

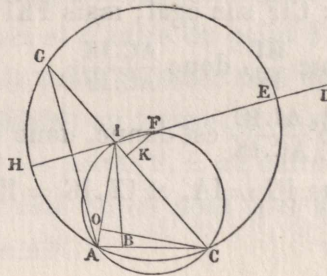
## FRAGMENTS GÉOMÉTRIQUES.

### SOLUTION D'UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. DE PASCAL.

M. de Pascal a proposé : *Dans un triangle, étant donné l'angle au sommet et le rapport de la hauteur à la différence des côtés, trouver l'espèce du triangle.*

Soit AC (*fig. 65*) une droite donnée quelconque, sur laquelle on décrit le segment de cercle AIFC, capable de l'angle donné. La ques-

Fig. 65.



tion est ramenée à chercher un triangle dont on donne la base AC, l'angle au sommet AIC et le rapport de la hauteur à la différence des côtés.

Supposons le problème résolu; soit AIC le triangle cherché; j'abaisse la hauteur IB, je prends le milieu F de l'arc AFC. Je joins FA, FC et FI, j'abaisse sur AI, IC les perpendiculaires CO, FK; de F comme centre, avec AF pour rayon, je décris le cercle AHGEC, que les droites CI, FI

prolongées rencontrent aux points G, H, E. Enfin je joins CA.  $\widehat{AFC}$  au centre est double de  $\widehat{AGC}$  à la circonférence. Mais  $\widehat{AIC} = \widehat{AFC}$  dans le même segment. Donc  $\widehat{AIC} = 2\widehat{AGC}$ . Mais  $\widehat{AIC} = \widehat{AGC} + \widehat{IAG}$ . Donc  $\widehat{IGA} = \widehat{IAG}$ . Donc  $IA = IG$ . Mais, FK étant perpendiculaire du centre F sur GC, on a  $GK = KC$ . Donc  $KI = \frac{1}{2}(CI - IG) = \frac{1}{2}(CI - IA)$ .

Mais le rapport  $\frac{BI}{CI - IA}$  est donné, donc  $\frac{BI}{IK}$ , et en multipliant de part et d'autre par AC,  $\frac{AC \cdot BI}{AC \cdot IK}$ . Mais  $AC \cdot BI = AI \cdot CO$ , le triangle AIC étant la moitié de chacun de ces deux rectangles. Donc le rapport  $\frac{AI \cdot CO}{AC \cdot IK}$  est donné.

Mais, par hypothèse,  $\widehat{AIC}$  est donné,  $\widehat{COI}$  est droit par construction. Donc  $\triangle COI$  est donné d'espèce. Donc le rapport  $\frac{CO}{CI}$  est donné, donc  $\frac{AI \cdot CO}{AI \cdot IC}$ . Mais j'ai prouvé que  $\frac{AI \cdot OC}{AC \cdot IK}$  est donné; donc  $\frac{AI \cdot IC}{AC \cdot IK}$  est donné.

Maintenant dans le triangle isoscèle AFC,  $\widehat{AFC}$  est donné par hypothèse, donc  $\widehat{FAC}$ , donc  $\widehat{CIF}$  son égal; mais  $\widehat{FKI}$  est droit, donc  $\triangle FIK$  est donné d'espèce, donc  $\frac{KI}{IF}$ , donc  $\frac{AC \cdot IK}{AC \cdot IF}$ .

Mais j'ai prouvé que  $\frac{AI \cdot IC}{AC \cdot IK}$  est donné, donc  $\frac{AI \cdot IC}{AC \cdot IF}$  est donné. Mais  $CI \cdot IA = CI \cdot IG$ , puisque  $IG = IA$ , et  $CI \cdot IG = HI \cdot IE$ . Donc  $\frac{HI \cdot IE}{AC \cdot IF}$  est donné.

Soit  $\frac{ED}{AC}$  ce rapport donné : AC étant donnée, ED le sera; portons cette longueur sur le prolongement de HE, comme dans la figure.  $\frac{HI \cdot IE}{AC \cdot IF} = \frac{ED}{AC}$  (rapport donné). Mais  $\frac{DE}{AC} = \frac{DE \cdot IF}{AC \cdot IF}$ . Donc  $\frac{HI \cdot IE}{AC \cdot IF} = \frac{DE \cdot IF}{AC \cdot IF}$ . Donc  $DE \cdot IF = HI \cdot IE$ .

