Z LITERATURY.

A. E. H. Love. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Z upoważnienia autora przetłumaczyli St. Kalinowski i Wł. Wojtowicz. Warszawa. 1913. Str. 1—225.

Spopularyzowanie matematyki wyższej, a więc w pierwszym rzędzie rachunku różniczkowego i całkowego, stało się jednym z naczelnych haseł spółczesnej dydaktyki matematycznej. Pogłębienie pojęcia funkcji (funktionales Denken) zarówno przez wykresy, jak i przez ściślejsze rozważania analizy, ma być, według Kleina i jego zwolenników, „centralną ideą“ wykształcenia matematycznego na stopniu średnim. W myśl tych dążności wprowadzono już zasady rachunku różniczkowego w szkołach średnich francuskich i austryjackich przy pomocy urzędowych planów nauki, a w literaturze dydaktycznej niemieckiej roi się od broszur i podręczników, zawierających wykład elementarny a popularny zasad rachunku różniczkowego. Próby te jednak nie powiodły się moim zdaniem zupełnie, z wyjątkiem chyba książki Nernsta-Schönfliesa. To też z prawdziwą radością witamy przekład znakomicie obmyślanej książki angielskiej Love'a, która pod względem ścisłości dorównywa znanej książce J. Tannery'ego, p. t. Notions de mathématiques, a pod względem obfitości treści może współzawodniczyć z wymienioną wyżej książką Nernsta-Schönfliesa.

Żałować wprawdzie należy, że nie zdobyliśmy się na oryginalny, polski podręcznik zasad rach. róż. i całk., stojący na wysokości swego zadania — bo usiłowania dotychczasowe (Szczepański, Wilk-Hoborski, Ralski) nie zaspokoiły chyba wymagań szerszej publiczności. Może jednak właśnie książka Love'a podsunie naszym autorom, pracującym w dydaktyce, niejedną myśl zdrową, niejedną zręczną metodę dowodzenia i zachęci do stworzenia wykładu, liczącego się z dzisiejszemi prądami nauki. W każdym razie podręcznik ten odda nieocenione usługi każdemu, kto zechce studjować fizykę matematyczną, będzie pomostem, łączącym matematykę szkolną z nauką fizyki, a w szczególności mechaniki, czy to na uniwersytecie, czy na politechnice.

Czy jednak zasmakuje w tej książce „szersze grono czytelników“, mających po skończeniu szkoły średniej bardzo mętne pojęcie nawet o elementarnych wzorach fizyki, pozwalam sobie wątpić. Całą przędzę pojęć rozsnuwa autor prawie wyłącznie na materjale, czerpanym z fizyki, a nie zdaje mi się, aby ten materjał był znany chociaż pobieżnie „każdemu wykształconemu mężczyźnie i kobiecie XX-go wieku“ (np. § 93, 94, 95, 120). Książka zyskałaby na tym bardzo, gdyby autor zamiast niektórych przykładów z fizyki teoretycznej podał niektóre zastosowania z techniki, z rachunku procentu składanego i t. p. Tak np. zagadnienie na str. 104 o inwersji cukru trzcinowego zastąpićby można zadaniem: obliczyć wartość końcową kapitału, jeżeli jego prędkość wzrastania jest proporcjonalna do każdorazowej wartości kapitału; do zadań na maxima i minima (str. 54 i nast.), należałoby dodać obliczenie wymiarów przekroju belki o maximalnej wytrzymałości i t. p. Jeżeli się pisze zasady rach. róż., to każdą zasadę powinno się ilustrować przykładami jak najprostszemi. Co innego, gdyby się pisało zbiór przykładów do rach. róż., wtedy, stopniując je odpowiednio, możnaby sobie pozwolić obok przykładów z innych dziedzin nauki także i na obliczenie prędkości przy spadaniu ciała z uwzględnieniem oporu (str. 107), na zbadanie ruchów drgających w środowisku opornym (str. 120) lub na obliczenie środka ciśnienia hidrostatycznego (str. 187). W książce jednak przeznaczonej dla wszystkich, takie przykłady są raczej utrudnieniem, choćby były tak piękne i przejrzyście wyłożone, jak w wykładzie Love'a.

