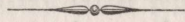


SUR LA SOLUTION
DES
PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

PAR LES COURBES LES PLUS SIMPLES

ET CONVENANT EN PARTICULIER A CHAQUE GENRE DE PROBLÈMES,

DISSERTATION EN TROIS PARTIES.



PREMIÈRE PARTIE.

Ce peut être un paradoxe que de dire que, même en Géométrie, Descartes n'était qu'un homme; mais, pour le reconnaître, que les plus subtils Cartésiens examinent s'il n'y a pas une imperfection dans la distribution faite par leur maître des lignes courbes en certaines classes ou degrés, et si l'on ne doit pas adopter un classement plus satisfaisant et plus conforme aux véritables lois de l'Analyse géométrique. Nous pensons pouvoir soulever cette question sans diminuer en rien la gloire d'un homme aussi illustre, car il est de l'intérêt de Descartes et de tous les Cartésiens que la vérité, dont ils se portent à bon droit comme les plus déclarés partisans, quoique parfois elle soit en désaccord avec leurs opinions, devienne manifeste pour tous, ou, si cette expression est trop générale, au moins pour les géomètres et les analystes.

La distribution en classes déterminées des problèmes de Géométrie a paru nécessaire, non seulement aux anciens, mais aussi aux analystes

modernes. Qu'on propose d'abord les équations

$$a + d = b \quad \text{ou} \quad a^2 + ba = z''.$$

Dans les termes de la première, l'inconnue ne dépasse pas la racine ou le côté, dans la seconde on trouve la seconde puissance ou le carré du côté inconnu; et toutes deux constituent ensemble le premier genre des problèmes, le plus simple. Ce sont là en effet les problèmes que les géomètres ont l'habitude d'appeler *plans*.

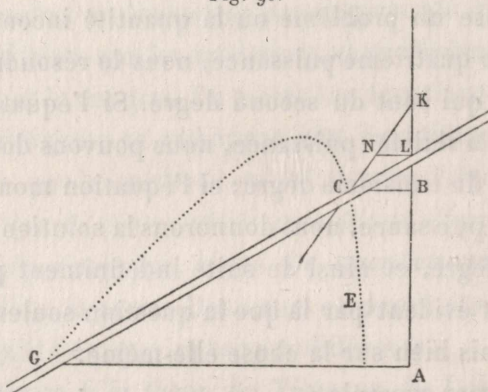
Le second genre de problèmes est celui où la quantité inconnue s'élève à la troisième ou à la quatrième puissance, c'est-à-dire au cube ou au bicarré. La raison pour laquelle deux puissances consécutives ne constituent, quoique différentes de degré, qu'un seul et même genre de problèmes, est que les équations quadratiques se ramènent facilement aux simples ou linéaires, par un procédé que les anciens connaissaient aussi bien que les modernes, et se résolvent donc facilement avec la règle et le compas. De même les équations du quatrième degré ou biquadratiques se ramènent aux équations du troisième degré ou cubiques, par la méthode qu'ont donnée Viète et Descartes. C'est en effet l'objet de cette subtile *paraplérose climatique* de Viète que l'on peut voir dans son traité *De emendatione æquationum*, Chap. VI, et l'artifice dont use Descartes en pareil cas est tout à fait semblable, quoiqu'il l'énonce en termes différents.

De même l'analyste à la façon de Viète ou de Descartes pourra, quoiqu'un peu plus difficilement, ramener l'équation bicubique à la quadratocubique ou, si l'on veut, l'équation du sixième degré à l'équation du cinquième. Mais de ce que, dans les cas précités, où il n'y a qu'une seule quantité inconnue, les équations de degré pair s'abaissent aux équations du degré impair immédiatement inférieur, Descartes a affirmé avec confiance (page 323 de la *Géométrie* qu'il a publiée en français) qu'il en était absolument de même pour les équations renfermant deux quantités inconnues. Car telles sont toutes les équations constitutives de lignes courbes; or, dans ces équations, non seulement la réduction ou abaissement en question ne réussira pas,

courbes du cinquième ou sixième degré. Or c'est une faute en vraie Géométrie que de prendre, pour la solution d'un problème quelconque, des courbes trop complexes ou d'un degré trop élevé, en laissant les plus simples qui conviennent, et Pappus avant les modernes avait déjà remarqué que c'est pécher réellement contre les règles de la Géométrie que de résoudre un problème par un genre de courbes qui ne lui convient pas. Pour éviter cette faute, il faut corriger Descartes et ramener chaque problème à son rang particulier et naturel.