Mais j'ai prouvé que le triangle AFC est donné d'espèce; la base AC est donnée de grandeur; donc AF est donnée, donc son double HE.

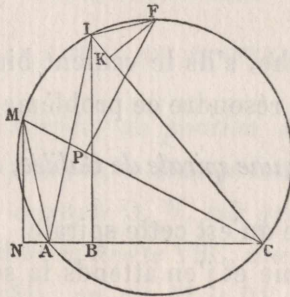
Aux rectangles égaux DE · IF, HI · IE, ajoutons de part et d'autre



DE. IH. On aura  $DE \cdot FH = DI \cdot IH$ . Mais, DE, FH étant données, DE. FH le sera; donc DI. IH; et ce produit appliqué sur la droite DH donnée de grandeur est en défaut d'une figure carrée (<sup>1</sup>); donc IH est donnée, et par différence IF. Mais F est donné de position, donc le point I et tout le triangle AIC. Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Pour dissiper tous les doutes, il est aisé de prouver que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC de la seconde figure (*fig.* 66)

Fig. 66.



(ce triangle peut au reste avoir son sommet des deux côtés du point F, à égale distance de part et d'autre du point F; il sera le même d'espèce et de grandeur, la position seule sera différente). Si le triangle cherché n'est pas semblable au trouvé, la base restant la même, son sommet tombera entre les points F, I, ou entre les points I, A (le côté n'importe pas, car du côté FC on peut faire la même démonstration avec le second triangle AIC.)

Soit d'abord le sommet entre A et I, et supposons, s'il est possible, le triangle cherché semblable au triangle AMC. Je joins FM, et j'abaisse la perpendiculaire FP; le rapport  $\frac{MN}{MP}$  sera donné par hypothèse et par conséquent égal à  $\frac{IB}{IK}$  que nous avons prouvé être égal au rapport donné; ce qui est absurde.

(<sup>1</sup>) C'est-à-dire que  $DI \cdot IH = DH \cdot IH - IH^2$ .

En effet, dans les triangles rectangles FMP, FIK,  $\hat{M} = \hat{I}$ , donc ces triangles FIK, FMP sont semblables; mais  $FM > FI$ , donc  $MP > IK$ . Mais  $MN < IB$ , donc  $\frac{MN}{MP}$  ne peut être égal à  $\frac{IB}{IK}$ .

Si le point M tombe entre I et F, on prouvera que la hauteur est plus grande et la différence des côtés plus petite et cela par le même raisonnement; donc le rapport est différent. Si M est du côté FC, on se servira du second triangle AIC, et la démonstration sera la même. Il est ainsi inutile de s'arrêter plus longtemps à ces cas, et il est constant que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC. Le problème est donc résolu.

Je propose en revanche, s'ils le veulent bien, tant à M. de Pascal qu'à M. de Roberval, de résoudre ce problème :

*En un point donné sur une spirale de Galilée, trouver la tangente.*

M. de Roberval sait ce qu'est cette spirale.

J'ai résolu ce problème et j'en attends la solution d'hommes aussi savants qu'ils le sont; mais, s'ils le préfèrent, je leur communiquerai la mienne et même une méthode générale pour les tangentes des lignes courbes.

Toutefois, pour ne pas paraître quitter les mains vides ce sujet des triangles, je puis proposer les questions suivantes :

*Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.*

*Étant donnés la base, l'angle au sommet et la différence de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.*

*Étant donnés la base, l'angle au sommet et le produit de la hauteur par la différence des côtés, trouver le triangle.*

*Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme des carrés de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.*

ainsi que beaucoup d'autres questions semblables que mes savants correspondants résoudront toutefois plus facilement, je pense, que le



problème ou théorème proposé sur la tangente à la spirale de Galilée.

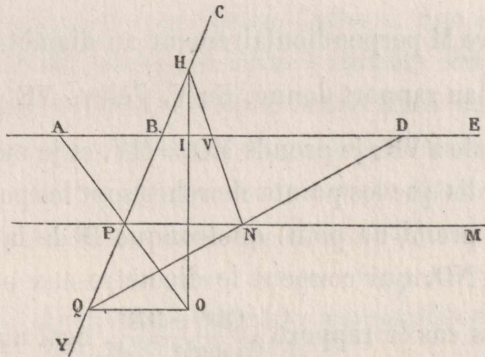
Il faut observer que, dans les questions sur les triangles, toutes les fois que le problème peut être résolu par les lieux plans, il ne faut pas recourir aux solides, mais mes savants correspondants le savent assez, et il était sans doute inutile de faire cette remarque.

