OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

1. — Porismes de Bachet, Livre III, définition 6.

« Un triangle rectangle en nombres (c'est-à-dire l'ensemble de trois nombres rationels a, b, c, liés par la relation : $a^2 = b^2 + c^2$) est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq. \text{ »}$$

Nous pouvons former un triangle avec trois nombres en progression arithmétique, en le composant, selon cette définition 6, avec le terme moyen et la différence de deux termes; car le produit des trois termes et de la différence sera égal à l'aire dudit triangle, et, par suite, si la différence est l'unité, l'aire du triangle sera représentée par le produit des trois termes.

2. — Diophante, II, 8.

« Résoudre en nombres rationels l'équation indéterminée : $x^2 + y^2 = a^2$. »

Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.

3. — Diophante, II, 10.

« Résoudre : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. »

Un nombre, somme de deux cubes, peut-il être de même partagé en deux autres cubes? C'est là un problème difficile dont la solution a certainement été ignorée par Bachet et par Viète, peut-être par Diophante lui-même; je l'ai résolu plus loin dans mes Notes sur le problème IV, 2.

4. — **Diophante, III, 10.**

« Résoudre : $x+y+a=\square$, $y+z+a=\square$, $z+x+a=\square$, $x+y+z+a=\square$. »

J'ai indiqué, dans ma Note sur le problème V, 30, comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré.

5. — **Diophante, III, 11.**

« Résoudre le problème précédent, en supposant a négatif. »

Ma Note sur V, 31 montre comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée d'un nombre donné, fasse un carré.

6. — **Diophante, III, 17.**

« Résoudre : $xy+x+y=\square$, $yz+y+z=\square$, $zx+z+x=\square$. »

Il y a dans Diophante un autre problème, V, 5, sur le même sujet (1). Cependant on ne sait pas s'il a omis, tout en le connaissant, le problème suivant ou s'il n'en avait pas, plus probablement, donné la solution dans un de ses treize Livres :

Trouver trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré.

Je puis donner de ce problème des solutions en nombre indéfini. En voici une, par exemple; les trois carrés : $\frac{3\,504\,384}{203\,401}$, $\frac{2\,019\,241}{203\,401}$, 4, satisfont à la condition proposée.

On peut d'ailleurs aller plus loin et étendre la question de Dio-

(1) V, 5, Diophante suppose que les inconnues du problème III, 17 sont des carrés ; il ajoute de plus les conditions : $xy+z=\square$, $yz+x=\square$, $zx+y=\square$.

phante. Ainsi j'ai traité généralement le problème suivant et je puis en fournir des solutions en nombre indéfini :

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes nombres, fasse un carré.

On cherchera, d'après V, 5, trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré. Soient par exemple les trois carrés donnés par Diophante : $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$; nous les prendrons pour les trois premiers nombres de notre problème; soit x le quatrième ; en formant son produit avec chacun des précédents et en ajoutant la somme des deux facteurs, nous aurons

$$\frac{34}{9}x + \frac{25}{9} = \square, \qquad \frac{73}{9}x + \frac{64}{9} = \square, \qquad \frac{205}{9}x + \frac{196}{9} = \square;$$

équation triple, que j'ai enseigné à traiter dans ma Note sur VI, 24.

7. — Commentaire de Bachet sur Diophante, III, 22.

Tout nombre premier, de la forme $4n + 1$, est une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle; son carré l'est deux fois, son cube trois, son bicarré quatre, et ainsi de suite indéfiniment.

Le même nombre premier et son carré sont, d'une seule façon, somme de deux carrés; son cube et son bicarré le sont de deux façons; sa cinquième et sa sixième puissance de trois façons, et ainsi de suite indéfiniment.

Si un nombre premier, qui soit la somme de deux carrés, est multiplié par un autre nombre premier, qui soit également la somme de deux carrés, leur produit sera, de deux façons différentes, somme de deux carrés; si le multiplicateur est le carré du second nombre premier, le produit sera somme de deux carrés de trois façons différentes; si le multiplicateur est le cube du second nombre premier, le produit sera somme de deux carrés de quatre façons différentes, et ainsi de suite indéfiniment.

Il est, d'après cela, facile de déterminer *de combien de façons différentes un nombre donné peut être hypoténuse d'un triangle rectangle.*

On prendra tous les diviseurs premiers de ce nombre qui seront de la forme $4n+1$; par exemple 5, 13, 17.

Si le nombre donné est divisé par des puissances de ses facteurs premiers, il faut d'ailleurs prendre ces puissances au lieu du facteur simple; supposons par exemple que le nombre donné soit divisé par le cube de 5, par le carré de 13 et par 17 simplement.

On prendra les exposants de tous les facteurs, à savoir : pour 5, l'exposant 3 du cube; pour 13, l'exposant 2 du carré; pour 17, l'unité simple.

On ordonnera, comme on voudra, lesdits exposants; soit, par exemple, l'ordre 3.2.1.

On multipliera le premier par le second, on doublera et on ajoutera la somme du premier et du second; il vient 17. On multipliera 17 par le troisième, on doublera et on ajoutera la somme de 17 et du troisième; il vient 52. Le nombre donné sera hypoténuse de 52 triangles rectangles différents. Le procédé sera le même quel que soit le nombre des facteurs et quelles que soient leurs puissances.

Les autres nombres premiers, qui ne sont pas de la forme $4n+1$, ainsi que leurs puissances, n'ajoutent ni ne diminuent rien au nombre qu'il s'agit de trouver.

Trouver un nombre premier qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Soit à trouver un nombre qui soit hypoténuse de sept façons différentes.

Je double le nombre donné 7; il vient 14. J'ajoute 1, ce qui fait 15. Je prends tous les diviseurs premiers de 15, qui sont 3 et 5. Je retranche l'unité de chacun d'eux, et je prends la moitié des restes; j'ai 1 et 2. Je prends maintenant autant de facteurs premiers que j'ai ici de nombres distincts, à savoir deux, et je multiplie entre eux ces facteurs premiers en les affectant des exposants 1 et 2; pourvu que ces facteurs premiers soient de la forme $4n+1$, j'aurai ainsi (en multipliant l'un par le carré de l'autre) un nombre satisfaisant à la question proposée.

Il est dès lors facile de trouver le nombre minimum qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Trouver un nombre qui soit somme de deux carrés d'autant de façons que l'on voudra.

Soit proposé de 10 façons; je prends tous les facteurs premiers du double 20 : j'ai 2.2.5. De chacun de ces nombres je retranche l'unité; il vient 1.1.4. J'aurai en conséquence à prendre trois nombres premiers de la forme $4n+1$, par exemple, les nombres 5, 13, 17; à cause de l'exposant 4, je prendrai la quatrième puissance de l'un de ces nombres, je la multiplierai par les deux autres, et j'aurai ainsi le nombre cherché.

Il est d'après cela facile de trouver le nombre minimum qui soit somme de deux carrés d'autant de façons qu'on le voudra.

Pour reconnaître *de combien de façons différentes un nombre donné est somme de deux carrés,* voici la méthode.