Page 322, Descartes affirme encore nettement que les courbes naisant de l'intersection d'une règle et d'une autre droite ou courbe sont toujours d'un degré ou genre plus élevé que la droite ou courbe de la figure, page 321, dont elles dérivent (*fig. 90*).

Fig. 90.



Mais imaginons, par exemple, au lieu de la droite CNK de ladite figure, page 321, une parabole cubique ayant pour sommet K et pour axe indéfini KLBA; qu'on achève la construction dans l'esprit de Descartes, il est clair que l'équation constitutive de cette parabole cubique sera

$$a^3 = b^2 e.$$

On reconnaîtra aussitôt que la courbe EC provenant de cette supposition n'a qu'une équation biquadratique; donc la courbe biquadratique est d'un degré ou genre plus élevé que la courbe cubique, selon la règle énoncée par Descartes lui-même, alors qu'il affirme au con-

traire expressément (p. 323) que la courbe biquadratique et la cubique sont d'un même degré ou genre.

Quant à notre méthode qui réduit tous les problèmes à l'infini, à savoir ceux d'équations de la troisième et quatrième puissance, à des courbes du second degré; ceux de la cinquième et sixième puissance, au troisième degré; ceux de la septième et huitième puissance, au quatrième degré, et ainsi de suite indéfiniment, nous ne différons pas de la communiquer à tous ceux qui regarderont comme un tort de dissimuler au préjudice de la vérité une erreur quelconque, fût-elle de Descartes.

Qu'on ne s'arrête pas à ce que les problèmes qui montent à la seconde puissance, et qui sont de la même espèce que les problèmes du premier degré (étant appelés *plans* comme eux), ont besoin du cercle, c'est-à-dire d'une courbe du second degré. Cette objection trouvera sa réponse spéciale quand nous donnerons notre méthode générale pour résoudre tous les problèmes absolument par les courbes qui leur conviennent.

SECONDE PARTIE DE LA DISSERTATION.

Pour satisfaire à l'engagement que j'ai pris publiquement, je donne ma méthode générale pour la solution des problèmes quelconques par les courbes qui leur conviennent en propre.

J'ai déjà dit, dans la première Partie de cette Dissertation, que les problèmes de deux degrés immédiatement consécutifs, par exemple 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, 9 et 10, etc., ne réclament qu'un seul degré de courbes. Ainsi ceux des puissances 3 et 4 se résolvent par des courbes du 2^e degré; ceux des puissances 5 et 6, par des courbes du 3^e degré, etc., à l'infini.

Voici la manière d'opérer. L'équation donnée quelconque, qui ne renferme qu'une quantité inconnue, sera d'abord ramenée au degré le plus élevé, je veux dire le pair; puis on la débarrassera du terme où entre l'inconnue au premier degré. Cela fait, il restera une équation

entre la quantité connue ou le terme donné d'une part, et de l'autre un membre inconnu dans chaque terme duquel entrera le carré de la racine inconnue. On égalera ce membre inconnu à un carré dont on formera la racine de façon qu'en égalant ledit carré avec le membre inconnu, on puisse éliminer autant que possible de degrés les plus élevés de la racine inconnue. Il faut d'ailleurs avoir soin que les divers termes de la racine du carré à former ainsi soient tous affectés de la racine ou quantité inconnue, et que le dernier de ces termes soit, en outre, affecté aussi d'une seconde inconnue. On aura ensuite par une simple division d'un côté, par l'extraction d'une racine carrée de l'autre, deux équations constitutives de courbes convenant au problème donné, et leur intersection résoudra la question par la méthode que nous avons appliquée dès longtemps à la solution des problèmes par les lieux.

Soit, comme exemple : $a^6 + ba^5 + z^{II}a^4 + d^{III}a^3 + m^{IV}a^2 = n^{VI}$.

Tous les problèmes qui montent à la cinquième ou sixième puissance peuvent être ramenés à cette forme. Car il suffit pour cela ou d'élever de la cinquième à la sixième puissance, ou de débarrasser celle-ci du terme en a , toutes choses suffisamment enseignées par Viète et Descartes.

On formera le carré de la racine : $a^3 + bae$, et on l'égalera au premier membre de l'équation. On aura ainsi

$$a^6 + 2ba^4e + b^2a^2e^2 = a^6 + ba^5 + z^{II}a^4 + d^{III}a^3 + m^{IV}a^2.$$

Supprimant de part et d'autre a^6 et divisant par a^2 , ce que l'on pourra toujours faire en observant la précaution indiquée pour l'emploi de la méthode, il reste

$$ba^3 + z^{II}a^2 + d^{III}a + m^{IV} = 2ba^2e + b^2e^2,$$

équation qui donne, comme on le voit, une courbe du troisième degré.