## DEUX PORISMES

(DE PIERRE DE FERMAT).

PORISME I. — *Étant données de position deux droites ABE, YBC (fig. 67), se coupant au point B, et deux points A, D sur la droite ABE, trouver deux points, par exemple O, N, tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque H de la droite YBC, une ligne OHN coupant aux points I et V la droite ABD, on ait  $AI \times DV$  égal à une aire donnée, savoir  $AB \times BD$ .*

Fig. 67.



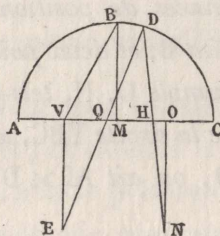
Voici la construction porismatique d'Euclide qui représente la solution la plus générale du problème.

Soit pris quelconque le point O; je joins AO qui coupe YBC en P, et, par O, je mène OQ parallèle à ABD et rencontrant YBC en Q. Je mène également, parallèle à ABD, l'indéfinie PNM. Je joins QD qui

coupe PNM en N. Je dis que les deux points O, N satisfont à la question, c'est-à-dire que si l'on prend n'importe où sur la droite YBC un point H, et qu'on joigne OH, NH, qui coupent la droite ABD aux points I, V, on aura dans tous les cas  $AI \times DV = AB \times BD$ .

PORISME II. — *Étant donné un cercle ABDC (fig. 68) de diamètre AC, de centre M, trouver deux points E, N, tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque D de la circonférence, une ligne EDN coupant le diamètre aux points Q, H, la somme des carrés de QD, DH soit au triangle QDH dans un rapport donné et que cette relation subsiste toujours généralement, quelle que soit la ligne brisée.*

Fig. 68.



J'éleve du centre M perpendiculairement au diamètre la droite MB. Je pose  $\frac{4BV}{VM}$  égal au rapport donné. En V, j'éleve VE perpendiculaire au diamètre et égale à VB; je prends  $MO = MV$ , et je mène ON égale et parallèle à VE. Je dis que les points cherchés sont les points E, N, c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque D de la circonférence, qu'on joigne ED, ND, qui coupent le diamètre aux points Q, H, on aura dans tous les cas le rapport  $\frac{QD^2 + DH^2}{\text{triangle QDH}}$  égal au donné, savoir  $\frac{4BV}{VM}$ .

On ne propose pas seulement de trouver la démonstration de ce porisme. Que les mathématiciens plus subtils voient s'il n'y a pas en dehors de E et de N deux autres points qui puissent satisfaire au problème et s'il y a, comme dans le premier porisme, des solutions en



nombre indéfini. Si je n'ai pas de réponse, je ne dédaignerai pas de venir au secours de la Géométrie sur le point où elle se trouvera en défaut.

---

## PORISMES D'EUCLIDE,

LEUR THÉORIE RENOUVELÉE ET PRÉSENTÉE AUX GÉOMÈTRES MODERNES  
SOUS FORME D'INTRODUCTION.

Au commencement de son Livre VII, Pappus a énuméré les Livres des géomètres anciens qui faisaient partie de l'ensemble analytique. Tous ces Livres sont perdus par l'effet du temps, sauf le seul Livre d'Euclide sur les *Données* et les quatre premiers des *Coniques* d'Apollonius; aussi les géomètres modernes ont-ils eu à faire de grands efforts pour réparer tant soit peu la perte d'Ouvrages, dont l'âge destructeur tendait à abolir jusqu'à la mémoire. Avant tous, François Viète, ce génie si subtil qu'on ne louera jamais assez, a heureusement restitué les Livres d'Apollonius *Sur les contacts* dans un Livre unique qu'il a intitulé l' « *Apollonius Gallus* ». Son exemple a excité Marino Ghetaldi et Willebrord Snellius à aborder des entreprises analogues, dans lesquelles ils ont assez réussi pour que, grâce à eux, nous ne regrettions plus guère les Livres d'Apollonius *De la section en rapport, De la section en produit, De la section déterminée, Des convergences*. Suivaient les *Lieux plans*, les *Lieux solides* et les *Lieux en surface*. Ces matières ont été traitées à leur tour par des géomètres dont le nom n'est pas inconnu, et, quoique manuscrits et encore inédits, leurs travaux ne sont pas restés ignorés.

