TRADUCTION

# DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN

DANS LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

TRADUCTION

# DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN

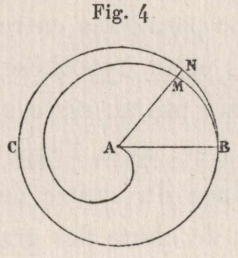
## DANS LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

## N° 3 ([1]).

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 3 juin 1636.)

**4.** ... Soit dans le cercle CNB (*fig.* 4) la spirale AMB dont la propriété soit telle que, si l'on mène une droite quelconque, par exemple AMN, le rapport de la circonférence totale du cercle à l'arc NCB soit égal au rapport de $AB^2$ à $AM^2$.

Fig. 4



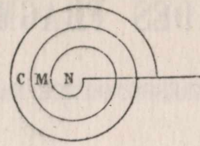

Cette spirale diffère de celle d'Archimède en ce que, dans cette dernière, c'est au rapport de AB à AM que se trouve égal le rapport de la circonférence à l'arc NCB.

Je dis que l'aire comprise entre la spirale et la droite AB est la moitié de l'aire du cercle; en second lieu, et c'est là une propriété bien remarquable, que l'aire engendrée par la première révolution,

([1]) Pour le n° 2 de la Correspondance (*Proposition géostatique*), *voir* la traduction par Mersenne, Tome II, pages 10 et 11.

aire marquée N (*fig.* 5), est la moitié de l'aire M engendrée par la seconde révolution, tandis que l'aire C engendrée par la troisième

Fig. 5.




révolution est précisément égale à cette aire M, et qu'il en est de même pour chacune des autres aires engendrées par les révolutions suivantes; toutes ces aires consécutives sont donc égales entre elles.

## N° 5.

### NOUVEAUX THÉORÈMES DE MÉCANIQUE.

PAR M. DE FERMAT.

1. Il y a déjà longtemps que je soupçonnais qu'Archimède n'a pas établi avec assez de rigueur les fondements de la Mécanique; il est clair en effet qu'il suppose parallèles entre eux les mouvements de chute des graves et, sans cette hypothèse, ses démonstrations ne peuvent subsister. Je ne nie pas au reste qu'elle ne soit en accord, autant qu'on peut le désirer, avec l'expérience sensible; car, en raison de la grande distance du centre de la Terre, on peut supposer parallèles les lignes de chute des graves, de même qu'on suppose que les rayons solaires sont parallèles entre eux. Mais, pour qui recherche la vérité intime et précise, une pareille hypothèse ne peut être satisfaisante.

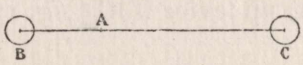
Il semble donc qu'il faille considérer en général, pour un lieu quelconque du monde, les propriétés des leviers, et, pour les déterminer, recourir, en Mécanique, à de nouveaux fondements empruntés à des principes immédiatement vrais. J'énoncerai seulement les propositions de cette nouvelle science, me réservant de donner les démonstrations en temps et lieu.

2. J'imagine ou plutôt je considère deux genres de leviers : l'un dont le mouvement est seulement rectiligne, non pas circulaire; l'autre dont les extrémités décrivent des cercles, et qui est le seul dont les anciens se soient occupés; ils n'ont pas, au contraire, reconnu le premier, qui pourtant semble beaucoup plus simple.

J'éclaircis par des exemples les propriétés de ces deux genres; le centre du premier doit être supposé le même que celui de la Terre, tandis que le centre du second doit au contraire être nécessairement situé en dehors de ce centre.

3. Soient donc (*fig.* 10) A le centre de la Terre, CB une droite qu'on imagine passer par ce centre et constituer un levier; en B et C je suppose des poids B et C en sorte que l'on ait :: poids B : poids C :: CA : AB. Je dis que le levier CB, dans ces conditions, restera en équilibre.

Fig. 10.

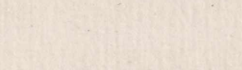



Si, au contraire, on diminue tant soit peu le poids B, le levier se mouvra en droite ligne vers le côté B, tout en passant toujours par le centre A et ce mouvement continuera tant que les distances au centre ne seront pas dans le rapport inverse de celui des poids.

Voilà ma *première proposition,* d'après laquelle on peut dire que la Terre est un grand levier, en imitant Gilbert qui l'appelle un *grand aimant*.

4. Cela posé, j'énonce une autre proposition plus singulière, à savoir que les graves seront d'autant plus facilement soulevés par une puissance (agissant soit sur la surface de la Terre, soit ailleurs) qu'ils seront plus près du centre de la Terre.

Fig. 11.




Soient A ce centre (*fig.* 11), C un point en dehors. Je joins CA dont je prends un point quelconque B. Si en ce point j'imagine un poids B qui soit suspendu par un fil ou une tige CB, la puissance en C nécessaire pour le soutenir sera à ce poids B dans le rapport AB : AC.

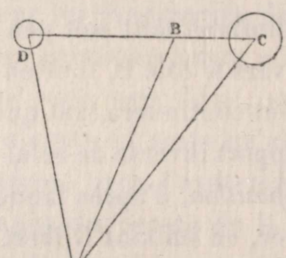
De là on déduit très facilement et l'on démontre que les graves ne pèsent point au centre de la Terre, proposition que l'on a, au reste, déjà cherché à prouver.

5. Le second genre de leviers peut être désigné par le nom d'*Archimède;* mais le rapport inverse entre les distances et les poids (démontré pour le levier simple) ne peut avoir lieu ici et, par conséquent, les propositions VI et VII d'Archimède ne peuvent subsister.

C'est ce que j'affirme avec confiance. Je considère au reste ce levier en général, que les bras soient ou non dans le prolongement l'un de l'autre, qu'ils soient parallèles à l'horizon ou inclinés sur lui.

Une seule démonstration résout toute la question : Soit, en dehors du centre de la Terre A, un levier DBC (*fig.* 12) de centre B, de bras

Fig. 12.




BD et BC. Menons les droites DA, BA, CA et supposons des graves placés en D et C en sorte que l'on ait

$$\frac{\text{poids C}}{\text{poids D}} = \frac{\text{DA}}{\text{CA}} \times \frac{\text{angle BAD}}{\text{angle CAB}}.$$

Je dis que le levier DBC, suspendu au point B, restera en équilibre.

J'affirme la vérité absolue de cette proposition, comme celle des précédentes, et je suis en mesure de l'établir par une démonstration tirée de la Géométrie et de la Physique la plus pure.

6. Par là tombent entièrement les définitions des centres de gravité d'après les anciens; on ne peut en effet trouver, si l'on excepte la sphère, aucun corps qui ait un point tel qu'en suspendant par ce point le corps en dehors du centre de la Terre, il garde la position qu'on lui donne.

Il convient donc de définir le centre de gravité d'un corps comme un point situé à l'intérieur de ce corps et tel que, si on le fait coïncider avec le centre de la Terre, le corps garde la première position qu'on lui donne; c'est, en effet, le seul cas où il y ait réellement un centre de gravité.

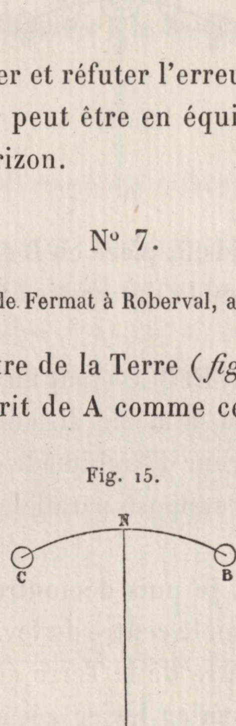
7. Enfin je puis montrer et réfuter l'erreur de Guidobaldo et autres qui croient que le levier peut être en équilibre, même si les bras ne sont pas parallèles à l'horizon.

## N° 7.

(Lettre de Fermat à Roberval, août 1636.)

3. ... Soient A le centre de la Terre (*fig.* 15), CNB un levier suivant un arc de cercle décrit de A comme centre avec AN pour rayon.

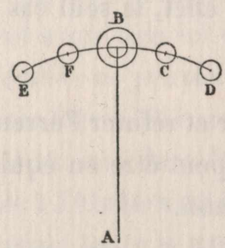
Fig. 15.




Je suppose égaux les arcs CN, NB et, placés en C, B, des poids égaux. J'admets que le levier CB, suspendu en N, restera en équilibre et qu'il en sera de même si d'autres poids égaux sont placés en d'autres points quelconques des bras CN, NB, pourvu que ces points d'attache soient à égale distance de part et d'autre du point N; en effet, des poids égaux également distants, d'une part, du centre de la Terre, d'autre part, du centre du levier ou de la balance, ne peuvent détruire l'équilibre.

Soient encore A le centre de la Terre (*fig.* 16), EFBCD un levier en arc comme ci-dessus, de centre ou milieu B. Qu'on place un poids B en B, ou que, le divisant en poids égaux E, F, B, C, D, on place ces parties aux points E, F, B, C, D à des intervalles EF, FB, BC, CD

Fig. 16.




égaux, j'admets que le poids B, placé en B et supporté par ce point B, y pèsera autant que l'ensemble des parties E, F, B, C, D placées sur le levier suspendu en B.

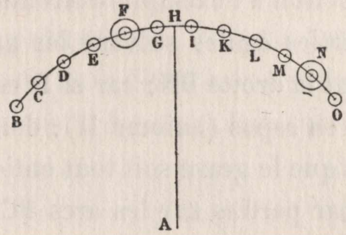
Il en est ainsi parce que, EFBCD étant un arc de cercle, les parties du poids B sont toujours à la même distance du centre de la Terre que le poids total B. L'erreur d'Archimède consiste à n'avoir pas fait cette remarque et à avoir supposé parallèles les lignes de chute des graves.