Soit proposé le nombre 325. Ses diviseurs premiers, de la forme $4n+1$, sont : 5 par son carré, 13 simplement. Je prends les exposants : 2. 1. J'ajoute leur produit à leur somme, ce qui fait 5; j'ajoute l'unité, ce qui fait 6; je prends la moitié, 3. Le nombre donné sera somme de deux carrés de *trois* façons différentes.

Si l'on a trois exposants, par exemple : 2.2.1, voici comment on opérera. Je prends le produit des deux premiers et j'ajoute leur somme, ce qui fait 8. Je multiplie 8 par le troisième et j'ajoute la somme des facteurs, ce qui fait 17. J'ajoute enfin l'unité, ce qui fait 18, dont la moitié est 9. Le nombre proposé sera somme de deux carrés de *neuf* façons différentes.

Si le dernier nombre dont on aurait à prendre la moitié se trouvait impair, on en retrancherait l'unité, et l'on prendrait la moitié du reste.

Le problème suivant peut encore être proposé : *Trouver un nombre entier dont la somme avec un entier donné fasse un carré et qui, d'autre part, soit l'hypoténuse d'autant de triangles rectangles que l'on voudra.*

La question est difficile. Si, par exemple, on demande de trouver un nombre qui soit 2 fois hypoténuse, et qui, augmenté de 2, fasse un carré, 2023 est un nombre satisfaisant à ces conditions, et il y en a une infinité d'autres, comme 3362, etc.

8. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 2.

« 1. Pour résoudre : $x^3+y^3=a^3-b^3$, on posera $x=\frac{3a^3b}{a^3+b^3}-b$, $y=a-\frac{3ab^3}{a^3+b^3}$. Pour que les deux nombres x, y soient positifs, il faut que l'on ait $a^3>2b^3$. »

En réitérant l'opération, il est facile de s'affranchir de la condition et de résoudre généralement aussi bien cette question que les suivantes, ce que n'ont pu faire ni Bachet, ni Viète lui-même.

Soient donnés les deux cubes 64 et 125; on en demande deux autres dont la somme soit égale à la différence des deux cubes donnés.

D'après le procédé donné par Bachet pour son problème 3, page suivante, on cherchera deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des deux donnés. Bachet a donné ces deux cubes, $\frac{15\,252\,992}{250\,047}$ et $\frac{125}{250\,047}$. Par construction, leur différence est égale à la différence des deux cubes donnés; mais, après les avoir trouvés par l'opération indiquée pour le problème 3, comme le double du moindre ne dépasse pas le plus grand, on peut les transporter dans les données du problème 1.

On aura ainsi deux cubes donnés, et on en cherchera deux autres dont la somme soit égale à la différence des donnés; la condition indiquée pour le problème 1 étant satisfaite, la solution s'obtiendra sans difficulté. Mais la différence des deux cubes trouvés par le problème 3 est égale à la différence des deux cubes primitivement donnés 64 et 125; ainsi rien n'empêche de construire deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés 64 et 125, ce qui sans doute étonnerait Bachet lui-même.

Bien plus, si l'on passe circulairement par les trois problèmes et qu'on réitère indéfiniment les opérations, on aura une infinité de couples de cubes satisfaisant à la même condition; en effet, après avoir trouvé en dernier lieu nos deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés, nous pouvons (problème 2) en chercher deux autres dont la différence soit égale à la somme de nos deux cubes, c'est-à-dire à la différence de ceux primitivement donnés; de la différence nous repasserons à la somme et ainsi de suite indéfiniment.

9. — Même commentaire.

« 2. Pour résoudre : $x^3 - y^3 = a^3 + b^3$, on posera $x = \frac{3ab^3}{a^3 - b^3} + a$, $y = \frac{3a^3b}{a^3 - b^3} - b$.

3. Pour résoudre : $x^3 - y^3 = a^3 - b^3$, on posera $x = \frac{3a^3b}{a^3 + b^3} - b$, $y = \frac{3ab^3}{a^3 + b^3} - a$.
Pour que x et y soient positifs, il faut que $a^3 < 2b^3$. »

La condition, imposée pour la solution de ce problème 3, n'est pas légitime, ainsi que je le montrerai en opérant comme pour le problème 1.

Bien plus, d'après ce qui précède, je résoudrai heureusement le problème suivant, dont Bachet a ignoré la solution :

Partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes, et cela d'une infinité de façons, en répétant continuellement les opérations, comme je l'ai indiqué ci-dessus.

Ainsi soit à trouver deux cubes dont la somme soit égale à celle des deux cubes 8 et 1. Je chercherai d'abord (problème 2) deux cubes dont la différence soit égale à la somme des donnés; je trouverai $\frac{8000}{343}$ et $\frac{4913}{343}$. Comme le double du moindre dépasse le plus grand, on est ramené au problème 3, d'où l'on passera au problème 1, et on aura dès lors la solution.

Si l'on en veut une seconde, on repassera par le problème 2 et ainsi de suite.

Pour montrer que la condition posée par le problème 3 n'est pas légitime, soit à trouver, étant donnés les deux cubes 8 et 1, deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des donnés.

Bachet dirait, sans doute, que le problème est impossible; je n'en ai pas moins trouvé, par ma méthode, les deux suivants dont la différence est $7 = 8 - 1$. Ces deux cubes sont $\frac{2\,024\,284\,625}{6\,128\,487}$ et $\frac{1\,981\,385\,216}{6\,128\,487}$, et leurs racines sont $\frac{1\,265}{183}$ et $\frac{1\,256}{183}$.

10. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 11.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3+y^3}{x+y} = a$, en supposant que a soit des formes p^2 ou $3p^2$. »

Cette condition doit être complétée de la façon que j'ai indiquée plus loin pour celle du problème suivant [Obs. 12]. Il n'y a pas à s'étonner que Bachet n'ait pas aperçu la méthode générale, qui est réellement difficile; mais il aurait au moins dû avertir le lecteur que celle qu'il donne est seulement particulière.

11. — Diophante, IV, 12.

« Résoudre : $x^3 - y^3 = x - y$. »

Si l'on cherche *deux bicarrés dont la différence soit égale à celle de leurs racines,* on pourra résoudre la question en employant l'artifice de ma méthode.

Qu'on cherche, en effet, deux bicarrés dont la différence soit un cube, et tels que la différence de leurs racines soit 1. On trouvera, par la première opération, les racines $-\frac{9}{22}$ et $\frac{13}{22}$. Le premier de ces deux nombres étant affecté du signe —, on réitérera l'opération suivant ma méthode, en égalant la première racine à $x - \frac{9}{22}$, la seconde à $x + \frac{13}{22}$, et l'on obtiendra ainsi des nombres positifs satisfaisant au problème.

12. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 12.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = a$, en supposant a des formes p^2 ou $3p^2$. »

La condition n'est pas légitime, parce qu'elle n'est pas générale. Il faut ajouter « ou que le nombre exprimant le rapport soit multiple d'un carré par un nombre premier de la forme $3n + 1$ (comme 7, 13, 19, 37, etc.), ou par un produit de nombres premiers de cette forme (comme sont les produits 21, 91, etc.) ». La démonstration et la solution du problème dépendent de ma méthode.

