BOUGAEV. MATHÉMATIQUES

DES

# MATHÉMATIQUES

CONSIDÉRÉES

## COMME INSTRUMENT SCIENTIFIQUE

ET PÉDAGOGIQUE

---

## DISCOURS

Prononcé dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Moscou
le 12 Janvier 1869

Par M. BOUGAEV

Professeur de Mathématiques à l'Université.

Traduit du russe par M. L. L.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1872

# DES

# MATHÉMATIQUES

CONSIDÉRÉES

## COMME INSTRUMENT SCIENTIFIQUE ET PÉDAGOGIQUE

(*Dédié à la mémoire de Zernov.*)

---

Le programme de l'enseignement universitaire comprend tout l'ensemble des connaissances humaines. Tout phénomène de la nature extérieure, toute manifestation de l'esprit humain est soumis dans les Universités à une critique complète, à une rigoureuse appréciation scientifique. Le monde de la science est un monde varié, illimité. L'homme, sous l'influence de ses aptitudes et de ses besoins divers, est en rapport avec ce monde à divers points de vue.

Aucun de ces points de vue n'épuise absolument la réalité; on ne peut tirer de chacun en particulier que des résultats partiels. Embrasser ces points de vue divers, concilier leurs antinomies, introduire l'unité et l'harmonie dans leur conception scientifique, c'est là ce qui constitue l'un des problèmes essentiels de l'Université, c'est là ce qui lui donne une valeur toute particulière. De là la portée morale de cette institution et son influence bienfaisante sur la société et la vie.

Des horizons étendus se découvrent à la pensée humaine par le contact des diverses branches de connaissances; ainsi s'explique pourquoi, ici, dans l'enceinte de cette université, se présentent, d'une façon toute spéciale, les questions relatives aux liens des diverses connaissances, à leur influence réciproque, à leur solidarité.

Dans le cercle des sciences qui constituent l'objet de l'enseignement universitaire, les sciences physiques et mathématiques n'occupent certainement pas la dernière place. En vertu des conditions essentielles de leur développement, elles se groupent toutes autour des sciences mathématiques.

Dans l'antiquité on appelait les mathématiques la mère des sciences. Platon voulait qu'on inscrivît sur la porte de son académie : Personne n'entre ici s'il ne sait la géométrie. Aujourd'hui les mathématiques font partie de l'instruction générale et en sont un élément essentiel et indispensable. Tous les systèmes d'éducation, quelles que soient leurs divergences, leur accordent une place honorable dans leur organisation. Cette importance repose sur la nature même des mathématiques, sur la connexion des vérités qu'elles enseignent, sur le caractère des méthodes qu'elles emploient.

Je profite de la circonstance actuelle pour exposer quelques considérations générales propres à expliquer la haute importance que les mathématiques ont acquises dans ces derniers temps.

Je n'ai pas l'intention de suivre l'influence de cette science dans toutes les phases de la pensée et de la vie contemporaine ; je me permets d'appeler seulement votre attention sur quelques côtés saillants de la question. A la conception exacte de cette question se rattache la solution d'un grand nombre de problèmes scientifiques, pédagogiques, intellectuels et sociaux.

Il n'est pas difficile d'observer que la diversité infinie des phénomènes du monde moral et matériel est déterminée par les différences de grandeur, de forme, et de force. La grandeur, la quantité sont des idées fondamentales de notre jugement. Essentiellement simples et générales elles s'associent à toutes les représentations, à toutes les combinaisons de notre esprit. La quantité, dit Kepler, est plus ancienne que les cieux; les nombres, dit Pythagore, sont les principes des choses.

La propriété essentielle de la grandeur, c'est la faculté qu'elle a de se modifier. Elle est plus que toute chose soumise à nos recherches. La science mathématique est la science des propriétés, des lois, des rapports des grandeurs, considérées au point de vue de cette faculté fondamentale.

La science mathématique s'occupe donc d'idées considérées, abstraction faite de tout élément matériel. Ses déductions générales s'appliquent à toutes les grandeurs qui peuvent être l'objet de recherches mathématiques.

Dans l'état actuel des sciences, toutes les grandeurs concrètes ne sont pas soumises aux recherches mathématiques. Ainsi, toutes les conceptions psychiques, comme par exemple: *la bienfaisance*, *le courage*, *l'effort*, subissent dans notre intelligence des modifications diverses de grandeur, de forme, d'intensité; mais elles n'ont point de théorie mathématique. Ne peuvent-être soumises aux *mathématiques*, que les grandeurs concrètes qui sont plus ou moins soumises aux lois d'un changement continu, pour lesquelles il existe des unités de comparaison et des moyens de mesure.

Les grandeurs géométriques, l'étendue et l'espace, ont été avant tout l'objet de recherches mathématiques. La géométrie était déjà dans l'antiquité arrivée à un haut développement. Après les grandeurs géométriques, la vitesse, le temps, la masse, les grandeurs mécaniques, déterminant les conditions d'équilibre et de mouvement des corps matériels entrèrent dans le domaine des recherches mathématiques. La mécanique dans ces derniers temps est devenue complétement l'apanage des mathématiques.

Ainsi esquissé dans ses traits généraux, le domaine des sciences mathématiques détermine leur situation au milieu des autres sciences.

Cette situation est en outre déterminée par un coup d'œil rapide sur les rapports réciproques des diverses sciences.

Les penseurs divisent les sciences sous l'influence de diverses considérations. La diversité des points de vue a produit diverses classifications.

Les classifications qui méritent le plus d'attention sont celles qui reposent sur les *sources* de la connaissance, sur le *but* qu'elle a en vue, sur la *nature* des objets étudiés. On peut appeler *subjectives* les deux premières catégories de classification, et *objective* la troisième.

Le caractère des méthodes et des procédés employés pour mettre en œuvre les différents domaines de la science, détermine la division des sciences en *spéculatives* et *expérimentales*; la notion du but en vue duquel les sciences s'élaborent conduit à les diviser en sciences *théoriques* et *appliquées*. Malgré tout ce qu'il y a de conventionnel et d'insuffisant dans les classifications subjectives, elles sont utiles, car elles fournissent un point d'appui aux esprits méthodiques.

Les classifications les plus simples et les plus naturelles sont les classifications objectives fondées sur la nature des objets étudiés. Descartes, dans sa méthode, établit que l'ordre logique et conséquent exige que les idées et les objets les plus simples et les plus élémentaires doivent passer avant ceux qui sont difficiles et complexes.

D'après ce principe une classification objective présente les quatre groupes suivants :

1° Sciences mathématiques qui étudient les vérités abstraites et absolues; 2° sciences physiques; 3° biologiques; 4° sociales, qui étudient les vérités relatives de la matière, de la vie et de l'homme.

Cette classification objective répond au principe de Descartes et systématise les vérités scientifiques d'après leur généralité relative. En effet, dans la division proposée, les vérités mathématiques sont plus simples et plus générales que les autres. Après elles viennent, eu égard à la simplicité et à la généralité, les vérités physiques, biologiques et sociales. Dans cette classification, outre la succession logique, et la relation du simple au composé, on observe également la relation de la dépendance des diverses sciences. Toute division de la science en beaucoup de ses parties s'appuie sur la précédente et sert elle-même de base indispensable à un autre ordre de vérités.

Les penseurs ont également observé que, plus les vérités deviennent complexes, plus deviennent nombreux les moyens et les instruments d'étude.

Dans les sciences mathématiques, l'instrument de recherche est la *spéculation*. Dans les autres branches, d'autres moyens de recherches jouent le rôle principal : ce sont l'*observation*, l'*expérience*, la *comparaison*, le *témoignage*.

L'histoire des connaissances humaines confirme exactement la justesse de ces conclusions générales. Elle montre que, malgré l'apparition simultanée des diverses sciences, les plus simples d'entre-elles ont devancé de loin celles qui s'occupent de la recherche des vérités plus complexes. Les antécédents logiques ont toujours été des antécédents historiques.

Les sciences mathématiques sont donc des sciences de spéculation. A l'aide de la spéculation, elles découvrent les vérités les plus simples et les plus générales.

Cela explique suffisamment pourquoi les mathématiques, dans leur développement, ont devancé toutes les autres sciences, et pourquoi les vérités de ces sciences sont dans une situation relativement dépendante, et, pour ainsi dire, déterminées par les vérités mathématiques.

