TEORYA

WYZNACZNIKÓW.

PARYŻ. — DRUKARNIA E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2.

WYDAWNICTWO TOWARZYSTWA NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU.

TEORYA WYZNACZNIKÓW

(DETERMINANTÓW).

KURS UNIWERSYTECKI

WYŁOŻYŁ

MARYAN-ALEKSANDER BARANIECKI.

Cena 15 Fr.

PARYŻ.

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ.
PRZEWODNICZĄCEGO
W TOWARZYSTWACH NAUKOWEJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU.

1879

PRZEDMOWA.

« Nikt zapewne nie wątpi
» o wielkich matematyki pożytkach i przysługach:
» ale z początkową tylko téy nauki znaiomością,
» żaden kray ani do tych pożytków nie trafi, ani
» do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy
» należéć nie będzie. Żeby zaś do głębszych wia-
» domości matematycznych przebrać się pomyśl-
» nie, i uczuć tę rozkosz umysłu, iaką napełniaią
» myślącego człowieka, trzeba ie koniecznie w po-
» czątkowych zasadach obiąć gruntownie. »

JAN SNIADECKI.

Teoryę wyznaczników wykładałem dotąd dwukrotnie: raz w ciągu pierwszego semestru 1876/7 r. a., jako przygotowanie do wykładu Przekształceń liniowych; drugi zaś raz w ciągu całego 1877/8 r. a., jako przedmiot oddzielny. Moje notatki wykładowe utworzyły kurs tak odrębny od istniejących podręczników tej teoryi, że wydało się właściwem takowy starannie opracować, częściowo uzupełnić i ogłosić drukiem.

Wzmiankę tę o powstaniu dzieła robię umyślnie. Ona bowiem najlepiej objaśnia tak wybór i układ jego treści, jak i nastrój wykładu, w niem zachowany.

Charakter algebraiczny badań wyznacznikowych sprawia, że zastosowania ich do różnych kwestyj Algebry lub Teoryi liczb przedstawiają się nieomal bezpośrednio i niewielu wymagają wiadomości pomocniczych. Gdy jeszcze dodam, że szczególnie uwzględniłem własności wyznaczników, które są użyteczne w spółcześnie wciąż się rozwijającej Teoryi przekształceń liniowych, to, sądzę, tak treść badań przedstawionych w tej pracy, jakoteż pewien większy nacisk na niektóre wyznaczników własności, w zupełności usprawiedliwione zostały.

Co się zaś odnosi do nastroju, w jakim wykład jest trzymany, to nań wpłynęło naprzód to, że starałem się badania prowadzić ogólnie, nie usuwając kwestyj zawiłych, choćby przystępne ich wyłożenie przedstawiało nieco trudne zadanie; powtóre poziom przygotowania słuchaczów, którzy już z zasadami analizy byli obeznani. Wykład ustny stosowałem do tych wskazówek, jakie w ciągu jego prowadzenia mi się nasuwały. Z nich również korzystałem przy ostatecznej redakcyi tego dzieła, starając się w niem o ile możności odtworzyć wykład.

Książka ta zatem nie przedstawia konspektu wykładu, lecz sam wykład, ze wszystkiemi szczegółowemi rozwinięciami, jakie, w miarę nadarzających się trudności, robić trzeba było, dla należytego ich pokonania. Jestem bowiem zdania, że pozorna sprzeczność, jaka istnieje między panującem pojęciem o «zdolności do matematyki» naszej młodzieży wogóle, a faktem, że tak niewielu jest u nas w tej dziedzinie pracowników naukowych, choć zależna od innych jeszcze przyczyn, objaśnia się brakiem wytrwania w pokonywaniu trudności, napotykanych przy czytaniu nie tylko prac źródłowych, ale nawet podręczników. Podręczniki bowiem w obcych językach (a nasze są zwykle na wzór nich opracowywane) pisane są dla tych, którzy w otoczeniu swem znajdują pewien bodziec do prowadzenia usilnych studyów naukowych, którzy radzi są nawet owym niedomówieniom wykładowym i napomknieniom rachunkowym, gdyż słuszność własnych uzupełnień kontrolują zgodnością z dalszemi badaniami. U nas inaczej. Kursy czy-to uniwersyteckie, czy-też w zakładach technicznych, obrabiane bywają starannie, lecz po większej części tylko ze względu na egzaminy, które zdać należy. Niejedni wprawdzie zajrzą do dzieła, związanego swą treścią z wykładami słuchanemi, choć nie będącego bezpośrednią ich podstawą. Ale : ilu je należycie przestudyuje? Dlatego, mojem zdaniem, należy nam dość jeszcze długo podręczniki matematyczne pisać nadzwyczaj jasno. Nie chcę bynajmiej przez to powiedzieć, aby należało obniżać poziom wykładu; owszem, prowadzić go jaknajściślej, zachowywać należytą ogólność badania, ale każdy szczegół tak wypracować, aby czytelnik nie znajdował trudności przy jego pojmowaniu i uzasadnianiu. Wzorem utrzymania w tem właściwej miary służyć będą zawsze prace Śniadeckiego Jana. — W ten tylko sposób można podtrzymać wytrwałość w czytaniu dzieł, oraz wpłynąć na wyrobienie i powiększenie zastępu czytelników dzieł naukowych u nas. Jak bowiem przeprowadzenie jednego samodzielnego badania zachęca do wzięcia się za nowe, tak przestudyowanie jednego dzieła prowadzi do pracowania nad innem.

Temi właśnie względami kierowałem się przy przedstawianiu oddzielnych szczegółów, a tak co do tego, jak i co do porządku, przeprowadzonego w układzie treści, i również co do stopniowania samego wykładu, starałem się korzystać ze spostrzeżeń, jakie mi dawała praktyka wykładowa. Jej głównie zawdzięczam dosadność, zachowaną w badaniach, jakoteż i to, że w przedstawieniu wielu kwestyj zdołałem uprościć dość zawiły ich wywód i uprzystępnić ich pojmowanie.

W rozdziale drugim dlatego prostą jego treść tak drobiazgowo przedstawiłem, aby czytelnika oswoić z wyrażaniem własności wyznacznika za pomocą formuł i aby nauczyć czytać takowe. — Za zasadę do wyznaczania znaku tak wyrazu, jak i wyznacznika częściowego, wybrałem liczenie zmian, a nie przestawienia lub podstawienia kołowe, jako prostsze, choć dotąd systematycznie nigdzie nie przeprowadzone. — Różniczkowanie odsunąłem aż do rozdziału siódmego, t. j. nie wprowadzałem go dotąd, dopóki to już nie stało się koniecznem. — Co do treści zaś rozdziałów ósmego i dziewiątego z jednej, a dziesiątego do dwunastego z drugiej strony, to, modyfikując nieco redakcyę, możnaby było odwrotny zachować porządek. Wybrałem jednak ten, aby badania własności wyznaczników szczególnych, t. j. symetrycznych, skośnych i funkcyjnych, przedstawiały zakończone całości.

Rozmiary, jakie przybrało dzieło moje, zmusiły mnie do przemilczenia wielu ciekawych zastosowań wyznaczników do różnych zadań matematyki. Najgłówniejszych jednak, najwięcej typowych, starałem się nie pominąć, chcąc tem samem wskazać czytelnikowi, jak różnorodne bywa korzystanie z tak potężnego narzędzia badania, jakiem są wyznaczniki, chcąc przez to wzbudzić w nim pewne, nie wyłącznie teoretyczne zajęcie, przy studyowaniu ich własności. Potrzeba ograniczenia się wpłynęła także na to, że kwestye drugorzędnego znaczenia, albo nie dające się jeszcze tak obrobić, iżby do podręcznika dogodnie wprowadzone być mogły, zaznaczałem tylko, dodając wskazanie źródeł.

Nie bez tego, żeby niektóre z podręczników, lub niektóre z prac źródłowych nie wpływały na opracowanie pewnych ustępów w tem dziele. Uganianie się bowiem za samodzielnością tam, gdzie prostota i ścisłość już swoje zrobiły, byłoby zbytecznem i do niczego, chyba do zaciemnienia rzeczy, prowadzącem. Takie miejsca starannie jednak zaznaczałem. Nie idzie znowu za tem, aby każdy odsyłacz, wskazujący na autora, który pierwszy na roztrząsaną kwestyę zwrócił uwagę, miał rodzić myśl, żem zeń brał dowodzenie, lub nawet wysłowienie własności. Chciałem w tych odsyłaczach wskazać czytelnikowi na to źródło, w którem odpowiednia własność, choćby tylko w pewnym szczególnym przypadku i najprostszych warunkach, czasem mimochodem nawet, zaznaczoną została. Wskazówki takie dadzą pewne pojęcie o kolejnym rozwoju studyowanej gałęzi, a może też kogo zachęcą do zapoznania się ze źródłami, jedynie wyrabiającego prawdziwie naukowych badaczów.

Co się tyczy przykładów i zadań, to, jeśli natrafiłem w jakiej pracy na ujawniające owe własności, o które mi szło, nie zadawałem sobie trudu obmyślania innych przykładów podobnych, i brałem gotowe, zaznaczając tylko przy więcej złożonych autora, z którego czerpałem. Gdy zaś odpowiednich nie było, obmyśliłem własne.

Wskazywanie szczegółowe: które przykłady są mego pomysłu, lub które odmiennie niż gdzieindziej są tu traktowane; jak również odznaczenie wszystkich tych ustępów wykładu, które są rezultatem moich pracowitych obmyślań — wymagałoby (w razie, gdybym pod tym względem chciał być dokładnym) objaśnień zbyt na tem miejscu obszernych i drobiazgowych, a dla każdego, obeznanego z dotychczasowemi na tem polu pracami, zbytecznych.

Dodać tu jeszcze muszę, że, o ile możności, unikałem w mem dziele polemicznych zwrotów, tam tylko robiąc sprostowania, gdzie szło o rzeczy zasadnicze.

Kończę, wypowiadając życzenie, aby czytelnik, który osiągnie korzyść z przestudyowania tej pracy, podzielił ze mną uczucie wdzięczności, jaka się należy jej wydawcy, hrabiemu Janowi Działyńskiemu, który tak gorliwie podtrzymuje ruch naukowy na polu nauk ścisłych.

Warszawa, 2 listopada 1878 r.

Baraniecki.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

OKREŚLENIE, ROZWINIĘCIE I ZNAKOWANIE WYZNACZNIKA.

ROZDZIAŁ II.

PRZESTAWIANIE W SYSTEMACIE ELEMENTÓW WYZNACZNIKA RZĘDÓW RÓWNOLEGŁYCH.

ROZDZIAŁ III.

ROZKŁAD WYZNACZNIKA WEDŁUG ELEMENTÓW RZĘDU. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI.

Stron.

ROZDZIAŁ IV.

UPRASZCZANIE I OBLICZANIE WYZNACZNIKA.

ROZDZIAŁ V.

MNOŻENIE WYZNACZNIKÓW.

ROZDZIAŁ VI.

ROZKŁAD WYZNACZNIKA WEDŁUG WYZNACZNIKÓW CZĘŚCIOWYCH PEWNEJ KOMBINACYI JEGO RZĘDÓW RÓWNOLEGŁYCH. DODAWANIE I ODEJMOWANIE WYZNACZNIKÓW. SZCZEGÓLNE ROZKŁADY WYZNACZNIKA.

ROZDZIAŁ VII.

RÓŻNICZKOWANIE WYZNACZNIKA. WYZNACZNIK SYSTEMATU DOŁĄCZONEGO.

ROZDZIAŁ VIII.

WYZNACZNIK UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH.

ROZDZIAŁ IX.

WYZNACZNIK PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWEGO.

Stron.

ROZDZIAŁ X.

WYZNACZNIK SYMETRYCZNY.

ROZDZIAŁ XI.

WYZNACZNIK SKOŚNY. PFAFFIAN.

ROZDZIAŁ XII.

WYZNACZNIK FUNKCYJNY.

DODATEK PIERWSZY.

O WYZNACZNIKACH SZEŚCIENNYCH I WYZNACZNIKACH PORZĄDKU WYŻSZEGO.

DODATEK DRUGI.

Zastosowania wyznaczników do Geometryi. Wyjątki z prac :

DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKU (*).

stron.	*wiersz*		*zamiast*	*ma być*
34	8	*od góry*	0, ,	0, 0,
34	9	»	1, ,	1, 0,
42	4	*od dołu*	a^2	a_2
45	1	»	$a_{2,1}, a_{1,2} \ a_{2,1}$	$a_{2,1}, a_{2,2} \ a_{2,2}$
46	10	*od góry*	$a_{1,\alpha}, a_{1,\beta}$	$a_{2,\alpha}, a_{2,\beta}$
63	4	*od dołu*	wyraz	jeden tylko wyraz
130	8	»	iloczynowy	ilorazowy
219	2	»	$=$	$D=$
231	12	*od góry*	n-ego	m-ego
235	9	*od dołu*	$a_{i,k+1}$	$a_{j,k+1}$
235	5	»	$(-1)^{j+l}$	odpowiednim (§ 37)
246	4	»	Weyřauch	Weihrauch
248	10	»	x^3	x
261	2	»	Joahimsthal	Joachimsthal
266	11	»	D_m	P_m
271	8	*od góry*	$a_{\cdot,v}$	$a_{r_i,v}$
272	2	*od dołu*	Borhardt	Borchardt
284	9	*od góry*	równań	n równań
402	10	»	$\overset{2}{A}_{i,i}$	$A_{i,i}$
405	1	*od dołu*	ścisłym.	ścisłym (§ 43).
427	6	«	równych	równych potęg
467	7	*od góry*	Pfaffiana	Pfaffianu
470	11	»	Pfaffiana	Pfaffianu
480	13	«	niezależnemi	niezależny

(*) Z powodu prowadzenia korrekty z Warszawy (a częściowo z Druskiennik), złożone arkusze długo w Paryżu na odbijanie czekały; skutkiem tego wiele czcionek wypadło. Takie-tylko główniejsze sprostowania tu zrobione.

TEORYA

WYZNACZNIKÓW

ROZDZIAŁ PIERWSZY

OKREŚLENIE, ROZWINIĘCIE I ZNAKOWANIE WYZNACZNIKA

§ 1.

Zestawiając ze sobą w pewnym oznaczonym porządku jakiekolwiek ilości, które *elementami* nazywać będziemy, możemy uwydatnić owe właśnie następstwo elementów w ten sposób: wszystkie elementa oznaczamy jedną głoską z liczebnemi *wskaźnikami*; następstwo po sobie wskaźników cechować będzie porządek, w danym *układzie* (complexio, disposizione, arrangement) elementów zachowany. Przy pomocy takiego oznaczenia, możemy łatwo dwa układy tych samych elementów porównać ze sobą co do następstwa ich elementów.

Np., mamy dwa układy pięciu elementów

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,$$

mianowicie:

$$bcaed \quad \text{i} \quad adceb,$$

z których pierwszy przyjmijmy za zasadniczy; z nim chcemy porównać drugi z tych układów. Nazwawszy

$$b = a_1, \qquad c = a_2, \qquad a = a_3, \qquad e = a_4, \qquad d = a_5,$$

możemy te układy tak przedstawić:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \quad \text{i} \quad a_3 a_5 a_2 a_4 a_1.$$

Dla porównania następstwa po sobie elementów w takich dwu układach, umówmy się, aby, wogóle, z dwu elementów ten nazywać *wyższym* (höheres El.) (¹), którego wskaźnik jest większą liczbą. Wtedy w *układzie zasadniczym*

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

każdy z elementów nie ma przed sobą wyższego elementu. W układzie zaś

$$a_3 a_5 a_2 a_4 a_1$$

widoczne pod tym względem zmiany. Mianowicie: element a_3 jest wyższy niż następujące po nim elementy a_2 i a_1, element a_5 wyższy od elementów a_2, a_4 i a_1, element a_2 wyższy od elementu a_1 i nakoniec element a_4 wyższy jest od elementu a_1. Tak, że mamy w tym układzie względem układu zasadniczego następujące *zmiany* (dérangement (²), inversion, variation):

$$\begin{array}{lll} a_3a_2, & a_3a_1, & \\ a_5a_2, & a_5a_4, & a_5a_1, \\ a_2a_1, & & \\ a_4a_1, & & \end{array}$$

(¹) albo *dalszym*.

(²) Rozważanie tych zmian wprowadził Cramer w *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques.* Genewa, 1750 (str. 653 i następne), porównaj niżej § 17.

temu zatem układowi odpowiada 7 zmian. Jeśli zaś mamy np. układ

$$a_2a_3a_5a_1a_4,$$

to widzimy w nim względem układu zasadniczego zmian 4, to jest

$$a_2a_1,$$

$$a_3a_1,$$

$$a_5a_1, \quad a_5a_4.$$

Liczba więc zmian, odpowiadających pewnemu układowi, jest albo parzystą, albo nieparzystą.

§ 2.

Gdy, wogóle, mamy n elementów, które tworzą układ zasadniczy

$$a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n,$$

to utworzymy wszystkie możliwe układy tych n elementów przez przestawienie wskaźników w wypisanym układzie we wszelki możliwy sposób. Różnych więc między sobą układów n elementów będzie tyle, ile jest przemian n ilości

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad . \; . \; . \; , \quad n-1, \quad n.$$

Liczba tych przemian wyraża się, jak wiadomo, przez fakultet

$$1.2.3 \ldots n;$$

tyleż więc będzie różnych układów danych n elementów.

Porównywając każdy z tych

$$1.2.3 \ldots n = \mathrm{N}$$

układów z układem zasadniczym, spostrzeżemy, że każdemu odpowiada albo parzysta albo też nieparzysta liczba zmian. Stosownie do tego, idąc za Cramer'em [1], możemy podzielić nasze układy na dwie klassy : do jednej zaliczymy układy o parzystej liczbie zmian, do drugiej zaś układy o liczbie zmian nieparzystej. Przytem, układ zasadniczy, któremu odpowiadająca liczba zmian jest zero, zaliczamy do klassy o parzystej liczbie zmian.

§ 3.

Liczba układów jednej klassy jest taż sama, co liczba układów drugiej. Dowiedziemy, że : jeżeli to ma miejsce dla układów n elementów, to ma również miejsce dla układów $n+1$ elementów.

Jeślibyśmy wypisali wszystkie

$$1.2\ldots n = \mathrm{N}$$

układów n elementów

$$a_1,\quad a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

z których $\frac{\mathrm{N}}{2}$, według przypuszczenia, odpowiada parzystej, zaś $\frac{\mathrm{N}}{2}$ układów odpowiada nieparzystej liczbie zmian, to, aby otrzymać wszystkie (§ 2)

$$1.2\ldots n(n+1)$$

układów $n+1$ elementów

$$a_1,\quad a_2,\ \ldots,\ a_n,\quad a_{n+1},$$

---

[1] l. c.

naprzód do wszystkich wypisanych N układów n elementów po ostatnim elemencie przystawimy element a_{n+1}; dalej we wszystkich tychże N układach n elementów wstawimy element a_{n+1} między ostatnie i przedostatnie, potem między drugie i trzecie od końca, ..., następnie między pierwsze i drugie (z początku) elementy, nakoniec przystawimy go w każdym układzie przed pierwszym elementem. W ten sposób, z każdego z

$$1.2...n$$

układów n elementów otrzymamy $n+1$ układów $n+1$ elementów; razem więc

$$1.2...n(n+1)$$

układów, t. j. wszystkie możliwe. — Gdyśmy element a_{n+1} przystawili na końcu wszystkich N układów, to w żadnym nie przybyło zmiany: $\frac{N}{2}$ więc z nich pozostało jednej i $\frac{N}{2}$ drugiej klassy. Przez wstawienie elementu a_{n+1} między ostatniemi i przedostatniemi elementami wszystkich N układów, w każdym układzie przybyła jedna zmiana, a tem samem $\frac{N}{2}$ układów, poprzednio o parzystej liczbie zmian, stało się teraz $\frac{N}{2}$ układami o nieparzystej ich liczbie, i odwrotnie, tak, że również z tych N układów $n+1$ elementów jest $\frac{N}{2}$ jednej i $\frac{N}{2}$ drugiej klassy. Wstawieniem elementu a_{n+1} we wszystkich N układach n elementów między drugiemi i trzeciemi od końca elementami powiększamy w każdym układzie liczbę zmian o dwie, tak, że znowu z tych N układów $n+1$ elementów jest $\frac{N}{2}$ układów jednej i $\frac{N}{2}$ układów drugiej klassy, i t. d. Wogóle za każdem wstawieniem elementu a_{n+1} w jakiekolwiek miejsce N układów n elementów (byle to samo we wszystkich układach), otrzymujemy $\frac{N}{2}$ układów $n+1$ elementów jednej i $\frac{N}{2}$ drugiej klassy. A że wstawiamy element a_{n+1} we wszystkie N układów n elementów $n+1$ razy, więc układów $n+1$ elementów jest $(n+1)\frac{N}{2}$ jednej klassy i tyleż drugiej. — Widzimy więc, że: jeżeli liczba układów n elementów jednej klassy jest taż sama, co liczba układów drugiej klassy, to i układy $n+1$ elementów rozdzielają się na dwie klassy o jednakowej liczbie układów.

Z dwu zaś elementów mamy $1.2=2$ układy

$$a_1a_2, \qquad a_2a_1;$$

pierwszemu odpowiada zero (liczba parzysta) zmian, drugiemu zaś jedna (liczba nieparzysta). Układy więc dwu elementów rozdzielają się na dwie klassy o jednakowej liczbie układów (w każdej po jednym). Na mocy więc wyżej dowiedzionego, układy trzech elementów tęż samą własność posiadać będą, równie jak układy czterech, pięciu, . . . , wogóle ilukolwiek elementów.

Możemy więc powiedzieć:

Pośród

$$1.2,3\ldots n=N$$

układów n *elementów jest* $\frac{N}{2}$ *układów, którym odpowiada parzysta liczba zmian, i tyleż układów, którym odpowiada nieparzysta liczba zmian* (¹).

(¹) Jednakowa liczba układów w obu klassach Cramer'a długo była przyjmowaną, jako rzecz oczywista. Pewne dowodzenie tej własności

§ 4.

«Tak w algebrze, jak i w analizie, nie jest bynajmniej rze- »czą obojętną, jakie przyjmiemy znakowanie dla ilości, z któ- »remi mamy mieć do czynienia. Ono powinno w pewien sposób »charakteryzować te ilości.» «Na pewno można bez przesady »utrzymywać, że rozwiązanie wielkiej liczby zadań zależy jedy- »nie i wyłącznie od trafnego wyboru znakowania.» ([1])

Jeśli mamy mn elementów, to możemy się umówić, aby je oznaczać jedną głoską z dwoma wskaźnikami (przekonamy się niedługo, że taki sposób znakowania będzie nader dla naszych badań dogodnym). Jeden ze wskaźników niech zmienia się od 1 do m, drugi zaś od 1 do n. Z połączeń tych wskaźników, otrzymamy mn różnych oznaczeń naszych elementów ([2]), które więc będziemy mogli tak przedstawić:

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{1,3}, \; \ldots, \; a_{1,k}, \; \ldots, \; a_{1,n}, \\
a_{2,1}, \quad a_{2,2}, \quad a_{2,3}, \; \ldots, \; a_{2,k}, \; \ldots, \; a_{2,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i,1}, \quad a_{i,2}, \quad a_{i,3}, \; \ldots, \; a_{i,k}, \; \ldots, \; a_{i,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m,1}, \quad a_{m,2}, \quad a_{m,3}, \; \ldots, \; a_{m,k}, \; \ldots, \; a_{m,n}.
\end{array}
$$

Ta tablica (matrix) przedstawia wszystkie mn elementów,

---

wskazał Baltzer w *Theorie und Anwendung der Determinanten.* Lipsk (czwarte wydanie 1875 r., str. 2). Zasadę zaś przywiedzionego tu dowodu podał Guenther w *Lehrbuch der Determinanten-Theorie.* Erlangen (drugie wydanie 1877 r., str., 35).

([1]) Hesse. *Die Determinanten, elementar behandelt.* Lipsk, 1871 (str., 21).

([2]) Pomysł tego «topograficznego» sposobu oznaczania elementów należy do Leibnitz'a (porównaj § 17).

które tworzą w niej *rzędy* pionowe i poziome; rzędy pionowe nazywać będziemy *kolumnami*, rzędy zaś poziome *wierszami*.

Element, pomieszczony w i-ym wierszu a k-ej kolumnie, jest $a_{i,k}$. Każdy element jest oznaczony głoską łącznie z dwoma wskaźnikami, postawionemi w oznaczonym porządku, tak, że np. elementy $a_{1,2}$ i $a_{2,1}$ są odrębnemi ilościami, są wogóle całkiem od siebie niezależne ([1]), choć mają wskaźniki podobne. Również to, że np. elementy $a_{2,3}$ i $a_{2,7}$ mają pierwsze wskaźniki jednakowe, nie przesądza bynajmniej o ich wzajemnej zależności: wskazuje to bowiem tylko na to, że oba elementy są postawione w tym samym wierszu naszej tablicy.

§ 5.

Szczególnie ważnym jest przypadek, kiedy $m = n$. Wtedy nasze n^2 elementów możemy przedstawić za pomocą tablicy

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \ldots, a_{1,k}, \ldots, a_{1,n}, \\
a_{2,1}, \quad a_{2,2}, \ldots, a_{2,k}, \ldots, a_{2,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{i,1}, \quad a_{i,2}, \ldots, a_{i,k}, \ldots, a_{i,n}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{n,1}, \quad a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots, a_{n,n},
\end{array}$$

posiadającej n wierszy i n kolumn i mającej postać kwadratu. W tym *kwadracie systematu elementów* przekątną od $a_{1,1}$, do $a_{n,n}$ nazywamy *główną przekątną* kwadratu elementów; elementy

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \quad a_{3,3}, \ldots, a_{i,i}, \ldots, a_{n-1,n-1}, \quad a_{n,n}$$

([1]) Dopóki innego założenia wyraźnie nie postawimy.

nazywamy *elementami głównej przekątnej*, albo *elementami głównemi*. Dwa elementy takie, jak $a_{1,2}$ i $a_{2,1}$, jak $a_{2,3}$ i $a_{3,2}$, czyli, wogóle, dwa elementy $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$ nazywać będziemy *elementami sprzężonemi*.

§ 6.

Z elementów poprzedzającego § twórzmy iloczyny po n czynników tak, aby w każdym iloczynie znalazł się jeden tylko element każdego wiersza i jeden tylko element każdej kolumny.

Wtedy, jeśli w jednym takim iloczynie z elementów pierwszego wiersza znajduje się element p-ej kolumny, t. j. $a_{1,p}$, z elementów drugiego wiersza element $a_{2,q}$, i t. d., nakoniec z elementów n-ego wiersza element $a_{n,s}$, w takim iloczynie

$$a_{1,p}a_{2,q} \; . \; . \; . \; , \; a_{n,s}$$

drugie wskaźniki

$$p, \quad q, \; . \; . \; . \; , \; s$$

przedstawiają pewien układ n liczb

$$1, \quad 2, \; . \; . \; . \; , \; n.$$

Gdy utworzymy inny iloczyn, w który wejdzie z pierwszego wiersza element $a_{1,g}$, a z drugiego $a_{2,h}$, . . . , z n-go $a_{n,l}$, to w tym iloczynie

$$a_{1,g}a_{2,h} \; . \; . \; . \; a_{n,l}$$

wskaźniki drugie

$$g, \quad h. \; . \; . \; . \; , \; l$$

przedstawiają odmienny od poprzedniego układ tychże liczb

$$1, \quad 2, \; . \; . \; . \; , \; n.$$

Podobnych iloczynów możemy utworzyć tyle, ile jest (§ 2) przemian z n ilości, t. j.

$$1.2\ldots n.$$

Pośród tych iloczynów znajdzie się, oczywiście, utworzony przez pierwszego wiersza pierwszy element, drugiego wiersza drugi, . . . , n-ego wiersza n-y, t. j. iloczyn

$$a_{1,1}a_{2,2}\,.\,.\,.\,a_{i,i}\,.\,.\,.\,a_{n,n},$$

złożony z elementów głównej przekątnej; ten iloczyn nazwiemy *iloczynem głównym* (terme principal, terme-type).

Umówmy się nadto, aby przed każdym iloczynem, w którym układowi drugich wskaźników jego elementów odpowiada parzysta liczba zmian, postawić znak $+$, przed każdym zaś iloczynem, w którym układowi drugich wskaźników odpowiada nieparzysta liczba zmian, postawić znak $-$. Możemy to inaczej tak wypowiedzieć. Stawiamy znak $+$ przed iloczynem głównym, oraz przed wszystkiemi iloczynami, w których układ drugich wskaźników elementów, te iloczyny tworzących, do tej samej klassy Cramer'a należy, co ich układ w iloczynie głównym; przed pozostałemi zaś iloczynami, w których układ drugich wskaźników należy do klassy innej, niż ich układ w wyrazie głównym, stawiamy znak $-$ ([1]).

([1]) Jeśli liczbę zmian, odpowiadających układowi

$$p,\ q,\ldots,s,$$

nazwiemy ε, to iloczyn $a_{1,p}a_{2,q}\ldots a_{n,s}$ będzie miał znak $+$ lub znak $-$, według tego, czy ε jest liczbą parzystą, czy nieparzystą, czyli, czy

$$(-1)^{\varepsilon}$$

przedstawia $+1$, czy -1. Skutkiem tego wyraz ten, wraz z jego znakiem, możemy tak przedstawić

$$(-1)^{\varepsilon}a_{1,p}a_{2,q}\ldots a_{n,s}.$$

W ten sposób połowa liczby wszystkich iloczynów będzie mieć znak $+$, druga zaś połowa znak $-$ (§ 3).

§ 7.

Wszystkie te

$$1.2...n$$

iloczynów możemy uważać, jako utworzone z iloczynu głównego w skutek zastąpienia układu drugich wskaźników przez wszystkie tych n wskaźników przemiany.

Lecz w każdym takim iloczynie możemy zmienić porządek następstwa po sobie elementów (czynników). Możemy mianowicie we wszystkich iloczynach tak przestawiać elementy, aby w każdym iloczynie drugie wskaźniki następowały po sobie w porządku

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Po takiem przestawieniu, zobaczymy, że pierwsze wskaźniki utworzą wszystkie możliwe układy tych n liczb, tak, że iloczyny nasze możemy sobie wystawić, jako utworzone z iloczynu głównego, przez zastąpienie układu pierwszych wskaźników przez wszystkie tych n wskaźników przemiany. Tak np. jeśli mamy iloczyn

$$a_{1,p}a_{2,q}\ \ldots\ a_{n,s},$$

to, odpowiednio przestawiając wzajemnie po dwa elementy, możemy dojść do tego, że drugie wskaźniki, zamiast układu

$$p,\ q,\ \ldots,\ s,$$

przedstawią układ

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Wtedy pierwsze wskaźniki utworzą pewien nowy układ ([1]). Idzie o to tylko, czy ten nowy układ pierwszych wskaźników, który nazwijmy np.

$$\alpha, \ \beta, \ . \ . \ . \ , \nu,$$

należy do tej samej klassy, co układ

$$p, \ q, \ . \ . \ . \ , s,$$

czy też do innej, a tem samem, czy, zależnie od tego, iloczynom

$$a_{1,p}a_{2,q}\ldots a_{n,s}$$

$$a_{\alpha,1}a_{\beta,2}\ldots a_{\nu,n}$$

([1]) Np. $a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4}$. Chcąc otrzymać, jako drugie wskaźniki, układ 1, 2, 3, 4. 5, przestawiajmy z sąsiednim, z lewej strony, każdy element, zaczynając od elementu z najmniejszym drugim wskaźnikiem, dopóki on się nie znajdzie na miejscu, przez ten drugi wskaźnik oznaczonem. Tak więc

w układzie	$a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4}$	przestawmy	$a_{3,1}$	i	$a_{2,5}$,
»	$a_{1,3}a_{3,1}a_{2,5}a_{4,2}a_{5,4}$	»	$a_{3,1}$	i	$a_{1,3}$,
»	$a_{3,1}a_{1,3}a_{2,5}a_{4,2}a_{5,4}$	»	$a_{4,2}$	i	$a_{2,5}$,
»	$a_{3,1}a_{1,3}a_{4,2}a_{2,5}a_{5,4}$	»	$a_{4,2}$	i	$a_{1,3}$,
»	$a_{3,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{2,5}a_{5,4}$	»	$a_{5,4}$	i	$a_{2,5}$,
	$a_{3,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{5,4}a_{2,5}$.				

Otrzymaliśmy w ten sposób postać nową naszego iloczynu, w której drugie wskaźniki nie tworzą układu 3, 5, 1, 2, 4, lecz układ 1, 2, 3, 4, 5.

Pierwsze zaś wskaźniki tworzą nowy układ 3, 4, 1, 5, 2.

wypada jednakowe dać znaki, jak to rzeczywiście być powinno (1), czy też znaki różne?

Z pierwszego z tych iloczynów przechodzimy do drugiego przez uskutecznienie pewnej liczby wzajemnych przestawień dwu elementów. Jeśli, dla otrzymania drugiego iloczynu, będziemy w pierwszym iloczynie każdy element, zaczynając od elementu z najmniejszym drugim wskaźnikiem, wciąż o jedno miejsce przesuwać w lewo, dopóki on nie zajmie miejsca oznaczonego przez ten drugi wskaźnik, to wtedy będziemy zawsze w tym przypadku, że przestawiamy dwa sąsiednie elementa. przy $b < d$, zaś $\pi < \sigma$,

$$a_{b,\pi} a_{d,\sigma},$$

$a_{b,6}\ a_{d,\pi}$

które mają tylko zmianę w drugich wskaźnikach; po przestawieniu,

$$a_{d,\pi} a_{b,\sigma},$$

one mają zmianę w pierwszych wskaźnikach (2). Że zaś to ma miejsce dla każdego takiego przestawienia wzajemnego dwu elementów, oraz, że za pomocą takich przestawień z pierwszego iloczynu otrzymujemy drugi, więc układy

$$p, \quad q, \; \ldots, \; s,$$

$$\alpha, \quad \beta, \; \ldots, \; \nu$$

należą do tej samej klassy, t. j. iloczynom samym wypadnie dać jednakowe znaki, jeśli przy dawaniu znaku kierować się

(1) Gdyż zmieniliśmy tylko porządek następstwa czynników.

(2) Np. w układzie

$$a_{1,2} a_{2,5} a_{3,1} a_{4,4},\ a_{5,3}$$

zamiast $a_{2,5} a_{3,1}$ stawiamy $a_{3,1} a_{2,5}$.

mamy parzystością lub nieparzystością liczby zmian, każdemu z tych układów odpowiadającą ([1]).

Możemy więc powiedzieć, że czy my tworzymy nasze

$$1.2, \ldots n$$

iloczynów z iloczynu głównego, przez kolejne zastępowanie układu drugich jego wskaźników przez wszystkie ich przemiany, czyteż przez podobne zastępowanie układu pierwszych wskaźników, to iloczyny te będą też same i z takiemiż samemi znakami.

§ 8.

Summa algebraiczna tych wszystkich iloczynów nazywa się *wyznacznikiem.*

Zbierając razem to wszystko, cośmy wyżej o tych iloczynach mówili, możemy postawić takie określenie wyznacznika.

Wyznacznik systematu n^2 *elementów, w pewien oznaczony sposób ustawionych w* n *wierszach, w każdym po* n *elementów, jest to summa algebraiczna wszystkich możebnych różnych między sobą iloczynów* n *elementów, tak wziętych, że w każdy iloczyn wchodzi jeden element każdego wiersza i jeden element każdej kolumny* ([2]);

([1]) Sądzę, że podany tu dowód jest ściślejszy tak od dowodu Becker'a, *Ueber einen Fundamentalsatz der Determinantentheorie* (Schloemilch, *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, rocznik XVI, str. 530), jak i dowodu Baltzer'a (l. c., str. 6).

([2]) Uzmysłowić to możemy w ten sposób. Wystawmy sobie szachownicę mającą n^2 pól; każde pole odpowiada jednemu elementowi. Wtedy tworzenie tych iloczynów odpowiada takiemu zadaniu: we wszelki możliwy sposób tak na tej szachownicy ustawić n wież, aby żadna nie była przez inną wieżę szachowana.

pierwszy iloczyn, zwany głównym, jest iloczynem elementów głównej przekątnej i jest poprzedzony znakiem +; wszystkie iloczyny można utworzyć z iloczynu głównego, zastępując kolejno przez różne przemiany, albo tylko układ pierwszych jego wskaźników, albo tylko układ drugich jego wskaźników; każdy z tych iloczynów należy wziąć ze znakiem + lub ze znakiem —, zależnie od tego, czy przestawione wskaźniki tworzą układ, należący do tej samej klassy, co układ odpowiednich wskaźników w iloczynie głównym, czyteż do innej klassy.

Ponieważ w każdy iloczyn wyznacznika systematu n^2 elementów wchodzi n elementów (jako czynniki) w stopniu pierwszym, to każdy iloczyn, a tem samem i ich summa, t. j. wyznacznik, jest funkcyą *n-ego stopnia* względem elementów.

Tych iloczynów, t. j. *wyrazów* wyznacznika, jest (§§ 6, 7)

$$1.2.3\ldots n,$$

z których połowa jest poprzedzona znakiem +, połowa zaś znakiem — (§§ 3,6).

Każdy wyraz wyznacznika zawiera z każdego pionowego i każdego poziomego rzędu jeden tylko element. Możemy więc powiedzieć, że : *wyznacznik jest funkcyą jednorodną i linijową elementów jakiegokolwiek wiersza lub kolumny.*

Wyraz «wyznacznik» (¹) jest zręcznem tłomaczeniem w innych językach powszechnie przyjętej nazwy : «determinant». Użył jej po raz pierwszy Gauss w *Disquisitiones arithmeticæ* (²)

(¹) Ze spolszczoną nazwą : «wyznacznik» spotykamy się po raz pierwszy w kursie litografowanym : *Algebra Wyższa podług wykładu professora* Babczyńskiego *w Szkole Głównej Warszawskiej* za rok 1864-65, (str. 299). To jednak spolszczenie jest zasługą Frączkiewicza.

(²) Pierwsze wydanie w r. 1801, Lipsk.

na oznaczenie pewnego szczególnego przypadku wyznacznika drugiego stopnia [1]. W tem zaś znaczeniu, w jakiem wyraz «determinant» dziś jest pojmowany, wprowadzony on został do nauki przez CAUCHY'ego [2].

§ 9.

Wyznacznik systematu $2^2 = 4$ elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \end{matrix}$$

składa się z $1.2 = 2$ wyrazów i jest drugiego stopnia. Główny jego wyraz $+a_{1,1}a_{2,2}$. Zastępując w nim układ drugich wskaźników 1, 2 przez układ 2, 1, otrzymamy zeń iloczyn $a_{1,2}a_{2,1}$; gdy zaś układowi 2, 1 odpowiada jedna zmiana, a tem samem układy 1, 2 i 2, 1 należą do odrębnych klass, to przed iloczynem $a_{1,2}a_{2,1}$ wypadnie postawić znak — i wyznacznik tego systematu czterech elementów jest wyrażeniem

$$+a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

---

(1) «Numerum $bb - ac$, a cuius indole proprietates formæ $axx +$ «$2bxy + cyy$ imprimis pendere in sequentibus docebimus, *determinantem* «huius formæ vocabimus». Tom I dzieł GAUSS'a (str. 122). Göttingen, 1863.

To wyrażenie $b^2 - ac$ jest wyznacznikiem systematu elementów

$$\begin{matrix} b, & a, \\ c, & b; \end{matrix}$$

jest ono właściwie discriminantem formy $ax^2 + 2bxy + cy^2$, według dziś przyjętej terminologii. Porównaj § 81.

(2) *Mémoire Sur les Fonctions, qui ne peuvent obtenir que deux valeurs*.. Rozprawa ta przedstawiona Akademii w 1812 r. ogłoszona w XVII cahier *Journal de l'École Polytechnique* (1815). Wprowadzając tę nazwę (str. 51), CAUCHY dodaje: «les deux expressions suivantes, « déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes» Zob. § 78.

Gdybyśmy w głównym wyrazie $+a_{1,1}a_{2,2}$ układ pierwszych wskaźników 1, 2 zastąpili przez układ 2, 1, to wyznacznik nasz przedstawiłby się w postaci

$$+a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}.$$

Tak np. jeśli mamy cztery ilości

$$5,\ 7,\ -6,\ a^2,$$

a ustawimy je w sposób np. taki :

$$\begin{array}{ll} 5, & -6 \\ 7, & a^2, \end{array}$$

to wyznacznik tego systematu jest

$$5.a^2-7.(-6)=5a^2+42;$$

jeśli zaś ustawimy je np. tak :

$$\begin{array}{ll} 5, & a^2, \\ 7, & -6, \end{array}$$

to wyznacznik tego systematu jest

$$5.(-6)-7.a^2=-30-7a^2$$

Podobnież, wyznacznik systematu tak ustawionych czterech ilości :

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha, & \sin\beta, \\ \cos\alpha, & \cos\beta, \end{array}$$

jest

$$+\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta).$$

Wyznacznik trzeciego stopnia, t. j. wyznacznik systematu $3^2 = 9$ ilości

$$\begin{array}{lll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, \end{array}$$

posiada $1.2.3 = 6$ wyrazów. Wyraz główny jest

$$+ a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}.$$

Zastępując w nim układ drugich wskaźników przez wszystkie ich przemiany, a mianowicie

1, 2, 3; (zmian 0)
1, 3, 2; (zmiana 1)
2, 3, 1; (zmian 2)
2, 1, 3; (zmiana 1)
3, 1, 2; (zmian 2)
3, 2, 1; (zmian 3),

otrzymujemy wyznacznik

$$+ a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$$
$$- a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

Gdybyśmy tworzyli przemiany w pierwszych wskaźnikach, to otrzymalibyśmy ten sam wyznacznik w takiej postaci

$$+ a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$$
$$- a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Np. gdy dane są 9 ilości

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

ustawione w ten sposób :

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 5, \\ 3, & 4, & 7, \\ 6, & 8, & 9, \end{matrix}$$

to wyznacznik tego systematu jest

$$+1.4.9 - 1.7.8 + 2.7.6 - 2.3.9 + 5.3.8 - 5.4.6 = 10;$$

jeśliby zaś też same ilości tworzyły systemat

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \\ 4, & 5, & 6, \\ 7, & 8, & 9, \end{matrix}$$

to jego wyznacznik

$$+1.5.9 - 1.6.8 + 2.6.7 - 2.4.9 + 3.4.8 - 3.5.7 = 0.$$

Zadania. Rozwinąć i obliczyć wyznaczniki następujących systematów elementów :

(1°)

$$\begin{matrix} 20, & 4, \\ -5, & 1. \end{matrix}$$

(2°)

$$\begin{matrix} 4, & -1, \\ -7, & -2. \end{matrix}$$

(3°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, \\ x, & y. \end{matrix}$$

(4°)

$$\begin{matrix} \sin\alpha, & \cos\alpha, \\ -\cos\alpha, & \sin\alpha. \end{matrix}$$

(5°)

$$\begin{matrix} x+y\sqrt{-1}, & -a+b\sqrt{-1}, \\ a+b\sqrt{-1}, & x-y\sqrt{-1}. \end{matrix}$$

(6°)

$$\begin{matrix} 17, & 15, & 11, \\ 13, & 13, & 12, \\ 9, & 9, & 9. \end{matrix}$$

(7°)

$$\begin{matrix} 2, & -1, & -1, \\ -3, & -2, & 2, \\ 2, & 0, & 1. \end{matrix}$$

(8°)

$$\begin{matrix} 0, & a, & b, \\ -a, & 0, & c, \\ -b, & -c, & 0. \end{matrix}$$

(9°)

$$\begin{matrix} 0, & a, & b, \\ a, & 0, & c, \\ b, & c, & 0. \end{matrix}$$

(10°)

$$\begin{matrix} 0, & -a, & b, \\ -a, & 0, & -c, \\ b, & -c & 0. \end{matrix}$$

(11°)

$$\begin{matrix} (a+b)^2, & c^2, & c^2, \\ a^2, & (b+c)^2 & a^2, \\ b^2, & b^2, & (c+a)^2. \end{matrix}$$

(12°)

$$\begin{matrix} -x, & x, & x, \\ x, & -x, & x, \\ x, & x, & -x. \end{matrix}$$

(13°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, \\ a, & a, & b+c, \\ b, & c+a, & b. \end{matrix}$$

(14°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, \\ x_1+x_2, & y_1+y_2, & z_1+z_2, \\ x_1x_2, & y_1y_2, & z_1z_2. \end{matrix}$$

(15°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1+a_2, & 1, \\ 1, & 1, & 1+a_3. \end{matrix}$$

(16°)

$$\begin{matrix} 1+a_1, & 1, & 1, \\ 1, & 1+a_2, & 1, \\ 1, & 1, & 1+a_3. \end{matrix}$$

(17°)

$$\begin{matrix} 0, & -a, & -b, \\ a, & 1, & \cos\gamma, \\ b, & \cos\gamma, & 1. \end{matrix}$$

(18°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, \\ \sin\alpha, & \sin\beta, & \sin\gamma, \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma. \end{matrix}$$

(19°)

$$\begin{matrix} 1, & x, & x^2, \\ x, & x^2, & x^3, \\ x^2, & x^3, & x^4. \end{matrix}$$

(20°)

$$\begin{matrix} 1, & x_1, & y_1, \\ 1, & x_2, & y_2, \\ 1, & x_3, & y_3. \end{matrix}$$

Odpowiedzi:

(1°) 40. (2°) -15. (3°) $y-x$. (4°) 1.

(5°) $x^2+y^2+a^2+b^2$. (6°) 18. (7°) -15.

(8°) 0. (9°) $2abc$. (10°) $2abc$.

(11°) $2abc(a+b+c)^3$. (12°) $4x^3$.

(13°) $(a-b+c)(a-b-c)$.

(14°) $(x_1-y_2)(y_1-z_2)(z_1-x_2)+(x_2-y_1)(y_2-z_1)(z_2-x_1)$ [1].

(15°) a_2a_3. (16°) $a_1a_2a_3(1+a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1})$.

---

[1] Jeśli $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ są odległości sześciu punktów prostej od pewnego punktu tejże prostej, to, jeśli wyrażenie (14°) równa się zeru, te sześć punktów są w inwolucyi.

(17°) $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ [1].

(18°) $4\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. (19°) 0.

(20°) $(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - y_3x_1)$ [2].

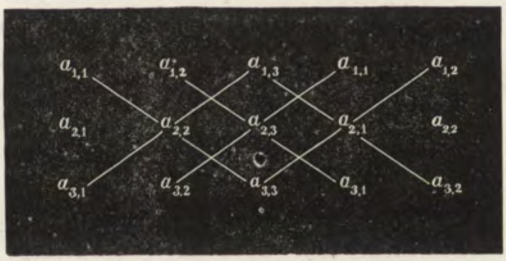
§ 10.

Dla rozwinięcia wyznacznika trzeciego stopnia istnieje nader praktyczny sposób, który podał Sarrus [3].

Gdy dany jest systemat elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, \end{matrix}$$

to przystawmy po trzeciej kolumnie pierwszą, a następnie drugą, oraz poprowadźmy od elementów pierwszego wiersza linije proste (przekątne), łączące trzy elementy :



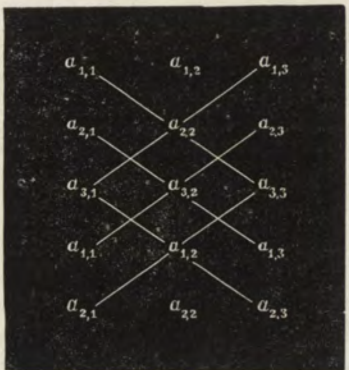
---

(1) Jeśli a i b są długości dwu boków trójkąta, nachylonych względem siebie pod kątem γ, to wyrażenie (17°) przedstawia kwadrat długości trzeciego boku tego trójkąta.

(2) Jestto wyrażenie podwójnego pola trójkąta, którego wierzchołki w Cartesius'a prostokątnym układzie współrzędnych są : x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3.

(3) Fink. *Eléments d'Algèbre*. 1846 (2gie wydanie, str. 95). Porównaj : Dostor'a *Éléments de la Théorie des Déterminants*........ Paryż, 1877 (str. 33).

(można także pod trzecim wierszem danego systematu podpisać jeszcze raz pierwszy, a następnie drugi :



i podobnież poprowadzić przekątne łączące trzy elementy). Utwórzmy następnie iloczyny elementów znajdujących się na przekątnych i postawmy znak $+$ przed iloczynami, odpowiadającemi przekątnym, idącym w kierunku od lewej ku prawej (od góry zaczynając), znak zaś — napiszmy przed iloczynami, odpowiadającemi przekątnym, idącym (od góry wciąż uważając) w kierunku od prawej ku lewej. Będzie więc wyznacznik

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$

$$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}.$$

§ 11.

Jak wypisać metodycznie wszystkie wyrazy wyznacznika n-ego stopnia?

Wyrazy wyznacznika tworzą się z głównego przez tworzenie różnych przemian albo w układzie tylko pierwszych jego wskaźników, albo też tylko w układzie drugich jego wskaźników (§ 8). Rzecz się więc sprowadza do metodycznego utworzenia z n ilości

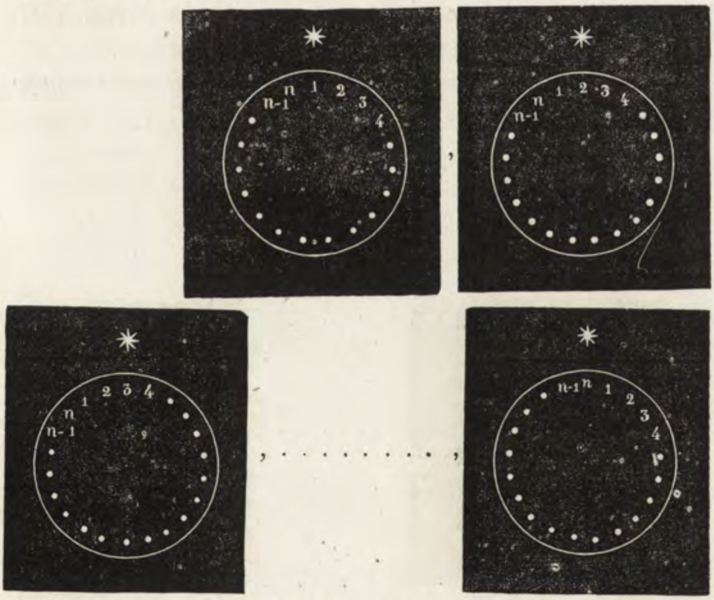
$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

wszystkich

$$1.2.3\ldots n$$

ich przemian, które to przemiany mają być utworzone czy to przez pierwsze, czy też przez drugie wskaźniki elementów wyrazów wyznacznika.