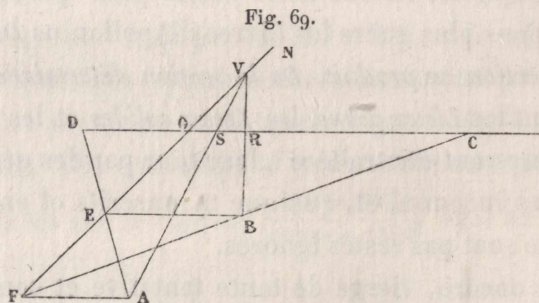
Mais il reste encore, vierge de toute tentative et comme désespérante, la théorie des Porismes d'Euclide. Pappus a beau affirmer que c'était « une œuvre pleine d'art et de la plus grande utilité pour la solution des problèmes les plus obscurs », les géomètres de l'âge écoulé ou du temps actuel en ont ignoré jusqu'au nom, ou n'ont pas

même soupçonné de quoi il s'agissait. J'ai longtemps tâtonné dans de profondes ténèbres, cherchant en vain comment relever la Géométrie de ce côté, jusqu'à ce qu'enfin « une lumière éclatante a frappé mes yeux et a dissipé pour eux l'obscurité de la nuit ». Je ne veux pas cacher jalousement à la postérité un spécimen de ma découverte à la fois ancienne et nouvelle, alors que l'astre de Suède brille sur toutes les sciences et que nous déroberions en vain comme des mystères les secrets des Mathématiques; il n'est en effet rien qui puisse échapper au clairvoyant génie de cette reine incomparable, et il ne nous est pas permis de cacher une théorie qui, nous pouvons à peine en douter, serait découverte au premier signe venu d'elle, comme inspiration ou comme ordre.

Pour jeter donc la lumière sur toute cette question des porismes, j'ai choisi un certain nombre des plus remarquables propositions porismatiques, et je les présente avec confiance à l'attention et à l'examen des géomètres, pour bien faire connaître ce qu'est un porisme et quel en est surtout l'usage.

#### PORISME I.

Soient deux droites  $ON$ ,  $OC$  (*fig. 69*) formant un angle au point  $O$  et données de position. Soient donnés également les points  $A$  et  $B$ .



De ces points  $A$ ,  $B$ , on mène les droites  $BE$ ,  $AF$ , parallèles à  $OC$  et rencontrant  $NO$  prolongée aux points  $E$ ,  $F$ . On joint  $AE$  qui rencontre  $CO$  prolongée en  $D$ , et on joint aussi  $FB$  qui rencontre en  $C$  cette même

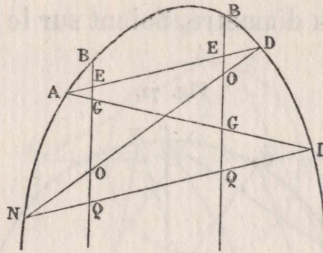


droite CO. Si maintenant d'un point quelconque de la droite ON, V par exemple, on mène les droites AV, BV, soit S le point de rencontre de AV et de OC, R celui de BV et de la même droite OC, on aura toujours  $CR \times DS = CO \times DO$ , c'est-à-dire une aire donnée.

PORISME II.

Soit une parabole quelconque NAB (*fig. 70*) et un de ses diamètres quelconque BEO. Je prends sur la courbe deux points quelconques D

Fig. 70.

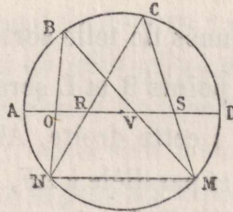


et N, desquels je mène des droites concourant en un autre point quelconque de la courbe, soit en D. Ces droites AD, DN couperont le diamètre en des points tels que E, O ou G, Q. Les abscisses sur un même diamètre seront toujours dans un même rapport, c'est-à-dire qu'on aura constamment  $\frac{OB}{BE} = \frac{QB}{GB}$ .

PORISME III.

Soit un cercle ayant pour diamètre une droite AD (*fig. 71*); je mène

Fig. 71.