Cette situation spéciale des mathématiques mérite d'être spécialement examinée Elle permet à beaucoup de penseurs de regarder les mathématiques comme la base de la philosophie naturelle. Elle nous explique pourquoi la question des rapports des mathématiques avec les autres sciences a été regardée comme la question fondamentale de toute philosophie profonde; pourquoi l'état des mathématiques a le mieux servi à mesurer le développement de la culture d'un peuple; pourquoi leur influence a été toujours si estimée au point de vue de l'enseignement et de l'éducation.

La classification subjective qui divise les sciences en théoriques et appliquées est loin d'avoir une telle portée philosophique. Le but pratique ne saurait servir de base sérieuse pour une division des sciences. La théorie et la pratique ne s'excluent pas l'une l'autre. Toute chose pratique a une base théorique. Toute connaissance a son application.

La base intelligente de la théorie et de la pratique a ses racines dans les mêmes principes logiques de notre entendement. La science n'est pas seulement un instrument de bien-être matériel; elle poursuit un but plus élevé. On ne peut laisser cependant de côté les questions scientifiques qui ont une application pratique. On ne peut faire cela même en vue de spéculations théoriques. L'histoire de la science nous montre clairement que les intérêts supérieurs de la raison et les besoins de la pratique ont toujours suivi un chemin parallèle. Ils se complètent et se soutiennent mutuellement.

Avec le développement de la civilisation se sont répandues les applications scientifiques des sciences mathématiques. Parmi les problèmes purement théoriques, quelques-uns ont acquis une importance spéciale par suite de leur influence sur la civilisation, sur la vie. Ces problèmes sont devenus l'objet d'une étude attentive et ont donné lieu à des sciences distinctes, indépendantes, connues sous le nom de sciences *appliquées*. L'importance de ces sciences dans la vie contemporaine favorise leur rapide développement. Au point de vue théorique, ces sciences sont des questions spéciales, particulières, et n'occupent qu'une place modeste dans l'ordre des autres problèmes de la théorie; au point de vue pratique, ce sont de grands moyens, de puissants instruments de civilisation.

Il est impossible de les négliger. En effet, si le but poursuivi par la théorie répond, dans les sciences appliquées, à certains besoins pratiques, d'autre part les problèmes pratiques invitent à des recherches théoriques et servent de point de départ et de fil conducteur dans ces recherches.

Dans l'histoire des sciences mathématiques, on constate perpétuellement que les questions théoriques sont soulevées ou développées par la pratique de l'art de la construction, de la navigation, de la mécanique.

L'excellente théorie de l'élasticité des corps solides, qui dans les derniers temps a acquis un si large développement analytique, doit son origine à la question pratique de la flexion d'une poutre fixée par une extrémité à un mur immobile et soumise à l'action d'une force qui opère sur l'autre extrémité.

Cette question, qui occupe une place importante dans ce qu'on appelle la théorie de la résistance des matériaux, était capitale pour les constructeurs. Sa solution détermine la précision et l'exactitude de ses calculs pratiques. On aurait peine à croire que cette question est le point de départ historique de la plus remarquable des théories mathématiques contemporaines.

Arrêtons-nous un instant sur l'histoire de cette question, car elle confirme absolument la justesse de nos idées générales. Galilée, en 1638, s'occupa le premier de la question de la flexion. Dans l'état où était alors l'analyse et la mécanique, il ne put présenter que quelques hypothèses défectueuses. En 1678, Robert Hook exposa la loi fondamentale de l'élasticité, à savoir que la tension et la compression des corps est proportionnelle à l'intensité de la force extérieure.

Cette loi fut adoptée par Mariotte pour résoudre le problème de la flexion, et il émit, grâce à elle, quelques propositions exactes. Malheureusement une erreur de calcul, commise par lui, et répétée jusqu'à Coulomb par des savants tels que Jacques Bernouilli, retarda le développement de cette question. Ce n'est qu'en 1771 que Coulomb rectifia cette erreur et remit la question en bonne voie.

Malgré la justesse de cette correction, les savants y firent peu d'attention, et ce n'est qu'en 1826 qu'elle fut admise par Navier, qui présenta en même temps sa théorie de la résistance de la poutre à la flexion.

Ainsi deux siècles s'étaient écoulés avant qu'on eût fait des observations sérieuses sur ce problème pratique. Dans ce siècle-ci la question fit de bien plus grands progrès. Dès 1829, Navier donnait les lois générales de l'équilibre et du mouvement d'un corps élastique sous l'influence des forces extérieures, et démontrait le rapport de la théorie de l'élasticité avec cette question. La théorie de Navier, les recherches de Cauchy sur la pression et la tension intérieure d'un corps solide, développées par Poisson, les travaux de Lamé, de Clapeyron, de Saint-Venant et de Kirchhoff servirent de base pour le développement de la théorie contemporaine de l'élasticité. Le problème primitif des architectes devint ce qu'on appelle le problème de Saint-Venant, qui réclame pour sa solution toutes les ressources de l'analyse contemporaine; une simple question pratique donna naissance à toute une science. Il est à remarquer que les recherches théoriques, au fur et à mesure qu'elles se développent, ne satisfont pas toujours les besoins de telle ou telle science appliquée. D'autre part, les recherches mathématiques fournissent une base solide pour la solution de beaucoup de questions relatives à ces sciences, et facilitent la tâche de la pratique, en la faisant sortir de la routine et des expédients pour la faire entrer dans le domaine de la conception nette et rigoureuse de son œuvre.

Un fait historique qui confirme avec éclat cette proposition, c'est la découverte par Monge de la géométrie descriptive. Jusqu'alors, toutes les combinaisons des architectes relativement à la représentation graphique des corps sur une surface plane, tous les problèmes pratiques de la construction ayant un rapport quelconque avec la géométrie, se résolvaient par divers moyens particuliers, sans aucune espèce de base scientifique. Dans les méthodes géométriques des constructeurs, jusqu'au temps de Monge, il n'y avait ni unité, ni idée générale qui servît de guide. Tout cela gênait singulièrement le développement de l'art de l'ingénieur. Par la découverte de la géométrie descriptive, Monge donna les moyens généraux de résoudre toutes les questions possibles du même genre et fonda la science qui donne la théorie véritable des ombres, de la perspective, de la construction des cadrans solaires, des roues dentées et des voûtes. Aucun ingénieur, aucun mathématicien ne peut aujourd'hui se passer des vérités fondamentales de la géométrie descriptive.

En général, avec chaque nouveau problème mathématique se résout un certain nombre de problèmes pratiques, et l'on voit s'en présenter de nouveaux susceptibles d'être soumis à une exacte solution mathématique. L'influence réciproque de ces sciences dans l'histoire de la civilisation européenne coïncide avec les plus belles découvertes, avec les plus brillants progrès de l'esprit humain.

Les besoins pratiques de la vie contemporaine sont si pressants et si complexes que leur satisfaction exige une préparation toute spéciale. Cela a fait naître tout une catégorie nouvelle d'établissements d'instruction. A côté des universités ont apparu des écoles spéciales. Dans ces écoles, on s'occupe surtout de l'étude et de l'élaboration de ces problèmes spéciaux qui, dans la théorie scientifique générale, n'occupent le plus souvent qu'une place secondaire. Sans doute ces écoles spéciales poursuivent un but restreint; néanmoins, il est démontré que l'accomplissement de ce but dépend du large dévelop-

2

pement qu'acquièrent les sciences physiques et mathématiques dans le plan général de l'enseignement spécial.

La solution heureuse des questions pratiques n'est possible que par l'étude approfondie et générale des méthodes théoriques de la science mathématique.

Chaque année les cours de mathématiques se sont développés dans les écoles spéciales, et actuellement dans quelques écoles polytechniques d'Allemagne, les mathématiques ont acquis un développement tel, que ces écoles luttent avec les universités en ce qui concerne l'étendue, le sérieux et la rigueur de leur enseignement. D'autre part, dans le sein des universités elles-mêmes, on a reconnu qu'un profond enseignement théorique est impossible si on laisse de côté les questions vitales de la pratique soulevées par la science des ingénieurs et des architectes. L'enseignement dans les écoles spéciales serait incomplet sans une large base théorique ; il manquerait de fondement ; d'autre part, il serait insuffisant dans les universités, si l'on ne faisait ressortir par l'application toute l'importance et toute la grandeur des méthodes mathématiques contemporaines.

Sous l'influence de ces exigences faciles à comprendre, on a introduit dans l'enseignement l'étude de quelques sciences appliquées. L'université et l'instruction nationale ne pourraient que gagner, si toutes les sciences physiques et mathématiques obtenaient à ce point de vue un développement répondant aux conditions de la vraie civilisation. Actuellement on remarque seulement une tendance à se rapprocher des Écoles Polytechniques et des Universités.