Mais, pour avoir la seconde équation et arriver facilement à la solution du problème, il faut égaliser aussi à l'autre membre de l'équation, n^{VI} , le carré de $a^3 + bae$.

Donc, en extrayant la racine carrée et appelant, par exemple, n^{III} la

racine carrée de n^{vi} , qui s'obtient facilement, on aura

$$n^{\text{iii}} = a^3 + bae, \quad \text{racine du carré égalé au premier membre} \\ \text{de la première équation donnée.}$$

Nous avons donc une seconde équation qui donne également une courbe du troisième degré. Qui ne voit maintenant que l'intersection des deux courbes trouvées donnera la valeur de a , c'est-à-dire la solution du problème proposé?

Si le problème monte à la septième ou huitième puissance, on le posera d'abord sous la forme d'une équation de la huitième puissance, puis on débarrassera celle-ci du terme affecté de la seule racine. Cela fait, soit après cette réduction permise et conforme à la méthode :

$$a^8 + ba^7 + d^{\text{ii}}a^6 + n^{\text{iii}}a^5 + m^{\text{iv}}a^4 + g^{\text{v}}a^3 + r^{\text{vi}}a^2 = z^{\text{viii}}.$$

On formera le carré à égaliser aux deux membres de cette équation sur la racine

$$a^4 + \frac{1}{2}ba^3 + d^{\text{ii}}ae.$$

J'ai formé le second terme de cette racine du carré de façon que les deux puissances les plus élevées de l'inconnue a s'éliminent dans l'équation, ce qui est très facile. En égalant le carré de cette racine au premier membre de l'équation proposée, supprimant les termes communs et divisant par a^2 , on aura d'un côté l'équation constitutive d'une courbe du quatrième degré. Puis on extraira la racine carrée du second membre de l'équation proposée en premier lieu; soit p^{iv} cette racine de z^{viii} , on l'égalera à $a^4 + \frac{1}{2}ba^3 + d^{\text{ii}}ae$. Cette équation donnera une autre courbe du quatrième degré et l'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a , c'est-à-dire la solution du problème proposé.

Il faut remarquer, au reste, que, dans les problèmes qui montent aux puissances 9 et 10, on devra former la racine du carré de façon qu'elle comprenne au moins quatre termes, de façon à éliminer les trois degrés les plus élevés de l'inconnue.

Pour les problèmes montant aux puissances 11 et 12, la racine du carré à former doit avoir au moins cinq termes, dont on disposera de

façon à éliminer les quatre degrés les plus élevés de l'inconnue.

Le procédé pour former ainsi la racine est toujours très simple; les analystes trouveront à l'essai qu'il suffit absolument de la division ou application (pour employer les termes géométriques dans un sujet purement géométrique); les signes + et - n'apporteront au reste aucune difficulté pour la pratique de la méthode.

Comme d'ailleurs les problèmes qui montent à la seconde puissance sont réduits à la première par l'extraction de la racine carrée, cette méthode donne leur solution connue au moyen de lignes du premier degré ou de droites; on voit donc s'évanouir la vaine objection dont nous avons parlé dans la première Partie de cette Dissertation, si l'on suppose l'extraction de la racine carrée immédiatement connue pour toute espèce de problèmes.

On a ainsi la résolution et construction exacte et la plus simple possible des problèmes de Géométrie par des lieux naissant suivant les cas de courbes d'espèces différentes et convenant à ces problèmes. Au reste, l'analyste sera libre de faire varier ces courbes, sauf à rester toujours dans le genre naturel aux problèmes, en résolvant ceux du 8^e et 7^e degré par des courbes du 4^e; ceux du 10^e et du 9^e, par des courbes du 5^e; ceux du 12^e et 11^e par des courbes du 6^e et ainsi de suite indéfiniment par une méthode uniforme. Au contraire, d'après Descartes, les problèmes des 8^e et 7^e degré ont besoin de courbes des 5^e et 6^e; les problèmes du 10^e ou du 9^e, de courbes du 7^e ou du 8^e; les problèmes du 12^e ou du 11^e, de courbes du 9^e ou du 10^e, et ainsi de suite indéfiniment; les Cartésiens peuvent voir combien cela est loin de la simplicité et de la vérité géométrique, ou bien, si cela leur plaît, ils essayeront de nous contredire.