Ces suppositions faites, je puis démontrer ma proposition. Voici seulement le cas dans lequel le centre du levier est à la même distance que ses extrémités du centre de la Terre (ce cas ne suppose pas la vérité du principe du premier levier géostatique, vérité que vous paraissez mettre en doute).

Soit FHN (*fig.* 17) un levier dont le centre H et les extrémités F, N sont à la même distance du centre de la Terre A. De A comme centre, avec AH pour rayon, je décris l'arc de cercle FHN qui relie les extrémités du levier. Si l'on a :: Poids F : Poids N :: Arc HN : Arc HF, je dis que le levier FHN, suspendu au point H, restera en équilibre.

Il est clair que le rapport des arcs est le même que celui des angles au centre A; il vous sera facile, d'après la construction et les deux

Fig. 17.




axiomes qui précèdent, d'arriver à la conclusion du théorème.

## N° 9.

(Lettre de Fermat à Étienne Pascal et Roberval, du 23 août 1636.)

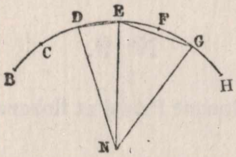
4. ....Axiome I. — Si un grave en repos est suspendu en un point quelconque, il pèse suivant la ligne droite qui joint le point de suspension au centre de la Terre. La vérité de cet axiome est évidente, car autrement le grave ne peut être en repos.

Axiome II. — Dans un levier en arc de cercle, suspendu par son milieu, si de part et d'autre du point de suspension et en des points à égale distance on place des graves égaux, le corps composé de tous ces graves et suspendu par son milieu restera en repos.

Axiome III. — Dans un levier en arc de cercle, moindre qu'une demi-circonférence et ayant pour centre celui de la Terre (ce qu'il faut toujours supposer dans mon levier), si le point de suspension divise inégalement le levier, et que de part et d'autre du point de suspension, sur les points d'une division du levier en parties égales, on place des graves égaux, le corps composé de tous ces graves ne demeurera pas en repos, mais s'inclinera du côté du plus grand bras. Ceci est évident, même dans vos hypothèses; car, si le levier est plus petit que la demi-circonférence, le sinus du plus petit arc sera plus petit que le sinus du plus grand arc; vous ne nierez donc pas que l'inclinaison ne se fasse du côté du plus grand arc.

Cela supposé, représentons par une figure le levier DEG (*fig.* 30) et achevons la construction à l'exemple d'Archimède. Le grave en D, si on le divise en parties égales suivant les arcs BC, CD, DE, EF, pèsera toujours suivant la droite DN; car si D est le point de suspension, l'ensemble reste en repos (axiome II); donc il pèse suivant DN (axiome I). Donc, soit que le grave soit tout entier en D, soit qu'il soit distribué également par parties sur les arcs BC, CD, DE, EF, il pèse toujours suivant la même droite DN.

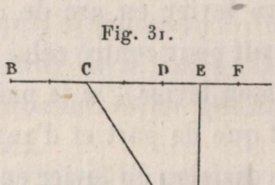
Fig. 30.




De même, le grave en G, qu'il soit tout entier en ce point, ou qu'il soit distribué par parties égales sur les arcs FG, GH, pèsera toujours suivant la droite GN. Mais, comme les graves disposés sur les arcs égaux BC, CD, DE, EF, FG, GH sont égaux, l'ensemble total pèsera suivant la droite EN; la conclusion s'ensuit évidemment, ou bien il est aisé de l'établir par une réduction à l'absurde, en se servant de l'axiome III.

Il est certain qu'Archimède a raisonné d'une façon tout à fait sem-

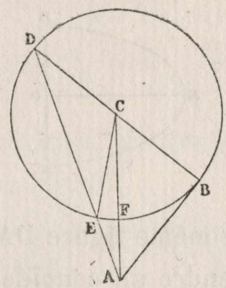
Fig. 31.




blable; car il prend, par exemple, en C (*fig.* 31) le centre de gravité de la droite BD pour prouver que des graves égaux, situés en B, D, pèsent suivant la droite CN; mais l'hypothèse qu'il fait à cet égard n'est vraie que pour la balance DEF perpendiculaire à la droite EN : elle est fausse pour les autres qui sont rencontrées sous des angles inégaux par les droites issues du centre de la Terre. Dans mon levier, cette difficulté ne se présente pas, puisque toujours et en tout point la droite issue du centre de la Terre le rencontre normalement.

Soient DCB une balance (*fig.* 32), A le centre de la Terre, C celui

Fig. 32.



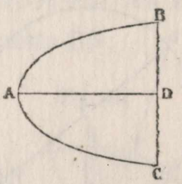

de la balance; décrivez le cercle de centre C et de rayon CB. Joignez DEA, BA, CFA et CE. Supposez en B et D des poids égaux, et soit l'angle ACD plus grand que l'angle ACB; je dis que la balance, si elle est suspendue au point C, s'inclinera du côté de B, et cela suivant les suppositions mêmes d'Archimède.

Transportons en effet le poids D en E; d'après Archimède, le poids agit toujours comme s'il était en D, puisqu'il reste sur la droite joignant le point D au centre de la Terre. Si donc on suppose qu'il est retenu en E par la droite CE, les bras CE et CB seront en équilibre, si l'on suppose que CB et CD soient en équilibre. Les angles ECF, FCB seront donc égaux, car un triangle isoscèle, aux extrémités duquel on place des poids égaux, doit se mouvoir tant que la perpendiculaire à l'horizon, c'est-à-dire la droite qui joint le sommet au centre de la Terre, ne bissecte pas l'angle au sommet; c'est au reste ce dont témoigne l'expérience. Mais l'angle ECB est double de l'angle en D; donc l'angle FCB est égal à l'angle en D. Donc les droites CA, DA sont parallèles, ce qui est absurde; donc la balance ne restera pas en équilibre, mais elle s'inclinera du côté de B, puisque l'angle BCF est évidemment plus grand que l'angle ECF.

........................................................................................................

7. Soit une parabole AB (*fig.* 35) de sommet A; si l'on fait tourner la figure DAB autour de la droite DA prise comme axe fixe, on engendrera le conoïde parabolique d'Archimède, dont le volume est à celui du cône de même base et de même sommet dans le rapport de 3 à 2.

Fig. 35.




Mais si l'on fait tourner la même figure DAB autour de la droite DB prise comme axe, on engendre un conoïde d'un nouveau genre; on demande de trouver le rapport de son volume à celui du cône de même base et de même sommet, question qui n'est pas sans difficulté.

J'ai démontré que ce rapport est celui de 8 à 5; j'ai également trouvé le centre de gravité du même conoïde.

## N° 12.

(Lettre de Fermat à Mersenne pour Sainte-Croix, septembre 1636.)

Mon Révérend Père,

1. Quoique j'aie à dire que je ne suis point un Œdipe, mais un Dave, et que j'avoue très volontiers que je ne suis point parvenu à résoudre la question de M. de Sainte-Croix, je vous demanderai la permission de vous adresser, en échange des nombres qu'il a divulgués, la solution de votre problème, et de lui proposer à mon tour quelques questions qu'il ne débrouillera pas, je crois, de si tôt, malgré les promesses qu'il vous fait et la singulière puissance de son esprit.

2. Pour rendre donc l'épreuve plus honorable, ainsi qu'il le dit, en choisissant des problèmes plus difficiles, voici ceux que je propose :

1° Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que son aire soit un carré.

2° Étant donnée la somme de l'hypoténuse d'un triangle rectangle en nombres et du produit des trois côtés, trouver les limites entre lesquelles l'aire se trouve comprise.

Ne vous étonnez pas de l'addition d'une longueur et d'un solide; car dans les problèmes numériques, comme on le sait, toutes les quantités sont homogènes.

3° Trouver deux bicarrés dont la somme soit un bicarré ou deux cubes dont la somme soit un cube.

4° Trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit également un carré.

3. A ces quatre problèmes, j'ajouterai deux théorèmes que j'ai découverts et dont j'attendrai la démonstration de M. de Sainte-Croix. Si mon attente est vaine, je donnerai cette démonstration. Les deux propositions sont d'ailleurs très remarquables :

1° Tout nombre est la somme de 1, 2 ou 3 triangles; de 1, 2, 3 ou 4 carrés; de 1, 2, 3, 4 ou 5 pentagones; de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 hexagones; de 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 heptagones; et ainsi de suite indéfiniment.

Diophante paraît supposer la seconde partie de ce théorème et Bachet s'est efforcé d'en confirmer la vérité par l'expérience, mais il n'a pas donné de démonstration. Je crois avoir été le premier à découvrir cette proposition si générale et si belle; mais je ne sais pas si je puis, à titre de réciprocité, demander qu'elle soit admise.

2° Si l'on retranche l'unité du produit par 8 d'un nombre quelconque, on a un nombre qui est seulement somme de quatre carrés, non seulement en entiers, ce que d'autres peuvent avoir reconnu, mais même en nombres fractionnaires, ce que je m'engage à démontrer.

Cette proposition entraîne des conséquences remarquables, qui peuvent être à la main de M. de Sainte-Croix, mais semblent en tout cas avoir inutilement tenté le génie et les efforts de Bachet.

4. Avant de résoudre la question que vous avez proposée sur les cubes, je répondrai à ce que vous me demandez pour le nombre 672, que je ne crois nullement qu'il soit le seul à satisfaire à la condition imposée; mais, avec ma méthode, c'est le seul qui se présente après 120.

