O pracach matematycznych H. Poincarégo.

(Dokończenie).

Prace z ogólnej teorji funkcji analitycznych.

Wiadomo w jaki sposób w ciągu wieku XIX rozwijało się pojęcie funkcji, które doprowadziło wreszcie do najogólniejszego jej określenia, jako odpowiedniości pomiędzy dwiema mnogościami. Przy takim ogólnym określeniu zatraca się wszystkie poszczególne własności, które wyodrębniały specjalne klasy funkcji, badanych oddawna i posiadających cechy ciekawe i proste, a natomiast wysuwa się na plan pierwszy i pozostawia się właściwie tylko to, co w tym pojęciu jest najistotniejszym. Takie postępowanie jest najzupełniej racjonalne i zgodne z rozwojem nauki, lecz przy obecnym jej stanie niemożliwym jest zbudowanie całej teorji funkcji we wszystkich szczegółach na tak ogólnych podstawach. Obok ogólnej teorji funkcji trzeba więc wyodrębnić i badać specjalne klasy funkcji, biorąc znów pod uwagę to, co zostało pominięte i zatracone przy określeniu ogólnym. Otóż jedną z takich własności zasadniczych, jest solidarność pomiędzy wartościami jednej i tej samej funkcji w różnych przedziałach zakresu istnienia. Solidarność taką posiadają oczywiście funkcje algiebraiczne, wykładnicze, trygonometryczne, kołowe i t. d., słowem wszystkie funkcje, napotykane na pierwszych stopniach naturalnego rozwoju matematyki. Dla funkcji algiebraicznych solidarność ta sformułować się daje w sposób najprostszy, mianowicie: jeśli krzywa jest rzędu n, to dostateczna ilość punktów określa jedną tylko krzywą; jeśli damy sobie wartość funkcji alg. dla nieskończonej ilości wartości zmiennej, to funkcja alg. jest całkowicie wyznaczona. Tym bardziej, jeśli znamy tę funkcję nie w punktach odosobnionych, lecz na pewnym continuum.

Natomiast nic podobnego nie zachodzi, jeśli posiłkować się będziemy ogólnym określeniem funkcji; przy ustalaniu odpowiedniości pomiędzy dwiema mnogościami niczym nie jesteśmy skrępowani i, jeśli ustalimy tę odpowiedniość w pewien sposób dla jednej części przedziału, stanowiącego continuum wartości zmiennej, to dla pozostałej części przedziału będziemy mogli tę odpowiedniość ustalić dowolnie, nie licząc się wcale z tym, co zrobione było poprzednio; przy takim ujęciu rzeczy, widzimy, że wszelki ślad solidarności zaginął. Z prac Cauchy'ego okazuje się, iż wystarczy założyć, że funkcja istnieje, jest ciągłą i posiada pochodną nie tylko dla wartości rzeczywistych, ale i dla wartości zespolonych zmiennej, aby przez to samo już między wartościami funkcji w różnych obszarach istnienia ujawniła się solidarność, o której poprzednio mówiliśmy. Dochodzimy w ten sposób do pojęcia funkcji analitycznej. Jeśli w pewnym obszarye S spełnione są trzy warunki Cauchy'ego, mówimy iż funkcja jest w tym obszarze holomorficzną. Funkcja holomorficzna daje się rozwinąć na szereg Taylora, zbieżny wewnątrz koła, którego wszystkie punkty należą do obszaru, w którym funkcja jest holomorficzną. Solidarność pomiędzy wartościami funkcji w dwuch obszarach S i S_1 ustalimy, jeśli punkty należące do S i S_1 połączymy łańcuchem, złożonym ze skończonej ilości kół, wewnątrz których funkcja daje się rozwinąć na szereg Taylora; dwa po sobie następujące koła w tym łańcuchu powinny, oczywiście, przecinać się. Dla solidarności nie jest więc rzeczą konieczną, aby funkcja była holomorficzną w całym rozważanym obszarze.