Dans l'organisation la plus récente des établissements d'instruction, la science mathématique joue le rôle de médiateur. Elle possède la même importance dans les écoles spéciales et dans les facultés scientifiques.

D'une part elle donne un caractère scientifique, philosophique, aux questions que soulève la vie pratique; elle fournit le moyen de les résoudre le plus facilement; d'autre part, elle ne cesse pas de garder son caractère abstrait, elle présente la véritable manière de rechercher la vérité, indépendamment du but pratique que l'on poursuit. Elle répond également aux exigences de l'idéalisme scientifique et de l'utilitarisme le plus rigoureux.

La puissance que les sciences appliquées empruntent à leur solidarité avec les mathématiques, ne constitue qu'un des côtés de l'importance qu'ont les mathématiques dans le système général des connaissances.

Le large développement des instruments de la civilisation contemporaine, tout cet éclat qui influe si puissamment sur le progrès intellectuel de l'humanité, tout cela n'est que la conséquence de cette grande force intérieure que récèlent les sciences mathématiques.

L'importance des sciences mathématiques ressort de leur influence générale sur l'ensemble des faits scientifiques soumis à nos études.

On ne peut comprendre et bien apprécier l'essence de cette influence qu'en étudiant ces faits dans leur rapport avec l'histoire de toutes les sciences exactes.

On distingue deux sortes de faits rentrant dans le domaine de nos connaissances; les uns nous sont révélés par les sensations, par l'étude du monde extérieur; les autres par l'étude des opérations internes de notre entendement : on les appelle faits de conscience.

Suivant qu'elle s'applique à l'une ou à l'autre catégorie de faits, l'observation est appelée interne ou externe. L'analyse psychologique la plus délicate ne peut complétement les distinguer; elle les différencie seulement par leurs degrés de complexité; au point de vue général, cette division suffit.

Les faits du monde extérieur constituent l'objet des sciences physiques qui étudient la nature extérieure. Les faits du monde intérieur ont principalement pour objet les sciences morales. Les premiers sont beaucoup plus simples; l'ensemble des connaissances acquises par l'observation de la nature extérieure entre comme un élément indispensable dans les déductions que l'on opère sur les faits du monde intérieur.

Les sciences morales sont plus complexes; elles exigent plus de méthode et offrent moins de rigueur dans leurs conclusions. Ces deux domaines de la science ont le même rapport avec la science mathématique; elle exerce son influence sur l'une et l'autre. Dans les sciences qui ont en vue les phénomènes du monde extérieur, on constate une tendance à devenir de plus en plus des sciences exactes. Nous nous efforçons de concevoir les phénomènes naturels dans tous leurs détails, dans toutes leurs manifestations élémentaires; c'est pourquoi il faut les étudier avec une rigueur mathématique. Poursuivre dans ces traits généraux l'influence des mathématiques sur le développement de nos connaissances, en ce qui concerne la nature extérieure, il est nécessaire de s'adresser à une science qui présente dans ses résultats la plus grande exactitude, la plus grande régularité. Telle est certainement l'astronomie. Elle a pour ainsi dire accompli tout le cercle de son développement; elle est arrivée à des conclusions nettes et déterminées; c'est dans son histoire qu'on observe le mieux l'influence scientifique exercée par les mathématiques. Par sa perfection scientifique, par la marche historique de son développement, elle est le type de toute science d'observation. En racontant l'histoire du développement des connaissances humaines, les penseurs se sont d'ordinaire étendus plus longuement sur les destinées de l'astronomie ; car c'est elle qui fournit le plus grand nombre de conclusions instructives et exactes.

En astronomie, la spéculation et l'observation jouent également un rôle important. Les découvertes accomplies dans le domaine de la spéculation, comme les perfectionnements apportés aux procédés et aux méthodes d'observation, ont également contribué à son avancement. Suivre le caractère général de l'histoire de l'astronomie, c'est expliquer comment le progrès de ces deux méthodes de recherche a accompagné l'extension de nos connaissances relativement aux phénomènes célestes.

L'histoire de l'astronomie dans ses rapports avec celle des mathématiques, renferme deux périodes : l'astronomie ancienne et nouvelle. Dans l'antiquité, parmi les sciences mathématiques, la géométrie seule avait acquis un certain développement. Toutes les forces, toutes les ressources de la déduction étaient surtout déterminées par les vérités géométriques. La période antique de l'astronomie peut être appelée sa période géométrique. Les observations, durant cette période, étaient très-imparfaites, et les observations donnaient des chiffres soumis à de grandes erreurs relatives. L'astronomie des anciens jouissait cependant des ressources de la géométrie et de l'observation d'alors, et malgré leur insuffisance on arriva à élaborer toute une série de généralisations élémentaires qui servirent de point de départ pour l'étude de l'univers, et posèrent la base de son futur développement.

La nouvelle période se rattache à l'ancienne par l'époque de Copernic, Kepler, Tycho-Brahé. Elle a préparé les succès de la période récente.

Dans la nouvelle période, l'astronomie s'est développée principalement sous l'influence des sciences mécaniques ; on peut l'appeler la période mécanique.

L'instrument mathématique de l'astronomie dans cette période fut l'analyse des infiniment petits. La découverte du calcul intégral et différentiel a fait faire de grands progrès à la mécanique et à l'astronomie; aussi on peut encore donner à cette période le nom d'*analytique*.

Les procédés et les méthodes d'observation se sont encore perfectionnés pendant cette période. A l'aide du télescope, les observations ont acquis une exactitude remarquable et ont complétement confirmé les résultats des déductions mathématiques. La nouvelle astronomie, par sa perfection actuelle, est avec l'ancienne dans le même rapport que l'analyse des infiniment petits et l'exactitude des observations télescopiques sont aux moyens mathématiques et à l'observation sans instruments des anciens.

D'après la cosmographie des anciens, fondée sur les résultats de leur astronomie, le globe de la terre était le centre du monde entier; tout l'univers était vis-à-vis de l'homme dans un rapport de dépendance; d'après la cosmographie actuelle, l'univers est l'ensemble d'un nombre infini de mondes, soumis à des lois mathématiques rigoureuses, et la terre, dans cette assemblée des mondes, n'est qu'un des membres les plus petits et les plus insignifiants. Autant les récentes découvertes de l'astronomie ont diminué la valeur physique de l'homme, autant elles ont élevé les forces internes de son âme, sa grandeur morale. Les mathématiques, dans cette série de victoires remportées par l'intelligence humaine, jouent le principal rôle. La forme de l'exposition mathématique peut servir de modèle pour les autres sciences.

Avec l'aide des mathématiques, l'astronomie a pris une forme tout à fait scientifique.

Dans les mathématiques on suit surtout une méthode déductive. Une science ne peut être considérée comme arrivée à la perfection que quand, à l'exemple des mathématiques, toutes les vérités partielles peuvent y être démontrées à l'aide de quelques axiomes généraux. Au temps actuel, toutes les vérités astronomiques et tout l'ensemble des mouvements des corps célestes, peuvent être considérés comme la conséquence de quelques principes généraux d'astronomie.

Les principes généraux des mathématiques se formulent sous forme d'axiomes; la science mathématique reçut tout d'abord un caractère qui se prêta à l'opération déductive. En astronomie cet état idéal doit être précédé par une période dans laquelle ces principes généraux sont élaborés par l'induction.

Dans cette période le succès de l'induction elle-même dépend des instruments que fournit la déduction mathématiqne. En effet, quoique

Bacon conseille de se servir surtout de l'induction et mette en garde contre l'*anticipation* ou les conclusions prématurées à l'aide d'hypothèses, l'histoire des sciences témoigne clairement que l'induction hypothétique a rendu des services très-importants. La pénétration et la finesse, déployées dans les découvertes, ont été les moyens les plus efficaces de l'intelligence humaine. Or, le succès de l'induction hypothétique dépend de son application concurremment avec le procédé déductif. En effet la justesse d'une hypothèse peut et doit être démontrée par les conséquences qui ressortent de l'hypothèse elle-même. En ce cas seulement, l'application de l'analyse mathématique devient souvent l'unique et indispensable moyen de mettre l'hypothèse donnée sur la base solide de l'expérience et de l'observation. Il suffit de rappeler l'hypothèse de Kepler pour être pénétré de cette nécessité.