Cependant, dans les questions de ce genre, rien n'empêche qu'avec une autre méthode on ne rencontre d'autres nombres satisfaisant à la condition proposée; si M. de Sainte-Croix en a de la sorte obtenu d'autres, je serais très heureux qu'il voulût bien me les communiquer en même temps que sa méthode. Les questions de ce genre sont, en effet, très belles et très difficiles et personne, que je sache, ne les a encore traitées; j'ai obtenu, par un procédé particulier, des solutions pour un nombre indéfini de questions.

5. Quant au problème sur les nombres 3 et 11, j'avoue qu'il me paraît des plus difficiles et qu'après beaucoup de tentatives je n'en possède pas encore la solution. Je croirais, jusqu'à preuve du contraire, que cette solution est plutôt due au hasard qu'à la Science; mais je me trompe probablement plutôt que M. de Sainte-Croix. S'il consent à faire connaître les nombres qu'il a trouvés, je lui demanderai d'ajouter le procédé suivi pour les construire.

6. Enfin, pour votre question des cubes, voici comment je la conçois :

Étant donnés autant de nombres en progression arithmétique que l'on voudra, et connaissant la raison de la progression et le nombre des termes, trouver la somme de leurs cubes.

7. Premier cas : le premier terme est 1, et la raison de la progression est également l'unité.

Soient proposés autant de nombres que l'on voudra, par exemple

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9;$$

la somme de leurs cubes est égale au carré du triangle ayant le nombre des termes pour côté. S'il y a 9 termes, comme dans le cas proposé, le triangle est 45, et son carré, 2025, sera égal à la somme des cubes.

Cette proposition, pour ce premier cas, a été démontrée par Bachet et par d'autres; les cas suivants ont été trouvés par moi.

**8.** Si le premier terme est l'unité, la raison de la progression étant un nombre quelconque, par exemple 4 dans la progression

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17,$$

je prends le triangle ayant pour côté la somme du dernier terme et de la raison moins l'unité. Ce triangle est 210 et son carré 44100.

De ce carré, je retranche :

1° La somme des cubes d'autant de nombres commençant à l'unité et dans la progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1; cette somme doit être, d'autre part, multipliée par le nombre des termes.

Dans l'exemple proposé, le produit à soustraire d'après cette règle est 180.

2° Le triple de la somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et dans la progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison moins 1; ce triple doit être, d'autre part, multiplié par la somme des termes de la progression donnée.

Dans l'exemple proposé, le nombre à soustraire d'après cette règle est 1890.

3° Le triple de la somme d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison moins 1; ce triple doit, d'autre part, être multiplié par la somme des carrés des termes de la progression donnée.

Dans l'exemple proposé, le nombre à soustraire d'après cette règle est 10170.

Ainsi la somme des nombres à retrancher de 44100 est 12240; le reste est 31860; je le divise par 4, raison de la progression, et j'ai ainsi le nombre 7965 qui est la somme des cubes des nombres 1, 5, 9, 13, 17.

La méthode s'applique toujours de la même façon et dans tous les cas.

9. Mais je n'ai pas encore dit comment on doit calculer tant la somme des nombres 1, 5, 9, 13, 17 que la somme de leurs carrés, ce qui est indispensable pour effectuer la seconde et la troisième opération.

La règle pour le premier calcul est donnée par Bachet dans son opuscule *Des nombres polygones;* quant au second, on opérera comme suit :

Prenez la somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la somme du plus grand terme de la progression et de la raison moins 1.

Le calcul de cette somme est facile, d'après ce qu'Archimède en a dit dans son livre *Des spirales*.

De cette somme retranchez :

1° La somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1. Vous aurez multiplié cette somme par le nombre des termes;

2° Le double de la somme d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1. Vous aurez multiplié ce double par la somme des termes de la progression donnée.

Après ces soustractions, vous divisez le reste par la raison de la progression, et vous aurez la somme des carrés des termes.

Des règles données pour ces deux cas vous pourrez immédiatement ou sans grande difficulté déduire celles qui s'appliquent aux autres.

**10**. Au reste je n'ai pas voulu m'arrêter là, mais j'ai résolu le problème qui est peut-être le plus beau de toute l'Arithmétique, c'est-à-dire celui où l'on cherche, pour une progression quelconque, non plus seulement la somme des carrés ou des cubes des termes, mais celle des puissances quelconques, pour tous les degrés jusqu'à l'infini, bicarrés, carrécubes, bicubes, etc.; la méthode étant aussi générale que possible.

**11**. Pour que M. de Sainte-Croix sache que je n'attends à cet égard ni un sphinx, ni un Œdipe, voici la solution du problème pour la somme des bicarrés. On peut l'énoncer comme suit sous forme de théorème :

Soient pris à partir de l'unité autant de nombres que l'on voudra en progression naturelle; si l'on ajoute 2 au quadruple du dernier et qu'on multiplie la somme par le carré du triangle qui est la somme des nombres, après avoir retranché du produit la somme des carrés des termes, on aura le quintuple de la somme de leurs bicarrés.

Exemple : Soient pris les nombres 1, 2, 3, 4; en ajoutant 2 au quadruple du dernier, on a 18, qu'il faut multiplier par 100, carré du triangle somme des nombres; du produit 1800 on retranche la somme des carrés des termes, c'est-à-dire 30. Il reste 1770, dont le cinquième, 354, est égal à la somme des bicarrés.

Je résous de même le problème pour une progression quelconque, en imitant la construction qui précède.

Si vous ou M. de Sainte-Croix le désirez, je vous communiquerai la méthode générale pour les puissances quelconques jusqu'à l'infini.

**12**. En attendant, j'ajouterai une très belle proposition que j'ai trouvée et qui m'a fourni la lumière pour les questions de ce genre :

Dans la progression naturelle, on a le double du triangle ayant pour côté le dernier nombre, en multipliant celui-ci par le nombre immédiatement supérieur; on a le triple de la pyramide ayant pour côté le dernier nombre, en multipliant celui-ci par le triangle du nombre immédiatement supérieur; on a le quadruple du triangulotriangle du dernier nombre, en multipliant celui-ci par la pyramide du nombre immédiatement supérieur; et ainsi de suite à l'infini, par une méthode uniforme.

13. Pour votre proposition des triangles rectangles, elle me semble énoncée dans votre lettre avec quelque peu d'obscurité; je la résoudrai peut-être, si vous me la proposez plus clairement.

Votre tout dévoué,

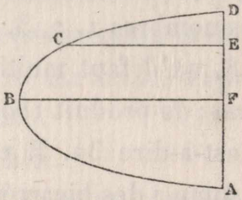
FERMAT.

## N° 13.

(Lettre de Fermat à Roberval, du 22 septembre 1636.)

6... Si autour de la droite DA (*fig.* 38) on fait tourner la parabole qui a B pour sommet, BF pour axe et AF pour ordonnée, on

Fig. 38.




engendre un conoïde d'une nouvelle espèce qui est tel que, si on le partage en deux parties égales par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa moitié sera au cône de même base et de même hauteur dans le rapport de 8 à 5.

Si au contraire on le coupe en deux parties inégales par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, soit en E par exemple, le rapport du segment de conoïde ABCE au cône de même base et de même hauteur sera $\frac{5ED^2 + 2AE.ED + DF.AE}{5ED^2}$; et de même le rapport du segment de conoïde DCE au cône de même base et de même hauteur sera $\frac{5AE^2 + 2AE.ED + DF.DE}{5AE^2}$.

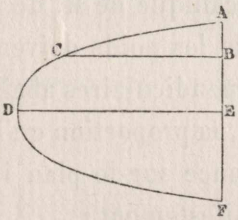
## N° 15.

(Lettre de Fermat à Roberval, du 4 novembre 1636.)

7. Soit la parabole ACDF (*fig.* 44) d'axe DE, de base AF. Menons une droite CB parallèle à DE et par suite perpendiculaire à AF. Si l'on fait tourner la figure ADE autour de DE comme axe, on engendre le conoïde d'Archimède; autour de AE comme axe, on a au contraire mon conoïde.

Si maintenant on fait tourner la figure ACB autour de AB comme axe, on aura un segment de mon conoïde; mais autour de CB comme axe, on engendrera encore un conoïde d'une autre espèce. On demande le rapport de son volume à celui du cône de même base et de même hauteur.

Fig. 44.

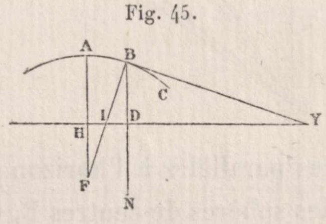



J'ai résolu ce problème : j'ai même trouvé mieux, un ellipsoïde tel que si vous trouvez le cône de même volume, je donnerai la quadrature du cercle. Mais ce sera pour une autre fois.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

9. Soit ABC (*fig.* 45) une conchoïde de pôle B et d'intervalle HA. Soit B un point donné sur cette conchoïde.

Fig. 45.




Je dis en premier lieu que cette courbe doit être représentée convexe vers le bas de la figure, quoique Pappus et Eutocius aient jugé différemment.

En second lieu, je construis comme suit la tangente : Joignez FIB, abaissez la perpendiculaire BD; construisez DN par la condition

$$BF \times FI + BD^2 = BD \times DN$$

et DY par la suivante : $\frac{ID}{DN} = \frac{BD}{DY}$.

La droite YB sera tangente à la conchoïde.

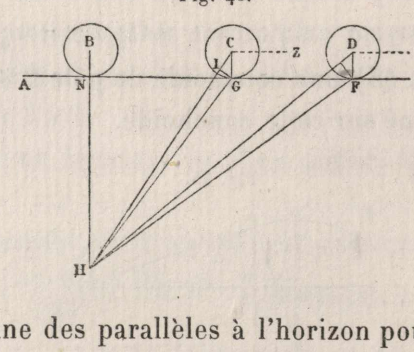
## N° 16.

