DES CONTACTS SPHÉRIQUES.

La théorie des contacts d'Apollonius de Perge a été élégamment restituée par l'Apollonius Gallus, masque sous lequel se cachait ce François Viète de Fontenay dont les admirables travaux en Mathématiques ont fourni de si heureux suppléments à la Géométrie ancienne. Mais cette théorie des contacts a jusqu'à présent été bornée aux plans, et personne, que je sache, ne l'a poussée plus loin et ne s'est hasardé à l'élever aux problèmes sphériques.

On va voir qu'on arrive dans cette voie à de brillants problèmes et qu'on peut facilement obtenir une élégante construction pour les questions les plus ardues.

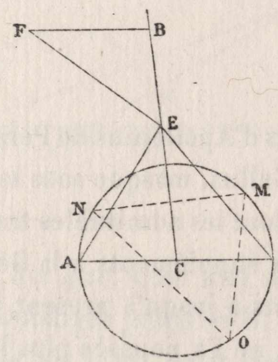
Il s'agit en général de chercher une sphère passant par des points donnés ou touchant des sphères et des plans donnés. Tout le sujet sera épuisé en quinze problèmes.

Problème I.

Étant donnés quatre points, trouver une sphère passant par ces points.

Soient donnés quatre points N, O, M, F (*fig.* 49), par lesquels il faut mener une sphère. Prenant *ad libitum* trois de ces points N, O, M, au triangle NOM (qui est dans un même plan, d'après les Éléments), je circonscris un cercle NAOM, qui sera évidemment donné de grandeur et de position. Il est clair que ce cercle NAOM est sur la surface de la sphère cherchée, puisque, si une sphère est coupée par un plan, la section est un cercle, et que, par les trois points N, M, O, il ne passe qu'un cercle, celui que j'ai construit. Les points N, M, O étant sur la surface de la sphère cherchée, le plan du triangle NMO coupera la sphère cherchée suivant le cercle NAOM; nous en concluons donc que ce cercle est sur la surface de la sphère.

Fig. 49.



Soit C le centre de ce cercle, j'y élève au plan du cercle la perpendiculaire CEB; il est clair que le centre de la sphère cherchée est sur cette droite CB. Du point F j'abaisse sur CB la perpendiculaire FB qui sera évidemment donnée de grandeur et de position; par C je mène, parallèlement à FB, la droite ACD. L'angle BCA sera droit, mais, la droite BC étant perpendiculaire au plan du cercle, ACD sera dans ce plan et donnée de position. Donc ses points de rencontre A, D avec le cercle sont donnés.

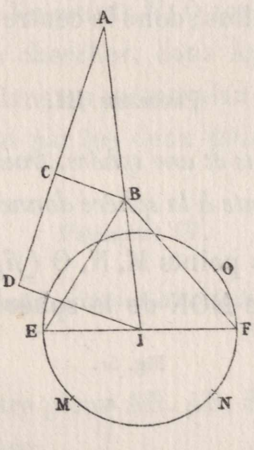
Supposons maintenant le problème résolu, et E le centre de la sphère cherchée, point qui se trouve sur la droite CB, comme nous l'avons déjà dit d'après Théodose. Je joins FE, AE, ED; ces droites seront égales, puisque par hypothèse F et par démonstration A et D sont sur la surface de la sphère. Mais ces trois droites FE, AE, ED sont dans un même plan, puisque FB, ACD, parallèles, sont dans un même plan qui comprend aussi CB et par conséquent les trois droites FE, AE, DE. Si donc par les trois points donnés A, F, D on fait passer un cercle, son centre E sera sur la droite CB, et on aura dès lors le centre de la sphère cherchée, et la sphère elle-même.

Problème II.

Étant donnés trois points et un plan, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné.