à celle-ci une parallèle quelconque NM, rencontrant le cercle aux points N, M. Soient donnés ces points N, M; je mène arbitrairement de

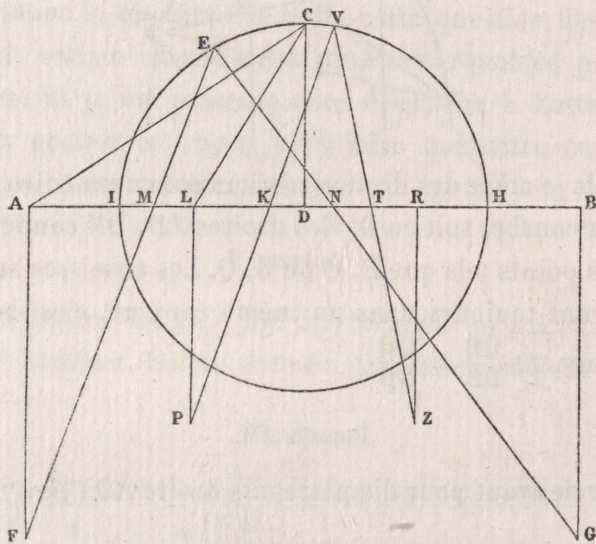
ces points une ligne NBM brisée sur le cercle et qui coupe le diamètre en des points O, V. Je dis que le rapport  $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO}$  est donné; ou bien que si l'on mène une autre ligne brisée NCM, coupant le diamètre aux points R, S, on aura toujours  $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO} = \frac{AR \cdot DS}{AS \cdot DR}$ .

Il est facile d'étendre cette proposition aux ellipses, aux hyperboles et aux sections opposées.

PORISME IV.

Soit le cercle ICH (*fig. 72*), son diamètre IDH donné, son centre D, son rayon CD normal au diamètre. Soient sur le prolongement du dia-

Fig. 72.



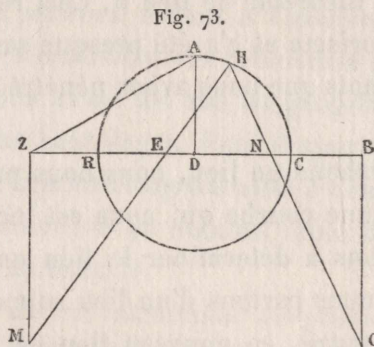
mètre deux points B, A donnés de telle sorte que  $AI = BH$ . Soit posé  $\frac{DI}{IA} = \frac{DL}{LI}$  et  $DR = DL$ ; les points R et L seront donnés. Qu'on joigne CA et qu'on prenne, égale à cette droite, AF perpendiculaire au diamètre. Soit enfin BG égale et parallèle à AF, et des points F, G, menée brisée sur le cercle une droite FEG qui coupe le diamètre aux points M et N. Je dis que la somme  $RM^2 + LN^2$  est toujours égale à une même aire donnée.



En second lieu, avec les mêmes positions, si l'on joint CL, que l'on prenne, égale à cette droite, LP perpendiculaire au diamètre, et qu'on mène RZ parallèle et égale à LP; si des deux points Z et P on mène brisée sur la circonférence une ligne comme PVZ, coupant le diamètre aux points K, T, la somme  $AT^2 + BK^2$  sera toujours égale à une autre aire donnée.

## PORISME V.

Soit le cercle RAC (*fig. 73*), son diamètre RDC donné, son centre D, son rayon DA normal au diamètre. Soient pris arbitrairement sur le



diamètre, mais à égale distance du centre D, deux points Z, B. Joignons AZ; menons, égale à cette droite, ZM perpendiculaire au diamètre et BO égale et parallèle à ZM. Qu'on mène, brisée sur la circonférence, une ligne quelconque MHO, coupant le diamètre aux points E, N; le rapport  $\frac{EH^2 + HN^2}{\text{triangle EHN}}$  sera donné et égal au rapport  $\frac{AZ}{\frac{1}{2}ZD}$ .

Par l'énoncé de ces propositions, dont personne ne niera l'élégance et la beauté, on peut facilement reconnaître la nature même des porismes. Il est évident en effet qu'on peut, ainsi que le dit Pappus, les énoncer comme théorèmes ou comme problèmes. Je les ai énoncées comme théorèmes; mais rien n'empêche de les transformer en problèmes. Par exemple le porisme V peut être conçu comme suit :

*Étant donné un cercle RAC de diamètre RC, trouver deux points M et O, tels que si de ces points on mène, brisée sur la circonférence, une*

*ligne quelconque MHO, on ait toujours comme donné le rapport au triangle EHN de la somme des carrés des abscisses EH, HN.*

La construction résulte du théorème qui précède : si en effet on prend dans le rapport donné  $\frac{AZ}{\frac{1}{4}ZD}$ , tout le reste s'ensuit. De la même manière, on peut, pour tous les autres porismes sans exception, transformer facilement les théorèmes en problèmes.

