2$.

9. Sixièmement, on peut aussi former la racine autrement que nous ne l'avons fait plus haut, de façon à éliminer les termes constants et ceux en x^3 et x^4. Ainsi on pourra, avec la même expression, former l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = (x^2 + 2x - 1)^2,$$

d'où $x = -3$, et, pour l'expression proposée, la valeur carrée 4.

10. Je laisse de côté les autres racines que l'on pourrait former, comme $-x^2 - 2x - 3$, $1 - 2x - x^2$, $x^2 - 10x - 1$, $45x^2 - 10x - 1$, $-1 - 2x - x^2$; car, si elles donnent des solutions, ces dernières ne diffèrent pas de celles que nous avons déjà obtenues.

Ce que sont les solutions dérivées et comment on les obtient.

11. Il y a deux sortes de solutions : les unes, en effet, sont primitives; les autres, dérivées. Les primitives sont celles que l'on déduit immédiatement de l'expression proposée, comme celles que nous venons de calculer; les dérivées sont celles qui proviennent des primitives; elles peuvent d'ailleurs être du premier degré, si elles sont immédiatement déduites des primitives; du second degré, si elles sont déduites de dérivées du premier degré; du troisième degré, si elles sont déduites de dérivées du second degré, et ainsi de suite indéfiniment. Remarquez d'ailleurs que de solutions fausses on peut en tirer de vraies et inversement, comme on le verra clairement ci-après.

Déduire les solutions dérivées du premier degré d'une solution primitive quelconque.

12. Ajoutez à x la solution primitive, avec son signe $+$ ou $-$; substituez à l'inconnue le binome ainsi formé dans les divers termes qui composent l'expression proposée; égalez le résultat de cette substitution à un carré dont on formera la racine comme il a été dit ci-dessus;

ajoutez la valeur qui en viendra pour x à la solution primitive, vous aurez ainsi la solution dérivée que vous cherchez.

Soit, par exemple, à trouver une solution dérivée du premier degré pour l'expression proposée ci-dessus

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square;$$

prenez -3, l'une des solutions primitives; ajoutez-la à x, vous avez $x - 3$, que vous substituez à x dans les termes x^4, $4x^3$, $10x^2$, $20x$, et vous ajoutez le terme constant, comme ci-après :

x^4........	$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$
$4x^3$........	$+ 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108$
$10x^2$........	$+ 10x^2 - 60x + 90$
$20x$........	$+ 20x - 60$
1...........	$+ 1$
Total........	$x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4$

13. Cette somme doit être égalée à un carré; formez-en la racine comme suit : $x^2 - 4x - 2$; il viendra $x = \frac{7}{2}$; comme on a substitué $x - 3$, retranchez 3 de $\frac{7}{2}$, il reste $\frac{1}{2}$ comme valeur de x dans l'expression proposée; la substitution de cette valeur donnera comme résultat $\frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2$.

14. On peut encore égaler la même somme au carré de $(x^2 - 10x + 2)$, d'où $x = \frac{19}{3}$; retranchant 3, reste $\frac{10}{3}$ comme valeur de x dans l'expression proposée, et celle-ci deviendra $\frac{36\,481}{81} = \left(\frac{191}{9}\right)^2$.

15. Prenez le carré de $(2 - 10x - x^2)$; il viendra $x = -\frac{17}{7}$; retranchant 3, vous aurez la solution $-\frac{38}{7}$ qui donnera à l'expression proposée la valeur $\frac{998\,001}{2401}$, c'est-à-dire $\left(\frac{999}{49}\right)^2$.

16. Quatrièmement, prenez le carré de $(2 - 10x - 18x^2)$; il viendra $x = -\frac{368}{323}$, d'où, retranchant 3, vous aurez la solution $-\frac{1337}{323}$.

On pourrait encore former les carrés

$$(x^2 - 4x + 2)^2 \quad \text{et} \quad (-x^2 + 4x - 2)^2,$$

mais ils conduiraient à la valeur $x = 3$, d'où, en retranchant 3, la solution 0, qui est illusoire et hors de notre propos.

17. J'ai dit, d'autre part, que l'on avait également comme solution primitive -4; on peut de même en tirer des solutions dérivées, en substituant $x - 4$ à x dans l'expression proposée

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1,$$

tout comme on a substitué $x - 3$ dans cette expression.