13. — Diophante, IV, 17.

« Résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 = \square$, $x_1^2 + x_2 = \square$, $x_2^2 + x_3 = \square$, $x_3^2 + x_1 = \square$. »

Ce problème peut, peut-être, se résoudre plus élégamment comme suit :

Posons $x_1 = x$, $x_2 = 2x + 1$, en sorte que $x_1^2 + x_2 = \square$. Pour x_3, choisissons arbitrairement le coefficient de x et le terme constant, de façon que $x_2^2 + x_3 = \square$; par exemple soit $x_3 = 4x + 3$.

On a ainsi satisfait à deux conditions; il faut encore que l'on ait

$$x_1 + x_2 + x_3 = \square \qquad \text{et} \qquad x_3^2 + x_1 = \square.$$

Mais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7x + 4, \qquad x_3^2 + x_1 = 16x^2 + 25x + 9.$$

On a donc une double équation où les termes constants sont carrés, dont la solution est facile par suite, en ramenant ces termes à être égaux à un même carré.

Par le même procédé, on peut étendre le problème à 4 nombres et même à autant que l'on voudra; il suffit de faire en sorte que la somme des termes indépendants de x, dans les expressions des divers nombres, fasse un carré; ce qui est très facile.

14. — Diophante, IV, 18.

« Résoudre : $x_1+x_2+x_3=\square$, $x_1^2-x_2=\square$, $x_2^2-x_3=\square$, $x_3^2-x_1=\square$. »

Le mode de raisonnement que j'ai employé pour la précédente question permet de résoudre également celle-ci et de l'étendre à autant de nombres que l'on voudra.

15. — Diophante, IV, 20.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_3x_1+1=\square$. »

Soit proposé de trouver trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré, et que, de plus, chacun de ces trois nombres eux-mêmes, augmenté de l'unité, fasse un carré.

J'ajouterai une solution de cette question, qui a déjà été traitée.

Soit une solution indéterminée du présent problème de Diophante, choisie de telle sorte que, pour x_1 et x_3, les termes indépendants de x, augmentés chacun d'une unité, fassent des carrés. Soient, par exemple, les trois nombres indéterminés :

$$x_1=\frac{169}{5184}x+\frac{13}{36}, \qquad x_2=x, \qquad x_3=\frac{7225}{5184}x+\frac{85}{36}.$$

Il est clair qu'ils fournissent une solution de ce problème IV, 20; il faut de plus maintenant satisfaire aux conditions

$$x_1+1=\square, \qquad x_2+1=\square, \qquad x_3+1=\square,$$

c'est-à-dire à une triple équation, qu'il sera facile de résoudre par ma méthode, le terme indépendant de x, après l'addition de l'unité, se trouvant carré dans chacune des expressions.

16. — Diophante, IV, 21.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_1x_3+1=\square$, $x_1x_4+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_2x_4+1=\square$, $x_3x_4+1=\square$. »

Cherchez d'abord trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré; soient, par exemple, les nombres 3, 1, 8.

Cherchez maintenant un quatrième nombre tel que son produit par chacun des trois nombres déjà trouvés fasse un carré après addition de l'unité. Soit x ce nombre; on aura

$$3x+1=\square, \qquad x+1=\square, \qquad 8x+1=\square,$$

triple équation dont la solution s'obtiendra par la méthode que j'ai inventée. Voir ma Note sur le problème VI, 24.

17. — Diophante, IV, 23.

« Résoudre : $x_1x_2x_3+x_1=\square$, $x_1x_2x_3+x_2=\square$, $x_1x_2x_3+x_3=\square$. »

Ce problème peut se résoudre non seulement sans le lemme de Diophante, mais même sans double équation.

Posons

$$x_1x_2x_3=x^2-2x, \qquad x_1=1, \qquad x_2=2x,$$

nous satisferons à deux des conditions du problème.

Pour obtenir x_3, il faut maintenant diviser $x_1x_2x_3$, c'est-à-dire x^2-2x, par x_1x_2, c'est-à-dire $2x$; il viendra $x_3=\frac{1}{2}x-1$, et, en l'ajoutant à $x_1x_2x_3$, nous aurons

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=\square.$$

Il faut d'ailleurs que la valeur de x dépasse 2, en raison des positions déjà faites; on formera donc la racine du carré $\square$, en retranchant de x un nombre arbitrairement choisi qui soit plus grand que 2. Le reste est évident.

18. — Commentaire de Bachet sur IV, 31.

« Bachet (proposition empirique) : Tout nombre est soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers. »

Bien plus, il y a une proposition très belle et tout à fait générale que j'ai été le premier à découvrir :

Tout nombre est : soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles;

Soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés;

Soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones;

et ainsi de suite indéfiniment, qu'il s'agisse d'hexagones, d'heptagones ou de polygones quelconques; cette merveilleuse proposition pouvant s'énoncer en général en raison du nombre des angles.

Je ne puis en donner ici la démonstration, qui dépend de nombreux et abstrus mystères de la Science des nombres; j'ai l'intention de consacrer à ce sujet un Livre entier et de faire accomplir ainsi à cette partie de l'Arithmétique des progrès étonnants au delà des bornes anciennement connues.

19. — Diophante, IV, 35.

« Résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1 x_2 + x_3 = \square$, $x_1 x_2 - x_3 = \square$. »

On peut opérer plus facilement comme suit : Partagez arbitrairement en deux nombres le donné 6; soient, par exemple, les parties 5 et 1. Divisez par le nombre donné, 6, le produit de ces parties, diminué de l'unité, c'est-à-dire 4; il vient $\frac{2}{3}$. Retranchez ce quotient tant de 5 que de 1; les deux restes $\frac{13}{3}$ et $\frac{1}{3}$ peuvent être pris pour les deux premières parties du nombre à partager; la troisième sera dès lors $\frac{4}{3}$.

20. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 44.

« Résoudre : $(x_1 + x_2 + x_3)x_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$; $(x_1 + x_2 + x_3)x_2 = \beta^2$; $(x_1 + x_2 + x_3)x_3 = \gamma^3$, avec la condition que α soit entier, x_1, x_2, x_3, β, γ pouvant être simplement rationels.

Si l'on pose $x_1 + x_2 + x_3 = x^2$ et $\beta = x^2 - z^2$, on arrive à la condition

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = 2z^2x^2 - \gamma^3 - z^4; \qquad \text{d'où} \qquad (2\alpha+1)^2 = 16z^2x^2 - 8\gamma^3 - 8z^4 + 1.$$

On résoudra en égalant cette dernière expression à $(4zx - \delta)^2$; mais α ne peut guère être obtenu entier qu'en prenant $\delta = 1$. »

Bachet n'a pas fait des essais suffisamment rigoureux. Prenons en effet [pour γ^3] un cube arbitraire dont la racine soit de la forme $3n + 1$.

Nous aurons, par exemple, à égaler $2x^2 - 344$ à un triangle $\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]$ et $16x^2 - 2751$ à un carré $[(2\alpha+1)^2]$; or on peut, si l'on veut, prendre pour racine de ce carré $4x - 3$, etc.