Warunki Cauchy'ego mogą nie być spełnione dla pewnych punktów tak zwanych osobliwych, czy to odosobnionych czy też stanowiących dowolną mnogość, byle tylko pozostałe punkty tworzyły mnogość spójną, dla której możliwym byłoby połączenie wzajemne łańcuchem kół, o których mówiliśmy. Połączenie łańcuchem kół odbywać się może różnemi drogami; jeśli wartość funkcji w pewnym punkcie zależy od drogi, to funkcja nazywa się wieloznaczną, jeśli zaś od drogi zupełnie nie zależy, nazywamy funkcję jednoznaczną. Rozwinięcie funkcji na szereg Taylora, odpowiadający każdemu z kół łańcucha, nazywa się elementem funkcji analitycznej. Dwa różne elementy należą do tej samej funkcji, jeśli można dwa odpowiadające tym elementom koła połączyć łańcuchem kół tak jak wyżej, przytym w części spólnej dwum kolejnym kołom rozwinięcia powinny odpowiadać tej samej funkcji. Wszelki więc element funkcji analitycznej określa wszystkie pozostałe elementy, które nazywamy przedłużeniami analitycznemi pierwszego. Jeśli przy przedłużeniu funkcji analitycznej napotykamy zawsze pewną mnogość punktów, stanowiących krzywą zamkniętą, po za którą wyjść nie możemy, to funkcja analityczna istnieć będzie tylko wewnątrz pewnego obszaru, nie zaś na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W American Journal of Mathematics, t. XIV Poincaré dał cały szereg przykładów różnych osobliwości, jakie posiadać mogą funkcje analityczne: elementy funkcji analitycznej pokrywają, naprzykład, całą płaszczyznę z wyjątkiem pola pewnego trójkąta, pewnego wielokąta, lub też wyjść nie mogą poza obręb pewnego koła, jak to ma miejsce dla funkcji thetafuchsowych. Następnie na innych przykładach pokazuje Poincaré, że jeśli istnieje wyrażenie analityczne, z którego wyprowadzić się dają elementy funkcji analitycznej, zawarte wewnątrz krzywej zamkniętej C, z drugiej zaś strony elementy leżące wszystkie zewnątz tejże krzywej C, stanowiącej mnogość punktów osobliwych, to naogół nie ma żadnej podstawy do uważania tych dwuch grup elementów jako określających tę samą funkcję analityczną. Posiadanie wspólnego wyrażenia analitycznego nie może więc być podstawą do ustanowienia solidarności pomiędzy dwiema funkcjami; wynik ten nie powinien nikogo dziwić, jeśli zwrócimy uwagę, iż od czasu prac Weierstrassa nastąpił rozłam pomiędzy pojęciem wyrażenia analitycznego a funkcji analitycznej. Pomimo to w niektórych wypadkach, bardzo zresztą specjalnych, możliwym jest racjonalne rozszerzenie pojęcia funkcji analitycznej, któreby prowadziło do możliwości przedłużenia funkcji poza krzywą C, co nie jest, oczywiście, sprzeczne z wynikiem otrzymanym przez Poincarégo (Borel, Thèse 1894).

Jeśli funkcja jest wieloznaczną, wartości jej w danym punkcie zależą od drogi, ponieważ zaś dróg różnych może być ilość nieprzeliczalna, więc i elementów, koniecznych do określenia wszystkich wartości funkcji, możemy mieć, a priori, nieprzeliczalną ilość. Bardzo ważną zasługą Poincarégo jest udowodnienie, że osiągnięcie wszystkich wartości funkcji wewnątrz całego zakresu jej istnienia daje się uskutecznić zapomocą przeliczalnej ilości elementów wybranych z pomiędzy mnogości wszystkich możliwych; a zatym mnogość wszystkich wartości funkcji dla każdego punktu (z wyjątkiem punktów granicznych, do których dowód się nie stosuje) jest przeliczalna.

Gdy mowa już o funkcjach wieloznacznych, należy zwrócić uwagę na wyjątkowo piękne odkrycie w tej dziedzinie, dzięki któremu teorja funkcji wieloznacznych sprowadza się w pewnym stopniu do daleko prostszej teorji funkcji jednoznacznych. Mianowicie udowodnił Poincaré (B. de la S. M. de Fr. 1883, Acta Mathematica 1908) twierdzenie następujące: jeśli y jest funkcją analityczną wieloznaczną, zresztą jakąkolwiek, zmiennej x, można określić x jako funkcję jednoznaczną nowej zmiennej z w ten sposób, aby y było również funkcją jednoznaczną zmiennej z.