Jedną z najpoważniejszych trudności dla autora, układającego popularny podręcznik rach. różn. i całk., jest bez wątpienia ustalenie zakresu wiadomości, wymaganych od czytelnika. W tym względzie Love jest — że tak powiem — liberalny: znajdzie tam czytelnik pojęcia gieometrji analitycznej od samego początku (wprowadzenie układu spółrzędnych), całą naukę o funkcjach trygonometrycznych i zasadnicze wiadomości z nauki o logarytmach, wyłożone jasno i zwięźle. Zapewne, że książka na tym nie traci, skoro autor pewne, nawet elementarne kwestje ujmie w taki sposób, aby uzyskać podstawę do jednolitego traktowania dalszych problematów: wadą tego jest tylko to, że książka urosła do wcale pokaźnych rozmiarów. Gdyby się autor ograniczył w przykładach do niewielu prostych zastosowań, a od czytelnika wymagał przynajmniej elementarnych wiadomości z trygonometrji i z gieometrji analitycznej, książka zamiast 220 str., zmalałaby do jakich 100 str. Swoją drogą autor bardzo pięknie a ściśle rozwija te elementarne wiadomości (np. § 86 i dodatek IV, a zwłaszcza dodatek V: o mierzeniu koła i o radjanach) tak, że trudno się gniewać za to zbaczanie z drogi.

Metoda wykładu samego rach. różn. i całk. jest bez zarzutu. Autor opiera się wyłącznie na pojęciu granicy—zgodnie z spółczesnym duchem analizy, nie operując nigdzie metafizyczną „różniczką“, i pod tym względem przewyższa wszystkie publikacje popularne podobnej treści. Każdy czytelnik, wprawiony choć trochę w matematyczny sposób rozumowania, podąży z łatwością i przyjemnością za tokiem dowodzenia autora i przyswoi sobie zarówno ściśle pojęcia pochodnej i całki, jak i metodę wyprowadzania wzorów i rozwiązywania nawet trudniejszych zagadnień. Czytelnik nabiera tych pojęć drogą ewolucji i nie widzi żadnej przepaści między matematyką, jakiej się uczył w szkołach, a rachunkiem różniczkowym, nie spotyka się bowiem na samym progu nowej nauki z takim dziwolągiem logicznym, jak „różniczka“. Spotyka się natomiast z pojęciem granicy, do którego przygotowała go już matematyka elementarna, rozważając ułamki okresowe, liczby niewymierne, lub szeregi gieometryczne.

Droga obrana przez autora trafi zapewne do przekonania każdego, czyj smak nie został zepsuty dowodzeniami dawnej szkoły, zakażonej metafizyczną monadologją Leibnitza. Przy tej sposobności należy z uznaniem podnieść, że tym razem zrywa z pojęciem różniczki fizyk; gdyby ta książka wyszła z pod pióra matematyka, zarzuconoby mu może, że się nie liczy z potrzebami nauk przyrodniczych, że zrywa z rzekomo „poglądową“ metodą tradycyjną, aby ją zastąpić wysubtelnionym pojęciem granicy. Tymczasem w wykładzie Love'a przekonywamy się naocznie, że fizyka matematyczna obchodzi się zupełnie dobrze bez różniczek: ile razy ma się do czynienia z elementami jakichkolwiek wielkości, wystarczy brać pod uwagę skończone przyrosty $\triangle l$, $\triangle s$, $\triangle t$, $\triangle v$, nigdy zaś nie spotykamy się z rzekomemi wielkościami dl, ds, dt, dv. Szkoda, że autor dla konsekwencji nie zarzucił symbolu $\frac{dy}{dx}$, zastępując go dogodnym znakiem y'. Wtedy może nie spotkałby się z nieuzasadnionym, co prawda, zarzutem, że uważa symbole $\frac{dy}{dx}$ za ułamki. (Wszechświat t. XXXI, № 46, str. 784).