Rien n'empêche, en effet, de généraliser la méthode et de prendre au lieu de 3 un autre nombre impair tout à fait quelconque, sauf à choisir le cube en conséquence.

21. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 45.

« Diophante enseigne dans ce problème à traiter la *double équation*

$$ax + b = \square, \qquad a_1x + b_1 = \square,$$

pour le cas où a et a_1 sont différents et où d'ailleurs le rapport de a à a_1 n'est pas un carré, mais en supposant que b et b_1 soient des carrés inégaux; Bachet montre que la solution est également possible, b et b_1 étant quelconques : 1° si, en supposant $a > a_1$, le rapport de $ab_1 - ba_1$ à $a - a_1$ est carré; 2° si, avec la même hypothèse $a > a_1$, le rapport de $a_1b - b_1a$ a a_1 est carré. »

Mais que l'on propose, par exemple, la double équation

$$2x + 5 = \square, \qquad 6x + 3 = \square;$$

on pourra prendre les carrés $16 = 2x + 5$, $36 = 6x + 3$; et il y en a une infinité qui satisfont de même à la question. Il n'est pas d'ailleurs difficile de donner une règle générale pour les problèmes de ce genre, en sorte que les conditions posées par Bachet sont à peine dignes de lui, car on peut aisément étendre à une infinité de cas, bien plus à tous les cas possibles, ce qu'il n'a trouvé que pour deux cas seulement.

22. — Diophante, V, 3.

« Résoudre $x_1x_2+a=\square$, $x_2x_3+a=\square$, $x_3x_1+a=\square$, $x_1+a=\square$, $x_2+a=\square$, $x_3+a=\square$. »

De cette solution, il est facile de déduire celle de la question suivante :

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré.

Soient pris en effet, pour trois de ces nombres, ceux qu'on aura trouvés pour le problème de Diophante et qui satisferont dès lors, en outre, à la condition que chacun d'eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré. Soit $x+1$ le quatrième nombre à chercher; on aura une triple équation facile à résoudre par ma méthode. Voir la Note sur le problème VI, 24.

Nous aurons ainsi une solution de la question proposée par Bachet sur III, 12, et outre que le procédé est plus général, il a sur celui de Bachet cette supériorité que les trois premiers nombres, augmentés chacun du nombre donné, donnent des carrés.

Toutefois, je ne sais pas encore si le problème peut être résolu en posant la condition que le quatrième nombre, augmenté du donné, fasse également un carré; c'est une recherche qui reste à faire.

23. — Diophante, V, 8.

« Construire trois triangles rectangles numériques dont les aires soient égales. »

Mais peut-on trouver quatre ou même un plus grand nombre, allant jusqu'à l'infini, de triangles de même aire? Rien ne paraît s'opposer à ce que cette question soit possible; elle est donc à examiner plus profondément.

J'ai résolu le problème; bien plus, pour un triangle donné quelconque, j'en fournis une infinité ayant la même aire. Soit, par exemple, 6 l'aire du triangle 3.4.5, en voici un autre de même aire : $\frac{7}{10}\cdot\frac{120}{7}\cdot\frac{1201}{70}$, ou, si l'on veut le même dénominateur : $\frac{49}{70}\cdot\frac{1200}{70}\cdot\frac{1201}{70}$.

Voici le procédé qui peut, sans exceptions, s'appliquer indéfiniment. Soit un triangle quelconque, d'hypoténuse z, de base b, de hauteur d. On en déduira un autre triangle non semblable, mais de même aire, en formant ce nouveau triangle avec les nombres z^2 et $2bd$, sauf à diviser par $2zb^2 - 2zd^2$ les expressions du quatrième degré qui représentent les côtés. Le triangle ainsi obtenu aura toujours une aire égale à celle du triangle dont il dérive.

Du second triangle ainsi déterminé, on en déduira, par la même méthode, un troisième; de ce troisième un quatrième; du quatrième un cinquième, et on aura ainsi une série indéfinie de triangles dissemblables et de même aire.

Pour que l'on ne doute pas qu'il soit possible d'en donner plus de trois, à ceux de Diophante : 40.42.58, 24.70.74, 15.112.113, j'en ajoute un quatrième dissemblable et de même aire : hypoténuse $\frac{1412881}{1189}$; base $\frac{1412880}{1189}$; hauteur $\frac{1681}{1189}$.

Si l'on réduit tous ces nombres au même dénominateur, on aura, en entiers, les quatre triangles suivants de même aire :

1°	47 560,	49 938,	68 962;
2°	28 536,	83 230,	87 986;
3°	17 835,	133 168,	134 357;
4°	1 681,	1 412 880,	1 412 881.

On pourra en trouver une infinité de même aire en poursuivant l'application du procédé, et dès lors étendre le problème suivant de Diophante au delà des bornes où il l'a restreint.

Voici, obtenu par un autre procédé, un triangle dont l'aire est le sextuple d'un carré, comme celle du triangle 3.4.5 :

$$2\,896\,804, \quad 7\,216\,803, \quad 7\,776\,485.$$

24. — Diophante, V, 9.

« Trouver trois nombres tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme des trois nombres, fasse un carré. »

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, il est clair que je puis résoudre le problème :

Trouver autant de nombres que l'on voudra, tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme de tous ces nombres, fasse un carré.

Bachet n'a probablement pas connu la solution de ce problème; sans quoi il aurait généralisé la question de Diophante, comme il l'a fait pour IV, 31 et ailleurs.

25. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 12.

« Doutes sur la question de savoir si un nombre qui, comme 21, n'est ni carré, ni somme de deux carrés entiers, peut être partagé en deux carrés. »

Le nombre 21 ne peut être partagé en deux carrés fractionnaires. Je puis le démontrer très facilement; plus généralement aucun nombre divisible par 3, mais non par 9, ne peut être somme de deux carrés, soit entiers, soit fractionnaires.

26. — Même Commentaire.

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème :

$$x+y=1, \quad a+x=\square, \quad a+y=\square. \text{ »}$$

Voici la vraie condition, c'est-à-dire celle qui est générale et qui exclut tous les nombres ne pouvant être choisis :

Il faut que le nombre donné ne soit pas impair, et que la somme de son double et de l'unité, après division par le plus grand carré qui y entre comme facteur, ne puisse pas être divisée par un nombre premier qui soit inférieur d'une unité à un multiple de 4.

27. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 14.

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème :

$$x+y+z=1, \quad a+x=\square, \quad a+y=\square, \quad a+z=\square. »$$

La condition posée par Bachet n'est, elle-même, pas satisfaisante ; bien plus, il n'a pas fait ses essais avec assez de soin, car sa règle n'exclut pas le nombre 37, qui ne peut cependant être pris.

Voici comment on doit concevoir la véritable condition :

Prenons deux progressions géométriques suivant la raison 4, et dont les premiers termes soient 1 et 8 ; superposons-en les termes comme suit :

1,	4,	16,	64,	256,	1024,	4096,	etc.,
8,	32,	128,	512,	2048,	8192,	32768,	etc.

Je considère d'abord le premier terme de la seconde progression, 8 ; il faut que le nombre donné ne soit ni le double de 1 (terme superposé à 8), ni égal à la somme d'un multiple de 8 et du double de 1.

