

## O sile dośrodkowej i odśrodkowej.\*)

Zjawisko ruchu po kole i związane z tym ruchem pojęcia siły dośrodkowej i odśrodkowej stanowią zwykle najslabszą stronę dzisiejszych podręczników fizyki. Książki skądinąd dobre, nawet znakomite, w tym miejscu grzeszą nieścisłością rozumowania lub wprost oczywistymi błędami. Podziwiać nie-raz trzeba uporczywość, z jaką błędy te utrzymują się, przechodząc z jednego podręcznika do drugiego. Jeśli nawet ogólne określenia i rozumowania są prawidłowe, to z chwilą stosowania ich do przykładów poszczególnych autor zdaje się zapominać o tym, co mówił na poprzedniej stronie i powraca do utartych wprawdzie, ale na manowce prowadzących ścieżek. Brak jest widać prostej, a płodnej metody objaśniania zjawisk konkretnych, któraby z powodzeniem mogła zastąpić dawniej przyjętą\*\*).

---

\*) Artykuł ten stanowi rozszerzenie referatu, wygłoszonego na posiedzeniu Koła Mat. Fiz. w d. 18 maja 1912 r.

\*\*\*) Stara metoda polega na traktowaniu siły *odśrodkowej* jako siły *realnej*, działającej na *ciało krążące* po kole. Siła ta daje z innymi siłami, działającymi na ciało, wypadkową, która równoważy się z siłą reakcji, wywieranej przez więzy, utrzymujące ciało w ruchu kołowym. Siła „odśrodkowa“ jest tu przypadkiem szczególnym t. zw. sił bezwładności, chętnie używanych przez wielu autorów. Jeden i drugi wypadek jest mylnym stosowaniem zasady d'Alemberta. Zasada ta jest regułą rachunkową która wprowadza siły *fikcyjne*, (ujemnie wzięty iloczyn z masy przez przyspieszenie), aby zagadnienie dynamiczne móc sprowadzić do zagadnienia statyki. Sił tych nie można jednak traktować jako sił istotnych, istniejących; błąd założenia natychmias ujawnia się w mylności rezultatu: jeśli na ciało, obok siły zewnętrznej, działa równa jej i skierowana przeciwnie siła bezwładności (jak to się zwykle mówi w podręcznikach), to obie te siły będą się znosiły nawzajem, a zatem, w myśl zasad Newtona, ciało powinno się poruszać ruchem *jednostajnym*; ruch przyspieszony byłby niemożliwy. W zastosowaniu do ruchu po kole zdarzyło mi się słyszeć następujące powiedzenie profesora jednego z uniwersytetów zagranicznych: „Na ciało krążące po kole działa siła dośrodkowa, skierowana ku środkowi koła, oraz równa jej siła odśrodkowa, skierowana od tegoż środka ku obwodowi. Siły te równoważą się nawzajem, a z tym ciało odbywa ruch po kole“. Błąd, wyzierający w sposób jaskrawy z tego rozumowania, tkwi jednak, choć bardziej ukryty, w odpowiednich ustępach większości podręczników: zawsze sprowadza się zagadnienie do zrównoważenia wszystkich sił, działających na ciało, ale z tego w żaden sposób nie da się wyprowadzić ruch po linii krzywej! Obszerny i szczegółowy rozbiór błędów, popełnianych w rozmaitych podręcznikach, wraz z kilkoma przykładami, jak właściwie sprawę traktować należy, ogłosił prof. Szyller. (Otczety i protok. fiz.-matem. obszczestwa za 1890 g. Kijów).

Te względy skłoniły mnie do ogłoszenia drukiem przytoczonych poniżej uwag, choć nie zawierają w sobie nic istotnie nowego.

### Twierdzenia zasadnicze i określenia.

Ciało, pozostawione samemu sobie, poruszałoby się ruchem jednostajnym i prostoliniowym (pierwsza zasada Newtona).

Zmiana kierunku toru wymaga przyłożenia siły zewnętrznej, któraby wytwarzała przyspieszenie w kierunku swego działania (druga zasada Newtona).