Le résultat de la substitution sera

$$x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 124x + 81 = \square.$$

En prenant pour carré $(x^2 - 6x - 9)^2$, vous obtiendrez la solution $\frac{9}{5}$. Le carré $\left(x^2 - \frac{62}{9}x + 9\right)^2$ donnera la solution $\frac{7}{36}$. Le troisième carré $\left(9 - \frac{62}{9}x + \frac{427}{729}x^2\right)^2$ fournit $\frac{86\,507}{43\,639}$ (¹). Le quatrième $\left(9 - \frac{62}{9}x - x^2\right)^2$ donne $-\frac{755}{261}$. On pourrait encore former les carrés $(x^2 - 6x + 9)^2$ ou $(-x^2 + 6x - 9)^2$, mais on en tirerait $x = 4$, d'où la solution 0, qui nous est inutile.

18. Comme solution primitive, nous avons encore $-\frac{23}{4}$. Substituons donc $x - \frac{23}{4}$ à x; l'expression proposée deviendra

$$x^4 - 19x^3 + \frac{1115}{8}x^2 - \frac{7339}{16}x + \frac{140\,625}{256} = \square.$$

(¹) Billy donne la valeur erronée : $\frac{1\,158\,704}{43\,639}$.

Vous obtiendrez les solutions :

$$\frac{11}{3} \quad \text{par le carré} \quad \left(x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{375}{16}\right)^2;$$

$$\frac{7}{36} \quad \text{par le carré} \quad \left(x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{375}{16}\right)^2;$$

$$-\frac{144\,233}{42\,375} \quad \text{par le carré} \quad \left(x^2 + \frac{7339}{750}x - \frac{375}{16}\right)^2;$$

enfin le carré $\left(\frac{375}{16} - \frac{7339}{750}x + \frac{45\,075\,033}{52\,734\,375}x^2\right)$ en fournira une quatrième.

19. Voilà pour les solutions primitives affectées du signe $-$; on procédera de même pour celles qui ont le signe $+$. Ainsi, comme $+1$ est une solution primitive, on substituera $x+1$ et on aura la transformée

$$x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 56x + 36 = \square.$$

D'où les nouvelles solutions :

$$-\frac{10}{3} \quad \text{par le carré} \quad \left(x^2 + \frac{14}{3}x + 6\right)^2;$$

$$+\frac{23}{39} \quad \text{par le carré} \quad \left(x^2 - \frac{14}{3}x - 6\right)^2;$$

$$-\frac{1771}{533} \quad \text{par le carré} \quad \left(6 + \frac{14}{3}x + \frac{14}{27}x^2\right)^2.$$

20. Comme autre solution primitive, nous avons $\frac{11}{3}$; substituons donc $x + \frac{11}{3}$; la transformée, obtenue comme il a été dit au n° **12**, sera

$$x^4 + \frac{56}{3}x^3 + \frac{1212}{9}x^2 + \frac{12\,200}{27}x + \frac{47\,524}{81} = \square.$$

Les solutions dérivées seront : $\frac{10}{3}$ par le carré $\left(x^2 + \frac{28}{3}x + \frac{218}{9}\right)^2$; $-\frac{23}{4}$ par le carré $\left(-x^2 - \frac{28}{3}x + \frac{218}{9}\right)^2$; 1 par le carré $\left(x^2 + \frac{28}{3}x + \frac{214}{9}\right)^2$; enfin $\frac{120\,978}{110\,833}$ par le carré $\left(\frac{218}{9} + \frac{3050}{327}x - x^2\right)^2$.

21. Enfin, la dernière solution primitive conduira à la substitution de $x+\frac{113}{253}$, et en égalant la transformée de l'équation proposée à un carré, dont on formera diversement les racines, comme on l'a fait pour les précédentes, on obtiendra de même de nouvelles solutions.

Obtenir les solutions dérivées du second degré, celles du troisième, du quatrième, etc. à l'infini.

22. De même que les solutions primitives nous ont fourni des solutions dérivées du premier degré, de même les dérivées du premier degré peuvent nous fournir des dérivées du second degré. Ainsi, puisque nous avons $\frac{1}{2}$ comme solution dérivée du premier degré, nous substituerons $x+\frac{1}{2}$ à x dans l'expression proposée

$$x^4+4x^3+10x^2+20x+1;$$

le résultat de cette substitution sera $x^4+6x^3+\frac{35}{2}x^2+\frac{67}{2}x+\frac{225}{16}$.

Nous l'égalerons au carré $\left(x^2+3x+\frac{15}{4}\right)^2$, et nous obtiendrons ainsi la solution $-\frac{21}{2}$, qui est dérivée du second degré, puisqu'elle provient d'une solution dérivée du premier degré.