Je considère en second lieu le second terme de la seconde progression, 32, et je prends le double du terme 4 superposé ; j'ajoute à ce double, 8, la somme des termes qui précèdent dans la même progression, celle du dessus (dans ce cas, cette somme se réduit à l'unité) ; j'ai ainsi 9.

Prenant donc les nombres 32 et 9, je dis que le nombre donné ne doit être ni 9, ni la somme de 9 et d'un multiple de 32.

Je considère maintenant le troisième terme de la seconde progression, 128 ; je prends le double, 32, du nombre 16 superposé ; j'ajoute la somme des termes antécédents dans la même progression du haut, c'est-à-dire 1 et 4 ; j'ai 37. Prenant donc les deux nombres 128 et 37, je dis que le nombre donné ne doit être ni 37, ni la somme de 37 et d'un multiple de 128.

Je considère encore le quatrième terme de la seconde progression; le même procédé me donne les nombres 512 et 149. Il faudra donc que le nombre donné ne soit ni 149, ni la somme de 149 et d'un multiple de 512.

Voilà la méthode uniforme dont l'application doit se poursuivre indéfiniment, et qui n'a pas été indiquée par Diophante dans sa généralité, ni reconnue par Bachet lui-même; les essais de ce dernier ont même été fautifs, non seulement pour le nombre 37, comme je l'ai déjà indiqué, mais aussi pour 149 et les autres, qui tombent également dans les limites des essais qu'il déclare avoir faits [jusqu'à 325].

28. — Diophante, V, 19.

« Résoudre :

$$(x_1+x_2+x_3)^3-x_1=\alpha_1^3,\qquad (x_1+x_2+x_3)^3-x_2=\alpha_2^3,\qquad (x_1+x_2+x_3)^3-x_3=\alpha_3^3. \text{ »}$$

Ou bien le texte grec est corrompu, ou bien Diophante n'a pas exprimé le moyen par lequel il a obtenu sa solution. Bachet croit qu'il a été aidé par le hasard, ce que je n'admets guère, car je pense que sa méthode n'est pas difficile à retrouver.

Il s'agit de trouver un carré plus grand que 2, mais plus petit que 3, et dont la différence avec 3 se partage en trois cubes [1].

Prenons, pour racine du carré cherché, une expression composée d'un terme en x et de -1, par exemple : $x-1$. Si je retranche de 3 le carré de cette expression, il reste : $2+2x-x^2$, qu'il s'agit de décomposer en une somme de trois cubes de façon que l'équation se réduise à deux termes de degré consécutif.

On peut y arriver d'une infinité de façons : soit $1-\frac{1}{3}x$ la racine de l'un des cubes; pour celle du second, prenons $1+x$, afin que la

(1) Si, d'après la marche de Diophante, on pose $x_1+x_2+x_3=z$, $\alpha_1=\frac{z}{m_1}$, $\alpha_2=\frac{z}{m_2}$, $\alpha_3=\frac{z}{m_3}$, on arrive à la condition $z^2\left(3-\frac{1}{m_1^3}-\frac{1}{m_2^3}-\frac{1}{m_3^3}\right)=1$. Diophante suppose $\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}+\frac{1}{m_3^3}<1$; le carré $\frac{1}{z^2}$ doit donc satisfaire aux conditions indiquées par Fermat.

somme de ces deux cubes donne $2x$ pour le terme du premier degré; la racine du troisième ne devra comprendre qu'un terme en x, qu'il faudra d'ailleurs affecter du signe $-$, pour que la valeur de x reste dans les limites assignées; mais il ne sera pas difficile de choisir le coefficient de ce terme en x de manière que la solution tombe effectivement entre les limites en question.

Cela fait, il est clair que notre premier cube sera plus petit que l'unité, comme nous le désirons; au contraire, le second est plus grand, et le troisième est affecté du signe $-$; il s'ensuit qu'il faut trouver deux cubes dont la somme soit égale à la différence du second et du troisième; nous arrivons ainsi, comme Diophante, à sa seconde opération.

« Mais nous avons », dit-il « dans les Porismes, que la différence de deux cubes quelconques est aussi la somme de deux cubes. »

Ici Bachet est de nouveau embarrassé et, comme les Porismes de Diophante lui font défaut, il soutient qu'il y a là un problème qui n'est possible que sous une certaine condition; il enseigne en effet à partager en deux cubes la différence de deux cubes, mais seulement lorsque le plus grand des cubes donnés surpasse le double du plus petit, et il avoue franchement qu'il ignore comment on peut en général partager en deux cubes la différence de deux cubes quelconques. J'ai exposé plus haut, à propos du problème IV, 2, la solution générale de cette question et des autres relatives au même sujet.

29. — Diophante, V, 24.

« Trouver trois carrés tels que le produit des trois, plus l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des bases au produit des hauteurs soit carré. »

Voici comment je restitue et j'explique la méthode de Diophante, qui n'a pas été comprise par Bachet.

Ayant pris comme premier triangle : 3, 4, 5, pour lequel le produit des côtés de l'angle droit est 12, Diophante dit : « On est ramené à chercher deux triangles tels que le produit des côtés de l'angle droit de l'un soit 12 fois le produit des côtés de l'angle droit de l'autre. » La raison en est que si l'on multiplie entre eux ces deux produits, on aura un nombre plan semblable à 12, et que dès lors, en multipliant ce dernier nombre par 12, on aura un carré, ce que demande le problème proposé.

Diophante continue : « Or l'aire de l'un de ces triangles sera 12 fois celle de l'autre », ce qui est évident de soi-même. « Mais au lieu de 12 fois, on peut prendre 3 fois »; en effet, 3 étant le quotient de 12 par le carré 4, la multiplication générale des bases et des hauteurs donnera toujours un carré, puisque, si l'on divise un carré par un carré, le quotient est encore un carré.

La suite du texte de Diophante ne donne pas la solution cherchée, mais je la restituerai comme suit :

Dans le cas proposé, on formera l'un des deux triangles des nombres 7 et 2, l'autre des nombres 5 et 2. Le premier triangle aura son aire triple de celle du second, et leur couple satisfera à la question.

Au reste, pour trouver deux triangles rectangles dont l'aire soit dans un rapport donné, voici la règle générale.

Soit $\frac{r}{s}$ le rapport donné, en supposant $r > s$. On formera le plus grand triangle des nombres $2r + s$ et $r - s$, le plus petit des nombres $r + 2s$ et $r - s$.

On peut encore former les deux triangles des manières suivantes :

Le premier de $2r - s$ et $r + s$, le second de $2s - r$ et $r + s$;

Le premier de $6r$ et $2r - s$, le second de $4r + s$ et $4r - 2s$;

Le premier de $r + 4s$ et $2r - 4s$, le second de $6s$ et $r - 2s$.

On peut déduire de ce qui précède une méthode pour trouver trois triangles rectangles dont les aires soient proportionnelles à trois nombres donnés, pourvu que la somme de deux de ces nombres soit quadruple du troisième.