Soient donnés les trois points N, O, M (*fig.* 50); le cercle MEON passant par ces points sera, comme il a été démontré, sur la surface

Fig. 50.



de la sphère cherchée, et le centre de cette sphère sera sur la perpendiculaire IBA au plan de ce cercle. Soit A le point de rencontre de IBA avec le plan donné; ce point A sera donné de position. Du centre du cercle MEON, j'abaisse sur le plan donné la perpendiculaire ID; le point D sera donné, donc la droite AD de grandeur et de position, donc de même les droites ID, IA. Donc le plan du triangle ADI est donné de position; mais celui du cercle MON est également donné de position, donc l'intersection FIE de ces deux plans sera donnée de position, donc les points E, F sur le cercle.

Supposons maintenant le problème résolu et B le centre de la sphère cherchée; je joins BE, BF et je mène BC parallèle à ID; le triangle ADI et la droite EIF étant dans un même plan, les droites EB, BF, BC y seront également. Mais ID est perpendiculaire au plan donné; donc BC, qui lui est parallèle, sera aussi perpendiculaire au plan donné.

De plus, comme la sphère cherchée doit être tangente à ce plan donné AD, la perpendiculaire BC, abaissée de son centre sur ce plan, donnera le point de contact C. Donc les droites BC, BE, BF seront égales, et il est prouvé qu'elles sont dans un même plan donné de position, plan qui comprend aussi la droite AD.

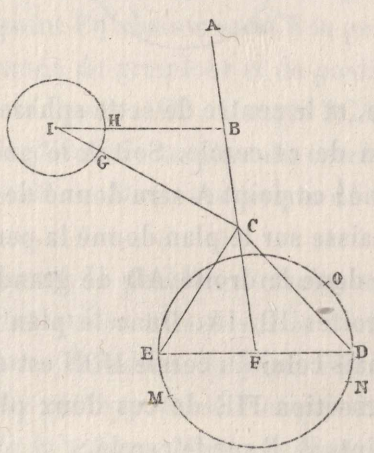
Le problème est donc ramené, étant donnés dans un même plan deux points E, F et une droite AD, à trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent à la droite donnée; ce problème a été résolu par Apollonius Gallus; donc le centre de la sphère B est donné, et tout est clair.

Problème III.

Étant donnés trois points et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente à la sphère donnée.

Soient donnés les trois points M, N, O (*fig.* 51) et la sphère IG; on a comme donné le cercle MON de la sphère cherchée. La perpendi-

Fig. 51.



culaire FCB au plan de ce cercle contiendra encore le centre de la sphère cherchée. De I, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur FB la perpendiculaire IB, qui sera donnée de position et de grandeur. Par le centre F, je lui mène la parallèle ED; d'après ce qui a été démontré, elle sera dans le plan du cercle et les points E, D seront donnés.

Supposons maintenant le problème résolu et C le centre de la sphère cherchée. Les droites IC, CE, CD seront dans un même plan donné, puisque I, E, D sont donnés. Le point de contact des deux sphères est d'ailleurs sur la droite qui joint leurs centres; donc la sphère cherchée sera tangente à la sphère donnée au point G, et IC sera supérieur du rayon IG à la droite CE ou CD. De I comme centre, avec le rayon de la sphère donnée, je décris dans le plan donné des droites IC, CE, CD, un cercle qui passera par le point G et sera donné de grandeur et de position. Mais les points E, D sont dans son plan. La question est donc ramenée à chercher, dans Apollonius Gallus, le procédé pour, étant donné dans un même plan deux points et un cercle, trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent au cercle donné.

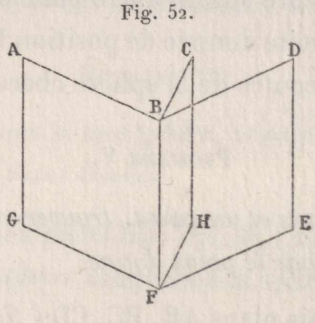
Problème IV.

Étant donnés quatre plans, trouver une sphère qui soit tangente à ces quatre plans donnés.