Le succès de Kepler s'explique non seulement par une remarquable puissance de combinaison, mais encore par ses profondes connaissances mathématiques qui lui ont donné le moyen d'amener à l'évidence et à la simplicité toutes les conséquences numériques de telle ou telle hypothèse.

La division des sciences en inductives et déductives ne se rapporte qu'à leur développement relatif. Plus la science est parfaite, plus la déduction y a d'applications.

L'histoire de l'astronomie donne des conclusions intéressantes relativement à l'influence réciproque de la déduction et de l'observation sur son développement. D'un côté, le succès de l'astronomie a été surtout déterminé par les moyens mathématiques, dont les savants ont disposé suivant les époques. Sans la géométrie et l'analyse des infiniment petits, aucune puissance de l'intelligence, aucune hypothèse, ne nous aurait élevés au-dessus de conceptions erronées sur l'organisation de l'univers. D'autre part, ces moyens seraient insuffisants, s'ils n'étaient pas accompagnés de perfectionnements dans les procédés et les méthodes d'observation. Kepler reconnaît que pour la découverte de ses lois il a été autant aidé par les observations exactes de Tycho-Brahé que par les recherches géométriques des anciens.

Il est impossible de ne pas remarquer une certaine logique, un certain ordre dans le développement historique de l'astronomie. Par le développement des mathématiques, l'œil intérieur de l'homme se développe en même temps que son œil externe; celui-ci n'aboutit à des résultats féconds que lorsqu'il est aidé par l'œil interne. Bertrand, le géomètre français, exposant l'histoire des découvertes astronomiques les plus importantes, fait justement remarquer que l'excessive exactitude des observations astronomiques exercerait une influence fatale sur la marche de la science, si elle n'était accompagnée de découvertes corrélatives dans le domaine de l'analyse mathématique. C'est cette exactitude qui aurait imposé à Kepler les plus difficiles problèmes de la mécanique céleste, si d'ailleurs il n'y avait pas eu de mécanique. En présence de ces difficultés, Kepler n'aurait guère été en état de manier le matériel scientifique et de découvrir ses lois approximatives. Chaque siècle, chaque époque résout les problèmes scientifiques suivant sa force et ses moyens.

Les autres sciences physiques dans leur mouvement, dans leur rapport avec les déductions mathématiques, doivent traverser toutes les phases du développement historique qu'a traversées l'astronomie. Chez elles aussi, à l'époque des combinaisons vagues et métaphysiques, a dû succéder une période où l'on a senti le besoin de l'expérience et de l'observation. C'est dans cette période que se manifestent dans la science les premières généralisations que les phénomènes sont déterminés par groupes et par espèces. Plus tard, ces observations ont dû être accompagnées de chiffres aussi exacts que possible. C'est sur ces faits arithmétiques que reposent les premières lois numériques qui plus tard ont dû découler comme la conséquence immédiate des principes généraux élaborés par la rigueur du procédé inductif.

Toutes les divisions de nos connaissances, relativement à la nature extérieure, peuvent se rapporter d'après leur perfection scientifique, à l'une ou à l'autre période. En ce qui concerne leurs rapports avec les mathématiques, on peut, avec beaucoup de vraisemblance, affirmer que la perfection des sciences physiques est déterminée par l'étendue du domaine de l'analyse mathématique. On peut dire que la complexité ou la difficulté de telle ou telle science physique est déterminée par la complexité et la difficulté des problèmes analytiques. Aujourd'hui encore, il y a beaucoup de problèmes physiques dont la solution est surtout empêchée par ce fait que les mathématiques ne sont pas en état de répondre aux questions analytiques auxquelles ces problèmes se rattachent. On peut dire que l'état des mathématiques, à une époque donnée, ne détermine le développement des sciences physiques que jusqu'à un certain degré.

Pour mieux faire comprendre la difficulté relative des problèmes de l'astronomie et de la physique, j'établirai un parallèle entre la théorie mathématique de l'élasticité et la mécanique céleste. La mécanique céleste étudie la question du mouvement effectif des corps célestes sous l'influence de la gravitation réciproque. L'action de toute la masse d'un corps céleste peut être ramenée à l'action de son centre de gravité, c'est-à-dire à un seul point matériel. Dans toutes les recherches de la mécanique céleste, le nombre des corps célestes est déterminé et l'on connaît la loi de leurs actions réciproques. Les résultats mathématiques de ces recherches peuvent être vérifiés par des observations astronomiques exactes. Malgré tout cela, le problème de l'action réciproque des corps célestes est excessivement difficile au point de vue mathématique et a donné lieu à une vaste science : la mécanique céleste.

Dans la théorie mathématique de l'élasticité, la question est encore plus difficile; au lieu de la loi de Newton à laquelle obéissent les corps célestes, nous rencontrons dans la théorie de l'élasticité des phénomènes résultant d'influences réciproques, d'après la loi inconnue à nous du nombre infini des points matériels. Enfin, les résultats mathématiques de nos recherches ne peuvent pas être complétement vérifiés par des observations physiques exactes. Dans les observations astronomiques, nous rencontrons des grandeurs déterminant la situation d'un astre donné et nous exprimons les résultats de l'observation par quelques indications numériques. Dans les expériences physiques, nous avons affaire à un procédé compliqué, et, pour la vérification rigoureuse des résultats mathématiques, il nous faudrait déterminer la situation de chaque point matériel. La plus grande complication des questions physiques ne modifie nullement l'aspect général de leur mouvement scientifique. L'histoire de beaucoup de branches de la physique, comme l'histoire de l'astronomie, confirme que le degré de développement des déductions mathématiques détermine surtout le caractère et la hauteur de nos connaissances sur la nature extérieure. Les Chinois faisaient il y a longtemps des observations astronomiques; mais le procédé inductif ne pouvait les amener au delà de certaines limites déterminées; leurs connaissances mathématiques et par conséquent leur force de déduction n'avaient pas de développement progressif.

Dans le développement progressif des sciences physiques, nous sommes obligés de remarquer une tendance graduelle à l'exactitude et à la perfection. C'est par cela seulement que nous pouvons expliquer pourquoi la chimie tend à s'établir sur le terrain purement physique, la physique sur un terrain purement mécanique, et pourquoi beaucoup de gens supposent que, dans l'avenir, tous les procédés de la nature externe seront expliqués par les lois mécaniques de l'équilibre et du mouvement et deviendront l'objet de recherches accompagnées dans leur marche déductive par des opérations mathématiques. Ainsi la science des propriétés et des rapports mutuels des grandeurs est la condition indispensable qui détermine le degré d'exactitude et de rigueur des sciences physiques, l'unité qui les relie en un corps organique, le moyen puissant, l'instrument auxquels elles s'adressent dans l'intérêt de leur développement.

Le fondement des sciences mathématiques, ce sont les axiomes tellement évidents que l'on estime inutile de les démontrer. Si on les mentionne c'est plutôt dans un intérêt théorique et pédagogique. Le procédé psychologique à l'aide duquel ils se sont produits s'est tellement identifié avec notre entendement que dans les mathématiques on ne soulève même pas la question de savoir comment ils se sont produits. De ces axiomes on tire d'autres vérités mathématiques par suite de rigoureuses opérations logiques ; toute vérité démontrée devient la base d'autres vérités plus complexes et moins évidentes. Les divers procédés et méthodes à l'aide desquels ces vérités s'obtiennent, habituent l'entendement à divers procédés et méthodes de jugement. En comparant ces méthodes, le géomètre, malgré lui, est amené à s'occuper de questions logiques et philosophiques. Ainsi, avec les vérités qui expriment les qualités et les actions réciproques des grandeurs, on acquiert des vérités qui caractérisent les opérations internes de notre esprit, les faits du monde interne. C'est ainsi que naturellement la transition se fait des mathématiques à la logique, et devant le logicien se dressent fatalement les problèmes sur les limites de nos connaissances, sur les qualités de notre pensée, sur la certitude. La pureté de la pensée logique, n'est nullement troublée dans les mathématiques par les perturbations accidentelles de notre esprit. Ainsi, la science mathématique est la science qui généralise les faits du monde extérieur, qui leur donne une unité organique ; elle est en même temps le premier degré des sciences philosophiques, des sciences du monde moral.

Les vérités mathématiques par leurs résultats et par leurs méthodes ont une double signification. Leurs résultats sont indispensables pour les sciences physiques, leurs méthodes pour les sciences morales.

Les mathématiques d'après nous sont l'anneau qui relie les sciences du monde interne à celle du monde extérieur.