23. De cette solution du second degré nous pouvons en dériver encore une autre, toujours par le même procédé. A cet effet, on substituera $x-\frac{21}{2}$ à x dans l'expression proposée; le résultat de cette substitution est $x^4-38x^3+\frac{1091}{2}x^2-\frac{6995}{2}x+\frac{134689}{16}$; on l'égalera au carré $\left(x^2-19x-\frac{367}{4}\right)^2$, ce qui donnera $\frac{873}{46}$ comme valeur de x; en retranchant $\frac{21}{2}$, on aura, comme valeur correspondante dans l'expression proposée, $\frac{195}{23}$, solution dérivée qui est du troisième degré, puisqu'elle provient d'une solution dérivée du second degré. On pourra de même obtenir des solutions dérivées du quatrième degré, du cinquième, du sixième, et ainsi de suite indéfiniment.

Égaler à un carré une expression composée de quatre termes, pourvu qu'elle comprenne un terme, soit indépendant de x, soit en x^4, lequel soit carré.

24. Soit proposé : $20x^3+5x^2+40x+16=\square$.

Prenez $(4+5x)$ pour racine du carré; vous aurez des deux côtés les mêmes termes en x et indépendants, et vous obtiendrez $x=1$ comme solution. Cela posé, de cette solution vous en dériverez une autre, en substituant à x, comme précédemment, $x+1$ dans l'expression proposée $20x^3+5x^2+40x+16$; le résultat de cette substitution est $20x^3+65x^2+110x+81$; on doit l'égaler à un carré, dont on formera comme ci-dessus la racine $\left(9+\frac{55}{9}x\right)$. On trouvera, comme valeur de x, dans la transformée, $-\frac{112}{81}$, et, dans la proposée, $-\frac{31}{81}$. En troisième lieu, de cette solution dérivée du premier degré, on en déduira une du second degré, en substituant $x-\frac{31}{81}$; on aura, comme résultat de cette substitution, une nouvelle transformée que l'on égalera au carré $\left(\frac{401}{729}+\frac{147\,495}{3609}x\right)^2$, et l'on arrivera, comme solution du second degré, à la valeur $\frac{177\,301\,255\,266}{2\,110\,030\,722}$.

25. Supposons maintenant le terme en x^4 carré, et soit proposé :

$$x^4+4x^3-3x^2+2x=\square.$$

Prenez pour racine du carré : (x^2+2x), de façon à éliminer les deux termes de plus hauts degrés. Il viendra : $7x^2=2x$, d'où, en dehors de l'unité qui est une autre solution, la valeur $x=\frac{2}{7}$. On pourra donc substituer à x, soit $x+\frac{2}{7}$, soit $x+1$, pour obtenir des racines dérivées.

26. L'absence d'un des termes intermédiaires n'empêche pas d'égaler à un carré une expression composée de quatre termes. Ainsi l'expression $16+24x^2+16x^3+5x^4$ peut être égalée au carré $(4+3x^2)^2$, ce qui donne $x=4$, d'où l'on pourra substituer $x+4$ pour obtenir une solution dérivée.

De même, si l'on propose $x^4+600x^2+8000x+50\,000$, on formera le carré $(x^2+300)^2$, et l'on obtiendra $x=5$. On pourra donc substituer $x+5$ pour obtenir une solution dérivée.

On peut égaler à un cube une expression composée de quatre termes, pourvu que le terme indépendant de x, ou bien le coefficient de x^3, soit un cube.

27. A cet effet, si le terme indépendant de x est un cube, on en prendra la racine cubique comme terme indépendant de la racine du cube à égaler. On divisera ensuite, par le triple carré de cette racine cubique, le coefficient de x dans l'expression proposée, et on aura ainsi le coefficient de x dans la racine du cube à former; la racine cubique et le quotient doivent d'ailleurs être affectés des signes convenables. Ainsi soit proposé d'égaler à un cube l'expression $2x^3+x^2+3x+1$; on prendra, pour racine de ce cube, $1+x$ (1 étant la racine cubique de l'unité, et x le quotient de $3x$ pour 3, qui est le triple carré de 1). En égalant à l'expression proposée le cube de cette racine, à savoir x^3+3x^2+3x+1, on aura $x=2$, et en substituant $x+2$ à x, on pourra obtenir la solution dérivée.

28. Si c'est le coefficient de x^3 qui est un cube, on prendra sa racine cubique comme coefficient de x, et en divisant par le triple carré de cette racine le coefficient de x^2 dans la proposée, on aura le terme indépendant. Ainsi soit proposé d'égaler à un cube

$$8x^3+24x^2+2x+48;$$

on prendra, pour racine du cube, $2x+2$ ($2x$ étant la racine cubique de $8x^3$ et 2 le quotient de 24 par 12, triple du carré de 2); le cube de cette racine sera $8x^3+24x^2+24x+8$; en l'égalant à la proposée, on obtiendra $x=\frac{20}{11}$, et l'on passera ensuite au calcul des solutions dérivées.