Ciało, krążące po linii kołowej, doznaje ciągłego przyspieszenia, skierowanego ku środkowi koła; to przyspieszenie dośrodkowe wynosi  $\omega^2 r$ .

Dla wywołania tego przyspieszenia potrzebna jest siła, skierowana ku środkowi koła, o natężeniu  $m\omega^2 r$ .

Siłę tę, działającą na ciało krążące, nasywamy *siłą dośrodkową*.

Siła, wywierana na ciało materjalne, wywierana jest zawsze przez inne ciało materjalne, które z kolei podlega sile, wywieranej na nie przez pierwsze ciało; obie siły są równe sobie i skierowane odwrotnie (trzecia zasada Newtona; zasada akcji i reakcji).

Siła dośrodkowa może być wywierana tylko przez inne ciało lub układ ciał, działających na ciało krążące bądź bezpośrednio (na odległość), bądź za pośrednictwem innych ciał materjalnych.

Ciało, wywierające działanie dośrodkowe, wraz z ciałami, przenoszącymi to działanie, stanowią więzy, które zmuszają ciało krążące do przebiegania toru kołowego.

Więzy doznają ze strony ciała krążącego siły o natężeniu  $m r \omega^2$ , skierowanej odwrotnie względem siły dośrodkowej.

Ta siła, działająca na więzy, nosi nazwę *siły odśrodkowej*.

Siły dośrodkowa i odśrodkowa są sobie równe i skierowane odwrotnie; ponieważ jednak działają na ciała różne, przeto nie mogą się równoważyć nawzajem.

Przy ruchu obrotowym siła dośrodkowa istnieje zawsze, ale nie zawsze można odszukać siłę, któraby mogła być nazwana odśrodkową \*).

### Prawidła.

Chcąc stosować te zasady do przypadków poszczególnych, należy:

1<sup>o</sup> rozpatrywać tylko siły *realne*,

\*) Szyller (l. c.) przytacza następujące przykłady: 1) dwa ciała, przyciągające się nawzajem (a więc działające na siebie bez pośrednictwa innych ciał materjalnych), krążą dokoła wspólnego środka mas; siły, jakie na siebie wywierają, są obie skierowane ku środkowi obrotu, mamy więc dwie siły dośrodkowe, działające każda na inne ciało; siłą odśrodkową żadna z nich nie jest. 2) Siłę dośrodkową wywiera nie jedno ciało, lecz kilka ciał; jest ona wypadkową sił, wywieranych przez poszczególne ciała; każdej z tych sił odpowiada siła oddziaływania, wywierana przez ciało krążące na odpowiednie ciało działające; ale kierunek tych sił nie będzie przechodził przez środek krążenia, nie będą to więc siły odśrodkowe.

2° rozpatrywać *oddzielnie* siły działające na ciało krążące, oddzielnie zaś siły, działające na ciało centralne,

3° pomiędzy siłami, działającymi na ciało krążące, wyszukać siłę, która może wytworzyć *przyspieszenie dośrodkowe*.

### Zastosowania.

I. Kulka ślizgająca się bez tarcia wzdłuż obracanego pręta.

Kulka umknie ku końcowi pręta nie wskutek działania siły odśrodkowej (gdyż na kulkę nie działa tu wogóle żadna siła, skierowana wzdłuż promienia wodzącego), ale właściwie wskutek braku siły dośrodkowej. Ślizganie się kulki wzdłuż pręta jest li tylko wynikiem jej bezwładności.

