J. LAGRANGE.

O zastosowaniu krzywych do rozwiązywania zadań.

(Dokończenie).

Dwa poprzednie przykłady wystarczą do wyjaśnienia, jak się stosuje metodę krzywych przy rozwiązaniu zadań. Metodę tę przedstawiliśmy w sposób, że tak powiem, mechaniczny, można ją jednak otrzymać na drodze analitycznej.

Całe zagadnienie sprowadza się właściwie do tego, żeby poprowadzić krzywą przez kilka punktów, otrzymanych czy to za pomocą rachnnku, czy konstrukcji, czy wreszcie na mocy spostrzeżeń albo nawet szeregu niezależnych od siebie doświadczeń. Takie zagadnienie z istoty swej jest nieoznaczone, gdyż, ściśle biorąc, można przez dane punkty poprowadzić nieskończenie wiele różnych krzywych. Chodzi tu jednak nie o znalezienie jakichkolwiek rozwiązań, lecz o najprostsze rozwiązanie, najłatwiej dające się zastosować. Jeżeli np. mamy dane tylko dwa punkty, najprostszym rozwiązaniem będzie prosta przechodząca przez nie. Mając trzy punkty, możemy przez nie poprowadzić łuk koła, t. j. linję najłatwiejszą do narysowania, po prostej. Okrąg koła jest najprostszą krzywą pod względem konstrukcyjnym, nie jest nią jednak, jeżeli chodzi o prostotę równania w spółrzędnych prostokątnych. Z tego punktu widzenia za najprostsze możemy uważać krzywe, których rzędne są funkcjami całkowitemi i wymiernemi odciętych, czyli krzywe typu

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\dots$$

Nazywamy je parabolicznemi; gdyż możemy je uważać za uogólnienie paraboli, którą otrzymamy, zachowując w części prawej powyższego równania trzy pierwsze wyrazy i odrzucając pozostałe... Przy wykreślaniu przybliżonym jakichkolwiek krzywych, możemy posługiwać się krzywemi parabolicznemi, gdyż przez dowolną ilość punktów, wziętych na jakiejkolwiek krzywej, można zawsze poprowadzić krzywą paraboliczną. W tym celu wystarczy wziąć tyle spółczynników nieoznaczonych ile mamy punktów, następnie wyznaczyć te spółczynniki w taki sposób, żeby wyrazić za pomocą nich rzędne i odcięte danych punktów. Jakakolwiek byłaby krzywa, na której wzięliśmy dane punkty, nie ulega wątpliwości, że zbudowana w ten sposób krzywa paraboliczna tym mniej będzie się od niej różniła, im więcej mamy danych punktów i im mniejsze są ich wzajemne odległości.

Powyższe zagadnienie po raz pierwszy postawił Newton. Rozwiązanie przez niego podane, jest następujące.

Oznaczmy przez P, Q, R, S... wartości rzędnych y, przez p, q, r, s... odpowiadające im wartości odciętych x. Mamy następujące równania

$$\begin{aligned} P&=a+bp+cp^2+dp^3+\dots\,, \\ Q&=a+bq+cq^2+dq^3+\dots\,, \qquad (1) \\ R&=a+br+cr^2+dr^3+\dots\,, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Liczba tych równań powinna równać się liczbie spółczynników nieoznaczonych a, b, c... Odejmujemy od siebie po kolei równania (1); otrzymane różnice dzielimy odpowiednio przez $q-p$, $r-q$... , skąd wypada

$$\begin{aligned} \frac{Q-P}{q-p}&=b+c(q+p)+d(q^2+qp+p^2)+\dots\,, \\ \frac{R-Q}{r-q}&=b+c(r+q)+d(r^2+rq+q^2)+\dots\,, \qquad (2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Niech będzie $\frac{Q-P}{q-p}=Q_1, \frac{R-Q}{r-q}=R_1\dots$ Przez kolejne odejmowanie równań (2) i dzielenie otrzymanych różnic, mamy

$$\begin{aligned} \frac{R_1-Q_1}{r-p}&=c+d(r+p+q)+\dots\,, \\ \frac{S_1-R_1}{s-q}&=c+d(s+r+q)+\dots\,, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Kładąc teraz