Si le coefficient de x^3 et le terme indépendant sont tous les deux des cubes, il y a trois manières d'égaler à un cube l'expression proposée.

29. Soit proposé, par exemple, d'égaler à un cube $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$. Si nous prenons, pour racine du cube, $x + 1$ (c'est-à-dire la somme des racines cubiques des deux termes cubes), on aura à égaler l'expression proposée à $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, d'où $x = 1$. Nous pouvons encore prendre, pour racine du cube, $x + \frac{2}{3}$ de façon à éliminer les termes des deux degrés les plus élevés; l'équation ne subsistera dès lors qu'entre les termes des deux degrés inférieurs, et l'on en déduira $x = -\frac{19}{72}$. Enfin on peut prendre $\left(1 + \frac{4}{3}x\right)^3$ de façon qu'au contraire il ne subsiste dans l'équation que les termes des deux degrés supérieurs; on obtiendra ainsi la solution $x = -\frac{90}{37}$; chacune de ces trois racines primitives fournira des dérivées, comme ci-dessus.

Réserve sur ce qui vient d'être dit.

30. Toutefois il peut arriver qu'une expression composée de quatre termes, dont l'un des extrêmes est cube ou dont les deux extrêmes sont cubes, ne puisse pas être égalée à un cube; c'est dans le cas où, après la réduction des termes semblables, l'équation subsiste entre trois termes (¹) ou bien où l'on n'a plus qu'un seul terme égalé à zéro. Ainsi soit proposé : $1 + 3x + 3x^2 + 4x^3$; on ne peut procéder autrement qu'en formant le cube $(1 + x)^3$; mais l'équation se réduit à $3x^3 = 0$; il est donc impossible d'égaler à un cube l'expression proposée. De même, soit proposé : $x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; on ne peut trouver qu'une seule solution immédiate et primitive, en prenant, comme racine du cube, $x + \frac{2}{3}$; car si l'on prenait $x + 1$, on aurait $x^2 = 0$. Pour

(¹) Il est clair que ce n'est pas à supposer.

un motif semblable on ne peut égaler à un cube l'une ou l'autre des expressions

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1, \quad x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

L'équation se réduit toujours à celle d'un seul terme au zéro.

Douze questions sur ce qui a été enseigné dans cette troisième Partie.

31. Ce que j'ai dit jusqu'à présent fournit une riche matière, d'où l'on peut, comme d'une mine d'or, tirer un trésor de problèmes sans fin. Ainsi on peut demander un nombre tel qu'en le prenant 20 fois, ajoutant 10 fois son carré, 4 fois son cube et enfin l'unité, on ait un carré. Si l'on demande en outre que ce nombre soit plus grand que 8 et plus petit que 10, il faudra nécessairement, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° **23**), partir de la solution primitive -3, en dériver une autre du premier degré : $\frac{1}{2}$; puis une du second degré : $-\frac{21}{2}$; enfin celle du troisième : $\frac{195}{23}$, qui satisfait à toutes les conditions proposées. Mais ce sont d'autres questions que je veux résoudre ici.

Trouver en nombres rationels entiers un triangle rectangle, tel que son hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit.

32. J'ai déjà (première Partie, n° **45**) résolu ce problème par la double équation; mais comme il peut être abordé également au moyen d'une expression composée de cinq termes, je vais le traiter de cette seconde manière. D'après ce que j'ai dit à l'endroit précité, je forme le triangle des nombres $x + 5$ et 12; les côtés sont par suite :

$$x^2 + 10x + 169, \quad x^2 + 10x - 119, \quad 24x + 120.$$

L'hypoténuse : $x^2 + 10x + 169$ et la somme des côtés de l'angle droit : $x^2 + 34x + 1$ doivent être des carrés; $<$ le produit de ces deux expressions, soit $x^4 + 44x^3 + 510x^2 + 5756x + 169$, doit donc être un carré > que je forme en prenant pour racine $13 + \frac{2878}{13}x - x^2$; il vient $x = \frac{2\,048\,075}{20\,566}$. D'où, pour les côtés, d'après les positions ci-dessus, les nombres 1 061 652 293 520, 4 565 486 027 761, 4 687 298 610 289, qui sont les mêmes que ceux trouvés précédemment.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un nombre donné en retranchant l'aire de la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés de l'angle droit.

33. Soit 4 le nombre donné. Cherchons d'abord un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant le quadruple de l'aire du carré de la demi-somme de l'hypoténuse et d'un côté.

