# NOUVEAU TRAITEMENT EN ANALYTIQUE

DES

# INCONNUES SECONDES ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La réduction aux premières des inconnues secondes et d'ordre supérieur, opération de la plus haute importance en Algèbre, trouve son fondement dans la seule proportion de la double équation, à réitérer autant de fois qu'il est besoin, ainsi que le montre la marche elle-même de la question.

Soit proposé

$$a^3 + e^3 = z^{\text{III}} \qquad \text{et} \qquad ba + e^2 + de = n^2.$$

Pour ramener la seconde inconnue à la première, voici les règles :

Faites passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre la seconde inconnue. Ainsi, dans l'exemple choisi,

$$\begin{array}{llll} \text{de} & a^3 + e^3 = z^{\text{III}}, & \text{tirez :} & z^{\text{III}} - a^3 = e^3; \\ \text{de} & ba + e^2 + de = n^2, & & n^2 - ba = e^2 + de. \end{array}$$

De la sorte dans chaque équation les termes en $e$, c'est-à-dire ceux où entre la seconde inconnue, constituent un des membres de l'équation.

Si cette équation double est ramenée à une proportion, on aura

$$z^{\text{III}} - a^3 : e^3 :: n^2 - ba : e^2 + de.$$

En égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, tous les termes seront divisibles par $e$, la seconde inconnue, ce qui est évident, puisque $e$ figure dans le second et le quatrième membre de la proportion.

On aura

$$z^{\text{III}}e^2 - a^3e^2 + z^{\text{III}}de - a^3de = n^2e^3 - bae^3.$$

Divisez par $e$ jusqu'à ce qu'un terme soit entièrement débarrassé de $e$ :

$$z^{\text{III}}e - a^3e + z^{\text{III}}d - a^3d = n^2e^2 - bae^2.$$

Cela fait, cette nouvelle équation sera, par rapport à la seconde inconnue, d'un degré moins élevé que la plus haute des deux proposées en premier lieu. On voit en effet que dans la plus haute des deux premières proposées entre $e^3$, dans cette dernière, le terme le plus élevé par rapport à $e$ est en $e^2$.

Il ne faut pas s'arrêter ici, mais réitérer la proportion sur la double équation, jusqu'à ce qu'on ait ramené la seconde inconnue au premier degré, afin d'éviter tout radical.

Préparons donc cette dernière équation de la manière prescrite et formons un membre de l'équation avec tous les termes en $e$, quels qu'ils soient; on aura

$$z^{\text{III}}d - a^3d = n^2e^2 - bae^2 - z^{\text{III}}e + a^3e.$$

Des deux premières équations, la moins élevée donne, comme nous l'avons dit :

$$n^2 - ba = e^2 + de.$$

Ramenez encore cette double équation à une proportion

$$z^{\text{III}}d - a^3d : n^2e^2 - bae^2 - z^{\text{III}}e + a^3e :: n^2 - ba : e^2 + de.$$

Égalons le produit des moyens à celui des extrêmes; tous les termes pourront être divisés par $e$, comme on l'a montré. On aura

$$\begin{aligned} &z^{\text{III}}de^2 + z^{\text{III}}d^2e - a^3de^2 - a^3d^2e \\ &\quad + n^4e^2 - n^2bae^2 - n^2z^{\text{III}}e + n^2a^3e - ban^2e^2 + b^2a^2e^2 = bz^{\text{III}}ae - ba^4e. \end{aligned}$$

Divisant tout par $e$, il vient enfin

$$\begin{aligned} &z^{\text{III}}de + z^{\text{III}}d^2 - a^3de - a^3d^2 \\ &\quad = n^4e - n^2bae - n^2z^{\text{III}} + n^2a^3 - ban^2e + b^2a^2e + bz^{\text{III}}a - ba^4. \end{aligned}$$

Cela fait, cette nouvelle équation est encore, relativement à la seconde inconnue, abaissée d'un degré. Si l'on fait passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre $e$, on a

$$z^{\text{III}} d^2 - a^3 d^2 + n^2 z^{\text{III}} - n^2 a^3 - b z^{\text{III}} a + b a^4$$
$$= n^4 e - n^2 bae - ban^2 e + b^2 a^2 e - z^{\text{III}} de + a^3 de.$$

Il n'y a pas lieu d'aller plus loin, puisque la seconde inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré, si bien que, par une simple division, on aura la relation de $e$ à la première inconnue. Ainsi

$$e = \frac{z^{\text{III}} d^2 - a^3 d^2 + n^2 z^{\text{III}} - n^2 a^3 - b z^{\text{III}} a + b a^4}{n^4 - n^2 ba - n^2 ba + b^2 a^2 - z^{\text{III}} d + a^3 d}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Pour ramener la recherche des deux inconnues à celle d'une seule, il faut reprendre une quelconque des deux équations primitives; la moins élevée est plus convenable pour que le degré de l'équation finale ne monte pas trop haut.