Soient donnés, par exemple, les nombres r, s, t, et supposons $r + t = 4s$. On formera les trois triangles comme suit : le premier de $r + 4s$ et $2r - 4s$, le second de $6s$ et $r - 2s$, le troisième de $4s + t$ et $4s - 2t$. (J'ai admis $r > t$.)

On peut également en tirer un moyen de trouver trois triangles rectangles en nombres, tels que leurs aires forment un triangle rectangle.

On ramènera en effet la question à trouver un triangle pour lequel la somme de la base et de l'hypoténuse soit quadruple de la hauteur. Ce problème est facile, et le triangle cherché sera semblable au suivant : 17, 15, 8. Quant aux trois triangles, les nombres générateurs seront : pour le premier, 49 et 2; pour le second, 47 et 2; pour le troisième, 48 et 1.

Enfin on aura également le moyen de trouver trois triangles dont les aires soient proportionnelles à trois carrés donnés, en supposant que la somme de deux de ces carrés soit quadruple du troisième. On pourra aussi trouver de même trois triangles ayant leurs aires égales; enfin nous pouvons construire d'une infinité de façons deux triangles rectangles, ayant leurs aires dans un rapport donné, en multipliant l'un des termes du rapport ou les deux termes par des carrés donnés, etc.

30. — Diophante, V, 25.

« Trouver trois carrés, tels que le produit des trois, moins l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des hypoténuses au produit des hauteurs soit carré. »

De même que pour le précédent, Bachet a traité ce problème en laissant de côté la méthode de Diophante, qui reste donc à éclaircir et à expliquer. Il s'agit à cet effet de trouver deux triangles rectangles tels que le produit de l'hypoténuse et de la base dans l'un de ces triangles soit dans un rapport donné avec le même produit pour l'autre triangle.

Cette question m'a longtemps tourmenté, et quiconque essayera de la résoudre pourra reconnaître qu'elle est vraiment difficile; j'ai enfin découvert une méthode pour la solution générale.

Soit à chercher deux triangles tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur, dans l'un de ces triangles, soit double du même produit dans l'autre.

Soient a et b les nombres générateurs de l'un des triangles, a et d ceux de l'autre.

Pour le premier, le produit de l'hypoténuse et de la hauteur sera $2ba^3 + 2b^3a$;

Pour le second, le même produit sera $2da^3 + 2d^3a$. On demande que le premier de ces produits soit double du second : par conséquent

$$ba^3 + b^3a = 2da^3 + 2d^3a.$$

Divisant tous les termes par a,

$$ba^2 + b^3 = 2da^2 + 2d^3;$$

transposant :

$$2d^3 - b^3 = ba^2 - 2da^2.$$

Pour résoudre la question, il faut donc que le quotient de $2d^3 - b^3$ par $b - 2d$ soit un carré.

Il s'agit par suite de trouver deux nombres, b et d, tels que l'excès du double du cube de l'un sur le cube de l'autre donne un carré, si on le divise ou si on le multiplie (car cela revient au même) par l'excès du double du second sur le premier.

Soient $x + 1$ l'un de ces nombres et 1 l'autre. L'excès du double du cube du premier sur le cube du second est $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$; l'excès du double du second nombre sur le premier est $1 - x$. Le produit de $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$ par $1 - x$ doit être un carré. Or ce produit est $1 + 5x - 4x^3 - 2x^4$, qu'on peut égaler au carré de $1 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{8}x^2$. Le reste n'offre plus de difficulté.

Pour étendre cette méthode au cas d'un rapport quelconque, il suffira de prendre, pour l'un des nombres, la somme de x et de l'excès du plus grand terme du rapport sur le moindre; pour l'autre nombre, ce même excès; c'est ce que nous avons fait au reste pour le rapport de 2 à 1. De cette façon en effet le terme indépendant de x dans le produit final sera un carré, et l'équation pourra se traiter facilement; sa solution conduira à deux nombres représentant b et d et l'on remontera ainsi au problème primitif.

En revoyant ce que j'ai écrit ci-dessus sur cette question de Diophante, j'ai été sur le point de tout effacer parce qu'en réalité ce n'est pas elle qui se ramène au problème dont j'ai exposé la solution; cependant, si je me suis trompé en réduisant une question à une autre, cette dernière n'en est pas moins valablement résolue; mon travail a donc été plutôt mal placé que perdu et je laisse tel quel ce que j'ai écrit dans la marge.

Quant à la question même de Diophante, je l'ai soumise à un nouvel examen et en employant toutes les ressources de ma méthode, j'ai enfin obtenu la solution générale; toutefois je ne vais donner qu'un exemple, dont les nombres montreront suffisamment par eux-mêmes que ce n'est point le hasard, mais une méthode régulière qui a permis de les trouver.

Diophante propose en fait de chercher deux triangles rectangles, tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur pour le premier soit au même produit pour le second dans le rapport de 5 à 1.

Voici deux triangles satisfaisant à

	Premier triangle.	Second triangle.
Hypoténuses........	48 543 669 109,	42 636 752 938,
Bases.............	36 083 779 309,	41 990 695 480,
Hauteurs..........	32 472 275 580,	7 394 200 038.

31. — Diophante, V, 30.

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 + a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 + a = \square$, $x_3^2 + x_1^2 + a = \square$. »

Grâce à ce problème, nous obtenons la solution d'une question qui, autrement, paraîtrait très difficile : *Étant donné un nombre, en trouver quatre tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés.*

Soit donné le nombre 15; on commencera par chercher, d'après la solution de Diophante, trois carrés tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés. Soient 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$ ces trois carrés; on prendra, pour le premier des quatre nombres cherchés : $x^2 - 15$; pour le second : $6x + 9$ (9 étant l'un des carrés trouvés et 6, coefficient de x, le double de la racine de ce carré); d'après le même procédé, on prendra pour le troisième nombre : $\frac{1}{5}x + \frac{1}{100}$, et pour le quatrième : $\frac{46}{15}x + \frac{529}{225}$.

Grâce à ces positions, on satisfait à trois des conditions de l'énoncé; car si l'on fait la somme du premier nombre et de l'un quelconque des trois suivants, et que l'on ajoute 15, on a un carré.

Il faut encore qu'on ait des carrés en ajoutant 15 soit à la somme du second et du troisième, soit à celle du troisième et du quatrième, soit à celle du second et du quatrième. Nous aurons ainsi une triple équation, qui sera facile à traiter, parce que, grâce à la construction dont nous avons emprunté l'artifice au problème de Diophante, dans chacune des expressions à égaler à un carré, le terme constant sera un carré, et qu'il n'y aura en outre qu'un terme en x. Voir à ce sujet ce que j'ai dit sur le problème VI, 24.

32. — Diophante, V, 31.

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 - a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 - a = \square$, $x_3^2 + x_1^2 - a = \square$. »

Un artifice analogue à celui que nous avons employé sur la précédente question, pour trouver quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, augmentées d'un nombre donné, fassent des carrés, peut servir pour passer de la présente question de Diophante à la recherche de quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, diminuées d'un nombre donné, fassent des carrés.