Soient $x+1$ et x les nombres générateurs du triangle; les côtés seront : $2x^2+2x+1$; $2x+1$; $2x^2+2x$. La somme de l'hypoténuse et du côté suivant est $2x^2+4x+2$; sa moitié est x^2+2x+1, dont le carré $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, diminué de quatre fois l'aire, c'est-à-dire de $8x^3+12x^2+4x$, laisse comme reste $x^4-4x^3-6x^2+1$. Égalons ce reste au carré $(x^2-2x+1)^2 = x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

L'équation donne $x=\frac{1}{3}$. D'après les positions, les deux nombres générateurs du triangle seront $\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{3}$, ou, en prenant seulement les numérateurs, 4 et 1; ils donnent le triangle 17, 15, 8. Prenez ces nombres comme coefficients de x. Les côtés du triangle cherché étant ainsi supposés être $17x$, $15x$, $8x$, nous aurons l'équation

$$32x - 60x^2 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{1}{3}.$$

Le triangle cherché a donc pour côtés $\frac{17}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{8}{3}$, et il satisfait à la condition proposée. Cette question a été omise par Diophante après ses problèmes VI, 10 et 11.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré et qu'en y ajoutant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré ([1]).

34. Soit 3 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront x^2+2x+2, x^2+2x, $2x+2$. Multiplions ce dernier côté par 3 et ajoutons le produit, $6x+6$, au côté intermédiaire, il vient x^2+8x+6 qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire. Faites le produit de cette somme, x^2+8x+6, par le côté intermédiaire, x^2+2x; vous avez

$$x^4+10x^3+22x^2+12x$$

à égaler à un carré, soit à

$$\left(x^2+5x-\frac{3}{2}\right)^2=x^4+10x^3+22x^2-15x+\frac{9}{4}.$$

Il vient $x=\frac{1}{12}$.

D'après les positions, le triangle cherché sera en nombres entiers : 313, 25, 312. La même solution peut être obtenue par la double équation

$$x^2+8x+6=\square, \qquad x^2+2x=\square.$$

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré, et qu'en en retranchant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

35. J'ai déjà donné une solution de ce problème (Part. I, n° 47), mais par une autre méthode. Soit donc proposé de retrancher du côté qui est carré le triple de l'autre côté de façon à obtenir un carré. Prenons comme triangle primitif celui qui vient d'être trouvé pour la question précédente, savoir 313, 25, 312, formé des nombres 13 et 12.

Formons le triangle cherché des nombres $x-13$ et 12; les côtés

([1]) *Cf.* Part. I, n° 46.

seront $x^2 - 26x + 313$; $x^2 - 26x + 25$; $24x - 312$. Retranchons du côté intermédiaire le triple du dernier, il reste $x^2 - 98x + 961$ qui doit être égalé à un carré, aussi bien que le côté intermédiaire $x^2 - 26x + 25$. Égalons en conséquence à un carré le produit de ces deux expressions, savoir $x^4 - 124x^3 + 3534x^2 - 27\,436x + 24\,025$, et formons la racine de ce carré : $x^2 - \frac{13\,718}{155}x + 155$. De l'équation on tirera $x = \frac{27\,681\,731}{318\,370}$; les nombres $x - 13$ et 12, si l'on chasse les dénominateurs, deviendront $23\,542\,921$ et $3\,820\,440$; et en formant de ces nombres le triangle demandé, on aura les côtés

$$568\,864\,871\,005\,841, \quad 539\,673\,367\,418\,641, \quad 179\,888\,634\,210\,840,$$

satisfaisant à la question.

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse soit un carré et qu'en retranchant d'un des côtés de l'angle droit un multiple donné de l'autre côté, on ait un carré. Soit 2 le multiplicateur donné (¹).

36. Prenez $x + 1$ et 1 comme nombres générateurs du triangle; les côtés seront : $x^2 + 2x + 2$; $x^2 + 2x$; $2x + 2$. On devra donc avoir $x^2 + 2x + 2 = \square$ et, en retranchant du côté intermédiaire le double du dernier côté, $x^2 - 2x - 4 = \square$. Cette double équation donne $x = \frac{17}{12}$; par suite $x + 1$ et 1 deviennent $-\frac{5}{12}$ et $\frac{12}{12}$, ou, en ne prenant que les numérateurs, -5 et 12, dont on forme le triangle primitif 169, 119, 120.

Il faut dès lors recommencer l'opération, en prenant pour nombres générateurs du triangle $x - 5$ et 12; les côtés seront : $x^2 - 10x + 169$; $x^2 - 10x - 119$; $24x - 120$. Si l'on retranche du côté intermédiaire le double du dernier côté, soit $48x - 240$, le reste $x^2 - 58x + 121$ devra être un carré, de même que l'hypoténuse $x^2 - 10x + 169$. Égalons à un carré le produit de ces deux expressions, c'est-à-dire

(¹) *Cf.* Part. I, n° 48.