Ponieważ, jakieśmy założyli, pomiędzy prętem a kulką tarcie nie istnieje, przeto siły, które mogą działać między nimi, muszą być skierowane pro-

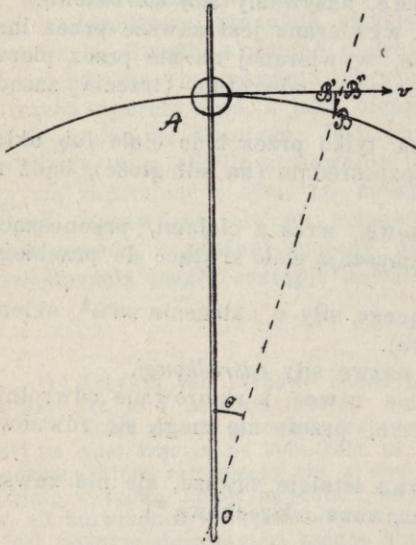


Fig. 1.

stopadłe do ich powierzchni, nie mogą więc posiadać składowej, skierowanej wzdłuż pręta, t. j. w kierunku promienia. Zatem kulka, która w punkcie A miała prędkość  $v$ , styczną do toru, nie zmieni kierunku swego ruchu podczas obrotu pręta o mały kąt  $\theta$ , i pod wpływem bezwładności dobiegła by do  $B'$  w tym czasie, kiedy punkt A pręta znalazłby się w  $B$  ( $AB = AB'$ ); kulka nie może jednak opuścić pręta, więc pręt naciskając na kulkę prostopadłe do swej długości, przyspiesza jej bieg nie zmieniając kierunku, i wskutek tego kulka znajduje się w  $B''$ ; oddaliła się więc od środka obrotu  $O$  i zeslizgnęła wzdłuż pręta.

II. Dwie kulki na pręcie.

Jeśli na pręcie umieścimy dwie podobne kulki o masach  $m_1$  i  $m_2$ , tak, aby znajdowały się każda po innej stronie środka obrotu, w odległościach od

niego  $r_1$  i  $r_2$ , to przesuwałyby się one ku przeciwnym końcom pręta i oddalały nawzajem od siebie; jeśli jednak kulki połączymy nicią, to nić ta będzie przeszkadzała ich oddalaniu się i napręży się, pociągając poruszające się kulki ku środkowi. Napięcie nici będzie w tym przypadku stanowiło siłę dośrodkową dla obu kulek<sup>\*)</sup>. Jeśli

$$m_1 : m_2 = r_2 : r_1 \quad (1)$$

to

$$m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2$$

<sup>\*)</sup> Siła odśrodkowa będzie wywierana przez każdą kulkę na bliższy jej koniec nici łączącej.

To samo napięcie wystarczy do utrzymania obu kulek w stałej odległości od środka obrotu. Jeśli ten warunek nie jest zachowany, jeśli np.

$$m_1 r_1 \omega^2 > m_2 r_2 \omega^2$$

to napięcie nici może nie wystarczać do wytworzenia przyspieszenia, potrzebnego do utrzymania kulki  $m_1$  na torze kołowym, i może być zbyt wielkim dla kulki  $m_2$ ; wskutek tego kulka  $m_2$  nie tylko się nie oddali od środka, ale zostanie ku niemu pociągnięta; kulka  $m_1$  odleci na koniec pręta, choć powolniej niż w razie nieobecności drugiej kulki.

Kulka, która znajduje się choć trochę bliżej, niż tego wymaga proporcja (1), będzie się jeszcze bardziej zbliżała do środka; więc „równowaga“ (raczej ustalenie ruchu) będzie chwytliwa; stąd trudność ustawienia kulek tak, aby jedna drugiej nie przeciągała.

III. Regulator wahadłowy. Ciałem krążącym jest kulka regulatora  $A$ , więzy stanowi sztywna oś  $MN$  wraz z prętem  $MA$ .

Na kulkę  $A$  działają 2 siły: siła ciężkości  $AB=mg$ , oraz siła wywierana przez oś.

Wielkość i kierunek tej siły określa się przez to, że razem z siłą  $AB$  musi dać jako wypadkową siłę, skierowaną ku środkowi obrotu  $K$ , t. j. siłę dośrodkową  $AD=mr\omega^2$ , odpowiadającą danej prędkości kątowej  $\omega^*$ ). Kąt odchylenia pręta od pionu znajdujemy z równań

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AD}{AB} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}, \quad (2)$$

$$\sin \gamma = \frac{AK}{AM} = \frac{r}{l}, \quad \text{skąd}$$

$$\cos \gamma = \frac{\omega^2 l}{g}.$$

Na oś  $MN$  działa siła równa  $AC$ , lecz skierowana odwrotnie; jej składowa pozioma będzie w tym wypadku siłą odśrodkową.