Soient donnés les quatre plans AH, AB, BC, HG (*fig.* 53) que doit toucher la sphère cherchée.

Soient deux plans AF, FD (*fig.* 52) tangents à la même sphère;

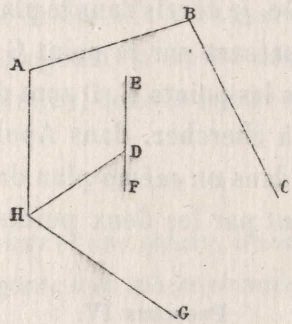
Fig. 52.



menons le plan BFHC qui bissecte leur angle; il est assez clair que le centre de la sphère tangente aux deux plans AF, FD se trouve sur le plan bissecteur, pour qu'il soit inutile de s'arrêter plus longtemps sur une chose si simple. Si les deux plans AF, FD étaient parallèles, le centre de la sphère serait sur le plan parallèle coupant par moitié leur intervalle.

Cela posé, puisque les deux plans CB, BA (*fig.* 53) sont donnés de position, le centre de la sphère cherchée est sur un plan donné de position, à savoir le bissecteur de l'angle des deux plans donnés CB, BA.

Fig. 53.



Mais, en raison des deux plans BA, AH, le même centre de la sphère cherchée est sur un autre plan également donné de position, et l'intersection des deux plans donnés de position, qui bissectent, l'un l'angle des plans CB, BA, l'autre l'angle des plans BA, AH, donne une droite donnée de position qui passe par le centre de la sphère cherchée. Soit FE cette droite; en raison des deux plans AH, HG, le centre de la sphère cherchée est encore sur un autre plan donné de position, dont l'intersection avec la droite donnée de position FE, donnera un point D qui est évidemment le centre de la sphère cherchée. Le reste est clair.

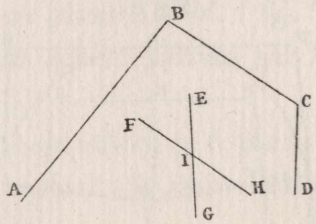
Problème V.

Étant donnés trois plans et un point, trouver une sphère tangente aux plans donnés et passant par le point donné.

Soient donnés les trois plans AB, BC, CD (*fig.* 54) et le point H; il faut trouver une sphère tangente aux trois plans donnés et passant par le point H. Supposons le problème résolu.

Les trois plans donnés, d'après le raisonnement de la proposition précédente, donneront de position une droite qui passe par le centre de la sphère cherchée. Soit GE cette droite. J'abaisse sur elle, du point donné H, la perpendiculaire HI, qui sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge jusqu'en F, en sorte que IF = IH; le point F sera donné.

Fig. 54.



Le centre de la sphère cherchée est sur la droite GE, laquelle est perpendiculaire en I sur le milieu de la droite HF, dont l'extrémité H est, par hypothèse, sur la surface de la sphère. L'autre extrémité F sera donc également sur la surface de la sphère; bien plus le cercle, décrit de I comme centre, avec IH comme rayon, dans le plan perpendiculaire à GE, sera sur la surface de la sphère; or ce cercle est donné de grandeur et de position. Mais si un cercle de la sphère est donné de grandeur et de position, en même temps qu'un certain plan comme AB, d'après un corollaire facile de notre proposition II, la sphère passant par le cercle donné et tangente au plan donné sera donnée. La question est en effet ramenée au problème II, et la solution est dès lors évidente.

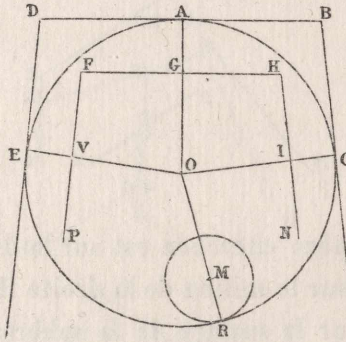
Problème VI.

Étant donnés trois plans et une sphère, trouver une sphère tangente à la sphère donnée et aux plans donnés.

