XIV.

REMARQUES DE A. GENOCCHI

SUR

UN MANUSCRIT DE FERMAT.

(Tome IV, XXI *bis*, p. 218.)

Sous le titre *Intorno ad un manoscritto di Pietro Fermat testè pubblicato,* mon vénéré maître A. Genocchi publia dans la *Rivista scientifico-industriale delle principali scoperte ed invenzioni fatte nelle scienze e nelle industrie* en 1883 (anno XV, p. 148-151) quelques pages qui, sous la modeste apparence d'un compte rendu relatif à un document publié par M. Ch. Henry dans le Tome XII (p. 737-740) du *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche* et reproduit dans cette édition, Tome II, p. 431, contient des données si précieuses et des aperçus si ingénieux sur les rapports entre les méthodes de Fermat et celles employées par plusieurs autres arithméticiens, qu'il paraît utile de le reproduire ici en français, après y avoir rendu un peu plus précises certaines citations.

Gino Loria.

Un opuscule de M. Ch. Henry imprimé dans le *Bullettino*, publié par le Prince Boncompagni (Cahiers de juillet, août, septembre et octobre 1879) se clôt par une *Rélation des découvertes en la science des nombres*, tirée d'un manuscrit de Pierre Fermat qui existe dans la Bibliothèque de Leyde et qui me semble très important. L'auteur, craignant de ne pas trouver le loisir pour mettre complètement sur papier ses démonstrations et ses méthodes, voulut faire « sommairemente le conte de ses recherches sur le sujet des nombres ». Et il dit que, ayant reconnu l'insuffisance des méthodes ordinaires, il avait

www.rcin.org.pl

enfin découvert « une route tout à fait singulière » et avait appelé ce tour de démonstration « la descente infinie ou indéfinie ». Il s'en servit d'abord pour établir des propositions négatives, par exemple qu'il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit exprimée par un nombre carré ; son raisonnement marche de la manière suivante : « S'il y avoit aucun triangle rectangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un carré, il y auroit un autre triangle moindre que celui-là qui auroit la même propriété. S'il y en avoit un second moindre que le premier, qui eût la même propriété, il y en aurait par un pareil raisonnement un troisième moindre que ce second qui aurait la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième, etc. à l'infini en descendant. Or est-il, qu'étant donné un nombre, il n'y en a pas point infinis en descendant moindres que celui-là, j'entends toujours parler de nombres entiers. D'où l'on conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle dont l'aire soit quarrée. » Il taisait la manière pour tirer d'un triangle un triangle moindre, parce que en cela se trouve précisément le mystère de sa méthode et il invitait les Pascal et les Roberval à le découvrir.

On voit sans peine que le raisonnement de Fermat a sa base dans un principe employé aussi par Euclide par rapport aux nombres entiers, c'est-à-dire que *Nullum numerum in infinitum posse diminui* et j'ai remarqué en 1855 (*Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni; Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. VI, p. 306) que la manière avec laquelle la méthode de Fermat avait été exposée par Euler et Lagrange ne me paraît pas complètement exacte, car ces auteurs supposent qu'il est nécessaire d'essayer par des substitutions effectives de nombres petits si ces nombres vérifient la proposition dont il s'agit : en effet Euler veut que l'on fasse *quelques essais* avec des nombres très petits (*Algébre*, t. II, p. 259 (¹); *voir* aussi pages 244, 302, 351, 359) et Lagrange veut qu'on examine tour à tour *les premiers nombres de la série naturelle* (*Mém. de l'Acad. de*

(¹) Il s'agit probablement de l'édition de Lyon 1794, avec Notes de Lagrange.

www.rcin.org.pl

Berlin, 1777, p. 140). J'ai remarqué encore que la même méthode a été appliquée par un contemporain de Léonard de Pise, par le premier commentateur d'Euclide, Campanus de Novare, et que, tandis que Euclide employa le principe cité dans une proposition affirmative et très élémentaire de la théorie des nombres (chaque nombre qui n'est pas premier est divisible par quelque nombre premier), Campanus y eut recours à propos d'une proposition d'un rang plus élevé et négative ; c'est-à-dire qu'il est impossible de diviser rationnellement un nombre en moyenne et extrême raison. Et j'ai traduit la belle démonstration de Campanus en langage algébrique moderne, rappelant d'autres démonstrations anciennes et modernes et mentionnant une règle imaginée par M. Chasles, qui est plus générale, de la division d'une droite en moyenne et extrême raison.