Po tych ogólnych uwagach przyjrzyjmy się układowi książki i treści. Wychodząc z dwuch specjalnych przykładów zależności między dwiema zmiennemi (ważenie na wadze sprężynowej i porównanie skal termometrycznych), autor wprowadza układ spółrzędnych i podaje wykresy równań $y = mx + b$ oraz $y = x^2$. Interpretując te wykresy równocześnie gieometrycznie i mechanicznie, wprowadza pojęcie „wzniesienia“ linji (bardziej utarło się wyrażenie „spadek“) i prędkości chwilowej, tak, że już na str. 15 może wyjaśnić, co to znaczy „różniczkować“. Następny rozdział jest poświęcony w pierwszym rzędzie ścisłemu określeniu pochodnej; poparłszy to pojęcie jeszcze kilkoma przykładami, wykłada autor bardzo zwięźle, a przejrzyście reguły różniczkowania sumy, iloczynu, potęgi, funkcji złożonej i ilorazu, i przechodzi odrazu do drugiej pochodnej, podając jej znaczenie w mechanice i w gieometrji. Rozdział III zawiera zastosowanie rachunku różn. do gieometrji (styczna, normalna), do przybliżonego obliczania potęg i iloczynów, do obliczania maximum i minimum, a kończy się twierdzeniem o wartości średniej. W rozdziale IV przechodzi już autor do rachunku całkowego, określając całkę, jako funkcję pierwotną (odwrócenie rach. różn.) i podaje zasadnicze całki. W następnym rozdziale V (str. 76—93) znajdujemy definicję całki określonej, zastosowanie całki okr. do obliczania pól i objętości i do całkowania najprostszych równań mechaniki. Gdyby autor w tym miejscu umieścił jeszcze rozdział X (str. 170--178), w którym wykazuje, że całkę określoną można pojmować jako granicę sumy $\sum_a^b f(x)\triangle x$, mielibyśmy zaokrągloną całość, wystarczającą do pierwszego wprowadzenia w rach. różn. i całk. Dla szkół średnich te wiadomości wystarczyłyby zupełnie.

Autor jednak, mając na oku dalsze zastosowania rach. różn. do trudniejszych problematów mechaniki, nie poprzestaje na tych elementarnych wiadomościach. W rozdziale VI, wykłada teorję logarytmów naturalnych i funkcji wykładniczej, a nauczywszy różniczkowania i całkowania tych funkcji, stosuje je do zagadnień z chemji fizycznej i z teorji prądu elektrycznego. Rozdział VII zajmuje goniometrja i trochę rozwlekłe wyprowadzenie pochodnych funkcji sin x, cos x (autor bowiem chce uniknąć twierdzenia o dodawaniu; dopiero w dodatku VI podaje prostszy dowód).

Następują zastosowania tych praw do całkowania równań ruchu wahadłowego, drgającego i prądu elektrycznego zmiennego. W rozdziale VIII wyłożono metody całkowania i wprowadzono funkcje cyklometryczne.

W rozdziale IX stosuje autor rachunek całkowy i różn. do obliczania długości łuku, krzywizny i pola powierzchni obrotowych, w rozdz. zaś XI, omówiono obliczenie środka ciężkości, środka ciśnienia hidrostatycznego i momentu bezwładności.

Oprócz przykładów umieszczonych w tekście znajdujemy w każdym rozdziale wiele pouczających zagadnień, dobranych nieraz z wielką starannością (np. przykłady wykresów na str. 16 i 17).