### Objections de M. de Fermat contre une proposition mécanique de M. de Roberval.

Si cette proposition mécanique de M. de Roberval était vraie, que dans un levier quelconque les poids doivent être, pour l'équilibre, en raison inverse des perpendiculaires abaissées du centre du levier sur les lignes de direction, la proportion qu'il donne, dans son Traité, entre le grave et la puissance sur le plan incliné, ne pourrait subsister. Je le démontre manifestement :

Soit (*fig.* 46) un point N sur la surface de la Terre, H le centre de la Terre. Je joins NH, et je mène ANGF perpendiculaire à HN; cette

Fig. 46.




droite ANGF est une des parallèles à l'horizon pour ceux qui sont au point N. Soient enfin des sphères de centres B, C, D, tangentes en N, G, F à la droite ou au plan par ANGF.

En premier lieu, il est clair que la sphère B sera mise en mouvement par une puissance aussi faible que l'on voudra, ce que M. de Roberval ne nie pas; que, d'autre part, si elle est placée au point N, elle y sera en équilibre; mais, au contraire, elle n'y restera en aucun autre point du plan.

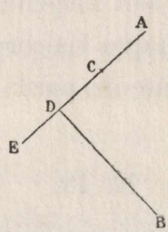
Achevez la figure comme ci-contre. La droite HG, qui joint le point de contact G au centre H de la Terre, fait un angle obtus avec CG; donc la sphère C se mettra en mouvement dans le sens GN. Il en sera de même pour la sphère D. Soit donc en Z une puissance retenant la sphère C par une tendance parallèle à ANGF, c'est-à-dire suivant ZC. Imaginez un levier de centre fixe G et abaissez sur HC la perpendiculaire GI.

La tendance de la sphère C au mouvement naturel est dirigée suivant CH, celle qui la retient est dirigée suivant CZ, droite à laquelle GC est perpendiculaire. Donc, d'après l'hypothèse de M. de Roberval, GI : GC : : Puissance Z : Poids C. C. Q. F. D.

Mais pour retenir la sphère D, il faudra une puissance supérieure, et cette puissance devra être d'autant plus forte que la sphère sera plus éloignée du point N (ce qui est remarquable), tandis que M. de Roberval admet que le rapport de la puissance au poids ne varie pas pour un plan donné. Il peut voir combien cela est éloigné de la vérité.

Soient (*fig.* 47) B le centre de la Terre, ACDE un plan incliné. Qu'en

Fig. 47.




A et en C la puissance nécessaire pour retenir le grave soit la même, cela pouvait paraître rationel aux yeux de M. de Roberval.

Mais, si l'on abaisse la perpendiculaire BD, puisqu'il y a équilibre en D et que la puissance qui y retient est aussi faible que l'on voudra, comment sa proposition peut-elle subsister?

Ma démonstration est d'ailleurs valable pour un plan quelconque, car tout plan est parallèle à un certain horizon.

Ainsi ce qu'a démontré M. de Roberval est renversé et une voie très facile s'ouvre pour établir une nouvelle proportion en rapport avec ses hypothèses.

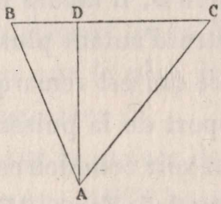
Je voulais ajouter une seconde figure pour exposer ce que je pense de sa dernière proposition, mais je n'ai pas le temps.

## N° 17.

(Lettre de Fermat à Roberval du 7 décembre 1636.)

1... Soient BDC un levier (*fig.* 48), D son milieu, A le centre de la Terre, DA perpendiculaire au levier. Soient en B et C des poids

Fig. 48.




égaux, tendant naturellement vers le centre de la Terre suivant les droites BA, CA; que le levier soit suspendu en D et maintenu par une puissance quelconque; je dis que les corps B et C pèsent autant que s'ils étaient réunis en D et soutenus par la même puissance.

## N° 18.

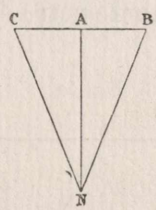
(Lettre de Fermat à Roberval du 16 décembre 1636.)

8... Pour les paraboles cubiques, carrécubiques et ainsi de suite indéfiniment de deux en deux puissances, la méthode dont je me suis servi ne donne pas le rapport des conoïdes aux cônes; j'ai au contraire une méthode qui donne le centre de gravité pour tous les conoïdes sans exception; votre proposition permettrait donc de trouver leur rapport aux cônes.

**10**... Soit un levier CAB (*fig.* 49), dont le milieu A est joint au centre N de la Terre par une droite AN perpendiculaire au levier. Soient en C et B des poids C et B égaux et semblables, qui tendent vers le centre suivant les droites CN, BN.

D'après votre principe, si ces droites NC, NB étaient perpendiculaires au levier, celui-ci serait maintenu en équilibre par une puissance en A égale à la somme des poids B et C. Mais, puisque ces droites font des angles aigus NCA, NBA, il faut en A pour l'équilibre une puissance qui sera soit la même, soit plus petite, soit plus grande.

Fig. 49.




Si la même puissance détermine l'équilibre, le principe dont je me suis servi dans ma dernière lettre est vrai; or, si vous accordez ce principe, la démonstration de la proposition de mon levier s'ensuit immédiatement.

S'il faut une puissance soit plus grande, soit plus petite, dans le premier cas, cette puissance devra être d'autant plus grande que les angles des droites CN, BN avec le levier seront plus petits; dans le second cas, elle devra être d'autant plus petite. Soit supposé comme sur la figure, au-dessus du point A, le même levier suivant la même direction; les angles des lignes CN, BN augmenteront évidemment; donc la puissance nécessaire en A pour maintenir l'équilibre variera avec la distance au centre de la Terre, et par suite le poids composé des deux graves B et C variera lui-même avec cette distance.

Vous ne pouvez accorder la première partie du dilemme, sans que votre proposition ne tombe aussitôt; il vous faut donc admettre, ou bien que la puissance en A varie avec la valeur des angles ou bien que, tout en étant toujours la même quelle que soit la valeur de ces angles, elle est différente de la puissance qui soutiendrait le levier si la direction des poids était perpendiculaire à celui-ci.

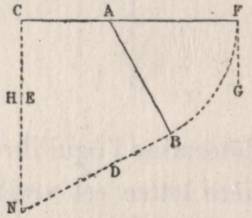
Quelle que soit l'hypothèse que vous choisissiez, il sera prouvé très clairement que dans votre démonstration s'est glissé un paralogisme que la vérité que nous cherchons ne permet pas de dissimuler et que peut-être vous-même devrez reconnaître.

**11.** Sur la première figure (*fig.* 50), qui est la quatrième de votre Lettre, voici ce que vous dites (¹) :

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

C'est là-dessus que repose toute votre démonstration.

Fig. 50.




Mais en premier lieu, si vous dites que, pour toute valeur des angles égaux, la puissance nécessaire à l'équilibre est toujours la même, je démontrerai immédiatement ma proposition du levier; il vous faut donc accorder que cette puissance varie avec les angles.

Ceci admis, soit sur la figure N le centre de la Terre, où concourent les droites CE, BD, et soient en E et D des graves dans le rapport donné, ce qu'on est libre de supposer, d'après votre construction.

Au reste elle n'a pour objet que de trouver le rapport des poids sur

(¹) *Voir* le texte français, t. II, p. 79, ligne 10 à page 80, ligne 4.

le levier en équilibre au moyen de puissances imaginaires qui pour toutes leurs parties agissent toujours suivant une même direction; car autrement des puissances de ce genre, qui n'existent nullement dans la nature, seraient absolument inutiles.

Vous supposez en H et G des puissances égales aux poids E et D et agissant pour toutes leurs parties suivant une même direction. Puis vous concluez, par votre premier axiome, que les effets des puissances H et E sont égaux; la puissance H agissant en C suivant HC perpendiculairement au levier, et le poids E agissant suivant la même perpendiculaire, ces puissances étant égales, agissant suivant la même droite, suivant le même angle sur le levier et à la même distance de son centre, l'action du poids E ne peut, suivant vous, différer de celle de la puissance imaginaire H.

Si vraisemblable que paraisse cette conclusion, elle ne peut que paraître très fausse à qui recherche la vérité intime des choses.

Supposons, par exemple, que le poids E soit sphérique; toutes ses parties tendent vers le centre N suivant des droites qui concourent à ce centre et dont les prolongements rencontrent le levier AC sous des angles aigus. Par conséquent, elles forment un ensemble de puissances agissant de part et d'autre du point C à des distances égales deux à deux, suivant des distances obliques par rapport au levier. Au contraire, toutes les parties de la puissance H étant supposées agir suivant une même direction, elles forment un ensemble de puissances agissant de part et d'autre du point C à des distances égales deux à deux, mais suivant des directions normales par rapport au levier.

Or, puisque la somme de toutes les parties de la puissance H est égale à la somme de toutes les parties de la puissance ou poids E (puisqu'on suppose que la puissance H est égale au poids E), il s'ensuit, d'après ce qui a été établi, que les effets des puissances H et E agissant en H et E sont inégaux; par suite, ce que notre démonstration conclut justement pour la puissance H est étendu à tort au poids E.

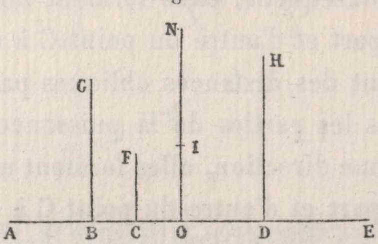
## N° 19.