W ten sposób badanie funkcji analitycznych sprowadzić się daje do badania funkcji jednoznacznych i funkcji odwrotnych względem nich. W tym też kierunku zwrócone są obecnie poszukiwania najnowszych badaczy (np. Boutroux).

Ujednostajnianie funkcji wieloznacznych stanowi zakończenie całego szeregu prac, których punktem wyjścia i oparcia były funkcje automorficzne. Mamy tu dobitny przykład łączni, jaką ustanawia umysł twórczy pomiędzy odosobnionemi pozornie dziedzinami, tak iż wszystkie współdziałają do spólnego celu. W twórczości Poincarégo takich linji zbieżnych prześledzić można wiele, lecz zapewne najpiękniejszą z nich jest ta właśnie, nad którą pracował od pierwszych chwil karjery naukowej aż do śmierci i której poświęcił tyle trudu i czasu.

Przed Poincarém wielu matematyków kusiło się o uogólnienie teorji funkcji analitycznych na przypadek wielu zmiennych, starając się przedewszystkim na tym nowym gruncie przeszczepić piękną teorję Cauchy'ego. Lecz usiłowania te po większej części spełzały na niczym, gdyż spotykano tu nowe, niespodziewane trudności, wynikające z możliwości istnienia pewnych linji osobliwych i t. p. Dopiero Poincaré w słynnej pracy „O pozostałościach (résidus) całek podwójnych“ (Acta Mat. t. IX), rozwiązał to zagadnienie, postawiwszy je w należyty sposób. Mamy w tym artykule dowód twierdzeń o pozostałościach całek wielokrotnych w przypadku wielu zmiennych, które odpowiadają twierdzeniom Cauchy'ego, tyczącym się pozostałości całek pojedyńczych.

Weierstrass, jak wiadomo, rozłożył funkcję całkowitą na czynniki proste, uwidoczniając jej miejsca zerowe. Każdy czynnik prosty jest kształtu $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_n(z)}$, gdzie a_n oznacza miejsce zerowe, a $g_n(z)$ jest wielomianem odpowiednio dobranym, którego stopień zależy o wskaźnika n. Jeśli szereg

$\sum \frac{1}{|a_n|^r}$ jest zbieżny dla każdej wartości wykładnika $r > \rho$, a rozbieżny dla $r < \rho$, to funkcja całkowita równa się iloczynowi funkcji wykładniczej przez iloczyn $\Pi_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_p\left(\frac{z}{a_n}\right)}$ gdzie g_p jest wielomianem stopnia p (niezależnie od wskaźnika n), przytym $p \leqslant \rho \leqslant p+1$; gdy ρ jest liczbą niecałkowitą, p jest pierwszą liczbą całkowitą bezpośrednio mniejszą od ρ, gdy zaś ρ jest liczbą całkowitą, p równa się $\rho - 1$ albo ρ, zależnie od tego czy szereg $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ jest zbieżny czy rozbieżny. Niechaj czynnik wykładniczy zwany zewnętrznym będzie kształtu $e^{P(z)}$, gdzie P jest pewnym wielomianem stopnia k. Rzędem naszej funkcji całkowitej będzie liczba równa k, jeśli k jest większe od p, jeśli zaś $k \leqslant p$, to rzędem funkcji będzie liczba p. Jeśli liczba p, niezależna od wskaźnika n, nie istnieje albo jeśli czynnik zewnętrzny nie jest wskazanego wyżej kształtu, to funkcja jest rzędu nieskończonego. O ile odrzucimy czynnik zewnętrzny, rząd funkcji całkowitej zależy więc jedynie od rozmieszczenia miejsc zerowych na płaszczyźnie, a właściwie od funkcji $n(r)$, gdzie n oznacza ilość miejsc zerowych wewnątrz koła o promieniu r. W artykule „O funkcjach całkowitych“ (Bull. de la Soc. Math. de Fr. 1883), Poincaré zwrócił uwagę na dwie okoliczności pierwszorzędnej wagi, mianowicie, iż istnieje związek prosty pomiędzy rzędem funkcji całkowitej (rzędu skończonego), a wzrastaniem modułu tej funkcji z jednej strony, z drugiej zaś—pomiędzy wzrastaniem modułu, a spółczynnikami w rozwinięciu na szereg Taylora. Tak więc rozkład zer na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, wzrost modułu funkcji w zależności od modułu zmiennej, wreszcie zmniejszanie się spółczynników rozwinięcia na szereg w zależności od miejsca czyli rzędu tego spółczynnika—są to trzy fakty ściśle z zobą związane. Mianowicie, jeśli rozwinięcie funkcji całkowitej rzędu p jest kształtu $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, Poincaré udawadnia: 1°) że $\lim_{n=\infty} A_n \sqrt[p+1]{1.2.3...n} = 0$; 2°) na kole o promieniu $|z| = R$, maximum modulu $f(z)$ mniejsze jest od $e^{\alpha R^{p+1}}$, gdzie α jest liczbą dodatnią, zresztą dowolną, przytym nierówność ma miejsce dla każdego R większego od pewnego R_α. Pierwsze z tych twierdzeń można wyrazić inaczej, pod postacią nierówności, mianowicie, iż zachodzi zawsze nierówność:

$|A_m| < \frac{1}{\sqrt[p+1]{1.2.3...m}}$, byle tylko spełnioną była nierówność $m > \mu$, gdzie μ jest pewną określoną liczbą, niezależną od m. Twierdzenia te były zaczątkiem wspaniałego rozwoju teorji fukcji całkowitych i dały pobudkę do szeregu poszukiwań, śród których pierwsze miejsce zajmują prace Hadamarda (Journal de Math. 1893), Borela (Acta Math. t. XX), Lindelöfa, Boutroux (Thèse) i t. d. Zarys tej teorji znaleść można w zbiorze monografji z teorji funkcji wydawanym przez Borela, u Borela („Leçons sur les fonctions entières“) i u Blumenthala („Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini“).

Na innym jeszcze punkcie uzupełnił Poincaré badania Weierstrassa. Weierstrass udowodnił, że funkcja meroformiczna jednej zmiennej, t. j. funkcja jednowartościowa, nie mająca w skończoności innych punktów osobliwych prócz biegunów (pôles), daje się przedstawić jako iloraz dwuch funkcji całkowitych. W wypadku, gdy ilość zmiennych jest większa (np. równa dwum), bieguny nie są już odosobnione, i dla tego uogólnienie twierdzenia Weierstrassa wydaje się w tym wypadku niemożliwym. Poincaré w artykule, pomieszczonym w Acta Math. t. 2 zwalcza tę trudność, rozważając równania różniczkowe cząstkowe, którym zadość czynią część rzeczywista i część urojona danej funkcji meromorficznej.

Teorja szeregów asymptotycznych i równań różniczkowych.

Szeregi rozbieżne nieraz używane były w matematyce i, chociaż wyniki na nich oparte były niepewne, nieraz prowadziły do rezultatów prawdziwych. Od czasów Cauchy'ego i Abela uznano rozumowania i dowody na nich oparte za nieuzasadnione; lecz przy poszukiwaniach nieraz jeszcze posługiwano się szeregami rozbieżnemi, z tym zastrzeżeniem, oczywiście, że po znalezieniu żądanej odpowiedzi dowód należało dać zupełnie inny, nie wprowadzając szeregów rozbieżnych.

Jeśli się zapytamy, dlaczego na szeregach zbieżnych możemy opierać się z całą pewnością i budować na nich dowody, a na szeregach rozbieżnych opierać się nie możemy — wypadnie przyznać, że przyczyna jest czysto formalna. Drogą odpowiednich definicji stworzyliśmy fakt zastosowalności szeregów zbieżnych do zagadnień analizy. Ten sam cel, na tej samej drodze może być osiągnięty i dla szeregów rozbieżnych. Trudność polega tylko na stworzeniu definicji o tyle zgodnych z naturą i całokształtem faktów matematycznych, aby w zastosowaniach okazały się one rzeczywiście użytecznemi. Stworzenie definicji tego rodzaju obejmującej wszystkie możliwe wypadki rozbieżności jest, jak na dziś, mrzonką. Należy wyodrębnić specjalne klasy szeregów rozbieżnych i do nich ten punkt widzenia zastosować. Przykładem takiego postępowania jest teorja szeregów asymptotycznych. Polega ona na ustanowieniu pewnego rodzaju odpowiedniości pomiędzy pewną klasą funkcji a pewną klasą szeregów rozbieżnych (które Poincaré nazywa szeregami asymptotycznemi), w ten sposób, aby pewnym działaniom, wykonanym na funkcjach, odpowiadały te same działania, wykonane na szeregach.