Soient donnés les trois plans ED, DB, BC (*fig.* 55) et la sphère RM; il faut construire une sphère tangente à la sphère donnée et aussi aux trois plans donnés.

Supposons le problème résolu et la sphère ERCA satisfaisant aux conditions, c'est-à-dire touchant la sphère en R et les plans aux points E, A, C. Soit O le centre de cette sphère ERCA; joignez RO, EO, AO, CO; ces droites seront égales. D'ailleurs OR passera par le centre M de la sphère donnée, et les droites EO, OA, OC seront perpendiculaires aux plans donnés DE, DB, BC. Prenons OV = OG = OI = OM, et par les points V, G, I, imaginons menés les plans VP, GH, IN parallèles aux plans donnés ED, DB, BC.

Fig. 55.



Puisque OR = OE et OM = OV, par différence, RM = VE. Mais RM, rayon de la sphère donnée, est donnée de grandeur; donc VE est aussi donnée de grandeur. D'ailleurs OE, perpendiculaire au plan DE, le sera au plan VP parallèle au plan DE; donc VE sera la distance des plans DE, PV. Mais il a été démontré que VE est donnée de grandeur, donc l'intervalle des plans parallèles DE, PV est donné, ainsi que la position de l'un d'eux DE, par hypothèse. Donc PV est aussi donné de position. On prouvera de même que les plans GH, IN sont donnés de position. Or les droites OV, OG, OI sont perpendiculaires à ces plans et égales à OM. Donc la sphère décrite de O comme centre, avec OM pour rayon, sera tangente aux plans PV, GH, IN donnés de position. Mais le point M est donné aussi, comme centre de la sphère donnée. Ainsi la question est ramenée à celle-ci : Étant donnés trois plans PV, GH, IN et un point M, trouver une sphère passant par le point donné M et tangente aux plans donnés PV, GH, IN, c'est-à-dire que le problème est ramené au précédent.

J'userai dans la suite du même artifice quand il n'y aura pas de points parmi les données, mais seulement des sphères et des plans, pour substituer un point donné à une des sphères.

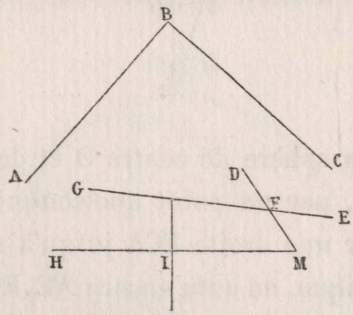
Problème VII.

Étant donnés deux points et deux plans, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente aux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BC (*fig.* 56) et les deux points H, M; il faut trouver une sphère passant par les points H, M et tangente aux plans AB, BC.

Je joins HM, je prends son milieu en I; par le point I, qui est donné, je fais passer un plan normal à la droite HM. Les points H, M étant

Fig. 56.



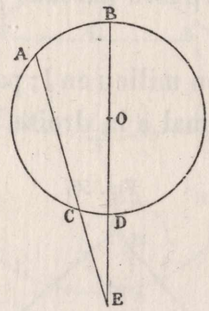
sur la surface de la sphère, il est clair que le centre de la sphère est sur ce plan normal à HM et passant par I, plan qui est donné de position, puisque la droite HM et le point I le sont.

Ainsi, à cause des points H et M, le centre de la sphère est sur un plan donné de position. Mais, à cause des plans AB, BC, par une démonstration déjà faite, il est aussi sur un autre plan donné, donc sur une droite donnée de position, soit GE. J'abaisse sur cette droite, de l'un des points donnés M, la perpendiculaire MF; elle sera donnée de grandeur et de position. Je la prolonge jusqu'en D en sorte que FD = MF. Le point D sera donné et, d'après une démonstration déjà faite, se trouvera sur la surface de la sphère. On a donc comme données : trois points H, M, D par lesquels passe la sphère cherchée, et le plan AB auquel elle est tangente; la question est donc ramenée au problème II.