Car nous cherchons seulement la vérité, et si elle est cachée quelque part dans les écrits du grand homme, nous aurons la plus grande joie à la reconnaître et à l'embrasser; car, pour employer une formule qui n'est point de moi, j'ai une si grande admiration pour ce génie extraordinaire, que j'estime plus Descartes lorsqu'il se trompe que beaucoup d'autres quand ils ont raison.

TROISIÈME PARTIE DE LA DISSERTATION.

Cela peut suffire pour la théorie générale; car les problèmes que Descartes donne comme résolubles au moyen de courbes d'un degré trop élevé, nous les avons heureusement abaissés par une méthode générale à des courbes d'un degré moitié moindre. Mais on doit comprendre ceci en ce sens qu'il faut au moins ce degré pour toutes les questions absolument, car une infinité de cas spéciaux se prêtent à un abaissement encore plus grand. Je veux donc aller plus loin et ramener l'analyse cartésienne, non seulement à des termes de degré moitié moindre, mais à des degrés 4 fois, 6 fois, 100 fois, et indéfiniment moins élevés pour certains cas. On reconnaîtra mieux ainsi l'erreur de Descartes, et elle trouvera sa correction immédiate par l'analyse; au reste, je désignerai, ce qui est plus commode, dans les degrés élevés, les puissances par les nombres que comportent leurs exposants.

Soit proposé de *trouver six moyennes proportionnelles entre deux données*. Soient b et d les deux données, a la première moyenne à trouver, on a l'équation $a^7 = b^6 d$. D'après Descartes, cette équation ne peut être résolue que par des courbes du 5^e ou du 6^e degré. Dans la seconde Partie de cette Dissertation, elle est, avec toutes les autres de même nature, résolue généralement par des courbes du 4^e degré. Mais rien ne nous empêche de la résoudre par des courbes du 3^e degré. Égalons en effet chacun des membres de l'équation au terme $a^4 e^2 d$. Si, dans l'équation avec a^7 , on divise de part et d'autre par a^4 , il vient $e^2 d = a^3$, ce qui donne, comme on voit, une courbe du 3^e degré. De l'autre côté, $a^4 e^2 d = b^6 d$; divisant par d et extrayant la racine carrée, $a^2 e = b^3$, ce qui donne également une courbe du 3^e degré. L'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a , c'est-à-dire la solution du problème proposé au moyen de courbes du 3^e degré.

Soit proposé maintenant de *trouver douze moyennes proportionnelles entre deux données*; l'équation sera $a^{13} = b^{12} d$. Descartes a pensé qu'elle ne peut se résoudre que par des courbes du 11^e ou 12^e degré.

J'ai enseigné, en général, dans la seconde Partie de cette Dissertation, que toutes les équations de ce degré peuvent être résolues par des courbes du 7^e degré. Mais une recherche plus attentive donne immédiatement une solution élégante par des courbes du 5^e; on peut même l'obtenir par des courbes du 4^e, comme on le verra ensuite.

Égalons d'abord chacun des deux membres au terme $a^8 e^4 d$. Dans la première équation, avec a^4 , divisant de part et d'autre par a^8 , il vient $a^5 = e^4 d$, courbe du 5^e degré. Dans la seconde équation, avec $b^{12} d$, divisant par d et extrayant la racine quatrième ou biquadratique, on a $a^2 e = b^3$, courbe du 3^e degré. Le problème proposé est ainsi résolu par deux courbes, l'une du 5^e, l'autre du 3^e degré.

Mais on peut résoudre ce problème encore plus facilement, c'est-à-dire par des courbes du 4^e degré. Si, en effet, on égale les deux membres à $a^9 e^3 d$, on aura d'un côté, en divisant par a^9 , $a^4 = e^3 d$, équation d'une courbe du 4^e degré; d'autre part, en divisant par d et extrayant la racine troisième ou cubique : $a^3 e = b^4$, ce qui donne aussi une courbe du 4^e degré. Ainsi nous avons une construction facile par deux courbes du 4^e degré.

Après ces exemples, on ne peut douter que l'*invention de 30 moyennes proportionnelles* ne puisse s'obtenir par des courbes du 7^e ou même du 6^e degré. Égalons, en effet, les deux membres de l'équation $a^{34} = b^{30} d$ au terme commun $a^{24} e^6 d$; le problème sera ramené à des courbes du 7^e degré. Par le terme commun $a^{25} e^5 d$, il le sera à des courbes du 6^e.

De même, l'*invention de 72 moyennes proportionnelles* se fera par des courbes du 9^e degré, et il est clair, d'après ce qui précède, que l'on peut assigner un rapport plus grand que tout rapport donné entre le degré du problème et celui des courbes qui le résolvent. Quand les Cartésiens auront vu cela, je ne doute pas qu'ils ne reconnaissent la nécessité de notre remarque et de notre correction.