(Lettre de Fermat à Roberval, de février 1637.)

1. Soient donnés autant de points que l'on voudra, par exemple cinq, A, G, F, H, E (*fig.* 51) (mais la proposition est générale), on demande de trouver un cercle tel que, si d'un point quelconque de la circonférence on mène des droites aux points donnés, la somme des carrés de ces droites soit égale à une aire donnée.

Je joins deux points quelconques A, E; des autres points donnés j'abaisse sur la droite AE les perpendiculaires GB, HD, FC. Je prends une fraction conditionnée, le cinquième dans l'exemple choisi, de la somme de tous les segments limités sur AE d'un côté par le point A, de l'autre par les points donnés ou les pieds des perpendiculaires; ainsi soit $AO = \frac{1}{5}(AB + AC + AD + AE)$; en O j'élève une perpendiculaire indéfinie ON sur laquelle je prends OI égale à la même fraction conditionnée par le nombre des points (ici un cinquième) de la somme des perpendiculaires GB, FC, HD. Je suppose enfin menées

Fig. 51.




les cinq droites AI, GI, FI, HI, EI. La somme de leurs carrés doit être inférieure à l'aire donnée; retranchez-la donc de cette aire et soit par exemple $Z^{pl}$ la différence. Prenez-en le cinquième (c'est-à-dire la fraction conditionnée) et construisez le carré équivalent $M^2$. Le cercle décrit de I comme centre, avec M pour rayon, satisfera à la question; c'est-à-dire que, quelque point que vous preniez sur sa circonférence, la somme des carrés des droites qui le joignent aux points donnés sera égale à l'aire donnée.

J'ajouterais bien la démonstration, mais elle est assez longue; et je préfère vous inviter tous deux à la chercher.

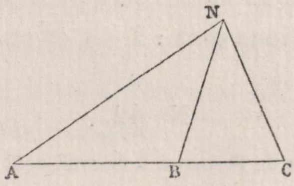
2. Je n'ai pas seulement trouvé ces propositions, mais en général toutes celles des lieux plans, et même beaucoup de lieux dont Apollonius n'a rien écrit et qui cependant sont très beaux. Par exemple :

Étant donnés trois points A, B, C (*fig.* 52) en ligne droite, trouver une circonférence de cercle telle que, si l'on en prend un point N quelconque, $AN^2 + NB^2 - NC^2$ soit égal à une aire donnée.

J'ai également fait de nombreuses découvertes sur les lieux solides et en surface.

Je n'ajoute pas les cas du premier lieu plan ci-dessus; ils se distinguent immédiatement. Si les points donnés sont au nombre de trois seulement et forment par suite un triangle, le centre du cercle formant le lieu est le centre de gravité de ce triangle, proposition singulière et assez remarquable.

Fig. 52.




3. Mais je ne m'arrête pas là. J'établis la proposition sous une forme très générale et j'en ai fait la construction :

Trouver le cercle lieu des points tels que si l'on joint l'un d'eux à autant de points donnés que l'on voudra, et que l'on augmente ou diminue dans un rapport donné chacun des carrés des droites ainsi menées, la somme des carrés ainsi augmentés ou diminués soit égale à une aire donnée.

Exemple : Soient donnés, sur la figure précédente, les trois points A, B, C; on demande un cercle tel que, si l'on prend sur sa circonférence un point N quelconque, $\frac{1}{2}NA^2 + 2BN^2 + 3CN^2$ par exemple, fasse une aire donnée. Étendre la construction à un nombre quelconque de points et à des coefficients quelconques.

Apollonius ne semble pas avoir connu cette proposition qui est certainement très belle.

## N° 36.

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 26 décembre 1638.)

4. Si autant de points donnés que l'on voudra sont joints à un même point par des droites et si la somme des carrés de ces droites est égale à une aire donnée, leur point de concours sera sur une surface de sphère donnée de position.

## N° 37.

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 20 février 1639.)

4. « $x^3 - 9x^2 + 13x = \sqrt{288} - 15$.

On demande la valeur de $x$. Ce problème reçoit trois solutions dont nous donnons la première, $3 - \sqrt{2}$, qui satisfait exactement à la question. Qui donnera les deux autres sera pour nous un grand oracle. »

Ces deux autres solutions sont : $3 + \sqrt{18}$ et $3 - \sqrt{8}$.

## N° 42.

(Lettre de Fermat à Roberval, août 1640.)

6. Par un point donné à l'extérieur ou à l'intérieur d'une parabole, mener une droite qui détermine un segment de parabole d'aire donnée. Si le point est intérieur à la parabole, déterminer l'aire minima qui peut être ainsi retranchée de la parabole par une droite passant par le point donné.

## N° 62.

(Lettre de Fermat à Gassendi, 1646?)

1. Galilée a défini mouvement uniformément accéléré celui dans lequel, à partir du repos, les accroissements de vitesse sont égaux pour des temps égaux.

Quant à celui dans lequel les accroissements de vitesse seraient égaux pour des espaces parcourus égaux, il dit qu'il convient d'autant moins pour représenter le mouvement de chute des graves, que, suivant cette hypothèse, le mouvement se ferait dans un instant, comme il pourrait, dit-il, le démontrer très facilement.

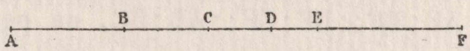
On peut, pourvu qu'elle soit vraie, accorder à ce perspicace lyncéen la conclusion qu'il n'a pas démontrée. Mais s'il a, du premier coup d'œil, vu ou cru voir dans l'obscurité la démonstration, on ne s'étonnera pas qu'elle soit réclamée par ses lecteurs, qui ne sont pas lyncéens.

Pour maintenir donc l'honneur de Galilée et pour faire qu'il n'y ait plus de doute sur sa proposition et qu'on n'en dispute plus en invoquant des raisons seulement probables, je vous envoie cette démonstration suivant la méthode d'Archimède.

2. Si autant de droites que l'on voudra, issues d'un même point, sont en progression géométrique continue, leurs différences seront également en progression suivant la même raison.

Soient, par exemple, les droites AF, BF, CF, DF, EF, etc. (*fig.* 79) en progression continue, leurs différences AB, BC, CD, DE seront en progression suivant la même raison.

Fig. 79.



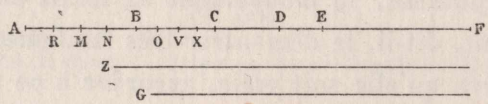

En effet, si AF : BF :: BF : CF, et que l'on retranche respectivement chacun des deux derniers termes du premier qui lui correspond, on aura dans le même rapport AB : BC :: AF : BF, et de même pour les autres. On prouvera de même que AF : CF :: AB : CD; que

$$BF : DF :: BC : DE, \qquad \text{etc.}$$

3. Si l'on imagine un point se mouvant de F vers A (*fig.* 80) d'un mouvement continuellement accéléré suivant le rapport des espaces parcourus, et que l'on prenne une série de longueurs en progression

continue, comme AF, BF, CF, DF, EF, etc., le temps dans lequel l'espace DE sera parcouru sera égal au temps du parcours de l'espace DC;

Fig. 80.




en un mot, chacun des espaces ED, DC, CB sera parcouru dans un même temps.

4. Je prouverai d'abord que les espaces CB, BA sont parcourus dans le même temps, d'après l'hypothèse faite sur le mouvement.

Si le temps pour AB n'est pas égal en effet au temps pour BC, il sera soit plus grand, soit plus petit.

Supposons-le d'abord plus grand. Le rapport du temps pour AB au temps pour BC sera donc celui d'une longueur plus grande que BF à BF. Soit Z cette droite, on aura : Temps AB : Temps BC :: Z : BF.

Prenez entre AF, BF autant de moyennes proportionnelles RF, MF, NF qu'il faudra pour que la plus petite, soit NF, soit inférieure à Z. Qui ne voit que ce résultat sera nécessairement atteint soit par l'insertion d'une seule moyenne, soit par le redoublement de l'opération effectué autant que de besoin?

De la sorte, AF, RF, MF, NF, BF forment une progression continue, et, comme on a AF : BF :: BF : CF :: AB : BC, on peut continuer la même progression suivant le même rapport, de façon à avoir un même nombre de termes BF, OF, VF, XF, CF, de BF à CF.

Ceci posé, considérons chacun des espaces AR, RM, MN, NB, et comparons-les respectivement aux espaces BO, OV, VX, XC, chacun à chacun, c'est-à-dire AR à BO, etc.

Si, sur l'espace AR, le mouvement était uniforme selon le degré de vitesse acquis en R, et si, sur l'espace BO, le mouvement était également uniforme suivant le degré de vitesse acquis en O, on aurait

$$\frac{\text{Temps pour AR}}{\text{Temps pour BO}} = \frac{\text{AR}}{\text{BO}} \times \frac{\text{Vitesse en B}}{\text{Vitesse en R}},$$

ce qui est bien connu et a, au reste, été démontré par Galilée lui-même, prop. 5 du *Traité du mouvement uniforme*.