$x^4 - 68x^3 + 870x^2 - 11012x + 20449$ et formons la racine de ce carré : $143 - \frac{5506}{143}x + x^2$; il viendra $x = \frac{4593455}{46046}$. Mais nous pouvons aussi suivre une autre voie, en ramenant les deux expressions à avoir un même carré pour terme connu, on aura

$$\frac{169}{121}x^2 - \frac{9802}{121}x + 169 = \square \quad \text{et} \quad x^2 - 10x + 169 = \square.$$

La différence des deux expressions est $\frac{48}{121}x^2 - \frac{8592}{121}x$, et on peut, comme on l'a vu Part. I, nº 21 et suiv., la décomposer en deux facteurs $\frac{2}{11}x$ et $\frac{24}{11}x - \frac{4296}{11}$ qui conduisent à la valeur $x = \frac{4593455}{46046}$. D'après les positions, le triangle cherché sera en nombres entiers :

$$19\,343\,046\,113\,329, \quad 18\,732\,418\,687\,921, \quad 4\,821\,817\,400\,400.$$

Trouver deux nombres tels que le produit de leur somme par la somme de leurs carrés soit un cube.

37. Soient x et $2 - x$ les deux nombres cherchés; leur somme, 2, multipliée par celle de leurs carrés, qui est $2x^2 - 4x + 4$, donne $4x^2 - 8x + 8$, qui doit être un cube. Formez la racine de ce cube : $2 - \frac{2}{3}x$, et égalez-le à $4x^2 - 8x + 8$; il viendra $x = -\frac{9}{2}$. Je substitue en conséquence $x - \frac{9}{2}$ à x dans l'expression $4x^2 - 8x + 8$; la transformée est $4x^2 - 44x + 125$. Je l'égalerai au cube $\left(5 - \frac{44}{75}x\right)^3$, et j'aurai ainsi

$$125 - 44x + \frac{5808}{1125}x^2 - \frac{85184}{421875} = 4x^2 - 44x + 125,$$

d'où $x = \frac{490500}{85184}$; je retranche de cette valeur $\frac{9}{2}$, puisque j'ai substitué $x - \frac{9}{2}$; j'ai pour valeur de x dans les premières positions $\frac{26793}{21296}$. Si, d'après la position pour le second nombre cherché, je retranche cette valeur de 2, il reste $\frac{15799}{21296}$.

Remarquez : 1° que les numérateurs 26 793 et 15 799 satisfont à la question.

2° Que l'on a résolu de fait le problème suivant : Partager le nombre 2 en deux parties, de façon que le double de la somme des carrés des parties soit un cube.

3° Que l'on peut résoudre de la même façon cette autre question : Trouver deux nombres tels qu'un multiple quelconque de la somme de leurs carrés fasse un cube. Ainsi, si l'on demande que le quintuple de la somme des deux carrés fasse un cube, vous poserez x et $5 - x$ pour les racines cherchées et vous continuerez comme ci-dessus.

Enfin de cette solution on peut déduire également celle d'un très beau problème : Trouver deux nombres tels que leur différence soit égale à la différence de leurs bicarrés. Si l'on prend en effet les deux nombres trouvés ci-dessus, 26 793 et 15 799, et, comme dénominateur commun, la racine du cube produit par la multiplication de leur somme et de la somme de leurs carrés, racine qui est 34 540, on aura les deux nombres cherchés $\frac{26\,793}{34\,540}$ et $\frac{15\,799}{34\,540}$.

Trouver deux triangles rectangles ayant une même différence entre leurs moindres côtés, et tels que le plus grand côté de l'angle droit de l'un de ces triangles soit égal à l'hypoténuse de l'autre.

38. Formez le premier triangle des nombres x et 1; les côtés seront x^2+1, x^2-1, $2x$. Donc le second triangle aura x^2+1 comme plus grand côté de l'angle droit, et le plus petit s'obtiendra en retranchant la différence des deux moindres côtés du premier triangle, c'est-à-dire x^2-2x-1, ce qui donne $2x+2$. Reste à satisfaire à la condition $(x^2+1)^2+(2x+2)^2=\square$. En développant, j'ai comme somme des carrés x^4+6x^2+8x+5 que j'égalerai à $(x^2+3)^2$, ce qui donne $x^4+6x^2+9=x^4+6x^2+8x+5$. D'où $x=\frac{1}{2}$.