Jeśli wystawimy sobie te n ilości jednostajnie rozmieszczonemi na okręgu koła, które następnie około jego środka będziemy obracać ciągle w jedną stronę, coraz o $\frac{360°}{n}$, to naprzeciwko pewnego punktu, będącego zewnątrz koła, coraz inna ilość się znajdzie :



Gdy następnie zaczniemy wypisywać po sobie ilości, zaczynając od ilości, będącej naprzeciwko punktu * (przy czem zawsze w tym samym kierunku postępować będziemy), to otrzymamy w ten sposób n następujących przemian

$$
\begin{array}{ll}
1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n; & \\
2, 3, 4, \ldots, n-1, n, 1; & \\
3, 4, \ldots, n-1, n, 1, 2; & \qquad (1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; & \\
n, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1. &
\end{array}
$$

W każdéj z tych przemian zostawmy jedną, odpowiednio tę samą, ilość nieporuszoną, np., w każdej przemianie nieporuszoną niech będzie ilość pierwsza. Rozmieszczając pozostałe $n-1$ ilości w podobny powyższemu sposób na okręgu koła, otrzymamy, podobnie jak poprzednio, $n-1$ przemian $n-1$ ilości, które to przemiany dopisując do owego nieporuszonego elementu, utworzymy z każdej z powyżej wypisanych n przemian (1) nowych przemian $n-1$. Np. z drugiej z przemian (1), po pozostawieniu nieporuszonej pierwszej ilości, a przestawieniu pozostałych według powyższego sposobu, otrzymamy $n-1$ przemian:

$$
\begin{array}{l}
2, 3, 4, \ldots, n-1, n, 1; \\
2, 4, \ldots, n-1, n, 1, 3; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
2, n, 1, 3, 4, \ldots, n-1; \\
2, 1, 3, 4, \ldots, n-1, n.
\end{array}
$$

Ponieważ z każdej z n przemian (1) otrzymamy w ten sposób przemian $n-1$, to ze wszystkich przemian (1) otrzymamy przemian

$$n(n-1).$$

W każdej znowu z tych przemian, oprócz ilości, poprzednio ze swego miejsca nieporuszonej, zostawmy w spokoju jedną jeszcze ilość, np. drugą (we wszystkich przemianach). Rozmieszczając pozostałe $n-2$ ilości na okręgu koła, a przestawione dopisując obok nieporuszonych dwóch ilości, tym sposobem z każdej z $n(n-1)$ przemian utworzymy przemian $n-2$; ze wszystkich więc $n(n-1)$ przemian otrzymamy przemian

$$n(n-1)(n-2).$$

Postępując w tenże sam sposób dalej, utworzymy metodycznie wszystkie

$$n(n-1)(n-2)\ldots 4\ 3\ 2$$

przemian naszych n ilości [1].

Naprzykład, z 4 ilości

$$1, 2. 3, 4$$

wszystkie $1.2.3.4=24$ przemian możemy według tej metody tak utworzyć:

---

[1] Zasadę tego zręcznego sposobu tworzenia wszystkich przemian ilukolwiek ilości, przy pomocy kołowych przestawień, podał pierwszy (Meier) Hirsch w *Aufgaben z. d. algebr. Gleichungen.* 1809. (I, str. 326). Porównaj w *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik* Ohrtmann'a, artykuł Stolz'a p. t. *Babczyński. Ueber die Multiplication der symmetrischen.... Functionen.* Tom. IV, za 1872 r. (str. 209).

Na okręgu koła 4 ilości.	Na okręgach kół po 3 ilości.	Na okręgach kół po 2 ilości.	Liczba zmian.
1, 2, 3, 4;	1, 2, 3, 4;	1, 2, 3, 4;	0.
		1, 2, 4, 3;	1.
	1, 3, 4, 2;	1, 3, 4, 2;	2.
		1, 3, 2, 4;	1.
	1, 4, 2, 3;	1, 4, 2, 3;	2.
		1, 4, 3, 2;	3.
2, 3, 4, 1;	2, 3, 4, 1;	2, 3, 4, 1;	3.
		2, 3, 1, 4;	2.
	2, 4, 1, 3;	2, 4, 1, 3;	3.
		2, 4, 3, 1;	4.
	2, 1, 3, 4	2, 1, 3, 4;	1.
		2, 1, 4, 3;	2.
3, 4, 1, 2;	3, 4, 1, 2;	3, 4, 1, 2;	4.
		3, 4, 2, 1;	5.
	3, 1, 2, 4;	3, 1, 2, 4;	2.
		3, 1, 4, 2;	3.
	3, 2, 4, 1;	3, 2, 4, 1;	4.
		3, 2, 1, 4;	3.
4, 1, 2, 3;	4, 1, 2, 3;	4, 1, 2, 3;	3.
		4, 1, 3, 2;	4.
	4, 2, 3, 1;	4, 2, 3, 1;	5.
		4, 2, 1, 3;	4.
	, 3, 1, 2;	4, 3, 1, 2;	5.
		4, 3, 2, 1;	6.

§ 12.

Zastępując w wyrazie głównym czyto układ pierwszych jego wskaźników, czyteż układ drugich jego wskaźników, wszystkiemi przemianami tych wskaźników, które utworzyć możemy według sposobu, w poprzedzającym § wskazanego, a następnie poprzedzając iloczyny elementów znakiem $+$ lub znakiem $-$, stosownie do tego, czy układ przedstawionych wskaźników należy do tej samej klassy, co układ odpowiednich wskaźników w wyrazie głównym, czyteż do innej klassy, otrzymamy rozwinięcie wyznacznika jakiegokolwiek stopnia ([1]).

([1]) Bézout, w *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations* (*Histoire de l'Acad, Roy. des Sciences*, za rok 1764 str. 292), podaje sposób tworzenia wyrażeń, zwanych dziś wyznacznikami, w razie, gdy mamy już takie wyrażenie o jedność niższego stopnia. Sposób ten zaleca się praktycznością i prostotą. Objaśnimy go na przykładzie. Tak, jeśli mamy wyznacznik drugiego stopnia, utworzony przez przestawienie w wyrazie głównym pierwszych wskaźników:

$$+a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2},$$

to, odrzuciwszy drugie wskaźniki, mieć będziemy wyrażenie

$$+a_1a_2-a_2a_1.$$

Do każdego z tych dwu wyrazów dopiszemy ilość a_3, stawiając ją naprzód po ostatnim, później po przedostatnim i t. d. czynniku, nakoniec jeszcze przed pierwszym czynnikiem, przy czem, zachowując przy pierwszem przystawieniu ilości a_3 pierwotny znak wyrazu, dalej już będziemy znaki stawiać na przemian, za każdem nowem dopisaniem ilości a_3. Będzie więc

$$+a_1a_2a_3-a_1a_3a_2+a_3a_1a_2$$

$$-a_2a_1a_3+a_2a_3a_1-a_3a_2a_1.$$

Tak np. wyznacznik 4go stopnia systematu elementów

$$a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ a_{1,4},$$

$$a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ a_{2,4},$$

$$a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ a_{3,4},$$

$$a_{4,1},\ a_{4,2},\ a_{4,3},\ a_{4,4},$$

Dodając teraz, jako drugie wskaźniki, liczby 1, 2, 3, wciąż w tym samym porządku, otrzymamy wyznacznik

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$$

$$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$$

W podobny sposób, mając już wyznacznik trzeciego stopnia, moglibyśmy zeń utworzyć wyznacznik stopnia czwartego, i t. d.

Cauchy w *Mémoire sur les clefs algébriques* (*Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, tom IV. Paryż, 1847) wprowadza (str. 356) *klucze algebraiczne*, t. j. «zmienne które tylko przejściowo zjawiają się » w wyrażeniach, a których iloczyny mają być w tych wyrażeniach osta-» tecznie zastąpione przez dowolnie wybrane ilości». Te zaś klucze w ten sposób zastosowywa do rozwinięcia wyznacznika n-ego stopnia systematu elementów

$$a_{1,1},\ a_{1,2},\ldots,\ a_{1,n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{n,1},\ a_{n,2},\ldots,a_{n,n}.$$

Wprowadźmy n kluczów

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n$$

i poddajmy je następującym warunkom: 1° iloczyn dwu równych kluczów jest zerem (np. $\lambda_1\lambda_3\lambda_\alpha\lambda_\alpha\lambda_4=0$); 2° iloczyn wszystkich kluczów w porządku naturalnym $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n=+1$; 3° iloczyn wszystkich kluczów, wziętych w pewnym porządku $=+1$ lub $=-1$, stosownie do tego, czy liczba przestawień po dwa klucze, jaką w tym układzie kluczów trzeba wykonać, aby dojść do układu kluczów w porządku naturalnym, jest

jest

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}-a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}+a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}$$

$$+a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}-a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}-a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}$$

$$-a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}+a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}+a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}$$

$$+a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}-a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}-a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}$$

$$+a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}-a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}+a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}$$

$$-a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}+a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}-a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}+a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}.$$

---

parzysta lub nieparzysta. Mnożąc wtedy wszystkie elementy pierwszej (np.) kolumny przez λ_1, drugiej przez λ_2, i t. d., ostatniej przez λ_n, utworzymy iloczyn wierszy systematu tak pomnożonych elementów, t j,

$$(\lambda_1 a_{1,1}+\lambda_2 a_{1,2}+\ldots+\lambda_n a_{1,n})(\lambda_1 a_{2,1}+\lambda_2 a_{2,2}+\ldots+\lambda_n a_{2,n})\ldots(\lambda_1 a_{n,1}$$
$$+\lambda_2 a_{n,2}+\ldots+\lambda_n a_{n,n}),$$

a rozwijając ten iloczyn, będziemy czynniki oddzielnych wyrazów wypisywać w takim porządku, w jakim one w tem wyrażeniu iloczynu się znajdują, uważając od lewej ku prawej. Zastępując nakoniec iloczyny kluczów ilościami 0, $+1$, lub -1, stosownie do postawionych wyżej dla nich warunków, otrzymamy żądane rozwinięcie wyznacznika (str. 374 i nast.). — Naprzykład, gdy $n=3$, to ten iloczyn jest :

$$(\lambda_1 a_{1,1}+\lambda_2 a_{1,2}+\lambda_3 a_{1,3})(\lambda_1 a_{2,1}+\lambda_2 a_{2,2}+\lambda_3 a_{2,3})(\lambda_1 a_{3,1}+\lambda_2 a_{3,2}+\lambda_3 a_{3,3});$$

nie pisząc w jego rozwinięciu wyrazów takich, jak

$$\lambda_1 a_{1,1}\lambda_1 a_{2,1}\lambda_1 a_{3,1};\ \lambda_1 a_{1,1}\lambda_1 a_{2,1}\lambda_2 a_{3,2};\ \lambda_1 a_{1,1}\lambda_3 a_{2,3}\lambda_3 a_{3,3};\ldots,$$

gdyż stosownie do pierwszego warunku

$$\lambda_1\lambda_1\lambda_1=\lambda_1\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_3\lambda_3=\ldots=0,$$

Zadania. — Rozwinąć i obliczyć wyznaczniki następujących systematów elementów :

(1°)

$$\begin{array}{rrrr} 9, & 13, & 17, & 4, \\ 18, & 28. & 33, & 8, \\ 30, & 40, & 54, & 13, \\ 24, & 37, & 46, & 11. \end{array}$$

(2°)

$$\begin{array}{rrrr} 5. & -10, & 11. & 0, \\ -10. & -11, & 12, & 4, \\ 11, & 11, & -11, & 2, \\ 0, & 4, & 2, & -6. \end{array}$$

---

otrzymamy, jako rozwinięcie tego iloczynu, wyrażenie :

$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+\lambda_1\lambda_3\lambda_2 a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}+\lambda_2\lambda_3\lambda_1 a_{1,2}a_{2,3}a_{2,1}+\lambda_2\lambda_1\lambda_3 a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

$$+\lambda_3\lambda_1\lambda_2 a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+\lambda_3\lambda_2\lambda_1 a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}=$$

$$+(+1)a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+(-1)a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}+(+1)a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+(-1)a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

$$+(+1)a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+(-1)a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}=$$

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{2,3}o_{3,2}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

$$+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

(Zastosowania kluczów algebraicznych do ujawnienia niektórych własności wyznaczników można znaleźć u Bellavitis'a w *Sposizione elementare della Teorica dei Determinanti* (§§ 81-90). 1857 r.)

(3°)

$$\begin{array}{ccccc}
10, & 18, & 1, & 14, & 22, \\
4, & 12, & 25, & 8, & 16, \\
23, & 6, & 19, & 2, & 15, \\
17, & 5, & 13, & 21, & 9, \\
11, & 24, & 7, & 20, & 3\ (^1).
\end{array}$$

(4°)

$$\begin{array}{cccc}
0, & 1, & 1, & 1, \\
1, & 0. & 1, & 1, \\
1, & 1, & 0, & 1, \\
1, & 1, & 1, & 0.
\end{array}$$

(5°)

$$\begin{array}{cccc}
1, & 1, & 1, & 1, \\
1, & -1, & -1, & 1, \\
1, & -1, & 1, & -1, \\
1, & 1, & -1, & -1.
\end{array}$$

(6°)

$$\begin{array}{cccc}
-1, & 1, & 1, & 1, \\
1, & -1, & 1, & 1, \\
1, & 1, & -1, & 1, \\
1, & 1, & 1, & -1.
\end{array}$$

(1) Te 25 elementów są $n^2=5^2$ liczb całkowitych od 1 do 25, które są ustawione tak, że tworzą «kwadrat magiczny», t. j. summa liczb znajdujących się w każdym wierszu, każdej kolumnie i każdej przekątnej równa się stale $\frac{n}{2}(n^2+1)=\frac{5}{2}(5^2+1)=65$.

(7°)

$$\begin{array}{cccc} 0, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 0, & c, & b, \\ 1, & c, & 0, & a, \\ 1, & b, & a, & . \end{array}$$

(8°)

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \\ \beta', & 1, & 0, & , \\ \gamma', & 0, & 1, & , \\ \delta', & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

(9°)

$$\begin{array}{cccc} 0, & x, & y, & z, \\ x, & 0, & z, & y, \\ y, & z, & 0, & x, \\ z, & y, & x, & 0. \end{array}$$

(10°)

$$\begin{array}{cccc} 0, & x, & -y, & z, \\ -x, & 0, & c, & b, \\ y, & -c, & 0, & a, \\ -z, & -b, & -a, & 0. \end{array}$$

(11°)

$$\begin{array}{cccc} 0, & x, & y, & z, \\ -x, & 0, & c, & b, \\ -y, & -c, & 0, & a, \\ -z, & -b, & -a, & 0. \end{array}$$

(12°)

$$\begin{matrix} x, & a, & b, & c, \\ -a, & x, & d, & e, \\ -b, & -d, & x, & f, \\ -c, & -e, & -f, & x. \end{matrix}$$

(13°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, \\ \alpha^2, & \beta^2, & \gamma^2, & \delta^2, & \varepsilon^2, \\ \alpha^3, & \beta^3, & \gamma^3, & \delta^3, & \varepsilon^3, \\ \alpha^4, & \beta^4, & \gamma^4, & \delta^4, & \varepsilon^4. \end{matrix}$$

(14°)

$$\begin{matrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ -1, & a_2, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & -1, & a_3, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & -1, & a_4, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & -1, & a_5. \end{matrix}$$

(15°)

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1 & 1, \\ 1, & 1, & \cos\alpha, & \cos\beta, \\ 1, & \cos\alpha, & 1, & \cos\gamma, \\ 1, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1. \end{matrix}$$

(16°)

Jaki znak, + czy —, ma wyraz wyznacznika systematu n^2 elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}, \end{matrix}$$

utworzony przez elementy niegłównej przekątnej [1], to jest

$$a_{1,n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\ldots a_{n-2,3}a_{n-1,2}a_{n,1}?$$

Odpowiedzi :

(1°) -15, (2°) 8100. (3°) 4680000. (4°) -3. (5°) $+16$.

(6°) -16. (7°) $(a+b-c)^2-4ab$. (8°) $\alpha-\beta\beta'-\gamma\gamma'-\delta\delta'$.

(9°) $-(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$.

(10°) $(ax+by+cz)^2$. (11°) $(ax-by+cz)^2$.

(12°) $x^4+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)x^2+(af-be+cd)^2$.

(13°) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)$.

(14°) $a_1a_2a_3a_4a_5+a_1a_2a_3+a_1a_2a_5+a_1a_4a_5+a_3a_4a_5+a_1+a_3+a_5$ [2].

(15°) $-16\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma$.

---

[1] Nazywanej niekiedy « drugą przekątną » kwadratu elementów.

[2]
$$=\{[(a_1\times a_2+1)a_3+a_1]a_4+[a_1\times a_2+1]\}a_5$$
$$+\{(a_1\times a_2+1)a_3+a_1\};$$

jestto więc mianownik siódmego ułamka przybliżonego (reduktu) takiego ułamka ciągłego (Zob. § 108) :

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6+\ldots}}}}}}$$

(16°) Znak jest przez wyrażenie $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ określony [1].

§ 13.

Badanie własności tych wyrażeń szczególnych, które dziś wyznacznikami nazywamy, wzięło swój początek przy roztrząsaniu rozwiązań układu równań pierwszego stopnia (§ 17). I dla tego dotąd w niektórych podręcznikach pojęcie wyznacznika n-ego stopnia wprowadzanem bywa przy zadaniu : z n równań jednorodnych pierwszego stopnia z n niewiadomemi wyrugować te niewiadome.

Tak, jeśli mamy układ dwu takich równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = 0, \end{cases}$$

(które mają mieć miejsce jednocześnie, t. j. pewne wartości dla x_1 i x_2 obu równaniom zadosyć czynią), to, mnożąc pierwsze równanie przez $a_{2,2}$, drugie zaś przez $-a_{1,2}$, wskutek dodania otrzymamy równość

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 0 \ [2],$$

---

[1] Albowiem przemianie drugich wskaźników iloczynu $a_{1,n}a_{2,n-1}\dots a_{n-1,2}a_{n,1}$ odpowiada : $n-1$ zmian, zależnych od wskaźnika pierwszego elementu, $n-2$ zmian, zależnych od wskaźnika drugiego elementu, i t.d., nakoniec, jedna zmiana, zależna od wskaźnika przedostatniego elementu. Razem zmian

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+3+2+1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

Będzie więc ten iloczyn poprzedzony znakiem + lub znakiem —, stosownie do tego, czy, przy n danem, $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ jest jednością dodatną, czyteż odjemną (§ 6).

[2] Ta równość jest warunkiem aby dane równania były jednoczesne,

której pierwsza strona, t. j. wyrażenie

$$a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1},$$

jest, jak wiemy (§ 9), wyznacznikiem systematu elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2}, \\ a_{2,1} & a_{2,2}. \end{matrix}$$

Podobnież, gdybyśmy mieli układ trzech równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3=0, \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3=0, \\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3=0, \end{cases}$$

i pierwsze z nich pomnożyli przez $a_{2,2}a_{3,3}-a_{2,3}a_{3,2}$, drugie przez $a_{3,2}a_{1,3}-a_{1,2}a_{3,3}$, a trzecie przcz $a_{1,2}a_{2,3}-a_{2,2}a_{1,3}$, a następnie tak pomnożone dodali, to otrzymamy równość

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}=0,$$

---

t. j, miały spólne rozwiązanie, gdyż możemy je przedstawić w kształcie niejednorodnym

$$\begin{cases} a_{1,1}\dfrac{x_1}{x_2}+a_{1,2}=0, \\ a_{2,1}\dfrac{x_1}{x_2}+a_{2,2}=0. \end{cases}$$

Jeśli te równania mają spólny pierwiastek, to wyznaczając $\frac{x_1}{x_2}$ z jednego z tych równań i podstawiając tę wartość w drugie, otrzymamy tożsamościowo $a_{2,1}\left(-\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)+a_{2,2}=0$, czyli $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}=0$.

której pierwsza strona jest (§ 9) wyznacznikiem systematu elementów

$$a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},$$

$$a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},$$

$$a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3}.$$

Biorąc układ podobnych 4 równań z 4 niewiadomemi, 5 równań z 5 niewiadomemi i t. d. dojdziemy do wyrażeń, będących wyznacznikami odpowiednio 4go, 5go i wyższych stopni. Możemy więc powiedzieć, że mając n równań linijowych jednorodnych z n niewiadomemi

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{1,n}x_n=0, \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{2,n}x_n=0, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{n,n}x_n=0, \end{array}\right.$$

przez wyrugowanie tych niewiadomych dochodzimy do wyrażenia, zawierającego same tylko spółczynniki naszych równań, które jest wyznacznikiem n-ego stopnia systematu n^2 elementów

$$a_{1,1},\ \ a_{1,2},\ .\ .\ .\ a_{1,n},$$

$$a_{2,1},\ \ a_{2,2},\ .\ .\ .\ a_{2,n},$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$a_{n,1},\ \ a_{n,2},\ .\ .\ .\ a_{n,n}.$$

Powiedzieć więc możemy:

Jeśli z danych n *równań jednorodnych pierwszego stopnia z* n *niewiadomemi wyrugujemy te niewiadome, to otrzymane wyrażenie, złożone z samych tylko spółczynników, jest wyznacznikiem systematu* n² *spółczynników danych równań.*

§ 14.

Cauchy w *Mémoire Sur les Fonctions, qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions operées entre les variables qu'elles renferment* ([1]), w ten sposób wyprowadza pojęcie wyznacznika.

Niechaj będzie n różnych ilości

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad . \ . \ . \ a_n.$$

Utwórzmy $\frac{n(n-1)}{2}$ różnic każdych dwóch tych ilości, t. j,

$$\begin{array}{llllll} a_2 - a_1, & a_3 - a_1, & . \ . \ . \ , & a_{n-1} - a_1, & a_n - a_1, \\ & a_3 - a_2, & . \ . \ . \ , & a_{n-1} - a_2, & a_n - a_2, \\ & & . \ . \ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \ . \\ & & & a_{n-1} - a_{n-2}, & a_n - a_{n-2}, \\ & & & & a_n - a_{n-1}. \end{array}$$

Iloczyn tych różnic jest funkcyą znakomienną (fonction alternée), t. j., przy rozmaitém (we wszelki możliwy sposób) przestawianiu między sobą ilości

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad . \ . \ . \ , \ a_n,$$

iloczyn

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ . \ . \ . \ (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ . \ . \ . \ (a_n - a_2) \ . \ . \ . \ (a_n - a_{n-1})$$

otrzymuje dwie wartości, różniące się tylko znakiem. Że zaś iloczyn

$$a_1 a_2 a_3 \ . \ . \ . \ a_n$$

([1]) *Journal de l'Ecole Polytechnique,* Cahier XVII, 1815.

jest funkcyą symetryczną, to iloczyn

$$a_1a_2a_3\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})$$

jest także funkcyą znakomienną. « Wystawmy sobie teraz, że » rozwinęliśmy ten iloczyn, oraz, że w każdym wyrazie rozwi- » nięcia zastępujemy wykładnik każdej głoski przez drugi » wskaźnik, równający się wykładnikowi, o który idzie, pisząc » np. $a_{r,s}$ zamiast $a^s{}_r$, zaś $a_{s,r}$ zamiast $a^r{}_s$: otrzymamy w ten » sposób nową funkcyę znakomienną...([1]). Taka jest najogól- » niejsza postać funkcyj, które oznaczać nadal będę nazwą de- » terminantów » ([2]).

Np., niechaj będą trzy ilości

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3;$$

utworzmy znakomienną funkcyę

$$a_1a_2a_3(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2);$$

rozwijając ten iloczyn, a wyraźnie wypisując domyślny wykład- nik 1, mamy

$$+a^1{}_1a^2{}_2a^3{}_3-a^1{}_1a^3{}_2a^2{}_3+a^2{}_1a^3{}_2a^1{}_3-a^2{}_1a^1{}_2a^3{}_3+a^3{}_1a^1{}_2a^2{}_3-a^3{}_1a^2{}_2a^1{}_3,$$

z którego to wyrażenia, stawiając drugie wskaźniki zamiast wy- kładników, otrzymujemy wyznacznik

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$
$$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

([1]) « ...nową funkcyę symetryczną znakomienną, która, zamiast być » przedstawianą przez $S(\pm a^1{}_1a^2{}_2a^3{}_3 \ldots a^n{}_n)$, będzie przedstawioną » przez $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n})$, gdzie znak S odnosi się do pierwszych » wskaźników każdej głoski. »

([2]) Str. 52.

Dotąd wielu autorów [1] utrzymuje ten wywód Cauchy'ego, modyfikując go jednak nieco. Mianowicie, mając dane n ilości

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \; . \; . \; . \; , \; a_{n-1},$$

tworzą iloczyn różnic

$$(a_1-a_0)(a_2-a_0)\ldots(a_{n-1}-a_0)(a_2-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

W wyrazach rozwinięcia tego iloczynu wchodzi właściwie tylko $n-1$ z pomiędzy n ilości

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \; . \; . \; . \; , \; a_{n-1};$$

dodają więc, jako czynnik, do każdego wyrazu niewchodzącą weń ilość z wykładnikiem zero, a następnie w takiem rozwinięciu wykładniki zastępują przez drugie wskaźniki, tak, że zamiast $a^k{}_i$ piszą $a_{i,k}$, zamiast a_i piszą $a_{i,1}$, zamiast $a^0{}_i$ piszą $a_{i,0}$. Otrzymane w ten sposób wyrażenie nazywają wyznacznikiem n^2 elementów:

$$\begin{array}{llll}
a_{0,0}, & a_{0,1}, & . \; . \; . \; . \; , & a_{0,n-1}, \\
a_{1,0}, & a_{1,1}, & . \; . \; . \; . \; , & a_{1\,n-1}, \\
. \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\
a_{n-1,0}, & a_{n-1,2}, & . \; . \; . \; , & a_{n-1,n-1}.
\end{array}$$

Np. mając trzy ilości

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2$$

utworzymy

$$\begin{aligned}
(a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_2-a_1) &= a_1a^2{}_2 - a^2{}_1a^2 + a_0a^2{}_1 - a_0a^2{}_2 + a^2{}_0a^2 - a^2{}_0a_1, \\
&= a^0{}_0a^1{}_1a^2{}_2 - a^0{}_0a^2{}_1a^1{}_2 + a^1{}_0a^2{}_1a^0{}_2 - a^1{}_0a^0{}_1a^2{}_2 \\
&\quad + a^2{}_0a^0{}_1a^1{}_2 - a^2{}_0a^1{}_1a^0{}_2\,;
\end{aligned}$$

---

[1] Hesse, J. A. Serret, Studnička, i t. d.

Stawiając nakoniec wykładniki jako drugie wskaźniki, mamy wyznacznik

$$+a_{0,0}a_{1,1}a_{2,2}-a_{0,0}a_{1,2}a_{2,1}+a_{0,1}a_{1,2}a_{2,0}-a_{0,1}a_{1,0}a_{2,2}+a_{0,2}a_{1,0}a_{2,1}$$
$$-a_{0,2}a_{1,1}a_{2,0}.$$

Widzimy więc, że o wiele racyonalniejszym jest już pierwotny wywód CAUCHY'ego.

§ 15.

Z rozmaitych znakowań wyznacznika, jakie były wprowadzone i używane przez różnych badaczów (¹), najpowszechniej dziś używanemi są następujące.

(¹) Charakterystyczną i często w badaniach bardzo dogodną jest metoda znakowania, której używa SYLVESTER :

« Moja metoda polega na wyrażeniu ilości w taki sposób za pomocą » głosek :

$$\begin{array}{llll} a_1\mathrm{a}_1, & a_1\mathrm{a}_2, & \ldots, & a_1\mathrm{a}_n, \\ a_2\mathrm{a}_1, & a_2\mathrm{a}_2, & \ldots, & a_2\mathrm{a}_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_n\mathrm{a}_1, & a_n\mathrm{a}_2, & \ldots, & a_n\mathrm{a}_n. \end{array}$$

» Każda ilość jest tu przedstawiona dwiema głoskami : same głoski, wzięte » oddzielnie, nie są symbolami ani ilości ani działania, lecz tylko *cieniami* » (umbræ), albo idealnemi *elementami* symbolów ilościowych. Mamy teraz » sposób przedstawienia powyżej danego determinantu w zwięzłej postaci; » w tym celu należy nam tylko napisać jeden szereg *cieniów* nad drugim, » jak następuje :

$$a_1a_2\ldots a_n$$
$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_n.$$

» Jeśli teraz chcemy otrzymać wartość algebraiczną tego determinantu, to

Gdy dany jest systemat n^2 elementów i chcemy w symbolu wskazać wyraźnie wszystkie elementy, to znakujemy wyznacznik, ujmując ten systemat elementów, odpowiednio ustawionych, w dwie pionowe kreski. Wyznacznik więc systematu n^2 elementów

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1},\quad a_{1,2},\quad \ldots,\quad a_{1,n},\\[1em]
a_{2,1},\quad a_{2,2},\quad \ldots,\quad a_{2,n},\\[1em]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[1em]
a_{n,1},\quad a_{n,2},\quad \ldots,\quad a_{n,n},
\end{array}
$$

oznaczymy wtedy tak:

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}\\
a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}
\end{vmatrix}.
$$

Jeśli zaś nie jest koniecznem utrzymanie w symbolu wszystkich elementów, jeśli, zatrzymując niektóre tylko, jesteśmy w stanie z zatrzymanych elementów odtworzyć pozostałe elementy wyznacznika: to wypisujemy w symbolu tylko wyraz

---

» należy nam tylko wziąć $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots \mathrm{a}_n$ we wszystkich $1.2\ldots n$ rozmai-
» tych położeniach i otrzymamy

$$
\left\{\begin{matrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_n \end{matrix}\right\} = \sum \pm \left(a_1 \mathrm{a}_{\theta_1} a_2 \mathrm{a}_{\theta_2} \ldots a_n \mathrm{a}_{\theta_n} \right)
$$

» w którem-to wyrażeniu $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, przedstawia pewien porzą-
« dek liczb $1, 2, \ldots, n$. » (*Philosophical Magazin*, 1851. Kwiecień. *On a new Class of Theorems....*)

Znakowanie to SYLVESTER'a nosi nazwę: « umbral notation », znakowanie cieniowe.

główny tego wyznacznika; na oznaczenie zaś, że mamy przezeń rozumieć nie jeden tylko wyraz wyznacznika, lecz cały wyznacznik, używamy symbolu :

$$\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

lub też symbolu

$$(a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}).$$

§ 16.

Gdy mamy systemat mn elementów (§ 4) przy m nie równem n, t. j. gdy liczba kolumn jest różną od liczby wierszy, to używany bywa symbol

$$\left\| \begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,m} \end{array} \right\|$$

Zwykle przez taki symbol, gdy $m > n$, t. j. gdy liczba kolumn jest większą od liczby wierszy, rozumiemy summę wszystkich możliwych wyznaczników, otrzymywanych przez kombinowanie ze sobą n kolumn.

Tak np. symbol

$$\left\| \begin{array}{lll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \end{array} \right\|$$

używany bywa na oznaczenie summy wyznaczników

$$\left| \begin{array}{ll} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{1,2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ll} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,3} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ll} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,3} \end{array} \right|,$$

tak że możemy pisać

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,2} \end{matrix}\right\| = \sum_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha}, & a_{1,\beta} \\ a_{2,\alpha}, & a_{2,\beta} \end{vmatrix},$$

gdzie znak Σ odnosi się do wszystkich $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ kombinacyj z 3 ilości : 1, 2, 3, po 2, które kolejno, zamiast α i β, stawić należy po prawej stronie, jako drugie wskaźniki elementów wyznacznika.

Podobnież rozumieć będziemy, że

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,5} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,5} \end{matrix}\right\| = \sum_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha}, & a_{1,\beta} \\ a_{1,\alpha}, & a_{1,\beta} \end{vmatrix},$$

gdzie znak Σ odnosi się do wszystkich $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 20$ kombinacyj, jakie z 5 ilości 1, 2, 3, 4, 5 po 2 utworzyć można i które kolejno zamiast α i β, jako drugie wskaźniki elementów wyznacznika, podstawić należy.

Również

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,5} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,5} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4}, & a_{3,5} \end{matrix}\right\| = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha}, & a_{1,\beta}, & a_{1,\gamma} \\ a_{2,\alpha}, & a_{2,\beta}, & a_{2,\gamma} \\ a_{3,\alpha}, & a_{3,\beta}, & a_{3,\gamma} \end{vmatrix},$$

gdzie znów znak Σ odnosi się do wszsytkich $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ kombinacyj, jakie z 5 ilości 1, 2, 3, 4, 5, po 3 utworzyć można i które to kombinacye należy wszystkie, jako drugie wskaźniki elementów wyznacznika, stawić kolejno zamiast α, β, γ.

W ogóle, przy $m > n$,

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,m} \end{matrix}\right\| = \sum \left|\begin{matrix} a_{1,\alpha}, & a_{1,\beta}, & \dots, & a_{1,\nu} \\ a_{2,\alpha}, & a_{2,\beta}, & \dots, & a_{2,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n,\alpha}, & a_{n,\beta}, & \dots, & a_{n,\nu} \end{matrix}\right|,$$

gdzie znak Σ rozciąga się na wszystkie kombinacye m ilości

$$1, \ 2, \ 3, \dots, m$$

po n, których, jak wiemy, jest

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!},$$

tak, że każdą z tych kombinacyj należy kolejno stawiać zamiast

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \dots, \nu,$$

jako drugie wskaźniki elementów wyznacznika [1].

Zobaczymy dalej (§ 44), że, jeżeli w tylko co wypowiedziany sposób pojmujemy symbol

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,m} \end{matrix}\right\|$$

w przypadku, gdy $m > n$, to zatem idzie koniecznie, że sym-

---

(1) Symbole podobne, w przypadku $m = n$, przedstawiają zwykły wyznacznik. Badanie własności tych symbolów obejmowałoby więc w sobie i badanie własności wyznaczników. Podobne badania spotkać częściowo

bel podobny, w razie, gdy $m < n$, t. j., gdy liczba kolumn jest mniejszą od liczby wierszy, np.

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \\ a_{3,1}, & a_{3,2} \end{Vmatrix}$$

ma zawsze wartość zera (1).

§ 17.

Początek rozwoju teoryi wyznaczników należy upatrywać w następującym ustępie listu LEIBNITZ'a do L'HOSPITAL'a, z dnia 28 kwietnia 1693 roku (2):

« Czyż nie jest prawdą, że, kiedy potrzeba wielu głosek, te » głoski nie przedstawiają całkiem związków, jakie istnieją po- » między wielkościami, przez nie oznaczonemi, natomiast, » przy posiłkowaniu się liczbami, mogą ten związek wyrazić? » Naprzykład, niechaj będą przedłożone trzy proste (3) równania » z dwiema niewiadomemi, w celu wyrugowania tych dwu » niewiadomych, a to za pomocą prawa ogólnego. Przyjmując

$$10 + 11x + 12y = 0 \qquad (1)$$

» i

$$20 + 21y + 22y = 0 \qquad (2)$$

» i

$$30 + 31x + 32y = 0, \qquad (3)$$

» gdzie pozorna (ułudna) liczba ma dwie cyfry, pierwsza mi

---

można w dziele *Teoria de' Determinanti e loro applicazioni di Nicola* TRUDI. Neapol. 1862.

(1) Systemat mn elementów BALTZER nazywa «defectiv», w razie $m > n$, zaś «excessiv», w razie $m < n$. (*Th. u Anw. d. Det.*, czwarte wydanie, str. 5.).

(2) *Leibnizens gesammelte Werke... herausgegeben von* PERTZ. Dritte Folge, zweiter Band, *Leibnizens mathematische Schrifften herausgegeben von* GERHART. Erste Abtheilung, Band II. Berlin, 1850, str. 239.

(3) To jest liniowe (stopnia pierwszego względem niewiadomych).

» wskazuje z którego jest równania, zaś druga mi wskazuje do
» której należy głoski. Tak rachując, znajdujemy wszędzie
» harmonię, która nietylko, że służy nam za rękojmię, lecz
» nadto dozwala nam odrazu dostrzedz prawidła lub twier-
» dzenia. Naprzykład, rugując naprzód y za pomocą pierwszego
» i drugiego równania, mieć będziemy :

$$\begin{matrix} +10.22+11.22x \\ -12.20-12.21.. \end{matrix} = 0 \qquad (4)$$

» a z pierwszego i trzeciego mieć będziemy :

$$\begin{matrix} +10.32+11.32x \\ -12.30-12.31.. \end{matrix} = 0 \qquad (5)$$

» gdzie należy zauważyć, że te dwa równania różnią się tem
» tylko, że pierwsza cyfra 2 została zamienioną na pierwszą
» cyfrę 3. Zresztą, w wyrazach podobnych jednego równania ([1])
» cyfry pierwsze są te same, a cyfry drugie tworzą tęż samą
» summę. Należy teraz wyrugować głoskę x z czwartego i pią-
» tego równania, a jako wypadek mieć będziemy ([2]).

$$\begin{matrix} 1_0 \,.\, 2_1 \,.\, 3_2 & & 1_0 \,.\, 2_2 \,.\, 3_1 \\ 1_1 \,.\, 2_2 \,.\, 3_0 & = & 1_1 \,.\, 2_0 \,.\, 3_2 \\ 1_2 \,.\, 2_0 \,.\, 3_1 & & 1_2 \,.\, 2_1 \,.\, 3_0, \end{matrix}$$

([1]) Takie tylko można tu znaczenie dać nieścisłemu wyrażeniu : « dans un même terme d'une même équation. »

([2]) Gdyby LEIBNITZ to równanie pisał w ten sam sposób w jaki pisze równania (4) i (5), to byłoby (§ 13) :

$$\begin{matrix} +10.21.32+11.22.30+12.20.31 \\ -10.22.31-11.20.32-12.21.30 \end{matrix} = 0\,;$$

» które jest ostatecznem równaniem, oswobodzonem od obu
» niewiadomych, któreśmy chcieli wyrugować, a które samo
» przez się przedstawia się dowiedzionem [1], wskutek har-
» monii dającej się wszędzie zauważyć, a jaką trudno byłoby
» odkryć, używając głosek a, b, c, osobliwie gdyby liczba
» głosek i równań były wielkie. W części tajnie analizy polegają
» na znakowaniu, to jest na kunszcie dobrego używania znaków,
» któremi się posługujemy, i pan widzisz, z téj małéj próbki,
» że Viète i Descartes jeszcze nie znali wszyskich tych tajemnic.
» Prowadząc nieco dalej ten rachunek dojdzie się do pewnego
» *twierdzenia ogólnego* dla jakiejkolwiek liczby mogących być
» wziętemi głosek i równań prostych. Oto ono, jak ja je kiedyś
» znalazłem. *Gdy danych jest ilekolwiek równań, dostatecznych*
» *dla wyrugowania ilości, które prostego* (pierwszego) *stopnia*
» *nie przewyższają, to, według poprzedzającego równania, na-*
» *przód, należy wziąć wszystkie kombinacye możliwe, w które*
» *wchodzi jeden tylko spółczynnik każdego równania; powtóre te*
» *kombinacye, w razie postawienia ich po tej samej stronie*
» *poprzedzającego równania, mają przeciwne znaki, jeśli mają*
» *o jedność mniej spólnych spółczynników niż liczba rugowanych*
» *ilości; pozostałe mają też same znaki* [2] ».

---

lewa strona tego równania przedstawia rzeczywiście wyznacznik systematu elementów

$$\begin{matrix} 10, & 11, & 12, \\ 20, & 21, & 22, \\ 30, & 31, & 32. \end{matrix}$$

[1] « et qui porte sa preuve avec soy. »

[2] W pierwszej części tego twierdzenia : *summendæ sunt omnes com-* « *binationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens unius-* » *cujusque æquationis* » można upatrywać pierwsze postawienie ogólnego określenia wyznacznika. Zawarte zaś w drugiej części prawidło na znaki wyrazów widocznie jest zbyt pośpiesznym wnioskiem ze szczególnego przypadku : trzech równań z dwiema niewiadomemi.

Chociaż Leibnitz w innym liście do l'Hospital'a (1) wyraża się o tym swoim «sposobie liczenia za pomocą liczb zamiast głosek», że jest on jego «jednem z najważniejszych odkryć w analizie», to jednak dalszego rozwinięcia tego «sposobu» nie spotykamy w jego pismach.

Po nim, Cramer, w *Introduction à l'analyse des lignes courbes algèbriques* (2), tworzy systemat równań pierwszego stopnia, w których spółczynniki oznacza przez x^1, x^2, . . . , oblicza rozwiązanie trzech równań z trzema niewiadomemi, zkąd przez indukcyę dochodzi do takiej teoryi rozwiązania równań pierwszego stopnia. Wspólny mianownik wszystkich n niewiadomych x, y, z, . . . , ma tyle wyrazów, ile jest przemian z n ilości. Aby utworzyć oddzielne wyrazy, trzeba obok siebie wypisać wszystkie niewiadome, zawsze w tym samym porządku, którym, jako wykładniki (pełniące tu rolę wskaźników), damy n pierwszych liczb, wziętych we wszelkim możliwym porządku. Połowa tych wyrazów ma mieć znak $+$, połowa zaś znak $-$, stosownie do tego, czy liczba zmian (dérangements) jest parzystą,czy też nieparzystą. Tak wyrazy $z^1y^2x^3$, $z^3y^1x^2$, jako mające zmian : pierwszy 0, drugi 2, otrzymują znak $+$. (Licznik zaś wyrażenia dla niewiadoméj utworzy się z mianownika, w skutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej przez ilości wiadome danych równań.)

To dokładne i zręczne wyznaczenie znaków oddzielonych wyrazów wyrażeń wyznacznikowych jest ważną zasługą Cramer'a. Traktował on jednak te wyrażenia mimochodem, jako szczegół rachunkowy przy rozwiązywaniu systematu równań.

---

(1) List bez daty. W cytowanym wyżej tomie zbioru prac Leibnitz'a strona 245.

(2) Genewa. 1750, str. 658.

Dopiero VANDERMONDE, w *Mémoire sur l'Elimination* (1), pierwszy stawia niezależnie pojęcie wyrażeń wyznacznikowych, zajmuje się roztrząsaniem takowych, wyprowadzeniem niektórych ich własności, oraz wykrywa zależności istniejące między takiemi wyrażeniami. Nadto pierwszy on używał w tej pracy symbolu na oznaczenie wyznacznika. Mianowicie, elementy oznacza dwiema głoskami, postawionemi jedna nad drugą:

$$\overset{\alpha}{a},\ \overset{\beta}{a},\ \ldots$$

$$\overset{\alpha}{b},\ \overset{\beta}{b},\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

wyznacznik zaś sam oznacza symbolem (2)

$$\frac{\alpha}{a}\left|\frac{\beta}{b}\right|\frac{\ldots}{\ldots}\left|\frac{\gamma}{c}\right.,$$

tak, że np.

$$\frac{\alpha}{a}\left|\frac{\beta}{b}\right. = \overset{\alpha\beta}{ab} - \overset{\beta\alpha}{ab}.$$

Tą więc pracą VANDERMOND'a rozpoczynają się właściwe badania własności wyznaczników, które odtąd są już wciąż przez

---

(1) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (za rok 1772, chociaż ta praca była przedstawiona Akademii jeszcze 12 Stycznia 1771r.), Paryż, 1776. Część II, str. 516 — 526. W tymże tomie (Część II, str, 294 i następne) jest ogłoszona z 1772 r. praca LAPLACE'a *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*, w której traktowane są własności wyznacznika (résultante) mniej ściśle (i później), niż przez VANDERMONDE'a. Często jednak tę pracę cytują.

(2) « Le symbole $-|-|-|-$ sert ici de caractéristique » (str. 517).

różnych badaczów dalej prowadzone ([1]) i utworzyły ([2]) «alge-
» brę ponad algebrą, rachunek prowadzący do łączenia i prze-
» powiadania wypadków działań algebraicznych, w sposób po-
» dobny do tego, w jaki algebra uwalnia nas od uskuteczniania
» szczegółowych działań arytmetycznych.»

([1]) Historyczne wskazówki nader starannie i wyczerpująco opracowane były naprzód przez Baltzer'a w *Th. u. Anw. d. Det.* (pierwsze wydanie 1857, czwarte 1875r.), gdzie są podane w odsyłaczach, chociaż pierwsze w tym kierunku usiłowania robił Spottiswoode w 1851 r. w *Elementary Theorems ralating to Determinants* (rzecz przedrukowana także w Crelle'a *Journal für die r. u. an. Mathematik*, tom LI, 1856 r.). Systematycznie i źródłowo traktuje Guenther historyę wyznaczników w pierwszym rozdziale swego *Lehrbuch der Determ.-Theorie* (pierwsze wydanie 1875 r., drugie 1877r.). Niektóre kwestye, odnoszące się do historyi rozwoju teoryi wyznaczników są rozbierane w pracy Terquem'a : *Origine premier des Déterminants* (*Nouvelles annales de Mathématiques*, t. XIX, str. 27 i nast. Bull. de bibl.), w pracach Studnička : a) *Ueber die Entwickelung des Determinantenbegriffs*. Praga 1876. b) *Augustin Cauchy als formaler Begruender der Determinantentheorie*. Praga. 1876.

([2]) Sylvester l. c. Jestto taż sama myśl, którą, w przytoczonym na początku tego § liście, Leibnitz wypowiedział mówiąc o dostrzeżonej przezeń harmonii : «On voit aussi par là... que la perfection de l'Al-
» gèbre depend de l'art des Combinaisons qui est proprement la Spécieuse
» Générale.» (str.241).

ROZDZIAŁ DRUGI.

PRZESTAWIANIE W SYSTEMACIE ELEMENTÓW WYZNACZNIKA RZĘDÓW RÓWNOLEGŁYCH.

§ 18.

Dane n^2 elementów ustawmy dwoma sposobami tak, aby wiersze w jednem ustawieniu były kolumnami w drugiem (i wzajemnie):

$$\begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}; \end{array} \qquad \begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{2,1}, & \ldots, & a_{n,1}, \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \ldots, & a_{n,n}. \end{array}$$

Wtedy, tak tworząc wyrazy wyznaczników tych systematów elementów, ażeby w odpowiednie ich wyrazy weszły elementy zajmujące też same miejsca, spostrzeżemy, że tak wyrazy jednego wyznacznika, jak i wyrazy drugiego wyznacznika, dadzą się wyprowadzić z tegoż wyrazu głównego

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n}.$$

z tą wszakże różnicą, że kiedy jedne powstają zeń przez przestawianie pierwszych wskaźników, to drugie powstają przez podobne przestawianie drugich wskaźników. (Np., gdy dane dwa takie ustawienia 3^2 elementów :

$$\begin{array}{lllllll} a_{1,1}; & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \qquad & a_{1,1}, & a_{2,1}, & a_{3,1}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & & a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{3,2}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}; & & a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}, \end{array}$$

to wyznaczniki

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$
$$+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1},$$

i

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2}a_{3,3}$$
$$+ a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$$

mają wyrazy odpowiednie utworzone przez elementy też same miejsca zajmujące w danych ustawieniach ; wyrazy jednego wyrażenia powstają z wyrazu $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ przez przestawianie drugich wskaźników, gdy wyrazy drugiego wyrażenia powstają także z $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ przez podobne przestawianie pierwszych wskaźników.)

Ponieważ zaś dowiedliśmy (§ 7), że otrzymamy toż samo wyrażenie, czy będziemy przestawiać pierwsze wskaźniki elementów wyrazu

$$a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n},$$

czyteż drugie wskaźniki, więc otrzymane rozwinięcia przedstawiają tenże sam wyznacznik (§ 15)

$$\sum \pm a_{1,1}a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

tojest

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1}, & \ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Możemy tę własność tak wypowiedzieć:

Wyznacznik nie zmieni się, jeśli wszystkie wiersze systematu jego elementów postawimy jako odpowiednie kolumny, i odwrotnie.

Na mocy tego, jeśli nadal mówić będziemy cokolwiek o wierszach systematu elementów, to toż samo odnosić się będzie samo przez się do kolumn, i wzajemnie, a ponowne wypowiadanie byłoby zbytecznem.

§ 19.

Gdy w systemacie elementów wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & a_{1,k+1}, \ldots, & a_{1,l-1}, & a_{1,l}, & a_{1,l+1}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, \ldots, & a_{2,k-1}, & a_{2,k}, & a_{2,k+1} \ldots, & a_{2,l-1}, & a_{2,l}, & a_{2,l+1}, \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k}, & a_{n,k+1} \ldots, & a_{n,l-1}, & a_{n,l}, & a_{n,l+1}, \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

przestawiwszy l-ą i k-ą kolumny, to otrzymamy nowy wyznacznik

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,k-1}, a_{1,l}, a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,l-1}, a_{1,k}, a_{1,l+1}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, \ldots, a_{2,k-1}, a_{2,l}, a_{2,k+1}, \ldots, a_{2,l-1}, a_{2,k}, a_{2,l+1}, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,k+1}, a_{n,l}, a_{n,k-1}, \ldots, a_{n,l-1}, a_{n,k}, a_{n,l+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Jeśli wypiszemy rozwinięcie wyznacznika D, to, żeby z niego otrzymać rozwinięcie wyznacznika D_1, potrzeba będzie tylko we wszystkich wyrazach rozwinięcia wyznacznika D drugie wskaźniki l i k wzajemnie między sobą przestawić ([1]). Skutkiem tego przestawienia drugich wskaźników iloczyny jedne przejdą w drugie ([2]), lecz wszystkie zostaną też same : zmieni się tylko porządek ich następstwa po sobie w rozwinięciu. Idzie tylko o to, czy te iloczyny mieć będą znaki jednakowe, czyteż przeciwne.