Avant d'aller plus loin, il faut établir quelques lemmes faciles.

Lemme I. — Soit le cercle BCD (*fig.* 57) en dehors duquel je prends un point quelconque E; par ce point et le centre je mène la droite EDOB, puis une autre quelconque ECA. Il est clair, d'après les Éléments, que AE.EC = BE.ED.

Fig. 57.

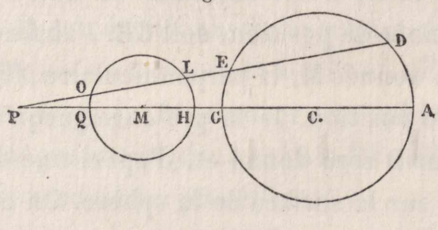


Soit maintenant la sphère de centre O et de grand cercle ACDB; si du même point E, par un point quelconque de la surface de la sphère, je fais passer une droite ECA jusqu'à sa seconde rencontre avec la surface sphérique, on aura encore AE.EC = BE.ED.

Si en effet on imagine qu'autour de la droite BDE immobile tournent et le cercle et la droite ECA, les droites EC, EA restent invariables, puisque les points C, A décriront des cercles normaux sur l'axe. Par conséquent, dans tous les plans on aura AE.EC = BE.ED.

Lemme II. — Soient dans un même plan deux cercles ADE, HLO

Fig. 58.



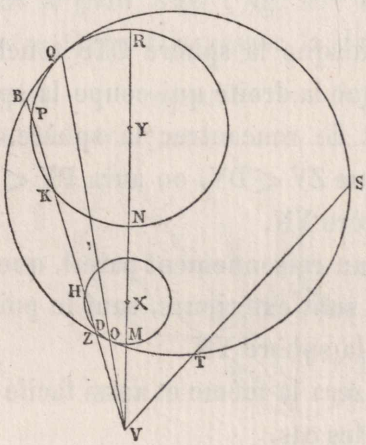
(*fig.* 58); par leur centre je fais passer la droite ACMP et je suppose $\frac{\text{rayon AC}}{\text{rayon HM}} = \frac{\text{CP}}{\text{MP}}$. Par le point P je mène *ad libitum* une droite POLED coupant les deux cercles, aux points O, L, E, D. Apollonius Gallus a démontré que l'on a

$$\mathrm{AP}.\mathrm{PQ} = \mathrm{GP}.\mathrm{PH} = \mathrm{DP}.\mathrm{PO} = \mathrm{EP}.\mathrm{PL}.$$

La vérité de cette proposition en sphérique importe pour les problèmes suivants. Mais elle est évidente; car si, autour de l'axe AP immobile, on fait tourner en même temps les deux cercles et la droite POLED, les droites PO, PL, PE, PD resteront invariables pour la raison donnée dans le lemme précédent; les rectangles restent donc aussi invariables et la proposition est vraie dans un plan quelconque.

Lemme III. — Soient données deux sphères YN, XM (*fig.* 59), par

Fig. 59.



les centres desquelles on fait passer la droite RYNXMV; je pose $\frac{\text{rayon YN}}{\text{rayon XM}} = \frac{\mathrm{YV}}{\mathrm{VX}}$. Du point V, je mène VTS dans un plan quelconque, et je pose $\mathrm{SV}.\mathrm{VT} = \mathrm{RV}.\mathrm{VM}$. Si l'on décrit une sphère quelconque passant par les points T, S et touchant une des deux sphères, elle touchera également l'autre.

Supposons la sphère OTS, passant par les points T, S et tangente en O à la sphère MX; je dis que la sphère YN sera également touchée par la sphère OTS.