D'après les positions, en chassant le dénominateur, les nombres entiers générateurs du premier triangle sont 1 et 2, mais le premier est inférieur au second, en sorte que l'on aurait un nombre faux comme côté du triangle, ce qui est absurde. Il faut donc, pour remédier à cet inconvénient, recommencer l'opération, en formant le triangle des nombres $x+1$ et 2.

Les côtés du premier triangle seront donc x^2+2x+5; x^2+2x-3; $4x+4$, et les moindres côtés du second x^2+2x+5; $4x+12$. La somme des carrés de ces deux derniers côtés fait

$$x^4+4x^3+30x^2+116x+169,$$

et doit être un carré. On peut en former la racine de plusieurs façons. Prenons $\left(13+\frac{58}{13}x-x^2\right)^2$; l'équation donne $x=-\frac{1525}{546}$. Les nombres entiers générateurs du triangle seront, d'après les positions et en chassant les dénominateurs, -979 et 1092. On peut s'en servir comme si tous deux étaient vrais et former le triangle des nombres 1092 et 979. On aura ainsi les deux triangles

$$2\,150\,905,\quad 2\,138\,136,\quad 234\,023,$$

$$2\,165\,017,\quad 2\,150\,905,\quad 246\,792,$$

qui satisfont à la question.

Trouver deux triangles rectangles ayant une même somme pour les côtés de l'angle droit et tels que l'hypoténuse de l'un soit égale au plus grand côté de l'angle droit de l'autre.

39. Formez le premier triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront : x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. Le plus grand côté de l'angle droit du second triangle sera égal à l'hypoténuse x^2+2x+2, et, si on le retranche de la somme des côtés de l'angle droit du premier triangle, il restera $2x$ pour l'autre côté du second triangle. La somme des carrés des côtés de l'angle droit de ce triangle fera dès lors

$$x^4+4x^3+12x^2+8x+4.$$

Je l'égale au carré $(x^2+2x+4)^2 = x^4+4x^3+12x^2+16x+16$; il vient $x = -\frac{3}{2}$.

Je substituerai, par suite, $x-\frac{3}{2}$ à x dans l'expression

$$x^4+4x^3+12x^2+8x+4;$$

la transformée est $x^4-2x^3+\frac{15}{2}x^2-\frac{29}{2}x+\frac{169}{16}$ et je l'égalerai au carré $\left(\frac{13}{4}-\frac{29}{13}x+x^2\right)^2$; l'équation me donne $x=\frac{21}{13}$; si j'en retranche $\frac{3}{2}$, j'ai $\frac{3}{26}$ pour valeur de x dans les premières positions. Par conséquent, en nombres entiers $x+1$ et 1 deviennent, si je chasse les dénominateurs 29 et 26 qui engendrent le premier triangle cherché 1517, 165, 1508. On en déduira le second : 1525, 1517, 156.

On peut arriver autrement à la solution en partant de la valeur $x=-\frac{3}{2}$ trouvée en premier lieu. Si on la substitue dans les expressions $x+1$ et 1, on aura en entiers : -1 et 2. On prendra dès lors comme nombres générateurs $x-1$ et 2 et l'on recommencera l'opération. Les côtés du premier triangle seront x^2-2x+5; x^2-2x-3; $4x-4$; les côtés de l'angle droit du second : x^2-2x+5; $4x-12$, la somme des carrés de ces derniers fera $x^4-4x^3+30x^2-116x+169$ et on l'égalera au carré $\left(13-\frac{58}{13}x+x^2\right)^2$; d'où $x=\frac{42}{13}$. Dès lors, en entiers, $x-1$ et 1 deviennent 29 et 26, c'est-à-dire les nombres trouvés ci-dessus et conduisant aux mêmes triangles.

Trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, et tel que la somme de l'un des côtés de l'angle droit et d'un multiple donné de l'autre côté soit également un carré.

40. Soit 2 le multiplicateur donné. Formons le triangle cherché des nombres x et 1; les côtés seront x^2+1, x^2-1, $2x$; ajoutons $4x$, double du dernier côté, au premier côté de l'angle droit; il vient x^2+4x-1 qui doit être un carré aussi bien que l'hypoténuse x^2+1.

La différence de ces deux expressions est $2-4x$, et l'on trouvera, par suite, la valeur $x=\frac{5}{12}\cdot$ Mais x doit être plus grand que l'unité; il faut donc recommencer l'opération, en prenant pour nombres générateurs $x+5$ et 12.