Niechaj będzie funkcja $I(x)$ i szereg $C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\dots$

Szereg ten będzie rozwinięciem asymptotycznym funkcji $I(x)$, jeśli

dla każdego n $$\lim_{x=\infty} x^n \left\{I(x)-\left(C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\dots+\frac{C_n}{x^n}\right)\right\}=0\ ,$$

czyli inaczej: $$I(x)=C_0+\frac{C_1}{x}+\dots+\frac{C_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{C_n+E_n}{x^n},\ \text{przyczym} \lim_{x=\infty} E_n=0\ .$$

Gdy dana jest dowolna funkcja, łatwo poznać, czy istnieje jej rozwinięcie asymptotyczne, wyliczając kolejno spółczynniki C_0, C_1, C_2 i t. d. Gdy rozwinięcie takie istnieje, jest ono określone jednoznacznie. Lecz twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: temu samemu rozwinięciu asymptotycznemu odpowiadać może więcej niż jedna funkcja.

Przejdziemy teraz do działań, wykonanych jednocześnie na szeregach i funkcjach im odpowiadających. Łatwo się przekonać, że mamy prawo mnożyć i dodawać szeregi asymptotyczne. To znaczy, że jeśli dwie funkcje posiadają rozwinięcia asymptotyczne, wówczas tę samą własność posiada suma i iloczyn tych funkcji, przytym rozwinięcie asymptotyczne sumy lub iloczynu otrzymamy, dodając albo mnożąc szeregi asymptotyczne odpowiadajace każdej z dwuch danych funkcji. W ten sam sposób mamy prawo dzielić odpowiednio dwa szeregi asymptotyczne, zastrzegając tylko, że pierwszy spółczynnik C_0 szeregu przez który dzielimy, jest różny od zera. Przy całkowaniu szeregu asymptotycznego ukazuje się wyraz logarytmiczny, który należy wprowadzić do rozwinięcia, jako zupełnie naturalne uogólnienie szeregu asymptotycznego. Przy tym założeniu będziemy mieli prawo całkować szeregi asymptotyczne, rozumiejąc przez to, że jeśli funkcji $I(x)$ odpowiada asymptotycznie szereg $C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x_2} + \ldots$, to funkcji $\int\limits_{xo}^{x} I(x) dx$ odpowiadać będzie asymptotycznie szereg $C_0 x + C_1 \lg x + C - \frac{C_2}{x} - \frac{1}{2}\frac{C_3}{x^2} - \frac{1}{3}\frac{C_4}{x^3} - \ldots$

Jak można było się spodziewać a priori, nie mamy prawa różniczkować szeregu asymptotycznego, czyli, innemi słowy, przy różniczkowaniu odpowiedniość między funkcją i rozwinięciem nie jest zachowana.

Może się nawet zdarzyć, że funkcja $I(x)$ daje się rozwinąć na szereg asymptotyczny, gdy tymczasem jej pochodna $I'(x)$ tej własności już nie posiada.

Teorja szeregów asymptotycznych ma bardzo ważne i liczne zastosowania, zwłaszcza w teorji równań różniczkowych. Jeśli warunki początkowe odpowiednio są dobrane, a mianowicie, jeśli odpowiadają punktowi osobliwemu układu całek danego równania, to równanie daje dla szukanej całki rozwinięcie nogół rozbieżne. Pomiędzy tym szeregiem, a rodzajem osobliwości istnieje pewien ścisły związek. Łatwo więc zrozumieć, że w przypadku, gdy rozwinięcie otrzymane przy pomocy równania jest odpowiedniego kształtu, teorja szeregów asymptotycznych może się okazać pożyteczną. Tak też jest w istocie, jak się okazuje z poszukiwań Poincarégo, zamieszczonych w Acta Math. t. VIII (Sur les intégrales singulières des équations différentielles).