Je prolonge VO jusqu'à sa seconde rencontre en Q avec la sphère OTS. D'après le premier lemme : $QV.VO = SV.VT$. Mais par construction : $SV.VT = RV.VM$. Ce dernier rectangle, d'après le second lemme, est égal au produit de VO et de la droite passant par V, O et prolongée jusqu'à la rencontre de la sphère YN. Donc le point Q est sur la surface de la sphère YN : il est donc commun aux surfaces des deux sphères YN, OTS.

Je dis maintenant que les deux sphères se touchent en ce point Q. Menons en effet par le point V et un point quelconque de la sphère OTS, une droite quelconque dans un plan quelconque, soit VZ qui, prolongée, coupe les trois sphères aux points Z, D, H, K, P, B. D'après les lemmes I et II :

$$ZV.VB \text{ (sphère OTS)} = DV.VP \text{ (sphères XM, YN)}.$$

Mais $DV > VZ$, puisque la sphère OTS touche extérieurement la sphère XM en O, et que la droite qui coupe la sphère OTS la rencontrera dès lors avant de rencontrer la sphère XM. Puis donc que $DV.VP = ZV.VB$ et que $ZV < DV$, on aura $PV < BV$. Donc le point B est extérieur à la sphère YN.

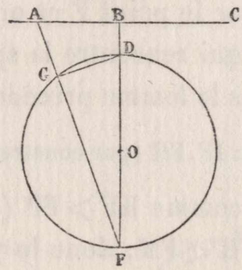
On prouvera, par un raisonnement pareil, que tous les points de la sphère enveloppante sont extérieurs, sauf le point Q. Donc la sphère OTS y est tangente à la sphère YN. C. Q. F. D.

La démonstration sera la même et aussi facile pour les contacts intérieurs et dans tous les cas.

Lemme IV. — Soient le plan AC (*fig.* 60) et la sphère DGF, dont le centre est O; par le centre O, je mène FODB perpendiculaire au plan, puis, par le point F, une droite quelconque coupant la sphère en G et le plan en A. Je dis que $AF.FG = BF.FD$.

En effet, coupons la sphère et le plan donné suivant le plan du triangle ABF; soient, comme intersections, le cercle GFD sur la sphère, la droite ABC dans le plan. FB, perpendiculaire au plan AC, le sera à la droite AC. On a donc, dans un même plan, le cercle DGF et la droite AC, avec FDB passant par le centre du cercle et perpendiculaire à AC. Si l'on joint GD, les angles en G, B sont droits; donc le quadrilatère ABDG est inscriptible.

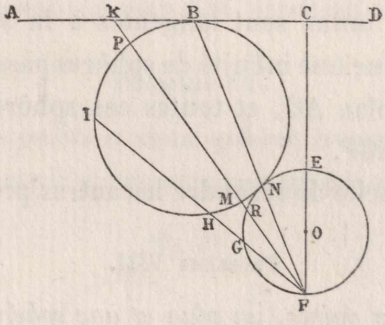
Fig. 60.



Donc AF.FG = BF.FD, et la même démonstration peut se faire pour toute autre section de la sphère.

Lemme V. — Soient le plan ABD (*fig.* 61) et la sphère EGF de centre O; par ce centre O, je fais passer la droite FOEC perpendiculaire au plan, et, dans un autre plan quelconque, je mène la droite FGHI. Soit IF.FH = CF.FE. Si, par les points I, H, je décris une sphère qui touche le plan AC, elle sera également tangente à la sphère EGF.

Fig. 61.



Imaginons construite la sphère IHB, passant par les points I, H, et tangente en B au plan AC; je dis que les sphères EGF, IHB sont tangentes.

Je joins FB; soit CF.FE = BF.FN; d'après le lemme qui précède, le point N sera sur la surface de la sphère EGF. Mais, par construction, CF.FE = IF.FH; donc IF.FH = BF.FN. Donc le point N est sur la surface de la sphère IBH.