Les côtés seront : $x^2+10x+169$; $x^2+10x-119$; $24x+120$. Ajoutons au côté intermédiaire le double du dernier, c'est-à-dire $48x+240$; il vient $x^2+58x+121$ qui doit être un carré aussi bien que l'hypoténuse $x^2+10x+169$. Égalons à un carré le produit de ces deux expressions, soit $x^4+68x^3+870x^2+11012x+20449$, et formons ce carré : $\left(143+\frac{5506}{143}x-\frac{6\,262\,703}{2\,924\,207}x^2\right)^2$; on trouvera

$$x=\frac{1\,991\,730\,029\,642\,496}{30\,670\,462\,287\,360}.$$

Les nombres entiers formant le triangle seront 2 145 082 341 079 296 et 368 045 547 448 320; il est facile de le calculer.

Trouver un bicarré tel que son triple, ajouté à un autre bicarré que l'unité, fasse un carré.

41. On demande que le second bicarré soit différent de l'unité, parce qu'autrement la question serait trop facile, puisque l'on a $3\times1+1=4$ et $3\times16+1=49$. Je prends pour racine du bicarré cherché le nombre $x-1$. Son bicarré est $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$. Triplant et ajoutant x^4, j'ai $4x^4-12x^3+18x^2-12x+3$, que j'égale au carré $\left(2x^2-3x+\frac{9}{4}\right)^2$, d'où $x=\frac{11}{8}\cdot$ D'après les positions, en nombres entiers, la racine du bicarré sera 3; en triplant ce bicarré, 81, et en ajoutant le bicarré 14641 du numérateur 11, on aura 14 884, c'est-à-dire 122^2.

On peut aussi prendre le double de 3, c'est-à-dire 6, tripler son bicarré et ajouter 22^4 (bicarré du double de 11); on aura 238 144 ou 488^2.

De même, en triplant 3 et 11, ce qui donne 9 et 33,

$$3 \times 9^4 + 33^4 = 1\,205\,604 = 1098^2;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en ajoutant le carré de l'hypoténuse à un multiple donné de l'aire.

42. Soit 2 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres x et 1; les côtés seront : x^2+1; x^2-1; $2x$; le carré de l'hypoténuse est x^4+2x^2+1; en ajoutant le double de l'aire, c'est-à-dire $2x^3-2x$, j'ai $x^4+2x^3+2x^2-2x+1$ que j'égale au carré $\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)^2$. Il vient $x=\frac{1}{4}$; mais, cette valeur n'étant pas supérieure à 1, on ne peut former le triangle sans tomber sur des nombres faux; il faut donc recommencer l'opération en substituant $x+\frac{1}{4}$ à x dans l'expression égalée à un carré.

La transformée est $x^4+3x^3+\frac{31}{8}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{169}{256}$ que j'égalerai au carré $\left(\frac{13}{16}-\frac{9}{26}x+\frac{5077}{2197}x^2\right)^2$. Il vient (¹) $x=\frac{20\,512\,544}{20\,949\,120}$; ajoutant $\frac{1}{4}$, à cause de la substitution, on aura, comme valeur de x dans les premières positions $\frac{6\,437\,456}{5\,237\,280}$. Les deux nombres générateurs du triangle rectangle seront donc en entiers 6 437 456 et 5 237 280. Il y a un cas unique pour lequel le problème est impossible (²).

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant l'aire du carré de l'un des côtés de l'angle droit.

43. Formez ce triangle des nombres $x-1$ et 4; les côtés seront : $x^2-2x+17$; $x^2-2x-15$; $8x-8$. En retranchant son aire,

(¹) Les nombres qui suivent sont entachés d'une erreur de calcul; il faut corriger $x=\frac{22\,202\,544}{20\,949\,120}$, ce qui pour les nombres générateurs du triangle donne 6 859 956 et 5 237 280, ou en nombres minimi, 571 663 et 436 440.

(²) Cette remarque paraît se rapporter au cas où le multiplicateur donné est 8.

$4x^3 - 12x^2 - 52x + 60$, du carré du second côté, c'est-à-dire de $x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225$, il reste $x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 112x + 165$, à égaler à un carré, soit à $(x^2 - 4x - 15)^2$. Il vient $x = -\frac{15}{2}$. Je substitue par suite $x - \frac{15}{2}$ dans l'expression à égaler à un carré ; la transformée est $x^4 - 38x^3 + \frac{1007}{2}x^2 - \frac{5431}{2}x + \frac{81\,225}{16}$. Je l'égale au carré $\left(x^2 - 19x - \frac{285}{4}\right)^2$. Il vient $x = \frac{5423}{285}$; si je retranche $\frac{15}{2}$ à cause de la substitution, puis l'unité, d'après les positions, les nombres générateurs du triangle rectangle seront en entiers 6001 et 2280. Le triangle cherché sera 41 210 401, 30 813 601, 27 364 560.