Jakikolwiek z tych iloczynów wyznacznika D miał pierwotnie, jako drugie wyznaczniki, liczby

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots, k, \ldots l, \ldots n$$

([1]) Oba te wskaźniki będą w każdym wyrazie i porazu tylko, gdyż w każdym wyrazie jest jeden element kolumny l-ej i jeden element kolumny k-ej (§ 8).

([2]) Wyrazy bowiem wyznacznika D

$$a_{1,\alpha} \ldots a_{c,\iota} a_{d,k} a_{e,\kappa} \ldots a_{g,\lambda} a_{h,l} a_{i,\mu} \ldots a_{n,\nu}$$

$$a_{1,\alpha} \ldots a_{d,\iota} a_{d,l} a_{e,\kappa} \ldots a_{g,\lambda} a_{h,k} a_{i,\mu} \ldots a_{n,\nu},$$

(a każde dwa takie wyrazy się znajdą, § 8), po przestawieniu drugich wskaźników k i l, przejdą wzajemnie jeden w drugi.

w takim np. parządku :

$$\alpha, \ldots, \varepsilon, \ k, \ \eta, \ldots, \gamma, \ l, \ \mu, \ldots, \nu; \qquad (1)$$

po wzajemnem przestawieniu wskaźników k i l, drugie wskaźniki tego iloczynu będą następowały w takim porządku :

$$\alpha, \ldots, \varepsilon, \ l, \ \eta, \ldots, \gamma, \ k, \ \mu, \ldots, \nu. \qquad (2)$$

Jeśli te układy (1) i (2) należą do tej samej klassy (§ 2), to iloczyny będą poprzedzone jednakowemi znakami; jeśli zaś należą do różnych klass, to iloczyny mają znaki przeciwne.

Porównywując układy (2) i (1) ze sobą, widzimy, że należy tylko zbadać, o ile liczba zmian w układzie

$$l, \ \eta, \ldots, \gamma, \ k \qquad (3)$$

różni się od liczby zmian w układzie

$$k, \ \eta, \ldots, \gamma, \ l. \qquad (4)$$

Przyjmijmy, że liczba l jest większą niż liczba k, i niechaj liczb

$$\eta, \ldots, \gamma \qquad (5)$$

będzie m, z których m_1 jest wyższych od k, zaś m_2 wyższych od l; nadto niechaj w układzie (5) będzie zmian p. W układzie (3), prócz p zmian części tworzącej układ (5), mamy takie zmiany : jedną lk; następnie m_1 elementów wyższych od k tworzy względem k zmian m_1; nakoniec, ponieważ element l jest wyższy od $m - m_2$ po nim w układzie (3) następujących elementów układu (5), to ztąd zachodzi jeszcze zmian $m - m_2$. Wszystkich więc zmian w układzie (3) jest

$$p + 1 + m_1 + (m - m_2).$$

W układzie zaś (4) mamy zmiany : p zmian układu (5); następnie, z powodu, że $m - m_1$ elementów jego części, odpowiadającej układowi (5), jest niższych od k, mamy $m - m_1$ zmian; nadto m_2 elementów układu (5) wyższych od l poprzedza l w układzie (4), co daje m_2 zmian. Wszystkich więc zmian w układzie (4) jest

$$p + (m - m_1) + m_2.$$

Liczba zatem zmian układu (3) różni się od liczby zmian układu (4) o

$$1 + p + m_1 + m - m_2 - (p + m - m_1 + m_2) = 1 + 2(m_1 - m_2),$$

t. j. o liczbę nieparzystą. O tyleż różnią się liczby zmian układów (2) i (1). Do takiegoż wypadku dojdziemy, przyjmując, że $k > l$.

Możemy więc naprzód powiedzieć:

Jeśli w układzie przestawimy wzajemnie dwa elementy, zatrzymując pozostałe na zajmowanych przez nie miejscach, to liczba zmian, odpowiadających temu układowi, zmieni się o liczbę nieparzystą (1) (2).

Skutkiem tego, układy (1) i (2) należą do różnych klass, a tem samem iloczyny, których drugie wskaźniki elementów tworzą układy (1) i (2), mają znaki przeciwne. Że zaś układ (1)

---

(1) Tę własność spostrzegł Cramer (porówn. § 17). Pierwszy jej dowód podał Laplace l. c. str. 294. Zasadę przeprowadzonego tu dowodu przedstawił Mollweide, *Demonstratio eliminationis Cramerianæ* (Lipsk. 1811 r., § 9).

(2) Np. w układzie 2, 3, 1, 5, 4, 0, 7, 6, mającym zmian 9, przestawiając wzajemnie ilości 5 i 0, otrzymamy układ 2, 3, 1, 0, 4, 5, 7, 6, któremu odpowiada 6 zmian.

przedstawiał układ drugich wskaźników elementów któregokolwiek wyrazu wyznacznika D, to, po przestawieniu wzajemnem drugich wskaźników k i l we wszystkich wyrazach wyznacznika D, wypadnie przed wszystkiemi wyrazami zmienić znaki na przeciwne, tak, że wyznacznik D_1 składa się z tych samych iloczynów, co wyznacznik D, tylko poprzedzonych znakami przeciwnemi. Gdyż, jeżeli w wyznaczniku D jest wyraz (§ 8)

$+a_{1,\alpha}\ldots a_{d,k}\ldots a_{h,k}\ldots a_{n,\nu}$ to jest i wyraz $-a_{1,\alpha}\ldots a_{d,l}\ldots a_{h,k}\ldots a_{n,\nu}$

(znak — na zasadzie dowiedzionego tu twierdzenia). Przestawiając, dla utworzenia wyznacznika D_1, drugie wskaźniki k i l między sobą, otrzymamy z tych wyrazów w rozwinięciu wyznacznika D_1 odpowiednio

$$+a_{1,\alpha}\ldots a_{d,l}\ldots a_{h,k}\ldots a_{n,\nu} \quad \text{i} \quad -a_{1,\alpha}\ldots a_{d,k}\ldots a_{h,l}\ldots a_{n,\nu}.$$

I tak z każdą parą wyrazów. Będzie więc

$$D = -D_1.$$

to jest

$$\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{1,l},\ldots,a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k},\ldots,a_{n,l},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,l},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{n,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,l},\ldots,a_{n,k},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

czyli

$$\Sigma \pm a_{1,1}\ldots a_{k-1,k-1}\, a_{k,k}\, a_{k+1,k+1}\ldots a_{l-1,l-1}\, a_{l,l}\, a_{l+1,l+1}\ldots a_{n,n}$$

$$= -\Sigma \pm a_{1,1}\ldots a_{k-1,k-1}\, a_{k,l}\, a_{k+1,k+1}\ldots a_{l-1,l-1}\, a_{l,k}\, a_{l+1,l+1}\ldots a_{n,n}$$

Jeśli w systemacie elementów wyznacznika przestawimy wza-

jemnie dwa wiersze lub dwie kolumny, to wyznacznik, zachowując wartość bezwzględną, zmienia znak (¹).

Np. (§ 9, 7°)

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & -1 \\ -3, & -2, & 2 \\ 2, & 0, & 1 \end{vmatrix} = -15, \quad \text{zaś} \quad \begin{vmatrix} 2, & 0, & 1 \\ -3, & -2, & 2 \\ 2, & -1, & -1 \end{vmatrix} = +15.$$

§ 20.

W przypadku, gdyby dwa rzędy równoległe (to jest dwa wiersze lub dwie kolumny) systematu elementów danego wyznacznika D były utworzone przez elementy odpowiednio sobie równe, np.

$$a_{1,k} = a_{1,l}; \quad a_{2,k} = a_{2,l}; \quad . \; . \; . \; ; \quad a_{n,k} = a_{n,l},$$

to, przestawiając te dwa rzędy wzajemnie, powinnibyśmy otrzymać nowy wyznacznik D_1, na zasadzie poprzedzającego twierdzenia związany z wyznacznikiem D zależnością

$$D_1 = - D.$$

Lecz, z drugiej strony, z powodu, że wzajemnie przestawione elementa są sobie równe, całkiem się nie zmieni wartość wyznacznika skutkiem takowego przestawienia, a tem samem

$$D_1 = D.$$

(¹) Vandermonde, l. c., str. 518.

Ostatnia i poprzedzająca równości mają mieć miejsce jednocześnie. To być może tylko wtedy, kiedy

$$D = 0.$$

Zatem :

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika, dwie kolumny lub dwa wiersze mają odpowiednie elementy równe sobie, to wyznacznik równa się zeru ([1]).

Np.

$$\begin{vmatrix} 17, & 9, & -1, & 9 \\ \frac{3}{4}, & -a, & 5, & -a \\ 7, & -b, & 0, & -b \\ -b, & -7, & c, & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Ta własność wyznacznika służyć może niekiedy dla obliczania jego wartości. Np. jeśli mamy wyznacznik (§ 12, 13°)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, & d \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2 \\ a^3, & b^3, & c^3, & d^3 \end{vmatrix},$$

to wyrażenie przezeń przedstawione, równałoby się zeru, gdyby $b = a$, gdyż dwie kolumny byłyby jednakowe : jest więc to wyrażenie podzielne przez $b - a$. Równałoby się zeru, gdyby

---

([1]) Vandermonde, l. c., str. 522.

$c = a$: jest więc także podzielne przez $c - a$. Dla tejże samej przyczyny jest podzielne przez $d - a$, przez $c - b$, przez $d - b$, oraz przez $d - c$. Może więc ten wyznacznik tylko jakimś czynnikiem różnić się od iloczynu

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(a-c).$$

Zważywszy jednak, że wyznacznik ma jeden wyraz $+bc^2d^3$ (wyraz główny), i że w rozwinięciu wypisanego iloczynu różnic znajdzie się także wyraz bc^2d^3, widzimy, że takowy czynnik redukuje się do $+1$. Jest więc

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, & d \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2 \\ a^3, & b^3. & c^3, & d^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)(d-a) \\ (c-b)(d-b) \\ (d-c) \end{array}$$

Podobnież wyznacznik (§ 10, 15°)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+y, & 1 \\ 1, & 1, & 1+z \end{vmatrix}$$

staje się zerem, gdy $y = 0$, oraz gdy $z = 0$: jest więc podzielny przez yz. A że w rozwinięciu wyznacznika znajduje się wyraz $1.y.z$, więc

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+y, & 1 \\ 1, & 1, & 1+z \end{vmatrix} = yz.$$

§ 21.

Gdybyśmy w systemacie elementów wyznacznika

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1}, & a_{i-1,2}, & \dots, & a_{i-1,n} \\ a_{i,1}, & a_{i,2}, & \dots, & a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, & \dots, & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

wiersz i-y od góry dotąd wciąż przesuwali z każdym wierszem nad nim stojącym, dopóki ten i-y wiersz nie stanie się pierwszym, to otrzymalibyśmy wyznacznik

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{i,1}, & a_{i,2}, \dots, a_{i,n} \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, \dots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, \dots, a_{i+1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{i,1} a_{1,2} a_{2,3} \dots a_{i-1,i} a_{i+1,i+1} \dots a_{n,n}.$$

Aby to osiągnąć, uskuteczniliśmy tyle przestawień po dwa wiersze, ile jest wierszy w wyznaczniku D nad tym początkowo i-ym wierszem, t. j. $i-1$ przestawień. Przy każdem przestawieniu wzajemnem dwóch wierszy, wartość bezwzględna wyznacznika nie zmienia się: zmienia się tylko znak jego (§ 19). Zmienia się więc znak $i-1$ razy, tak, że ostatecznie wyznacznik D_1 jest równy $+$ lub $-D$, stosownie do tego, czy $i-1$ jest liczbą parzystą czy nieparzystą, czyli, stosownie do tego, czy $(-1)^{i-1}$ przedstawia $+1$ lub -1. Jest zatem $D_1=(-1)^{i-1}D$, czyli:

$$D=(-1)^{i-1}D_1;$$

$$\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{i-1,i-1}a_{i,i}a_{i+1,i+1}\ldots a_{n,n}$$

$$=(-1)^{i-1}\Sigma\pm a_{i,1}a_{1,2}\ldots a_{i-1,i}a_{i+1,i+1}\ldots a_{n,n}.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika pewien wiersz lub pewną kolumnę postawimy na pierwszem miejscu, przesuwając jednocześnie o jedno miejsce dalej poprzedzające wiersze lub kolumny, to wartość bezwględna wyznacznika pozostaje niezmienioną, znak zaś pozostaje lub zmienia się, stosownie do tego, czy liczba poprzedzających rzędów jest parzystą, czy nieparzystą.

§ 22.

Jeśli, mając wyznacznik

$$D=\Sigma\pm a_{1,1}\ \ldots\ a_{n,n}=\begin{vmatrix} a_{1,1}\ , & \ldots\ , & a_{1,k}\ , & \ldots\ , & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots\ , & a_{i,k}\ , & \ldots\ , & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\ , & \ldots\ , & a_{n,k}\ , & \ldots\ , & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

chcemy w wypisanym systemacie jego elementów tak poprzestawiać rzędy równoległe, aby pewien element, np. $a_{i,k}$, stał się pierwszym elementem głównej przekątnej, to możemy to osiągnąć w sposób następujący. Zróbmy k-ą kolumnę pierwszą, wtedy (§ 21)

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,k}, & a_{1,1}, \ldots, a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,k}, & a_{i,1}, \ldots, a_{i,k-1}, & a_{i,k+1}, \ldots, a_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k}, & a_{n,1}, \ldots, a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} D.$$

Element $a_{i,k}$ jest już w i-ym wierszu pierwszym elementem. Stawiając w wyznaczniku D′ wiersz i-y jako pierwszy, otrzymamy podobnież

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,1}, \ldots, & a_{i,k-1}, & a_{i,k+1}, \ldots, & a_{i,n} \\ a_{1,k}, & a_{1,1}, \ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k}, & a_{i-1,1}, \ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1}, \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k}, & a_{i+1,1}, \ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1}, \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k}, & a_{n,1}, \ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} D',$$

gdzie już element $a_{i,k}$ jest pierwszym elementem głównej przekątnej, jak tego pragnęliśmy. Z dwóch równości

$$D_1 = (-1)^{i-1} D',$$

$$D' = (-1)^{k-1} D$$

wypada

$$D_1 = (-1)^{i+k-2} D.$$

Gdy jednak

$$(-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k},$$

to

$$D_1 = (-1)^{i+k} D, \quad \text{czyli} \quad D = (-1)^{i+k} D_1.$$

Ten ostatni związek, w razie $i < k$, możemy tak przedstawić:

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i,i} \ldots a_{k,k} \ldots a_{n,n}$$

$$= (-1)^{i+k} \Sigma \pm a_{i,k} a_{1,1} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i} \ldots a_{k,k-1} a_{k+1,k+1} \ldots a_{n,n};$$

w razie zaś $i > k$,

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{k,k} \ldots a_{i,i} \ldots a_{n,n}$$

$$= (-1)^{i+k} \Sigma \pm a_{i,k} a_{1,1} \ldots a_{k-1,k-1} a_{k,k+1} \ldots a_{i-1,i} a_{i+1,i+1} \ldots a_{n,n};$$

nakoniec, w przypadku $i = k$, mamy

$$(-1)^{2i} = +1,$$

a więc

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i,i} \ldots a_{n,n} = \Sigma \pm a_{i,i} a_{1,1} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i+1} \ldots a_{n,n}.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika tak przestawimy rzędy równoległe, aby pewien element stał się pierwszym elementem głównej przekątnej, poprzedzające zaś ten element wiersze i kolumny zostały wszystkie przesunięte dalej o jedno miejsce, to wartość bezwzględna wyznacznika nie ulega zmianie, znak zaś pozostaje lub zmienia się, stosownie do tego, czy summa obu wskaźników owego elementu jest liczba parzysta, czy też nieparzysta.

Naprzykład

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ 0, & a_{3,2}, & 0, & 0 \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{3,2}, & 0, & 0, & 0 \\ a_{1,2}, & a_{1,1}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,2}, & a_{2,1}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{4,2}, & a_{4,1}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{3,3}, & a_{3,1}, & a_{3,2} \\ a_{1,3}, & a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,3}, & a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}.$$

§ 23.

W wyznaczniku

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1}, & \ldots, & a_{i,k}, & \ldots, & a_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

tak przestawiajmy rzędy równoległe, aby nietylko pierwszym

elementem głównej przekątnej był pewien element np. $a_{i,k}$, lecz aby po sobie następujące elementy głównej przekątnej miały tak pierwsze, jak i drugie wskaźniki w porządku kołowym (§ 11), to jest aby pierwsze wskaźniki elementów głównej przekątnej szły w porządku

$$i,\ i+1,\ i+2, \ldots, n-1,\ n,\ 1,\ 2, \ldots, i-2,\ i-1,$$

drugie zaś w porządku

$$k,\ k+1,\ k+2, \ldots, n-1,\ n,\ 1,\ 2, \ldots, k-2,\ k-1.$$

Możemy do tego dojść w taki sposób. Zrobimy naprzód i-y wiersz pierwszym, przesuwając poprzedzające o jedno miejsce niżéj (§ 21); następnie będziemy przestawiali wiersz $(i+1)$-y z każdym po kolei nad nim będącym wierszem dotąd, dopóki on nie stanie się wierszem drugim; podobnież $(i+2)$-i wiersz przesuwać będziemy coraz wyżej, aż on się stanie wierszem trzecim; nakoniec wiersz n-y przestawiać będziemy z wierszami nad nim stosującemi, aż stanie się $(n-i+1)$-ym od góry wierszem; wtedy pod nim znajdzie się wiersz który początkowo był wierszem 1-ym, dalej znajdzie się poprzednio 2-gi, i t. d., ostatnim zaś będzie wiersz, który początkowo w wyznaczniku D był $(i-1)$-ym. Będzie więc

$$D' = \begin{vmatrix} a_{i,1}, & \ldots, & a_{i,k}, & \ldots, & a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,k}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \\ a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,k}, & \ldots, & a_{i-1,n} \end{vmatrix}$$

W ten sposób każdy z $n-i+1$ wierszy ostatnich wyznacznika D, t. j. wiersze jego

$$i-\text{y},\ (i+1)\text{-y},\ (i+2)\text{-i},\ldots,(n-1)\text{-y},\ n\text{-y}$$

były kolejno przestawiane z każdym z $i-1$ przed niemi będących wierszy; zatem wyznacznik D zmieniał swój znak (§ 19)

$$(n-i+1)(i-1),$$

razy. Jest więc

$$D'=(-1)^{(n-i+1)(i-1)}D.$$

Jeśli jeszcze w wyznaczniku D′ w podobny sposób będziemy przestawiali po dwie kolumny tak, aby k-a stała się pierwszą, $(k+1)$-a drugą, i t. d., nakoniec n-a stała się $(n-k+1)$-ą, to otrzymamy

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,k+1}, & \ldots, & a_{i,n}, & a_{i,1}, & \ldots, & a_{i,k-1} \\ a_{i+1,k}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, & a_{i+1,n}, & a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k}, & a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{n,n}, & a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k-1} \\ a_{1,k}, & a_{1,k+1}, & \ldots, & a_{1,n}, & a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, & a_{i-1,n}, & a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,k-1} \end{vmatrix}.$$

Podobnież, jak poprzednio, rozważając wykonane tu przestawienia po dwie kolumny, znajdziemy, że

$$D_1=(-1)^{(n-k+1)(n-1)}D'.$$

Jak widzimy, w tym wyznaczniku D_1 pierszym elementem jest element $a_{i,k}$, a elementy głównej przekątnej mają tak pierwsze jak i drugie wskaźniki w porządku kołowym.

Z otrzymanych związków między wyznacznikami D, D' i D_1 wypada

$$D_1=(-1)^{(n-i+1)(i-1)+(n-k+1)(k-1)}D.$$

Lecz naprzód

$$(-1)^{n(i+k)-i^2-k^2+2i+2k-2}=(-1)^{n(i+k)-i^2-k^2},$$

a następnie, tak i^2 jak i k^2 są liczbami parzystemi lub nieparzystemi, stosownie do tego, jakiemi są i i k; zatem jeszcze

$$(-1)^{n(i+k)-i^2-k^2}=(-1)^{n(i+k)-(i+k)}=(-1)^{(n-1)(i+k)}.$$

Ostatecznie więc

$$D_1=(-1)^{(n-1)(i+k)}D, \quad \text{czyli} \quad D=(-1)^{(n-1)(i+k)}D_1,$$

to jest

$$\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{i,i}\ldots a_{k,k}\ldots a_{n,n}$$

$$=(-1)^{(n-1)(i+k)}\Sigma\pm a_{i,k}a_{i+1,k+1}\ldots a_{n,k+n-i}a_{1,k+n-i+1}\ldots a_{i-1,k-1};$$

w przypadku zaś, kiedy $k=i$, to $i+k=2i$, liczba $(n-1)(i+k)$ jest parzysta, i

$$\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{i,i}\ldots a_{n,n}=\Sigma\pm a_{i,i}a_{i+1,i+1}\ldots a_{n,n}a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{i-1,i-1}.$$

Jeśli liczba n (to jest stopień wyznacznika) jest nieparzysta, wtedy $n-1$, jak równie i $(n-1)(i+k)$ są liczbami parzystemi, $(-1)^{(n-1)(i+k)}=+1$,

$$D=D_1.$$

Jeśli zaś n jest liczbą parzystą, to $n-1$ jest liczbą nieparzystą, zaś $(n-1)(i+k)$ jest liczbą parzystą lub nieparzystą zależnie od parzystości lub nieparzystości liczby $i+k$; skutkiem czego $(-1)^{(n-1)(i+k)}=(-1)^{i+k}$,

$$D=(-1)^{i+k}D_1.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika tak przestawimy równoległe rzędy, aby pewien element stał się pierwszym elementem głównej przekątnej, a wszystkie elementy głównej przekątnej miały tak pierwsze jak i drugie wskaźniki w porządku kołowym, to, w przypadku wyznacznika stopnia nieparzystego, wyznacznik się nie zmieni; w przypadku zaś, kiedy stopień wyznacznika jest liczbą parzystą, wartość bezwzględna wyznacznika pozostaje niezmienioną, lecz znak zmienia się lub nie, według tego, czy summa wskaźników elementu, wziętego jako pierwszy, jest liczbą parzystą, czyteż nieparzystą.

Tak naprzykład

$$\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,1} \\ a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,1} \\ a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,1} \end{vmatrix}=\Sigma\pm a_{3,1}a_{1,3}a_{2,1};$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ 0, & a_{3,2}, & 0, & 0 \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{3,2}, & 0, & 0, & 0 \\ a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4}, & a_{4,1} \\ a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,1} \\ a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,1} \end{vmatrix},$$

a jeżeli wyznacznik ostatni nazwiemy D_1, to widzimy, że główny jego wyraz jest $+a_{3,2}a_{4,3}a_{1,4}a_{2,1}$ i że $D=-D_1$.

§ 24.

Własności wyznacznika, wypowiedziane w §§ 19, 21, 22 i 23, są szczególnym przypadkiem pewnej ogólniejszej, której wyprowadzeniem się zajmiemy.

Jeśli mamy wyznacznik

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

a w nim zamiast drugich wskaźników weźmiemy jakąkolwiek przemianę n ilości

$$1,\ 2, \ldots, n,$$

naprzykład przemianę

$$\lambda,\ \mu, \ldots, \sigma,$$

to w wyznaczniku [1]

$$D' = \Sigma \pm a_{1,\lambda} a_{2,\mu} \ldots a_{n,\sigma},$$

równie jak i w danym wyznaczniku D, wszystkie wyrazy mają ten sam znak, co wyraz główny, stosownie do tego, czy przemiany, uskutecznione we wskaźnikach, do jednej, czy też do różnych klass należą (§ 8). Będzie więc $D = D'$, lub $D = -D'$, stosownie do tego, czy wyraz główny wyznacznika D′, to jest wyraz $+ a_{1,\lambda} a_{2,\mu} \ldots a_{n,\sigma}$ znajduje się w liczbie wyrazów wyznacznika D ze znakiem + czy też ze znakiem —, czyli stosownie do tego, czy przemiany

$$\lambda,\ \mu, \ldots, \sigma; \qquad 1,\ 2 \ldots n$$

do jednej, czy też do różnych klass należą, tak, że jeżeli przez ε nazwiemy liczbę zmian układu

$$\lambda,\ \mu, \ldots, \sigma,$$

---

[1] Ten wyznacznik otrzymamy z wyznacznika D, jeśli w systemacie jego elementów, kolumnę λ-ą zrobimy pierwszą, kolumnę μ-ą zrobimy drugą i t. d., a jako ostatnią weźmiemy kolumnę początkowo σ-ą.

to (§ 6) wyraz główny wyznacznika D′ znajduje się pośród wyrazów wyznacznika D jako

$$(-1)^\varepsilon a_{1,\lambda} a_{2,\mu} \dots a_{n,\sigma},$$

a tem samem

$$D = (-1)^\varepsilon D'.$$

Również, jeśli w wyznaczniku $D' = \Sigma\, a_{1,\lambda} a_{2,\mu} \dots a_{n,\sigma}$ zamiast pierwszych wskaźników weźmiemy jakąkolwiek ich przemianę, naprzykład

$$l,\ m, \dots, s,$$

której odpowiada liczba zmian e, to wyznacznik

$$D_1 = \Sigma \pm a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \dots a_{s,\sigma},$$

zadosyć czyni albo $D_1 = D'$ albo też $D_1 = -D'$, stosownie do tego, czy przemiany

$$l,\ m, \dots, s; \qquad 1.\ 2, \dots, n$$

należą do jednej czy też do różnych klass, tak, że

$$D' = (-1)^e D_1.$$

Z otrzymauych dwu związków między wyznacznikami D, D′ i D_1 wypada, że

$$D = (-1)^{\varepsilon + e} D_1.$$

Jeśli liczby ε i e są jednocześnie obie parzyste lub obie nieparzyste, to w każdym razie $\varepsilon + e$ jest liczbą parzystą i $D = D_1$; jeśli zaś z dwu liczb ε i e jedna jest parzystą, druga zaś nieparzystą, to $\varepsilon + e$ jest liczbą nieparzystą i $D = -D_1$. Ostatecznie więc

Jeśli w systemacie elementów wyznacznika

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

tak poprzestawiamy rzędy równoległe (1), *że otrzymamy wyznacznik*

$$\Sigma \pm a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \ldots a_{s,\sigma},$$

to

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = + \Sigma a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \ldots a_{s,\sigma},$$

lub

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = - \Sigma \pm a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \ldots a_{s,\sigma},$$

stosownie do tego, czy liczba wszystkich zmian, odpowiadających układom tak pierwszych jak i drugich wskaźników wyrazu głównego wyznacznika

$$\Sigma \pm a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \ldots a_{s,\sigma}$$

jest parzystą, lub nieparzystą; albo inaczej: stosownie do tego czy układ pierwszych i układ drugich wskaźników tego wyrazu, to jest układy

$$l,\ m, \ldots, s; \qquad \lambda,\ \mu, \ldots, \sigma$$

do jednej, czy też do różnych klass należą.

Z tego wypada, w szczególnym przypadku, że zawsze

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = \Sigma \pm a_{\lambda,\lambda} a_{\mu,\mu} \ldots a_{\sigma,\sigma}$$

to jest *wyznacznik nie zmienia się, jeśli w systemacie jego elementów tak między sobą poprzestawiamy kolumny, jakoteż wiersze,*

---

(1) To jest wiersze lub kołumny, albo też wiersze i kolumny jednocześnie. Można to inaczej tak wypowiedzieć: *Jeśli w wyznaczniku* $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ *pierwsze lub drugie, alboteż jednocześnie pierwsze i drugie wskaźniki zastąpimy jakiemikolwiek ich układami, tak...*

że główne elementy danego wyznacznika pozostaną w głównej przekątnej, choć zmieni się porządek ich następstwa. Naprzykład

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ e, & f, & g, & h \\ i, & j, & k, & l \\ m, & n, & o, & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k, & j, & l, & i \\ g, & f, & h, & e \\ o, & n, & p, & m \\ c, & b, & d, & a \end{vmatrix}.$$

Ponieważ w wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , & \ldots & , & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & , & \ldots & , & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

wyraz utworzony przez elementy niegłównej przekątnej (§ 12, 16°) jest

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n}a_{2,n-1}\ldots a_{n-1,2}a_{n,1},$$

to

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \pm a_{1,n}a_{2,n-1}\ldots a_{n,1},$$

czyli

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n-1}, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n-1}, & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n-1}, & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1,n}, & a_{1,n-1}, \ldots, & a_{1,2}, & a_{1,1} \\ a_{2,n}, & a_{2,n-1}, \ldots, & a_{2,2}, & a_{2,1} \\ . & . & . & . \\ a_{n,n}, & a_{n,n-1}, \ldots, & a_{n,2}, & a_{n,1} \end{vmatrix}$$

to jest : jeżeli tak przestawimy kolumny, że elementy drugiej przekątnej utworzą główną przekątną, to wyznacznik nie zmieni się, jeżeli stopień wyznacznika jest postaci $n=4p$, lub $n=4p+1$, zmienia zaś znak, jeśli $n=4p+2$, lub $n=4p+3$.

Zadanie. — Objaśnić, dla czego

$$\begin{vmatrix} a_{l,\lambda}, & a_{l,\mu}, & \ldots, & a_{l,\sigma} \\ a_{m,\lambda}, & a_{m,\mu}, & \ldots, & a_{m,\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s,\lambda}, & a_{s,\mu}, & \ldots, & a_{s,\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\lambda,l}, & a_{\lambda,m}, & \ldots, & a_{\lambda,s} \\ a_{\mu,l}, & a_{\mu,m}, & \ldots, & a_{\mu,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\sigma,l}, & a_{\sigma,m}, & \ldots, & a_{\sigma,s} \end{vmatrix}.$$

ROZDZIAŁ TRZECI.

ROZKŁAD WYZNACZNIKA WEDŁUG ELEMENTÓW RZĘDU. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI

§ 25.

Ponieważ wyznacznik jest funkcyą jednorodną i linijową elementów jakiegokolwiek rzędu (§ 8), więc w każdym wyrazie wyznacznika

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1}, & \ldots, & a_{i,k}, & \ldots, & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

znajduje się jeden tylko element pewnego np. i-ego wiersza.

Oddzielmy w rozwinięciu wyznacznika wszystkie wyrazy, zawierające z i-ego wiersza element $a_{i,k}$. Ujawniając spólny tym wyrazom czynnik $a_{i,k}$, możemy ich zebranie (aggregat, summę algebraiczną) oznaczyć przez

$$+ a_{i,k} A_{i,k},$$

gdzie więc $A_{i,k}$ jest *spółczynnikiem* elementu $a_{i,k}$, przez który mnożąc ten element otrzymujemy zbiór wszystkich tych (tylko) wyrazów wyznacznika D, w które wchodzi element $a_{i,k}$. — A że, jakeśmy tylko co powiedzieli, wszystkie wyrazy danego wyznacznika mają po jednym czynniku zpośród elementów

$$a_{i,1},\quad a_{i,2}, \ . \ . \ . \ , a_{i,k}, \ . \ . \ . \ , a_{i,n},$$

to każdy wyraz danego wyznacznika wchodzi w jedno (tylko) z wyrażeń

$$a_{i,1}A_{i,1},\quad a_{i,2}A_{i,2}, \ . \ . \ . \ , a_{i,k}A_{i,k}, \ . \ . \ . \ , a_{i,n}A_{i,n}.$$

Ponieważ każdy wyraz wyznacznika D jest częścią składową jednego z tych wyrażeń, a żaden wyraz nie należy jednocześnie do dwóch z nich, więc zebranie wstystkich wyrazów wyznacznika D, to jest sam wyznacznik D, można tak przedstawić:

$$D = + a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \ldots + a_{i,k}A_{i,k} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n}.$$

Idzie teraz o bliższe wyznaczenie spółczynników

$$A_{i,1},\quad A_{i,2}, \ . \ . \ . \ , A_{i,k}, \ . \ . \ . \ , A_{i,n}.$$

Jeśli chcemy wyznaczyć wogóle ilość $A_{i,k}$, to w wyznaczniku D zróbmy naprzód element $a_{i,k}$ pierwszym elementem głównej przekątnej. Jak wiemy (§ 22),

$$D = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,1} & ,\ldots, & a_{i,k-1}, & a_{i,k+1} & ,\ldots, & a_{i,n} \\ a_{1,k}, & a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,k}, & a_{i-1,1} & ,\ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1} & ,\ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i-1,k}, & a_{i+1,1} & ,\ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1} & ,\ldots, & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k}, & a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1} & ,\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{i+k} \Sigma \pm a_{i,k}a_{1,1}\ldots a_{i-1,i-1}a_{i+1,i}\ldots a_{k,k-1}a_{k+1,k+1}\ldots a_{n,n}.$$

Zgodnie z określeniem wyznacznika, znak Σ rozciąga się na te wszystkie wyrazy, które otrzymamy, jeśli albo zamiast układu tylko pierwszych, albo zamiast układu tylko drugich wskaźników podstawimy wszystkie ich przemiany.

Jeśli zaś chcemy z wyznacznika D wydzielić wszystkie te wyrazy, w które wchodzi element $a_{i,k}$, to jest część jego wyrazów, ujętych w wyrażenie $a_{i,k}A_{i,k}$, to trzeba będzie, pozostawiając niezmiennemi wskaźniki elementu $a_{i,k}$, zmieniać tylko wskaźniki (albo same pierwsze, albo same drugie) pozostałych elementów, we wszelki możliwy sposób. Gdy to tylko uskutecznimy, to w tych wszystkich wyrazach będzie czynnik spólny $a_{i,k}$, który możemy postawić przed znakiem Σ, także

$$a_{i,k}A_{i,k} = (-1)^{i+k} a_{i,k} \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i} \ldots$$
$$\ldots a_{k,k-1} a_{k+1,k+1} \ldots a_{n,n},$$

gdzie znak Σ odnosi się do wszystkich wyrazów, które otrzymamy z wypisanego, jeśli tylko zamiast układu pierwszych, lub zamiast układu drugich wskaźników elementów podstawimy wszystkie możliwe ich przemiany. Jest więc wyrażenie, oznaczone przez tę summę, wyznacznikiem $(n-1)$-ego stopnia (§ 8), w którym nie ma pierwszego wskaźnika i i nie ma drugiego wskaźnika k, to jest nie wchodzą w ten wyznacznik elementy i-ego wiersza i elementy k-ej kolumny systematu elementów danego wyznacznika D. — Z ostatniej równości wypada

$$A_{i,k} = (-1)^{i+k} \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i} \ldots a_{k,k-1} a_{k+1,k+1} \ldots a_{n,n};$$

właściwie to wyrażenie odnosi się do przypadku $i < k$ (§ 22). Jeśli zaś $i > k$, to

$$A_{i,k} = (-1)^{i+k} \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{k-1,k-1} a_{k,k+1} \ldots a_{i-1,i} a_{i+1,i+1} \ldots a_{n,n}.$$

Jeśli zaś $i = k$, wtedy $(-1)^{2i} = +1$, i

$$A_{i,i} = +\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i+1} \ldots a_{n,n}.$$

Czyli, jest wogóle

$$A_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1} & ,\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$A_{i,i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,i-1}, & a_{1,i+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,i-1}, & a_{i-1,i+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,i-1}, & a_{i+1,i+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,i-1}, & a_{n,i+1} & ,\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Widzimy więc, że *w rozłożeniu wyznacznika według elementów* i-*ego wiersza* [1],

$$D = a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2}, + \ldots + a_{i,k} A_{i,k} + \ldots + a_{i,n} A_{i,n},$$

---

[1] Rozkład wyznacznika według elementów rzędu, w którym to rozkładzie spółczynniki są wyrażone przez wyznaczniki, zaznaczony już jest przez VANDERMOND'a (l. c., str. 525).

spółczynniki

$$A_{i,1}, \quad A_{i,2}, \ . \ . \ . \ , A_{i,k}, \ . \ . \ . \ , A_{i,n},$$

jak również (§ 18) *w rozłożeniu według elementów* k-*ej kolumny*,

$$D = a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \ldots + a_{i,k}A_{i,k} + \ldots + a_{n,k}A_{n,k},$$

spółczynniki

$$A_{1,k}, \quad A_{2,k}, \ . \ . \ . \ , A_{i,k}, \ . \ . \ . \ , A_{n,k}$$

są wyznacznikami, powstałemi z wyznacznika D *przez opuszczenie w systemacie jego elementów jednego wiersza i jednej kolumny, poprzedzonemi znakiem + lub —, stosownie do parzystości lub nieparzystości liczby, utworzonej przez summę wskaźników odpowiednich elementów danego wyznacznika.*

Te spółczynniki, to jest wyznaczniki $(n-1)$ego stopnia, łącznie z właściwemi im znakami, nazwiemy *ilościami dołączonemi do elementów wyznacznika danego* (¹). Ponieważ każda z tych ilości dołączonych jest wyznacznikiem utworzonym przez $(n-1)^2$ elementów danego wyznacznika, to możemy powiedzieć (§ 8), że, wogóle, każda *ilość dołączona jest wyrażeniem całkowitem względem elementów danego wyznacznika.*

Wypisując różne rozkłady danego wyznacznika D według elementów każdego z jego wierszy, lub też według elementów każdej z jego kolumn, spostrzeżemy, że istnieje n^2 ilości

$$\begin{array}{c} A_{1,1}, \ . \ . \ . \ , A_{1,n}, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ A_{n,1}, \ . \ . \ . \ , A_{n,n}, \end{array}$$

(¹) Cauchy (*Mém. Sur les Fonc...*, str. 65) : «la quantité adjointe à $a_{\mu,\mu}$ sera $b_{\mu,\mu}$ et la quantité adjointe à $a_{\mu,\nu}$ sera $b_{\mu,\nu}$» ($b_{\mu,\mu}$, $b_{\mu,\nu}$ odpowiadają naszym $A_{\mu,\mu}$, $A_{\mu,\nu}$).

dołączonych do n^2 elementów danego wyznacznika n-ego stopnia. One wszystkie tworzą *systemat dołączony* [1] *do systsmatu elementów danego wyznacznika*, to jest do systematu

$$\begin{array}{c} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}. \end{array}$$

(Te ilości i ten systemat są szczególnym przypadkiem ilości i systematów, których własności ogólne badać będziemy później [2]. Teraz zaś podamy kilka zasadniczych własności ilośc i dołączonych do elementów danego wyznacznika.)

Jako przykład rozkładu wyznacznika według elementów rzędu, weźmiemy np. wyznacznik trzeciego stopnia, który rozłożymy według elementów drugiej kolumny :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} \\ a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1}, a_{2,3} \\ a_{3,1}, a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,3} \\ a_{3,1}, a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,2}.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,3} \\ a_{2,1}, a_{2,3} \end{vmatrix};$$

czyli

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} = -a_{1,2}\Sigma \pm a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,2}\Sigma \pm a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,2}\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,3}.$$

---

(1) Cauchy (Ibidem) : «le système ($b_{n,1}$) adjoint à système ($a_{n,1}$) »,
(2) Rozdziały Szósty i Siódmy.

Podobnież, rozkładając np. wyznacznik czwartego stopnia według elementów trzeciego wiersza, mamy

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} = + a_{3,1}\Sigma \pm a_{1,2}a_{2,3}a_{4,4} - a_{3,2}\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,3}a_{4,4}$$

$$+ a_{3,3}\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,4}\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{4,3}.$$

. . . .

§ 26.

Gdy zauważymy, że wyznacznikowi

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} \ . \ . \ . \ a_{i,i} \ . \ . \ . \ a_{n,n}$$

można nadać postać (§ 23)

$$D = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,k+1} & ,\ldots, a_{i,n}, & a_{i,1} & ,\ldots, a_{i,k-1} \\ a_{i+1,k}, & a_{i+1,k+1} & ,\ldots, a_{i+1,n}, & a_{i+1,1} & ,\ldots, a_{i+1,k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k}, & a_{n,k+1} & ,\ldots, a_{n,n}, & a_{n,1} & ,\ldots, a_{n,k-1} \\ a_{1,k}, & a_{1,k+1} & ,\ldots, a_{1,n}, & a_{1,1} & ,\ldots, a_{1,k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,k}, & a_{i-1,k+1} & ,\ldots, a_{i-1,n}, & a_{i-1,1} & ,\ldots, a_{i-1,k-1} \end{vmatrix}$$

to, wydzielając zeń (podobnie, jak w § poprzedzającym) wyrazy, przedstawione przez $a_{i,k}A_{i,k}$, znajdziemy

$$a_{i,k}A_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} a_{i,k}\Sigma \pm a_{i+1,k+1}a_{i+2,k+2}\cdots$$

$$a_{n,k+n-i}a_{1,k+n-i+1}\cdots a_{i-1,k-1},$$

zkąd

$$A_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \Sigma \pm a_{i+1,k+1}\cdots a_{n,k+n-i}a_{1,k+n-i+1}\cdots a_{i-1,k-1},$$

w przypadku zaś $i=k$, jest $i+k=2i$, i

$$A_{i,i} = \pm a_{i+1,i+1} \dots a_{n,n} a_{1,1} \dots a_{i-1,i-1},$$

czyli

$$A_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1}, \dots, & a_{i+1,n}, & a_{i+1,1}, \dots, & a_{i+1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1}, \dots, & a_{n,n}, & a_{n,1}, \dots, & a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1}, \dots, & a_{1,n}, & a_{1,1}, \dots, & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,k+1}, \dots, & a_{i-1,n}, & a_{i-1,1}, \dots, & a_{i-1,k-1} \end{vmatrix},$$

$$A_{i,i} = \begin{vmatrix} a_{i+1,i+1}, \dots, & a_{i+1,n}, & a_{i+1,1}, \dots, & a_{i+1,i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,i+1}, \dots, & a_{n,n}, & a_{n,1}, \dots, & a_{n,i-1} \\ a_{1,i+1}, \dots, & a_{1,n}, & a_{1,1}, \dots, & a_{1,i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,i+1}, \dots, & a_{i-1,n}, & a_{i-1,1}, \dots, & a_{i-1,i-1} \end{vmatrix}.$$

Widzimy z tego, że w tych postaciach wyznaczników ilości dołączonych tak pierwsze, jak i drugie wskaźniki elementów głównej przekątnej, wraz ze wskaźnikami odpowiedniego tym ilościom elementu $(a_{i,k})$, następują po sobie w porządku kołowym.

Z powyższego wyrażenia dla $A_{i,k}$ widzimy jeszcze, że, gdy liczba n, stopień danego wyznacznika, jest liczbą nieparzystą, to $(-1)^{(n-1)(i+k)} = +1$, to jest wszystkie takie postacie wyznaczników przedstawiają dokładnie (wraz ze znakiem) ilości dołączone do elementów. Jeśli zaś liczba n jest parzystą, to

$$(-1)^{(n-1)(i+k)} = (-1)^{(i+k)},$$

to jest wyznaczniki te przedstawią ilość dołączoną, jeśli będą poprzedzone znakiem $+$ lub $-$, stosownie do parzystości lub nieparzystości summy wskaźników odpowiedniego elementu.

Jeśli rozkładając wyznacznik według elementów rzędu, elementom głównej przekątnej każdego wyznacznika ilości dołączonej nadamy takie pierwsze i drugie wskaźniki, aby, wraz ze wskaźnikami elementu, którego ta ilość jest spółczynnikiem, tworzyły (tak jedne, jak drugie) następstwa kołowe, to, przy nieparzystym stopniu danego wyznacznika, wszystkie takie wyznaczniki, wzięte ze znakiem $+$, *przedstawią dokładnie ilości dołączone; przy parzystym zaś stopniu danego wyznacznika, aby wyznaczniki takie ściśle przedstawiały ilości dołączone, należy je poprzedzić znakiem* $+$ *lub* $-$, *stosownie do tego, czy summa obu wskaźników elementu danego wyznacznika, którego ta ilość jest spółczynnikiem, jest parzysta lub nieparzysta* (¹).

Np. (§ 25)

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} = +a_{1,2}\Sigma \pm a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,2}\Sigma \pm a_{3,3}a_{1,1} + a_{2,3}\Sigma \pm a_{3,1}a_{1,2};$$

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} = +a_{3,1}\Sigma \pm a_{4,2}a_{1,3}a_{2,4} - a_{3,2}\Sigma \pm a_{4,3}a_{1,4}a_{2,1}$$
$$+ a_{3,3}\Sigma \pm a_{4,4}a_{1,1}a_{2,2} - a_{3,4}\Sigma \pm a_{4,1}a_{1,2}a_{2,3}.$$

(¹) Baltzer (l. c., trzecie wydanie, str. 12).

§ 27.

Wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}, & a_{i,2}, & \dots, & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1}, & a_{j,2}, & \dots, & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

rozłóżmy według elementów i-ego wiersza:

$$D = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}. \qquad (1)$$

Jeśli zaś utworzymy summę

$$a_{j,1}A_{i,1} + a_{j,2}A_{i,2} + \dots + a_{j,n}A_{i,n} \qquad (2)$$

i porównamy ją z poprzedzającą (1), to widzimy, że summa (2) przedstawia nam to, co otrzymamy z wyznacznika D, jeśli w nim weźmiemy $a_{j,1}$ zamiast $a_{i,1}$, zaś $a_{j,2}$ zamiast $a_{i,2}$, ..., nakoniec $a_{j,n}$ zamiast $a_{i,n}$. Tak, że ta summa (2) przedstawia wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1}, & a_{j,2}, & \dots, & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1}, & a_{j,2}, & \dots, & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

który, jak widzimy, z powodu, że ma dwa rzędy równoległe utworzone przez też same odpowiednie elementy (§ 20), jest równy zeru. Jest więc

$$a_{j,1}A_{i,1}+a_{j,2}A_{i,2}+\ .\ .\ .\ +a_{j,n}A_{i,n}=0.$$

Jeżeli $A_{i,k}$ *jest spółczynnikiem elementu* $a_{i,k}$ *w wyrażeniu danego wyznacznika* D *stopnia* n-*go, tak, że* $a_{i,k}A_{ik}$ *przedstawia zebranie wszystkich wyrazów wyznacznika* D, *w które wchodzi element* $a_{i,k}$,, *to każda z summ* (§ 18)

$$a_{i,1}A_{j,1}+a_{i,2}A_{j,2}+\ .\ .\ .\ +a_{i,n}A_{j,n} \qquad (3)$$

$$a_{1,i}A_{1,j}+a_{2,i}A_{2,j}+\ .\ .\ .\ +a_{n,i}A_{n,j} \qquad (4)$$

$=$ D, *lub* $=0$, *stosownie do tego, czy* j *jest tąż samą liczbą co* i, *czyteż* j *jest różne od* i.

Skutkiem tego między n^2 ilościami dołączonemi do elementów danego wyznacznika D stopnia n-ego (§ 25) i elementami tego wyznacznika mamy n^2 następujących związków ([1]) typu (3)

$$a_{1,1}A_{1,1}+\ldots+a_{1,n}A_{1,n}=D\,;\ldots;\,a_{i,1}A_{1,1}+\ldots$$
$$+a_{i,n}A_{1,n}=0\,;\ldots;\,a_{n,1}A_{1,1}+\ldots+a_{n,n}A_{1,n}=0;$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$
$$a_{1,1}A_{i,1}+\ldots+a_{1,n}A_{i,n}=0\,;\ldots;\,a_{i,1}A_{i,1}+\ldots$$
$$+a_{i,n}A_{i,n}=D\,;\ldots;\,a_{n,1}A_{i,1}+\ldots+a_{n,n}A_{i,n}=0;$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$
$$a_{1,1}A_{n,1}+\ldots+a_{1,n}A_{n,n}=0\,;\ldots;\,a_{n,1}A_{i,1}+\ldots$$
$$+a_{n,n}A_{i,n}=0\,;\ldots;\,a_{n,1}A_{n,1}+\ldots+a_{n,n}A_{n,n}=D;$$

a także podobnych n^2 związków typu (4).

([1]) Te związki dla wyznacznika trzeciego stopnia pierwszy zaznaczy Lagrange w *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les piramides triangulaires.* (*Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin* za 1773 r., strona 151). Ogólnie te n^2 związków wyprowadził Cauchy w *Mém. Sur les Fonctions..* str. 66.

§ 28.

eśli w wyznaczniku

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\
a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n}
\end{vmatrix},
$$

wszystkie elementy pewnego wiersza lub pewnej kolumny przedstawiają się w postaci summy jednakowej liczby składników, naprzykład :

$$a_{1,k}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p,$$

$$a_{2,k}=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

$$a_{n,k}=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p,$$

to, zastępując w wyrażeniu (§ 25)

$$D=a_{1,k}A_{1,k}+a_{2,k}+\ldots+a_{n,k}A_{n,k}$$

ilości $a_{1,k}, a_{2,k},\ldots,a_{n,k}$ przez powyższe ich wyrażenia, mieć będziemy

$$D=(\alpha_1+\ldots+\alpha_p)A_{1,k}+(\beta_1+\ldots+\beta_p)A_{2,k}+\ldots+(\nu_1+\ldots+\nu_p)A_{n,k}$$

$$
\begin{aligned}
D= &\ \ \alpha_1A_{1,k}+\beta_1A_{2,k}+\ldots+\nu_1A_{n,k} \\
&+\alpha_2A_{1,k}+\beta_2A_{2,k}+\ldots+\nu_2A_{n,k} \\
&+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+\alpha_pA_{1,k}+\beta_pA_{2,k}+\ldots+\nu_pA_{n,k}.
\end{aligned}
$$

Porównywając każdą z tych w oddzielnych wierszach wypisanych summ z summą

$$a_{1,k}A_{1,k}+a_{2,k}A_{2,k}+\ldots+a_{n,k}A_{n,k}=D,$$

widzimy, że każda oznacza to, co otrzymamy z wyznacznika D, jeśli weźmiemy (ogólnie oznaczając) α_λ zamiast $a_{1,k}$, β_λ zamiast $a_{2,k},\ldots,\nu_\lambda$ zamiast $a_{n,k}$, t. j., jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika D zastąpimy kolumnę elementów

$$\begin{array}{ccc} a_{1,k} & \text{przez kolumnę ilości} & \alpha_\lambda \\ a_{2,k} & & \beta_\lambda \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n,k} & & \nu_\lambda. \end{array}$$

Summa zaś wyznaczników takich systematów elementów, przy wszystkich wartościach 1, 2,...,p dla λ, przedstawi, według przedostatniej równości, dany nasz wyznacznik D. Jest więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k-1}, & \alpha_1+\ldots+\alpha_p, & a_{1,k+1},\ldots,a_{1,n} \\ a_{2,1},\ldots,a_{2,k-1}, & \beta_1+\ldots+\beta_p, & a_{2,k+1},\ldots,a_{2,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k-1}, & \nu_1+\ldots+\nu_p, & a_{n,k+1},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum_{\lambda}^{1,\ldots,p}\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k-1}, & \alpha_\lambda, & a_{1,k+1},\ldots,a_{1,n} \\ a_{2,1},\ldots,a_{2,k-1}, & \beta_\lambda, & a_{2,k+1},\ldots,a_{2,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k-1}, & \nu_\lambda, & a_{n,k+1},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

gdzie znak Σ odnosi się do wszystkich p wartości 1, 2,...,p, które podstawiając zamiast λ, otrzymamy wyrażenie danego wyznacznika jako summy p wyznaczników. Np.