Badanie całek równań różniczkowych z specjalnym uwzględnieniem punktów osobliwych zawsze zajmowało Poincarégo i temu przedmiotowi poświęcił nawet rozprawę doktorską. Z biegiem czasu pomysły jego w tym kierunku rozwinęły się znakomicie i wydały obfity plon prac i wyników, pośród których na uwagę przedewszystkim zasługują rozprawy, poświęcone szczegółowemu zbadaniu kształtu krzywych, określonych jako całki równań różniczkowych stopnia pierwszego $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, gdzie X i Y są wielomianami względem x i y. (Journal de Liouville 1881 i 1882). Ponieważ tu chodzi o konstrukcję, że tak powiem, określonych przez równanie całek, należy się ograniczyć do wartości rzeczywistych x i y, a więc metody dotychczasowe, wprowadzone przez Briota i Bouqueta, którzy badali całkę w otoczeniu punktu osobliwego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, i ich sposób ujęcia już nie wystarczają. Przedewszystkim zajmuje się Poincaré zbadaniem, klasyfikacją punktów osobliwych oraz kształtem całek w otoczeniu tych punktów. Punkty osobliwe dzieli on na trzy rodzaje: 1) „przełęcze“ (cols), czyli punkty, przez które przechodzą tylko dwie całki; 2) węzły (noeuds), czyli punkty, przez które przechodzi nieskończona ilość cąłek; 3) ogniska (foyers), czyli punkty, naokoło których krzywa nawija się spiralnie. Oprócz tych punktów osobliwych, które są typu ogólnego, bo nie przypuszczają istnienia żadnych związków specjalnych pomiędzy spółczynnikami równania różniczkowego, mogą istnieć inne jeszcze osobliwości poszczególne, gdy spółczynniki związane są ze sobą pewnemi równaniami. Takim punktem jest tak zwany środek (centre), naokoło którego zgęszcza się nieskończenie wiele krzywych zamkniętych, zawartych każda wewnątrz poprzedzającej; w ten sposób tworzy się nieskończona ilość pierścieni, coraz bardziej skupiających się dokoła środka. Następnie znajduje Poincaré związek, pomiędzy ogólną liczbą węzłów, ognisk i „przełęczy“, wreszcie przechodzi do badania kształtu całki, przebiegając wdłuż całej krzywej, która albo jest krzywą zamkniętą, albo urywa się, gdy dochodzi do węzła, albo nawija się spiralnie dokoła punktu lub krzywej zamkniętej i t. d.

W wypadku, gdy ilość zmiennych jest o jedną większa, mamy podobne zadanie, ale już nie na płaszczyźnie, tylko w przestrzeni i układ równań $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$, gdzie X, Y i Z są wielomianami względem trzech zmiennych x, y i z. Roztrząsanie tego wypadku jest daleko trudniejsze, ale i tu Poincaré dochodzi do ważnych wyników. Mianowicie, z pośród punktów osobliwych należy rozróżnić następujące: 1) węzły, t. j. punkty, przez które przechodzą wszystkie całki, o ile tylko przechodzą dostatecznie blizko tego punktu; 2) „przełęcze“ (cols), czyli punkty w których schodzi się nieskończona ilość całek, tworzących pewną powierzchnię i oprócz tego przechodzi jeszcze jedna krzywa, nie leżąca na wzmiankowanej powierzchni; 3) ogniska, czyli punkty, przez które przechodzi jedna krzywa, gdy pozostałe całki zbliżają się nieograniczenie do tego punktu otaczając go linją spiralną; 4) „przełęcze-ogniska“, czyli punkty, przez które przechodzi jedna tylko całka, gdy inne zbliżają się do tej krzywej asymptotycznie, tworząc pewną powierzchnię.

Równania różniczkowe cząstkowe fizyki matematycznej, równania całkowe, układy równań linjowych z nieskończoną ilością niewiadomych.

Do tego działu należy cały szereg ważnych prac Poincarégo, związanych spólną myślą przewodnią, począwszy od rozprawy w American Journal of Mathematics 1886, gdzie pomysły śmiałe i nowe są tylko naszkicowane, a kończąc na takich mistrzowskich pracach, jak artykuł w Rendiconti 1894 „O równaniach fizyki matematycznej“, w Acta Mathematica t. 20 „O metodzie Neumanna i zadaniu Dirichleta“.