IV. Jeździec w cyrku, rowerzysta, pociąg na zakręcie.

W tych wszystkich przypadkach rozumowanie będzie analogiczne; więzy będzie stanowiła ziemia, lub szyny. Aby uniknąć ześlizgnięcia się ciała wpoprzek toru, powierzchnia toru musi być prostopadła do sił, wywieranych nawzajem na siebie przez ciało i tor (pochylenie torów wyścigowych dla cyklistów i torów kolejowych na silnych zakrętach).

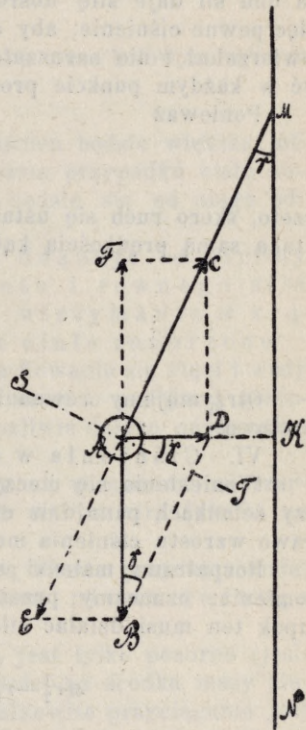


Fig. 2.

\*) Jest to tylko jeden z możliwych sposobów rozumowania. Można np. rozłożyć  $AC$  na  $AD$  i  $AF$ ;  $AF$  będzie się równoważyło siłą ciężkości  $AB$ ; albo też tę ostatnią siłę rozłożyć można na  $AD$  i  $AE$ , które zostanie zrównoważone przez działanie więzów  $AC$ . Są to oczywiście metody równoważne.

Pochylenie toru obliczamy według wzoru (2)

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\bar{\omega}^2 r}{g}$$

V. Powierzchnia swobodna wirującej cieczy.

Każda z cząsteczek  $A$ , tworzących powierzchnię swobodną wirującej cieczy, napiera na cząsteczki głębiej położone z siłą  $AE$ ; wskutek tego obok siły ciężkości  $AD$  działa na nią reakcja ze strony tych cząsteczek  $AC$ ; wypadkowa obu sił daje siłę dośrodkową  $AD$ . W warstwie powierzchniowej panuje więc pewne ciśnienie; aby ciśnienie to nie przesunęło cząsteczek wody wzdłuż powierzchni i nie naruszało przez to ustalonego ruchu obrotowego, musi ono być w każdym punkcie prostopadłe do powierzchni cieczy.

Ponieważ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\bar{\omega}^2 r}{g} \quad (\text{ob. równ. (2)})$$

przeto, skoro ruch się ustali i wszystkie cząsteczki cieczy będą już krążyły z taką samą prędkością kątową  $\bar{\omega}$ , będziemy mogli napisać

$$\operatorname{tg} \gamma = 2 r \cdot c = \frac{dy}{dr} \quad \text{albo}$$

$$y = cr^2 + y_0$$

Otrzymujemy równanie paraboli; powierzchnia cieczy jest paraboloidą obrotową.

VI. Ciśnienia w cieczy wirującej.

Wzniesienie się cieczy przy brzegach naczynia wirującego wskazuje, że przy ściankach panuje w cieczy ciśnienie wyższe, niż w okolicy osi obrotu. Prawo wzrostu ciśnienia możemy łatwo znaleźć.