Il faut observer qu'il convient souvent de changer la forme de l'équation pour que le degré soit susceptible d'une division commode en parties aliquotes. Il sera inutile de répéter cette remarque.

Qu'on propose, par exemple, l'*invention de 10 moyennes*, c'est-à-dire

l'équation $a^{11} = b^{10}d$, on multipliera les deux termes par une droite donnée, z par exemple; l'équation deviendra $a^{11}z = b^{10}dz$, et l'on arrive ainsi au nombre 12, qui permet facilement une réduction ou abaissement par ses parties aliquotes. En égalant chacun des deux membres à a^8e^4 , on aura d'un côté l'équation $a^3z = e^4$, courbe du quatrième degré. De l'autre côté, en extrayant la racine bicarrée, soit celle-ci n''' par le terme donné $b^{10}dz$, on a $a^2e = n'''$, courbe du troisième degré. Ainsi on trouvera dix moyennes par deux courbes, l'une du 4^e, l'autre du 3^e degré, ce à quoi on est arrivé facilement par un petit changement de l'équation primitive.

Je ne m'arrête pas aux autres abréviations que l'art fournira de lui-même aux analystes et qui sont en nombre infini. J'ajoute toutefois que ce que je viens de dire s'applique non seulement quand la puissance inconnue se trouve sans aucun autre terme affecté d'un degré moins élevé, mais encore s'il y a des termes de degrés voisins du plus élevé, comme dans l'équation $a^{13} + na^{12} + ma^{11} + ra^{10} = b^{12}d$.

La solution de cette question, en prenant le même terme commun que ci-dessus, a^9e^3a , sera aussi facile que celle de l'invention de 12 moyennes entre deux données. Le même artifice s'emploierait de même pour les équations d'autres degrés plus élevés.

Cependant il faut remarquer que, dans les équations où se trouve seulement un terme inconnu dans un des membres, il faut que l'exposant de la puissance unique de l'inconnue soit un nombre premier, pour que l'on désigne par cet exposant le degré du problème. Si, en effet, l'exposant est composé, le problème se ramène immédiatement au degré des diviseurs.

Si l'on demande, par exemple, 8 moyennes proportionnelles entre deux données, on aura l'équation $a^9 = b^8d$. Dans ce cas, le nombre 9 étant composé et ayant deux fois 3 comme facteur, le problème doit être regardé comme du troisième degré, et il l'est de fait. Si, en effet, on trouve deux moyennes proportionnelles entre les deux données, si ensuite on intercale de nouveau deux moyennes proportionnelles entre le premier et le second terme de la progression ainsi formée,

puis entre le second et le troisième, puis entre le troisième et le quatrième, on aura 8 moyennes entre les deux lignes proposées en premier lieu.

Si l'on demande maintenant 14 moyennes entre deux données, l'équation $a^{15} = b^{14}d$ montre que le problème se ramène à deux autres, l'un du 3^e, l'autre du 5^e degré.

On voit ainsi que l'exposant de la puissance unique doit être un nombre premier pour exprimer et représenter véritablement le degré du problème.

Comme d'ailleurs je considère comme certain que *les nombres obtenus en ajoutant l'unité aux carrés successifs que l'on forme en partant de 2 sont toujours premiers*, théorème dont j'ai depuis longtemps annoncé la vérité aux analystes, je veux dire que les nombres

$$3, 5, 17, 257, 65537, \dots, \text{ à l'infini}$$

sont premiers; il n'y a aucune difficulté pour trouver un procédé permettant de *construire un problème dont le degré soit dans un rapport plus grand que tout rapport donné avec le degré des courbes qui servent à le résoudre.*

Par exemple, soit proposé de trouver entre deux données 256 moyennes proportionnelles, on aura l'équation $a^{257} = b^{256}d$; on égalera les deux termes à $a^{240}e^{16}d$, et la question sera résolue par des courbes du 17^e degré.

Si l'on cherchait 65536 moyennes proportionnelles, le problème serait résolu par des courbes du 257^e degré, et ainsi de suite indéfiniment, en abaissant le degré du plus grand nombre à celui du nombre immédiatement inférieur. Et qui ne voit qu'en deux nombres consécutifs, le rapport augmente indéfiniment?

Les Cartésiens essayeront-ils encore de dissimuler l'erreur de Descartes? Quant à moi, je m'abstiens de rien prévoir : j'attends avec intérêt, mais sans rien ajouter de plus, ce qu'il adviendra à ce sujet.