Znamienną jest rzeczą, że bardzo wiele zagadnień, należących do najrozmaitszych działów fizyki matematycznej, prowadzi do tego samego równania o pochodnych cząstkowych, mianowicie do równania Laplace'a; równanie to spotykamy w teorji potencjału, czy to elektrycznego czy newtonowskiego, w teorji magnetyzmu, w teorji ciepła, w akustyce i t. d. Równanie Laplace'a dla przestrzeni, t. j. dla trzech zmiennych jest kształtu $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, a na płaszczyźnie, t. j. dla dwuch zmiennych ma kształt $\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Zagadnienie, które fizyka matematyczna stawia co do tych równań, tyczy się istnienia całki czyli funkcji 3 lub 2 zmiennych, czyniących zadość równaniu przy odpowiednich danych początkowych. Niech będzie pewna powierzchnia lub krzywa zamknięta C i niechaj D_i oznacza obszar wewnętrzny D_e zaś — obszar zewnętrzny. Nazywamy harmoniczną w obszarze D funkcję, która czyni zadość równaniu Laplace'a i posiada w obszarze D pochodne cząstkowe ciągłe pierwszego i drugiego rzędu. W zależności od danych początkowych, mamy następujące zadania:

1) Zadanie Dirichleta wewnętrzne, które polega na znalezieniu funkcji harmonicznej w obszarze D_i, przyjmującej wartości dane z góry na C.

2) Zadanie Dirichleta zewnętrzne: znaleść funkcję harmoniczną w obszarze D_e, przyjmującej wartość zero w nieskończoności, a wartości dane z góry na C.

3 i 4) Zagadnienia Neumanna: znaleść funkcję harmoniczną tak, jak w dwuch poprzednich zadaniach, jedyna różnica polega na tym, że na C danemi są nie wartości funkcji, lecz jej pochodna normalna $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$ lub $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e$.

Poincaré podał bardzo ciekawą nową metodę rozwiązywania tych zagadnień, mianowicie metodę „zamiatania" (balayage) i udoskonalił w znacznym stopniu dawniejszą teorję Neumanna. Metoda „zamiatania" polega na zastępowaniu masy, znajdującej się wewnątrz kuli lub koła, masą, znajdującą się na powierzchni C; powtarzając nieskończoną ilość razy taką operację dochodzimy do funkcji harmonicznej, która jest potencjałem masy rozmieszczonej na powierzchni C, gdy tymczasem funkcja początkowa harmoniczną nie była. Granica C przy zastosowaniu tej metody może nie być wypukłą; założenia konieczne tyczą się istnienia płaszczyzny stycznej i dwuch głównych promieni krzywizny. Dawniej znana metoda Neumanna stosowała się tylko w przypadku, gdy granica C obszaru jest wypukłą. Poincaré odkrył zasady, za pomocą których można rozciągnąć metodę Neumanna na powierzchnie niewypukłe i wprowadził dla każdej zamkniętej powierzchni układ pewnych bardzo ważnych funkcji zwanych *zasadniczemi*; funkcje te w stosunku do danej powierzchni C odgrywają taką samą rolę, jaką w stosunku do kuli odgrywają funkcje sferyczne. Funkcje zasadnicze są to funkcje harmoniczne wewnątrz obszaru, a na granicy C spełniające warunek $\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0$, gdzie k oznacza stałą, a $\frac{\partial u}{\partial n}$ pochodną w kierunku normalnej do C. Poincaré dowodzi, że można rozwinąć funkcję dowolną na szereg funkcji zasadniczych, przyczym spółczynniki rozwinięcia dane są za pomocą całek wielokrotnych; zachodzi tu oczywiście analogja z rozwinięciem na szereg trygonometryczny. Gdy dla powierzchni C znamy funkcje zasadnicze, wystarczy funkcję wartości danych na granicy rozwinąć na szereg tylko co wspomnianego typu, a rozwiązanie zadania Dirichleta nie przedstawia już trudności. Dodać trzeba, że Poincaré rozważa zadanie bardziej ogólne, mianowicie zamiast równania Laplace'a rozpatruje także równanie ogólniejsze $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\xi u+f=0$, gdzie ξ oznacza stałą, f zaś funkcję trzech zmiennych. Do tego równania sprowadza się między innemi zadanie o drganiu błonki sprężystej: Schwartz udowodnił istnienie tonu zasadniczego, gdy błona drga bez węzłów i linji węzłowych, Picard udowodnił istnienie pierwszego tonu harmonicznego, a Poincaré—istnienie tonów harmonicznych rzędów wyższych.