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p}=R_2\,,\quad \frac{S_1-R_1}{s-q}=S\dots\,,$$

otrzymamy

$$\frac{S_2-R_2}{s-p}=d+\dots \text{ i t. d.}$$

W ten sposób wyznaczymy wartości spółczynników a, b, c... , najpierw ostatniego, potym przedostatniego i t. d. Wstawiając otrzymane wartości w równanie

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\dots\,,$$

otrzymamy, po wykonaniu redukcji,

$$y=P+Q_1(x-p)+R_2(x-p)(x-q)+S_3(x-p)(x-q)(x-r)+\ldots \quad (3)$$

To samo rozwiązanie można otrzymać prościej. Ponieważ y musi przybrać wartości $P, Q, R\ldots$, gdy x przybiera wartości p, q, r, wnosimy, że równanie powinno mieć kształt

$$y=AP+BQ+CR+DS+\ldots \quad (4),$$

przyczym $A, B, C\ldots$ muszą być zależne od x w ten sposób, by

przy $x=p$, było $A=1$, $B=0$, $C=0\ldots$,

przy $x=q$, było $A=0$, $B=1$, $C=0\ldots$, i t. d.

Stąd łatwo wysnuć wniosek, że $A, B, C\ldots$ muszą mieć kształt ułamków

$$A=\frac{(x-q)(x-r)(x-s)\ldots}{(p-q)(p-r)(p-s)\ldots}, \quad (5)$$

$$B=\frac{(x-p)(x-r)(x-s)\ldots}{(q-p)(q-r)(q-s)\ldots},$$

. . . .

w których zarówno licznik jak mianownik zawierają o jeden czynnik mniej, niż mamy punktów danych.

Otrzymane przez nas na y wzory (3) i (4) są właściwie identyczne, o czym łatwo przekonać się, wstawiając w równanie (3) wartości na Q_1, R_2, $S_2\ldots$

. . . .

Za pomocą jednego albo drugiego z tych wzorów łatwo można wyznaczyć rzędną y dla dowolnej odciętej x, ponieważ znamy rzędne $P, Q, R\ldots$, odpowiadające odciętym $p, q, r\ldots$ Jeśli tedy w jakimś szeregu znamy kilka wyrazów, możemy w ten sposób znaleść każdy wyraz pośredni pomiędzy niemi, co jest wielce pożyteczne, gdy chodzi o wypełnienie pewnych luk w szeregu spostrzeżeń czy doświadczeń, a nawet luk w tablicach, obliczonych na zasadzie jakichś wzorów.

Przypuśćmy, że chcemy powyższą teorję zastosować do przykładów, któreśmy poprzednio rozważali, albo do jakichś innych przykładów, w których mamy do czynienia z błędami, odpowiadającemi pewnym przez nas uczynionym założeniom. Możemy w takim razie bezpośrednio wyznaczyć błąd y, odpowiadający dowolnemu x, zawartemu między znanemi odciętemi. W tym celu uważamy $P, Q, R\ldots$ za wartości znanych błędów, zaś $p, q, r\ldots$ za wartości założeń, z których te błędy wynikły. W naszych przykładach chodziło jednak o co innego: nie o znalezienie błędu, odpowiadającego jakiemuś założeniu, lecz o znalezienie z a ł o ż e n i a, przy którym błąd $=0$. Oczywista rzecz, że mamy tu do czynienia z zagadnieniem odwrotnym względem poprzedniego, że zatym da się ono rozwiązać za pomocą tych samych wzorów, bylebyśmy oznaczyli odwrotnie: błędy przez $p, q, r\ldots$ odpowiednie zaś założenia przez $P, Q, R\ldots$ W takim razie x oznaczać będzie błąd, odpowiadający jakiemuś dowolnemu założeniu y; kładąc tedy $x=0$, znajdziemy żądane założenie y.

Niech P, Q, R... będą wartościami niewiadomej przy różnych założeniach; niech p, q, r... będą wartościami błędów, wynikających z tych założeń, błędów, któreśmy opatrzyli znakami $+$ lub $-$; jeżeli chcemy uczynić błąd$=$ $=0$, musimy niewiadomej dać wartość

$$AP+BQ+CR+\ldots,$$

w której

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{q}{q-p}\cdot\frac{r}{r-p}\ldots, \\ B&=\frac{p}{p-2}\cdot\frac{r}{r-q}\ldots, \text{ i t. d.,} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

przyczym musimy w każdym ze wzorów (6) wziąć o jeden czynnik mniej, niż uczyniliśmy założeń.

przełożył *W. W.*