D'autre part, Pappus indique qu'au sens des géomètres postérieurs à Euclide : « le porisme est en défaut, en ce qui concerne l'hypothèse, par rapport au théorème de lieu ». Cela révèle entièrement la nature spéciale du porisme et c'a été presque sans autre indice que celui fourni par ces mots que nous avons pénétré les secrets de cette matière.

Lorsque nous cherchons un lieu, nous nous proposons de trouver une ligne droite ou une courbe qui nous est inconnue en tant seulement que nous avons à déterminer le lieu qu'occupe la ligne à trouver; mais quand nous partons d'un lieu supposé donné et connu pour en trouver un autre, ce nouveau lieu est appelé *porisme* par Euclide, et c'est pourquoi Pappus a ajouté avec grande raison que les lieux eux-mêmes sont une espèce de porismes et qu'on leur donne ce nom.

Comme seul exemple, nous allons appliquer notre définition à la figure du porisme V. La droite RC étant donnée, si l'on cherche une courbe quelconque telle que RAB dont la propriété soit qu'en abaissant d'un quelconque de ses points A la perpendiculaire AD, on ait  $AD^2 = RD \times DC$ , nous trouverons que la courbe RAC est une circonférence de cercle. Mais si, ce lieu étant déjà donné, nous partons de là pour en trouver un autre, par exemple, le problème du porisme V, ce nouveau lieu sera appelé *porisme*, comme tous les autres en nombre infini que la sagacité d'un analyste exercé peut imaginer et déduire de celui qui est déjà connu.

Comme nous l'avons déjà dit, les lieux eux-mêmes sont des porismes; il faut d'ailleurs corriger d'après le texte grec l'erreur du traducteur



de Pappus à cet endroit où il dit que : « *L'Ouvrage des Porismes est très utile pour les résolutions des problèmes les plus obscurs et de leurs genres qui ne comprennent pas cette nature qui en fournit la multitude* ». Ces derniers mots, pour ainsi dire, n'offrent aucun sens; il faut recourir à Pappus lui-même dont le texte est le suivant, d'après les manuscrits :

Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλήθος.

Pappus dit que *les porismes servent à l'analyse des problèmes plus obscurs et des genres*, c'est-à-dire des problèmes généraux. Il résulte en effet de ce que nous avons dit que les propositions des porismes sont générales au plus haut degré. Puis il ajoute : « *dont la nature fournit une multitude à peine compréhensible à l'esprit* », mots par lesquels il indique ces solutions en nombre infini du même problème, qui tiennent presque du miracle.

A notre invention de ces théorèmes ou problèmes, s'ajoute une méthode particulière, dérivant de la pure Analyse, et grâce à laquelle, avec les cinq porismes précédents, nous en avons trouvé, construit et démontré beaucoup d'autres.

Si les savants accueillent avec faveur ce peu que nous donnons à titre seulement d'introduction et de prodrome d'une œuvre plus approfondie, nous pourrons un jour restituer la totalité des trois Livres des porismes, et, bien plus, pousser plus loin qu'Euclide lui-même et découvrir des porismes vraiment étonnants et qui jusqu'à présent sont inconnus, sur les sections coniques et sur d'autres courbes quelconques.

---

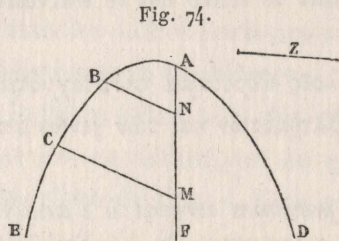
#### PROPOSITION DE M. DE FERMAT SUR LA PARABOLE.

J'ai proposé de *décrire une parabole par quatre points donnés*.

Il y a deux cas, pour chacun desquels il faut d'abord poser le lemme



suisant. Soit ECBAD (*fig. 74*) une parabole dont le diamètre AF est donné de position; soient également donnés les points B, C de la parabole et l'angle des ordonnées sur le diamètre AF. Je dis que la parabole est donnée de position.



Menons les ordonnées BN, CN. Du point B donné, BN est menée sous un angle donné (puisque'on donne l'angle des ordonnées) sur AF donnée de position; donc le point N est donné; de même M. Les droites BN, CM sont donc données de position et de grandeur. Mais d'après la nature de la parabole,  $\frac{CM^2}{BN^2} = \frac{MA}{NA}$ , si l'on suppose que A est le sommet de la parabole ou l'extrémité du diamètre. Le rapport  $\frac{MA}{NA}$  est ainsi donné, ou, *dividendo*, le rapport  $\frac{MN}{NA}$ ; mais MN est donnée, avec les points M et N, donc NA, donc le point A. Si d'ailleurs on pose  $\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{Z}$ , Z côté droit de la parabole sera donné, les autres droites l'étant. Ainsi, on a donnés : le sommet A, le côté droit Z, le diamètre AF de position, l'angle des ordonnées. Donc la parabole est donnée de position (Apollonius, I, 52).