Tylko co wymienione prace Poincarégo przygotowały grunt pod teorję równań całkowych Fredholma. Wszystkie wyniki prac Poincarégo dają się z największą łatwością interpretować ze stanowiska teorji równań całkowych, i odwrotnie. W tym równaniu jakgdyby zawarta jest synteza prac Poincarégo z danej dziedziny; to też zastosował on je odrazu do zadania o przypływach i odpływach morza, do fal elektromagnetycznych, wzbogacał i rozwijał stale cennemi dodatkami i dopełnieniami. Równanie Fredholma ma postać $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)\varphi(y)dy=\psi(x)$, gdzie $\psi(x)$ jest funkcją daną, $k(x,y)$ nazywa się jądrem równania i jest także znane, a funkcja $\varphi(x)$ jest funkcją szukaną; λ jest stałą, która ma bardzo ważne znaczenie w teorji. Jeśli jądro czyni zadość pewnym warunkom, bardzo zresztą ogólnym, można zbudować zapomocą szeregów dwie funkcje całkowite względem λ, mianowicie $D_1(\lambda,x,y)$, i $D(\lambda)$, przy pomocy których funkcja nieznana $\varphi(x)$ wyraża się w następujący sposób $\varphi(x)=\psi(x)+\lambda\int_0^1 \psi(y)\frac{D(\lambda,x,y)}{D(\lambda)}dy$. Rozwiązanie przyjmuje postać bardziej złożoną, jeśli funkcja $\psi(x)$ jest tożsamościowo równa zeru, lub jeśli λ przybiera pewne wartości, które są pierwiastkami równania $D(\lambda)=0$. Związek pomiędzy teorją równań całkowych a poprzedniemi pracami Poincarégo widać już stąd, że funkcje zasadnicze zadość czynią równaniu Fredholma typu jednorodnego, t. j. gdy funkcja $\psi(x)=0$. Parametr λ gra taką samą rolę, jak stała k w równaniu $\frac{\partial u}{\partial n}+ku=0$, które określa funkcje zasadnicze.

Jednym z ważnych przyczynków Poincarégo do teorji równań całkowych jest zbadanie kształtu rozwiązania w wypadku, gdy jądro staje się nieskończonym. Okazuje się, że w wypadkach bardzo ogólnych, wystarczy we wzorze na rozwiązanie równania Fredholma w szeregach, dających $D(\lambda,x,y)$ i $D(\lambda)$, zastąpić przez zero wyrazy, stające się nieskończonemi, t. j. poprostu odrzucić je. Takie samo rozwiązanie dał Hilbert, ale w wypadku daleko mniej ogólnym.

Równania całkowe są bezpośrednio związane z teorją układu nieskończonej ilości równań linjowych z nieskończoną ilością niewiadomych. Na tym polu był więc Poincaré pjonerem i twórcą, gdyż pierwszy badał warunki zbieżności wyznaczników nieskończonych, które można utworzyć ze spółczynników danych równań linjowych.

Na tym zakończymy przegląd prac matematycznych Poincarégo. Jest ich tak wiele, że wspomnieć choć w paru słowach o każdej staje się prawie niemożliwym; dlatego ani słowa nie poświęciliśmy artykułom z teorji liczb, ani z Analysis situs, choć i tu mamy prace pierwszorzędnej wartości, i w tym zakresie sypał szczodrze pomysłami, torował nowe drogi. Właściwością jego umysłu była ciągła, nieustająca twórczość. Cel będzie osiągnięty, jeśli krótki i niezupełny przegląd prac wzbudzi w czytelniku uczucie podziwu i uwielbienia dla Mistrza, który był ich twórcą. Obok olbrzymiej budowli prac matematycznych wzniósł on nie mniej pokaźne gmachy twórczej myśli w innych dziedzinach, w astronomji i fizyce naprzykład. Dzieła filozoficzne znamionują umysł nie mniej potężny, głęboko krytyczny, samodzielny i przenikliwy. Schylając czoła przed zgasłym gienjuszem, oddajemy hołd twórczej myśli; uczyniły to zgodnie wszystkie narody po całej ziemi, gdziekolwiek błąka się chociażby iskierka myśli.

Juljusz Rudnicki.