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 7 \\ 3, & 2, & 4 \\ 4, & 5, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1+4, & 4-3+1, & 6-0+1 \\ 3, & 2, & 4 \\ 4, & 5, & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 4, & 6 \\ 3, & 2, & 4 \\ 4, & 5, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1, & -3, & 0 \\ 3, & 2, & 4 \\ 4, & 5, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4, & 1, & 1 \\ 3, & 2, & 4 \\ 4, & 5, & 6 \end{vmatrix}.$$

Gdyby, prócz tego, wszystkie elementy drugiego jeszcze rzędu równoległego, np. l-ej kolumny danego wyznacznika, przedstawione były jako summy np. q składników,

$$\begin{aligned} a_{1,l} &= \alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_q, \\ a_{2,l} &= \beta'_1 + \beta'_2 + \ldots + \beta'_q, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,l} &= \nu'_1 + \nu'_2 + \ldots + \nu'_q, \end{aligned}$$

to, na mocy powyższego, mieć będziemy kolejno

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_p, \ldots, \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_q, \ldots, a_{1,1} \\ a_{2,1}, \ldots, \beta_1 + \ldots + \beta_p, \ldots, \beta'_1 + \ldots + \beta'_q, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, \nu_1 + \ldots + \nu_p, \ldots, \nu'_1 + \ldots + \nu'_q, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda}^{1,\ldots,p} \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots, \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_q, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, \ldots, \beta_\lambda, \ldots, \beta'_1 + \ldots + \beta'_q, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, \nu_\lambda, \ldots, \nu'_1 + \ldots + \nu'_q, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{\lambda}^{1,\dots,p}\sum_{\mu}^{1,\dots,q}\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, \alpha_\lambda, \dots, \alpha'_\mu, \dots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, \dots, \beta_\lambda, \dots, \beta'_\mu, \dots, a_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, \dots, \nu_\lambda, \dots, \nu'_\mu, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix},$$

gdzie przy każdej $1, 2,\dots,p$ wartości dla λ, należy dla μ dać każdą z wartości $1, 2,\dots,q$; tem samem dany wyznacznik będzie wyrażony jako summa pq wyznaczników. Wogóle [1].

Jeśli w danym wyznaczniku wszystkie elementy pewnego rzędu (wiersza lub kolumny) przedstawiają się jako summy p *składników; elementy pewnego innego rzędu równoległego jako summy składników; elementy innego jeszcze równoległego względem poprzednich rzędu, jako summy* r *składników, i t. d.; to wyznacznik dany może być przedstawiony, jako summa* pqr... *wyznaczników, w których te summy będą zastąpione odpowiedniemi ich oddzielnemi składnikami.*

W szczególnym przypadku, gdyby wszystkie elementy danego wyznacznika stopnia n-ego przedstawiały się jako summy m składników, to dany wyznacznik możnaby przedstawić jako summę m^n wyznaczników.

§ 29.

Jeśli w danym wyznaczniku wszystkie elementy pewnego wiersza lub pewnej kolumny mają czynnik spólny, np.

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1},\dots,a_{1,k},\dots,a_{1,n} \\ a_{2,1},\dots,a_{2,k},\dots,a_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1},\dots,a_{n,k},\dots,a_{n,n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{1,1},\dots,a_{1,k-1}, \rho\alpha, a_{1,k+1},\dots,a_{1,n} \\ a_{2,1},\dots,a_{2,k-1}, \rho\beta, a_{2,k+1},\dots,a_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1},\dots,a_{n,k-1}, \rho\nu, a_{n,k+1},\dots,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

---

[1] CAUCHY w *Mém. S. l. F.* (str. 104, 105) przedstawia wyznacznik p-ego stopnia, którego elementy są summami n składników, przez summę wyznaczników.

to rozkładając ten wyznacznik według elementów k-ej kolumny, mamy

$$\begin{aligned} D &= a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \ldots + a_{n,k}A_{n,k} \\ &= \rho\alpha A_{1,k} + \rho\beta A_{2,k} + \ldots + \rho\nu A_{n,k} \\ &= \rho(\alpha A_{1,k} + \beta A_{2,k} + \ldots + \nu A_{n,k}). \end{aligned}$$

Nazywając

$$\alpha A_{1,k} + \beta A_{2,k} + \ldots + \nu A_{d,k} = D',$$

mamy

$$D = \rho D'.$$

D' zaś tem się różni od D, że trzeba wziąć α zamiast $a_{1,k}$, β zamiast $a_{2,k}, \ldots, \nu$ zamiast $a_{n,k}$, to jest : z wyznacznika D otrzymamy wyznacznik D′, jeśli w systemacie jego elementów zamiast k-ej kolumny postawimy kolumnę ilości

$$\alpha, \beta, \ldots, \nu,$$

Jest więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, \rho\alpha, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1} \ldots, \rho\beta, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, \rho\nu, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, \alpha, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, \ldots, \beta, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, \nu, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Jeśli w wyznaczniku wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny mają czynnik spólny, to można, wydzieliwszy ten czynnik z owych elementów, postawić go jako czynnik wyznacznika.

Naprzykład :

$$\begin{vmatrix} l\lambda a_1, & l\mu b_1, & l\nu c_1 \\ \frac{\lambda a_2}{m}, & \frac{\mu b_2}{m}, & \frac{\nu c_2}{m} \\ n\lambda a_3, & n\mu b_3, & n\nu c_3 \end{vmatrix} = \frac{ln\lambda\mu\nu}{m} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 30.

Jeśli w systemacie elementów wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,l}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,l}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

wszystkie elementy jednego rzędu są proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego

$$a_{1,l} : a_{1,k} = a_{2,l} : a_{2,k} = \ldots = a_{n,l} : a_{n,k} = \sigma,$$

to (§§ 29, 20)

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & \sigma a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & \sigma a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & \sigma a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sigma \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sigma . 0 = 0.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika wszystkie elementy pewnego rzędu są proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego, to wyznacznik równa się zeru.

Np. (§ 9, 19°)

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & x^2 \\ x, & x^2, & x^3 \\ x^2, & x^3, & x^4 \end{vmatrix} = x . x^2 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x, & x, & x \\ x^2, & x^2, & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3, & 1, & 2, & 0 \\ 84, & 36, & 20, & 60 \\ 4, & 1, & 7, & 3 \\ 21, & 9, & 5, & 15 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3, & 1, & 2, & 0 \\ 21, & 9, & 5, & 15 \\ 4, & 1, & 7, & 3 \\ 21, & 9, & 5, & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Również, *jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika wszystkie elementy pewnego rzędu są równe summie odpowiednich elementów dwu lub więcej rzędów równoległych, pomnożonych przez pewien czynnik* (*ten sam dla elementów oddzielnego rzędu*), *to wynacznik równa się zeru.*

Np., jeśli dany wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,k}, \ldots, a_{1,l}, \ldots, \sigma a_{1,2} - a_{1,k} + \tau a_{1,l}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, \ldots, a_{2,k}, \ldots, a_{2,l}, \ldots, \sigma a_{2,2} - a_{2,k} + \tau a_{2,l}, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,k}, \ldots, a_{n,l}, \ldots, \sigma a_{n,2} - a_{n,k} + \tau a_{n,l}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix},$$

to rozkładając go na summę wyznaczników (§ 28), spostrzeżemy, że każdy ze składników jest zerem.

§ 31.

Jeśli do wszystkich elementów pewnego wiersza lub pewnej kolumny systematu elementów danego wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,l}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,l}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & & & & & & \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,l}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

dodamy odpowiednie elementy jednego z rzędów równoległych, pomnożone przez tęż samą ilość, to otrzymamy (§§ 28, 30)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,l}+\tau a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,l}+\tau a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,l}+\tau a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,l}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,l}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,l}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$+\tau\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,k}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}=D.$$

Wyznacznik się nie zmienia, jeśli do wszystkich elementow jakiegokolwiek rzędu dodamy odpowiednie elementy rzędu równoległego, pomnożone przez tę samą ilość ([1]).

Uogólniając to twierdzenie, możemy powiedzieć:

Wyznacznik się nie zmienia, jeśli do wszystkich elementów jakiegokolmiek rzędu dodamy odpowiednie elementy jednego lub kilku rzędów równoległych, pomnożone przez pewne czynniki, też same dla wszystkich elementów oddzielnego rzędu.

([2]) Jacobi. *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum.* (Journal Crelle'a, tom XXII, str. 371.)

ZADANIA. — Objaśnić dla czego : 1°)

$$\begin{vmatrix} a-m+\frac{e}{h}(q-d), & b+\frac{f}{a}-n, & c+\frac{g}{a}-p, & d+\frac{h}{a}-q \\ 0 \quad , & f \quad , & g \quad , & h \\ i-\frac{el}{h} \quad , & fr+j \; , & gr+k \quad , & hr+l \\ m-\frac{eq}{h} \quad , & n \quad , & p \quad , & q \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ e, & f, & g, & h \\ i, & j, & k, & l \\ m, & n, & p, & q \end{vmatrix};$$

2°) jeśli

$$a_{1,1}\xi + a_{1,2}\eta + a_{1,3}\zeta = \alpha_1,$$
$$a_{2,1}\xi + a_{2,2}\eta + a_{2,3}\zeta = \alpha_2,$$
$$a_{3,1}\xi + a_{3,2}\eta + a_{3,3}\zeta = \alpha_3,$$

to

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} . \xi = \begin{vmatrix} \alpha_1, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ \alpha_2, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ \alpha_3, & a_{3,2}, & a_{3,1} \end{vmatrix}.$$

§ 32.

Jeśli w danym wyznaczniku

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{1,l},\ldots,a_{1,p},\ldots,a_{1,q},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i,1},\ldots,a_{i,k},\ldots,a_{i,l},\ldots,a_{i,p},\ldots,a_{i,q},\ldots,a_{i,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k},\ldots,a_{n,l},\ldots,a_{n,p},\ldots,a_{n,q},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

summy lub różnice odpowiednich elementów dwu par rzędów równoległych są względem siebie proporcyonalne, np.

$$a_{1,k}+a_{1,l}=\sigma(a_{1,p}\pm a_{1,q}),\ldots,a_{i,k}+a_{i,l}=\sigma(a_{i,p}\pm a_{i,q}),\ldots,$$

$$a_{n,k}+a_{l,n}=\sigma(a_{n,p}\pm a_{n,q}),$$

lub

$$a_{1,k}-a_{1,l}=\sigma(a_{1,p}\pm a_{1,q}),\ldots,a_{i,k}-a_{i,l}=\sigma(a_{i,p}\pm a_{i,q}),\ldots,$$

$$a_{n,k}-a_{n,l}=\sigma(a_{n,p}\pm a_{n,q}),$$

to (§§ 31, 29), tak w jednym jak w drugim razie, jest (rozumiejąc z podwójnych znaków we wszystkich elementach oddzielnej kolumny ten sam znak):

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k}\pm a_{1,l},\ldots,a_{1,l},\ldots,a_{1,p}\pm a_{1,q},\ldots,a_{1,q},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{i,1},\ldots,a_{i,k}\pm a_{i,l},\ldots,a_{i,l},\ldots,a_{i,p}\pm a_{i,q},\ldots,a_{i,q},\ldots,a_{i,n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k}\pm a_{n,l},\ldots,a_{n,l},\ldots,a_{n,p}\pm a_{n,q},\ldots,a_{n,q},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}=0.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika summy lub też różnice odpowiednich elementów dwu par rzędów równoległych są proporcyonalne, to wyznacznik równa się zeru (1).

---

(1) Studnička: Wyznacznik jest zerem, jeśli stosunek różnic odpowiednich elementów dwu par jego wierszy lub kolumn jest stały (*Berichte* towarzystwa naukowego w Pradze. 1873, str. 342).

Zadanie. — Dla czego

$$\begin{vmatrix} 8, & 4, & 5, & 5, & -3 \\ 19, & 11, & 4, & 3, & 1 \\ 13, & 9, & 9, & 0, & 2 \\ 20, & 14, & 1, & -1, & 4 \\ 20, & 10, & 7, & 2, & 3 \end{vmatrix} = 0?$$

Jako przykład służyć nam tu także może wyznacznik systematu szeregu kolejnych n^2 liczb naturalnych, w przypadku $n > 2$,

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, \ldots, n \\ n+1, & n+2, & n+3, \ldots, 2n \\ 2n+1, & 2n+2, & 2n+3, \ldots, 3n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (n-1)n+1, & (n-1)n+2, & (n-1)n+3, \ldots, n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

gdyż różnica odpowiednich elementów każdej pary po sobie następujących kolumn jest stałą i równą jedności (różnica zaś odpowiednich elementów każdej pary po sobie następujących wierszy jest n) [1]. Więc np. (§ 9)

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1] W przypadku $n = 2$,

$$\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

§ 33.

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & a_{1,k+1},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{i,1},\ldots,a_{i,k-1}, & a_{i,k}, & a_{i,k+1},\ldots,a_{i,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k-1}, & a_{n,k}, & a_{n,k+1},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego wiersza lub pewnej kolumny są równe zeru, np.

$$a_{i,1}=a_{i,2}=\ldots=a_{i,k-1}=a_{i,k+1}=\ldots=a_{i,n}=0,$$

to, zważywszy, że (§ 25)

$$D=a_{i,1}A_{i,1}+\ldots+a_{i,k-1}A_{i,k-1}+a_{i,k}A_{i,k}+a_{i,k+1}A_{i,k+1}+\ldots$$
$$+a_{i,n}A_{i,n},$$

mamy, w tym przypadku,

$$D=a_{i,k}A_{i,k},$$

czyli (§ 25)

$$D=(-1)^{i+k}a_{i,k}\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,\ldots,a_{1,k-1}, & a_{1,k+1},\ldots\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{i-1,1},\ldots,a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1},\ldots,a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1},\ldots,a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1},\ldots,a_{i+1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots\ldots,a_{n,k-1}, & a_{n,k+1},\ldots\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika, wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego wiersza lub kolumny, są równe zeru, to wyznacznik równa się iloczynowi elementu różnego od zera w tym rzędzie, przez ilość dołączoną do tego elementu, t. j., przez wyznacznik systematu elementów powstałego z systematu elementów danego wyznacznika przez opuszczenie wiersza i kolumny zawierających ten element, który to wyznacznik należy poprzedzić znakiem + lub —, stosownie do parzystości lub nieparzystości summy wskaźników owego elementu. Np

$$\begin{vmatrix} 2, & 0, & 5, & 7 \\ 1, & 0, & 4, & 1 \\ 9, & 8, & 7, & 6 \\ 10, & 0, & 9, & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}.8 \begin{vmatrix} 2, & 5, & 7 \\ 1, & 4, & 1 \\ 10, & 9, & 1 \end{vmatrix}.$$

Gdyby w systemacie elementów wyznacznika, tworzącego ilość dołączoną, wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego wiersza lub kolumny były zerami, to moglibysmy go znowu wyrazić jako iloczyn owego elementu przez odpowiedni wyznacznik. Tak np.

$$\begin{vmatrix} 2, & 0, & 5, & 0, & 7 \\ 2, & 6, & 9, & 4, & 4 \\ 1, & 0, & 4, & 0, & 1 \\ 9, & 8, & 7, & 0, & 6 \\ 10, & 0, & 9, & 0, & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4}.4 \begin{vmatrix} 2, & 0, & 5, & 7 \\ 1, & 0, & 4, & 1 \\ 9, & 8, & 7, & 6 \\ 10, & 0, & 9, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -32 \begin{vmatrix} 2, & 5, & 7 \\ 1, & 4, & 1 \\ 10, & 9, & 1 \end{vmatrix}.$$

Gdyby różny od zera element rzędu, którego wszystkie pozostałe elementy są równe zeru, był elementem głównej przekątnej, to dany wyznacznik mógłby być wyrażony przez wyznacznik, powstały z danego, przez opuszczenie wiersza i kolumny zawierających ten element ([1]), tak, że jeżeli

$$a_{1,2} = a_{1,3} = \ldots = a_{1,n} = 0,$$

to ([2])

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = a_{1,1} \Sigma \pm a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

Gdyby elementy danego wyznacznika były takiemi, że znowu w systemacie elementów wyznacznika $\Sigma \pm a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ wszystkie elementy pewnego, np. drugiego wiersza, za wyłączeniem elementu głównej przekątnej, były zerami,

$$a_{2,3} = a_{2,4} = \ldots = a_{2,n} = 0,$$

to

$$\Sigma \pm a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n} = a_{2,2} \Sigma \pm a_{3,3} \ldots a_{n,n},$$

czyli

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n} = a_{1,1} a_{2,2} \Sigma \pm a_{3,3} \ldots a_{n,n}.$$

Podobnież, gdyby jeszcze

$$a_{3,4} = a_{3,5} = \ldots = a_{3,n} = 0,$$

to

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \Sigma \pm a_{4,4} \ldots a_{n,n}.$$

([1]) Gdyż ten wyznacznik przedstawi ściśle ilość dołączoną (§ 25).

([2]) Jacobi. *De formatione et proprietatibus Determinantium.* (Crelle, *Journal,* tom XXII, str. 292)

Wogóle

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & 0, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & a_{m,3}, \ldots, & a_{m,m}, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{m+1,1}, & a_{m+1,2}, & a_{m+1,3}, \ldots, & a_{m+1,m}, & a_{m+1,m+1}, \ldots, & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, \ldots, & a_{n,m}, & a_{n,m+1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}a_{2,2} \ldots a_{m,m} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1}, & \ldots, & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,m+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

czyli [1]

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{m,m} \ldots a_{n,n} = a_{1,1} \ldots a_{m,m} \Sigma \pm a_{m+1,m+1} \ldots a_{n,n}.$$

Np.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 0, & f, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & g, & h, & \imath, & j \\ 0, & k, & 0, & l, & m \\ 0, & n, & 0, & e, & f \end{vmatrix} = afh \begin{vmatrix} l, & m \\ e, & f \end{vmatrix}.$$

---

(1) JACOBI, ibidem.

Jeśli $m = n$, to

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & 0, \ldots, & 0, & 0, \;.\;.\;.\;, 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{i,1}, & a_{i,2}, \ldots, & a_{i,i}, & 0, \;.\;.\;.\;, 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,i}, & a_{n,i+1}, \ldots, \; a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,2} a_{2,2} \;.\;.\;.\; a_{n,n}.$$

Jeśli w systemacie elementów wyznacznika wszystkie elementy z jednej strony przekątnej są równe zeru, to wyznacznik redukuje się do wyrazu, utworzonego przez elementy przekątnej (¹).

Np. (§ 12, 16°)

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 5 \\ 1, & -5, & 6, & 2, & 7, & -7 \\ 0, & 0, & 5, & 0, & -7, & 4 \\ 0, & -1, & 3, & 0, & 4, & 0 \\ 1, & 7, & 9, & 0, & 6, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{6.5}{2}} 2.3.2.5. -1.1 = +60.$$

(¹) JACOBI, ibidem.

§ 34.

Na mocy własności, w poprzedzającym paragrafie wyprowadzonych, jest odwrotnie

$$\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots, & a_{1,n}, & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n,1},\ldots, & a_{n,n}, & 0 \\ \alpha,\ldots, & \gamma, & 1 \end{vmatrix} = \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots, & a_{1,n}, & a_{1,n+1}, & a_{1,n+2},\ldots, & a_{1,n+m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\ldots, & a_{n,n}, & a_{n,n+1}, & a_{n,n+2},\ldots, & a_{n,n+m} \\ 0,\ldots, & 0, & 1, & a_{n+1,n+2},\ldots, & a_{n+1,n+m} \\ 0,\ldots, & 0, & 0, & 1,\ldots, & a_{n+2,n+m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0,\ldots, & 0, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementy

$$\begin{array}{llll} \alpha,\ldots, & \gamma, & & \\ a_{1,n+1},\ldots, & a_{n,n+1}, & & \\ a_{1,n+2},\ldots, & a_{n,n+2}, & a_{n+1,n+2}, & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,n+m},\ldots, & a_{n,n+m}, & a_{n+1,n+m},\ldots, & a_{n+m-1,n+m}, \end{array}$$

które nie wchodzą w różne od zera wyrazy wyznacznika, mogą otrzymywać jakiekolwiek wartości skończone — mogą więc także być równe zeru. Widzimy zatem, że :

Wyznacznik jakiegokolwiek stopnia może być zawsze przedstawiony jako wyznacznik stopnia wyższego [1].

Np.

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & j, & k, & l, & m \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & g, & 1, & e, & f \\ 0, & k, & 0, & a, & b \\ 0, & i, & 0, & c, & d \end{vmatrix}.$$

---

[1] JACOBI, ibidem.

ROZDZIAŁ CZWARTY

UPRASZCZANIE I OBLICZANIE WYZNACZNIKA

§ 35.

Własności wyznacznika. w poprzedzającym rozdziale wyprowadzone, prócz rozmaitych zastosowań, jakie znajdą przy dalszych badaniach, dają nam możność uprościć dany wyznacznik, obniżyć kolejno jego stopień, oraz obliczyć prędko jego wartość.

Z § 29-ego bezpośrednio wynika :

Nie zmienimy wartości danego wyznacznika, jeśli wszystkie elementy jednego wiersza lub jednej kolumny pomnożymy przez jedną i tę samą ilość, a tak zmieniony wyznacznik jednocześnie pomnożymy przez odwrotność tej ilości.

Nie zmienimy wartości danego wyznacznika, jeśli zmienimy znaki wszystkich elementów jednego wiersza lub jednej kolumny na wprost przeciwne, zmieniając jednocześnie znak wyznacznika.

Np. (§ 12, 5°, 6°)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & +1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & +1, & -1 \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & 1 \\ -1, & +1, & +1, & +1 \\ 1, & 1, & 1, & -1 \end{vmatrix} \text{(1)} = - \begin{vmatrix} -1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}, & -1\frac{1}{20}, & -\frac{3}{10}, & \frac{7}{10} \\ -45, & 157\frac{1}{2}, & 90, & -30 \\ 1\frac{1}{6}, & -\frac{7}{12}, & -\frac{1}{2}, & \frac{5}{6} \\ -3, & 28, & 9, & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \times -15 \times \frac{1}{6} \times -1 \begin{vmatrix} 6, & -\frac{21}{2}, & -3, & 7 \\ +3, & -\frac{21}{2}, & -6, & +2 \\ 7, & -\frac{7}{2}, & -3, & 5 \\ +3, & -28, & -9, & +4 \end{vmatrix}$$

---

(1) Przestawiamy wzajemnie kolumny 1-ą i 3-ą.

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}\times 3\begin{vmatrix} 6, & +3, & +1, & 7 \\ 3, & +3, & +2, & 2 \\ 7, & +1, & +1, & 5 \\ 3, & +8, & +3, & 4 \end{vmatrix};$$

(§ 12, 9°)

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & z^2, & y^2 \\ 1, & z^2, & 0, & x^2 \\ 1, & y^2, & x^2, & 0 \end{vmatrix} = yz.zx.xy \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{yz}, & 0, & \frac{z}{y}, & \frac{y}{z} \\ \frac{1}{zx}, & \frac{z}{x}, & 0, & \frac{x}{z} \\ \frac{1}{xy}, & \frac{y}{x}, & \frac{x}{y}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2y^2z^2 \times \frac{1}{xyz}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ x, & 0, & z, & y \\ y, & z, & 0, & x \\ z, & y, & x, & 0 \end{vmatrix}.$$

Zadanie. — **Objaśnić, dla czego :**

1°) (§ 9, 9°, 10°)

$$\begin{vmatrix} 0, & -a, & b \\ -a, & 0, & -c \\ b, & -c, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & a, & b \\ a, & 0, & c \\ b, & c, & 0 \end{vmatrix};$$

2°)

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^2 \\ 1, & b, & b^2 \\ 1, & c, & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & bc, & 1 \\ b, & ca, & 1 \\ c, & ab, & 1 \end{vmatrix};$$

3°)

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & a^3 \\ 1, & b, & b^2, & b^3 \\ 1, & c, & c^2, & c^3 \\ 1, & d, & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bcd, & 1, & a, & a^2 \\ acd, & 1, & b, & b^2 \\ abd, & 1, & c, & c^2 \\ abc, & 1, & d, & d^2 \end{vmatrix}.$$

§ 36.

Jeśli najmniejsza spólna wielokrotna elementów jednego rzędu wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots & ,a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

np. elementów pierwszego wiersza jest w, a dopełniające dzielniki ilości w nazwiemy

$$\frac{w}{a_{1,1}} = \delta_1, \quad \frac{w}{a_{1,2}} = \delta_2, \dots, \frac{w}{a_{1,n}} = \delta_n,$$

i przez nie pomnożymy odpowiednie kolumny, to (§ 35)

$$D = \frac{1}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}\begin{vmatrix} w, & w, & \ldots, & w \\ a_{2,1}\delta_1, & a_{2,2}\delta_2, & \ldots, & a_{2,n}\delta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & a_{n,2}\delta_2, & \ldots, & a_{n,n}\delta_n \end{vmatrix},$$

i jeszcze

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{w}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ a_{2,1}\delta_1, & a_{2,2}\delta_2, & \ldots, & a_{2,n}\delta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & a_{n,2}\delta_2, & \ldots, & a_{n,n}\delta_n \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik można zawsze wyrazić za pomocą innego wyznacznika, w którym wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny są równe jedności (¹).

Np. (§ 12, 9°, § 35)

$$\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ x, & 0, & z, & y \\ y, & z, & 0, & x \\ z, & y, & x, & 0 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{1.yz\ zx.xy}\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ x, & 0, & xz^2, & xy^2 \\ y, & yz^2, & 0, & x^2y \\ z, & y^2z, & x^2z, & 0 \end{vmatrix} (^2).$$

(¹) DOSTOR: *Éléments de la théorie des Déterminants, avec application...* (Paryż, 1877), str. 20.

(²)
$$= \frac{1}{xyz} \times 1.x\,y.z \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & z^2, & y^2 \\ 1, & z^2, & 0, & x^2 \\ 1, & y^2, & x^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Zadanie. — Objaśnić dla czego

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & \rho_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, & \rho_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3, & \rho_3 \\ \lambda_4, & \mu_4, & \nu_4, & \rho_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nu^2_1\nu^2_2\nu^2_3\nu^2_4} \begin{vmatrix} \lambda_1\nu_2\nu_3\nu_4, & \mu_1\nu_2\nu_3\nu_4, & 1, & \rho_1\nu_2\nu_3\nu_4 \\ \nu_1\lambda_2\nu_3\nu_4, & \nu_1\mu_2\nu_3\nu_4, & 1, & \nu_1\rho_2\nu_3\nu_4 \\ \nu_1\nu_2\lambda_3\nu_4, & \nu_1\nu_2\mu_3\nu_4, & 1, & \nu_1\nu_2\rho_3\nu_4 \\ \nu_1\nu_2\nu_3\lambda_4, & \nu_1\nu_2\nu_3\mu_4, & 1, & \nu_1\nu_2\nu_3\rho_4 \end{vmatrix}.$$

Jeśli jest choć jeden element wyznacznika równy zeru, to, na zasadzie powyższej własności, mamy naprzód

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & 0\ , & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & \ldots, & a_{3,k}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w}{\delta_1\ldots\delta_{k-1}.1.\delta_{k+1}\ldots\delta_n} \begin{vmatrix} a_{1,1}\delta_1, & \ldots, & a_{1,k}, & \ldots, & a_{1,n}\delta_n \\ 1, & \ldots, & 0\ , & \ldots, & 1 \\ a_{3,1}\delta_1, & \ldots, & a_{3,k}, & \ldots, & a_{3,n}\delta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & \ldots, & a_{n,k}, & \ldots, & a_{n,n}\delta_n \end{vmatrix}.$$

Nazywając następnie najmniejszą spólną wielokrotną ilości

$$a_{1,k},\ a_{3,k},\ \ldots, a_{n,k}$$

przez v i oznaczając

$$\frac{v}{a_{1,k}} = d_1, \quad \frac{v}{a_{3,k}} = d_3, \ldots, \frac{v}{a_{n,k}} = d_n.$$

mnożąc zaś nadto w wyznaczniku po prawej elementy pierwszego wiersza przez d_1, trzeciego przez $d_3, \ldots$, ostatniego przez d_n, otrzymamy znów

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\delta_1, & \ldots & ,a_{1,k}, & \ldots & ,a_{1,n}\delta_n \\ 1, & \ldots & ,0 & \ldots & ,1 \\ a_{3,1}\delta_1, & \ldots & ,a_{3,k}, & \ldots & ,a_{3,n}\delta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & \ldots & ,a_{n,k}, & \ldots & ,a_{n,n}\delta_n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{v}{d_1.1.d_3\ldots d_n} \begin{vmatrix} a_{1,1}\delta_1 d_1, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{1,n}\delta_n d_1 \\ 1, & \ldots & ,0, & \ldots & ,1 \\ a_{3,1}\delta_1 d_3, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{3,n}\delta_n d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1 d_n, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{n,n}\delta_n d_n \end{vmatrix}.$$

Zatem

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,k}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \ldots & ,0 & \ldots & ,a_{2,n} \\ a_{3,1}, & \ldots & ,a_{3,k}, & \ldots & ,a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,k}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w}{\delta_1\ldots\delta_{k-1}\delta_{k+1}\ldots\delta_n} \cdot \frac{v}{d_1 d_3\ldots d_n} \begin{vmatrix} a_{1,1}\delta_1 d_1, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{1,n}\delta_n d_1 \\ 1, & \ldots & ,0, & \ldots & ,1 \\ a_{3,1}\delta_1 d_3, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{3,n}\delta_n d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1 d_n, & \ldots & ,1, & \ldots & ,a_{n,n}\delta_n d_n \end{vmatrix}$$

Jeśli w wyznaczniku jest jeden element równy zeru, to wyznacznik może być wyrażony przez inny wyznacznik, w którym wszystkie elementy wiersza i kolumny, zawierających ów element, są jednościami (¹).

Naprzykład

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{24}, & \frac{5}{8}, & 2, & \frac{11}{36} \\ 3, & 6, & 0, & 4 \\ \frac{3}{8}, & \frac{3}{8}, & 6, & \frac{11}{12} \\ \frac{5}{12}, & 2, & 8, & \frac{5}{9} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{12}{4.2.1.3} \cdot \frac{24}{12.1.4.3} \begin{vmatrix} 14, & 15, & 1, & 11 \\ 1, & 1, & 0, & 1 \\ 6, & 3, & 1, & 11 \\ 5, & 12, & 1, & 5 \end{vmatrix}.$$

Zadanie. Objaśnić, dla czego

$$\begin{vmatrix} 0, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2 a_3 a_4 b_1 c_1 d_1} \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & a_3a_4b_2c_1d_1, & a_3a_4b_1c_2d_1, & a_3a_4b_1c_1d_2 \\ 1, & a_2a_4b_3c_1d_1, & a_2a_4b_1c_3d_1, & a_2a_4b_1c_1d_3 \\ 1, & a_2a_3b_4c_1d_1, & a_2a_3b_1c_4d_1, & a_2a_3b_1c_1d_4 \end{vmatrix}.$$

(¹) Dostor, l. c., str. 46.

§ 37.

Dla obliczenia danego wyznacznika znamy dotąd dwie drogi postępowania.

Według jednej, należy rozwinąć wyznacznik, to jest wypisać wszystkie jego wyrazy (§§ 9 — 12), obliczyć oddzielne wyrazy i uskutecznić możliwe redukcye.

Według drugiej, należy dany wyznacznik rozłożyć według elementów jednego z jego rzędów (§ 25), a każdy z wchodzących w ten rozkład wyznaczników (już o jedność niższego stopnia) znów w ten sam sposób rozłożyć według elementów jednego z jego rzędów, i t. d., dopóki nie dojdziemy do wyznaczników drugiego stopnia, które już łatwo obliczyć ([1]), co uskuteczniwszy, należy jeszcze wykonać możliwe redukcye. Baczyć tu jednak na to należy, że, jeżeli, rozłożywszy dany wyznacznik według elementów pewnego rzędu, zechcemy znowu otrzymane w ten sposób wyznaczniki o jedność niższego stopnia rozkładać według elementów pewnego ich rzędu, to przy wyznaczaniu znaków (§ 25) wypada się kierować nowemi liczbami porządkowemi wiersza i kolumny zawierających element, którego ilość dołączoną chcemy wypisać. Można sobie w tym razie rzecz ułatwiać, za każdym razem, kiedy otrzymujemy wyznaczniki niższego stopnia, przez wypisanie typowego

---

([1]) Można tu, przed przystąpieniem do rozkładu tak danego wyznacznika, jak i wyznaczników kolejno otrzymanych, tak je przekształcić, aby wszystkie elementy pewnego rzędu były jednościami (§ 36), i następnie rozkładać każdy z tych wyznaczników według elementów tego rzędu jedności.

wyznacznika z nowemi wskaźnikami, które posłużą do wyznaczenia owych znaków ([1]). Np. (§ 12, 10°)

$$\begin{vmatrix} 0, & x, & -y, & z \\ -x, & 0, & c, & b \\ y, & -c, & 0, & a \\ -z, & -b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}.-x \begin{vmatrix} x, & -y, & z \\ -c, & 0, & a \\ b, & -a, & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}.y \begin{vmatrix} x, & -y, & z \\ 0, & c, & b \\ -b, & -a, & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}.-z \begin{vmatrix} x, & -y, & z \\ 0, & c, & b \\ -c, & 0, & a \end{vmatrix}.$$

Każdy z tych wyznaczników trzeciego stopnia rozłóżmy znów według np. elementów trzeciego wiersza, wyznaczając znaki stosownie do summy wskaźników odpowiednich elementów tızeciego wiersza wyznacznika ad hoc ([2])

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix}.$$

([1]) Niewłaściwie Guenther (l. c., drugie wydanie str. 44) przypisuje sobie pierwsze metodyczne przedstawienie tego sposobu, gdyż takowy należycie już roztrząsa Spottiswoode (l. c., Crelle Journal, str. 219).

([2]) Dostor (l. c., str. 27) podaje praktyczną wskazówkę wyznaczania znaku, z jakim należy wziąć wyznacznik niższego stopnia. Jeśli, rozkładając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & \ldots \\ g, & h, & i, & j, & \ldots \\ l, & m, & n, & p, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

hcemy określić znak, jakim w tym rozkładzie należy wziąć wyznacznik

Będzie więc

$$\begin{vmatrix} 0, & x, & -y, & z \\ -x, & 0, & c, & b \\ y, & -c, & 0, & a \\ -z, & -b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = +x.(-1)^{3+1}.-b\begin{vmatrix} -y, & z \\ 0, & a \end{vmatrix} + x.(-1)^{3+2}.-a\begin{vmatrix} x, & z \\ -c, & a \end{vmatrix}$$

$$+y.(-1)^{3+1}.-b\begin{vmatrix} -y, & z \\ c, & b \end{vmatrix} + y.(-1)^{3+2}.-a\begin{vmatrix} x, & z \\ 0, & b \end{vmatrix}$$

$$+z.(-1)^{3+1}.-c\begin{vmatrix} -y, & z \\ c, & b \end{vmatrix} + z.(-1)^{3+3}.+a\begin{vmatrix} x, & -y \\ 0, & c \end{vmatrix}$$

$$= -bx(-ay) + ax(ax + cz) - by(-by - cz)$$

$$+ ay(bx) - cz(-by - cz) + az(cx)$$

$$= (ax + by + cz)^2.$$

Tak jeden, jak i drugi z tych sposobów obliczania wyznacznika jest wogóle długi i żmudny, osobliwie, w razie wyższego stopnia danego wyznacznika.

§ 38.

Niekiedy dostrzedz się daje możność wyrażenia wyznacznika, jako summy kilku wyznaczników (§ 28), częścią łatwo

---

o jedność niższego stopnia, przez który wypadnie pomnożyć element np. p (a więc wyznacznika, który powstanie z powyższego, przez opuszczenie wiersza i kolumny, zawierających element p), to, zaczynając od pierwszego głównego elementu, schodzimy w pierwszej kolumnie aż do wiersza, zawierającego element p, mówiąc: $+a, -g, +l$, a następnie posuwamy się dalej w tym wierszu aż do elementu p, mówiąc w dalszym ciągu: $(+l), -m, +n, -p$. A więc ów wyznacznik należy poprzedzić znakiem —. Podobnież wyznaczymy, że wyznacznik, przez który wypadnie pomnożyć element np. j, będzie miał znak $+a, -g, +h, -i, +j$, a więc $+$.

obliczyć się dających, lub już obliczonych poprzednio, częścią równych zeru.

Np. Jeśliśmy znaleźli (§ 12, 11°; § 9, 8°)

$$\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ -x, & 0, & c, & b \\ -y, & -c, & 0, & a \\ -z, & -b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = (ax - by + cz)^2; \quad \begin{vmatrix} 0, & a, & b \\ -a, & 0, & c \\ -b, & -c, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a chcemy obliczyć wyznacznik (§ 12, 12°)

$$D = \begin{vmatrix} x, & a, & b, & c \\ -a, & x, & d, & e \\ -b, & -d, & x, & f \\ -c, & -e, & -f, & x \end{vmatrix},$$

to, stosując kolejno rozkład na summę wyznaczników, mieć będziemy

$$D = \begin{vmatrix} 0+x, & a+0, & b+0, & c+0 \\ -a+0, & 0+x, & d+0, & e+0 \\ -b+0, & -d+0, & 0+x, & f+0 \\ -c+0, & -e+0, & -f+0, & 0+x \end{vmatrix};$$

$$D = \begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ -a, & 0, & d, & e \\ -b, & -d, & 0, & f \\ -c, & -e, & -f, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & a, & b, & 0 \\ -a, & 0, & d, & 0 \\ -b, & -d, & 0, & 0 \\ -c, & -e, & -f, & x \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 0, & a, & 0, & c+0 \\ -a, & 0, & 0, & e+0 \\ -b, & -d, & x, & f+0 \\ -c, & -e, & 0, & 0+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & 0, & b+0, & c+0 \\ -a, & x, & d+0, & e+0 \\ -b, & 0, & 0+x, & f+0 \\ -c, & 0, & -f+0, & 0+x \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} x, & a+0, & b+0, & c+0 \\ 0, & 0+x, & d+0, & 0+e \\ 0, & -d+0, & 0+x, & f+0 \\ 0, & -e+0, & -f+0, & 0+x \end{vmatrix};$$

$$D = (af - be + cd)^2 + x\begin{vmatrix} 0, & a, & b \\ -a, & 0, & d \\ -b, & -d, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ x\begin{vmatrix} 0, & a, & c \\ -a, & 0, & e \\ -c, & -e, & 0 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0, & a, & 0 \\ -a, & 0, & 0 \\ -c, & -e, & x \end{vmatrix} +$$

$$+ x\begin{vmatrix} 0, & b, & c \\ -b, & 0, & f \\ -c, & -f, & 0 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0, & 0, & c \\ -b, & x, & f \\ -c, & 0, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ x\begin{vmatrix} 0, & b, & 0 \\ -b, & 0, & 0 \\ -c, & -f, & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ -b, & x, & 0 \\ -c, & 0, & x \end{vmatrix} +$$

$$+x\begin{vmatrix} 0, & 0, & e \\ -d, & x, & f \\ -e, & -f, & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0, & d, & 0 \\ -d, & x, & f \\ -e, & -f, & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x. & d, & e \\ 0, & x, & f \\ 0, & -f, & x \end{vmatrix}.$$

$$D = (af - be + cd)^2 + 0 + 0 + x\,x\begin{vmatrix} 0, & a \\ -a, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+0 + x.x\begin{vmatrix} 0, & c \\ -c, & 0 \end{vmatrix} + x.x\begin{vmatrix} 0, & b \\ -b, & 0 \end{vmatrix} + 0 +$$

$$+x.e\begin{vmatrix} -d, & x \\ -e, & -f \end{vmatrix} + x.-d\begin{vmatrix} -d, & f \\ -e, & x \end{vmatrix} + x.x\begin{vmatrix} x, & f \\ -f, & x \end{vmatrix};$$

$$D = (af - be + cd)^2 + x^2.a^2 + x^2.c^2 + x^2.b^2 + ex.(df + ex) -$$

$$-dx.(-dx + ef) + x^2.(x^2 + f^2) =$$

$$(af - be + cd)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)x^2 + x^4.$$

Podobnież (§ 9, 15^c, § 20)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+a_2, & 1 \\ 1, & 1, & 1+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1+0, & 1+0 \\ 1, & 1+a_2, & 1+0 \\ 1, & 1+0, & 1+a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1 & a_2, & 1 \\ 1, & 0, & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & a_2, & 0 \\ 1, & 0, & a_3 \end{vmatrix} = 0+0+0+1.a_2.a_3 = a_2 a_3.$$

(§ 9, 16°)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+a_2, & 1 \\ 1, & 1, & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+a_2, & 1 \\ 1, & 1, & 1+a_3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1, & 1, & 1 \\ 0, & 1+a_2, & 1+0 \\ 0, & 1+0, & 1+a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 a_3 + a_1 \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 1, & a_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} a_2, & 1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$+a_1 \begin{vmatrix} a_2, & 0 \\ 0, & a_3 \end{vmatrix} = a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 =$$

$$= a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right).$$

Zadania. — Objaśnić, dla czego wogóle

1°)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \ldots, & 1 \\ 1, & 1+a_2, & 1, \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 1+a_3, \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & 1, \ldots, & 1+a_n \end{vmatrix} = a_2 a_3 \ldots a_n.$$

2°)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1, & 1, & 1, \ldots, & 1 \\ 1, & 1+a_2, & 1, \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 1+a_3, \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & 1, \ldots, & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 a_3 \ldots a_n (1 + a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

§ 39.

Metodyczniejszy sposób obliczania wyznacznika polega na kolejnem jego upraszczaniu, przez wyrażenie za pomocą wyznacznika o jedność niższego stopnia, co może być osiągnięte za pomocą takiego przekształcenia wyznacznika (§ 31), któreby sprawiło, że wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego wiersza lub kolumny będą równe zeru (§ 33).

W tym celu możemy naprzód wyznacznik wyrazić w postaci takiej, aby wszystkie elementy jednego wiersza (lub kolumny) były jednościami (§ 36), a następnie elementy jednej kolumny (jednego wiersza) odejmować od odpowiednich elementów wszystkich pozostałych kolumn (wierszy) (§ 31).

W § 36 znaleźliśmy

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w}{\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n} \begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots, & 1 \\ a_{2,1}\delta_1, & a_{2,2}\delta_2, \ldots, & a_{2,n}\delta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & a_{n,2}\delta_2, \ldots, & a_{n,n}\delta_n \end{vmatrix};$$

a jeśli w wyznaczniku po prawej wszystkie elementy np. pierwszej kolumny odejmować będziemy kolejno od odpowiednich elementów drugiej, trzeciej,..., ostatniej kolumny, to wartość wyznacznika się nie zmieni (§ 31) i

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w}{\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 & \ldots, & 0 \\ a_{2,1}\delta_1, & a_{2,2}\delta_1 - a_{2,1}\delta_1, & a_{2,3}a\delta_3 - a_{2,1}\delta_1, & \ldots, & a_{2,n} - a_{2,1}\delta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\delta_1, & a_{n,2}\delta_2 - a_{n,1}\delta_1, & a_{n,3}\delta_3 - a_{n,1}\delta_1, & \ldots, & a_{n,n}\delta_n - a_{n,1}\delta_1 \end{vmatrix}.$$

Ostatni wyznacznik sprowadza się do 1, pomnożonej przez wyznacznik zeń powstały przez opuszczenie w systemacie jego elementów pierwszego wiersza i pierwszej kolumny (§ 33). Jest więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, a_{1,n} \\ a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{w}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}\begin{vmatrix} a_{2,2}\delta_2-a_{2,1}\delta_1, & a_{2,3}\delta_3-a_{2,1}\delta_1, & \ldots, & a_{2,n}\delta_n-a_{2,1}\delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2}\delta_2-a_{n,1}\delta_1, & a_{n,3}\delta_3-a_{n,1}\delta_1, & \ldots, & a_{n,n}\delta_n-a_{n,1}\delta_1 \end{vmatrix}.$$

Wyraziliśmy dany wyznacznik n-ego stopnia przez wyznacznik stopnia $(n-1)$-ego. Postępując podobnie z ostatnim wyznacznikiem wyrazilibyśmy go przez wyznacznik stopnia $n-2$, i t.d., dopókibyśmy nie doszli do wyznacznika stopnia drugiego.

Np.

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & -1 \\ -3, & 2, & 2 \\ 2, & 4, & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -3, & -4, & -4 \\ 2, & -8, & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -3, & -1, & -1 \\ 2, & -10, & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 10, & -8 \end{vmatrix} = -9.$$

(§ 12, 1°)

$$\begin{vmatrix} 9, & 13, & 17, & 4 \\ 18, & 28, & 33, & 8 \\ 30, & 40, & 54, & 13 \\ 24, & 37, & 46, & 11 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3, & 13, & 17, & 4 \\ 6, & 28, & 33, & 8 \\ 10, & 40, & 54, & 13 \\ 8, & 37, & 46, & 11 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{400}\begin{vmatrix} 1, & 520, & 680. & 160 \\ 1, & 560, & 660, & 160 \\ 1, & 480, & 648, & 156 \\ 1. & 555, & 690, & 165 \end{vmatrix} = \frac{1}{400}\begin{vmatrix} 0, & 40, & 32, & 4 \\ 0, & 80, & 12, & 4 \\ 1, & 480, & 648, & 195 \\ 0, & 75, & 42, & 9 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{400}\begin{vmatrix}40, & 32, & 4\\ 80, & 12, & 4\\ 75, & 42, & 9\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2, & 8, & 1\\ 4, & 3, & 1\\ 15, & 42, & 9\end{vmatrix}=\frac{1}{45}\begin{vmatrix}18, & 72. & 1\\ 36, & 27, & 1\\ 15, & 42, & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{45}\begin{vmatrix}-18, & 45, & 0\\ 36, & 27, & 1\\ -21, & 15, & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{45}\begin{vmatrix}-18, & 45\\ -21, & 15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6, & 3\\ 7, & 1\end{vmatrix}=-15.$$

(§ 12, 9°, §§ 35, 36)

$$\begin{vmatrix}0, & x, & y, & z\\ x, & 0, & z, & y\\ y, & z, & 0, & x\\ z, & y, & x, & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}0, & 1, & 1, & 1\\ x, & 0, & xz^2, & xy^2\\ y, & yz^2, & 0, & x^2y\\ z, & y^2z, & x^2z, & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}0, & 0, & 1, & 0\\ x, & -xz^2, & xz^2, & (y^2-z^2)x\\ y, & yz^2, & 0, & x^2y\\ z, & (y^2-x^2)z, & x^2z, & -x^2z\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}x, & -xz^2, & (y^2-z^2)x\\ y, & yz^2, & x^2y\\ z, & (y^2-x^2)z, & -x^2z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1, & -z^2, & y^2-z^2\\ 1, & z^2, & x^2\\ 1, & y^2-x^2, & -x^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0, & -2z^2, & y^2-x^2-z^2 \\ 1, & z^2, & x^2 \\ 0, & y^2-x^2-z^2, & -2x^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2z^2, & y^2-x^2-z^2 \\ y^2-x^2-z^2, & -2x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(2xz)^2 - (x^2-y^2-z^2)^2\right].$$

§ 40.

Według tej samej w zasadzie metody, można jednak postępować inaczej, starając się bezpośrednio (bez tworzenia wyznacznika z rzędem jedności) każdy wyznacznik wyrazić w takiej postaci, aby wszystkie, prócz jednego, elementy rzędu stały się zerami.