On prendra pour le premier nombre : $x^2 +$ le nombre donné; pour le second, on ajoutera le premier carré trouvé d'après Diophante à un terme en x ayant pour coefficient le double de la racine de ce carré; etc. Le reste est évident.

33. — Diophante, V, 32.

« Résoudre : $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \square$.

Pourquoi ne cherche-t-il pas deux bicarrés dont la somme soit un carré? C'est que ce problème est impossible, comme notre méthode de démonstration peut le mettre hors de doute.

34. — Diophante, VI, 3.

« Trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré. » — Viète avait supposé à tort, comme le remarque Bachet, que le nombre donné devait être la somme de deux carrés. Dans les problèmes suivants, l'aire doit être diminuée ou retranchée d'un nombre donné.

Voici sans doute l'origine de l'erreur de Viète : cet illustre savant aura égalé l'aire à la différence de deux bicarrés (¹), comme $x^4 - 1$, pour en faire un carré, en y ajoutant le quintuple d'un carré, 5 étant le nombre donné.

Ce dernier nombre étant somme de deux carrés, on peut en effet trouver un carré, dont le quintuple, diminué d'une unité, fasse un carré. Prenons pour racine de ce carré à quintupler $x + 1$ (le coefficient de x pourrait être pris différent de l'unité); le quintuple du carré sera $5x^2 + 10x + 5$; en ajoutant l'aire, $x^4 - 1$, on a la somme $x^4 + 5x^2 + 10x + 4$, à égaler à un carré, ce qui est aisé, le terme indépendant de x étant carré, par suite de l'hypothèse ajoutée comme condition.

Mais Viète n'a pas vu que le problème peut se résoudre tout aussi bien en prenant pour l'aire, non pas $x^4 - 1$, mais $1 - x^4$; car alors la question se ramène immédiatement à faire que le nombre donné, 5, 6, ou tout autre quelconque, multiplié par un carré, fasse un autre carré, après addition de l'unité; ce qui peut se résoudre très facilement et sans exception, puisque l'unité est un carré.

J'ai résolu cette question, ainsi que les deux suivantes, par une méthode particulière, qui permet, si nous cherchons, par exemple, un triangle dont l'aire, augmentée de 5, fasse un carré, de donner un tel triangle en nombres minimi : $\frac{9}{3}$, $\frac{40}{3}$, $\frac{41}{3}$; l'aire est 20, et en ajoutant 5, donne le carré 25.

(¹) C'est effectivement la marche que suit Diophante, et qui revient à supposer carré le rapport des deux nombres générateurs du triangle. La solution de Viète (*Zetet.*, V, 9) est présentée sous forme synthétique et correspond à une combinaison particulière : le nombre donné étant supposé de la forme $r^2 + s^2$, il prend pour nombres générateurs $(r+s)^2$ et $(r-s)^2$ et divise les côtés du triangle par $2(r+s)(r-s)^2$.

Mais ce n'est pas ici la place de développer le principe et l'emploi de cette méthode; la marge n'y suffirait pas, car j'aurais bien des choses à dire à ce sujet.

35. — Diophante, VI, 6.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Ce problème et les suivants peuvent être résolus autrement :

Qu'on forme, pour celui-ci, un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la somme du nombre donné et de l'unité, les quotients constitueront le triangle cherché.

36. — Diophante, VI, 7.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Qu'on forme un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la différence du nombre donné et de l'unité, on aura le triangle cherché.

Au reste, cette question est susceptible d'une infinité de solutions, par le procédé qui nous permet d'en trouver indéfiniment aux doubles équations de cette sorte; j'ai indiqué plus bas l'emploi de ce procédé, sur la question 24.

Bien plus, on aura de même une infinité de solutions pour les quatre questions suivantes, ce qui n'a été reconnu ni par Diophante, ni par Bachet. Mais pourquoi ni l'un ni l'autre n'ont-ils pas ajouté le problème que voici ?

Trouver un triangle rectangle, tels que l'un des côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un nombre donné.

Ils semblent bien n'en avoir pas connu la solution, parce qu'elle n'est pas immédiatement fournie par la double équation; cependant on peut la trouver aisément avec notre méthode.

Ce troisième cas peut être de même ajouté aux questions suivantes.

37. — Diophante, VI, 8 et 9.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

38. — Diophante, VI, 10 et 11.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme de l'hypoténuse et d'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

On ajoutera de même le suivant aux commentaires de Bachet (1).

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

39. — Diophante, VI, 13.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Diophante ne donne, comme satisfaisant à ce problème, que des triangles d'une seule espèce; notre méthode fournit une infinité de triangles d'espèces différentes, lesquelles dérivent successivement de la solution de Diophante.

Soit, en effet, déjà trouvé le triangle 3.4.5 satisfaisant à cette condition « que le produit des deux côtés de l'angle droit fasse un carré,

(1) « Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de l'hypoténuse, fasse un nombre donné. »

si on lui ajoute le produit du plus grand de ces deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle ». Il s'agit d'en déduire un autre jouissant de la même propriété.

Soient 4 le plus grand côté de l'angle droit du triangle cherché et $3+x$ le plus petit. Le produit des deux côtés de l'angle droit, si on lui ajoute le produit du plus grand des deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle, fera $36-12x-8x^2$, expression qu'il faut égaler à un carré. D'un autre côté, les côtés 4 et $3+x$ étant ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, la somme de leurs carrés doit faire un carré; or cette somme fait $25+6x+x^2$, seconde expression qu'il faut aussi égaler à un carré.

On a donc une double équation, qu'il est facile de résoudre, savoir

$$36-12x-8x^2=\square, \qquad 25+6x+x^2=\square.$$

40. — Diophante, VI, 14.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Avec notre méthode, on pourra résoudre la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel que chacun des deux côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un carré.

41. — Diophante, VI, 15 et 17.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée (augmentée) soit de l'hypoténuse, soit de l'un des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré. »

On peut, avec notre méthode, essayer la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel qu'en retranchant l'aire, soit de l'hypoténuse, soit de l'un des côtés de l'angle droit, on ait toujours un carré.

42. — Diophante, VI, 19.

« Trouver un triangle rectangle, tel que le périmètre en soit un cube et que la somme de l'aire et de l'hypoténuse fasse un carré.

» ... Il faut trouver un carré qui, augmenté de 2, fasse un cube.... »

Peut-il y avoir, en nombres entiers, un autre carré que 25 qui, augmenté de 2, fasse un cube? Cela paraît certainement au premier abord difficile à discuter; cependant, je puis prouver, par une démonstration rigoureuse, que 25 est bien le seul carré entier qui soit inférieur à un cube de deux unités. En nombres fractionnaires, la méthode de Bachet fournit une infinité de tels carrés, mais la théorie des nombres entiers, qui est très belle et très subtile, n'a pas été connue jusqu'à présent, ni par Bachet, ni par aucun auteur dont j'aie vu les écrits.

43. — Commentaire de Bachet sur Diophante, VI, 24.

« Ce commentaire est consacré à la théorie de la *double équation*. »

Là où ne suffisent pas les *équations doubles* ou διπλοισότητες, il faut recourir à des *équations triples* ou τριπλοισότητες, découverte qui m'appartient et qui conduit à la solution d'une foule de très beaux problèmes.