Ainsi nous avons dans une des deux équations primitives :

$$ba + e^2 + de = n^2.$$

Au lieu de $e$ on substituera sa valeur trouvée qui est exprimée au moyen soit de termes connus, soit de la première inconnue qui ici est $a$. Puis on ordonnera l'équation par rapport à cette première inconnue. Il est clair que la seconde sera éliminée, qu'on sera arrivé à une équation libre de tout radical et que la méthode est générale.

Si en effet on proposait plus de deux inconnues, la méthode, réitérée autant qu'il le faudra, exprimera par exemple la troisième en fonction de la première et de la seconde, puis la seconde en fonction de la première, toujours par le même moyen.

---

## APPENDICE A LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

La méthode précédente permet en Algèbre une élimination complète et absolue des radicaux. L'unique procédé que l'on ait jusqu'à présent possédé pour cette élimination, le *climatisme symétrique de Viète,* est loin d'être une invention suffisante et assez efficace.

Qu'on propose par exemple

$$\sqrt[3]{ba^2-a^3}+\sqrt{a^2+ca}+\sqrt[4]{d^3a-a^4}+\sqrt{ga-a^2}=n.$$

Comment l'analyste à la façon de Viète pourra-t-il se débarrasser de radicaux de cette sorte? La difficulté ne croîtra-t-elle pas, plus il poussera son travail? Enfin, fatigué et désespéré, n'implorera-t-il pas de l'Analyse une lumière nouvelle?

Elle est clairement fournie par la méthode précédente. Je ne donnerai qu'un seul exemple très court; car, le principe une fois dévoilé, tout le reste apparaît sans la moindre difficulté.

Soit proposé $\sqrt[3]{za^2-a^3}+\sqrt[3]{a^3+b^2a}=d$.

D'abord on ordonnera l'équation de façon à en constituer un membre avec un seul radical.

Soit donc $d-\sqrt[3]{a^3+b^2a}=\sqrt[3]{za^2-a^3}$.

Cela fait, on désignera tous les radicaux, excepté celui qui a été rejeté seul dans un membre de l'équation, par des inconnues secondes, ou d'ordre supérieur, si besoin est.

Posons donc, par exemple : $\sqrt[3]{a^3+b^2a}=e$.

On arrive ainsi au procédé de la méthode précédente, à la proportion de la double équation. On a en effet : $d-e=\sqrt[3]{za^2-a^3}$.

Élevant les divers membres au cube, $d^3+3de^2-3d^2e-e^3=za^2-a^3$; mais, par hypothèse, $e^3=a^3+b^2a$.

On a donc une double équation; dans chaque équation, il faut, d'après la méthode, faire passer dans un même membre tous les termes où entre la seconde inconnue. On aura donc

$$za^2-a^3-d^3=3de^2-3d^2e-e^3, \qquad a^3+b^2a=e^3.$$

On réitérera l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à exprimer la seconde inconnue au moyen de la première. Cela fait, on substituera à $e$ sa nouvelle valeur, dans une quelconque des équations primitives que l'on ordonnera; on aura résolu la question.

Je n'ajoute rien de plus, ce serait inutile; je ne m'arrête pas aux superfluités. Qui ne voit en effet que tous les termes irrationels peuvent être de même représentés, si une seconde inconnue ne suffit pas, par des troisièmes, quatrièmes inconnues, et indéfiniment? Auquel cas on considérera d'abord comme seconde la quatrième ou dernière, et les autres provisoirement comme première inconnue ou comme termes connus, jusqu'à ce qu'on ait entièrement éliminé cette dernière inconnue et ramené les équations à ne contenir que la première, la seconde et la troisième. Puis par le même moyen on réduira la troisième inconnue à la seconde et à la première, et la seconde à la première, comme nous l'avons déjà indiqué.

Il n'y a donc aucune irrationelle qui résiste à l'élimination par cette méthode, dont l'usage est surtout précieux, indispensable même, dans la résolution numérique des équations. En effet, aussitôt les irrationelles éliminées, l'artifice de Viète sera applicable pour la recherche numérique des racines; si la question ne peut être résolue en nombres exacts, on aura des solutions aussi approchées qu'on le voudra. Au contraire, tant qu'il y a des irrationelles, il est impossible d'arriver aux solutions approchées.