Il est bon d'avertir que dans le *Liber quadratorum* de Léonard de Pise on trouve l'énoncé du même théorème qui fut donné comme exemple par Fermat ; il y était énoncé dans les termes suivants : *Aucun nombre carré ne peut être un nombre congruent*. Le traité du géomètre italien ne renferme aucune démonstration ; on y lit seulement que la démonstration se tire d'un autre théorème établi dans ce traité. J'ai essayé, dans l'article cité, de remplir cette lacune et j'ai donné deux démonstrations très simples. Je fis aussi d'autres applications de la méthode de Pierre Fermat et j'ai prouvé que le nombre 10 n'est pas un nombre congruent, proposition établie aussi par M. Matthew Collins, professeur à Dublin, mais seulement en 1858. J'ai démontré encore qu'aucun nombre congruent n'est le double d'un carré et que l'équation $x^4 + x^2y^2 + y^4 = z^2$ est impossible en nombres entiers ; plus tard j'ai prouvé la même chose par rapport à l'équation $x^4 + 6n^2y^2 - \frac{1}{7}y^4 = z^2$. En 1855 j'ai énoncé sans démonstration quelques autres théorèmes sur les nombres dans un journal de Turin et en 1874 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (voir la Note *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles*) ; un de ces théorèmes est une généralisation de celui relatif au nombre 10 que j'ai cité plus haut, car il affirme qu'un nombre qui est le double d'un

www.rcin.org.pl

nombre premier de la forme $8n + 5$ n'est jamais un nombre congruent.

Lagrange se servit de la méthode de Fermat, non pour prouver l'impossibilité de certaines équations, mais pour trouver les solutions les plus simples en nombres entiers de certaines équations possibles. J'ai signalé cette application dans une Note (*Sopra tre problemi aritmetici di P. Fermat*) présentée le 2 avril 1876 à l'Académie des Sciences de Turin, où je me suis occupé de trois problèmes arithmétiques de Fermat.

Mais l'usage du même tour de raisonnement pour établir des théorèmes affirmatifs n'avait été jusqu'ici employé par aucun de ceux qui essayèrent de prouver les propriétés des nombres découvertes par Fermat. En conséquence nous ne pouvons pas lire sans étonnement dans le manuscrit de la Bibliothèque de Leyde qu'il eut recours à cet artifice pour démontrer, par exemple, que chaque nombre premier de la forme $4n + 1$ est la somme de deux carrés. Il avoue que cela lui donna beaucoup de peine et qu'il dut employer bien du temps et bien des méditations, mais qu'enfin il atteignit son but. « Et les questions affirmatives passèrent par ma méthode à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il y fallut joindre par nécessité. Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives était tel : Si un nombre premier pris à discrétion qui surpasse de l'unité un multiple de 4, n'est point composé de deux carrés, il y aura un nombre premier de même nature moindre que le donné ; et ensuite un troisième encore moindre, etc. en descendant à l'infini jusques à ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'ensuivroit n'être pas composé de deux carrés, ce qu'il est pourtant ; d'où l'on doit inférer par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont par conséquent composés de deux carrés. »

Il ajoute que d'autres questions « demandent de nouveaux principes pour y appliquer la descente » et que quelques-unes se traitent seulement avec une grande peine. Telle est la proposition : chaque nombre est la somme de quatre carrés. « Je l'ai enfin rangé sous ma méthode et je démontre que si un nombre donné n'était point de cette nature,

www.rcin.org.pl

il y en auroit un moindre qui ne le seroit pas non plus, puis un troisième moindre que le second, etc. à l'infini, d'où l'on infère que tous les nombres sont de cette nature. » On rencontre des difficultés égales, même plus grandes, pour prouver que si a est un nombre quelconque non carré, l'équation $y^2 = ax^2 + 1$ aura une infinité de solutions en nombres x et y entiers. « Je la démontre (dit Fermat) par la descente appliquée d'une manière toute particulière. »

Or, tous les théorèmes que j'ai cités ont été établis rigoureusement, particulièrement par Lagrange, mais sans que l'on ait jamais eu recours à la méthode de *la descente*.

www.rcin.org.pl