Je me permettrai de citer un exemple emprunté à la vie morale de l'antiquité. Lewes dans son histoire de la philosophie au chapitre de Pythagore, rapporte ce qui suit : Pythagore, après une longue et rigoureuse épreuve admettait ses élèves dans le sanctuaire où la partie la plus élevée de leur âme était éclairée par la connaissance de la vérité, par l'intelligence des objets immatériels et éternels. C'est dans ce but qu'ils étudiaient avant tout les mathématiques, parce que cette science, occupant le milieu entre les objets matériels et immatériels, est capable d'abstraire l'âme des choses sensibles et de l'élever aux choses que l'entendement seul peut atteindre.

Il ne faut donc pas s'étonner de voir tous les grands mathématiciens, ainsi que le démontre l'histoire des sciences, montrer une tendance à s'occuper de l'étude des lois du monde extérieur ou intérieur et devenir souvent naturalistes ou philosophes. Les qualités de leur organisation, les circonstances de leur vie intérieure déterminent le côté vers lequel ils dirigent leur force, l'ordre de faits qui réclame leur attention. Ceci nous explique pourquoi des mathématiciens comme Newton, Laplace, font de grandes découvertes dans le domaine des sciences physiques et expliquent les lois de l'univers, pourquoi Descartes, d'Alembert, Leibnitz s'occupent de questions philosophiques, pourquoi Ampère s'occupe de physique et de philosophie.

C'est là un phénomène tout naturel et très fécond dans l'économie générale de la vie intellectuelle ; il est impossible de se placer au point de vue d'un étroit spécialiste et de leur faire des reproches de ce qu'ils ont osé expliquer les lois de la nature et étendre notre connaissance du monde jusqu'aux limites qu'elle a atteint récemment. La part que prennent certains mathématiciens dans la solution des questions philosophiques et dans l'organisation de beaucoup de systèmes philosophiques, s'explique par l'influence qu'exerce sur la pensée la méthode déductive.

Whewell dans son histoire des sciences inductives signale constamment ce fait que l'esprit humain ne peut s'arracher au besoin de tirer des conséquences et des conclusions des propositions générales qu'il accepte comme exactes. S'élevant à la hauteur d'une loi générale, l'esprit humain est entraîné par la perspective des nouveaux horizons qu'il découvre de cette hauteur. Dans la plus grande partie des systèmes philosophiques on constate la tendance de l'esprit humain à faire sortir tout l'ensemble des manifestations cosmiques d'une unité et d'une harmonie supérieures.

Malgré les défectuosités des résultats, cette tendance de l'esprit humain à l'élévation, cet effort pour expliquer d'une façon déductive tous les phénomènes, reste la plus belle expression de sa force morale. Il n'est pas étonnant que les mathématiciens aient souvent cédé à ces hautes inspirations de leur intelligence et qu'ils aient présenté, sur la base des faits observés par eux, leurs systèmes philosophiques. Ils transportaient ainsi dans une autre sphère leurs méthodes favorites et bien connues de raisonnement déductif.

Le savant belge Quételet, dans son système social, a depuis longtemps signalé cette particularité des mathématiciens et déterminé l'ordre logique de leurs opérations. « D'abord, dit-il, le géomètre commence ses recherches par les mathématiques pures, puis il passe aux applications, au perfectionnement des méthodes, et enfin à l'élaboration métaphysique de ces méthodes. D'abord il emploie hardiment l'instrument du calcul, puis il pénètre les détails et il termine par le développement de la théorie. Évidemment, tel ne devrait pas être l'ordre naturel des choses: cependant ajoute Quételet nous commençons tous par marcher sans rien connaître des lois de l'équilibre. »

On peut donc dire que les mathématiques ne sont devenues que récemment un membre indispensable des sciences naturelles. Ce n'est que la civilisation moderne qui est caractérisée par le développement simultané des applications des méthodes mathématiques à l'explication des lois du monde externe. Dans l'antiquité, les mathématiques étaient surtout appréciées au point de vue philosophique, et, malheureusement pour beaucoup, l'inscription de Platon avait perdu ce sens profond qu'elle a en réalité. Ce caractère double, intermédiaire des mathématiques, rattachant comme un anneau deux branches diverses de nos connaissances, permet de relever quelques inconvénients de la rigoureuse division des sciences par facultés. Cette division n'a toute sa force et son caractère obligatoire qu'en vue de tel ou tel but pratique et général. Mais, en ce qui concerne les exigences de la vérité pure, cette action réciproque des diverses sphères de connaissances, appartenant à des vérités diverses, est si importante, si fructueuse, que raisonnablement il est impossible de s'y opposer. Une organisation rigoureuse qui exclurait toute possibilité de combiner les diverses connaissances, priverait la société et la science de ces utiles combinaisons qui, chez beaucoup de savants, apportent un grand profit et exercent une influence considérable sur le développement ultérieur de la science. Leibnitz philosophe et mathématicien, Helmoltz physiologue et mathématicien, Quételet statisticien et mathématicien seraient impossibles avec un système rigoureux d'exclusivisme. C'est à la vie, c'est du développement ultérieur de notre société qu'il appartient de résoudre la grande question de savoir comment, sans sacrifier tous les avantages d'une rigoureuse organisation des facultés, il faut donner carrière au libre développement scientifique, aux puissantes et légitimes exigences de l'intelligence.

Ce caractère intermédiaire des sciences mathématiques détermine leur grande importance au point de vue de la culture intellectuelle. Les divers systèmes d'éducation, quelles que soient leurs différences, l'admettent volontiers dans leurs programmes pédagogiques. Le système qui donne pour base à l'éducation les faits de la parole, comme le système qui la limite aux faits de la nature, sont également favorables aux mathématiques. Sans aucun doute ces deux systèmes envisagent le profit des mathématiques à deux points de vue différents. Malheureusement, l'importance et l'extension de l'éducation mathématique dans nos établissements secondaires d'instruction, ne répond pas aux hautes exigences de la civilisation contemporaine. Les mathématiques, dans leur état actuel, ne peuvent développer toute leur vertu éducatrice; leur enseignement est interrompu au moment où commence à se dessiner leur importance pour l'explication des lois de la nature et des lois de la pensée. Le cours de sciences mathématiques, dans les établissements d'instruction générale, devrait être assez étendu pour faire comprendre qu'après Euclide ont vécu Descartes, Leibnitz, Newton, Monge. Il faudrait grouper autour de lui des appendices théoriques qui permissent de comprendre dans ses traits généraux cette importance profonde qu'ont les méthodes mathématiques dans les connaissances actuelles de l'humanité. C'est à l'enseignement général qu'il convient également de rendre plus claire et plus évidente la solidarité des mathématiques avec les sciences appliquées. Outre les graves dommages que subit l'enseignement en général, il y a aussi d'autres inconvénients. Entre les établissements actuels d'instruction secondaire et les facultés de physique et de mathématique, il n'y a pas de lien organique auquel les facultés puissent rattacher le système ultérieur de leur enseignement. L'élève qui étudie dans les gymnases n'a pas d'idée nette du caractère des questions dont on s'occupe dans les facultés des sciences. L'instruction générale ne devrait pas être si insuffisante, que l'on ne puisse choisir ensuite en pleine conscience la faculté à laquelle on se destine; une démarche aussi importante ne devrait pas être livrée au hasard. L'enseignement actuel des mathématiques dans les établissements secondaires n'atteint pas complétement son but; car l'ensemble des vérités, des lois et des méthodes mathématiques sous la forme pédagogique actuelle, n'est qu'un instrument dont on ne sait pas se servir et dont on ne connaît pas les forces puissantes.