Il faut maintenant prouver que les sphères EGF, IBH sont tangentes en N, ce qui est facile. Par le point F et un point quelconque de la sphère EGF, je mène FR qui rencontre la sphère IBH en M et en P, et le plan AC en K. D'après le lemme précédent,

$$\text{KF.FR} = \text{CF.FE} = \text{IF.FH (par construction)} = \text{PF.FM}.$$

Mais si KF.FR = PF.FM, comme KF $>$ FP (la sphère IBH étant tangente en B au plan AC), FR $<$ FM; donc le point R est extérieur à la sphère IBH. Il en sera de même pour tout autre point de la sphère EGF dans un plan quelconque des deux côtés du point N. Donc les sphères EGF, IBH sont tangentes en N.

Ces lemmes quoique faciles sont très beaux, surtout III et V. Dans le lemme III, en effet, on a une infinité de sphères tangentes à la sphère XM et passant par les points T, S, mais il est prouvé que toutes ces sphères en nombre infini sont tangentes à la sphère YN. Dans le lemme V, on a de même une infinité de sphères passant par les points I, H et tangentes au plan AC, et toutes ces sphères en nombre infini touchent la sphère EGF.

Ceci posé, il est facile de résoudre les autres problèmes.

Problème VIII.

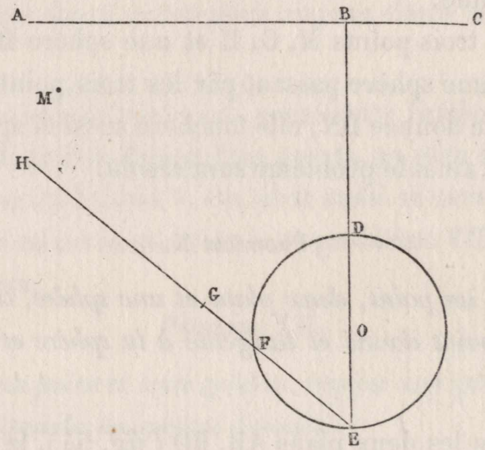
Étant donnés deux points, un plan et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné et à la sphère donnée.

Soient donnés le plan ABC (*fig.* 62), la sphère DFE, et les points H, M. Par le centre O de la sphère donnée, j'abaisse sur le plan donné ABC la perpendiculaire EODB; je joins HE, et je pose BE.ED = HE.EG. Le point G sera donné.

Étant donnés trois points H, G, M et un plan, on cherchera (problème II) une sphère passant par les trois points donnés et tangente au plan donné. Elle résoudra le problème.

Elle passe en effet par les deux points donnés H, M, et est tangente au plan ABC par construction et à la sphère DFE d'après le lemme V;

Fig. 62.

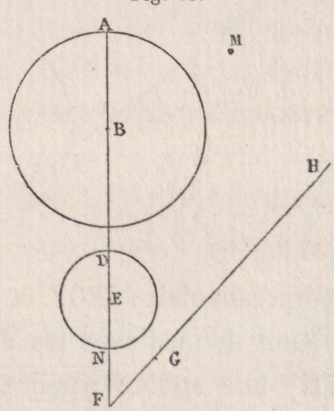


en effet, puisque HE.EG = BE.ED, toute sphère passant par les deux points H et G et tangente au plan ABC touchera aussi la sphère DEF.

Problème IX.

Étant donnés deux points et deux sphères, trouver une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux sphères données.

Fig. 63.



Soient données les deux sphères AB, DE (*fig.* 63) et les deux points H, M. Je mène AF par les centres des sphères données, et je pose $\frac{\text{rayon}\, AB}{\text{rayon}\, DE} = \frac{BF}{FE}$; le point F sera donné; soit encore $NF.FA = HF.FG$, le point G sera donné.