Jeśli mamy wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & , a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & , a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix},$$

to do wszystkich elementów np. drugiej kolumny możemy dodać odpowiednie elementy pierwszej, pomnożone przez $-\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}$, a wyznacznik się nie zmieni (§ 31). Dodając również do wszystkich elementów trzeciej kolumny odpowiednie elementy pierwszej, pomnożone przez $-\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}$, do wszystkich czwartej kolumny odpowiednie pierwszej, pomnożone przez $-\frac{a_{1,4}}{a_{1,1}}$, i t. d., nakoniec, do wszystkich elementów ostatniej kolumny odpowiednie elementy pierwszej, pomnożone przez $-\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}$, nie zmieniamy wartości wyznacznika; jest więc:

$$
\mathrm{D}=\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}-\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}a_{1,1}, & a_{1,3}-\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n}-\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}a_{1,1} \\
a_{2,1}, & a_{2,2}-\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}a_{2,1}, & a_{2,3}-\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}a_{2,1}, \ldots, & a_{2,n}-\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}a_{2,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & a_{n,2}-\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}a_{n,1}, & a_{n,3}-\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n}-\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}a_{n,1}
\end{vmatrix},
$$

czyli

$$
\mathrm{D}=\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\
a_{2,1}, & \frac{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}}, & \frac{a_{1,1}a_{2,3}-a_{1,3}a_{2,1}}{a_{1,1}}, \ldots, & \frac{a_{1,1}a_{2,n}-a_{1,n}a_{2,1}}{a_{1,1}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & \frac{a_{1,1}a_{n,2}-a_{1,2}a_{n,1}}{a_{1,1}}, & \frac{a_{1,1}a_{n,3}-a_{1,3}a_{n,1}}{a_{1,1}}, \ldots, & \frac{a_{1,1}a_{n,n}-a_{1,n}a_{n,1}}{a_{1,1}}
\end{vmatrix},
$$

albo (§ 29)

$$
\mathrm{D}=\frac{1}{a_{1,1}{}^{n-1}}\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\
a_{2,1}, & a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}, & a_{1,1}a_{2,3}-a_{1,3}a_{2,1}, \ldots, & a_{1,1}a_{2,n}-a_{1,n}a_{2,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & a_{1,1}a_{n,2}-a_{1,2}a_{n,1}, & a_{1,1}a_{n,3}-a_{1,3}a_{n,1}, \ldots, & a_{1,1}a_{n,n}-a_{1,n}a_{n,1}
\end{vmatrix}.
$$

Dla krótkości, wchodzące tu wyrażenia wyznacznikowe

$$
a_{1,1}a_{\lambda,\mu}-a_{1,\mu}a_{\lambda,1}=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,\mu} \\ a_{\lambda,1}, & a_{\lambda,\mu} \end{vmatrix}
$$

możemy (§ 15) tak oznaczać:

$$
(a_{1,1}a_{\lambda,\mu}).
$$

Ostatnie wyrażenie wyznacznika D da się jeszcze tak przedstawić (§ 33):

$$D = \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}{}^{n-1}} \begin{vmatrix} (a_{1,1}a_{2,2}), & (a_{1,1}a_{2,3}), & \ldots, & (a_{1,1}a_{2,n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{1,1}a_{n,2}), & (a_{1,1}a_{n,3}), & \ldots, & (a_{1,1}a_{n,n}) \end{vmatrix};$$

ostatecznie więc, możemy zawsze dany wyznacznik stopnia n-ego wyrazić wprost przez wyznacznik stopnia $(n-1)$-ego według wzoru (1)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{1,1}{}^{n-2}} \begin{vmatrix} (a_{1,1}a_{2,2}), & (a_{1,1}a_{2,3}), & \ldots, & (a_{1,1}a_{2,n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{1,1}a_{n,2}), & (a_{1,1}a_{n,}), & \ldots, & (a_{1,1}a_{n,n}) \end{vmatrix}.$$

Stosując go następnie do wyznacznika po prawej, otrzymamy wyznacznik stopnia $(n-2)$-ego i t. d., dopóki nie dojdziemy do wyznacznika stopnia drugiego. Np.

$$\begin{vmatrix} 5, & 1, & -3, & 2 \\ 1, & -2, & 1, & 0 \\ 6, & 4, & -5, & -1 \\ 4, & -1, & -1, & 6 \end{vmatrix} =$$

---

(1) Bellavitis, l. c., § 38.

$$=\frac{1}{5^2}\begin{vmatrix} 5.(-2)-1.1, & 5.1-(-3).1, & 5.0-2.1 \\ 5.4-1.6, & 5.(-5)-(-3).6, & 5.(-1)-2.6 \\ 5.(-1)-1.4, & 5.(-1)-(-3).4, & 5.6-2.4 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5^2}\begin{vmatrix} -11, & 8, & -2 \\ 14, & -7, & -17 \\ -9, & 7, & 22 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{-11}\begin{vmatrix} (-11).(-7)-8.14, & (-11).(-17)-(-2).14 \\ (-11).7-8.(-9), & (-11).22-(-2).(-9) \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5^2.11}\begin{vmatrix} -35, & 215 \\ -5, & -260 \end{vmatrix}=\frac{1}{11}\begin{vmatrix} 7, & 43 \\ 1, & -52 \end{vmatrix}=-37.$$

(§ 12, 10°; § 37; § 12, 16°)

$$\begin{vmatrix} 0, & x, & -y, & z \\ -x, & 0, & c, & b \\ y, & -c, & 0, & a \\ -z, & -b, & -a, & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{4.3}{2}}\begin{vmatrix} z, & -y, & x, & 0 \\ b, & c, & 0, & -x \\ a, & 0, & -c, & y \\ 0, & -a, & -b, & -z \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{z^2}\begin{vmatrix} cz+by, & -bx, & -xz \\ ay, & -cz-ax, & yz \\ -az, & -bz, & -z^2 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{z}\begin{vmatrix} -x, & -bx, & by+cz \\ y, & -ax-cz, & ay \\ -z, & -bz, & -az \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{xz}\begin{vmatrix} ax^2+cxz+bxy, & -axy-by^2-cyz \\ 0\quad, & axz+byz+cz^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(ax+cz+by)(ax+by+cz)=(ax+by+cz)^2.$$

ZADANIE. — Objaśnić dla czego

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_{1,2}a_{1,3}\ldots a_{1,n-1}}\begin{vmatrix} (a_{1,1}a_{2,2}), & (a_{1,2}a_{2,3}), & \ldots, & (a_{1,n-1}a_{2,n}) \\ (a_{1,1}a_{3,2}), & (a_{1,2}a_{3,3}), & \ldots, & (a_{1,n-1}a_{3,n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{1,1}a_{n,2}), & (a_{1,2}a_{n,3}), & \ldots, & (a_{1,n-1}a_{n,n}) \end{vmatrix},$$

która to formuła ([1]) może także służyć dla obliczenia wyznacznika.

§ 41.

Jeśli w systemacie elementów danego wyznacznika elementy pewnego rzędu tworzą postęp iloczynowy, np,

$$D=\begin{vmatrix} a_{1.1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, & a_{i-1,3}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ 1, & q, & q^2, & \ldots, & q^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

([1]) BALTZER (l. c., w czwartem wydaniu str. 19).

to odejmując od elementu każdej, jak tutaj, kolumny odpowiedni element kolumny poprzedzającej, pomnożony przez q, mieć będziemy

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}-qa_{1,1}, & a_{1,3}-qa_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}-qa_{1,n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}-qa_{i-1,1}, & a_{i-1,3}-qa_{i-1,2}, & \ldots, & a_{i-1,n}-qa_{i-1,n-1} \\
1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & a_{n,2}-qa_{n,1}, & a_{n,3}-qa_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}-qa_{n,n-1}
\end{vmatrix},
$$

czyli (¹)

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, & a_{i-1,3}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\
1, & q, & q^2, & \ldots, & q^{n-1} \\
a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, & a_{i+1,3}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=(-1)^{i-1} \begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}-qa_{1,1}, & a_{1,3}-qa_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}-qa_{1,n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}-qa_{i-1,1}, & a_{i-1,3}-qa_{i-1,2}, & \ldots, & a_{i-1,n}-qa_{i-1,n-1} \\
a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}-qa_{i+1,1}, & a_{i+1,3}-qa_{i+1,2}, & \ldots, & a_{i+1,n}-qa_{i+1,n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & a_{n,2}-qa_{n,1}, & a_{n,3}-qa_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}-qa_{n,n-1}
\end{vmatrix}
$$

(¹) JACOBI. *Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function.* (CRELLE *Journal*, t. XXX, str. 129).

Np.

$$\begin{vmatrix} 2, & 5, & -2, & 4 \\ 8, & \frac{5}{2}, & 6, & -1 \\ 6, & \frac{5}{4}, & -1, & 7\frac{1}{2} \\ 3, & \frac{5}{8}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2, & 1, & -2, & 4 \\ 8, & \frac{1}{2}, & 6, & -1 \\ 6, & \frac{1}{4}, & -1, & 7\frac{1}{2} \\ 3, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 7, & 7, & -3 \\ 2, & -4, & 8 \\ 0, & 1, & -4 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 7, & -7, & -3 \\ 1, & 2, & 4 \\ 0, & 1, & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \begin{vmatrix} -21, & 11 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -530.$$

Jeśliby w systemacie elementów wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ; a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n,1}, & \ldots & ; a_{n,n} \end{vmatrix}$$

elementy wszystkich, prócz jednego, wierszy, lub wszystkich, prócz jednej, kolumn, były związane tąż samą zależnością jednorodną i liniową względem elementów, np. gdyby miały miejsce związki

$$z_1 a_{2,1} + z_2 a_{2,2} + \ldots + z_n a_{2,n} = 0,$$

$$z_1 a_{3,1} + z_2 a_{3,2} + \ldots + z_n a_{3,n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1 a_{n,1} + z_2 a_{n,2} + \ldots + z_n a_{n,n} = 0,$$

przy stałych wartościach dla ilości

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

to (§ 31)

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} + \frac{z_2}{z_1} a_{1,2} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} a_{1,n}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1} + \frac{z_2}{z_1} a_{2,2} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} a_{2,n}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} + \frac{z_2}{z_1} a_{n,2} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} a_{n,n}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Lecz z założenia wypada, że

$$a_{\lambda,1} + \frac{z_2}{z_1} a_{\lambda,2} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} a_{\lambda,n} = 0,$$

dla wszystkich wartości 2, 3,..., n liczby λ; jest zatem w naszym przypadku (¹)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_{1,1} + \frac{z_2}{z_1} a_{1,2} + \frac{z_3}{z_1} a_{1,3} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} a_{1,n} \right) \begin{vmatrix} a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

(¹) Bellavitis, l. c., § 17.

Np.

$$\begin{vmatrix} 4, & 5, & 4, & 10\frac{2}{3} \\ 8, & 9, & 15, & 5 \\ 7, & 12, & 10\frac{1}{2}, & 5 \\ 4, & 4, & 4, & 7 \end{vmatrix} =$$

$$=-\left(5+\frac{2}{-3}\cdot 9+\frac{-4}{-3}\cdot 12+\frac{6}{-3}\cdot 4\right)\begin{vmatrix} 8, & 15\ , & 5 \\ 7, & 10\frac{1}{2}, & 5 \\ 4, & 4\ , & 7 \end{vmatrix} =$$

$$=-7\left(5+\frac{-4}{2}.5+\frac{3}{2}.7\right)\begin{vmatrix} 7, & 10\frac{1}{2} \\ 4, & 4 \end{vmatrix} = -77\begin{vmatrix} 14, & 21 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 539.$$

Wogóle, w miarę zdarzających się szczególnych przypadków, można odpowiednie dobierać sposoby dla obliczenia wyznacznika ([1]).

§ 42.

Gdy wypada obliczyć wyznacznik z liczebnemi elementami, to zwykle, gdyby zachodziły liczby ułamkowe, wyrażamy naprzód dany wyznacznik przez inny o elementach całkowitych (§§ 29, 35). Następnie zaś do elementów wierszy lub kolumn dodajemy elementy jednego lub kilku rzędów równoległych, pomnożone przez tak dobrane liczby (§ 31), aby wszystkie,

([1]) Np. porównaj § 20.

prócz jednego, elementy jakiegoś rzędu stały się równemi zeru (§ 33).

Nie może być mowy o żadnej regule ogólnej dla najkrótszego tu postępowania : zależnie od liczb, będących elementami wyznacznika, postępować potrzeba w jednym szczególnym przypadku inaczej, niż w drugim.

Np. (§ 41)

$$\begin{vmatrix} 4, & 5, & 4, & 10\frac{2}{3} \\ 8, & 9, & 15, & 5 \\ 7, & 12, & 10\frac{1}{2}, & 5 \\ 4, & 4, & 4, & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 12, & 15, & 12, & 32 \\ 8, & 9, & 15, & 5 \\ 14, & 24, & 21, & 10 \\ 4, & 4, & 4, & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6, & 15, & 12, & 32 \\ 4, & 9, & 15, & 5 \\ 7, & 24, & 21, & 10 \\ 2, & 4, & 4, & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6-(4+2) & , 15-(9+4) & , 12-(15+4) & , 32-(5+7) \\ 4-2.2 & , 9-2.4 & , 15-2.4 & , 5-2.7 \\ 7-\left(4+\frac{3}{2}.2\right), & 24-\left(9+\frac{3}{2}.4\right), & 21-\left(15+\frac{3}{2}.4\right), & 10-\left(5+\frac{3}{2}.7\right) \\ 2 & , \quad 4 & , \quad 4 & , \quad 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0, & 2, & -7, & 20 \\ 0, & 1, & 7, & -9 \\ 0, & 9, & 0, & -\frac{11}{2} \\ 2, & 4, & 4, & 7 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{vmatrix} 2, & -7, & 20 \\ 1, & 7, & -9 \\ 9, & 0, & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2, & -7, & 20 \\ 1, & 7, & -9 \\ 18, & 0, & -11 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2+1, & -7+7, & 20-9 \\ 1, & 7, & -9 \\ 18, & 0, & -11 \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3, & 0, & 11 \\ 1, & 7, & -9 \\ 18, & 0, & -11 \end{vmatrix}=-\frac{7}{3}\begin{vmatrix} 3, & 11 \\ 18, & -11 \end{vmatrix}=-77\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 6, & -1 \end{vmatrix}=+539.$$

12, 1°; § 39)

$$\begin{vmatrix} 9, & 13, & 17, & 4 \\ 18, & 28, & 33, & 8 \\ 30, & 40, & 54, & 13 \\ 24, & 37, & 46, & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9-2.\,4, & 13-3.\,4, & 17-4.\,4, & 4 \\ 18-2.\,8, & 28-3.\,8, & 33-4.\,8, & 8 \\ 30-2.13, & 40-3.13, & 54-4.13, & 13 \\ 24-2.11, & 37-3.11, & 46-4.11, & 11 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 4 \\ 2, & 4, & 1, & 8 \\ 4, & 1, & 2, & 13 \\ 2, & 4, & 2, & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1, & 1-1, & 1-1, & 4-(1+1+2.1) \\ 2, & 4-2, & 1-2, & 8-(2+4+2.1) \\ 4, & 1-4, & 2-4, & 13-(4+1+2.2) \\ 2, & 4-2, & 2-2, & 11-(2+4+2.2) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 2, & -1, & 0 \\ 4, & -3, & -2, & 4 \\ 2, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2, & -1, & 0 \\ -3, & -2, & 4 \\ 2, & 0, & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2\;, & -1\;, & 0 \\ -3-4.2, & -2-4.0, & 4-4.1 \\ 2\;, & 0\;, & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2, & -1, & 0 \\ -11, & -2, & 0 \\ 2, & 0, & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 11, & 2 \end{vmatrix}=-15.$$

Niekiedy można w ten sposób otrzymać wyznacznik, w którym wszystkie elementy z jednej strony przekątnej są zerami, a tem samem bezpośrednio obliczyć się dający.

Np. § 12, 5°)

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+(1+1+1) & , 1+1, & 1+1, & 1 \\ 1+(-1-1+1), & -1-1, & -1+1, & 1 \\ 1+(-1+1-1), & -1+1, & 1+1, & -1 \\ 1+(1-1-1) & , 1-1, & -1+1, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4, & 2, & 2, & 1 \\ 0, & -2, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{vmatrix} = +16.$$

Np., jeżeli oznaczymy, jak poprzednio (§ 16),

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1,\ 2\ldots m} = \binom{n}{m},$$

i chcemy obliczyć wyznacznik $(s+1)$-ego stopnia

$$D = \begin{vmatrix} 1, & \binom{r+s}{1}, & \binom{r+s+1}{2}, & \ldots, & \binom{r+2s-1}{s} \\ 1, & \binom{r+s+1}{1}, & \binom{r+s+2}{2}, & \ldots, & \binom{r+2s}{s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \binom{r+2s}{1}, & \binom{r+2s+1}{2}, & \ldots, & \binom{r+3s-1}{s} \end{vmatrix},$$

to, zważając, że wogóle

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1},$$

zkąd

$$\binom{n}{m}-\binom{n-1}{m}=\binom{n-1}{m-1},$$

przed odjęcie od elementów każdego wiersza wyznacznika D elementów odpowiednich wiersza poprzedzającego, otrzymamy

$$D=\begin{vmatrix} 1, & \binom{r+s}{1}, & \binom{r+s+1}{2}, & \ldots, & \binom{r+2s-1}{s} \\ 0, & 1, & \binom{r+s+1}{1}, & \ldots, & \binom{r+2s-1}{s-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 1, & \binom{r+2s}{1} & \ldots, & \binom{r+3s-2}{s-1} \end{vmatrix}.$$

Odejmując następnie od elementów trzeciego i dalszych wierszy odpowiednie elementy wiersza poprzedzającego (każdy), a w tak otrzymanym wyznaczniku od elementów czwartego i dalszych wierszy elementy wiersza poprzedzającego i t. d., dojdziemy nakoniec do wyznacznika, w którym wszystkie elementy głównej przekątnej są jednościami, wszystkie zaś elementy z jednej jej strony są zerami. Jest więc (§ 33), przy jakichkolwiek wartościach liczb całkowitych r i s, zawsze ([1])

$$D=1.$$

Gdy w danym do obliczenia wyznaczniku jest wiele zer, to należy tak poprzestawiać wiersze i kolumny (§§ 19, 24), aby zera znalazły się o ile możności z jednej strony przekątnej :

([1]) Baltzer, l. c., czwarte wydanie str. 22.

wtedy może dany wyznacznik bezpośrednio zredukuje się do wyznacznika stopnia niższego (§ 33). Np.

$$\begin{vmatrix} 4, & 0, & 5, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & 6, & 8, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 0 \\ -2, & 0, & 4, & 1, & 0 \\ 0, & 7, & 9, & 0, & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5, & 4, & 0, & 0, & 0 \\ 8, & \frac{1}{3}, & 2, & 6, & 1 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 4, & -2, & 1, & 0, & 0 \\ 9, & 0, & 0, & 7, & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 5, & 4, & 0, & 0, & 0 \\ 4, & -2, & 1, & 0, & 0 \\ 9, & 0, & 0, & 7, & 2 \\ 8, & \frac{1}{3}, & 2, & 6, & 1 \end{vmatrix} = -2.4.1 \begin{vmatrix} 7, & 2 \\ 6, & 1 \end{vmatrix} = 40.$$

Zadanie. — Objaśnić, dla czego wartość wyznacznika [1]

$$S = \begin{vmatrix} a_1, & b_2, & 0, & 0, \dots, & 0 \\ a_2, & -b_1, & b_3, & 0, \dots, & 0 \\ a_3, & 0, & -b_2, & b_4, \dots, & 0 \\ a_4, & 0, & 0, & -b_3, \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & 0, & 0, & 0, \dots, & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

(1) Hermite, *Sur une question relative à la théorie des nombres.* (Liouville *Journal*, t. XIV, str. 25).

jest

$$S = (-1)^{n-1} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) b_2 b_3 \ldots b_{n-1}.$$

(Mnożąc elementy pierwszego wiersza przez b_1, drugiego przez $b_2, \ldots$, ostatniego przez b_n i następnie dodając do każdego wiersza wszystkie wiersze po nim następujące, otrzymamy wyznacznik, sprowadzający się do wyrazu, utworzonego przez elementy głównej przekątnej, tak, że

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_n . S = (-1)^{n-1} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$$

$$+ a_n b_n) . b_1 b_2 . b_2 b_3 . b_3 b_4 \ldots b_{n-1} b_n ,$$

zkąd owa wartość wyznacznika S).

ROZDZIAŁ PIĄTY

MNOŻENIE WYZNACZNIKÓW

§ 43.

Niechaj będą dwa systematy mn elementów (§ 4) : jeden

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,n}; \end{matrix} \tag{1}$$

drugi

$$\begin{matrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n}, \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,1} & b_{m,2}, & \ldots, & b_{m,n}, \end{matrix} \tag{2}$$

oraz wyznacznik systematu m^2 elementów

$$\begin{array}{l} c_{1,1}, \quad c_{1,2}, \quad . \; . \; . \; , c_{1,m}, \\ c_{2,1}, \quad c_{2,2}, \quad . \; . \; . \; , c_{2,m}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{m,1}, \quad c_{m,2}, \quad . \; . \; . \; , c_{m,m}, \end{array} \tag{3}$$

$$D = \Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \; . \; . \; . \; c_{m,m},$$

tak związanych z elementami systematów (1) i (2), że w systemacie elementów (3) jakikolwiek *element* $c_{i,k}$ *jest summą iloczynów odpowiednich elementów* i-ego *wiersza systematu* (1) i k-ego *wiersza systematu* (2), t. j.

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + . \; . + a_{i,i} b_{k,i} + \ldots + a_{i,n} b_{k,n}, \tag{4}$$

czyli

$$c_{i,k} = \sum_{\lambda}^{1,\ldots,n} a_{i,\lambda} b_{k,\lambda},$$

gdzie Σ obejmuje n składników, otrzymanych przez kolejne nadawanie ilości λ wartości 1, 2, . . . , $n-1$, n.

Postarajmy się, przy takiem założeniu, wyrazić wyznacznik $\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m}$ przez elementy systematów (1) i (2).

Ze związku (4) wypada, że wyraz główny tego wyznacznika może być tak przedstawiony :

$$+ c_{1,1} c_{2,2} c_{3,3} \ldots c_{m,m} =$$

$$= \sum_{\mu}^{1,\ldots,n} a_{1,\mu} b_{1,\mu} \sum_{\nu}^{1,\ldots,} a_{2,\nu} b_{2,\nu} \sum_{\rho}^{1,\ldots,n} a_{3,\rho} b_{3,\rho} \ldots \sum_{\tau}^{1,\ldots,n} a_{m,\tau} b_{m,\tau}$$

gdzie, przy każdej z n wartości 1, 2,..., n liczby μ, należy liczbie ν nadawać z n wartości 1, 2,...,n; przy każdej zaś z tych nn par wartości liczb μ i ν, należy liczbie ρ nadawać każdą z n wartości 1, 2,...,n, i t. d. Jakikolwiek więc z n^m wyrazów po prawej jest

$$a_{1,\mu}b_{1,\mu}a_{2,\nu}b_{2,\nu}\ldots a_{m,\tau}b_{m,\tau}=a_{1,\mu}a_{2,\nu}\ldots a_{m,\tau}b_{1,\mu}b_{2,\nu}\ldots b_{m,\tau},$$

gdzie każda liczba μ, ν,...,τ może mieć którąkolwiek z wartości 1, 2,...n. Możemy więc jeszcze główny wyraz wyznacznika D tak przedstawić:

$$+c_{1,1}c_{2,2}c_{3,3}\ldots c_{m,m}=$$

$$=\sum_{\mu,\nu,\rho\ldots\tau}^{1,2,\ldots,n} a_{1,\mu}a_{2,\nu}a_{3,\rho}\ldots a_{m,\tau}b_{1,\mu}b_{2,\nu}b_{3,\rho}\ldots b_{m,\tau}, \tag{5}$$

gdzie każdy z m wskaźników μ, ν, ρ,...,τ otrzymuje każdą z n wartości 1, 2,...,n.

Żeby z tego głównego wyrazu wyznacznika $\Sigma \pm c_{1,1}\ldots c_{m,m}$ otrzymać wszystkie jego wyrazy, należy (§ 8) we wszelki możliwy sposób przestawić albo pierwsze tylko wskaźniki, albo też drugie tylko wskaźniki elementów wyrazu głównego, nadając przytem wyrazom otrzymanym znaki odpowiednie. Przestawiajmy w wyrazie

$$+c_{1,1}c_{2,2}c_{3,3}\ldots c_{m,m}$$

np. drugie wskaźniki.

Ze związku, jaki, według założenia, ma miejsce między elementami systematów (3), (1) i (2), t. j. z zależności (4), wypada, że zmienić drugi wskaźnik elementu $c_{i,k}$ jest to samo, co zmienić pierwsze wskaźniki elementów $b_{k,1},\ldots,b_{k,n}$, gdyż np.

$$c_{i,l}=a_{i,1}b_{l,1}+a_{i,2}b_{l,2}+\ldots+a_{i,n}b_{l,n}.$$

Jeśli więc mamy po lewej stronie równości (5) wykonywać po kolei wszystkie możliwe przestawienia drugich wskaźników, to należy jednocześnie w każdym wyrazie summy po prawej wykonać też same przestawienia pierwszych wskaźników ilości b. Nadto, za każdą razą, kiedy przed iloczynem ilości c stawiamy znak $+$ lub $-$, tenże sam znak postawimy przed iloczynem ilości b. Jest więc

$$\sum_{\text{dr.ws.}} \pm c_{1,1} c_{2,2} \dots c_{m,m} =$$

$$\sum_{\mu,\nu,\dots,\tau}^{1,2,\dots,n} \left(a_{1,\mu} a_{2,\nu} \dots a_{m,\tau} \sum_{\text{p.ws.}} \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} \dots b_{m,\tau} \right). \tag{6}$$

W summie po prawej wyrażenie $\Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$ jest, według powyższego, summą iloczynów, powstałych z iloczynu $b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$ przez zastąpienie układu pierwszych wskaźników, przez wszelkie ich układy, z poprzedzeniem takich iloczynów znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy układ, który zastąpi układ pierwszych wskaźników iloczynu $b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$ do tej samej czy też do innej klassy należy, niż układ drugich wskaźników iloczynu $c_{1,1} c_{2,2} c_{3,3} \dots c_{m,m}$. Gdy jednak układ drugich wskaźników iloczynu $c_{1,1} c_{2,2} c_{3,3} \dots c_{m,m}$ jest, jak widzimy, tym samym układem, co układ pierwszych wskaźników iloczynu $b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$, to możemy powiedzieć, że: w zachodzącej po prawej stronie równości (6) summie $\Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$ tworzymy oddzielne składniki, zastępując w składniku $b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$ układ pierwszych składników przez wszystkie możliwe ich układy i nadając każdemu takiemu jej składnikowi znak $+$ lub $-$, według tego, czy w nim układ pierwszych wskaźników do tej samej klassy należy, co układ pierwszych wskaźników składnika $b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \dots b_{m,\tau}$, czy też do innej. Widzimy więc (§ 8), że po prawej stronie równości (6) każda summa $\Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \ldots b_{m,\tau}$ jest wyznacznikiem m-ego stopnia,

$$\Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \ldots b_{m,\tau} = \begin{vmatrix} b_{1,\mu}, & b_{1,\nu}, & b_{1,\rho}, & \ldots, & b_{1,\tau} \\ b_{2,\mu}, & b_{2,\nu}, & b_{2,\rho}, & \ldots, & b_{2,\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,\mu}, & b_{m,\nu}, & b_{m,\rho}, & \ldots, & b_{m,\tau} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

którego wyraz główny jest

$$+ b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \ldots b_{m,\tau}.$$

Każdy taki wyznacznik $\Sigma \pm b_{1,\mu} \ldots b_{m,\tau}$ jest w równości (6) pomnożony przez ilość

$$+ a_{1,\mu} a_{2,\nu} a_{3,\rho} \ldots a_{m,\tau}.$$

Widzimy nadto ze związku (6), że, dla otrzymania wyznacznika

$$\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} c_{3,3} \ldots c_{m,m},$$

należy wziąć summę wyrażeń, powstających z wyrażenia

$$+ a_{1,\mu} a_{2,\nu} a_{3,\rho} \ldots a_{m,\tau} \, \Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} b_{3,\rho} \ldots b_{m,\tau} \tag{8}$$

przez nadanie każdej z m ilości $\mu, \nu, \rho, \ldots, \tau$ wszystkich n wartości $1, 2, \ldots, n$.

Tak pojmowany związek (6) przedstawia nam wyrażenie wyznacznika systematu elementów (3) przez elementy systematów (1) i (2).

Ze względu na liczby m i n należy, przy dalszem badaniu związku (6), rozróżnić trzy przypadki.

Popierwsze : $m > n$. Ponieważ w wyrażeniu (6) dla każdej z m liczb

$$\mu,\ \nu,\ \rho,\ldots,\tau \tag{9}$$

mamy nadawać każdą z n tylko wartości

$$1,\ 2,\ \ldots,n, \tag{10}$$

to, w tym przypadku, dwie lub więcej z liczb (9) będą miały tę samą wartość, t. j. będzie w tym przypadku dwa lub więcej drugich wskaźników każdego wyznacznika (7) sobie równych, czyli w systemacie elementów każdego wyznacznika (7) dwie lub więcej kolumn będzie jednakowych, a tem samem każdy wyznacznik (7) jest zerem (§ 20). Wszystkie zatem składniki (8) po prawej stronie związku (6) są zerami, czyli wyznacznik systematu elementów (3) jest zerem.

W przypadku więc, kiedy $m > n$, jest

$$\Sigma \pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{m,m} = 0.$$

Powtóre : $m = n$. Tu każdej z n liczb (9) mamy nadawać każdą z n wartości (10). Gdybyśmy liczbom (9) takie nadali wartości, że dwie lub więcej z nich byłyby sobie równe, to wtedy wyznacznik (7), a tem samem i odpowiedni składnik (8), miałby wartość zero. Możemy więc liczbom (9) przy tworzeniu składników (8) nadawać każdą razą tylko różne od siebie wartości (10). Widzimy zatem, że przy każdej z n wartości (10) dla liczby μ, możemy liczbie ν dawać jedną z pozostałych $n-1$ wartości; obok zaś pewnych wartości liczb μ i ν możemy liczbie ρ nadawać każdą z pozostałych $n-2$ wartości i t. d. W summie zatem (6) składników takich jak (8), a różnych od zera, może być $1.2.3\ldots n$.

Gdy liczbom (9) nadamy różne między sobą wartości (10), np., gdy

$$\mu = p,\quad \nu = q,\quad \rho = r,\ \ldots,\tau = t,$$

tak, że układ

$$p,\ q,\ r,\ \ldots,\ t \tag{11}$$

jest jedną jakąkolwiek przemianą liczb (10), to odpowiedni składnik (8) będzie

$$+a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}\ldots a_{n,t}\Sigma\pm b_{1,p}b_{2,q}b_{3,r}\ldots b_{n,t}. \tag{8'}$$

Ponieważ jednak układ (11) jest pewnym układem liczb (10), to możemy w wyznaczniku $\Sigma\pm b_{1,p}b_{2,q}b_{3,r}\ldots b_{n,t}$ tak poprzestawiać kolumny, aby otrzymać zeń wyznacznik $\Sigma\pm b_{1,1}b_{2,2}\ldots b_{n,n}$, poprzedzony znakiem $+$ lub $-$, według tego, czy układy

$$p,\ q,\ r,\ldots,t \quad \text{i} \quad 1,\ 2,\ 3,\ldots,n$$

do tej samej, czy do innej klassy należą (§ 24), t. j.

$$\Sigma\pm b_{1,p}\ldots b_{n,t}=(+\text{ lub }-)\Sigma\pm b_{1,1}\ldots b_{n,n}.$$

Skutkiem tego, w wyrażeniu (6), zamiast każdego składnika (8') możemy wziąć

$$(+\text{ lub }-)a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}\ldots a_{n,t}\Sigma\pm b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}\ldots b_{n,n}.$$

Takich składników w summie (6) będzie, jakeśmy widzieli, $1.2\ldots n$. Wszystkie one będą miały spólny czynnik $\Sigma\pm b_{1,1}\ldots b_{n,n}$, tak, że zamiast związku (6) możemy napisać

$$D=(\Sigma(+\text{ lub }-)a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}\ldots a_{n,t})\Sigma\pm b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}\ldots b_{n,n}.$$

W tem wyrażeniu w summie $1.2.3\ldots n$ wyrazów

$$(+\text{ lub }-)a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}\ldots a_{n,t}$$

znajduje się, według po wyższego, wyra

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n},$$

od którego pozostałe będą się tem różniły, że będą miały w innym porządku po sobie następujące drugie wskaźniki, t. j. układ drugich wskaźników tego wyrazu będą miały zastąpiony innym układem, i będą poprzedzone znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy ich układ drugich wskaźników do tej samej, czyteż do innej klassy należy, niż układ $1, 2, 3,\ldots,n$, t. j. układ drugich wskaźników elementów wyrazu $+a_{1,1}\ldots a_{n,n}$, Przedstawiają więc (§ 8) te $1.2.3\ldots n$ wyrazów

$$(+ \text{ lub } -)a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}\ldots a_{n,n}$$

wyznacznik

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n}.$$

Widzimy zatem, że w przypadku, kiedy $m=n$, ma miejsce związek

$$\Sigma \pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{n,n} = \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n} \times \Sigma \pm b_{1,1}b_{2,2}\ldots b_{n,n}.$$

Potrzecie: $m<n$. To i w tym przypadku m liczbom

$$\mu, \nu, \rho, \ldots, \tau \tag{9}$$

w wyrażeniu (6) możemy nadawać tylko różne z pomiędzy n

$$1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

gdyż inaczej w składniku (8) czynnik, przedstawiony przez wyznacznik (7), byłby zerem. Takich rozmaitych grupowań z tych n wartości (10) po m różnych, będzie tyle ile jest wariacyj z n po m, t. j.

$$n(n-1)\ldots(n-m+1);$$

tyle więc będzie w summie (6) składników takich, jak (8), a różnych od zera.

Takie nadawanie różnych wartości liczbom (9) możemy systematycznie uskutecznić w ten sposób. Naprzód utworzymy wszystkie kombinacye z n wartości (10) po m. Będzie ich

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}.$$

Każdą taką kombinacyę postawimy po prawej stronie związku (6) zamiast liczb (9), a następnie w każdym ztąd powstałym składniku (8) wykonamy wszystkie $1.2\ldots m$ przemian podstawionych wartości liczb (9).

Utwórzmy więc naprzód wszystkie $\binom{n}{m}$ kombinacyj z n wartości (10) po m. Jedną z nich niech będzie układ

$$f,\ g,\ h,\ldots,s.$$

Dając m liczbom (9) wartości np.

$$\mu=f,\quad \nu=g,\quad \rho=h,\ldots,\tau=s,$$

mieć będziemy jeden składnik summy (6)

$$+a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s}\Sigma\pm b_{1,f}b_{2,g}b_{3,h}\ldots b_{m,s}, \tag{8''}$$

a tworząc następnie wszystkie $1.2\ldots m$ przemian m ilości $f,\ g,\ldots,s$, z których jedną niech będzie przemiana

$$f_1,\ g_1,\ h_1,\ldots,m_1,$$

otrzymamy $1.2\ldots m$ takich składników. Wyznacznik każdego z tych składników, np. składnika

$$+a_{1,f_1}a_{2,g_1}a_{3,h_1}\ldots a_{m,s_1}\Sigma\pm b_{1,f_1}b_{2,g_1}b_{3,h_1}\ldots b_{m,s_1},$$

możemy podobnie, jak w przypadku poprzedzającym, wyrazić przez + lub — wyznacznik $\Sigma \pm b_{1,f}b_{2,g}b_{3,h}\ldots b_{m,s}$, tak, że

$$+a_{1,f_1}a_{2,g_1}a_{3,h_1}\ldots a_{m,s_1}\Sigma \pm b_{1,f_1}b_{2,g_1}b_{3,h_1}\ldots b_{m,s_1}=$$

$$=(+\text{ lub }-)a_{1,f_1}a_{2,g_1}a_{3,h_1}\ldots a_{m,s_1}\Sigma \pm b_{1,f}b_{2,g}b_{3,h}\ldots b_{m,s},$$

gdzie należy wziąć znak + lub —, według tego, czy przemiany

$$f_1,\ g_1,\ h_1,\ldots,s_1 \quad \text{i} \quad f, g,\ h,\ldots,s$$

do jednej, czy do różnych klass należą. W summie $1.2\ldots m$ takich składników wyznacznik $\Sigma \pm b_{1,f}b_{2,g}b_{3,h}\ldots b_{m,s}$ będzie więc spólnym czynnikiem. Pozostałe zaś czynniki tych składników utworzą summę $1.2\ldots m$ wyrazów

$$(+\text{ lub }-)a_{1,f_1}a_{2,g_1}a_{3,h_1}\ldots a_{m,s_1},$$

między któremi będzie $+a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s}$. Odeń inne wyrazy będą się tem różniły, że drugie wskaźniki ich elementów będą różnemi przemianami m liczb $f, g, h,\ldots,s$ i, jak widzieliśmy, będą poprzedzone znakiem + lub —, stosownie do tego, czy ich układ drugich wskaźników do tej samej klassy należy, co układ drugich wskaźników elementów wyrazu $+a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s}$, czy też do innej. Tworzą więc one wyznacznik $\Sigma \pm a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s}$, którego głównym wyrazem jest wyraz $+a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s}$. Te więc $1.2\ldots m$ składników summy (6), utworzonych ze składnika (8″), t. j. odpowiadających jednej kombinacyi wartości

$$f,\ g,\ h,\ldots,s$$

nadanych liczbom (9), przedstawia się jako iloczyn dwu wyznaczników:

$$\Sigma \pm a_{1,f}a_{2,g}a_{3,h}\ldots a_{m,s} \times \Sigma \pm b_{1,f}b_{2,g}b_{3,h}\ldots b_{m,s}. \tag{12}$$

Biorąc drugą z utworzonych $\binom{n}{m}$ kombinacyj wartości (10) dla liczb (9), np. kombinacyę

$$g,\ k,\ l\ldots,v,$$

znajdziemy podobnież, że znowu $1.2\ldots m$ składników summy (6), różnych od tych, które się złożyły na utworzenie iloczynu (12), utworzą drugi podobny iloczyn

$$\Sigma \pm a_{1,g}a_{2,k}a_{3,l}\ldots a_{m,v} \times \Sigma \pm b_{1,g}b_{2,k}b_{3,l}\ldots b_{m,v}, \tag{12'}$$

i t. d. przy każdej z tych $\binom{n}{m}$ kombinacyj.

Jeśli więc rozumieć będziemy, że znak $\sum\limits_{\mu,\ \nu,\ldots,\tau}$ rozciąga się na wszystkie $\binom{n}{m}$ kombinacyj wartości (10), które kolejno na dawać będziemy ilościom (9), to w rozbieranym tu przypadku $(m < n)$, jest

$$\Sigma \pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{m,m} =$$

$$= \sum_{\mu,\ \nu,\ldots,\tau} (\Sigma \pm a_{1,\mu}a_{2,\nu}\ldots a_{m,\tau} \times \Sigma \pm b_{1,\mu}b_{2,\nu}\ldots b_{m,\tau}).$$

Przypatrując się wyrażeniom (12), (12') i ostatniemu, możemy zauważyć, że należy tu z m kolumn systematu (1) utworzyć wyznacznik i pomnożyć go przez wyznacznik odpowiednich (t. j. tężsame miejsca zajmujących) m kolumn systematu (2), tak, że, jeżeli pierwszy z tych wyznaczników nazwiemy A, drugi zaś B, to możemy powiedzieć, iż każda para wyznaczników A i B jest taką, że z wyznacznika A przechodzimy bezpośrednio do wyznacznika B, zastępując głoski a przez głoski b, bez zmiany lub poruszenia wskaźników.

Zbierając razem powyższe wypadki badania, widzimy, że:

Jeśli, mając dwa systematy mn *elementów*

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & \quad & b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}, & & b_{m,1}, \ldots, b_{m,n}, \end{array}$$

utworzymy wyznacznik

$$\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m}$$

systematu m^2 *elementów*

$$\begin{array}{c} c_{1,1}, \ldots, c_{1,m}, \\ \ldots\ldots \\ c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}, \end{array}$$

w którym

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \ldots + a_{i,n} b_{k,n},$$

to: jeśli $m > n$, *jest*

$$\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m} = 0; \qquad (\alpha)$$

jeśli $m = n$, *jest*

$$\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{m,m} \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{m,m}; \qquad (\beta)$$

jeśli zaś $m < n$, *jest*

$$\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m} =$$

$$= \sum_{\mu, \nu, \ldots, \tau} (\Sigma \pm a_{1,\mu} a_{2,\nu} \ldots a_{m,\tau} \Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} \ldots b_{m,\tau}),$$

gdzie znak $\sum\limits_{\mu, \nu, \ldots, \tau}$ *odnosi się do wszystkich różnych* $\binom{n}{m}$ *kombinacyj z* n *liczb*

$$1, 2, \ldots, n,$$

które zamiast m *wskaźników*

$$\mu, \nu, \ldots, \tau$$

podstawić należy ([1]).

Zaznaczymy tu jeszcze, że według związku (4), *elementy wyznacznika* $\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m}$ *są całkowite względem elementów systematów* (1) i (2)([2]), a tem samem *wyznacznik* $\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{m,m}$ *jest funkcyą całkowitą elementów* (1) i (2).

§ 44.

W przypadku m = n odpowiedni związek (β) może być tak przedstawiony :

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & \ldots & , c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & \ldots & , c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & , a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & , b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots & , b_{n,n} \end{vmatrix},$$

([1]) LAGRANGE w *Recherches d'Arithmétique* (*N. mémoires de l'Ac. de Berlin*, 1773, str. 285) dokonywa mnożenia dwóch wyznaczników drugiego stopnia. GAUSS w *Disquisitiones aritmeticæ* (1801) (*C. F. Gauss Werke*, tom I, 1863, str. 305) wymnaża dwa wyznaczniki trzeciego stopnia. CAUCHY i BINET w pracach przedstawionych jednocześnie (30 listop. 1812 r.) Akademii Paryzkiej (wydrukowanych w *Journal de l'école polytechnique*) traktują ogólnie dwa ostatnie (β, γ) przypadki (CAUCHY w *Mém. Sur les Fonctions...* str. 81 i 107 ; BINET w *Mém. sur un Système des Formules analitiques...*, XVI Cahier, str. 286 i następne), choć pierwszy przedstawia swe badania wyraźniej i systematyczniej. Przypadek pierwszy (α) zaznaczył JACOBI (*De formatione...*, str. 309).

Niewłaściwie BALTZER (l. c., czwarte wydanie, str. 46) powiada, że pierwszy «anschauliger Ausdruck» tego twierdzenia dany był przezeń (B.) « in der 3ten Auflage dieses Buches, 1870 », gdyż J. A. SERRET w trzeciem wydaniu (1866) *Cours d'Algèbre supérieure* wypowiada je dobitniej (tom I, str. 537) niż BALTZER, którego nadto dowodzenie polega na tej samej zasadzie, na jakiej SERRET swoje oparł (na jakiej też opiera się dowodzenie tutaj podane), zasadzie, użytej naprzód przez JACOBI'ego (l. c., str. 308-312).

([2]) JACOBI (l. c., str. 310).

czyli według określenia (4),

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \dots & ,a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \dots & ,b_{1,n} \\ b_{2,1}, & \dots & ,b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1}, & \dots & ,b_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n}b_{1,n}, & a_{1,1}b_{2,1}+\dots+a_{1,n}b_{2,n}, & \dots, & a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{1,n}b_{n,n} \\ a_{2,1}b_{1,1}+\dots+a_{2,n}b_{1,n}, & a_{2,1}b_{2,1}+\dots+a_{2,n}b_{2,n} & \dots, & a_{2,1}b_{n,1}+\dots+a_{2,n}b_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{1,n}, & a_{n,1}b_{2,1}+\dots+a_{n,n}b_{2,n}, & \dots, & a_{n,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Np., jeśli mamy dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2} \\ b_{2,1}, & b_{2,2} \end{vmatrix},$$

a utworzymy wyznacznik systematu

$$\begin{matrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, \end{matrix}$$

przy

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2},$$

to

$$D = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2} \\ c_{2,1}, & c_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,1}b_{2,1} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} = D'.D'.$$

Jakoż, rzeczywiście, według §§ 28, 29, 20, 19, mamy tu

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & a_{1,1}b_{2,1} \\ a_{2,1}b_{1,1}, & a_{2,1}b_{2,1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}, & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,1}b_{2,1} \\ a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,1}b_{2,1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix},$$

$$D=b_{1,1}b_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,1} \\ a_{2,1}, & a_{2,1} \end{vmatrix}+b_{1,1}b_{2,2}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}+b_{1,2}b_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,1} \\ a_{2,2}, & a_{2,1} \end{vmatrix}+$$

$$+b_{1,2}b_{2,2}\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,2} \\ a_{2,2}, & a_{2,2} \end{vmatrix},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}.b_{1,1}b_{2,2}-\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}.b_{1,2}b_{2,1},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}.(b_{1,1}b_{2,2}-b_{1,2}b_{2,1})=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2} \\ b_{2,1}, & b_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Podobnież, gdy dane są dwa wyznaczniki trzeciego stopnia,

$$D'=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix}, \qquad D''=\begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix},$$

to, przy

$$c_{i,k}=a_{i,1}b_{k,1}+a_{i,2}b_{k,2}+a_{i,3}b_{k,3},$$

mamy

$$D=\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & c_{1,3} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & c_{2,3} \\ c_{3,1}, & c_{3,2}, & c_{3,3} \end{vmatrix}=D'.D'',$$

gdyż, rozkładając wyznacznik

$$
D=\left|\begin{matrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{1,2}+a_{1,3}b_{1,3}, & a_{1,1}b_{2,1}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{2,3}, \\ & a_{1,1}b_{3,1}+a_{1,2}b_{3,2}+a_{1,3}b_{3,3} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2}+a_{2,3}b_{1,3}, & a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{2,3}, \\ & a_{2,1}b_{3,1}+a_{2,2}b_{3,2}+a_{2,3}b_{3,3} \\ a_{3,2}b_{1,1}+a_{3,2}b_{1,2}+a_{3,3}b_{1,3}, & a_{3,1}b_{2,1}+a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{2,3}, \\ & a_{3,1}b_{3,1}+a_{3,2}b_{3,2}+a_{3,3}b_{3,3} \end{matrix}\right| \qquad (13)
$$

na $3^3=27$ składników (§ 28) i opuszczając składniki równe zeru (§ 30), mamy

$$
D=b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} + b_{1,1}b_{2,3}b_{3,2}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,3}, & a_{2,2} \\ a_{3,1}, & a_{3,3}, & a_{3,2} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ b_{1,2}b_{2,3}b_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,1} \\ a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,1} \\ a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,1} \end{vmatrix} + b_{1,2}b_{2,1}b_{3,3}\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{2,2}, & a_{2,1}, & a_{2,3} \\ a_{3,2}, & a_{3,1}, & a_{3,3} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ b_{1,3}b_{2,1}b_{3,2}\begin{vmatrix} a_{1,3}, & a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,3}, & a_{2,1}, & a_{2,2} \\ a_{3,3}, & a_{3,1}, & a_{3,2} \end{vmatrix} + b_{1,3}b_{2,2}b_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,3}, & a_{1,2}, & a_{1,1} \\ a_{2,3}, & a_{2,2}, & a_{2,1} \\ a_{3,3}, & a_{3,2}, & a_{3,1} \end{vmatrix},
$$

czyli (§§ 19, 24, 9)

$$
D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} .(b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} - b_{1,1}b_{2,3}b_{3,2}+b_{1,2}b_{2,3}b_{3,1} - \\ -b_{1,2}b_{2,1}b_{3,3}+b_{1,3}b_{2,1}b_{3,2}-b_{1,3}b_{2,2}b_{3,1}),
$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix}.$$

W przypadku $m < n$, mamy do czynienia z systematami elementów (1) i (2), w których liczba kolumn jest większą od liczby wierszy. Do takiego przypadku odnosi się wprowadzone w § 16 oznaczenie

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m}, & \ldots, & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,m}, & \ldots, & a_{m,n} \end{matrix}\right\| = \sum_{\mu, \nu, \ldots, \tau} \begin{vmatrix} a_{1,\mu}, & a_{1,\nu}, & \ldots, & a_{1,\tau} \\ . & . & . & . \\ a_{m,\mu}, & a_{m,\nu}, & \ldots, & a_{m,\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\mu, \nu, \ldots, \tau} (\Sigma \pm a_{1,\mu} a_{2,\nu} \ldots a_{m,\tau}),$$

$$\left\|\begin{matrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,m}, & \ldots, & b_{1,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{m,1}, & b_{m,2}, & \ldots, & b_{m,m}, & \ldots, & b_{m,n} \end{matrix}\right\| = \sum_{\mu, \nu, \ldots, \tau} \begin{vmatrix} b_{1,\mu}, & b_{1,\nu}, & \ldots, & b_{1,\tau} \\ . & . & . & . \\ b_{m,\mu}, & b_{m,\nu}, & \ldots, & b_{m,\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\mu, \nu, \ldots, \tau} (\Sigma \pm a_{1,\mu} a_{2,\nu} \ldots a_{m,\tau}),$$

gdzie znak $\sum\limits_{\mu, \nu, \ldots, \tau}$ odnosi się do wszystkich $\binom{n}{m}$ kombinacyj z n liczb (10) po m, które zamiast układu wskaźników $\mu, \nu, \ldots, \tau$ podstawiać należy, czyli do wszystkich różnych kombinacyj po m kolumn z n kolumn systematu (1) i systematu (2). Jeśli nadto zgodzimy się konsekwentnie na oznaczenie

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,m}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1}, \ldots, a_{m,m}, \ldots, a_{m,n} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,m}, \ldots, b_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{m,1}, \ldots, b_{m,m}, \ldots, b_{m,n} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \sum_{\mu,\nu,\ldots,\tau} \cdot (\Sigma \pm a_{1,\mu} a_{2,\nu} \ldots a_{m,\tau} \Sigma \pm b_{1,\mu} b_{2,\nu} \ldots b_{m,\tau}) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu,\ldots,\tau} \begin{vmatrix} a_{1,\mu}, & a_{1,\nu}, \ldots, a_{1,\tau} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,\mu}, & a_{m,\nu}, \ldots, a_{m,\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,\mu}, & b_{1,\nu}, \ldots, b_{1,\tau} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{m,\mu}, & b_{m,\nu}, \ldots, b_{m,\tau} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

to, jak widać z drugich wskaźników, zatrzymując pewne m kolumn pierwszego z danych symbolów i tworząc odpowiedni wyznacznik, mnożymy go przez wyznacznik, powstały wskutek zatrzymania tychże samych kolumn drugiego symbolu. Są więc każde takie dwa wyznaczniki tak ze sobą związane, że z jednego z nich możemy przejść do drugiego, zastępując tylko głoski b przez głoski a, bez poruszenia wskaźników (§ 43). Możemy więc związek (γ) tak przedstawić:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, \ldots, c_{1,m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{m,1}, \ldots, c_{m,m} \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,m}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1}, \ldots, a_{m,m}, \ldots, a_{m,n} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,m}, \ldots, b_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{m,1}, \ldots, b_{m,m}, \ldots, b_{m,n} \end{matrix}\right\|,$$

czyli, według określenia (4),

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,m},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1},\ldots,a_{m,m},\ldots,a_{m,n} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_{1,1},\ldots,b_{1,m},\ldots,b_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{m,1},\ldots,b_{m,m},\ldots,b_{m,n} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,n}b_{1,n},\ldots,a_{1,1}b_{m,1}+\ldots+a_{1,n}b_{m,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1}b_{1,1}+\ldots+a_{m,n}b_{1,n},\ldots,a_{m,1}b_{m,1}+\ldots+a_{m,n}b_{m,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\mu,\nu,\ldots,\tau} \begin{vmatrix} a_{1,\mu}b_{1,\mu}+\ldots+a_{1,\tau}b_{1,\tau},\ldots,a_{1,\mu}b_{m,\mu}+\ldots+a_{1,\tau}b_{m,\tau} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,\mu}b_{1,\mu}+\ldots+a_{m,\tau}b_{1,\tau},\ldots,a_{m,\mu}b_{m,\mu}+\ldots+a_{m,\tau}b_{m,\tau} \end{vmatrix}.$$

Np., jeśli mamy

$$D' = \left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \end{matrix}\right\|, \qquad D'' = \left\|\begin{matrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \end{matrix}\right\|$$

i utworzymy wyznacznik systematu

$$\begin{matrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, \end{matrix} \qquad c_{i,k} = a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2} + a_{i,3}b_{k,3},$$

to

$$D = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2} \\ c_{2,1}, & c_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{1,2}+a_{1,3}b_{1,3}, & a_{1,1}b_{2,1}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2}+a_{2,3}b_{1,3}, & a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{2,3} \end{vmatrix} = D'.D''.$$

Jakoż, rzeczywiście,

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & a_{1,1}b_{2,1} \\ a_{2,1}b_{1,1}, & a_{2,1}b_{2,1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}, & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,1}b_{2,1} \\ a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,1}b_{2,1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,3}b_{2,3} \\ a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,3}b_{2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3}b_{1,3}, & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,3}b_{1,3}, & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,3}b_{1,3}, & a_{1,3}b_{2,3} \\ a_{2,2}b_{1,3}, & a_{2,3}b_{2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & a_{1,3}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1}, & a_{2,3}b_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,3}b_{1,3}, & a_{1,1}b_{2,1} \\ a_{2,3}b_{1,3}, & a_{2,1}b_{2,1} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix} . (b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}b_{2,1})$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,2}, & a_{2,3} \end{vmatrix} . (b_{1,2}b_{2,3} - b_{1,3}b_{2,2})$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,3} \end{vmatrix} . (b_{1,1}b_{2,3} - b_{1,3}b_{2,1});$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2} \\ b_{2,1}, & b_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,2}, & a_{2,3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,2}, & b_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,3} \end{vmatrix},$$

$$D=\sum_{\mu,\nu} \begin{vmatrix} a_{1,\mu}, & a_{1,\nu} \\ a_{2,\mu}, & a_{2,\nu} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{1,\mu}, & b_{1,\nu} \\ b_{2,\mu}, & b_{2,\nu} \end{vmatrix},$$

czyli, według określenia (14),

$$D=\left\Vert \begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \end{matrix} \right\Vert . \left\Vert \begin{matrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \end{matrix} \right\Vert .$$

W przypadku $m > n$, gdybyśmy również uważali wyznacznik

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & \dots, & c_{1,n}, & \dots, & c_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1}, & \dots, & c_{n,n}, & \dots, & c_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1}, & \dots, & c_{m,n}, & \dots, & c_{m,m} \end{vmatrix}$$

jako iloczyn symbolów (§ 16)

$$\left\Vert \begin{matrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots, & a_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots, & a_{m,n} \end{matrix} \right\Vert , \qquad \left\Vert \begin{matrix} b_{1,1}, & \dots, & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1}, & \dots, & b_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1}, & \dots, & b_{m,n} \end{matrix} \right\Vert , \tag{15}$$

to, zważając na określenie (4), możemy związek (α) tak przedstawić:

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & \ldots, & a_{m,n} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_{1,1}, & \ldots, & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots, & b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,1}, & \ldots, & b_{m,n} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \ldots + a_{1,n}b_{1,n}, \ldots, & a_{1,1}b_{m,1} + \ldots + a_{1,n}b_{m,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m,1}b_{1,1} + \ldots + a_{m,n}b_{1,n}, \ldots, & a_{m,1}b_{m,1} + \ldots + a_{m,n}b_{m,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozkładając tu bowiem wyznacznik po prawej na składniki (§ 28), przekonamy się, że w każdym z n^m tych składników m-ego stopnia $m-n$ (co najmniej) kolumn będą utworzone przez elementy proporcyonalne względem elementów innych jego kolumn. Gdy ten iloczyn równa się zeru, to musimy przyjąć, że w tym przypadku wartość każdego z symbolów (15) jest zero.