Mais, par la première proposition, AR : BO :: AF : BF, et d'après l'hypothèse de l'accélération du mouvement suivant les espaces : Vitesse en B : Vitesse en R :: BF : RF. Donc

$$\frac{\text{Temps pour AR}}{\text{Temps pour BO}} = \frac{\text{AF}}{\text{BF}} \times \frac{\text{BF}}{\text{RF}} = \frac{\text{AF}}{\text{RF}}.$$

Si maintenant on suppose, sur l'espace RM, un mouvement uniforme suivant le degré de vitesse acquis en M, et, sur l'espace OV, un mouvement uniforme suivant le degré de vitesse acquis en O, on prouvera de même que

$$\text{Temps MR} : \text{Temps OV} :: \text{RF} : \text{MF}.$$

De même, considérant les vitesses aux points N, V :

$$\text{Temps MN} : \text{Temps VX} :: \text{MF} : \text{NF}.$$

Enfin, considérant les vitesses aux points B et X pour les derniers espaces :

$$\text{Temps NB} : \text{Temps XC} :: \text{NF} : \text{BF}.$$

Mais, d'après la construction, les rapports AF : RF, RF : MF, MF : NF, NF : BF sont égaux; par suite, en sommant les temps suivant AB et suivant BC, le rapport de ces temps totaux pour des mouvements définis comme nous l'avons dit sera égal au rapport AF : RF ou NF : BF.

Mais le temps du mouvement accéléré sur AR est inférieur au temps du mouvement uniforme sur AR avec la vitesse en R; en effet, par hypothèse, la vitesse croît continuellement de R à A; donc, dans le mouvement accéléré, le mobile va plus vite de R en A que s'il parcourait l'espace RA avec la vitesse qu'il a en R.

On prouvera de même que le temps du mouvement accéléré sur RM est inférieur au temps du mouvement uniforme sur RM, avec une vitesse correspondant à celle acquise au point extrême M.

Enfin on établira que, pour le mouvement accéléré sur la ligne totale AB, suivant l'hypothèse faite, le temps sera moindre que pour ce mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, avec des vitesses correspondant à celles acquises aux points extrêmes des espaces AR, RM, MN, NB.

Mais, au contraire, le temps du mouvement accéléré sur BO est plus long que celui du mouvement uniforme sur BO avec la vitesse au point B, parce que la vitesse croît toujours de O à B dans le mouvement accéléré, d'après l'hypothèse; elle reste donc toujours inférieure à la vitesse correspondant au point B.

En raisonnant de même, on conclura que, suivant l'hypothèse faite, le mouvement accéléré sur la ligne totale BC demandera un temps plus long que le mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes avec les vitesses correspondant aux premiers points des espaces BO, OV, VX, XC.

Ainsi le temps du mouvement accéléré sur AB est moindre que le temps du mouvement imaginaire sur AB, et au contraire le temps du mouvement accéléré sur BC est plus grand que le temps du mouvement imaginaire sur BC; donc le rapport des temps des mouvements accélérés sur AB et BC est moindre que le rapport des temps des mouvements imaginaires sur les mêmes lignes AB et BC. Mais le premier de ces deux rapports a été supposé égal à celui des droites Z : BF; le second a été démontré égal à celui des droites NF : BF. Donc

$$Z : BF < NF : BF,$$

ce qui est absurde, puisque $Z > NF$.

Donc le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas plus grand que celui du mouvement accéléré sur BC. On démontrera avec la même facilité que le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas plus petit que celui du mouvement accéléré sur BC.

Supposons-le en effet plus petit s'il est possible; le rapport des temps des mouvements accélérés sur AB et BC sera donc égal à celui d'une droite inférieure à BF et de BF. Soit G cette droite inférieure à BF, et par suite : Temps AB : Temps BC : : G : BF.

Entre BF et CF intercalons une série de moyennes proportionnelles dont la plus grande OF soit plus grande que G. En employant le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration, et en comparant les espaces sur AB entre les extrémités des moyennes avec les espaces analogues BO, OV, VX, XC, en changeant toutefois les vitesses uniformes, et en supposant, par exemple, que le mouvement sur AR se fasse avec le degré de vitesse acquis en A; que le mouvement sur BO se fasse avec la vitesse acquise en O, et de même pour les autres espaces; il est clair que toutes les vitesses sur AB seront augmentées par la substitution des mouvements uniformes, tandis que sur BC elles seront diminuées, contrairement à ce qui avait lieu d'après les suppositions de la première partie de la démonstration. On conclura dès lors que le rapport des temps des mouvements uniformes sur AR et BO est égal à celui de RF à AF, puisque, si les vitesses augmentent, les temps diminuent.

De même, pour les mouvements uniformes :

$$\text{Temps RM} : \text{Temps OV} :: \text{MF} : \text{MR},$$

et enfin le rapport des temps des mouvements imaginaires composés de mouvements uniformes sur AB et BC sera égal au rapport RF : AF, puisque tous les rapports des temps partiels sont égaux à ce même rapport, qui vaut d'ailleurs OF : BF, d'après la première proposition.

Mais sur AB le temps du mouvement accéléré est plus grand que le temps du mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, puisque nous avons supposé que, dans ces mouvements uniformes, les vitesses sont augmentées (on a pris en effet celles qui répondent aux premiers points des espaces AR, RM, etc.); au contraire, sur BC le temps du mouvement accéléré est moindre que le temps du mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, les vitesses dans ce cas étant diminuées et répondant aux derniers points des espaces BO, OV, etc.

Donc le rapport du temps des mouvements accélérés sur AB et BC est supérieur au rapport des temps des mouvements imaginaires sur les mêmes droites AB et BC. Mais le premier de ces deux rapports est supposé égal au rapport G : BF; le second a été démontré égal au rapport OF : BF; donc G : BF > OF : BF, ce qui est absurde, puisque G < OF, par construction.

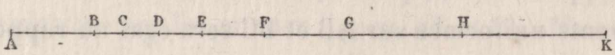
Par conséquent, le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas inférieur au temps du mouvement accéléré sur BC; mais nous avons prouvé qu'il n'est pas non plus supérieur; donc ces deux temps sont égaux.

Par la même raison, il est clair que le temps du mouvement accéléré sur CD est égal à celui du mouvement accéléré, soit sur AB, soit sur BC, et, en continuant indéfiniment le même raisonnement, que tous les espaces sans exception sont parcourus en des temps égaux.

5. Cela établi, une troisième proposition va révéler la pensée de Galilée ou montrer la vérité de son affirmation.

Imaginons le mouvement d'un grave tombant du point A, où il est en repos, jusqu'en H (*fig.* 81), par exemple, et supposons, s'il est possible,

Fig. 81.




sible, que la vitesse de chute s'accélère en raison de l'espace déjà parcouru. Admettons que le mouvement de A à H ait demandé une minute ou tout autre temps déterminé, et supposons que le mouvement se continue de H en K; je dis que le mouvement sur HK se fera en un instant.

Si, en effet, il ne se fait pas en un instant, il demandera un certain temps déterminé, qui pourra être multiplié par un nombre tel que le produit dépasse le temps employé pour parcourir AH. Supposons que ce multiplicateur soit 5, c'est-à-dire que 5 fois le temps du mouvement sur HK fasse plus que le temps du mouvement sur AH.

Prenez GA troisième proportionnelle aux droites KA, HA et continuez la série des proportionnelles suivant la même raison jusqu'à ce que le nombre des espaces entre leurs extrémités surpasse 5; soient par exemple au delà du point H six espaces donnés par cette progression continue, HG, GF, FE, ED, DC, CB.

Comme on vient de le démontrer, le temps du mouvement sur HG est égal au temps du mouvement sur HK; il en est de même du mouvement sur GF, etc. Donc le temps du mouvement sur HB sera six fois le temps du mouvement sur HK; mais cinq fois le temps du mouvement sur HK fait plus que le temps du mouvement sur AH; donc, *a fortiori*, le temps du mouvement sur HB dépasse le temps du mouvement sur HA, ce qui est absurde.

Donc l'assertion de Galilée est vraie, quoiqu'il ne l'ait pas démontrée.

6. Je vous ai écrit, illustre Gassend, en termes brefs et familiers, voulant seulement vous éviter de nouvelles difficultés de la part de Cazré ou de tout autre adversaire de Galilée; on en viendrait ainsi à des volumes sans fin, alors qu'une seule démonstration peut, de l'aveu même des auteurs, renverser leur travail ou le rendre inutile et superflu.

## N° 67.

(Lettre de Fermat à Auzout? 1648.)

Faire toujours disparaître les irrationelles dans les équations algébriques est une opération difficile et qui jusqu'à présent n'a pas été suffisamment travaillée par les analystes.

Supposons, par exemple, plus de quatre radicaux dans une équation dont il faille faire disparaître les irrationelles suivant les règles de l'art. L'analyste ne pourra guère se tirer d'embarras; plus il poussera ses calculs, plus la difficulté augmentera, jusqu'à ce que, fatigué de répéter sans fin les opérations, il reconnaisse qu'il n'a rien changé. L'Analyse doit-elle s'arrêter à cet obstacle et se laisser ainsi imposer silence par les irrationelles? Il faut que les savants étudient cette question et découvrent une méthode satisfaisante.

Soit proposé par exemple :

$$\sqrt{ba-a^2}+\sqrt{z^2+da+a^2}+\sqrt{ma}+\sqrt{d^2-a^2}-\sqrt{ra+a^2}=b+a.$$

Que l'analyste opère sur cette équation suivant les règles de l'art et qu'il se débarrasse des radicaux, ou bien qu'il reconnaisse l'insuffisance des règles.

## N° 68.

(Lettre de Fermat à Carcavi, du 20 août 1650.)

2. Soit quatre termes irrationels homogènes, dont la somme soit, dans le cas proposé, égalée à une droite, suivant l'équation

$$\sqrt[3]{z^2a-a^3}+\sqrt[4]{b^4-d^2ba+a^4}+\sqrt{ba-a^2}+\sqrt[5]{a^5-b^4a}=b+a-e.$$

On demande la tangente en un point donné de la courbe dont cette équation [en $a$ et $e$] représente la propriété spécifique.

## N° 70.

(Lettre de Pascal à Fermat, du 20 juillet 1654.)