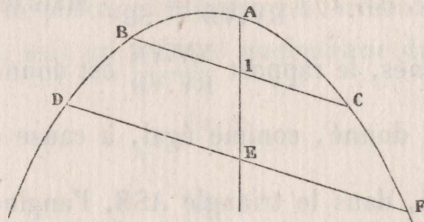
Cela posé, il est facile de construire le premier cas (*fig. 75*). Soient donnés les quatre points B, C, D, F; si on les joint par les droites BC, CF, FD, DB, ou bien aucune ne sera parallèle à l'opposée, ou bien, comme dans ce cas, on aura par exemple BC parallèle à DF.

Prenons les milieux I, E de ces deux droites et supposons le problème résolu; si on joint IE, qui divise par moitié deux parallèles, ce sera un diamètre de la parabole. Mais I, E sont donnés, donc IE l'est de position, ainsi que l'angle DEI. On a donc donnés : le diamètre IE



de position, l'angle des ordonnées et deux points B, D de la parabole; donc la parabole DBACF est donnée de position.

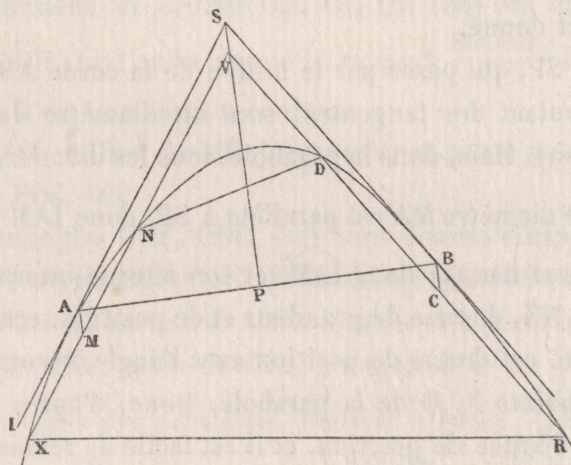
Fig. 75.



Le second cas est plus difficile : c'est celui où aucune des droites joignant deux des points donnés n'est parallèle à une autre.

Soient donnés (fig. 76) quatre points X, N, D, R, en sorte que si l'on joint XR, RD, DN, NX, aucune ne soit parallèle à l'opposée. Sup-

Fig. 76.



posons le problème résolu et tracée la parabole XANDBR satisfaisant à la condition proposée. Soient V le point de rencontre de XN, RD prolongées, M, C les milieux de XN, RD. Menez par ces milieux les diamètres MA, CB qui rencontrent la parabole aux points A, B, et par ces derniers IAS, SB parallèles à XV, VR et se rencontrant en S. Je joins AB, j'en prends le milieu en P et je joins SP.

Cette construction faite, il est clair que IAS, menée par le sommet du diamètre MA parallèlement à l'ordonnée XN, est tangente à la parabole en A. On prouvera de même que SB est tangente à la parabole en B. Donc (Apoll., III, 17)  $\frac{XV.VN}{RV.VD} = \frac{AS^2}{SB^2}$ . Mais les quatre points X, N, D, R étant donnés, le rapport  $\frac{XV.VN}{RV.VD}$  est donné, donc  $\frac{AS^2}{SB^2}$ , donc  $\frac{AS}{SB}$ . Mais  $\widehat{ASB}$  est donné, comme égal, à cause des parallèles, au donné  $\widehat{XVR}$ . Ainsi, dans le triangle ASB, l'angle au sommet S est donné avec le rapport des côtés  $\frac{AS}{SB}$ ; donc ce triangle est donné d'espèce, donc  $\widehat{SAB}$  et le rapport  $\frac{SA}{AB}$ ; donc, puisque  $AP = \frac{1}{2}AB$ , le rapport  $\frac{SA}{AP}$  est donné. Ainsi dans le triangle SAP, l'angle en A est donné avec le rapport des côtés  $\frac{SA}{AP}$ ; donc le triangle est donné d'espèce, donc  $\widehat{PSA}$  est donné.