Quelque insuffisant que soit l'enseignement actuel des mathématiques dans les établissements d'instruction, cependant il offre dans une certaine mesure de grands avantages pédagogiques; ces avantages résultent des qualités mêmes des notions enseignées par les mathématiques. Au point de vue pédagogique, il faut surtout signaler le rôle des méthodes employées pour la déduction des vérités mathématiques. Le procédé logique rigoureux, à l'aide duquel s'édifie le grandiose édifice des mathématiques, est le meilleur moyen de développer le côté logique de l'entendement, le jugement. Arago appelle les mathématiques la logique en action. En effet, nulle part les conséquences ne se déduisent avec plus de rigueur, nulle part le sophisme et l'inexactitude du syllogisme ne se développent avec une pareille évidence. A ce point de vue, les mathématiques ont de grands avantages sur les autres sciences. Dans les sciences morales, la rigueur du procédé logique est singulièrement troublée par les autres forces de notre esprit. Les éléments qui entrent dans leurs syllogismes sont fort complexes et renferment beaucoup de subjectif. L'homme qui accomplit une opération logique sur les éléments des sciences morales, s'abandonne malgré lui à telle ou telle émotion, et introduit dans l'opération sa propre individualité. Cette individualité, avec ses manières de voir, avec son organisation psychologique, se mêle à l'œuvre de la pensée pure. On a telle ou telle conclusion souvent, non parce qu'elle est indispensable, mais parce qu'elle répond le mieux à nos idées sociales ou esthétiques. Le syllogisme prend un caractère dramatique; on trouble sa sérénité, son impartialité. Tout syllogisme de cette espèce doit être soumis à une rigoureuse critique. Dans les sciences morales, il est impossible de supprimer l'élément subjectif; souvent même on ne le doit pas. Ce n'est qu'à ces conditions qu'elles gardent leur caractère essentiel. Je le répète, le procédé logique est ici altéré par les forces secondaires de notre esprit. Voilà pourquoi l'objet de ces sciences convient mieux pour l'éducation de la pensée pittoresque, artistique, persuasive, que de la pensée rigoureuse, logique, démonstrative. Convain cre, ce n'est pas encore démontrer. Les sciences physiques présentent encore de meilleurs moyens pour développer le côté logique de l'entendement; car elles sont plus objectives que les sciences morales. Elles demandent cependant, pour la construction du syllogisme, d'importantes observations, et elles doivent donner beaucoup de temps à là description. Le procédé déductif n'y joue donc pas le rôle principal. Il n'y a que les sciences mathématiques qui, par leur évidence et leur simplicité, soient susceptibles de développer dans toute sa pureté toutes les qualités de la pensée rigoureuse et logique.

Dans l'enseignement élémentaire, il faut signaler l'importance spéciale de la graduation avec laquelle on enseigne l'objet des mathématiques. Cette graduation se manifeste dans la transition logique des idées, des vérités plus simples aux plus complexes, et dans la généralisation graduelle des idées. Cette graduation donne au jugement la possibilité de s'approprier de plus en plus les méthodes d'exactitude, sans l'affaiblir par des exigences qui ne seraient pas en rapport avec son développement. Toute vérité dans les mathématiques s'appuie sur les précédentes et devient elle-même la base logique de celle qui la suit. Aucune science ne peut présenter un aussi long enchaînement de syllogismes se soutenant l'un l'autre. Chacun des syllogismes intermédiaires joue dans cet enchaînement le rôle de l'anneau faute duquel la chaîne serait brisée. La nécessité, à chaque pas que l'on fait, d'avoir en vue toutes les vérites, toutes les idées précédentes, instruit le jugement à l'attention, à la concentration, à la souplesse, à l'aisance, dans la combinaison des idées et des vérités. Tout le monde reconnaîtra que sous l'influence de ces conditions le jugement se développe.

Il me paraît utile de signaler ici deux opinions opposées relatives à l'influence des mathématiques sur l'imagination. Les uns sans preuve soutiennent qu'elle influe d'une manière défavorable sur le développement de cette faculté, les autres soutiennent la thèse contraire. Quételet, notamment, affirme que les mathématiques contribuent plus que toute autre science au développement de cette faculté. Un grand nombre d'exemples historiques cités par lui donnent un certain crédit à ses affirmations. Laissant de côté la géométrie qui développe l'imagination dans la région des formes étendues, je prendrai la liberté de présenter quelques idées générales qui, selon moi, contribuent à éclaircir le problème. Il y a deux côtés importants qui déterminent la faculté immédiate de l'imagination. L'un de ces côtés consiste dans la quantité de notions, d'idées, d'images, fournies à notre connaissance par la voie de l'observation et de l'expérience. Ce côté détermine la sphère matérielle de l'imagination et s'acquiert en grande partie par le développement littéraire. Il est caractérisé non pas par la profondeur, mais par la largeur des idées que l'on a sur le monde. Le second côté, le côté intérieur de l'imagination consiste dans l'opération qui groupe ces idées, ces faits, ces observations d'après les lois connues de l'association. Cette opération s'accomplit d'autant plus vite que l'esprit est plus prompt, qu'il est plus habile à faire ces groupements, que son expérience est plus riche.

Les sciences mathématiques instruisent le jugement à rapprocher les idées et les faits en vertu de l'identité, de l'analogie, des contrastes des grandeurs, elles aiguisent l'esprit et l'habituent à noter les moindres nuances.

A ce point de vue, elles contribuent certainement à développer le côté intérieur de l'imagination, celui qui exige la profondeur de l'observation du monde. Dans le développement de la faculté de transformer l'idée en image, on peut complétement se reposer sur les qualités de l'organisation humaine. La conscience humaine possède les forces et les moyens d'accomplir cette transformation, en supposant que la vie intellectuelle ait mis en œuvre pour cela assez d'éléments matériels. Abstraire l'idée de l'image est peut-être plus difficile que de lui donner le vêtement de l'image.

Pour que la puissance pédagogique de l'enseignement élémentaire, comme de l'enseignement supérieur des mathématiques, puisse déployer toute son action, il faut avoir constamment en vue la théorie, le mécanisme du calcul et les applications de la théorie à la solution des problèmes pratiques. L'application simultanée de ces trois importants procédés peut seule avoir une influence efficace. L'insuffisance d'un seul de ces éléments a pour conséquence immédiate une lacune dans la marche de l'éducation mathématique. La théorie influe d'une façon féconde sur la pensée en permettant de conjecturer sous une forme systématique ce que l'humanité à découvert après une longue série d'efforts. Sur une base purement scientifique, chacun peut reproduire à nouveau le procédé de découverte de la vérité; mais si l'on ne s'approprie bien le mécanisme, cette force de développement s'affaiblit. Le mécanisme du calcul, c'est la langue avec l'aide de laquelle le mathématicien expose ses idées pose et résout ses questions. Ne pas posséder le mécanisme, c'est ne pas savoir posséder ce grand instrument de civilisation, ne pas savoir exprimer ses pensées en langue mathématique. Savoir manier les symboles ne constitue pas l'essence de l'éducation mathématique; mais en tout cas, comme ils abrègent l'opération de la pensée, ils constituent la technique indispensable de la science. Le domaine de chaque science est considérablement élargi par le développement et le perfectionnement de sa langue technique.

Enfin l'application des principes théoriques et du mécanisme acquis à la solution des problèmes, constitue le troisième point important de l'influence pédagogique des mathématiques sur le développement des facultés intellectuelles. Malgré toute son importance, ce dernier côté est peu pris en considération dans la marche générale de l'enseignement actuel. La force éducatrice des travaux mathématiques, dans la solution de divers problèmes, se manifeste par le développement qu'elle donne à l'indépendance du raisonnement. Ce côté complète le mieux l'influence des mathématiques sur le développement du jugement; c'est la meilleure mesure et le meilleur moyen pour le développement des facultés mathématiques. Dans l'enseignement, ces trois procédés doivent se suivre dans le même ordre où nous les avons exposés, et leur ensemble seul exerce une influence complète sur l'intelligence.