4. Soit un nombre quelconque de lettres, par exemple les huit A, B, C, D, E, F, G, H; formez-en toutes les combinaisons 4 à 4, 5 à 5, 6 à 6, jusqu'à celle des 8. Je dis que, si l'on ajoute à la moitié du nombre des combinaisons 4 à 4 (savoir 35, moitié de 70) le nombre des combinaisons 5 à 5 (qui est 56), celui des combinaisons 6 à 6 (qui est 28), celui des combinaisons 7 à 7 (qui est 8), enfin celui des combinaisons 8 à 8 (c'est-à-dire 1), on a le quatrième terme de la progression géométrique commençant à 2 et ayant 4 pour raison; je dis le quatrième, parce que 4 est la moitié de 8.

Les termes de cette progression géométrique, commençant à 2 et ayant 4 pour raison, sont en effet : 2, 8, 32, 128, 512, etc. Le 1^er^ est 2, le 2^e^ est 3, le 3^e^ est 32 et le 4^e^ est 128; or

$$128=35+56+28+8+1;$$

ce terme est ainsi la somme des nombres des combinaisons de 4, 5, 6, 7 et 8 lettres.

8. ... La différence de deux cubes consécutifs quelconques, diminuée de l'unité, est égale au sextuple de la somme des nombres jusqu'à la racine du plus petit cube inclusivement.

Soient R et S les deux racines, qui diffèrent d'une unité; je dis que $R^3 - S^3 - 1$ est égale au sextuple de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S.

Soit $S = a$, et par suite $R = a + 1$,

$$R^3 \text{ ou } (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1^3 \qquad \text{et} \qquad S^3 \text{ ou } a^3 = a^3.$$

La différence $R^3 - S^3 = 3a^2 + 3a + 1^3$, et en retranchant l'unité,

$$R^3 - S^3 - 1 = 3a^2 + 3a.$$

Mais, d'après le lemme, le double de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S ou $a$ est $a(a+1)$ ou $a^2 + a$. Donc $3a^2 + 3a$ sera le sextuple de cette somme.

Or $3a^2 + 3a = R^3 - S^3 - 1$; donc $R^3 - S^3 - 1$ est le sextuple de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S ou $a$. C. Q. F. D.

## N° 79.

### PREMIER DÉFI AUX MATHÉMATICIENS,

3 JANVIER 1657.

B. Proposez, si vous le voulez bien, à Wallis et aux autres mathématiciens anglais, la question numérique suivante :

1. Trouver un cube qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes fasse un cube.

2. Par exemple, $343 = 7^3$. Les parties aliquotes de ce nombre sont : 1, 7, 49; si l'on ajoute 343 à leur somme, on a $400 = 20^2$. On demande un autre cube ayant la même propriété.

3. On demande aussi un nombre carré qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fasse un cube.

J'attends la solution de ces questions; si elle n'est fournie ni par l'Angleterre, ni par la Gaule Belgique ou Celtique, elle le sera par la Narbonnaise, qui l'offrira à Sir Digby et la lui dédiera en gage d'une amitié naissante.

## N° 81.

### SECOND DÉFI AUX MATHÉMATICIENS,

FÉVRIER 1657.

Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes, et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue, et par suite à la Géométrie.

Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre, la théorie des nombres entiers; cette théorie n'a été que très légèrement ébauchée par Euclide et n'a pas été assez cultivée par ses successeurs (à moins qu'elle n'ait été renfermée dans ces livres de Diophante, dont l'injure du temps nous a privés); les arithméticiens ont donc à la développer ou à la renouveler.

Pour éclairer leur marche, je leur propose de démontrer comme théorème ou de résoudre comme problème l'énoncé suivant; s'ils y parviennent, ils reconnaîtront au moins que des questions de ce genre ne le cèdent ni pour la subtilité, ni pour la difficulté, ni pour le mode de démonstration, aux plus célèbres de la Géométrie :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré.

Par exemple, on donne 3, nombre non carré.

$$3 \times 1^2 + 1 = 4 \text{ (carré)},$$
$$3 \times 16 + 1 = 49 \text{ (carré)}.$$

Au lieu des carrés 1 et 16, on peut trouver une infinité d'autres carrés satisfaisant à la condition proposée, mais je demande une règle générale, s'appliquant à tout nombre non carré quelconque qui peut être donné.

On demande par exemple un carré, tel qu'en ajoutant l'unité à son produit par 149 ou par 109 ou par 433, etc., on ait un carré.

## N° 84.

(Lettre de Fermat à Digby, du 15 août 1657.)

4. Un nombre, somme de deux cubes, étant donné, le partager en deux autres cubes.

Ce problème n'a été résolu par Diophante que pour les carrés; il ne l'a pas essayé pour les cubes, au moins dans les livres qui nous restent de son grand Ouvrage.

Par exemple, je propose le nombre 28, somme des deux cubes 1 et 27.

Il s'agit de partager ce nombre 28 en deux autres cubes rationels et de donner la solution générale de ce problème.

8. Diophante a proposé de partager un nombre carré en deux carrés, et de même, étant donné un nombre, somme de deux carrés, de le partager en deux autres carrés.

Mais ni lui ni Viète n'ont essayé d'élever la question jusqu'aux cubes; pourquoi hésiter ou différer de traiter une proposition pour laquelle l'honneur de la solution a été réservé aux analystes modernes?

Je propose donc de « partager un nombre cube en deux cubes rationels »; de même : « Étant donné un nombre, somme de deux cubes, le partager en deux autres cubes rationels », et je voudrais savoir ce qu'on pense de ce problème en Angleterre et en Hollande.

## N° 96.

(Lettre de Fermat à Digby, juin 1658.)

1. Que les très illustres S[rs] Vicomte Brouncker et John Wallis aient enfin donné des solutions légitimes des questions numériques que j'avais proposées, je le reconnais volontiers; bien plus, j'en suis très heureux. Cependant, si vos éminents correspondants n'ont pas voulu avouer que les questions proposées les aient jamais embarrassés, même un seul moment, j'aurais désiré qu'au contraire ils aient bien voulu reconnaître de prime abord que ces problèmes étaient dignes d'être étudiés en Angleterre; leur triomphe eût été d'autant plus éclatant que la lutte eût paru plus difficile. On peut faire cette concession à la fierté d'une nation aussi illustre et aussi féconde en grands génies; mais pour agir désormais en toute franchise, si les Français avouent que les Anglais ont satisfait aux questions proposées, que les Anglais à leur tour reconnaissent que ces questions valaient bien la peine de leur être proposées, et qu'ils ne dédaignent plus d'examiner attentivement et de pénétrer la nature des nombres entiers, qu'enfin ils appliquent la puissance et la subtilité de leur esprit à de nouveaux progrès dans cette théorie.

2. Pour qu'ils me l'accordent plus volontiers, je leur proposerai un exemple tiré de Diophante et de son célèbre commentateur Bachet.

Dans la plupart des questions des Livres IV et V, Diophante suppose que tout nombre entier est ou bien carré ou bien somme de deux, de trois ou de quatre carrés. Dans son commentaire sur le problème IV, 31, Bachet avoue qu'il n'est pas parvenu à démontrer complètement cette proposition. René Descartes lui-même, dans une lettre qui sera prochainement publiée et dont j'ai eu récemment connaissance, avoue ingénuement qu'il ignore la démonstration et déclare que le chemin pour y parvenir lui paraît des plus difficiles et des plus embarrassés. Je ne vois donc pas que l'on puisse douter de l'importance de cette proposition. Or j'annonce à vos éminents correspondants que j'en ai trouvé une démonstration complète.

Je pourrais ajouter nombre de propositions très célèbres dont je possède également la preuve irréfutable; par exemple :

Tout nombre premier, de la forme $4n+1$, est somme de deux carrés; ainsi 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc.

Tout nombre premier, de la forme $3n+1$, est somme d'un carré et du triple d'un autre carré; ainsi 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc.

Tout nombre premier, de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, est somme d'un carré et du double d'un autre carré; ainsi 3, 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Quant à la proposition de Bachet ci-dessus, je l'ai proposée autrefois généralisée à M. de Sainte-Croix, et j'ai également la démonstration pour cette extension que voici :

Tout nombre entier est soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles; soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés; soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones; soit hexagone, soit somme de 2, 3, 4, 5 ou 6 hexagones; et ainsi de suite en continuant indéfiniment.

**3.** Tous ces théorèmes que j'ai découverts comme une infinité d'autres concernant les nombres entiers, et dont je possède des démonstrations générales, je pourrais les proposer à vos éminents correspondants et leur créer ainsi au moins quelque occupation. Mais il sera plus dans la franchise de ma nation de leur soumettre au contraire des énoncés dont j'avouerai que j'ignore la démonstration, quoique je sois persuadé de leur vérité.

On sait qu'Archimède n'a pas dédaigné de travailler sur des propositions de Conon qui étaient vraies, mais non prouvées, et qu'il a su les munir de démonstrations d'une haute subtilité. Pourquoi n'espérerais-je pas un semblable secours de vos éminents correspondants, pourquoi, Conon français, ne trouverais-je pas des Archimèdes anglais ?

1° Toutes les puissances du nombre 2, ayant pour exposant un des termes de la progression géométrique suivant la raison du même nombre 2, donnent des nombres premiers, si on leur ajoute l'unité.

Soit la progression géométrique suivant la raison 2, avec ses exposants :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | 64. | 128. | 256. |

Le premier terme 2, augmenté de l'unité, fait 3, nombre premier.

Le second terme 4, augmenté de l'unité, fait 5, nombre premier.