Np., jeśli mamy

$$D' = \left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \\ a_{3,1}, & a_{3,2} \end{matrix}\right\|, \qquad D'' = \left\|\begin{matrix} b_{1,1}, & b_{1,2} \\ b_{2,1}, & b_{2,2} \\ b_{3,1}, & b_{3,2} \end{matrix}\right\| \qquad (15')$$

i, przy

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2},$$

utworzymy wyznacznik

$$D = D'.D'' = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & c_{1,3} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & c_{2,3} \\ c_{3,1}, & c_{3,2}, & c_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{1,2}, & a_{1,1}b_{2,1}+a_{1,2}b_{2,2}, & a_{1,1}b_{3,1}+a_{1,2}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2}, & a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2}, & a_{2,1}b_{3,1}+a_{2,2}b_{3,2} \\ a_{3,1}b_{1,1}+a_{3,2}b_{1,2}, & a_{3,1}b_{2,1}+a_{3,2}b_{2,2}, & a_{3,1}b_{3,1}+a_{3,2}b_{3,2} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

to $D=0$. Istotnie, rozkładając ostatni wyznacznik na $2^3=8$ składników, mamy

$$D = b_{1,1}\, b_{2,2}\, b_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{1,1} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,1} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,1} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{1,1}\, b_{2,1}\, b_{3,2} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,1}, & a_{2,2} \\ a_{3,1}, & a_{3,1}, & a_{3,2} \end{vmatrix} + \ldots\ldots = 0.$$

Ponieważ zaś $D = D'.D''$, to i $D'=0$, i $D''=0$, gdyż nie ma przyczyn, dla których, przyjmując, że wartość jednego z symbolów D' i D'' jest zero, nie mielibyśmy przyjąć, że i drugi jest zerem. A to tem więcej, że gdybyśmy według (β) pomnożyli przez siebie dwa takie wyznaczniki trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & 0 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & 0 \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & 0 \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & 0 \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & 0 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

to, stosownie do odnoszącego się do tego przypadku związku (13), otrzymalibyśmy wyznacznik (16). Symbole więc (15′) zachowują się w mnożeniu tak, jak gdyby one były wyznacznikami (17), które są oczywiście równe zeru ([1]).

§ 45.

Elementy systematu (3) wyznacznika, przedstawiającego iloczyn, określiliśmy w § 43 związkiem

$$c_{i,k}=a_{i,1}\, b_{k,1}+a_{i,2}\, b_{k,2}+\ldots+a_{i,n}\, b_{k,n},$$

to jest, uważalibyśmy element $c_{i,k}$ systematu (3), jako summę

([1]) Więc, wogóle, w mnożeniu, symbol

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & \ldots, & a_{m,n} \end{matrix}\right\|,$$

w którym liczba kolumn mniejsza od liczby wierszy, zachowuje się tak, jak gdyby

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & \ldots, & a_{m,n} \end{matrix}\right\| = \left|\begin{matrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & \ldots, & a_{m,n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{matrix}\right| = 0.$$

Oto przyczyna, dla której w § 16 przypadek, kiedy liczba kolumn jest mniejszą niż liczba wierszy, oddzielony został od przypadku przeciwnego, oraz dla której odpowiednim symbolom przypisane zostały znaczenia odmienne w każdym z tych dwu przypadków.

iloczynów odpowiednich elementów i-ego wiersza systematu (1) i k-ego wiersza systematu (2). Lecz, oczywiście (§ 18), moglibyśmy dać inne określenie elementu $c_{i,k}$, mianowicie:

$$c_{i,k}=a_{1,i}b_{1,k}+a_{2,i}b_{2,k}+\ldots+a_{n,i}\,b_{n,k},$$

to jest, uważać element $c_{i,k}$ systematu (3) jako summę iloczynów odpowiednich elementów i-ej kolumny systematu (1) i k-ej kolumny systematu (2). Lecz wtedy wypadłoby zmienić ogólne wysłowienie twierdzenia § 43-go [to jest, zależność (γ) odnieść do $m>n$, zależność zaś (α) do $m<n$], jakoteż zmienić odpowiednie określenia, postawione w § 16-ym.

Rozważmy tylko pod tym względem przypadek $m=n$.

Mając pomnożyć przez siebie dwa wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{D}', \qquad \begin{vmatrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,n} \\ \ldots \\ b_{n,1}, \ldots, b_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{D}'',$$

możemy utworzyć ich iloczyn

$$\mathrm{D}'\mathrm{D}''=\mathrm{D}=\begin{vmatrix} c_{1,1}, \ldots, c_{1,n} \\ \ldots \\ c_{n,1}, \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

gdzie, według związku (4),

$$c_{i,k}=a_{i,1}b_{k,1}+a_{i,2}b_{k,2}+\ldots+a_{i,n}b_{k,n};$$

jest więc w wyznaczniku D element $c_{i,k}$ summą iloczynów elementów i-ego wiersza wyznacznika D′ przez odpowiednie elementy k-ego wiersza wyznacznika D″.

Jeśli jednak w systemacie elementów wyznacznika D′ weźmiemy wiersze za kolumny (§ 18), to wartość wyznacznika D″ się nie zmieni, lecz teraz elementami k-ego wiersza będą elementy poprzednio k-ej kolumny, to jest, $b_{1,k}, b_{2,k}, \ldots, b_{n,k}$, tak, że związek (4) będzie teraz

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}\, b_{n,k}.$$

Jeśli, zostawiając nieporuszonemi elementy pierwotnego systematu wyznacznika D″, w systemacie elementów wyznacznika D′ wiersze weźmiemy za kolumny, to, według (4), możemy jeszcze przyjąć, że w systemacie elementów wyznacznika D jest wogóle

$$c_{i,k} = a_{1,i} b_{k,1} + a_{2,i} b_{k,2} + \ldots + a_{n,i} b_{k,n}.$$

Gdy nakoniec w obu danych początkowo systematach elementów wyznaczników D i D′ wiersze weźmiemy za kolumny, to, według (4), w systemacie elementów wyznacznika D

$$c_{i,k} = a_{1,i} b_{1,k} + a_{2,i} b_{2,k} + \ldots + a_{n,i} b_{n,k}.$$

Odnosząc te cztery sposoby tworzenia elementów wyznacznika D do pierwotnych, wyżej wypisanych, systematów elementów wyznaczników D′ i D″, możemy powiedzieć, że *przy mnożeniu przez siebie dwu wyznaczników jednakowego stopnia winniśmy stale mnożyć odpowiednie*: 1° *elementy każdego wiersza jednego przez elementy wszystkich wierszy drugiego wyznacznika*, 2° *albo elementy każdego wiersza jednego przez elementy wszystkich kolumn drugiego*, 3° *albo elementy każdéj kalumny jednego przez elementy wszystkich wierszy drugiego*, 4° *albo téż elementy każdej* *kolumny jednego przez elementy wszystkich kolumn drugiego z danych wyznaczników* ([1]). Np.

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2, & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1, & a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\beta_1, & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2, & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2, & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

Jeśli tu przyjmiemy, że

$$a_1 = +a + b\sqrt{-1}, \quad b_1 = +c + d\sqrt{-1},$$

$$a_2 = -c + d\sqrt{-1}, \quad b_2 = +a - b\sqrt{-1},$$

$$\alpha_1 = +a' + b'\sqrt{-1}, \quad \beta_1 = +c' + d'\sqrt{-1},$$

$$\alpha_2 = -c' + d'\sqrt{-1}, \quad \beta_2 = +a' - b'\sqrt{-1},$$

([1]) CAUCHY, l. c., str. 83.

to (§ 9, 5°)

$$\begin{vmatrix} a+b\sqrt{-1}, & -c+d\sqrt{-1} \\ c+d\sqrt{-1}, & a-b\sqrt{-1} \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

$$\begin{vmatrix} a'+b'\sqrt{-1}, & -c'+d'\sqrt{-1} \\ c'+d'\sqrt{-1}, & a'-b'\sqrt{-1} \end{vmatrix} = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2;$$

mnożąc zaś te dwa wyznaczniki przez siebie (elementy kolumny przez elementy kolumny), otrzymamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} (aa'-bb'+cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'+dc')\sqrt{-1}, & -(ac'+bd'-ca'-db')+(ad'-bc'-cb'+da')\sqrt{-1} \\ (ac'+bd'-ca'-db')+(ad'-bc'-cb'+da')\sqrt{-1}, & (aa'-bb'+cc'-dd')-(ab'+ba'+cd'+dc')\sqrt{-1} \end{vmatrix},$$

którego wartość (analogicznie względem wartości każdego z czynników) jest [1]

$$(aa'-bb'+cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'+dc')^2+$$

$$+(ac'+bd'-ca'-db')^2+(ad'-bc'-cb'+da')^2.$$

---

[1] Wypadek ten wskazuje, że, mnożąc przez siebie dwie summy czterech kwadratów, otrzymamy w iloczynie summę czterech kwadratów. Euler, *Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata* (*Acta Academiae S. I. Petropolitanae* za 1777 r., str. 59).

Zadania. 1° Sprawdzić, że wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia

$$J = \begin{vmatrix} a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}, & a_{1,3}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,3}, & \ldots, & a_{1,n}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,n} \\ a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,2}, & a_{2,3}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,3}, & \ldots, & a_{2,n}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,2}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,2}, & a_{n-1,3}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,3}, & \ldots, & a_{n-1,n}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

jest iloczynem dwu wyznaczników n-ego stopnia, jednego

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

drugiego zaś (§ 42)

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_1, & a_{2,1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \alpha_2, & -a_{1,1}, & a_{3,1}, & \ldots, & 0 \\ \alpha_3, & 0, & -a_{2,1}, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n, & 0, & 0, & \ldots, & -a_{n-1,1} \end{vmatrix},$$

w założeniu, że ilości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ zadosyć czynią n związkom

$$\alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots + \alpha_n a_{n,1} = 1,$$

$$\alpha_1 a_{1,2} + \alpha_2 a_{2,2} + \ldots + \alpha_n a_{n,2} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

$$\alpha_1 a_{1,n} + \alpha_2 a_{2,n} + \ldots + \alpha_n a_{n,n} = 0;$$

jest więc [1]:

$$J=(-1)^{n-1} a_{2,1}a_{3,1}\ldots a_{n-1,1}P.$$

2° Sprawdzić, że mnożąc wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, & 1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}, & 1 \\ 1, & 1, & \ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

przez wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & k_1 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & k_n \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

(wiersze przez wiersze), zaś wyznacznik, otrzymany jako iloczyn, mnożąc jeszcze przez wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & 0 \\ h_1, & h_2, & \ldots, & h_n, & 1 \end{vmatrix}$$

---

[1] HERMITE, l. c., str. 26. Ostatnie wyrażenie wyznacznika J otrzy-

(kolumny przez kolumny), otrzymujemy związek

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n}, & 1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,n}, & 1 \\ . & , & . & . & . \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n}, & 1 \\ 1, & 1, & \dots, & 1, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}+h_1+k_1, & a_{1,2}+h_1+k_2, \dots, & a_{1,n}+h_1+k_n, & 1 \\ a_{2,1}+h_2+k_1, & a_{2,2}+h_2+k_2, \dots, & a_{2,n}+h_2+k_n, & 1 \\ . & . & , & . \\ a_{n,1}+h_n+k_1, & a_{n,2}+h_n+k_2, \dots, & a_{n,n}+h_n+k_n, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix},$$

przy jakichkolwiek wartościach ilości h i k (1).

§ 46.

Gdyby systemat (2) był tym samym systematem, co systemat (1), to jest, gdyby

$$b_{j,l} = a_{j,l},$$

---

mamy, zważając, że, według § 42-ego, wartość wyznacznika S, w naszem założeniu, jest

$$S = (-1)^{n-1} a_{2,1} a_{3,1} \dots a_{n-1,1}.$$

(1) SYLVESTER (*Philosophical Magazine* za 1852 r.)

dla wszystkich wartości wskaźników j i l, to związek (4) przeszedłby w następujący

$$c_{i,k}=a_{i,1}a_{k,1}+a_{i,2}a_{k,2}+\ldots+a_{i,n}a_{k,n},$$

że zaś byłoby jeszcze

$$c_{k,i}=a_{k,1}a_{i,1}+a_{k,2}a_{i,2}+\ldots+a_{k,n}a_{i,n},$$

więc

$$c_{i,k}=c_{k,i},$$

t. j., wtedy elementy sprzężone (§ 5) systematu (3) będą jednakowe, zaś elementy głównéj przekątnej będą summami kwadratów, gdyż

$$c_{i,i}=a_{i,1}^2+a_{i,2}^2+\ldots+a_{i,n}^2.$$

Twierdzenie zaś o mnożeniu wyznaczników przejdzie w następujące:

Jeśli mając systemat mn *elementów*

$$\begin{array}{c} a_{1,1},\ldots,\ a_{1,n}, \\ .\quad.\quad.\quad.\quad., \\ a_{m,1},\ldots,\ a_{m,n}, \end{array}$$

utworzymy wyznacznik

$$\Sigma\pm c_{1,1}c_{1,2}\ldots,\ c_{m,m}$$

systematu m² *elementów*

$$\begin{array}{c} c_{1,1},\ldots,\ c_{1,m}, \\ .\quad.\quad.\quad.\quad. \\ c_{m,1},\ldots\ c_{m,m}. \end{array}$$

w którym

$$c_{i,k}=a_{i,1}a_{k,1}+a_{i,2}a_{k,2}+\ldots+a_{i,n}a_{k,n},$$

a tem samem

$$c_{i,k}=c_{k,i},$$

$$c_{i,i}=a_{i,1}^2+a_{i,2}^2+\ldots+a_{i,n}^2,$$

to: jeśli $m>n$, *jest*

$$\Sigma\pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{m,m}=0; \qquad (\delta)$$

jeśli $m=n$, *jest*

$$\Sigma\pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{n,n}=(\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n})^2; \qquad (\varepsilon)$$

jeśli zaś $m<n$, *jest*

$$\Sigma\pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{m,m}=\sum_{\mu,\nu,\ldots,\tau}(\Sigma\pm a_{1,\mu}a_{2,\nu}\ldots a_{m,\tau})^2, \qquad (\eta)$$

gdzie znak $\sum\limits_{\mu,\nu,\ldots,\tau}$ *odnosi się do wszystkich* $\binom{n}{m}$ *kombinacyj z* n *liczb*

$$1,2,\ldots,n$$

po m, *które zamiast układu* m *wskaźników*

$$\mu,\nu,\ldots,\tau$$

podstawić należy (¹).

(¹) Binet, l. c., str. 292; Jacobi, l. c., str. 312

Związek (ε) może być tak przedstawiony

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, \dots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}^2 + \dots + a_{1,n}^2, & a_{1,1}a_{2,1} + \dots + a_{1,n}a_{2,n}, \dots, & a_{1,1}a_{n,1} + \dots + a_{1,n}a_{n,n} \\ a_{1,1}a_{2,1} + \dots + a_{1,n}a_{2,n}, & a_{2,1}^2 + \dots + a_{2,n}^2, \dots, & a_{2,1}a_{n,1} + \dots + a_{2,n}a_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,1}a_{n,1} + \dots + a_{1,n}a_{n,n}, & a_{2,1}a_{n,1} + \dots + a_{2,n}a_{n,n}, \dots, & a_{n,1}^2 + \dots + a_{n,n}^2 \end{vmatrix},$$

np. (§ 45)

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2, & x_1y_1 + x_2y_2 \\ x_1y_1 + x_2y_2, & y_1^2 + y_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2, & x_2y_2 \\ x_1y_1, & y_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2^2, & x_1y_1 \\ x_2y_2, & y_1^2 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 + x_2y_1, & x_1x_2 + x_2y_2 \\ x_1y_1 + y_1y_2, & x_2y_1 + y_2^2 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2, & x_2^2 + y_2^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & , x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, & x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, & y_1^2+y_2^2+y_3^2 & , y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 \\ x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 & , y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 & , z_1^2+z_2^2+z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Według związku (η) winno być np.

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_1 \end{matrix}\right\|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & , x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, & y_1^2+y_2^2+y_3^2 \end{vmatrix} = \sum_{\mu,\nu} \begin{vmatrix} x_\mu, & x_\nu \\ y_\mu, & y_\nu \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1, & x_3 \\ y_1, & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2, & x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix}^2;$$

jakoż, rzeczywiście, rozkładając wyznacznik, przedstawiający kwadrat, na $3^2=9$ składników, lecz opuszczając równe zeru, a do każdej pary składników stosując zależność (18), mamy

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{matrix}\right\|^2 = \begin{vmatrix} x_1^2, & x_2 y_2 \\ x_1y_1, & y_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2^2, & x_1y_1 \\ x_2y_2, & y_1^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2^2, & x_3y_3 \\ x_2y_2, & y_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3^2, & x_2y_2 \\ x_3y_3, & y_2^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x_1^2, & x_3y_3 \\ x_1y_1, & y_3^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3^2, & x_1y_1 \\ x_3y_3, & y_1^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2, & x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1, & x_3 \\ y_1, & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Związek nakoniec (δ) daje nam np.

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{matrix}\right\|^2=\begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2, & x_1y_1+x_2y_2, & x_1z_1+x_2z_2 \\ x_1y_1+x_2y_2, & y_1^2+y_2^2, & y_1z_1+y_2z_2 \\ x_1z_1+x_2z_2, & y_1z_1+y_2z_2, & z_1^2+z_2^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0 \\ z_1, & z_2, & 0 \end{vmatrix}^2=0.$$

Należy tu jeszcze zrobić uwagę, że wyznacznik $\Sigma\pm c_{1,1}\ldots c_{m,m}$ jest, wogóle mówiąc, summą kwadratów wyznaczników, będących (§ 8) wyrażeniami całkowitemi względem elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{m,1}, & \ldots & ,a_{m,n}; \end{matrix}$$

skutkiem tego *przy rzeczywistych wartościach tych elementów, wyznacznik* $\Sigma\pm c_{1,1}\ldots c_{m,m}$ *wtedy tylko może być równy zeru, kiedy każdy z wyznaczników* $\Sigma\pm a_{1,\mu}\ldots a_{m,\tau}$ *jest zerem* (¹).

(¹) Jacobi, ibidem.

§ 47.

Mnożąc przez siebie dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,l}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i,1}, \ldots, a_{i,l}, \ldots, a_{i,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,l}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,l}, \ldots, b_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{k,1}, \ldots, b_{k,l}, \ldots, b_{k,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n,1}, \ldots, b_{n,l}, \ldots, b_{n,n} \end{vmatrix},$$

otrzymamy (§§ 43, 44), przy

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2} + \ldots + a_{i,l}b_{k,l} + \ldots + a_{i,n}b_{k,n},$$

$$D'D'' = D = \begin{vmatrix} c_{1,1}, \ldots, c_{1,k}, \ldots, c_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i,1}, \ldots, c_{i,k}, \ldots, c_{i,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n,1}, \ldots, c_{n,k}, \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \ldots + a_{1,n}b_{1,n}, \ldots, a_{1,1}b_{k,1} + \ldots + a_{1,n}b_{k,n}, \ldots, \\ \qquad a_{1,1}b_{n,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i,1}b_{1,1} + \ldots + a_{i,n}b_{1,n}, \ldots, a_{i,1}b_{k,1} + \ldots + a_{i,n}b_{k,n}, \ldots, \\ \qquad a_{i,1}b_{n,1} + \ldots + a_{i,n}b_{n,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1} + \ldots + a_{n,n}b_{1,n}, \ldots, a_{n,1}b_{k,1} + \ldots + a_{n,n}b_{k,n}, \ldots, \\ \qquad a_{n,1}b_{n,1} + \ldots + a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Zbadajmy, jakie zachodzą związki pomiędzy ilościami dołączonemi (§ 25) do elementów wyznacznika D a ilościami dołączonemi do elementów wyznacznika D' i do elementów wyznacznika D''. Rozkładając wyznacznik D' według elementów jego i-ego wiersza, mieć będziemy

$$D' = a_{i,1}A_{i,1} + \ldots + a_{i,l}A_{i,l} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n},$$

gdzie (§ 25) wogóle

$$A_{i,l} = (-1)^{i+l} \begin{vmatrix} a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,l-1}, & a_{1,l+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,l-1}, & a_{i-1,l+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,l-1}, & a_{i+1,l+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,l-1}, & a_{n,l+1} & ,\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+l} d'_l,$$

jeśli przez d'_l oznaczymy wyznacznik, powstały z wyznacznika D' przez opuszczenie w systemacie jego elementów i-ego wiersza i l-ej kolumny. Podobnież, rozkładając wyznacznik D'' według elementów jego k-ego wiersza, mamy

$$D'' = b_{k,1}B_{k,1} + \ldots + b_{k,l}B_{k,l} + \ldots + b_{k,n}B_{k,n},$$

gdzie również jest wogóle

$$B_{k,l} = (-1)^{k+l} \begin{vmatrix} b_{1,1} & ,\ldots, & b_{1,l-1} & , b_{1,l+1} & ,\ldots, & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k-1,1}, & \ldots, & b_{k-1,l-1}, & b_{k-1,l+1}, & \ldots, & b_{k-1,n} \\ b_{k+1,1}, & \ldots, & b_{k+1,l-1}, & b_{k+1,l+1}, & \ldots, & b_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & ,\ldots, & b_{n,l-1} & , b_{n,l+1} & ,\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{k+l} d''_l.$$

Rozkładając teraz wyznacznik D według elementów i-ego wiersza, otrzymamy

$$D = c_{i,1}C_{i,1} + \dots + c_{i,k}C_{i,k} + \dots + c_{i,n}C_{i,n},$$

gdzie podobnież $\quad C_{i,k} = (-1)^{i+k} \times$

$$\left|\begin{array}{l}
a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n}b_{1,n},\dots,\quad a_{1,1}b_{k-1,1}+\dots+a_{1,n}b_{k-1,n},\\
\qquad a_{1,1}b_{k+1,1}+\dots+a_{1,n}b_{k+1,n},\dots,a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{1,n}b_{n,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{i-1,1}b_{1,1}+\dots+a_{i-1,1}b_{1,n},\dots,a_{i-1,1}b_{k-1,1}+\dots+a_{i-1,n}b_{k-1,n},\\
\qquad a_{i-1,1}b_{k+1,1}+\dots+a_{i-1,n}b_{k+1,n},\dots,a_{i-1,1}b_{n,1}+\dots+a_{i-1,n}b_{n,n}\\
a_{i+1,1}b_{1,1}+\dots+a_{i+1,1}b_{1,n},\dots,a_{i+1,1}b_{k-1,1}+\dots+a_{i+1,n}b_{k-1,n},\\
\qquad a_{i+1,1}b_{k+1,1}+\dots+a_{i+1,n}b_{k+1,n},\dots,a_{i+1,1}b_{n,1}+\dots+a_{i+1,n}b_{n,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{1,n},\dots,\quad a_{n,1}b_{k-1,1}+\dots+a_{n,n}b_{k-1,n},\\
\qquad a_{n,1}b_{k+1,1}+\dots+a_{n,n}b_{k+1,n},\dots,a_{n,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,n}
\end{array}\right|$$

Przypatrując się temu wyznacznikowi widzimy, że, według związku (γ) § 43-ego, jest

$$C_{i,k} = (-1)^{i+k} \times$$

$$\left\|\begin{array}{l}
a_{1,1}\quad,\dots,a_{1,l}\quad,\dots,a_{1,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{i-1,1},\dots,a_{i-1,l},\dots,a_{i-1,n}\\
a_{i+1,1},\dots,a_{i+1,l},\dots,a_{i+1,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{n,1}\quad,\dots,a_{n,l}\quad,\dots,a_{n,n}
\end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{l}
b_{1,1}\quad,\dots,b_{1,l}\quad,\dots,b_{1,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
b_{k-1,1},\dots,b_{k-1,l},\dots,b_{k-1,n}\\
b_{k+1,1},\dots,b_{k+1,l},\dots,b_{k+1,n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
b_{n,1}\quad,\dots,b_{n,l}\quad,\dots,b_{n,n}
\end{array}\right\|.$$

Ponieważ w każdym z tych symbolów jest n kolumn, za $n-1$ wierszy, więc ich iloczyn, t. j. powyższa postać wyznacznika wchodzącego w ilość $C_{i,k}$ przedstawia summę iloczynów wyznaczników, powstających z różnych kombinacyi po $n-1$ kolumn pierwszego symbolu, przez wyznaczniki utworzone przez odpowiednie kolumny drugiego symbolu (§§ 43, 44). Kombinacyj tych jest tu $\binom{n}{n-1}=n$. To jest: trzeba w obu symbolach jednocześnie opuszczać kolejno każdą kolumnę, każdą parę takich wyznaczników przez siebie pomnożyć, a iloczynów tych wziąć summę. Gdy w ten sposób opuścimy pierwszą kolumnę, to z pierwszego symbolu otrzymamy wyznacznik d'_1, z drugiego d''_1; gdy opuścimy drugą kolumnę, otrzymamy d'_2 i d''_2 i t. d. Będzie więc

$$C_{i,k}=(-1)^{i+k}(d'_1 d''_1+\ldots+d'_l d''_l+\ldots+d'_n d''_n).$$

Wyrażenie to możemy tak przekształcić

$$C_{i,k}=(-1)^{i+k+2}d'_1 d''_1+(-1)^{i+k+2.2}d'_2 d''_2+\ldots+$$
$$(-1)^{i+k+2l}d'_l d''_l+\ldots+(-1)^{i+k+2n}d'_n d''_n,$$

$$C_{i,k}=(-1)^{i+1}d'_1.(-1)^{k+1}d''_1+(-1)^{i+2}d'_2.(-1)^{k+2}d''_2+\ldots+$$
$$(-1)^{i+l}d'_l.(-1)^{k+l}d''_l+\ldots+(-1)^{i+n}d'_n.(-1)^{k+n}d''_n.$$

Lecz mieliśmy wyżej, wogóle,

$$(-1)^{i+l}d'_l=A_{i,l},$$

$$(-1)^{k+l}d''_l=B_{k,l};$$

kładąc więc w tych związkach kolejno

$$l = 1,\ 2, \ldots,\ l, \ldots, n,$$

możemy ostatecznie wyrażenie dla $C_{i,k}$ tak przedstawić:

$$C_{i,k} = A_{i,1}B_{k,1} + A_{i,2}B_{k,2} + \ldots + A_{i,l}B_{k,l} + \ldots + A_{i,n}B_{k,n}\ (^1).$$

Porównywając to wyrażenie, z wyrażeniem powyżej postawionem, jako określenie elementu $c_{i,k}$:

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2} + \ldots + a_{i,l}b_{k,l} + \ldots + a_{i,n}b_{k,n},$$

widzimy, że

Sposób w jaki element iloczynu dwu danych wyznaczników zależy od ich elementów, określa także zależność ilości, dołączonej do tego elementu iloczynu, od ilości, dołączonych do elementów danych wyznaczników.

Gdybyśmy więc tworzyli iloczyn wyznaczników D′ i D″, przyjmując (§ 45)

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}b_{n,k},$$

$$c_{i,k} = a_{1,i}b_{k,1} + a_{2,i}b_{k,2} + \ldots + a_{n,i}b_{k,n},$$

$$c_{i,k} = a_{1,i}b_{1,k} + a_{2,i}b_{2,k} + \ldots + a_{n,i}b_{n,k},$$

to otrzymalibyśmy odpowiednio

$$C_{i,k} = A_{i,1}B_{1,k} + A_{i,2}B_{2,k} + \ldots + A_{i,n}B_{n,k},$$

$$C_{i,k} = A_{1,i}B_{k,1} + A_{2,i}B_{k,2} + \ldots + A_{n,i}B_{k,n},$$

$$C_{i,k} = A_{1,i}B_{1,k} + A_{2,1}B_{2,k} + \ldots + A_{n,i}B_{n,k}.$$

---

(1) CAUCHY, l. c., str. 90. Sposób taki wyprowadzenia tej zależności obmyśliłem w tym celu, aby podać zastosowanie związku (γ) twierdzenia § 43-ego. Zależność ta będzie wyprowadzona inaczej w § 64.

Nadto, w kwadracie wyznacznika (§ 46),

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots & ,a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & \dots & ,c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1}, & \dots & ,c_{n,n} \end{vmatrix},$$

przy

$$c_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \dots + a_{i,n}a_{k,n} = c_{k,i},$$

jest

$$C_{i,k} = A_{i,1}A_{k,1} + A_{i,2}A_{k,2} + \dots A_{i,n}A_{k,n} = C_{k,i},$$

t. j., jeśli wyznacznik jest kwadratem innego wyznacznika, to ilości dołączone do jego elementów sprzężonych są równe. Wtedy jeszcze

$$c_{i,i} = a^2_{i,1} + a^2_{i,2} + \dots + a^2_{i,n},$$

więc

$$C_{i,i} = A^2_{i,1} + A^2_{i,2} + \dots + A^2_{i,n}.$$

Że zaś każda z ilości $A_{i,1},\dots,A_{i,n}$ jest funkcyą całkowitą względem elementów $a_{1,1},\dots,a_{i,k},\dots a_{n,n}$ (§§ 25) to : ilości dołączone do elementów głównej przekątnej wyznacznika, przedstawiającego kwadrat wyznacznika danego, są summą kwadratów wyrażeń całkowitych względem elementów wyznacznika danego. Inaczej : *jeśli elementy danego wyznacznika są ilościami rzeczywistemi, to ilości, dołączone do elementów głównej przekątnej wyznacznika, będącego kwadratem wyznacznika danego, są stale dodatne* (1).

Też same własności mieć będzie kwadrat wyznacznika, jeśliśmy dla utworzenia go, mnożyli elementy kolumny przez odpowiednie elementy kolumny.

(1) BELLAVITIS, l. c., § 35.

§ 48.

Według związku (β) § 43-ego, mnożąc przez siebie dwa wyznaczniki, oba n-ego stopnia, otrzymujemy, jako ich iloczyn, także wyznacznik n-ego stopnia. Do tego przypadku możemy sprowadzić i ten, kiedy dane do pomnożenia przez siebie wyznaczniki nie są jednakowego stopnia.

Gdy bowiem mamy pomnożyć przez siebie dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{p,1}, \ldots, b_{p,p} \end{vmatrix},$$

przy $p < n$, to możemy wyznacznik D″ przedstawić w postaci wyznacznika n-ego stopnia (§ 34),

$$D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1} & , \ldots , b_{1,p} & , & 0 & , & 0 & , \ldots , 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p,1} & , \ldots , b_{p,p} & , & 0 & , & 0 & , \ldots , 0 \\ b_{p+1,1} & , \ldots , b_{p+1,p} & , & 1 & , & 0 & , \ldots , 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & , \ldots , b_{n,p} & , & b_{n,p+1} & , & b_{n,p+2} & , \ldots , 1 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

gdzie ilości

$$\begin{matrix} b_{p+1,1}, \ldots, b_{p+1,p}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n,1} \qquad , b_{n,p}, \; b_{n,p+1}, \ldots, b_{n,n-1} \end{matrix} \tag{19'}$$

mogą mieć jakiekolwiek skończone wartości. Mnożąc wyznacznik D″ w tak mu nadanej postaci wyznacznika n-ego stopnia przez wyznacznik D′, otrzymamy (§ 44), przy

$$a_{i,1}b_{k,1}+\ldots+a_{i,n}b_{k,n}=c_{i,k},$$

$$\mathrm{D}'\mathrm{D}''=\mathrm{D}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,p}b_{1,p},\ldots,a_{1,1}b_{p,1}+\ldots+a_{1,p}b_{p,p},a_{1,1}b_{p+1,1}+\ldots+ \\ \qquad a_{1,p}b_{p+1,p}+a_{1,p+1},\ldots,a_{1,1}b_{n,1}+\ldots+a_{1,n-1}b_{n,n-1}+a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{p,1}b_{1,1}+\ldots+a_{p,p}b_{1,p},\ldots,a_{p,1}b_{p,1}+\ldots+a_{p,p}b_{p,p},a_{p,1}b_{p+1,1}+\ldots+ \\ \qquad a_{p,p}b_{p+1,p}+a_{p,p+1},\ldots,a_{p,1}b_{n,1}+\ldots+a_{p,n-1}b_{n,n-1}+a_{p,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1}b_{1,1}+\ldots+a_{n,p}b_{1,p},\ldots,a_{n,1}b_{p,1}+\ldots+a_{n,p}b_{p,p},a_{n,1}b_{p+1,1}+\ldots+ \\ \qquad a_{n,p}b_{p+1,p}+a_{n,p+1},\ldots,a_{n,1}b_{n,1}+\ldots+a_{n,n-1}b_{n,n-1}+a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Rozkładając następnie ten wyznacznik na składniki, których (§ 28) tu będzie $p^p(p+1)(p+2)\ldots(n-1)n$, spostrzeżemy, że z kombinowania którychkolwiek składników pierwszych p kolumn wyznacznika D z pierwszemi p składnikami $(p+1)$-ej kolumny, jakiekolwiekby wzięte były składniki z pozostałych jego kolumn, otrzymamy wyznaczniki-składniki równe zeru (§ 30); toż samo co do pierwszych $p+1$ składników $(p+2)$-ej kolumny,..., co do pierwszych $n-1$ składników n-ej kolumny. Zebranie więc pozostałych wyznaczników-składników, różnych od zera, na które się rozkłada wyznacznik D, przedstawiające wartość jego, może być wyrażone wyznacznikiem prostszym, mianowicie

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,p}b_{1,p}, & \ldots & ,a_{1,1}b_{p,1}+\ldots+a_{1,p}b_{p,p}, & a_{1,p+1},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1}b_{1,1}+\ldots+a_{p,p}b_{1,p}, & \ldots & ,a_{p,1}b_{p,1}+\ldots+a_{p,p}b_{p,p}, & a_{p,p+1},\ldots,a_{p,n} \\ a_{p+1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{p+1,p}b_{1,p}, & \ldots & ,a_{p+1,1}b_{p,1}+\ldots+a_{p+1,p}b_{p,p}, & a_{p+1,p+1},\ldots,a_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1}+\ldots+a_{n,p}b_{1,p}, & \ldots & ,a_{n,1}b_{p,1}+\ldots+a_{n,p}b_{p,p}, & a_{n,p+1},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ta postać iloczynu powstaje bezpośrednio z poprzedzającej przez nadanie ilościom (19′) wartości zero, co właśnie być powinno, gdyż wyznacznik D″ w postaci (19) jest (§ 34) jednoznaczny z wyznacznikiem n-ego stopnia

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & ,b_{1,p}, & 0, & 0, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p,1}, & \ldots & ,b_{p,p}, & 0, & 0, & \ldots & ,0 \\ 0, & \ldots & ,0, & 1, & 0, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots & ,0, & 0, & 0, & \ldots & ,1 \end{vmatrix} = D'', \qquad (20)$$

zaś wyznacznik D winien przedstawiać iloczyn D′D″, w jakiejkolwiek postaci wzięliśmy wyznacznik D″. Dla otrzymania więc odrazu najprostszej postaci iloczynu danych wyznaczników D′ i D″, należy wyznacznik D′ mnożyć przez wyznacznik D″ w postaci (20).

Widzimy tu nadto, że wyznacznik D, t. j. iloczyn dwu wyznaczników, jednego stopnia n-ego, drugiego stopnia p-ego, przy $n > p$, jest wyznacznikiem stopnia n-ego.

Gdybyśmy mieli np. pomnożyć przez siebie trzy wyznaczniki, których stopnie określają liczby : n, p i r, i gdyby było $n > p$ i $n > r$, to iloczyn dwu pierwszych byłby wyznacznik stopnia n-ego; mnożąc zaś ten ostatni przez wyznacznik trzeci z danych, otrzymamy znowu wyznacznik stopnia n-ego, który będzie przedstawiał iloczyn trzech danych wyznaczników, a jego elementy będą wyrżeniami całkowitemi względem elementów danych wyznaczników (§ 43). I t. d. Wogóle

Iloczyn ilukolwiek danych wyznaczników jest wyznacznikiem, którego stopień jest określony przez najwyższy ze stopni danych wyznaczników, a jego elementy są wyrażeniami całkowitemi względem elementów danych wyznaczników [1].

§ 49.

Gdy dane są dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , b_{n,n} \end{vmatrix},$$

---

[1] Jacobi, l. c., str., 310.

to, jak wiemy (§ 44),

$$
D'D'' = \begin{vmatrix}
a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,n}b_{1,n}, \ldots, a_{1,1}b_{n,1}+\ldots+a_{1,n}b_{n,n} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n,1}b_{1,1}+\ldots+a_{n,n}b_{1,n}, \ldots, a_{n,1}b_{n,1}+\ldots+a_{n,n}b_{n,n}
\end{vmatrix}.
$$

Lecz (§ 34, 19)

$$
D' = \begin{vmatrix}
a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,n}, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,n}, & 0 \\
0, & \ldots & ,\ 0, & 1
\end{vmatrix},
$$

$$
D'' = \begin{vmatrix}
b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}, & 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\
b_{n,1}, \ldots, b_{n,n}, & 0 \\
0, \ldots, 0, & 1
\end{vmatrix} = - \begin{vmatrix}
b_{1,1}, \ldots, b_{1,n-1}, & 0, & b_{1,n} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\
b_{n,1}, \ldots, b_{n,n-1}, & 0, & b_{n,n} \\
0, \ldots, 0, & 1, & 0
\end{vmatrix}.
$$

Mnożąc tę postać wyznacznika D′ przez ostatnią postać wyznacznika D″ (wiersze przez wiersze), otrzymamy (§ 44) wyznacznik $(n+1)$-ego stopnia

$$
D'D'' = - \begin{vmatrix}
a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,n-1}b_{1,n-1}, \ldots, a_{1,1}b_{n,1}+\ldots+ & \\
\qquad\qquad +a_{1,n-1}b_{n,n-1}, & a_{1,n} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\
a_{n,1}b_{1,1}+\ldots+a_{n,n-1}b_{1,n-1}, \ldots, a_{n,1}b_{n,1}+\ldots+ & \\
\qquad\qquad +a_{n,n-1}b_{n,n-1}, & a_{n,n} \\
b_{1,n} \qquad , \ldots, \qquad b_{n,n}, & 0
\end{vmatrix}.
$$

Przedstawiając znowu

$$D'=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots & ,a_{1,n}, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \dots & ,a_{n,n}, & 0, & 0 \\ 0, & \dots & ,0, & 1, & 0 \\ 0, & \dots & ,0, & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

$$D''=\begin{vmatrix} b_{1,1},\dots,b_{1,n}, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1},\dots,b_{n,n}, & 0, & 0 \\ 0,\dots,0, & 1, & 0 \\ 0,\dots,0, & 0, & 1 \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} b_{1,1},\dots,b_{1,n-2}, & 0, & 0, & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1},\dots,b_{n,n-2}, & 0, & 0, & b_{n,n-1}, & b_{n,n} \\ 0,\dots,0 & ,1, & 0, & 0 & ,0 \\ 0,\dots,0 & ,0, & 1, & 0 & ,0 \end{vmatrix}$$

(gdyż ostatnią postać otrzymujemy z obok stojącej przestawiając n-ą kolumnę z $(n+2)$-ą i $(n-1)$-ą z $(n+1)$-ą; więc znak zmienia się dwa razy, § 19), oraz mnożąc te postacie wyznaczników danych, otrzymujemy wyznacznik $(n+2)$-ego stopnia

$$D'D''=(-1)^2\times$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n-2}b_{1,n-2},\dots,a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{1,n-2}b_{n,n-2}, & a_{1,n-1}, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n-2}b_{1,n-2},\dots,a_{n,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,n-2}b_{n,n-2}, & a_{n,n-1}, & a_{n,n} \\ b_{1,n-1} \quad ,\dots, \quad b_{n,n-1} & ,0 & ,0 \\ b_{1,n} \quad ,\dots, \quad b_{n,n} & ,0 & ,0 \end{vmatrix}.$$

Wogóle, jeśli dane wyznaczniki przedstawimy w postaci wyznaczników $(n+i)$-ego stopnia:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,n}, & 0, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,n}, & 0, & \ldots & ,0 \\ 0, & \ldots & ,0, & 1, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots & ,0, & 0, & \ldots & ,1 \end{vmatrix},$$

$$D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & ,b_{1,n}, & 0, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots & ,b_{n,n}, & 0, & \ldots & ,0 \\ 0, & \ldots & ,0, & 1, & \ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & ,1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^i \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & ,b_{1,n-i}, & 0, & \ldots & ,0, & b_{1,n-i+1}, & \ldots & ,b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots & ,b_{n,n-i}, & 0, & \ldots & ,0, & b_{n,n-i+1}, & \ldots & ,b_{n,n} \\ 0, & \ldots & ,0 & ,1, & \ldots & ,0, & 0 & ,\ldots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots & ,0 & ,0, & \ldots & ,1, & 0 & ,\ldots & ,0 \end{vmatrix},$$

to, mnożąc te postacie [1] wyznaczników danych przez siebie, otrzymamy wyznacznik $(n+i)$-ego stopnia [1].

$$D'D'' = (-1)^{i} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\cdots+a_{1,n-i}b_{1,n-i}, \ldots, a_{1,1}b_{n,1}+\cdots+a_{1,n-i}b_{n,n-1}, a_{1,n-i+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1}+\cdots+a_{n,n-i}b_{1,n-i}, \ldots, a_{n,1}b_{n,1}+\cdots+a_{n,n-i}b_{n,n-i}, a_{n,n-i+1}, \ldots, a_{n,n} \\ b_{1,n-i+1} \qquad , \ldots, \qquad b_{n,n-i+1} \qquad , \quad 0 \quad , \ldots, \ 0 \\ \cdot \\ b_{1,n} \qquad , \ldots, \qquad b_{n,n} \qquad , \quad 0 \quad , \ldots, \ 0 \end{vmatrix}.$$

Iloczyn dwu wyznaczników stopnia n-*ego możemy przedstawić w postaci następującego wyznacznika stopnia* (n+*i*)-*ego. Wybrawszy* n — i *kolumn* (*lub wierzy*) *jednego wyznacznika, oraz* n — i *kolumn* (*lub wierszy*) *drugiego wyznacznika, z elementów tych dwu systematów po* n(n — i) *elementów utworzymy summy iloczynów elementów każdego wiersza* (*kolumny*) *pierwszego systematu przez odpowiednie elementy każdego wiersza* (*kolumny*) *drugiego systematu; do powstałego w ten sposób systematu* n² *elementów dopiszemy z jednej strony pozostałe* i *kolumn* (*wierszy*) *pierwszego wyznacznika, z sąsiedniej zaś strony pozostałe* i *kolumn* (*wierszy*)

---

(1) Postawiliśmy przed ostatnią postacią wyznacznika D″ znak określony przez $(-1)^{i}$, gdyż otrzymać ją możemy z obok stojącej, przez przestawienie w niej każdej z ostatnich i kolumn z każdą odpowiednią z poprzedzających i kolumn (t. j. $(n+i)$-ą z n-ą, $(n+i-1)$-ą, z $(n-1)$-ą, i t. d.), skutkiem czego wyznacznik i razy zmienia znak.

(2) Spottiswoode, l. c., (Crelle), str. 242. W rozprawie jego w odpowiedniej formule (4) zamiast czynnika $(-1)^{i-1}$ powinien być czynnik $(-1)^{n-i}$.

drugiego wyznacznika; nakoniec na i^2 *niezajętych miejscach kwadratu postawimy zera. Wyznacznik tego systematu* $(n+i)^2$ *elementów, poprzedzony właściwym znakiem, wyznaczonym przez* $(-1)^i$, *przedstawi iloczyn danych wyznaczników* [2].

W razie $i=n-1$, z tej ogólnej postaci iloczynu wypada

$$D'D''=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & \ldots, & a_{1,1}b_{n,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1}, & \ldots, & a_{n,1}b_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \\ b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots, & b_{n,n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix},$$

w razie zaś $i=n$, mamy

$$D'D''=(-1)^{n}\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \\ b_{1,1}, & \ldots, & b_{n,1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,n}, & \ldots, & b_{n,n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

---

(1) Wysłowienie to własności, przedstawionej przez związek poprzedni, jest odmienne od podanego przez S., lecz wydało mi się prostszem.

Np.

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3, & c_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3, & c_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3, & c_3 \\ \gamma_1 & , \gamma_2 & , \gamma_3 & , 0 \end{vmatrix},$$

$$= + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2, & a_1\alpha_3, & b_1, & c_1 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2, & a_2\alpha_3, & b_2. & c_2 \\ a_3\alpha_1, & a_3\alpha_2, & a_3\alpha_3, & b_3, & c_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & 0, & 0 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

$$= - \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & a_1, & b_1, & c_1 \\ 0, & 0, & 0, & a_2, & b_2, & c_2 \\ 0, & 0, & 0, & a_3, & b_3, & c_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0, & 0, & 0 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & 0, & 0, & 0 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

ROZDZIAŁ SZOSTY.

ROZKŁAD WYZNACZNIKA WEDŁUG WYZNACZNIKÓW CZĘŚCIOWYCH PEWNEJ KOMBINACYI JEGO RZĘDÓW RÓWNOLEGŁYCH. DODAWANIE I ODEJMOWANIE WYZNACZNIKÓW. SZCZEGÓLNE ROZKŁADY WYZNACZNIKA.

§ 50.

Z systematu elementów danego wyznacznika n-ego stopnia,

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ . & . & . \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

weźmy jakiekolwiek m wierszy elementów i podpiszmy je pod sobą w takim porządku, w jakim po sobie poprzednio następowały. Z tego zaś systematu mn elementów

$$\begin{array}{l} a_{\gamma,1},\ a_{\gamma,2}, \ldots,\ a_{\gamma,n}, \\ a_{\delta,1},\ a_{\delta,2}, \ldots,\ a_{\delta,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\zeta,1},\ a_{\zeta,1}, \ldots,\ a_{\zeta,n}, \end{array}$$

w którym, na mocy takiego ustawienia, jest

$$\eta < \delta < \ldots < \varsigma,$$

zatrzymajmy pewne m kolumn i wypiszmy je obok siebie w takim porządku, w jakim one po sobie następują w systemacie danego wyznacznika. Otrzymamy w ten sposób systemat m^2 elementów

$$\begin{array}{llll} a_{\eta,p}, & a_{\eta,q}, & \ldots, & a_{\eta,s}, \\ a_{\delta,p}, & a_{\delta,q}, & \ldots, & a_{\delta,s}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varsigma,p}, & a_{\varsigma,q}, & \ldots, & a_{\varsigma,s}, \end{array}$$

w którym znowu, z powodu zachowanej tu zasady przy ustawianiu kolumn, jest

$$p < q < \ldots < s.$$

Wyznacznik tego systematu m^2 elementów ([1]) nazywa się *wyznacznikiem częściowym* ([2]) m-*ego stopnia danego wyznacznika* D, *lub też* (n — m)-*ym minorem danego wyznacznika* D.