L'importance des mathématiques pour le développement de tous les côtés de l'intelligence a fait estimer très-haut dans l'antiquité sa vertu éducatrice, son caractère philosophique. Pour les penseurs de l'antiquité, ses méthodes avaient plus d'importance que ses résultats; cependant l'étude des mathématiques entrait dans l'éducation générale comme un élément indispensable et les philosophes grecs étaient tous d'accord sur son importance. Au moyen-âge l'influence des mathématiques sur la civilisation diminua et leur développement s'arrêta; mais quand les sciences reprirent leur essort, l'étude des mathématiques devint de plus en plus répandue. Leur rigoureuse méthode, leurs brillantes découvertes, leurs grandes applications à l'explication des lois de l'univers les mirent au premier plan dans la marche générale de l'éducation. Pour le monde nouveau non-seulement leurs méthodes, mais leurs résultats et leur objet acquirent une grande importance. Sous l'influence de leurs méthodes et de leurs vérités l'astronomie étendit les limites des connaissances cosmiques et établit ces connaissances sur la base solide de l'observation. Tout cela influa singulièrement sur l'esprit humain qui s'habitua à croire plutôt à la recherche exacte, à la science qu'à l'autorité du moyen-âge. La pensée fortifiée entra hardiment dans la voie des recherches, et la période suivante se distingua par de brillants résultats scientifiques. Une longue suite de grandes découvertes scientifiques fut la récompense de cette foi en l'intelligence. Ces découvertes étaient accompagnées d'un progrès dans le développement des méthodes mathématiques. Elles expliquaient ou permettaient de contrôler vigoureusement tel ou tel phénomène physique. C'est aux mathématiques qu'on s'adressait pour ratifier telle ou telle proposition relative aux phénomènes naturels ; c'est avec l'aide des grands géomètres qu'on résolvait les malentendus et les doutes. Les physiciens ne regardèrent leurs doctrines comme pleinement scientifiques que lorsqu'elles pouvaient devenir l'objet d'une théorie mathématique capable d'expliquer toutes les phases d'un phénomène dans tous ses détails et de prédire les résultats de toute *expérimentation*. Toute une classe de savants s'appliqua uniquement à élaborer les méthodes mathématiques. Dans ce travail, ils ne recherchaient pas si tel ou tel procédé mathématique a ou n'a pas une application immédiate. L'histoire de la science montre clairement combien on se laisse égarer dans l'élaboration des théories mathématiques par la recherche d'une application immédiate. Les nouvelles recherches mathématiques ou bien ouvrent de nouveaux points de vue sur les procédés antérieurs, ou bien prouvent leur absolue nécessité pour les sciences appliquées et contribuent singulièrement à la découverte de nouvelles lois. Si les propriétés de l'ellipse n'avaient pas été découvertes par les anciens, Kepler n'aurait pas été en état de découvrir les lois du mouvement des planètes et Newton, celle de la gravitation.

D'après cela, il n'est pas étonnant que notre époque se distingue par le large développement des méthodes mathématiques, qu'un grand nombre de savants consacrent toutes leurs forces à développer les instruments et les moyens mathématiques. Ces instruments et ces moyens montrent la puissance déductive de l'homme ; avec l'art de recueillir, de classer les faits et le perfectionnement des méthodes de recherche et de l'observation, ils constituent la principale condition pour le développement des sciences naturelles. Aux yeux de quelques savants contemporains, l'étude des méthodes mathématiques, et celle de leurs applications à la physique sont si liées qu'ils n'hésitent pas, comme Lamé, à rapporter beaucoup de thèses mathématiques aux thèses correspondantes de la physique mathématique et de la mécanique. Chaque année le terrain scientifique des applications mathématiques s'étend de plus en plus. Outre la mécanique, l'astronomie, la physique, les applications mathématiques pénètrent dans les recherches des physiologistes et des chimistes modernes.

Dans le développement des applications mathématiques, qui caractérise la science et la civilisation moderne, les savants ne se sont pas bornés seulement à ces manifestations dont la dépendance causale est pleinement connue. Ils ont aussi appliqué leurs attentions aux phénomènes, dits fortuits. La partie des mathématiques connue sous le nom de théorie des probabilités à émis des hypothèses claires sur la probabilité des accidents fortuits, et a donné la possibilité d'émettre sur beaucoup d'entre elles des conclusions mathématiques rigoureuses. Parmi les phénomènes de ce genre, il faut signaler beaucoup de faits de la vie sociale. La théorie des probabilités a appelé l'attention sur beaucoup de phénomènes de la vie sociale et en a fait l'objet d'une analyse mathématique. La loi des grands nombres a montré que les éléments fortuits qui altèrent la marche régulière des phénomènes peuvent être éliminés par un plus grand nombre d'observations, et les conclusions relatives aux phénomènes fortuits peuvent avoir toute leur force, bien qu'on ne connaisse pas toutes les lois de leur lien causal avec les autres phénomènes. Les recherches psychophysiques de Fechner montrent qu'avec l'aide des chiffres, en s'appuyant sur la théorie des probabilités on peut obtenir des conclusions très-exactes en psychologie.

Les principes et les thèses élaborées par la théorie des probabilités deviennent de plus en plus un objet de recherches pour les savants qui étudient les phénomènes de la vie sociale, et il faut reconnaître que beaucoup de faits historiques peuvent trouver leur explication dans les théories mathématiques des chances que présente le calcul des probabilités.

Peu à peu chez les savants qui s'occupent des sciences sociales se développe la conviction que, pour l'explication de beaucoup de lois de la vie sociale, il est indispensable d'avoir un grand nombre de faits numériques. Il est très important de recueillir et de classer ces faits. Les chiffres ont une vertu spéciale. On reconnaît de plus en plus, comme une chose évidente, que la vie sociale est caractérisée par une série de chiffres bien compris et bien expliqués et la culture nationale devient l'objet d'une sérieuse étude. Ainsi les mathématiques prennent place parmi les sciences sociales et les rattachent aux sciences naturelles, non-seulement par leur méthode, mais même par leur objet.

Cette tendance de toutes les sciences à l'exactitude et à la précision s'explique par le caractère même des sciences contemporaines. La science contemporaine, dans ses conclusions, ne se borne pas à des conceptions générales. Immédiatement après les généralisations primitives, apparaît la question du nombre et de la mesure, qui dessinent le phénomène dans tous ses détails. La question du nombre et de la mesure donne à la science cette précision qu'elle s'efforce d'obtenir dans les derniers temps. Ce besoin du nombre et de la mesure apparaît comme *le signe du temps*, non seulement dans la science contemporaine, mais aussi dans l'art contemporain, dans les relations sociales contemporaines. Trouver la mesure dans le domaine de la pensée, de la volonté, du sentiment, voilà actuellement le problème du philosophe, du politique et de l'artiste. Ce besoin de précision de l'homme moderne non-seulement n'affaiblit pas, mais encore fortifie le côté idéal de la civilisation contemporaine. Grâce au nombre et à la mesure, l'homme s'efforce de quitter le domaine des instincts indéterminés, vagues, animaux, pour s'élever à un état idéal qui lui assurerait un pouvoir entier sur la nature extérieure et intérieure et qui introduirait l'harmonie et le sens estéthique dans chaque manifestation de l'esprit humain.

Le degré de développement et d'étendue des sciences mathématiques dans une région donnée est en rapport immédiat avec le développement de la richesse matérielle et de l'amour de la vérité. Dès que les rapports économiques s'établissent avec exactitude, la richesse du peuple s'élève, et l'on sent plus vivement le besoin de ces connaissances exactes pour lesquelles une éducation mathématique est indispensable. Ce besoin se manifeste aussitôt que l'homme dans sa lutte avec la nature a en vue non seulement de défendre son existence des influences extérieures, mais encore d'atteindre tel ou tel but social. A ce moment de développement national, les connaissances mathématiques apparaissent comme des sciences qui apportent un résultat matériel connu et en les cultivant on n'a pas en vue un but élevé.

Les circonstances se modifient bientôt. Avec le développement de la richesse matérielle apparaît inévitablement le loisir et le besoin de rechercher et d'élaborer les vérités mathématiques en vue de satisfaire des besoins plus élevés. Sous l'influence des relations plus commodes dans la vie se développe dans la pensée l'amour de la vérité. Des besoins intellectuels se manifestent; et l'on apprécie les mathématiques au point de vue des jouissances intellectuelles qu'elle procurent. Outre leur importance au point de vue matériel, elles deviennent indispensables parce qu'elles aiguisent la pensée, perfectionnent le jugement, répandent des notions précises sur les phénomènes dont l'homme est environné. C'est alors qu'apparaît leur valeur pédagogique, éducatrice, philosophique.

La vérité, a dit D'Israeli, est la passion dominante de l'homme. L'amour de la vérité est le grand moteur de la civilisation actuelle; c'est lui qui inspire avant tout le savant qui explore le domaine abstrait des grandeurs mathématiques. En dehors de la vérité, la science mathématique n'offre au penseur que bien peu d'avantages, si on la compare aux autres branches de la science.

Il n'y a là ni question du jour, ni émotions sociales, ni tableaux de nature à impressionner la sensibilité; la faible extension des mathématiques fait du savant un être presque isolé. Il n'y a que la vérité pure, que l'exactitude du résultat, que l'assurance de voir son travail entrer comme un anneau indispensable dans l'édifice de la science qui puisse immédiatement récompenser le mathématicien de ses efforts intellectuels.

Cette récompense immédiate est encore augmentée par l'importance qu'ont les vérités mathématiques pour les autres connaissances. Le penseur constate que, d'une part, grâce au concours des sciences mathématiques on obtient la satisfaction des besoins matériels, de l'autre on introduit l'harmonie et l'ordre dans la connaissance du monde.