Rozpatrzmy maleńki słupek cieczy o gęstości  $d$ , zorjentowany wzdłuż promienia; oznaczmy przez  $s$  jego przekrój, przez  $r_2 - r_1$  jego długość. Na słupek ten musi działać siła dośrodkowa

$$s(r_2 - r_1)d \frac{r_1 + r_2}{2} \bar{\omega}^2 = \frac{s}{2} d \bar{\omega}^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

Siłę taką wytwarzają różnica ciśnień na obie podstawy słupka, jeśli zmiany ciśnienia w warstwie poziomej będą się wyrażały wzorem

$$\frac{1}{2} d \bar{\omega}^2 r^2 + p$$

gdzie  $p$  oznacza sumę ciśnienia zewnętrznego i ciśnienia hydrostatycznego, panującego w rozpatrywanym poziomie.

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, mierząc wzrost ciśnienia wzniesieniem cieczy ponad dowolny poziom<sup>\*)</sup>. Odwrotnie — z rozkładu ciśnień możemy wyprowadzić kształt powierzchni swobodnej.

\*) Niejednostajność ciśnienia w zamkniętym naczyniu wirującym, wypełnionym powietrzem, można podobno wykazać zapomocą manometru wodnego. Trudności wykopania takiego doświadczenia byłyby dość duże — nie zdarzało mi się też go widzieć, ani czytać o jego wykonaniu.

## VII. Ciało zanurzone w wirującej cieczy.

Wyprowadzone powyżej prawo przedstawia pewną analogję do prawa wzrastania ciśnienia hydrostatycznego z głębokością (zamiast zależności liniowej mamy zależność drugiego stopnia); wynikające z tego ostatniego parcie cieczy ku górze na ciało zanurzone, znajduje odpowiednik w parciu dośrodkowym cieczy wirującej na ciało w niej zanurzone.

Ciało o gęstości  $d_1$  i objętości  $v$ , zanurzone w cieczy o gęstości  $d_2$ , w odległości  $R$  od środka obrotu będzie doznawało różnicy ciśnień

$$d_2 \cdot \omega^2 \cdot v \cdot R .$$

Siła dośrodkowa, potrzebna do utrzymania ciała na torze kołowym wynosi

$$d_1 \omega^2 \cdot v \cdot R .$$

Więc zależnie od tego czy  $d_2 \geq d_1$ , różnica ciśnień będzie większa lub mniejsza od potrzebnej siły dośrodkowej. W pierwszym przypadku ciało zostanie zepchnięte ku środkowi obrotu, w drugim — będzie się od niego oddalało.

Ciało, zanurzone w ciecz wirującą, doznaje ze strony cieczy parcia, skierowanego ku osi obrotu i równego sile dośrodkowej, jaka byłaby potrzebna do utrzymania w krążeniu tej cieczy, której miejsce zajmuje ciało zanurzone.

Przykładem zastosowania tego prawidła jest zachowanie się rtęci i wody nalanych do wirującego balonu; cięższa rtęć spycha ciecz o mniejszej gęstości ku środkowi, a sama wypełnia części naczynia możliwie daleko nazewnątrz położone.

Inne przykłady: oddzielanie śmietanki od mleka na wirownicy mleczarskiej; oddzielanie lekkich zawieszin; wciąganie lekkich ciał w wiry (pianka na herbacie, po silnym zamieszaniu jej w szklance).

VIII. Ciężenie ziemskie. Na siłę, z jaką ziemia przyciąga ciała, znajdujące się na jej powierzchni, ruch obrotowy ziemi niema żadnego wpływu.

Zmiana wartości  $g$  z szerokością geograficzną jest tylko pozorna (jeśli zaniedbamy zmianę, pochodzącą od zmiennej odległości od środka masy ziemi), możemy jedynie powiedzieć, że na biegunach całkowite przyciąganie jest obrócone na przyciskanie ciała do podstawy (np. do szalek wagi sprężynowej), w innych szerokościach część siły przyciągania jest potrzebna do utrzymania ciała na stałej odległości od środka ziemi (ciało nie jest w spoczynku, więc nie można go traktować wyłącznie statycznie), a dopiero pozostała reszta wytwarza ciśnienie ciała na podstawę. Ciężenie i siła dośrodkowa nie mają na ogół jednakowych kierunków (z wyjątkiem miejsc na równiku), gdyż pierwsze jest skierowane ku środkowi ziemi, kierunek zaś drugiej leży w płaszczyźnie równoleżnika. Przeto siła, z jaką np. kamień naciąga nitkę, na której jest zawieszony, jest różnicą geometryczną siły ciężenia i siły dośrodkowej. Również przyspieszenie względem ziemi ruchu ciała spadającego swobodnie jest różnicą geometryczną jego przyspieszenia względem środka ziemi oraz przyspieszenia dośrodkowego tego punktu powierzchni ziemi, ku któremu ciało spada.