Dwa takie wyznaczniki częściowe będą różne, jeśli elementy, wchodzące w ich systematy, nie wszystkie są te same, a więc wtedy, kiedy systematy ich elementów powstają z różnych kombinacyj wierszy czy kolumn systematu elementów danego

---

([1]) Wprowadzenie powyższego ustawiania wierszy i kolumn według rosnących wskaźników usuwa nieokreśloność, istniejącą u wielu autorów względem znaku, z jakim pojmować należy wyznacznik częściowy.

([2]) « Partielle Determinante ». Jacobi (*Ueber die Darstellung....*, str. 136). Inne używane dziś nazwy są : Unterdeterminante, partiale Determinante, Subdeterminante, Minor determinant, déterminant mineure i t. d. Cauchy (l. c. str. 96) uważa te wyznaczniki jako elementy systematu, który nazywa « système dérivé ».

wyznacznika. Ponieważ różnych kombinacyj z n wierszy po m jest $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}$, więc tyloma sposobami możemy zatrzymywać po m wierszy zpośród n wierszy danego systematu. Każda grupa tych m zatrzymanych wierszy posiada n kolumn, z których możemy $\binom{n}{m}$ sposobami zatrzymywać po m (kolumn), t. j. z każdéj takiej grupy m wierszy można utworzyć $\binom{n}{m}$ różnych systematów m^2 elementów. Że zaś takich różnych grup po m wierszy jest $\binom{n}{m}$, więc *wszystkich różnych* m*-ego stopnia wyznaczników częściowych danego wyznacznika* n *ego stopnia jest* (¹)

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{n}{m} = \binom{n}{m}^2 = \binom{n}{n-m}^2 = \left(\frac{1.2\dots n}{1.2\dots m.1.2\dots(n-m)}\right)^2.$$

Dany więc wyznacznik n-ego stopnia posiada $\binom{n}{1}^2 = \binom{n}{n-1}^2 = n^2$ wyznaczników częściowych pierwszego stopnia (oddzielne elementy danego wyznacznika), czyli $(n-1)$-szych minorów, i tyleż wyznaczników częściowych $(n-1)$-ego stopnia, czyli pierwszych minorów; $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$ wyznaczników częściowych drugiego stopnia, czyli $(n-2)$-ich minorów, i tyleż wyznaczników częściowych $(n-2)$-go stopnia, czyli drugich minorów, i t. d.

(¹) CAUCHY, (l. c., str. 95).

Jak oznaczać takie wyznaczniki? Wskaźniki

$$\varkappa, \quad \delta, \ldots, \quad \varsigma,$$

$$p, \quad q, \ldots, \quad s$$

tworzą pewne kombinacye z n liczb

$$1, 2, \ldots, n$$

po m. Owóż wypiszmy wszystkie $\binom{n}{m} = \mu$ kombinacyj z tych n liczb po m w takim porządku: naprzód postawmy, jako pierwszą, kombinacyę

$$1, 2, \ldots, m-1, m,$$

która ma tę własność, że iloczyn liczb, ją tworzących, jest najmniejszy z iloczynów liczb składających którąkolwiek kombinacyę; następnie, jako drugą, piszmy tę kombinacyę, której iloczyn liczb, do niej wchodzących, jest najmniejszy z iloczynów liczb każdej z pozostałych (po wyłączeniu pierwszej) kombinacyj, i t. d.; wtedy ostatnią będzie kombinacya

$$n-m+1, \; n-m+2, \ldots, n-1, \; n,$$

gdyż iloczyn jej liczb jest największy z iloczynów liczb każdej z tych μ kombinacyj. W takim porządku ustawione kombinacye oznaczmy po kolei cechami [1]

$$1, 2, 3, \ldots, \mu-1, \mu.$$

---

(1) Cauchy (l. c., str. 94) wskazuje takie właśnie oznaczenie kombinacyj i przeprowadza je dość (choć niezupełnie) konsekwentnie. Cechowanie to sprawia, jak to zobaczymy, że formuły wielce wyraźnemi się

Jeśli w ten sposób kombinacya $\eta, \delta, \ldots, \varsigma$ opatrzona została cechą i, kombinacya zaś $p, q, \ldots, s$ ma, jako cechę, liczbę k,

---

stają. W celu zastosowania tego oznaczania należy tu dowieść pewnej jego własności, z której wypadnie zrobić (§ 51) użytek.

Jeśliśmy już utworzyli, we wskazany sposób wypisali jedną pod drugą i pocechowali wszystkie μ kombinacyj z n liczb $1, 2, \ldots, n$ po m, to w drugiej kolumnie wypisujmy wszystkie $n-m$ liczb, które w tamtą nie weszły. Te nowe grupowania po $n-m$ liczb przedstawią nam wszystkie $\binom{n}{n-m}=\binom{n}{m}=\mu$ kombinacyj z tychże n liczb $1, 2, \ldots, n$ po $n-m$. Tak więc będzie w pierwszej kolumnie

$$\begin{array}{llll}
1, & 2, \ldots, m-1, & m, & \text{z cechą } 1; \\
1, & 2, \ldots, m-1, & m+1, & \text{z cechą } 2; \\
1, & 2, \ldots, m-1, & m+2, & \text{z cechą } 3; \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
m-n+1, & m-n+2, \ldots, n-1, & n, & \text{z cechą } \mu;
\end{array}$$

a w drugiej kolumnie

$$\begin{array}{llllll}
m+1, & m+2, & m+3, \ldots, & n-1, & n; \\
m, & m+2, & m+3, \ldots, & n-1, & n; \\
m, & m+1, & m+3, \ldots, & n-1, & n; \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
1, & 2, & 3, \ldots, & m-n-1, & m-n;
\end{array}$$

Ponieważ iloczyn wszystkich liczb obu kombinacyj któregokolwiek wiersza tych dwu kolumn jest stale równy liczbie

$$1.2.3\ldots m(m+1)\ldots(n-1)n = \mathrm{N},$$

więc kiedy liczby kombinacyi $1, 2, \ldots, m$ tworzą iloczyn najmniejszy z iloczynów liczb wszystkich kombinacyi po m, to iloczyn liczb kombinacyi $m+1, m+2, \ldots, n$ jest największym z iloczynów liczb kombinacyj po $n-m$. Podobnie znajdziemy, że największym z pozostałych iloczynów liczb kombinacyj po $n-m$ jest iloczyn liczb pozostałych po wzięciu liczb, tworzących kombinacyę po m, mającą iloczyn najmniejszy to wyznacznik m-ego stopnia wypisanego wyżej systematu m^2 elementów możemy w ogóle tak oznaczyć:

$$\begin{vmatrix} a_{\eta,p}, & a_{\eta,q},\dots, & a_{\eta,s} \\ a_{\delta,p}, & a_{\delta,q},\dots, & a_{\delta,s} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{\zeta,p}, & a_{\zeta,q},\dots, & a_{\zeta,s} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{\eta,p} a_{\delta,q} \dots a_{\zeta,s} = d_{i,k}^{(m)};$$

---

z pozostałych, i t. d. Gdy więc kombinacyom po m nadane są właściwe cechy w porządku

$$1,\ 2,\ 3,\dots,\mu-2,\ \mu-1,\ \mu,$$

to w drugiej kolumnie stojącym kombinacyom po $n-m$ należy dać cechy w porządku

$$\mu,\ \mu-1,\ \mu-2,\dots,3,\ 2,\ 1,$$

tak, że, wogóle, kombinacyi m liczb, opatrzonej cechą i, odpowiada kombinacya pozostałych $n-m$ liczb, opatrzona cechą $\mu-i+1$.

Np., z sześciu liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6 tworząc kombinacye po 4 i wypisując obok szeregi pozostałych za każdą razą liczb, otrzymamy kombinacye z tychże 6 liczb po 2 i będzie $\left(\mu = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15\right)$:

	iloczyn	cecha	pozostałe liczby	iloczyn	cecha
1, 2, 3, 4;	24;	1;	5, 6;	30;	15=15— 1+1;
1, 2, 3, 5;	30;	2;	4, 6;	24;	14=15— 2+1;
1, 2, 3, 6;	36;	3;	4, 5;	20;	13=15— 3+1;
1, 2, 4, 5;	40;	4;	3, 6;	18;	12=15— 4+1;
1, 2, 4, 6;	48;	5;	3, 5;	15;	11=15— 5+1;
1, 2, 5, 6;	60;	6;	3, 4;	12;	10=15— 6+1;
1, 3, 4, 5;	60;	7;	2, 6;	12;	9=15— 7+1;
1, 3, 4, 6;	72;	8;	2, 5;	10;	8=15— 8+1;
1, 3, 5, 6;	90;	9;	2, 4;	8;	7=15— 9+1;

w szczególnym przypadku mamy

$$\begin{vmatrix} a_{\eta,\eta}, & a_{\eta,\delta},\ldots, & a_{\eta,\varsigma} \\ a_{\delta,\eta}, & a_{\delta,\delta},\ldots, & a_{\delta,\varsigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varsigma,\eta}, & a_{\varsigma,\delta},\ldots, & a_{\varsigma,\varsigma} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{\eta,\eta} a_{\delta,\delta} \ldots a_{\varsigma,\varsigma} = d_{i,i}^{(m)};$$

taki wyznacznik $d_{i,i}^{(m)}$, którego wszystkiemi głównemi elementami są, jak widzimy, elementy główne danego wyznacznika, nazywają *głównym* (n—m)-*ym minorem danego wyznacznika* (¹).

Wszystkie $\binom{n}{m}^2$ wyznaczników częściowych m-ego stopnia danego wyznacznika, czyli jego $(n-m)$-ych minorów będą więc

$$\begin{matrix} d_{1,1}^{(m)}, & d_{1,2}^{(m)},\ldots, & d_{1,\mu}^{(m)}, \\ d_{2,1}^{(m)}, & d_{2,2}^{(m)},\ldots, & d_{2,\mu}^{(m)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\mu,1}^{(m)}, & d_{\mu,2}^{(m)},\ldots, & d_{\mu,\mu}^{(m)} \end{matrix}$$

	iloczyn	cecha	pozostałe liczby	iloczyn	cecha
1, 4, 5, 6;	120;	10;	2, 3;	6;	6=15—10+1;
2, 3, 4, 5;	120;	11;	1, 6;	6;	5=15—11+1;
2, 3, 4, 6;	144;	12;	1, 5;	5;	4=15—12+1;
2, 3, 5, 6;	180;	13;	1, 4;	4;	3=15—13+1;
2, 4, 5, 6;	240;	14;	1, 3;	3;	2=15—14+1;
3, 4, 5, 6;	360;	15;	1, 2;	2;	1=15—15+1.

(¹) « Hauptminor ». « Mineur principal. »

i tworzą *systemat wyznaczników częściowych* m-*ego stopnia danego wyznacznika* (¹).

Np. Gdy dany jest wyznacznik 4-ego stopnia,

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix},$$

to wyznacznik np.

$$\begin{vmatrix} a_{2,1}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,3}, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

jest jego pierwszym minorem, czyli jego wyznacznikiem częściowym trzeciego stopnia; wyznaczniki np.

$$\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,4} \\ a_{3,2}, & a_{3,4} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,3}, & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

są jego drugiemi minorami, czyli jego wyznacznikami częściowemi drugiego stopnia; element np.

$$a_{3,4}$$

jest trzecim minorem danego wyznacznika, czyli jego wyznacznikiem częściowym pierwszego stopnia. Wyznacznik dany

---

(²) « Système dérivé » (CAUCHY). « System von Subdeterminanten » (BALTZER).

ma wszystkich wyznaczników częściowych pierwszego stopnia $\binom{4}{1}^2 = 16$:

$$\overset{(1)}{d}_{1,1} = a_{1,1}; \qquad \overset{(1)}{d}_{1,2} = a_{1,2}; \ldots;$$

wyznaczników częściowych drugiego stopnia ma on $\binom{4}{2}^2 = 36$;

z liczb 1, 2, 3, 4 wszystkie $\binom{4}{2} = 6$ kombinacyj po 2 są:

1, 2	z cechą 1;	2, 3	z cechą 4;
1, 3	2;	2, 4	5;
1, 4	3;	3, 4	6;

36 wyznaczników częściowych drugiego stopnia są:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2} = \overset{(2)}{d}_{1,1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,3} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,3} = \overset{(2)}{d}_{1,2}; \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{3,1}, & a_{3,2} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{3,2} = \overset{(2)}{d}_{2,1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{3,3} = \overset{(2)}{d}_{2,2}; \ldots$$

. . . .

Wyznaczników częściowych trzeciego stopnia nasz wyznacznik posiada $\binom{4}{3}^2 = 16$; kombinacyj z liczb 1, 2, 3, 4 po 3 jest $\binom{4}{3} = 4$:

1, 2, 3	z cechą 1;	1, 3, 4	z cechą 3;
1, 2, 4	2;	2, 3, 4	4;

16 więc wyznaczników częściowych trzeciego stopnia są:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} = \overset{(3)}{d}_{1,1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,4} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4} = \overset{(3)}{d}_{1,2}; \ldots$$

§ 51.

Jeżeli wszystkie te liczby z szeregu liczb

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$$

które pozostały po wzięciu m liczb

$$\eta, \delta, \ldots, \varsigma,$$

tworzących kombinacyę z cechą i, wypiszemy w porządku rosnących liczb, to te $n-m$ liczb, które nazwijmy

$$\varphi, \lambda, \ldots, \psi$$

(gdzie więc $\varphi < \lambda < \ldots < \psi$), tworzą kombinacyę z tychże n liczb po $n-m$ z cechą $\mu - i + 1$ (§ 50, przypisek). Podobnież, jeśli po wzięciu m liczb kombinacyi (z cechą k)

$$p, q, \ldots, s$$

pozostałe $n-m$ w takimże porządku wypiszemy, to te liczby

$$t, u, \ldots, v$$

$(t < u < \ldots < v)$ tworzą kombinacyę z n liczb $1, 2, \ldots, n$ po $n - m$ z cechą $\mu - k + 1$.

Każdy z układów

$$\eta, \delta, \ldots, \varsigma, \varphi, \lambda, \ldots, \psi,$$
$$p, q, \ldots, s, t, u, \ldots, v$$

przedstawia szereg liczb $1, 2, \ldots, n$; oznaczmy liczbę zmian pierwszego (w którym może być np. $\delta > \varphi$) przez ε_i, drugiego zaś przez ε_k. Wtedy (§ 24)

$$D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{m,m} a_{m+1,m+1} \ldots a_{n,n} = (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_k} \Sigma \pm a_{\eta,p} \ldots a_{\varsigma,s} a_{\varphi,t} \ldots a_{\psi,v}$$

$$D = (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_k} \begin{vmatrix} a_{\eta,p}, & \ldots, & a_{\eta,s}, & a_{\eta,t}, & \ldots, & a_{\eta,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varsigma,p}, & \ldots, & a_{\varsigma,s}, & a_{\varsigma,t}, & \ldots, & a_{\varsigma,v} \\ a_{\varphi,p}, & \ldots, & a_{\varphi,s}, & a_{\varphi,t}, & \ldots, & a_{\varphi,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\psi,p}, & \ldots, & a_{\psi,s}, & a_{\psi,t}, & \ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik częściowy systematu elementów ostatnich $n-m$ wierszy i ostatnich $n - m$ kolumn (które to wiersze i kolumny idą po sobie w tym samym porządku, w jakim one następowały po sobie w pierwotnie wziętej postaci wyznacznika $D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{m,m} \ldots a_{n,n}$) jest (§ 50) wyznacznikiem częściowym $(n-m)$-ego stopnia wyznacznika D:

$$\begin{vmatrix} a_{\varphi,t}, & a_{\varphi,u}, \ldots, & a_{\varphi,v} \\ a_{\lambda,t}, & a_{\lambda,u}, \ldots, & a_{\lambda,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\psi,t}, & a_{\psi,u}, \ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{\varphi,t} a_{\lambda,u} \ldots a_{\psi,v} = d^{(n-m)}_{\mu - i + 1, \mu - k + 1}.$$

Do utworzenia tego wyznacznika były wzięte wszystkie te wiersze i kolumny, które nie były użyte przy tworzeniu wyznacznika częściowego $\overset{(m)}{d}_{i,k}$; dlatego *wyznacznik* $\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}$ nazwiemy ([1]) *wyznacznikiem częściowym danego wyznacznika, dopełniającym wyznacznik częściowy* $\overset{(m)}{d}_{i,k}$; i wzajemnie: wyznacznik $\overset{(m)}{d}_{i,k}$ jest wyznacznikiem częściowym danego wyznacznika, dopełniającym wyznacznik częściowy $\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}$.

Iloczyn dwu wyznaczników częściowych danego wyznacznika, wzajem się dopełniających, poprzedzony właściwym znakiem:

$$(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\overset{(m)}{d}_{i,k}\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}$$

przedstawia zebranie pewnych wyrazów wyznacznika

$$(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}=\mathrm{D},$$

mianowicie, zebranie tych wszystkich wyrazów wyznacznika D, które powstaną, jeśli układ np. drugich wskaźników elementów jego wyrazu głównego zastępować będziemy różnemi przemianami, nie wprowadzającemi jednak żadnego z $n-m$ ostatnich wskaźników na żadne z początkowych m miejsc (a tem samem: i wzajemnie). Iloczyn więc ten przedstawia zebranie tylu wyrazów wyznacznika D, ile otrzymamy wyrazów z pomnożenia wielomianu $\overset{(m)}{d}_{i,k}$ przez wielomian $\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}$. Że zaś pierwszy ma $1.2...m$ wyrazów, drugi $1.2...(n-m)$, więc ten iloczyn

([1]) CAUCHY : « termes complémentaires. » (l. c., str. 98).

dopełniających się wyznaczników częściowych danego wyznacznika D jest zebraniem jego

$$1.2...m.1.2...(n-m)$$

wyrazów.

Jeśli zebranie tych wyrazów przedstawimy przez

$$\overset{(m)}{d}_{i,k}\overset{(m)}{A}_{i,k} = \Sigma \pm a_{\eta,p} \ldots a_{\varsigma,s}.\overset{(m)}{A}_{i,k},$$

to z porównania z poprzedzającem ich wyrażeniem, wypada, że

$$\overset{(m)}{A}_{i,k} = (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\nu-k+1},$$

$$= (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \Sigma \pm a_{\varphi,t} \ldots a_{\psi,v};$$

w szczególnym zaś przypadku

$$\overset{(m)}{A}_{i,i} = + \Sigma \pm a_{\varphi,\varphi} \ldots a_{\psi,\psi}.$$

Ilość $\overset{(m)}{A}_{i,k}$ nazywają (¹) *ilością dołączoną do wyznacznika częściowego* $\overset{(m)}{d}_{i,k}$. Ilość więc dołączona do wyznacznika częściowego $\Sigma \pm a_{\eta,p} \ldots a_{\varsigma,s}$ danego wyznacznika $D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ jest jego dopełniającym wyznacznikiem częściowym $\Sigma \pm a_{\varphi,t} \ldots a_{\psi,v}$, poprzedzonym znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy układy

$$\begin{array}{l} \eta,\ \delta,\ \ldots,\ \varsigma,\ \varphi,\ \lambda,\ \ldots,\ \psi, \\ p,\ q,\ \ldots,\ s,\ t,\ u,\ \ldots,\ v \end{array}$$

do jednej, czyliteż do różnych klass należą. Wyznacznik czę-

(¹) BALTZER : «eine adjuncte Determinante.» (l. c., 4-te wydanie, str. 10).

ściowy m-ego stopnia danego wyznacznika n-ego stopnia, pomnożony przez tak określoną jego ilość dołączoną, przedstawia dokładnie (wraz ze znakami) zebranie $1.2...m.1.2...(n-m)$ wyrazów danego wyznacznika.

§ 52.

Jeśli z tych samych m wierszy (mających liczby $\eta, \delta, .., \sigma$ jako wskaźniki), lecz z innej kombinacyi m kolumn, np. z kombinacyi m kolumn, mających jako wskaźniki (wzrastające) liczby

$$g, \; h, \; . \; . \; . \; , \; r,$$

tworzące kombinacyę, opatrzoną cechą l, utworzymy system m^2 elementów, to wyznacznik tego systematu będzie (§ 50)

$$\Sigma \pm a_{\eta,g} a_{\delta,h} \; . \; . \; . \; a_{\sigma,r} = \overset{(m)}{d}_{i,l}.$$

Według wprowadzonego znakowania jego ilość dołączona jest $\overset{(m)}{A}_{i,l}$. Iloczyn zaś

$$\overset{(m)}{d}_{i,l} \overset{(m)}{A}_{i,l}$$

przedstawia $1.2...m.1.2...(n-m)$ wyrazów danego wyznacznika.

Dwa wyrażenia

$$\overset{(m)}{d}_{i,k} \overset{(m)}{A}_{i,k}, \qquad \overset{(m)}{d}_{i,l} \overset{(m)}{A}_{i,l}$$

przedstawiają różne wyrazy danego wyznacznika, t. j. żaden wyraz, ujęty w pierwsze wyrażenie, nie znajduje się pośród wyrazów, wchodzących w drugie, i wzajemnie, a to dla tego, że w każdym drugie wskaźniki początkowych m elementów należą do różnych kombinacyj (§ 51).

Jeśli, wziąwszy m wierszy systematu elementów danego wyznacznika, odpowiadających kombinacyi z cechą i, będziemy tworzyć wszystkie μ kombinacyj po m kolumn, to otrzymamy μ wyznaczników częściowych

$$\overset{(m)}{d}_{i,1},\quad \overset{(m)}{d}_{i,2},\ \ldots,\ \overset{(m)}{d}_{i,k},\ \ldots,\ \overset{(m)}{d}_{i,\mu}.$$

Mnożąc każdy przez odpowiednią ilość dołączoną i tworząc summę takich iloczynów, mieć będziemy

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{i,1}+\overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{i,2}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{i,k}\overset{(m)}{A}_{i,k}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,\mu}.$$

Każdy z tych μ składników jest zebraniem $1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)$ wyrazów danego wyznacznika. Nadto, żaden wyraz wyznacznika nie wchodzi jednocześnie do dwu lub więcej składników, czyli pewien wyraz wyznacznika wchodzi w jeden tylko z tych składników. Zatem ta summa jest zebraniem

$$\mu.1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)=$$

$$=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}.1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)=1.2\ldots n$$

różnych wyrazów wyznacznika D, czyli przedstawia (ze ścisłością co do znaków, § 51) wszystkie wyrazy — przedstawia dany wyznacznik:

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{i,1}+\overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{i,2}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,\mu}=\mathrm{D},$$

czyli

$$D=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_1}\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu}+(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_2}\overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-1}+\ldots+$$

$$+(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_\mu}\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,1};$$

$$=\sum_k^{1,\ldots,\mu}\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\overset{(m)}{d}_{i,k}\overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}\right);$$

$$=\sum_k^{1,\ldots,\mu}\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\rho,t}\ldots a_{\psi,v}\right),$$

gdzie znak summy odnosi się do wszystkich, od 1-szej do μ-ej, kombinacyj po m liczb, które kolejno zamiast układu $p,q,\ldots,s$ (przy jednoczesnem zmienianiu pozostałych wskaźników: $t,u,\ldots,v$) postawić należy, i do wszystkich odpowiednich wartości liczby ε_k.

Gdybyśmy, zamiast zatrzymywać z systematu elementów danego wyznacznika pewne m wierszy, zatrzymali m kolumn, odpowiadających kombinacyi z cechą k, a z takiego systematu mn elementów w rozmaity sposób zatrzymywali po m wierszy, to podobnież znaleźlibyśmy ([1])

$$\overset{(m)}{d}_{1,k}\overset{(m)}{A}_{1,k}+\overset{(m)}{d}_{2,k}\overset{(m)}{A}_{2,k}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,k}\overset{(m)}{A}_{\mu,k}=D,$$

czyli

$$D=\sum_i^{1,\ldots,\mu}\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\rho,t}\ldots a_{\psi,v}\right),$$

gdzie znak summy ma znaczenie podobne, co poprzednio.

([1]) Cauchy (l. c., str. 99).

Jeśli z systematu elementów danego wyznacznika n*-ego stopnia weźmiemy* m *rzędów równoległych, utworzymy z tych* mn *elementów wszystkie* $\binom{n}{m}$ *wyznaczników częściowych* m*-ego stopnia, każdy pomnożymy przez jego ilość dołączoną i te iloczyny dodamy, to otrzymamy dany wyznacznik.*

Jestto więc *rozkład wyznacznika według wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi* m *rzędów równoległych jego systematu elementów.*

Np., rozłożymy wyznacznik czwartego stopnia

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

według kombinacyi drugiej i czwartej kolumny systematu jego elementów. Składników będzie $\binom{4}{2} = 6$ odpowiednio do kombinacyj wierszy

1, 2	z cechą 1;	2, 3	z cechą 4;
1, 3	2;	2, 4	5;
1, 4	3,	3, 4	6;

rozkład więc wyznacznika D według kombinacyi kolumn drugiej i czwartej (opatrzonej cechą 5) będzie :

$$D = \overset{(2)}{d}_{1,5}\overset{(2)}{A}_{1,5} + \overset{(2)}{d}_{2,5}\overset{(2)}{A}_{2,5} + \overset{(2)}{d}_{3,5}\overset{(2)}{A}_{3,5} + \overset{(2)}{d}_{4,5}\overset{(2)}{A}_{4,5} + \overset{(2)}{d}_{5,5}\overset{(2)}{A}_{5,5} + \overset{(2)}{d}_{6,5}\overset{(2)}{A}_{6,5}$$

$$= -\Sigma \pm a_{1,2}a_{2,4}\Sigma \pm a_{3,1}a_{4,3} + \Sigma \pm a_{1,2}a_{3,4}\Sigma \pm a_{2,1}a_{4,3} -$$

$$-\Sigma a_{1,2}a_{4,4}\Sigma \pm a_{2,1}a_{3,3} - \Sigma \pm a_{2,2}a_{3,4}\Sigma \pm a_{1,1}a_{4,3} +$$

$$+\Sigma \pm a_{2,2}a_{4,4}\Sigma \pm a_{1,1}a_{3,3} - \Sigma \pm a_{3,2}a_{4,4}\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,3}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,4} \\ a_{2,2}, & a_{2,4} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{3,1}, & a_{3,3} \\ a_{4,1}, & a_{4,3} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,4} \\ a_{3,2}, & a_{3,4} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{2,1}, & a_{2,3} \\ a_{4,1}. & a_{4,3} \end{vmatrix} - \text{etc.}$$

Jeśli raz rozłożymy wyznacznik według pewnej kombinacyi m wierszy, opatrzonej cechą i, drugi zaś raz według pewnej innej kombinacyi m wierszy, opatrzonej cechą j, to, według powyższego,

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{i,1} + \overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{i,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,\mu} = D,$$

$$\overset{(m)}{d}_{j,1}\overset{(m)}{A}_{j,1} + \overset{(m)}{d}_{j,2}\overset{(m)}{A}_{j,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{j,\mu}\overset{(m)}{A}_{j,\mu} = D.$$

Jeśli jednak utworzymy wyrażenie

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{j,1} + \overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{j,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{j,\mu},$$

to, zgodnie ze znaczeniem ilości $\overset{(m)}{A}_{j,1}, \overset{(m)}{A}_{j,2}, \ldots, \overset{(m)}{A}_{j,\mu}$, przedstawia nam ono to, co otrzymamy, gdy w systemacie elementów danego wyznacznika zastąpimy $n-m$ wierszy (nie należących do kombinacyi m wierszy z cechą i), tworzących kombinacyę z cechą $\mu-i+1$, przez $n-m$ wierszy (nie należących do kombinacyi m wierszy z cechą j), tworzących kombinacyę z cechą $\mu-j+1$. Że zaś dwie kombinacye $n-m$ wierszy z różnemi cechami $\mu-i+1$ i $\mu-j+1$ różnią się, co najmniej, jednym wierszem, więc w kombinacyi z cechą $\mu-j+1$ znajduje się przynajmniej jeden wiersz, który nie wchodzi do kombinacyi z cechą $\mu-i+1$, a tem samem wiersz, należący do kombinacyi m wierszy z cechą i. Skutkiem zatem takiego zastąpienia w systemacie elementów danego wyznacznika kombinacyi $n-m$ wierszy z cechą $\mu-i+1$ przez kombinacyę $n-m$ wierszy z cechą $\mu-j+1$, w systemacie elementów znajdą się, co najmniej, dwa jednakowe wiersze elementów, skutkiem czego wypisane wyżej wyrażenie jest tożsamościowo równe zeru. Możemy więc wogóle powiedzieć:

Jeśli ilość dołączoną do wyznacznika częściowego m-*ego stopnia* $\overset{(m)}{d}_{i,k}$ *danego wyznacznika* D *stopnia* n-*ego, nazwiemy* $\overset{(m)}{A}_{i,k}$, *to każda z summ*

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{k,1}+\overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{k,2}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{k,\mu}=D,\ \text{lub}=0, \tag{1}$$

$$\overset{(m)}{d}_{1,i}\overset{(m)}{A}_{1,k}+\overset{(m)}{d}_{2,i}\overset{(m)}{A}_{2,k}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,i}\overset{(m)}{A}_{\mu,k}=D,\ \text{lub}=0, \tag{2}$$

stosownie do tego, czy k *jest tąż samą liczbą, co* i, *czy też* k *jest różne od* i.

Skutkiem tego między $\binom{n}{m}^2=\mu^2$ ilościami dołączonemi do μ^2 wyznaczników częściowych m-ego stopnia danego wyznacznika D stopnia n—ego (§ 50) t. j. ilościami

$$\begin{array}{l} \overset{(m)}{A}_{1,1}, \ \overset{(m)}{A}_{1,2}, \ldots, \overset{(m)}{A}_{1,\mu}, \\ \overset{(m)}{A}_{2,1}, \ \overset{(m)}{A}_{2,2}, \ldots, \overset{(m)}{A}_{2,\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{(m)}{A}_{\mu,1}, \ \overset{(m)}{A}_{\mu,2}, \ldots, \overset{(m)}{A}_{\mu,\mu}, \end{array}$$

tworzącemi *systemat dołączony do systematu wyznaczników częściowych* m-*ego stopnia* [1] *danego wyznacznika* D (o którym mówiliśmy w § 50), i temi wyznacznikami częściowemi ma miejsce μ^2 związków [2] typu (1)

$$\overset{(m)}{d}_{1,1}\overset{(m)}{A}_{1,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{1,\mu}\overset{(m)}{A}_{1,\mu}=D,\ldots,\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{1,1}+\ldots$$
$$+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{1,\mu}=0,\ldots,\overset{(m)}{d}_{\mu,1}\overset{(m)}{A}_{1,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,\mu}\overset{(m)}{A}_{1,\mu}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\overset{(m)}{d}_{1,1}\overset{(m)}{A}_{i,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{1,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,1}=0,\ldots,\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{i,1}+\ldots$$
$$+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,\mu}=D,\ldots,\overset{(m)}{d}_{\mu,1}\overset{(m)}{A}_{i,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,\mu}\overset{(m)}{A}_{i,\mu}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\overset{(m)}{d}_{1,1}\overset{(m)}{A}_{\mu,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{1,\mu}\overset{(m)}{A}_{\mu,1}=0,\ldots,\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{\mu,1}+\ldots$$
$$+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{\mu,\mu}=D,\ldots,\overset{(m)}{d}_{\mu,1}\overset{(m)}{A}_{\mu,1}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,\mu}\overset{(m)}{A}_{\mu,\mu}=D,$$

i tyleż związków typu (2).

---

[1] CAUCHY: «systèmes derivés complémentaires.» (l. c., str. 98).
[2] CAUCHY, l. c., str. 101.

§ 53.

W przypadku, kiedy $m=1$, jest (§ 50)

$$\overset{(1)}{d}_{i,k}=a_{i,k}, \qquad \mu=\binom{n}{1}=n,$$

liczby zmian układów (§ 51)

$$\begin{array}{l} i,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i-1,\ i+1,\ \ldots,\ n, \\ k,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ n \end{array}$$

są, jak widzimy

$$\varepsilon_i=i-1,\ \varepsilon_k=k-1,\ (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}=(-1)^{i+k-2}=(-1)^{i+k},$$

a wyznacznik częściowy dopełniający (§ 51) jest

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ ,\ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}\ ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{i-1,1},\ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1},\ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1},\ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1},\ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}\ ,\ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \overset{(1)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1} = \overset{(1)}{d}_{n-i+1,n-k+1},$$

skutkiem czego (§ 51)

$$\overset{(1)}{A}_{i,k}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)}{A}_{i,i} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,i-1}, & a_{1,i+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,i-1}, & a_{i-1,i+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,i-1}, & a_{i+1,i+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,i-1}, & a_{n,i+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

t. j. $\overset{(1)}{A}_{i,k}$ i $\overset{(1)}{A}_{i,i}$ przedstawiają toż samo, co w § 25 było oznaczone przez $A_{i,k}$ i $A_{i,i}$. Dlatego też wszystkie systematy i związki, wyprowadzone w § 52-im, przechodzą w odpowiednie wypadki badań §§ 25 i 27.

Rozkład więc wyznacznika według elementów pewnego rzędu jest szczególnym przypadkiem rozkładu według wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi rzędów równoległych. Wszystko zatem, czego nadal dowiedziemy o ogólnym rozkładzie wyznacznika według wyznaczników częściowych kombinacyj rzędów równoległych, odnosić się także będzie do rozkładu wyznacznika według elementów rzędu.

Umówmy się nadto, aby, ilekroć nam wypadnie pisać $\overset{(1)}{A}_{i,k}$, odrzucać wskaźnik (1) u góry i pisać, zgodnie z umową poprzednią (§ 25), wprost $A_{i,k}$.

§ 54.

Gdy dane są dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, \ldots, & b_{1,n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, \ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

i gdy, w ogólności $\overset{(m)}{\delta}_{i,k}$ i $\overset{(m)}{B}_{i,k}$ są tem samem dla wyznacznika D″, czem $\overset{(m)}{d}_{i,k}$ i $\overset{(m)}{A}_{i,k}$ dla wyznacznika D′, to, jak wiemy (§ 52),

$$\overset{(m)}{d}_{1,k}\overset{(m)}{A}_{1,l}+\overset{(m)}{d}_{2,k}\overset{(m)}{A}_{2,l}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{\mu,k}\overset{(m)}{A}_{\mu,l}=D', \text{ lub}=0, \tag{1}$$

$$\overset{(m)}{\delta}_{k,1}\overset{(m)}{B}_{l,1}+\overset{(m)}{\delta}_{k,2}\overset{(m)}{B}_{l,2}+\ldots+\overset{(m)}{\delta}_{k,\mu}\overset{(m)}{B}_{l,\mu}=D'', \text{ lub}=0, \tag{1'}$$

stosownie do tego, czy $k=l$, czy też k jest różne od l.

Jeśli w systemacie elementów

$$\begin{matrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad , \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n} \end{matrix} \tag{2}$$

każdą po kolei z $\mu=\binom{n}{m}$ kombinacyj po m wierszy zastępować będziemy pewną, wciąż jedną i tą samą, kombinacyą m wierszy systematu

$$\begin{matrix} b_{1,1}, \ldots, & b_{1,n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad , \\ b_{n,1}, \ldots, & b_{n,n}, \end{matrix} \tag{3}$$

np. kombinacyą z cechą i, to otrzymamy w ten sposób μ systematów po n^2 elementów; wyznaczniki tych systematów nazwijmy po kolei

$$\alpha_{i,1}, \quad \alpha_{i,2}, \ldots, \quad \alpha_{i,\mu}.$$

Jeśli następnie w systemacie (3) pewną, wciąż jedną i tą samą, kombinacyę m wierszy, np. kombinacyę z cechą j, zastąpimy każdą po kolei z μ kombinacyj po m wierszy systematu (2), to otrzymamy podobnież μ systematów po n^2 elementów; wyznaczniki tych systematów nazwijmy po kolei

$$\beta_{1,j},\ \beta_{2,j},\ \ldots,\ \beta_{\mu,j}.$$

Rozkładając wyznaczniki α i wyznaczniki β według wyznaczników częściowych kombinacyj wstawionych rzędów, mieć będziemy

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,1} &= \overset{(m)}{\delta}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{1,1} + \overset{(m)}{\delta}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{1,2} + \ldots + \overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{1,\mu},\\
\alpha_{i,2} &= \overset{(m)}{\delta}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{2,1} + \overset{(m)}{\delta}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{2,2} + \ldots + \overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{2,\mu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{i,\mu} &= \overset{(m)}{\delta}_{i,1}\overset{(m)}{A}_{\mu,1} + \overset{(m)}{\delta}_{i,2}\overset{(m)}{A}_{\mu,2} + \ldots + \overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}\overset{(m)}{A}_{\mu,\mu},
\end{aligned} \tag{4}$$

jakoteż

$$\begin{aligned}
\beta_{1,j} &= \overset{(m)}{d}_{1,1}\overset{(m)}{B}_{j,1} + \overset{(m)}{d}_{1,2}\overset{(m)}{B}_{j,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{1,\mu}\overset{(m)}{B}_{j,\mu},\\
\beta_{2,j} &= \overset{(m)}{d}_{2,1}\overset{(m)}{B}_{j,1} + \overset{(m)}{d}_{2,2}\overset{(m)}{B}_{j,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{2,\mu}\overset{(m)}{B}_{j,\mu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{\mu,j} &= \overset{(m)}{d}_{\mu,1}\overset{(m)}{B}_{j,1} + \overset{(m)}{d}_{\mu,2}\overset{(m)}{B}_{j,2} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{\mu,\mu}\overset{(m)}{B}_{j,\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Mnożąc obie strony pierwszej z równości (4) przez $\overset{(m)}{d}_{1,k}$, drugiej przez $\overset{(m)}{d}_{2,k}, \ldots$, ostatniej przez $\overset{(m)}{d}_{\mu,k}$, a tak pomnożone dodając, otrzymamy w summie po prawej wszystkie spółczynniki przy ilościach

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,1},\ \ldots,\ \overset{(m)}{\delta}_{i,k-1},\ \overset{(m)}{\delta}_{i,k+1},\ \ldots,\ \overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}$$

podług (1) równe zeru, spółczynnik zaś przy $\overset{(m)}{\delta}_{i,k}$ będzie $=\mathrm{D}'$, co uwzględniając, otrzymujemy z dodania następujący związek:

$$\alpha_{i,1}\overset{(m)}{d}_{1,k}+\alpha_{i,2}\overset{(m)}{d}_{2,k}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\overset{(m)}{d}_{\mu,k}=\overset{(m)}{\delta}_{i,k}\mathrm{D}'.$$

Kładąc tu $k=1, 2, \ldots, \mu$ i te μ równości

$$\alpha_{i,1}\overset{(m)}{d}_{1,1}+\alpha_{i,2}\overset{(m)}{d}_{2,1}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\overset{(m)}{d}_{\mu,1}=\overset{(m)}{\delta}_{i,1}\mathrm{D}',$$

$$\alpha_{i,1}\overset{(m)}{d}_{1,2}+\alpha_{i,2}\overset{(m)}{d}_{2,2}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\overset{(m)}{d}_{\mu,2}=\overset{(m)}{\delta}_{i,2}\mathrm{D}',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_{i,1}\overset{(m)}{d}_{1,\mu}+\alpha_{i,2}\overset{(m)}{d}_{2,\mu}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\overset{(m)}{d}_{\mu,\mu}=\overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}\mathrm{D}'$$

mnożąc jeszcze: pierwszą przez $\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,1}$, drugą przez $\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,2}, \ldots,$ ostatnią przez $\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,\mu}$, a tak pomnożone dodając, otrzymamy, przy uwzględnieniu związków (5),

$$\alpha_{i,1}\beta_{1,j}+\alpha_{i,2}\beta_{2,j}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\beta_{\mu j}=$$

$$=\left(\overset{(m)}{\delta}_{i,1}\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,1}+\overset{(m)}{\delta}_{i,2}\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,2}+\ldots+\overset{(m)}{\delta}_{i,\mu}\overset{(m)}{\mathrm{B}}_{j,\mu}\right)\mathrm{D}'.$$

Jesli $j=i$, to po prawej spółczynnik przy D' jest, podług (1'), wyznacznikiem D''; jeśli zaś j jest różne od i, to ten spółczynnik jest zerem. Możemy więc powiedzieć:

Summa iloczynów (1)

$$\alpha_{i,1}\beta_{1,j}+\alpha_{i,2}\beta_{2,j}+\ldots+\alpha_{i,\mu}\beta_{\mu,j}=\mathrm{D}'\mathrm{D}'',\ \text{lub}=0,$$

stosownie do tego, czy $\mathrm{j}=\mathrm{i}$, *czyteż* j *jest różne od* i.

---

(1) SYLVESTER, *Philosophical Magazine*, 1851, II, str. 142, i 1852, II, str. 342. Zasadę powyższego dowodu podał BRIOSCHI, *La teorica dei determinanti* (Pavia, 1854, wyprowadzenie formuły 63-ej).

W razie więc $j = i$, mamy:

Iloczyn dwu wyznaczników n-*ego stopnia*, D' i D'', *równa się summie* $\binom{n}{m}$ *iloczynów po dwa wyznaczniki : jednego, powstałego z wyznacznika* D' *wskutek zastąpienia kolejno coraz innej kombinacyi* m *rzędów przez pewne* (*wciąż też same*) m *rzędów wyznacznika* D'', *drugiego zaś, powstałego z wyznacznika* D'' *wskutek zastąpienia wziętych zeń* m *rzędów przez usuniętą z* D' *kombinacyę* m *rzędów*.

W przypadku m = 1 (§ 53), mieć będziemy:

Iloczyn dwu wyznaczników n-*ego stopnia*, D' i D'', *równa się summie iloczynów po dwa wyznaczniki : jednego powstającego z wyznacznika* D' *wskutek zastąpienia kolejno coraz innego rzędu pewien rząd wyznacznika* D'', *drugiego zaś powstałego z wyznacznika* D'' *przez wstawienie zamiast rzędu, zeń wziętego, tego rzędu wyznacznika* D'', *który był usunięty przy tworzeniu pierwszego czynnika.*

Np., gdy

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

to mamy:

$$\begin{vmatrix} b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \\ b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3} \end{vmatrix} = \mathrm{D}' \mathrm{D}'',$$

czyli

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\Sigma \pm b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} = \Sigma \pm b_{2,1}a_{2,2}a_{3,3}\Sigma \pm b_{1,1}a_{1,2}b_{3,3} +$$

$$+ \Sigma \pm a_{1,1}b_{2,2}a_{3,3}\Sigma \pm b_{1,1}a_{2,2}b_{3,3} + \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}b_{2,3}\,\Sigma \pm b_{1,1}a_{3,2}b_{3,3};$$

jakoteż (jako przykład j różnego od i)

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 55.

W § 52-im wyprowadziliśmy związek

$$= \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n} = \sum_{i}^{1,\ldots\mu}\left((-1)^{\varepsilon_j+\varepsilon_k}\, \overset{(m)}{d}_{i,k}\overset{(m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}\right),$$

$$= \sum_{i}^{1,\ldots,\mu}\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\, \Sigma \pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma \pm a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}\right).$$

gdzie znak $\sum\limits_i$ odnosi się do wszystkich od 1-ej do μ-ej kombinacyj m liczb, które zamiast układu pierwszych wskaźników $\eta, \delta, \ldots, \zeta$ (a więc przy jednoczesnem zmienianiu pozostałych wskaźników $\varphi, \lambda, \ldots, \psi$, § 51) podstawić należy. Uogólnimy ten związek.

Szereg liczb

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

podzielmy na dowolne części: niechaj w pierwszej będzie m_1 liczb, w drugiej m_2 liczb,..., w ostatniej nakoniec, σ-ej, niechaj będzie m_σ liczb, tak, że

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma = n.$$

Następnie z systematu elementów danego wyznacznika D wybierzmy pewne m_1 kolumn ze wskaźnikami

$$p, q, \ldots, s$$

$(p < q < \ldots < s)$, tworzącemi kombinacyę z n liczb 1, 2,..., n po m_1, opatrzoną cechą k_1; w tych zaś kolumnach zatrzymajmy pewne m_1 wierszy ze wskaźnikami

$$\eta, \delta, \ldots, \zeta$$

$(\eta < \delta < \ldots < \zeta)$, tworzącemi kombinacyę z tychże n liczb po m_1, opatrzoną cechą i_1; wten sposób utworzymy systemat m_1^2 elementów. Z pozostałych $n - m_1$ kolumn wybierzmy pewne m_2 kolumn ze wskaźnikami

$$f, g, \ldots, h$$

$(f < g < \ldots < h)$, tworzącemi kombinacyę z tychże n liczb po m_2, opatrzoną cechą k_2, a w nich zatrzymajmy pewne m_2 wierszy (odmienne od poprzednio zatrzymanych m_1 wierszy) ze wskaźnikami

$$\beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \tau$$

$(\beta<\gamma<\ldots<\tau)$, tworzącemi kombinacyę z tychże n liczb po m_2, z cechą i_2; w ten sposób utworzymy systemat m_2^2 elementów. Tworząc z pozostałych $n-m_1-m_2$ kolumn i $n-m_1-m_2$ podobny systemat m_3^2 elementów i t. d., dojdziemy nakoniec do tego, że pozostanie nam już tylko m_σ nie wziętych kolumn ze wskaźnikami:

$$t,\ u,\ \ldots,\ v$$

$(t<u<\ldots<v)$, tworzącemi kombinacyę z n liczb $1.\ 2, \ldots, n$ po m_σ, opatrzoną cechą k_σ, a w nich będzie m_σ wierszy, odmiennych od poprzednio zatrzymanych, oznaczonych wskaźnikami

$$\varphi,\ \lambda,\ \ldots,\ \psi$$

$(\varphi<\lambda<\ldots<\psi)$, tworzącemi kombinacyę z tychże n liczb po m_σ, opatrzoną cechą i_σ; te elementy tworzyć będą systemat m_σ^2 elementów. Wyznaczniki tych systematów

$$m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2\ m_\sigma^2$$

elementów będą wyznacznikami częściowemi danego wyznacznika D, mianowicie:

$$\Sigma \pm a_{\gamma,p}a_{\delta,q}\ldots a_{\zeta,s} = d_{i_1,k_1}^{(m_1)},$$

$$\Sigma \pm a_{\beta,f}a_{\gamma,g}\ldots a_{\tau,h} = d_{i_2,k_2}^{(m_2)},$$

$$\Sigma \pm a_{\varphi,t}a_{\lambda,u}\ldots a_{\psi,v} = d_{i_\sigma,k_\sigma}^{(m_\sigma)}.$$

Ze sposobu tworzenia tych wyznaczników jest oczywiste, że w ich iloczynie

$$\overset{(m_1)}{d}_{i_1,k_1}\overset{(m_2)}{d}_{i_2,k_2}\ldots\overset{(m_\sigma)}{d}_{i_\sigma,k_\sigma}=\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\beta,f}\ldots a_{\tau,h}\ldots\Sigma\pm a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}$$

każda z liczb

$$1,\ 2,\ 3\ ,\ldots,\ n$$

wchodzi raz tylko jako wskaźnik pierwszy i raz tylko jako wskaźnik drugi, a żadna nie jest opuszczoną. Zatem ten iloczyn, poprzedzony właściwym znakiem, przedstawia zebranie pewnych wyrazów danego wyznacznika D. Jeśli liczby zmian zachodzące w układach

$$\eta,\ \delta,\ldots,\ \zeta,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \tau,\ldots,\ \varphi,\ \lambda,\ldots,\ \psi,$$

$$p,\ q,\ldots,\ s,\ f,\ g,\ldots,\ h,\ldots,\ t,\ u,\ldots,\ v$$

nazwiemy odpowiednie ε_i i ε_k, to wyrażenie

$$(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\overset{(m_1)}{d}_{i_1,k_1}\overset{(m_2)}{d}_{i_2,k_2}\ldots\overset{(m_\sigma)}{d}_{i_\sigma,k_\sigma}=$$

$$=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\beta,f}\ldots a_{\tau,h}\ldots\Sigma\pm a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}$$

przedstawia zebranie

$$1.2\ldots m_1.1.2\ldots m_2\ldots1.2\ldots m_\sigma$$

wyrazów danego wyznacznika.

Zatrzymajmy w ostatniem wyrażeniu wszędzie jedne ze wskaźników, np. pierwsze, a w czynniku $\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}$ zamiast układu drugich wskaźników

$$p,\ q,\ldots,\ s$$

wstawmy wszystkie $\binom{n}{m_1}$ kombinacyj z n liczb $1, 2, \ldots, n$ po m_1. Obok każdego z takich $\binom{n}{m_1}$ pierwszych czynników postawmy, jako czynnik drugi, każdy wyznacznik otrzymany z wyznacznika $\Sigma \pm a_{\beta,f} \ldots a_{\tau,h}$ wskutek zastąpienia układu drugich wskaźników

$$f, g, \ldots, h$$

przez wszystkie $\binom{n-m_1}{m_2}$ kombinacyj z $n-m_1$ liczb pozostałych w szeregu $1. 2, \ldots, n$ (po wzięciu m_1 liczb $p, q, \ldots, s$) po m_2. Obok każdego z tych $\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}$ iloczynów dwu pierwszych czynników stawiajmy, jako czynnik trzeci, każdy wyznacznik, otrzymany z trzeciego czynnika wyrażenia powyższego wskutek zastąpienia układu drugich wskaźników przez wszystkie $\binom{n-m_1-m_2}{m_3}$ kombinacye z $n-m_1-m_2$ pozostałych liczb z szeregu $1, 2, \ldots, n$ po m_3, i t. d. Otrzymamy w ten sposób

$$\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{m_\sigma}{m_\sigma}=$$

$$=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m_1 . 1.2\ldots m_2 . 1.2\ldots m_3 \ldots 1.2\ldots m_\sigma}.$$

takich wyrażeń, jak powyżej wypisane.