Malgré ces ramifications, la science présente un organisme unique. Toutes les divisions de la science sont solidaires les unes des autres et il n'est pas possible de les séparer. L'état de chaque science indique la civilisation du pays. Les mathématiques caractérisent plus nettement encore la hauteur à laquelle est arrivée la culture intérieure et extérieure de la nation. La science et la culture influent mutuellement sur leur développement. Les sciences exactes arrivent pleinement à cette solidarité. Dans le moindre phénomène de la vie contemporaine, on reconnaît l'influence des sciences exactes. D'après cela on comprend les efforts développés par les sociétés civilisées pour étendre les connaissances mathématiques. Ces efforts se manifestent par les sacrifices matériels qu'elles s'imposent pour le développement de la littérature mathématique et des établissements d'instruction.

Les sociétés et les gouvernements sont guidés par un calcul exact;

ils comprennent que l'on peut retirer certains avantages, lors même que ces avantages ne sont pas accompagnés d'un résultat matériel immédiat. En employant pour le développement des sciences mathématiques les moyens économiques, il ne faut pas se laisser guider uniquement par les idées économiques sur les rapports de l'offre et de la demande. Les découvertes et les recherches qui s'accomplissent dans le domaine de la vérité abstraite ne peuvent pas s'apprécier matériellement et il ne faut pas leur appliquer les mêmes principes qu'à des marchandises manufacturées. Les conquêtes que l'intelligence fait, grâce à la littérature, augmentent l'honneur d'un pays, lui rapportent du profit, et assurent le progrès moral et matériel dans d'autres domaines de la vie nationale.

Si évidentes que soient ces vérités, elles sont encore loin d'être comprises par tous les gens éclairés.

La plupart, traitant avec indulgence les sciences mathématiques, reconnaissent leur importance au point de vue de l'éducation, la valeur de leur objet; mais il y a loin, chez nous, de cette indulgence pour elles à cet intérêt général susceptible de leur offrir un sérieux appui. Cet intérêt ne devient tout à fait fécond que lorsque les vérités élémentaires de la civilisation sont devenues l'apanage de toutes les sphères sociales.

Parmi les conditions les plus favorables au développement des vérités mathématiques, il faut citer un système pédagogique régulièrement développé. Ce système s'appuie spécialement sur un corps bien organisé de professeurs, unis entre eux par des intérêts pédagogiques généraux, par des traditions scientifiques, par la littérature. Chaque génération apporte à l'enseignement sa part d'expérience et de travail. La littérature conserve cette expérience, permet de l'apprécier à sa véritable valeur.

Les traditions de l'enseignement fournissent un solide terrain historique à l'œuvre pédagogique et maintiennent un lien moral entre les diverses générations. Toute vérité comprise dans le domaine des mathématiques reste rigoureuse et inébranlable. Le lien scientifique et pédagogique des diverses générations ne s'affaiblit dans les sciences mathématiques par aucune considération sociale, et les noms des travailleurs antérieurs sont saintement conservés dans le souvenir de ceux qui leur succèdent. Les propriétés des objets enseignés par les mathématiques déterminent aussi les conditions auxquelles l'enseignement doit satisfaire. Il n'est pas difficile d'énumérer ces conditions. Il suffit d'étudier la carrière pédagogique de feu le professeur Nicolas Zernov. Je suis heureux de pouvoir rappeler ici les grands avantages qu'a apportés à l'étendue des connaissances mathématiques en Russie la clarté et la netteté de sa parole. Beaucoup d'élèves de M. Zernov, répandus les uns dans toute la Russie, les autres présents ici, ne m'en voudront certainement pas de consacrer, en disciple reconnaissant, quelques minutes au souvenir de sa carrière professorale. En suivant le développement de mon discours, j'ai été amené à parler des conditions pédagogiques de l'enseignement, des traditions scientifiques et du lien moral qui rattache l'une à l'autre les diverses générations, je suis involontairement appelé à m'arrêter quelques instants devant la vivante image du vrai professeur. Tout auditeur de Zernov était saisi par la clarté et la simplicité de sa parole. En effet, l'objet des mathématiques est caractérisé par ces qualités; elles appartiennent aux conditions essentielles d'un bon enseignement. J'appelle là-dessus votre attention, parce que tout le monde ne partage pas cette manière de voir.

L'amour du mystérieux, une idée exagérée de la difficulté des mathématiques a porté certains esprits à mettre la clarté et la simplicité au second plan. D'autres, accoutumés à mesurer la profondeur de l'enseignement à l'obscurité et au vague de l'exposition, sont enclins à condamner tout ce qui est simple. Ce préjugé a appelé sur lui l'attention de beaucoup de penseurs. Malgré son inanité, il fait un véritable tort à l'œuvre pédagogique, en donnant aux maîtres un faux idéal, en introduisant le mensonge dans les tendances scientifiques. L'enseignement de Zernov en était la constante réfutation. A toute occasion, dans ses leçons, il protestait contre l'obscurité dans l'enseignement. Son style se distinguait par la rigueur et la précision; il exigeait des autres les mêmes qualités. C'est dans les livres, plus encore que dans l'enseignement oral, que domine ce préjugé. Zernov ne cessait de démontrer combien il nuit aux intérêts moraux de l'auteur. En effet, la plus haute récompense pour un écrivain, c'est de développer autour de lui, de répandre ses idées. Le savant qui, entraîné par le désir exagéré de donner un air profond à ses idées, embrouille à dessein ses combinaisons scientifiques, tombe dans l'excès et prête à ses idées une forme qui est en complet contraste avec le but qu'il poursuit. En outre, cette affectation de profondeur révèle la petitesse de l'esprit et l'absence de véritable grandeur. Zernov démontrait sans cesse que es idées les plus fécondes étaient toujours les plus simples, et que la plus haute profondeur pour le mathématicien, c'est l'évidence et la simplicité.

Une autre propriété des mathématiques consiste dans la rigoureuse logique et l'enseignement des vérités. Zernov appelait constamment l'attention sur ce fait. Il faisait à tout propos ressortir le lien et la dépendance mutuelle des propositions mathématiques. Il s'efforçait toujours d'entretenir et de développer chez ses auditeurs ce degré de rigueur, cette concentration de la pensée qui est la condition *sine qua non* de l'éducation mathématique. Ses leçons étaient pleines d'observations importantes sur les méthodes de penser, sur les méthodes mathématiques d'enseignement. Il voyait en ses auditeurs de futurs travailleurs dans le domaine pédagogique et social et il s'efforçait de développer en eux les qualités sérieuses de l'esprit qui font comprendre toute la portée de l'œuvre. Ses aphorismes, ses démonstrations, ses remarques faisaient toujours tendre son discours vers ce but utile et bienfaisant. Chacun comprenait que dans ses rapports avec ses disciples il y avait une vive sympathie, un désir affectueux du bien. Les élèves ont toujours gardé de lui les meilleurs souvenirs et ont rendu justice à sa bienfaisante influence et à son zèle. En rappelant quelques unes des qualités de l'enseignement de Zernov, je n'ai eu en vue que les côtés qui par leur caractère objectif, pouvaient rentrer dans le plan général de ce discours.

L'activité de Zernov comme professeur a été des plus utiles ; les services qu'il a pendant longtemps rendus en contribuant à répandre les connaissances mathématiques en Russie sont très-importants ; son nom occupe dans l'histoire de la civilisation russe une place d'honneur.

Dans cette histoire, non-seulement on le rappellera avec respect comme savant et professeur, mais encore on appréciera dignement la simplicité calme et grandiose de son caractère, ses qualités comme homme et comme citoyen, sa bienfaisante influence sur la science et la civilisation russe.

En consacrant ces quelques lignes à un hommage de reconnaissance, j'ai voulu montrer que les élèves de Zernov conservent religieusement le lien moral qui les rattache à leur ancien professeur, qu'ils reconnaissent vivement les grands avantages qu'ils ont retirés de son enseignement.

Il y a vingt-cinq ans, à cette même place, Zernov faisait une leçon sur la mortalité et les assurances. Un quart de siècle seulement s'est accompli et c'est à moi son disciple qu'est échu l'honneur de rappeler son souvenir. La vie de l'homme passe vite ; mais les fruits de l'activité morale de l'homme ne meurent pas. Je suis convaincu que dans ces murs, personne n'oubliera jamais que Zernov fut un membre digne de cette docte compagnie aujourd'hui réunie pour fêter la science et la vérité.



Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.