Książka kończy się dodatkami, zawierającemi ściślejsze rozważania niektórych kwestji zaznaczonych tylko w tekście. Z nich zasługuje na uwagę dodatek II o granicach, IV o liczbie *e*, tudzież V o mierzeniu koła i o radjanach.

Z tego krótkiego przeglądu uderza przedewszystkim bogactwo treści i umiejętność w ugrupowaniu materjału.

Przechodząc do krytyki szczegółowej, zaznaczę przedewszystkim, że nie dostrzegłem żadnych błędów zasadniczych lub braków—z wyjątkiem pewnych niedomówień w ustępie o maximum i minimum. Inne uwagi, które mi się nasuwają, dotyczą przeważnie strony dydaktycznej.

I tak uderzyć musi czytelnika, że autor unika wszelkich uwag historycznych i filozoficznych, które w dziełku popularnym byłyby bardzo właściwe. Z tym łączy się także i to, że autor nie wyjaśnia pochodzenia znakowania zasadniczych symboli $\triangle x$=differentia x, $\int$ = granica sumy i t. p. Skoro już mowa o symbolach, to nadmienię, że autor unika konsekwentnie znaku: limes—czy słusznie?

We wstępie, poświęconym graficznym przedstawieniom funkcji, należałoby podać wykresy kilku krzywych empirycznych i tam już wprowadzić pojęcie zmiennej zależnej i niezależnej (a nie dopiero na str. 34 i to drobnym drukiem).

Niektóre twierdzenia nie są ilustrowane przykładami (np. str. 26, wiersz 11 od dołu, lub str. 33 § 25).

Rozkładanie funkcji ułamkowej na ułamki proste w § 122 wypadło nieco rozwlekle. W kilku miejscach zauważyłem także zawielki skok w rozumowaniu (np. z wzoru $k^2=(\triangle x)^2+(\triangle y)^2$ odrazu $\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$).

Niektóre przykłady z fizyki podano bez należytego objaśnienia, np. na str. 53: „przypuśćmy że $\frac{dl}{dt}=\alpha l$“, przyczym nie uzasadniono możliwości takiego przypuszczenia; na str. 105 pisze autor: „niech będzie dana prędkość reakcji chemicznej przez równanie: (1) $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$“ przyczym ani słowem nie wspomina, co to za reakcja, ani też, jakie znaczenie mają liczby: x, a, b. Lepiej było poprostu powiedzieć: zcałkujmy równanie różniczkowe (1); autor jednak, nie wiem z jakiego powodu, konsekwentnie unika terminu równanie różniczkowe. Podobnie nie określono, jakiemu zjawisku odpowiada równanie różniczkowe na str. 106.

W §§ 117 i 118 niepotrzebnie używa się w całym rachunku ułamka $\frac{W}{g}$ zamiast masy m. Żałować należy, że autor nie zastosował całki do pojęcia pracy. W ogólności jednak ujęcie zagadnień fizycznych opracował autor bardzo przejrzyście i przystępnie. Szkoda, że z równą starannością nie przedstawiono gieometrycznych zastosowań rachunku różniczkowego. Tak np. ustęp 136 o długości łuku, i niektóre inne wypadły słabiej od pięknych ustępów, poświęconych fizyce.

Nie godzę się z metodą, której autor użył do wprowadzenia całki, określając ją, jako funkcję pierwotną. Wprawdzie dzisiaj powrócono do tego określenia, jako do zasadniczego (Lebesgue. Leçons sur l'intégration), jednakowoż w podręczniku elementarnym wolałbym najpierw zdefinjować całkę określoną, jako granicę sumy, a później dopiero przejść do całki nieokreślonej i wykazać jej związek z funkcją pochodną. Pomijając już sprawę wyjaśnienia symbolu $\int f(x)dx$, zwrócę tylko uwagę na naturalny sposób, w jaki się nasuwa pojęcie całki określonej przy obliczaniu pól. W każdym jednak razie droga, której użył autor jest nieco zadługa: przygotowania do wprowadzenia pojęcia całki, zawarte w §§ 58 i 59 znużą czytelnika, zanim zrozumie ich potrzebę.