Gdyby prędkość kątowna ziemi i ciał znajdujących się na niej wzrosła tak, że przyspieszenie dośrodkowe na równiku byłoby równe  $g$ , to ciała na

równiku spoczywałyby na ziemi bez wywierania na nią żadnego ciśnienia; przy jeszcze większym wroście prędkości, przyciąganie ziemi nie wystarczałoby na wytworzenie tak znacznego zakrzywienia toru, jakie byłoby potrzebne do utrzymania ciał na powierzchni ziemi i ciała oddalałyby się od ziemi po torze eliptycznym (jako satelici).

*Uwaga.* W powyższych przykładach termin „siła odśrodkowa“ pojawiał się tylko okolicznościowo i mógł być całkiem pominięty; za każdym razem jednak, tak jak i w całym artykule, był używany konsekwentnie dla oznaczenia siły rzeczywistej, działającej na więzy. Można jednak, jak to się często praktykuje, używać tego samego terminu dla oznaczenia pewnej siły fikcyjnej, przyłożonej już nie do więzów, lecz do ciała krążącego.

Jeśli do sił, działających rzeczywiście na punkt materialny i nadających mu przez to pewne przyspieszenie, dodamy jeszcze jedną siłę, skierowaną odwrotnie, jak przyspieszenie wypadkowe, a równą iloczynowi tego przyspieszenia przez masę punktu materialnego, to taka nieistniejąca naprawdę, pomyślana tylko siła byłaby w równowadze z siłami rzeczywistymi (zasada d'Alemberta). Przez ten wybieg sprowadza się zagadnienie dynamiczne do zagadnienia równowagi, które można rozwiązywać metodami statyki.

W zastosowaniu do ruchu obrotowego dowolnego układu mas możemy ową siłę fikcyjną uczynić równą iloczynowi każdej masy przez dośrodkową składową jej przyspieszenia, skierować ją odwrotnie względem tej składowej i nazwać siłą odśrodkową. Wtedy zasada owa będzie brzmiała: Wzajemne położenie i ruchy względne ciał, składających układ, krążący dokoła wspólnej osi, nie zmieniłyby się w niczym, gdyby ruch obrotowy ustał, do każdego zaś ciała była przyłożona siła odśrodkowa o natężeniu  $mr\omega^2$ .

Takie wprowadzenie fikcyjnej siły odśrodkowej jest zupełnie uprawnione i może być nieraz pożyteczne, ale może też prowadzić i prowadzi do poważnych błędów. Łatwo zapomina się o jej charakterze fikcyjnym, zaczyna traktować ją jako siłę rzeczywistą i gmatwa z siłą odśrodkową rzeczywistą, jaką ciało krążące wywiera na swoje więzy.

Jeśli tego błędu nie uniknęły nawet umysły wytrawne, to tym mniej można się tego spodziewać po umysłach młodzieży szkolnej, przeto wprowadzenie sił fikcyjnych (zarówno siły odśrodkowej, jak i t. zw. sił bezwładności), choć obiecuje niekiedy pewne wygody, powinno być usunięte z nauczania szkolnego. Obejść się bez tego wybiegu można doskonale, a inne niż dzisiaj traktowanie ruchu obrotowego mogłoby wybornie rozszerzyć i rozjaśnić mechaniczne pojęcia ucznia, zamiast je gmatwać i zaciemniać.

W. Werner.