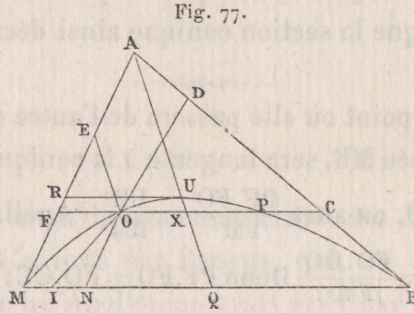
Ceci posé, SP, qui passe par le milieu de la corde AB joignant les points de contact des tangentes, sera un diamètre de la parabole (Apoll., II, 29). Mais, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles, donc le diamètre MA est parallèle à SP, donc  $\widehat{IAM} = \widehat{ASP}$ . Mais  $\widehat{ASP}$  est prouvé donné; donc  $\widehat{IAM}$ , et son alterne-interne  $\widehat{NMA}$ . Mais M, milieu de NX, donnée de grandeur et de position, est donné. Donc MA, diamètre, est donné de position avec l'angle des ordonnées AMN et les deux points N, D de la parabole. Donc, d'après le lemme, la parabole est donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Il est clair que, dans ce dernier cas, deux paraboles satisfont au problème, car les droites DN, XR, supposées non parallèles, se rencontrent, et alors, par le même raisonnement, on peut tracer une parabole qui résout également le problème.



## DÉMONSTRATION DU LIEU A TROIS DROITES.

Soient données de position trois droites formant un triangle : AM, MB, BA (*fig. 77*); soit un point O quelconque duquel on mène sur



les droites données les droites OE, OI, OD sous les angles donnés OEM, OIM, ODB. Soit enfin donné le rapport  $\frac{EO \cdot OD}{OI^2}$ . Je dis que le lieu du point O est une section conique.

Prenez en Q le milieu de MB, joignez AQ et par O menez à MB, MA les parallèles FOC, ON.

Les trois triangles OEF, ODC, OIN sont donnés d'espèce : car, par hypothèse, les angles OEF, ODC, OIN sont donnés, et il en est de même de l'angle EFO égal au donné AMB, à cause des parallèles; de OCD, égal au donné MBA; enfin de ONI, puisque ONB est donné comme égal à AMB à cause des parallèles. Donc le rapport  $\frac{OE}{OF}$  est donné; de même le rapport  $\frac{OD}{OC}$ ; donc le rapport  $\frac{EO \cdot OD}{FO \cdot OC}$ . Mais, par hypothèse, le rapport  $\frac{EO \cdot OD}{OI^2}$  est donné; donc le rapport  $\frac{FO \cdot OC}{OI^2}$  sera donné. Mais le rapport  $\frac{OI^2}{ON^2}$  est donné, puisque le triangle OIN est donné d'espèce; donc le rapport  $\frac{FO \cdot OC}{ON^2}$  ou  $\frac{FO \cdot OC}{FM^2}$  sera donné (FM étant égal à ON).

Si on partage AQ en U de telle façon qu'en menant UR parallèle

à MB, le rapport  $\frac{UR^2}{RM^2}$  soit égal au donné  $\frac{FO \cdot OC}{FM^2}$  (ce qui est facile, puisque l'angle MRU est donné), et si l'on fait passer par le point U une section conique ayant AQ pour diamètre et tangente en M, B aux droites MA, AB (ce qui est très facile et donnera d'ailleurs, suivant les différentes positions du point U, soit une parabole, soit une hyperbole, soit une ellipse; je n'ajoute pas ce qui serait superflu, surtout pour vous); je dis que la section conique ainsi décrite passera par le point O.

Soit en effet P le point où elle passera de l'autre côté. La droite UR, parallèle à l'ordonnée MB, sera tangente à la conique; donc, si celle-ci passe par le point O, on aura  $\frac{PF \cdot FO}{FM^2} = \frac{UR^2}{RM^2}$  (Apoll., III, 6). Mais, par construction,  $\frac{UR^2}{RM^2} = \frac{FO \cdot OC}{FM^2}$ . Donc  $PF \cdot FO = FO \cdot OC$ ; donc  $FO = PC$  (1).

Or il en est ainsi; car, Q étant le milieu de MB, on a  $FX = XC$ ; d'autre part, dans la conique,  $OX = XP$ ; donc, par différence,  $FO = PC$ .

Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse, par une démonstration conduisant à l'impossible.

(1) La conclusion devrait être  $PF = OC$ , ce qui revient au même en retranchant OP de part et d'autre.