Le quatrième terme 16, augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le huitième terme 256, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Prenez en général toutes les puissances de 2, dont l'exposant est un terme de la progression, il en sera de même. Ainsi, le seizième est 65 536; ajoutant 1, on a 65 537, qui est premier. De cette façon, on peut déterminer et calculer sans difficulté un nombre premier plus grand que tout nombre donné.

Je demande une démonstration de cette proposition, qui est certainement très belle, que je crois très vraie, et grâce à laquelle on peut, comme je viens de le dire, résoudre immédiatement un problème autrement très difficile, savoir : étant donné un nombre quelconque, trouver un nombre premier qui soit plus grand. Et cela donnera peut-être à vos éminents correspondants la clef pour pénétrer tout le mystère des nombres premiers, c'est-à-dire étant donné un nombre quelconque, reconnaître, par la voie la plus facile et la plus courte, s'il est premier ou composé.

2° Le double de tout nombre premier, de la forme $8n - 1$, est somme de trois carrés.

Soit un nombre premier quelconque de la forme $8n - 1$, comme 7, 23, 31, 47, etc.; je dis que chacun des doubles 14, 46, 62, 94, est somme de trois carrés.

J'affirme que cette proposition est vraie, mais seulement à la façon de Conon, attendant qu'un Archimède la démontre.

3° Si l'on fait le produit de deux nombres premiers, terminés par 3 ou par 7, et de la forme $4n+3$, ce produit sera la somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré.

Tels sont les nombres 3, 7, 23, 43, 47, 67, etc. Prenez-en deux, par exemple 7 et 23; leur produit 161 est la somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré. En effet $161 = 81 + 5 \times 16$.

Je dis que cette proposition est vraie en général et j'attends seulement la démonstration. D'ailleurs le carré de chacun de ces nombres est également somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré, ce que je propose également de démontrer.

4. Pour ne pas paraître trop pauvre en démonstrations, j'ajouterai une proposition que je puis prouver :

Il n'y a aucun nombre triangle, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

Tout le monde sait que les triangles sont : 1, 3, 10, 15, 21, 28, 36, 45, etc.

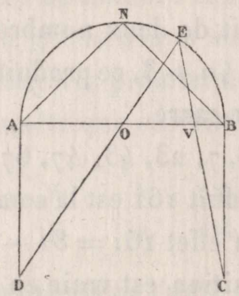
Il n'y a absolument dans toute cette série, indéfiniment prolongée, aucun bicarré, sauf l'unité.

5. Enfin, pour ne pas paraître me réfugier dans les nombres faute de propositions géométriques, en voici quelques-unes, qui ne rougiront pas de se montrer en Angleterre. Les deux premières sont tirées de ma restitution des porismes d'Euclide.

Soit sur le diamètre AB (*fig.* 90) le demi-cercle ANB; prenez en N le milieu de la demi-circonférence ANB, joignez NA, NB, et élevez en A, B les perpendiculaires AD, BC, égales à AN ou NB. Prenez sur la demi-circonférence un point quelconque E, joignez DE, EC, qui couperont le diamètre aux points O et V. Je dis que dans ce cas on aura $AV^2 + BO^2 = AB^2$.

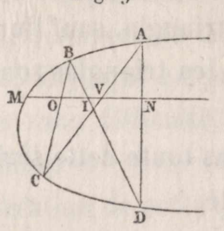
Dans mon Traité, j'ai énoncé ce théorème ou problème sous une forme plus générale, mais, pour le moment, il suffit de ce cas particulier.

Fig. 90.




Soient une parabole quelconque AMC (*fig.* 91), A, B deux points quelconques pris sur cette parabole, MN un diamètre quelconque. Prenez sur la parabole un autre point quelconque C et joignez-le à A et B. Vous couperez ainsi le diamètre toujours dans le même rapport.

Fig. 91.




Car si vous prenez un autre point quelconque, tel que D, vous aurez MO : OV :: MI : IN; les segments interceptés sur le diamètre seront toujours dans le même rapport.

Voilà des propositions que j'ai découvertes et démontrées et que j'offre en échange du théorème sur le tronc de cône oblique.

6. Mais je n'hésite pas au reste à proposer aussi en cette matière aux Anglais des questions que je n'ai pas encore complètement résolues.

Étant donnés des points, des droites et des cercles, trouver une parabole qui passe par les points donnés et touche les droites ou les cercles donnés.

Il suffit de quatre données. Par exemple : Étant donnés deux points, une droite et un cercle, trouver une parabole qui passe par les points donnés et soit tangente à la droite et au cercle donnés. Il y a en tout quinze problèmes.

Je propose la même chose pour les ellipses ou les hyperboles; mais, dans ce cas, il faut cinq données, points, droites ou cercles : ce qui fait en tout 21 problèmes.

Dans mon *Traité des contacts sphériques*, j'ai autrefois traité les problèmes analogues pour la sphère et notamment résolu avec bonheur la question suivante : Étant données quatre sphères, en trouver une cinquième qui soit tangente aux quatre sphères données.

Vous pourrez trouver ce Traité complet chez M. de Carcavi.

J'inviterai enfin vos éminents correspondants à mettre de côté tant soit peu les formules de l'Analyse et à traiter les problèmes de Géométrie par la méthode d'Euclide et d'Apollonius, car il est à désirer que l'on ne voie pas se perdre peu à peu, dans les constructions et les démonstrations, cette élégance à laquelle visaient surtout les anciens, comme le prouvent assez les Données d'Euclide et les autres livres d'Analyse énumérés par Pappus, livres dont j'ai jadis complété la restitution en ajoutant aux travaux de Viète, de Ghetaldi et de Snellius mes Traités des lieux plans, des lieux solides et de ligne, des lieux en surface et des porismes, Traités que M. de Carcavi a également tous entre les mains.

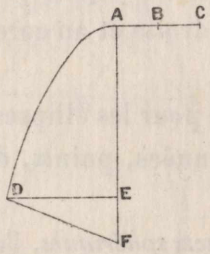
## N° 106.

(Lettre de Fermat à Carcavi, juin 1660.)

1. En supposant la quadrature de l'hyperbole, on peut obtenir un cercle de surface équivalente à la surface courbe engendrée par la rotation d'une parabole autour d'une ordonnée.

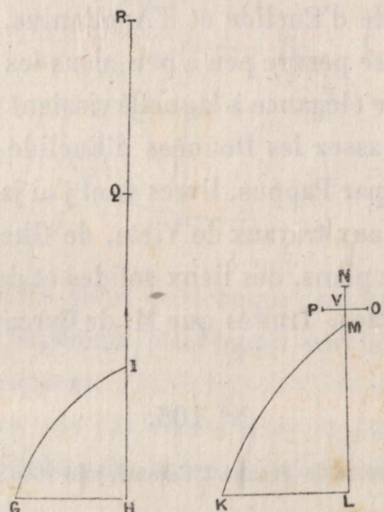
Soit donnée la parabole AD (*fig.* 95) ayant AE pour axe, DE pour ordonnée ou demi-base, ABC pour côté droit. On demande de construire un cercle dont la surface soit équivalente à celle de la surface courbe du solide engendré par la rotation de la figure ADE autour de l'ordonnée DE.

Fig. 95.




Prenez en B la moitié du côté droit AC, prolongez l'axe AE d'une droite EF égale à AB ou à la moitié du côté droit, et joignez DF. Construisez à part (*fig.* 96) une droite IQ égale à l'axe AE et prenez-en le double IR. Faites FE ou AB : DF :: QI : QH, et par le point H

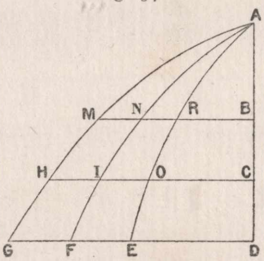
Fig. 96.




menez HG perpendiculaire à HIR et égale à DE. Décrivez une hyperbole IG ayant I pour sommet, IR pour axe transverse, Q pour centre et passant par le point G. Décrivez également à part une autre hyperbole ayant pour axe transverse MN égale au quart du côté droit de la parabole (c'est-à-dire que $MN = \frac{1}{4} AC$), pour centre V, et pour côté droit OVP égale à l'axe transverse. Soient MK cette hyperbole, M son sommet, ML son axe qu'on prolongera jusqu'à ce qu'il soit égal à l'axe AE de la parabole, enfin LK la perpendiculaire ou ordonnée en L. Construisez un carré égal à l'excès du rectangle $QH \times HG$ sur la somme des deux aires hyperboliques IGH, MKL, dont on suppose la quadrature. La diagonale de ce carré sera le rayon du cercle équivalent à la surface courbe dont nous cherchons la mesure.

2. Soit la cycloïde primaire ANIF (*fig.* 97) d'axe AD, de demibase DF. Construisez à l'intérieur ou à l'extérieur d'autres courbes telles que leurs ordonnées soient dans un rapport constant avec celle de la cycloïde.

Fig. 97.




Par exemple, GFD, HIC, MNB étant des ordonnées de la courbe extérieure AMHG, je suppose que le rapport GD : DF est donné et que l'on a GD : DF :: HC : CI :: MB : BN. De même pour la courbe intérieure AROE, je suppose donné le rapport FD : DE avec l'égalité des rapports FD : DE :: IC : CO :: NB : RB.

Je dis que les arcs des courbes extérieures, comme AMHG, sont toujours égaux à la somme d'une droite et d'un arc de cercle ; que les arcs des courbes intérieures, comme AROE, sont toujours égaux à des arcs de paraboles primaires ou d'Archimède.

Je vous communiquerai, dès que vous le désirerez, l'énoncé du théorème général et sa démonstration.