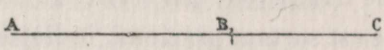
Une recherche plus approfondie a montré que l'on pouvait déduire de là une méthode très remarquable pour la pleine et parfaite connaissance des lieux en surface, comme aussi pour les problèmes où l'on donne au début de la question plus d'éléments que n'en réclame la détermination de la construction du problème.

Pour expliquer ceci plus clairement, il y a certains problèmes qui ne reconnaissent qu'une position inconnue, et qu'on peut appeler *déterminés*, pour les distinguer des problèmes de lieux. Il y en a certains autres qui ont deux positions inconnues et ne peuvent jamais être ramenés à n'en avoir qu'une seule : ce sont les problèmes de lieux. Dans les premiers problèmes, nous recherchons seulement un point unique, dans les derniers, une ligne. Mais si le problème proposé admet trois positions inconnues, il s'agit de trouver, pour satisfaire à la question, non plus seulement un point ou une ligne, mais bien une surface entière; de là naissent les lieux en surface, etc.

De même que dans les premiers problèmes les données suffisent pour déterminer la question, dans les seconds il manque une donnée pour la détermination; dans les troisièmes il en manque deux. Mais il peut se faire que, de même que dans ces cas les données suffisent ou sont en nombre insuffisant, au contraire dans d'autres, les données soient surabondantes et en excès. Un exemple rendra la chose claire.

Sur la droite AC (*fig.* 94) donnée, on donne le produit $AB \times BC$ et la différence des carrés $AB^2 - BC^2$.

Fig. 94.




Il est clair que dans ce cas il y a plus de données que n'en réclament la détermination et par conséquent la solution de la question. Cependant ces problèmes se présentent très fréquemment, surtout en Physique et dans les arts manuels; tous peuvent se traiter, grâce à notre méthode, par une simple division, sans recourir à des extractions de racine, à quelque degré que puissent monter les équations.

Soit proposé, par exemple, dans une certaine question :

$$a^3 + b^2 a = c^2 d,$$

et en même temps, parce que nous supposons la question *surabondante* (c'est le nom que nous donnons à ces problèmes, de même que nous avons pour habitude d'appeler *déficients* les problèmes de lieux) :

$$g''' a - a^4 = b^2 n''.$$

Ramenez cette double équation à une proportion, en traitant, par l'application de la méthode que nous avons enseignée, notre unique inconnue, ici $a$, comme nous avons fait ci-dessus la seconde, ou bien celles d'ordre supérieur, et réitérons l'opération jusqu'à ce que la valeur de $a$ puisse s'obtenir par une simple division, et être exprimée, non plus au moyen de l'inconnue première, mais bien en termes entièrement connus. On aura une solution très simple du problème, et l'analyste ne sera plus embarrassé par les équations quadratiques, cubiques, biquadratiques, etc.

Voici, comme *couronnement,* la solution très simple que notre méthode donne de ce fameux problème :

*Étant donnés une ellipse et un point en dehors de son plan, couper par un plan, de façon que la section soit un cercle, la surface conique ayant pour sommet le point donné et pour base l'ellipse donnée.*

Les géomètres ramènent la question à prendre *ad libitum* cinq points sur l'ellipse, à joindre ces points par des droites au sommet de la surface conique, et à décrire un cercle passant par ces cinq droites; ils trouvent ainsi que le problème est solide. Mais, puisque sur l'ellipse le nombre des points est indéfini, si au lieu de cinq, on en prend six, le problème sera *surabondant,* et on arrivera à une double équation, qui donnera finalement l'inconnue par une simple division.

De même, si l'on donne une courbe quelconque plane, ou un lieu en surface, quel qu'en soit le degré, on pourra trouver les diamètres et les axes et même, dans la surface-lieu, toutes les courbes constitutives du lieu en surface, etc.

Soit, par exemple, une surface conique dont le sommet soit donné et qui ait pour base une parabole ou une ellipse cubique ou biquadratique, ou de quelque degré supérieur, en allant jusqu'à l'infini. Une telle surface peut être coupée au moyen de notre méthode de façon à obtenir une courbe quelconque qui puisse être tracée sur cette surface d'après sa nature, et la solution du problème sera toujours très simple.

Je n'ajoute rien sur les tangentes des courbes ni sur les autres et nombreux usages de cette méthode, qui se présenteront d'eux-mêmes à la réflexion attentive du chercheur analyste.