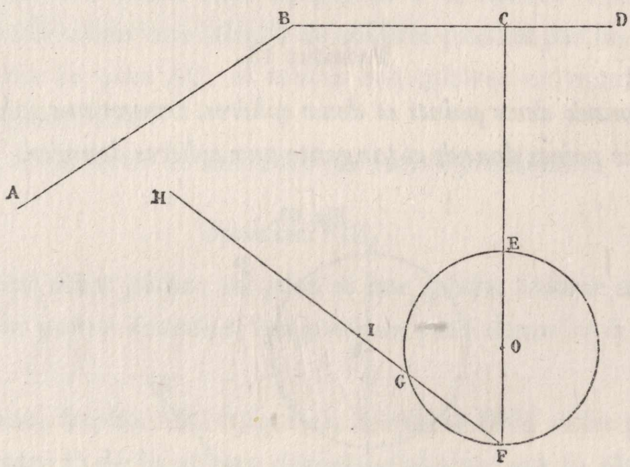
Étant donnés trois points M, G, H et une sphère DN, on cherchera (problème III) une sphère passant par les trois points donnés et tangente à la sphère donnée DN; elle touchera aussi la sphère AB, d'après le lemme III, et ainsi le problème sera résolu.

Problème X.

Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver une sphère passant par le point donné et tangente à la sphère et aux deux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BD (*fig.* 64), la sphère EGF et le point H. Du point O, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur un des

Fig. 64.



deux plans donnés la perpendiculaire CEOF, et je pose $CF.FE = HF.FI$. Les deux points H, I étant donnés avec les deux plans AB, BD, je cherche (problème VII) une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux deux plans donnés; elle touchera aussi la sphère (lemme V) et le problème sera résolu.

Problème XI.

Étant donnés un point, un plan, et deux sphères, trouver une sphère passant par le point donné, et tangente au plan donné ainsi qu'aux deux sphères données.

Un raisonnement semblable aux précédents ramènera la question au problème VIII, où l'on donne deux points, un plan et une sphère, et cela par le moyen du lemme V. On peut aussi se servir du lemme III pour ramener de même la question à ce problème VIII, mais par une autre construction.

Problème XII.

Étant donnés un point et trois sphères, trouver une sphère qui passe par le point donné et touche les sphères données.

Je ne fais pas non plus la figure; car le lemme III ramène immédiatement la question au problème IX où l'on donne deux points et deux sphères.

Problème XIII.

Étant donnés deux plans et deux sphères, trouver une sphère qui touche les plans donnés et les sphères données.

Supposons-le problème résolu. Si nous imaginons, concentrique à la surface sphérique trouvée, une autre surface sphérique parallèle à une distance égale au rayon de la plus petite des sphères données, cette nouvelle surface sphérique sera tangente à des plans distants des donnés d'un intervalle égal à ce rayon de la plus petite sphère, et tangents également à une sphère concentrique à la plus grande et dont le rayon différera de celui de la plus grande du rayon de la plus petite.

Cette dernière sphère est donc donnée, de même que les plans menés parallèlement aux donnés à une distance égale au rayon de la moindre sphère. Enfin la nouvelle surface sphérique passe par le centre de la moindre des sphères données, centre qui est donné.

Ainsi, par ce même artifice que nous avons déjà employé dans le problème VI, la question est ramenée au problème X : Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver etc.

Problème XIV.

Étant donnés trois sphères et un plan, trouver une sphère tangente aux sphères et au plan donné.

Par le même moyen que dans le problème VI et dans le précédent, on ramènera la question au problème XI : Étant donné un point, un plan et deux sphères, etc.

Problème XV.

Étant données quatre sphères, trouver une sphère qui leur soit tangente.

Supposons le problème résolu. Par la méthode qu'a employée Apollonius Gallus pour ramener le problème des trois cercles à celui d'un point et de deux cercles, méthode que nous avons dejà employée aussi dans les problèmes précédents, nous ramènerons ce bel et célèbre problème au problème XII, où l'on donne trois sphères et un point.

Ainsi nous avons achevé entièrement le travail proposé, et brillamment complété Apollonius Gallus; toutefois, pour ne pas allonger indéfiniment ce traité des contacts sphériques, nous avons négligé les cas divers, les limitations et les menus détails.