Najmniej udał się autorowi ustęp o maximach i minimach. Niema w nim żadnej wzmianki o możliwości istnienia więcej maximów i minimów, a co zatym idzie, nie powiedziano, że chodzi tu tylko o maxima i minima względne. Przykłady na max. i min. zamało interesujące, a przecież tutaj najpiękniej występuje zastosowanie rachunku różn. do problemów technicznych, gieometrycznych i t. p.

Żałować także należy, że autor nie rozszerzył zastosowań rach. róż. także na symbole nieoznaczone i na rozwinięcie na szeregi choćby tylko funkcji sin x, e^x, log $(1+x)$, czym zainteresowałby zarówno młodzież, jak i szersze koła czytelników.

Co się tyczy samego przekładu, to autorowie dołożyli wszelkich starań, aby uzyskać poprawność i przejrzystość stylu, co też w zupełności osiągnęli. Pewne drobne usterki notuję tylko dla ścisłości:

Str. 51 w. 9 od góry: wartość „pierwiastka“ zamiast „pierwiastku“.

Str. 73 w. 10 od góry po słowie „funkcji“ opuszczono słowo: „złożonej“.

Str. 76 § 69 powinien mieć tytuł: „obliczenie pól“.

Str. 90 w. 9 od dołu: zamiast „niech położenie dane jest“ ma być „niech położenie będzie dane“.

Str. 90 w. 7 od dołu: zamiast „ignorowali“ ma być „zaniedbywali“.

Str. 114 w. 2 od dołu. Tablice wstaw nie zostały obliczone przy pomocy szeregów nieskończonych, tylko dawne obliczenia, oparte przeważnie na twierdzeniu o dodawaniu, sprawdzono w ten sposób.

Str. 124 zamiast „cięciwa podpiera kąt środkowy“, lepiej pisać „na cięciwie wspiera się kąt środkowy“.

Str. 126 w. 15 od góry w całce (1) opuszczono znak: —

Str. 127 w. 4 od góry zamiast „$\sin\frac{\alpha}{n}$“ ma być „$\sin^2\frac{\alpha}{n}$“.

Str. 159 zamiast kąt „wykreślony przez promień“ ma być „kąt zakreślony przez promień“.

Str. 174 w. 3 od góry zamiast „$\lg_e 2$“ ma być „$\lg_{10} 2$“.

Str. 202 w. 4 od dołu: „zobrazować gieometrycznie“ — termin trochę niezręczny.

Str. 216 w. 5 od góry zamiacst „długość apotemy“ lepiej „długość promienia koła wpisanego“.

Str. 216 w. 6 od dołu zamiast „na łuku AB“ ma być „to na łuku AB“.

Pod względem formy zewnętrznej uważam za konieczne zaakcentowanie silniejsze najważniejszych twierdzeń, bądź to przez podkreślenie, bądź to przez użycie tłustego druku. Co do figur, to niektóre z nich należało staranniej wykończyć i dokładniej oznaczyć literami np. fig. 13, 24, 30, 31, 57, 61. Są to jednak wszystko szczegóły drobniejszej wagi: całość robi wrażenie dodatnie.

Toteż kończąc swoje uwagi o podręczniku Love'a, pozwolę sobie raz jeszcze wyrazić zadowolenie, że Pp. tłumacze wzbogacili naszą literaturę dydaktyczną o jedną dobrą książkę, która z pewnością nie sprowadzi żadnego zamętu pojęć, a w ręku dosyć bystrego czytelnika stanie się pożądanym narzędziem w ujęciu praw przyrody w formy matematyczne, lub też zachętą do dalszych studjów matematycznych.

Lwów, 1913 r. *Dr. Antoni Łomnicki.*