Soit, par exemple, à égaler à des carrés les expressions

$$x+4,\quad 2x+4,\quad 5x+4,$$

il y a là une *équation triple* qu'il est aisé de résoudre par l'intermédiaire d'une *équation double*.

Si, en effet, on substitue à x une expression qui, augmentée de 4, fasse un carré, par exemple x^2+4x, les trois expressions ci-dessus à égaler à des carrés deviendront

$$x^2+4x+4,\quad 2x^2+8x+4,\quad 5x^2+20x+4.$$

La première est un carré par construction; il reste donc à satisfaire aux conditions

$$2x^2+8x+4=\square,\qquad 5x^2+20x+4=\square,$$

c'est-à-dire à une *équation double* qui, à la vérité, ne fournira qu'une solution unique, mais de cette solution on pourra en tirer une autre, de cette seconde une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

A cet effet, lorsqu'on aura trouvé une valeur pour x, on substituera à x le binome formé de x plus la valeur qui vient d'être obtenue. Ce procédé fournira une infinité de solutions dérivant chacune de la précédente et venant s'ajouter aux antérieures.

C'est grâce à cette invention que nous pouvons donner une infinité de triangles de même aire, ce que Diophante semble n'avoir pas su faire, comme il ressort de son problème V, 8, où il cherche seulement trois triangles de même aire pour résoudre le problème suivant avec trois inconnues; mais cette dernière question, d'après la découverte qui m'est due, peut être étendue à un nombre indéfini d'inconnues.

44. — Même Commentaire.

A ce traité des *équations doubles*, nous pourrions faire de nombreuses additions sur des points ignorés des anciens et aussi bien des modernes. Mais il suffira, pour établir l'importance de notre méthode et en montrer l'usage, de résoudre ici la question suivante, dont la difficulté est incontestable.

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que l'hypoténuse soit un carré, ainsi que la somme des côtés de l'angle droit.

Le triangle cherché est représenté par les trois nombres suivants :

4 687 298 610 289, 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520,

et il est formé des deux nombres 2 150 905 et 246 792.

J'ai, par une autre méthode, trouvé la solution de cette autre question :

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que le carré de la différence des côtés de l'angle droit, moins le double carré du plus petit de ces côtés, fasse un carré.

Le triangle 1525, 1517, 156, formé des nombres 39 et 2, est un de ceux qui satisfont à la question.

J'ajoute d'ailleurs avec confiance que les deux triangles ci-dessus sont les petits en nombres entiers qui satisfassent aux questions proposées.

Voici quelle est ma méthode : Cherchez, suivant le procédé ordinaire, la solution de la question proposée. Si, après l'achèvement des calculs, l'opération n'aboutit pas, parce que la valeur à donner à l'inconnue se trouve affectée du signe — et doit être regardée comme plus petite que zéro, j'affirme hardiment qu'il ne faut pas désespérer et rester à bayer, comme dit Viète, mais comme il l'a fait après les anciens analystes; il faut au contraire essayer de nouveau la question en substituant à l'inconnue le binome x moins le nombre trouvé dans la première opération comme valeur affectée du signe de soustraction. On aura ainsi une nouvelle équation qui conduira à une solution en nombres vrais.

C'est par ce moyen que j'ai résolu les deux questions ci-dessus; autrement elles sont très difficiles. J'ai de même montré qu'une somme de deux cubes peut être décomposée en deux autres cubes, et j'ai donné la construction qui peut nécessiter la réitération de l'opération jusqu'à trois fois; il arrive en effet souvent que la vérité cherchée oblige l'analyste le plus habile et le plus industrieux à recommencer plusieurs fois le calcul, ainsi que l'expérience le fera aisément reconnaître.

45. — Problème 20 de Bachet sur Diophante, VI, 26.

« Bachet. — Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit un nombre donné. »

L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.

Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert; je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation; mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux dans la science des nombres.

Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.

Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.

La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

Par le même procédé, j'ai découvert et démontré qu'il n'y a aucun nombre triangulaire, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

46. — Commentaire de Bachet sur Diophante Nomb. polyg. 9.

« Trouver un polygone, le côté en étant donné, et inversement. »

Je mettrai ici, sans démonstration, une proposition très belle et très remarquable que j'ai découverte :

Dans la progression naturelle commençant à l'unité, le produit d'un nombre quelconque par le nombre immédiatement supérieur fait le double du triangle du premier nombre; si le multiplicateur est le triangle du nombre immédiatement supérieur, on a le triple de la pyramide du premier nombre; si c'est la pyramide du nombre immédiatement supérieur, on a le quadruple du triangulotriangulaire du premier nombre; et ainsi de suite indéfiniment, suivant une règle uniforme et générale.

J'estime qu'on ne peut énoncer sur les nombres de théorème qui soit plus beau ou plus général. Je n'ai ni le temps ni la place d'en mettre la démonstration sur cette marge.

47. — Bachet, Appendice, II, 27.

« $1 = 1^3$, $\quad 3 + 5 = 2^3$, $\quad 7 + 9 + 11 = 3^3$, $\quad 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, $\quad \ldots$ »

Voici comment j'énoncerai cette proposition d'une façon plus générale :

Dans toute progression constitutive de polygone, l'unité constitue la première *colonne;* la somme des deux nombres suivants, diminuée du premier triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la seconde *colonne;* la somme des trois nombres suivants, diminuée du second triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la troisième *colonne;* et ainsi de suite indéfiniment, suivant la même loi [1].

[1] Soit la progression arithmétique commençant à l'unité, et de raison $k-2$: 1, $1+(k-2)$, $1+2(k-2)$, $\ldots$, $1+(n-1)(k-2)$, $1+n(k-2)$, $\ldots$; le $n^{\text{ième}}$ poly-

48. — Bachet, Appendice, II, 31.

$$« \ a^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \Sigma_1^n (na)^3. \ »$$

Il suit de là que le produit du cube du plus grand nombre $[(na)^3]$ par le nombre des termes $[n]$ est plus petit que le quadruple de la somme des cubes $[\Sigma_1^n (na)^3]$.

gone de k angles est la somme des n premiers termes

$$P_n^k = \frac{n}{2}[n(k-2)-(k-4)] = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2}.$$

Si, dans la même progression, on désigne par Σ_m la somme des m termes qui suivent les $\frac{m(m-1)}{2}$ premiers, on aura

$$\Sigma_m = P^k_{\frac{m(m+1)}{2}} - P^k_{\frac{m(m-1)}{2}} = m + \frac{k-2}{2}m(m^2-1).$$

Dès lors, d'après Fermat, la $m^{\text{ième}}$ *colonne*, terme qu'il a forgé :

$$C_m = \Sigma_m - (k-4)\frac{m(m-1)}{2} = m\left[m + \frac{m(m-1)(k-2)}{2}\right];$$

c'est le produit par m du polygone ayant m pour côté.

En supposant $k=4$, le polygone ayant m pour côté devient le carré m^2, et la colonne $C_m = m^3$; on retrouve donc comme cas particulier le théorème énoncé par Bachet et qui était déjà connu dans l'antiquité.