Żaden z wyrazów danego wyznacznika nie wchodzi jednocześnie do dwu takich wyrażeń, gdyż w dwu takich wyrażeniach zachodzą różne kombinacye pewnych m_λ drugich wskaźników, przy jednakowych pierwszych wskaźnikach. Ponieważ więc oddzielny wyraz wyznacznika danego wchodzi w jedno tylko takie wyrażenie, a każde z takich wyrażeń przedstawia zebranie

$$1.2...m_1.1.2...m_2...1.2...m_\sigma$$

wyrazów, więc summa tych wyrażeń przedstawia zebranie

$$\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{m_\sigma}{m_\sigma}1.2...m_1.1.2...m_2.1.2...m_3...1.2...m_\sigma$$

$$=1.2...n$$

wyrazów danego wyznacznika — przedstawia dany wyznacznik.

Wyznacznik (¹)

$$\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{n,n}=\sum_k\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\overset{(m_1)}{d}_{i_1,k_1}\overset{(m_2)}{d}_{i_2,k_2}\ldots\overset{(m_\sigma)}{d}_{i_\sigma,k_\sigma}\right),$$

$$=\sum_k\left((-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}\Sigma\pm a_{\vartheta,f}\ldots a_{\tau,h}\ldots\Sigma\pm a_{\varphi,t}\ldots a_{\psi,v}\right),$$

(¹) VANDERMONDE (l. c., str. 524) daje wyrażenia wyznacznika 6-ego stopnia przez iloczyny wyznaczników drugiego i trzeciego stopni. LAPLACE (l. c., str. 304) daje podobne wyrażenia wyznaczników 5-ego, 6-ego i 7-ego stopni przez iloczyny dwu wyznaczników, oraz zajmuje się ogólną kwestyą przedstawienia wyznacznika, jako summy wyrazów, będących iloczynami wyznaczników częściowych. CAUCHY (l.c. str. 99, 100, 110) daje różne ogólne wyrażenia wyznacznika n-ego stopnia przez iloczyny dopełniających się dwu wyznaczników częściowych. JACOBI (*De formatione...*, str. 299) daje ogólne wyrażenie wyznacznika przez iloczyny czterech wyznaczników częściowych. SPOTTISWOODE (l. c., CRELLE, str. 223) stawia kwestyę najogólniej.

Twierdzenie to nosi nazwę: Twierdzenie wyznacznikowe LAPLACE'a (« LAPLACE'sche Determinantensatz »).

GORDAN, według listu (listopad 1863) CLEBSCH'a do BALTZER'a, wyprowadza to twierdzenie z twierdzenia BINET-CAUCHY (§ 43) o mnożeniu *gdzie znak* $\sum\limits_k$ *oznacza, że, niezmieniając pierwszych wskaźników, należy wszystkie kombinacye z* n *liczb* 1, 2,..., n *po* m_1 *podstawić kolejno zamiast układu* p, q,..., s, *a każdą razą wszystkie kombinacye z* $n-m_1$ *pozostałych liczb po* m_2 *podstawić kolejno zamiast układu* f, g,..., h, *i t. d., nadając przytem odpowiednią wartość liczbie* ε_k,

Gdybyśmy zechcieli zostawiać nieporuszonemi drugie wskaźniki, to podobnie należałoby rozumieć znak $\sum\limits_i$, odnoszący się do pierwszych wskaźników, przez który wypadłoby zastąpić znak $\sum\limits_k$.

Np., rozkładając wyznacznik szóstego stopnia

$$D=\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}a_{6,6}$$

na iloczyny wyznaczników drugiego, trzeciego i pierwszego stopni, otrzymamy

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.1}=60$$

składników. Jeśli w tem rozłożeniu pierwsze elementy idą wciąż w porządku 1, 2, 3, 4, 5, 6, to

$$\begin{aligned}D=&\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}.\Sigma\pm a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}.a_{6,6}-\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}.\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,4}a_{5,5}.a_{6,6}\\&+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,4}.\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5}.a_{6,6}-\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,5}.\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4}.a_{6,6}\\&+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,6}.\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4}.a_{6,5}-\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,6}.\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5}.a_{6,4}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

---

dwu wyznaczników. (Wyprowadzenie to wyłożone u BALTZER'a, l. c., trzeciego wydania str. 43, czwartego str. 54).

TRZASKA (*Krótkie wiadomości o wyznacznikach*, przypisek do dzieła

ZADANIE.—Sprawdzić, zastępując znakowanie VANDERMONDE'a (§ 17) przez zwyczajne, następujące dane przezeń ([1]) wyrażenie

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}=\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\cdot\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}-\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}+\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{d}\cdot\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}$$

$$+\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}-\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{d}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}+\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{e}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{f}+\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{d}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\theta}{f}$$

$$-\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{e}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{f}+\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{f}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{e}+\frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{e}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{c}\Big|\frac{\theta}{f}-\frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{f}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{c}\Big|\frac{\theta}{e}$$

$$+\frac{\alpha}{e}\Big|\frac{\beta}{f}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{c}\Big|\frac{\theta}{d}-\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{e}\cdot\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{f}+\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{f}\cdot\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{e}-\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{f}\cdot\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{d}\Big|\frac{\theta}{e}.$$

§ 56.

Jeśli systemat elementów danego wyznacznika n-ego stopnia jest taki, że elementy pewnych wierszy jego m kolumn wszystkie są zerami, to możemy tak przestawić wiersze i kolumny, aby te zera zajmowały, wogóle mówiąc, prostokątną część na skraju kwadratu ([2]) systematu elementów.

FOLKIERSKIEGO: *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, t. I, 1870 r., str. 1049 i następne) zajmuje się zadaniem odwrotnem: twierdzenie BINET-CAUCHY wyprowadza z twierdzenia LAPLACE'a, które «VANDERMONDE'owem» nazywa.

([1]) l. c., str. 525.

([2]) Np.

$$\begin{vmatrix} a_1, & 0, & a_3, & 0, & a_5 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5 \\ c_1, & 0, & c_3, & 0, & c_5 \\ d_1, & 0, & d_3, & 0, & d_5 \\ e_1, & e_2, & 0, & e_4, & e_5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & 0, & 0 \\ c_1, & c_3, & c_5, & 0, & 0 \\ d_1, & d_3, & d_5, & 0, & 0 \\ b_1, & b_3, & b_5, & b_2, & b_4 \\ e_1, & 0, & e_5, & e_2, & e_4 \end{vmatrix}.$$

Czy jednak to przekształcenie uskutecznimy, czy nie, to wogóle [1]

Jeśli w m *kolumnach systematu elementów danego wyznacznika* n-*ego stopnia zera zapełniają pewne* n — m *wierszy, to dany wyznacznik jest iloczynem dwu wyznaczników częściowych* m-*ego* i (n — m)-*ego stopni*,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,m}, & a_{1,m+1}, & \dots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & \dots, & a_{m,m}, & a_{m,m+1}, & \dots, & a_{m,n} \\ 0, & \dots, & 0, & a_{m+1,m+1}, & \dots, & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \dots, & 0, & a_{n,m+1}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & \dots, & a_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1}, & \dots, & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

jeśli zaś zera w m *kolumnach* (*wierszach*) *zapełniają więcej niż* n — m *wierszy* (*kolumn*), *to wyznacznik jest zerem*,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,m}, & a_{1,m+1}, & \dots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1}, & \dots, & a_{m-1,m}, & a_{m-1,m+1}, & \dots, & a_{m-1,n} \\ 0, & \dots, & 0, & a_{m,m+1}, & \dots, & a_{m,n} \\ 0, & \dots, & 0, & a_{m+1,m+1}, & \dots, & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \dots, & 0, & a_{n,m+1}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

[1] JACOBI, l. c., str. 291.

$$=\begin{vmatrix} a_{m+1,m+1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & , & \cdot & \cdot & \cdot, & a_{n,n} \end{vmatrix} .0=0.$$

Np.

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_1, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_1, & c_3 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_1, & d_3 \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4, & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_4, & a_2, & a_3-a_5, & a_4, & a_5 \\ 0, & b_2, & 0, & b_1, & b_3 \\ 0, & c_2, & 0, & c_1, & c_3 \\ 0, & d_2, & 0, & d_1, & d_3 \\ e_1-e_4, & e_2, & 0, & e_4, & e_3 \end{vmatrix}$$

$$=+\begin{vmatrix} a_1-a_4, & a_3-a_5, & a_2, & a_4, & a_5 \\ e_1-e_4, & 0, & e_2, & e_4, & e_3 \\ 0, & 0, & b_2, & b_1, & b_3 \\ 0, & 0, & c_2, & c_1, & c_3 \\ 0, & 0, & d_2, & d_1, & d_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1-a_4, & a_3-a_5 \\ e_1-e_4, & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_2, & b_1, & b_3 \\ c_2, & c_1, & c_3 \\ d_2, & d_1, & d_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_3-a_5)(e_1-e_4)\begin{vmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \\ d_1, & d_2, & d_3 \end{vmatrix}.$$

Może być niekiedy, że jeszcze wyznaczniki częściowe, do których iloczynu sprowadza się dany wyznacznik, redukują się również do iloczynu wyznaczników częściowych niższych stopni.

Np. [1]

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,5}, & a_{1,6}, & a_{1,7}, & a_{1,8}, & a_{1,9}, & a_{1,10} \\
a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,5}, & a_{2,6}, & a_{2,7}, & a_{2,8}, & a_{2,9}, & a_{2,10} \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_{3,6}, & a_{3,7}, & a_{3,8}, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_{4,6}, & a_{4,7}, & a_{4,8}, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_{5,6}, & a_{5,7}, & a_{5,8}, & 0, & 0 \\
a_{6,1}, & a_{6,2}, & a_{6,3}, & a_{6,4}, & a_{6,5}, & a_{6,6}, & a_{6,7}, & a_{6,8}, & 0, & 0 \\
a_{7,1}, & a_{7,2}, & a_{7,3}, & a_{7,4}, & a_{7,5}, & a_{7,6}, & a_{7,7}, & a_{7,8}, & 0, & 0 \\
a_{8,1}, & a_{8,2}, & a_{8,3}, & a_{8,4}, & a_{8,5}, & a_{8,6}, & a_{8,7}, & a_{8,8}, & 0, & 0 \\
a_{9,1}, & a_{9,2}, & 0, & 0, & 0, & a_{9,6}, & a_{9,7}, & a_{9,8}, & 0, & 0 \\
a_{10,1}, & a_{10,2}, & 0, & 0, & 0, & a_{10,6}, & a_{10,7}, & a_{10,8}, & 0, & 0
\end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{1,9}, & a_{1,10} \\ a_{2,9}, & a_{2,10} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,6}, & a_{3,7}, & a_{3,8} \\ a_{4,6}, & a_{4,7}, & a_{4,8} \\ a_{5,6}, & a_{5,7}, & a_{5,8} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{6,3}, & a_{6,4}, & a_{6,5} \\ a_{7,3}, & a_{7,4}, & a_{7,5} \\ a_{8,3}, & a_{8,4}, & a_{8,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{9,1}, & a_{9,2} \\ a_{10,1}, & a_{10,2} \end{vmatrix}.$$

§ 57.

Jeśli pewne m rzędów równoległych jednego z dwu danych wyznaczników n-ego stopnia są utworzone przez odpowiednio też same elementy, co pewne m rzędów równoległych drugiego, to możemy w tych dwu systematach elementów tak poprzestawiać rzędy równoległe (§ 24), aby nietylko owe m rzędów bezpośrednio po sobie następowały, lecz aby każde dwa

---

[1] Guentner, l. c., 2-ie wydanie, str. 56.

równe sobie rzędy zajmowały w obu systematach elementów też same miejsca.

Jeśli takie dwa wyznaczniki są

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots, & a_{1,l}, & a_{1,l+1},\ldots, & a_{1,l+m}, & a_{1,l+m+1},\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j,1},\ldots, & a_{j,l}, & a_{j,l+1},\ldots, & a_{j,l+m}, & a_{j,l+m+1},\ldots, & a_{j,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1},\ldots, & a_{n,l}, & a_{n,l+1},\ldots, & a_{n,l+m}, & a_{n,l+m+1},\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1},\ldots, & b_{1,l}, & a_{1,l+1},\ldots, & a_{1,l+m}, & b_{1,l+m+1},\ldots, & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{j,1},\ldots, & b_{j,l}, & a_{j,l+1},\ldots, & a_{j,l+m}, & b_{j,l+m+1},\ldots, & b_{j,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1},\ldots, & b_{n,l}, & a_{n,l+1},\ldots, & a_{n,l+m}, & b_{n,l+m+1},\ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

a wskaźniki tych m jednakowych kolumn

$$l+1,\ l+2,\ldots,\ l+m-1,\ l+m$$

tworzą kombinacyę z n liczb $1, 2,\ldots, n$, opatrzoną cechą k, to, rozumiejąc przez $\overset{(m)}{B}_{i,k}$ ilość dołączoną do wyznacznika częściowego $\overset{(m)}{d}_{i,k}$ danego wyznacznika D″ (§ 51), mieć będziemy (§ 52)

$$D' = \overset{(m)}{d}_{1,k}\overset{(m)}{A}_{1,k} + \overset{(m)}{d}_{2,k}\overset{(m)}{A}_{2,k} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{\mu,k}\overset{(m)}{A}_{\mu,k},$$

$$D'' = \overset{(m)}{d}_{1,k}\overset{(m)}{B}_{1,k} + \overset{(m)}{d}_{2,k}\overset{(m)}{B}_{2,k} + \ldots + \overset{(m)}{d}_{\mu,k}\overset{(m)}{B}_{\mu,k},$$

zkąd

$$D' + D'' = \overset{(m)}{d}_{1,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{1,k} + \overset{(m)}{B}_{1,k}\Big) + \overset{(m)}{d}_{2,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{2,k} + \overset{(m)}{B}_{2,k}\Big) + \ldots$$

$$+ \overset{(m)}{d}_{\mu,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{\mu,k} + \overset{(m)}{B}_{\mu,k}\Big),$$

$$D' - D'' = \overset{(m)}{d}_{1,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{1,k} - \overset{(m)}{B}_{1,k}\Big) + \overset{(m)}{d}_{2,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{2,k} - \overset{(m)}{B}_{2,k}\Big) + \ldots$$

$$+ \overset{(m)}{d}_{\mu,k}\Big(\overset{(m)}{A}_{\mu,k} - \overset{(m)}{B}_{\mu,k}\Big).$$

Summa lub różnica dwu wyznaczników n-*ego stopnia, mających* m *odpowiednich rzędów równoległych wypełnionych odpowiednio równemi elementami, równa się wyznacznikowi, którego* m *tychże rzędów są utworzone przez też same i w takimże porządku następujące elementy, pozostałe zaś* n — m *rzędów są napełnione tak dobranemi elementami, że ilość dołączona do każdego z wyznaczników częściowych* n-*go stopnia, utworzonych z elementów owych* m *rzędów, jest odpowiednio summą lub różnicą ilości dołączonych do tegoż samego wyznacznika częściowego pierwszego i drugiego z danych wyznaczników* (1).

(Gdyby danych było kilka takich wyznaczników, z których w summie algebraicznej niektóre należałoby wziąć ze znakiem +, inne zaś ze znakiem —, np. $-D' + D'' + D''' - D^{IV}$, to łatwo odpowiednio uogólnić tak powyższe formuły, jak i wysłowienie twierdzenia).

Np. 1°

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 4, & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 0, & 1, & 2 \\ 6, & 5, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ x, & y, & z \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix},$$

(1) Spottiswoode, l. c., (Crelle), str. 232.

gdzie ilości $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ zadosyć czynić muszą warunkom (¹)

$$y\zeta - z\eta = 5 + (-2) = 3,$$

$$z\xi - x\zeta = -10 + 12 = 2,$$

$$x\eta - y\xi = 5 + (-6) = -1,$$

zkąd, wyrażając trzy z tych sześciu ilości przez trzy pozostałe, np.

$$\zeta = 3\xi + 2\eta,$$

$$x = \frac{z\xi - 2}{3\xi + 2\eta},$$

$$y = \frac{z\eta + 3}{3\xi + 2\eta},$$

mamy wogóle

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 4, & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 0, & 1, & 2 \\ 6, & 5, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\ , & b\ , & c \\ \frac{z\xi - 2}{3\xi + 2\eta}, & \frac{z\eta + 3}{3\xi + 2\eta}, & z \\ \xi\ , & \eta\ , & 3\xi + 2\eta \end{vmatrix},$$

przy jakichkolwiek wartościach ilości ξ, η i z. Kładąc więc np.

$$\xi = \eta = z = 1,$$

mamy

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 4, & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 0, & 1, & 2 \\ 6, & 5, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\ , & b, & c \\ -\frac{1}{5}, & \frac{4}{5}, & 1 \\ 1\ , & 1, & 5 \end{vmatrix}.$$

(¹) Podobnych związków jest, wogóle, $\mu = \binom{n}{m}$ między $n(n-m)$ ilościami do wyznaczenia.

2°

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \alpha, & \beta, & \beta, & \beta \\ \beta, & \alpha, & \alpha, & \alpha \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \gamma, & \beta, & \beta, & \beta \\ \beta, & \gamma, & \gamma, & \gamma \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \alpha, & \gamma, & \gamma, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \alpha, & \alpha \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}.$$

W przypadku (§ 53), gdy wyznaczniki mają wszystkie prócz jednego wiersze, lub wszystkie prócz jednej kolumny wypełnione przez odpowiednio też same elementy, dodawanie lub odejmowanie takich wyznaczników jest zadaniem nader prostem. Np.

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 2, & 1, & 3 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \\ 6, & 5, & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3, & 0, & 4 \\ 4, & 3, & 8 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 2, & 1, & 3 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 2, & 2, & 5 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3, & 0, & 4 \\ 4, & 3, & 8 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 4, & 3, & 8 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3, & 0, & 4 \\ 4, & 3, & 8 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & 3, & 8 \\ 4, & 3, & 8 \\ 3, & 4, & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeśli z danych do dodania wyznaczników każde dwa mają niektóre rzędy jednakowe, inne różne, to niekiedy udaje się ich summę wyrazić za pomocą wyznacznika systematu elementów, powstałego przez wypisanie każdego rzędu raz tylko (bez powtarzania) i przez odpowiednie dobranie elementów pozostałych. Np. (¹)

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_4, & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3, & b_3 \\ a_4, & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & x_1, & y_1 \\ a_2, & b_2, & x_2, & y_2 \\ a_3, & b_3, & x_3, & y_3 \\ a_4, & b_4, & x_4, & y_4 \end{vmatrix},$$

gdzie powinno być

$$x_3\, y_4 - y_3\, x_4 = +1, \qquad x_2\, y_3 - y_2\, x_3 = 0,$$

$$x_2\, y_4 - y_2\, x_4 = -1, \qquad x_1\, y_3 - y_1\, x_3 = -1,$$

$$x_1\, y_4 - y_1\, x_4 = 0\quad, \qquad x_1\, y_2 - y_1\, x_2 = +1;$$

ta więc summa czterech danych wyznaczników może być przedstawiona w rozmaitych postaciach wyznacznika czwartego stopnia, jedną z których jest prosta postać taka:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & 1, & 1 \\ a_2, & b_2, & -2, & -1 \\ a_3, & b_3, & 2, & 1 \\ a_4, & b_4, & 1, & 1 \end{vmatrix}.$$

(¹) Bellavitis, l. c., § 26.

§ 58.

Jeśli z systematu elementów danego wyznacznika

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

usuniemy i-y wiersz i k-ą kolumnę, a otrzymany wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia poprzedzimy znakiem wyznaczonym przez $(-1)^{i+k}$, to mieć będziemy ilość dołączoną do elementu $a_{i,k}$, którąśmy nazwali $A_{i,k}$ (§ 25). Ten wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia możemy znowu rozłożyć według elementów jego j-ego wiersza (§ 25). Zebranie wszystkich oddzielnych wyrazów ilości $A_{i,k}$, zawierających element $a_{j,l}$, nazwijmy $a_{j,l}A_{i,j,k,l}$; skutkiem tego ilość $A_{i,j,k,l}$ będzie ilością dołączoną do elementu $a_{j,l}$ w ilości $A_{i,k}$ (1) i

$$A_{i,k}=a_{j,1}A_{i,j,k,1}+\dots+a_{j,k-1}A_{i,j,k,k-1}+a_{i,k+1}A_{i,j,k,k+1}+\dots$$
$$+a_{j,n}A_{i,j,k,n},$$

gdzie każda ilość $A_{i,j,k,l}$ powstaje z ilości $A_{i,k}$ przez opuszczenie j-ego wiersza i l-ej kolumny i poprzedzenie tak powstałego wyznacznika $(n-2)$-ego stopnia znakiem $(-1)^{j+l}$, czyli powstaje z wyznacznika D przez opuszczenie w nim i-ego i j-ego wierszy, oraz k-ej i l-ej kolumn, i dodanie takiego znaku,

---

(1) T. j. ilością dołączoną do elementu $a_{j,l}$ w samym wyznaczniku $(n-1)$-ego stopnia (bez znaku) jest $(-1)^{i+k}A_{i,j,k,l}$.

aby $a_{i,k}a_{j,l}\mathrm{A}_{i,j,k,l}$ przedstawiało dokładnie zebranie pewnej liczby wyrazów wyznacznika D. Ilość więc $\mathrm{A}_{i,j,k,l}$ jest z pewnym znakiem wziętym wyznacznikiem częściowym $(n-2)$-ego stopnia danego wyznacznika D (§ 50), czyli jest ilością dołączoną do wyznacznika częściowego [1]

$$\begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,l} \\ a_{j,k}, & a_{j,l} \end{vmatrix},$$

tak, że iloczyn

$$\begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,l} \\ a_{j,k}, & a_{j,l} \end{vmatrix} \mathrm{A}_{i,j,k,l} = (a_{i,k}a_{j,l} - a_{i,l}a_{j,k})\mathrm{A}_{i,j,k,l}$$

przedstawia, ze ścisłością do znaków, $1.2.1.2.3\ldots(n-2)$ różnych od siebie wyrazów danego wyznacznika D (§ 51). Połowa tych wyrazów, t. j. $1.2.3\ldots(n-2)$ wyrazów, w które wchodzą elementy $a_{i,k}$ i $a_{j,l}$, jest przedstawiona przez

$$+a_{i,k}a_{j,l}\mathrm{A}_{i,j,k,l};$$

pozostałe zaś $1.2.3\ldots(n-2)$ wyrazów, zawierających elementy $a_{i,l}$ i $a_{j,k}$, przez

$$-a_{i,l}a_{j,k}\mathrm{A}_{i,j,k,l}.$$

Zważmy, że wyznacznik D w każdym swym wyrazie zawiera jeden element i-ego wiersza, jakoteż jeden element k-ej ko-

---

(1) Jeśli w szeregu kombinacyj z n liczb $1, 2, \ldots, n$ po dwie, kombinacya i, j jest opatrzona cechą λ, kombinacya zaś k, l cechą ν, to ilość $\mathrm{A}_{i,j,k,l}$ jest tem samem, co, według § 51-ego, wypadłoby oznaczyć $\mathrm{A}^{(2)}_{\lambda,\nu}$.

lumny. Wyrazy, zawierające element $a_{i,k}$, są, jak wiemy, przedstawione przez $a_{i,k}A_{i,k}$; skutkiem tego wyrażenie

$$D - a_{i,k}A_{i,k}$$

nie zawiera już wyrazów, w które wchodzi element $a_{i,k}$, t. j. przedstawia ono zebranie wszystkich wyrazów, które z i-ego wiersza posiadają jeden z elementów

$$a_{i,1},\ a_{i,2},\ldots,\ a_{i,k-1},\ a_{i,k+1},\ldots,\ a_{i,n},$$

i jednocześnie z k-ej kolumny jeden z elementów

$$a_{1,k},\ a_{2,k},\ldots,\ a_{i-1,k},\ a_{i+1,k},\ldots,\ a_{n,k}.$$

Ogólnie więc możemy powiedzieć, że w każdy z tych wyrazów wchodzi, jako czynnik, iloczyn

$$a_{i,l}a_{j,k}, \qquad \text{przy} \begin{cases} l=1,\ 2,\ldots,\ k-1,\ k+1,\ldots,n, \\ j=1,\ 2,\ldots,\ i-1,\ i+1,\ldots,n. \end{cases}$$

Zebranie wszystkich wyrazów wyznacznika D, w które, przy pewnych oznaczonych wartościach dla liczb l i j, wchodzą elementy $a_{i,l}$ i $a_{j,k}$, oznaczmy (wraz ze znakami wyrazów) np. przez

$$a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l}.$$

Skutkiem tego

$$D - a_{i,k}A_{i,k} = \sum_{j,\,l} a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l},$$

czyli

$$D = a_{i,k}A_{i,k} + \sum_{j,\,l} a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l},$$

gdzie znak $\sum\limits_{j,\,l}$ oznacza, że przy każdéj z powyżéj wypisanych $n-1$ wartości dla liczby j, należy liczbie l nadawać każdą z możliwych dla niéj $n-1$ wartości.

Wiele jest wyrazów wyznacznika D w każdem wyrażeniu $a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l}$? W wyznaczniku $D=\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{i,i}\ldots a_{n,n}$ tak przestawmy kolumny, aby otrzymać $\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{i,l}\ldots a_{j,k}\ldots a_{n,n}$. Jeśli, rozwijając wyznacznik przez przestawienie drugich wskaźników, chcemy wydzielić wyrazy, w które wchodzą elementy $a_{i,l}$ i $a_{j,k}$, to otrzymamy je wszystkie, gdy uskutecznimy wszelkie możliwie przestawienia drugich wskaźników elementów pozostałych, t. j. układ $n-2$ drugich wskaźników

$$1,\ 2,\ldots,l-1,\ l+1,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,n$$

zastąpimy wszystkiemi ich przemianami, których będzie $1.2\ldots(n-3)(n-2)$.

Wyrażenie więc

$$+a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l},$$

przedstawia nam dokładnie zebranie wszystkich $1.2\ldots(n-2)$ wyrazów wyznacznika D, zawierających elementy $a_{i,l}$ i $a_{j,k}$. Lecz powyżéj dane wyrażenie

$$-a_{i,l}a_{j,k}A_{i,j,k,l},$$

przedstawia dokładnie zebranie $1,\ 2\ldots(n-2)$ różnych wyrazów wyznacznika D, w które wchodzą elementy $a_{i,l}$ i $a_{j,k}$; i ono więc przedstawia je wszystkie. Jest zatem

$$+a_{i,l}a_{j,k}\alpha_{j,l}=-a_{i,l}a_{j,k}A_{i,j,k,l},$$

zkąd

$$\alpha_{j,l}=-A_{i,j,k,l}.$$

Podstawiając na każde $a_{i,l}$ taką wartość, otrzymujemy z wyrażenia wyznacznika D przez ilości $\alpha_{j,l}$ następujący *rozkład wyznacznika według elementów pewnego wiersza i pewnej kolumny* (¹):

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = a_{i,k} A_{i,k} - \sum_{j,\,l} a_{i,l} a_{j,k} A_{i,j,k,l},$$

gdzie znak $\sum\limits_{j,\,l}$ *odnosi się do* $(n-1)^2$ *składników odpowiadających każdej parze wartości*

$$j = 1,\ 2, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, n,$$

$$l = 1,\ 2, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n.$$

Np. (§ 12, 8°)

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \beta' & 1, & 0, & 0 \\ \gamma' & 0, & 1, & 0 \\ \delta' & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \alpha . \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} - \beta\beta' . \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} - \beta\gamma' . - \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$-\beta\delta' . \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} - \gamma\beta' . - \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} - \ldots = \alpha - \beta\beta - \gamma\gamma' - \delta\delta'.$$

Zadania. Przy pomocy tego rozłożenia obliczyć wyznaczniki:

(1°) (porów. § 38, 2°)

$$\begin{vmatrix} a_1+1, & 1, & 1, & 1 \\ -a_1, & a_2, & 0, & 0 \\ -a_1, & 0, & a_3, & 0 \\ -a_1, & 0, & 0, & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4 (1 + a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + a_4^{-1});$$

(¹) Cauchy, l. c., str. 69.

(2°)

$$\begin{vmatrix} a, & f, & g, & h \\ f', & b, & 0, & 0 \\ g', & 0, & c, & 0 \\ h', & 0, & 0, & d \end{vmatrix} = abcd - ff'cd - gg'bd - hh'bc.$$

§ 59.

Zebranie wszystkich wyrazów wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots & ,a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

które nie zawierają ani jednego elementu głównej przekątnej [1], przedstawić możemy za pomocą wyznacznika, powstałego z wyznacznika D wskutek zastąpienia wszystkich elementów głównej przekątnej przez zera, t. j. za pomocą wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 0 & , a_{1,2}, & \dots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & 0 & , \dots & ,a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots , & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{N}.$$

W danym wyznaczniku D znajdują się wyrazy zawierające jeden tylko element głównej przekątnej: albo $a_{1,1}$, albo $a_{2,2}, \dots,$

---

[1] Np. wyraz $a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}\dots a_{n-1,n}a_{n,n-1}$, przy n parzystem, lub $a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,4}\dots a_{n-1,n}a_{n,n-1}$, przy n nieparzystem.

albo $a_{n,n}$. Idzie o wydzielenie wszystkich takich wyrazów. — Zebranie wszystkich wyrazów wyznacznika D, zawierających element $a_{i,i}$, jest, jak wiemy (§ 25),

$$a_{i,i}A_{i,i} = + a_{i,i} \begin{vmatrix} a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,i-1} & , & a_{1,i+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & ,\ldots, & a_{i-1,i-1} & , & a_{i-1,i+1} & ,\ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & ,\ldots, & a_{i+1,i-1} & , & a_{i+1,i+1} & ,\ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,i-1} & , & a_{n,i+1} & ,\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

zatrzymując z nich wszystkie te, które mają z głównych elementów tylko jeden element $a_{i,i}$, możemy je przedstawić przez

$$+ a_{i,i} \begin{vmatrix} 0 & ,\ldots, & a_{1,i-1} & , & a_{1,i+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & ,\ldots, & 0 & , & a_{i-1,i+1} & ,\ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & ,\ldots, & a_{i+1,i-1} & , & 0 & ,\ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ,\ldots, & a_{n,i-1} & , & a_{n,i+1} & ,\ldots, & 0 \end{vmatrix} = a_{i,i}N_i,$$

gdzie przez N_i oznaczyliśmy wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia, powstający z wyznacznika N przez opuszczenie w systemacie jego elementów i ego wiersza, oraz i-ej kolumny. Nadając dla i wszystkie wartości od 1 do n, otrzymamy wyrażenie

$$\sum_i a_{i,i}N_i,$$

przedstawiające nam zebranie tych wszystkich wyrazów wyznacznika D, które zawierają jeden tylko element głównej przekątnej.

W podobnyż sposób, jeśli przez $N_{i,j}$ oznaczymy wyznacznik $(n-2)$-ego stopnia, powstający z wyznacznika N przez opuszczenie w systemacie jego elementów i-ego i j-ego wierszy, oraz i-ej i j-ej kolumn, to

$$a_{i,i}a_{j,j}N_{i,j}$$

przedstawi nam zebranie wszystkich wyrazów danego wyznacznika D, w które z elementów głównej przekątnej weszły tylko dwa elementy: $a_{i,i}$ i $a_{j,j}$. Nadając zaś liczbom i i j wartości odpowiadające wszystkim $\binom{n}{2}$ kombinacyom z n liczb $1, 2, \ldots, n$ po dwie, a znak $\sum\limits_{i,j}$ odnosząc do tych wszystkich kombinacyj, będziemy mogli przez wyrażenie

$$\sum_{i,j} a_{i,i}a_{j,j}N_{i,j}$$

przedstawić summę wszystkich wyrazów wyznacznika D, zawierających po dwa tylko elementy głównej przekątnej.

I wogóle, summę wszystkich wyrazów, w które wchodzi pewne tylko m elementów głównej przekątnej: $a_{i,i}, a_{j,j}, \ldots, a_{l,l}$, przedstawić możemy za pomocą wyrażenia

$$a_{i,i}a_{j,j}\ldots a_{l,l}N_{i,j,\ldots,l},$$

jeśli $N_{i,j,\ldots,l}$ oznacza wyznacznik częściowy $(n-m)$-ego stopnia wyznacznika N, powstały zeń wskutek opuszczenia wierszy i kolumn, opatrzonych wskaźnikami $i, j, \ldots, l$. Zebranie zaś wszystkich tych wyrazów wyznacznika D, które zawierają tylko m jakichkolwiek elementów głównej przekątnej, wyrazić będziemy mogli przez

$$\sum_{i,j,\ldots,l} a_{i,i}a_{j,j}\ldots a_{l,l}N_{i,j,\ldots,l},$$

gdzie znak $\sum\limits_{i,j,\dots,l}$ odnosi się do wszystkich $\binom{n}{m}$ kombinacyj z n liczb 1, 2,...,n, które zamiast układu wskaźników $i, j,..,l$ podstawić należy.

Nakoniec, będzie wyraz, oczywiście jeden tylko, zawierający n elementów (wszystkie) głównej przekątnej :

$$a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$

Summa wszystkich tych wyrażeń obejmuje widocznie wszystkie wyrazy danego wyznacznika D, tak, że

$$\mathrm{D}=\mathrm{N}+\sum_i a_{i,i}\mathrm{N}_i+\sum_{i,j} a_{i,i}a_{j,j}\mathrm{N}_{i,j}+\dots+\sum_{i,j,\dots,l} a_{i,i}a_{j,j}\dots a_{l,l}\mathrm{N}_{i,j,\dots,l}$$
$$+\dots+a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$

Jestto [1] *rozkład wyznacznika według elementów głównej przekątnej*.

Zauważyć tu należy, że nie ma wyrazu, któryby zawierał tylko $n-1$ (lecz nie więcej) elementów głównej przekątnej, choćby dla tego, że wyznacznik częściowy pierwszego stopnia, powstający z wyznacznika N wskutek opuszczenia $n-1$ wierszy i kolumn, opatrzonych temi samemi wskaźnikami, redukuje się zawsze do elementu zero.

Np.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & , a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & 0 & , a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0 & , a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & 0 \end{vmatrix} +$$

---

[1] Cayley, *Sur les déterminants gauches* (Crelle *Journal*, t. XXXVIII, str. 93).

$$+a_{1,1}\begin{vmatrix} 0, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,2}, & 0, & a_{3,4} \\ a_{4,2}, & a_{4,3}, & 0 \end{vmatrix} + a_{2,2}\begin{vmatrix} 0, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{3,1}, & 0, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,3}, & 0 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+a_{1,1}a_{2,2}\begin{vmatrix} 0, & a_{3,4} \\ a_{4,3}, & 0 \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{3,3}\begin{vmatrix} 0, & a_{2,4} \\ a_{4,2}, & 0 \end{vmatrix} + \ldots + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}.$$

Jeśli w wyznaczniku danym wszystkie elementy głównej przekątnej są sobie równe

$$a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n} = x,$$

o rozwinięcie wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} x, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & x, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & x \end{vmatrix}$$

według elementów głównej przekątnej, w razie, jeśli w żaden niegłówny element wyznacznika nie wchodzi taż ilość x, będzie rozwinięciem według potęg ilości x, t. j.

$$D = N + x\sum_i N_i + x^2\Sigma N_{i,j} + \ldots + x^m\Sigma N_{i,j,\ldots,l} + \ldots + x^n,$$

gdzie, jak wiemy, nie ma wyrazu, w którym weszło x^{n-1}. Np. (porów. § 12, 12°, § 9, 8°).

$$\begin{vmatrix} z, & a, & b, & c \\ -a, & z, & d, & e \\ -b, & -d, & z, & f \\ -c, & -e, & -f, & z \end{vmatrix} = (af-be+cd)^2+0.z+ (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)z^2+z^4.$$

Zadanie. Obliczając liczbę wyrazów wyznacznika n-ego stopnia, zawierających element $a_{1,1}$, a z pozostałych liczbę wyrazów, w które wchodzi element $a_{2,2}$, i t. d., a następnie, przy dodawaniu wszystkich tych wyrazeń, korzystając ze związku

$$\binom{s}{s}+\binom{s+1}{s}+\binom{s+2}{s}+\ldots+\binom{t-1}{s}+\binom{t}{s}=$$

$$=\frac{(t+1)t(t-1)\ldots(t-s+1)}{1.2\ldots s(s+1)},$$

wyprowadzić, że [1] liczba wszystkich wyrazów wyznacznika n-ego stopnia, w które wchodzą jakiekolwiek elementy głównéj przekątnej, może być przedstawiona za pomocą wyrażenia

$$1.2\ldots n\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots n}\right),$$

a tem samem, liczba wszystkich jego wyrazów, nie zawierających ani jednego elementu głównej przekątnej, za pomocą wyrażenia

$$1.2\ldots n\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\right).$$

§ 60.

Jeśli dany jest wyznacznik n-ego stopnia

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{1,1}+x, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}+x, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}+x \end{vmatrix},$$

---

[1] Baltzer, l. c., 3-e wydanie, str. 29 (wyrażenie niedokładne). Tą kwestyą później zajmowali się: Weyrauch, *Zur Theorie der Determi-*

i jeśli ilość x nie wchodzi w żaden niegłówny element wyznacznika, to ten wyznacznik $f(x)$ jest funkcyą n-ego stopnia względem zmiennej x. Spółczynnikiem przy x^n jest w niej widocznie 1, zaś przy x^0 jest wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & ,a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix} = f(0),$$

tak, że

$$f(x) = x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_{n-m} x^m + \ldots + k_{n-1} x + D.$$

Idzie tylko o bliższe określenie spółczynnika przy x^m.

Jeden z głównych wyznaczników częściowych m-ego stopnia danego wyznacznika $f(x)$ jest

$$\begin{vmatrix} a_{\eta,\eta}+x, & a_{\eta,\delta}, & \ldots, & a_{\eta,\zeta} \\ a_{\delta,\eta}, & a_{\delta,\delta}+x, & \ldots, & a_{\delta,\zeta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\zeta,\eta}, & a_{\zeta,\delta}, & \ldots, & a_{\zeta,\zeta}+x \end{vmatrix} = x^m + \ldots + \overset{(m)}{d}_{i,i},$$

gdyż oczywiście do niego można zastosować to, cośmy powyżej

---

nanten (CRELLE, *Journal*, t. LXXIV, str. 274); MONRO, *Baltzer on the number of terms in a determinant with a vanishing diagonal* (*Messenger of Mathematics*, 1872, str. 38); WEYRAUCH, *Zur Determinantentheorie* (SCHLOEMILCH, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, rocznik XIX, str. 420); BALTZER, l. c., 4-e wyd., str. 37; wreszcie GUENTHER, l. c., 2-e wyd., str. 49.

mówili o $f(x)$. Wyznacznik zaś częściowy, dopełniający poprzedni, jest (§ 51)

$$\begin{vmatrix} a_{\varphi,\varphi}+x, & a_{\varphi,\chi}, & \dots, & a_{\varphi,\psi} \\ a_{\chi,\varphi}, & a_{\chi,\chi}+x, & \dots, & a_{\chi,\psi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\psi,\varphi}, & a_{\psi,\chi}, & \dots, & a_{\psi,\psi}+x \end{vmatrix} = x^{n-m}+\dots+d^{(n-m)}_{\mu-i+1,\,\mu-i+1}.$$

Iloczyn zaś tych dwu wyznaczników przedstawia zebranie (§ 51) pewnej liczby wyrazów wyznacznika $f(x)$. Więc

$$x^m d^{(n-m)}_{\mu-i+1,\,\mu-i+1},$$

wchodzi w skład wyrażenia $k_{n-m}x^m$. Ponieważ zaś każdy odpowiedni oddzielny składnik funkcyi $f(x)$, zawierający czynnik x^m, może być uważany, jako powstający z podobnego mnożenia przez siebie dwu dopełniających się głównych wyznaczników częściowych m-ego i $(n-m)$-ego stopnia, i jako przedstawiony przez $x^m d^{(n-m)}_{\lambda,\lambda}$, więc otrzymamy zebranie wszystkich takich składników, czyli wszystkich wyrazów funkcyi $f(x)$ zawierających x^m, nadając liczbie $\mu-i+1$ wszystkie wartości od 1 do $\mu=\binom{n}{m}$ i biorąc summę takich wyrażeń. Zatem

$$k_{n-m}x^m = \sum_{\mu-i+1}^{1,\dots,\mu} x^m d^{(n-m)}_{\mu-i+1,\,\mu-i+1}.$$

Nazwawszy liczbę $\mu-i+1$ przez λ, możemy pisać krócej

$$k_{n-m}x^m = \sum_{\lambda}^{1,\dots,\mu} x^m d^{(n-m)}_{\lambda,\lambda} = x^m \sum_{\lambda}^{1,\dots,\mu} d^{(n-m)}_{\lambda,\lambda}.$$

Gdy liczbie m nadamy tu wszystkie wartości od 1 do $n-1$, to rozkład naszej funkcyi $f(x)$ według potęg zmiennej x możemy tak pisać [1] :

$$f(x)=x^n+x^{n-1}\sum_{\lambda}^{1,\dots,n} d_{\lambda,\lambda}^{(1)}+\dots+x^m\sum_{\lambda}^{1,\dots,n} d_{\lambda,\lambda}^{(n-m)}+\dots+$$

$$+x\sum_{\lambda}^{1,\dots,n} d_{\lambda,\lambda}^{(n-1)}+\mathrm{D}.$$

Naprzykład

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+x, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}+x, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}+x, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4}+x \end{vmatrix}=$$

$$=x^4+(a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+a_{4,4})x^3+(\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}$$
$$+\Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{4,4}+\Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3}+\Sigma a_{2,2}a_{4,4}+\Sigma\pm a_{3,3}a_{4,4})x^2$$
$$+(\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{4,4}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}a_{4,4}+\Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4})x^3$$
$$+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}.$$

Zadania. 1°) Sprawdzić naprzód, że, mnożąc równanie [2]

$$f(-\lambda)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\lambda, & a_{2,3} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

---

[1] Jacobi, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis* etc. (Crelle, *Journal*, t. XII, str. 15).

[2] Takie równanie trzeciego stopnia względem ilości λ spotyka się bardzo często przy rozmaitych badaniach, np. przy szukaniu głównych

przez wyznacznik

$$-f(\lambda)=-\begin{vmatrix} a_{1,1}+\lambda, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}+\lambda, & a_{2,3} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}+\lambda \end{vmatrix},$$

otrzymujemy wyznacznik trzeciego stopnia, będący funkcyą trzeciego stopnia względem ilości λ^2, postaci (¹)

$$-f(\lambda)f(-\lambda)=-\begin{vmatrix} h-\lambda^2, & b, & c \\ b, & k-\lambda^2, & d \\ c, & d, & l-\lambda^2 \end{vmatrix},$$

a więc dającą się na zasadzie powyżej wyprowadzonego wzoru rozłożyć według potęg ilości λ^2 :

$$-f(\lambda)f(-\lambda)=\lambda^6-L\lambda^4+M\lambda^2-N=0,$$

gdzie

$$L=a_{1,1}{}^2+a_{2,2}{}^2+a_{3,3}{}^2+2a_{1,2}{}^2+2a_{1,3}{}^2+2a_{2,3}{}^2,$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{1,3}, & a_{3,3} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,3} \end{vmatrix}^2$$

$$+2\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3} \\ a_{1,2}, & a_{2,3} \end{vmatrix}^2+2\begin{vmatrix} a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{1,2}, & a_{1,3} \end{vmatrix}^2+2\begin{vmatrix} a_{3,3}, & a_{1,3} \\ a_{2,3}, & a_{1,2} \end{vmatrix}^2,$$

$$N=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3} \end{vmatrix}^2;$$

---

osi powierzchni drugiego stopnia, przy wyznaczaniu osi głównych momentów bezwładności ciała, przy wyznaczaniu osi ellipsoidy sprężystości i t. d.

(¹) $h=a_{1,1}{}^2+a_{1,2}{}^2+a_{1,3}{}^2,$

$b=a_{1,3}a_{2,3}+a_{1,2}(a_{1,1}+a_{2,2}),$

i t. d.

i następnie, że, kładąc w $f(-\lambda)$

$$a_{1,1}=a'_{1,1}+\alpha,\quad a_{2,2}=a'_{2,2}+\alpha,\quad a_{3,3}=a'_{3,3}+\alpha,\quad \lambda=\lambda_1+\alpha,$$

otrzymamy podobne równanie

$$-f_1(\lambda_1)f_1(-\lambda_1)=0,$$

postaci

$$\lambda_1^6-L_1\lambda^4+M_1\lambda^2-N_1=0,$$

gdzie f_1, L_1, M_1, N_1 będzie tylko rezultatem zastąpienia $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, λ przez $a'_{1,1}$, $a'_{2,2}$, $a'_{3,3}$, λ_1 [1].

---

[1] Ostatnie równanie ma spółczynniki 1, L_1, M_1 i N_1, które, jako summy kwadratów, są dodatne. Ono jest trzeciego stopnia względem λ_1^2; a ponieważ posiada trzy zmiany znaków, to, według znanego twierdzenia Descartes'a, nie może mu zadość czynić żadna wartość odjemna dla niewiadomej λ_1^2. Nie może więc być

$$\lambda_1^2=-\beta^2,$$

czyli, ponieważ $\lambda_1=\lambda-\alpha$, nie może być

$$(\lambda-\alpha)^2=-\beta^2,$$

inaczej: nie może być

$$\lambda=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

t. j. dane tu początkowo równanie

$$f(-\lambda)=0,$$

ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste. To proste dowodzenie tej ważnej własności tego równania, oparte na mnożeniu wyznaczników i na rozkładzie wyznacznika, tutaj zastosowanym, podał Sylvester, (l. c.).

2°) Sprawdzić, że, wogóle, mnożąc równanie n-ego stopnia względem λ

$$f(-\lambda)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\lambda, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n}, & \ldots, & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

przez wyznacznik $f(\lambda)$, otrzymujemy, przy

$$c_{i,k}=a_{i,1}a_{k,1}+\ldots+a_{i,n}a_{k,n}=c_{k,i},$$

wyznacznik

$$f(\lambda)f(-\lambda)=\begin{vmatrix} c_{1,1}-\lambda^2, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ c_{1,2}, & c_{2,2}-\lambda^2, & \ldots, & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1,n}, & c_{2,n}, & \ldots, & c_{n,n}-\lambda^2 \end{vmatrix},$$

który rozkładając według potęg ilości λ^2, mieć będziemy

$$(-1)^n f(\lambda)f(-\lambda)=\lambda^{2n}-l_1\lambda^{2n-2}+\ldots\mp l_{n-1}\lambda^2\pm l_n,$$

gdzie $l_n=f(0)$, a każdy spółczynnik l_m jest summą kwadratów wszystkich wyznaczników częściowych $(n-m)$-ego stopnia wyznacznika $f(0)$, a tem samem ilością dodatną (¹).

(¹) Na mocy tego rozkładu i w sposób taki sam, co w poprzednim szczególnym przypadku, możnaby i tu dowieść, że wszystkie n pierwiastków równania $f(-\lambda)=0$ są rzeczywiste.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

RÓŻNICZKOWANIE WYZNACZNIKA. WYZNACZNIK SYSTEMATU DOŁĄCZONEGO.

§ 61.

Jeśli w wyznaczniku

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1},\dots,a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1},\dots,a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,k}A_{i,k} + \dots + a_{i,n}A_{i,n},$$

(jak to wciąż w tym rozdziale przyjmować będziemy), elementy są od siebie niezależne (§ 4), to w wyrażenie wyznacznika D ilość $a_{i,k}$ wchodzi tylko w składnik $a_{i,k}A_{i,k}$ (§ 25). Dla tego, biorąc pochodną wyznacznika D względem ilości $a_{i,k}$, mamy

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}} = \frac{\partial(a_{i,k}A_{i,k})}{\partial a_{i,k}}.$$

Gdy jednak wyrażenie, przedstawione przez $A_{i,k}$, nie zawiera elementu $a_{i,k}$, to tu jest

$$\frac{\partial(a_{i,k}A_{i,k})}{\partial a_{i,k}} = A_{i,k}\frac{\partial a_{i,k}}{\partial a_{i,k}} = A_{i,k}.$$

Ostatecznie więc

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}} = A_{i,k},$$

$\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ jest wyznacznikiem częściowym $(n-1)$-ego stopnia $\left(\S\ 50 : \pm d^{(n-1)}_{\gamma,\rho}\right)$, czyli ilością dołączoną do elementu $a_{i,k}$ (§ 25).
Spółczynnik więc przy $a_{i,k}$ w wyznaczniku D może być przedstawiony przez jego pierwszą pochodną względem tego elementu $a_{i,k}$ (1).

Ponieważ ilość dołączona $A_{i,k}$ jest wyznacznikiem, w który

---

(1) Jacobi : *De formatione...*, str. 293.
Gdyby elementy były od siebie zależne, np. gdyby był dany wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a, & 2b, & c, & d \\ e, & c, & 2b, & c \\ b, & 2c, & e, & f \\ g, & b, & 2c, & h \end{vmatrix};$$

$$a_{1,1} = a_{2,2};\ a_{1,2} = a_{2,3} = 2a_{3,1} = 2a_{4,2};$$

$$a_{1,3} = a_{2,4} = \frac{1}{2}a_{3,2} = \frac{1}{2}a_{4,3};\ \ a_{2,1} = a_{3,3};$$

to tu

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial D}{\partial a_{1,1}}\frac{\partial a_{1,1}}{\partial a} + \frac{\partial D}{\partial a_{2,2}}\frac{\partial a_{2,2}}{\partial a} = A_{1,1} + A_{2,2};$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \frac{\partial D}{\partial a_{1,2}}\frac{\partial a_{1,2}}{\partial b} + \frac{\partial D}{\partial a_{2,3}}\frac{\partial a_{2,3}}{\partial b} + \frac{\partial D}{\partial a_{3,1}}\frac{\partial a_{3,1}}{\partial b} + \frac{\partial D}{\partial a_{4,2}}\frac{\partial a_{4,2}}{\partial b} =$$

$$= 2A_{1,2} + 2A_{2,3} + A_{3,1} + A_{4,2};$$

. . . .

wchodzą elementy wyznacznika D prócz elementów i-ego wiersza i k-ej kolumny (§ 25), więc spółczynnik przy $a_{i,k}a_{j,l}$ w wyrażeniu wyznacznika D jest spółczynnikiem przy $a_{j,l}$ w ilości $A_{i,k}$; jest więc ten spółczynnik (według powyższego)

$$\frac{\partial A_{i,k}}{\partial a_{j,l}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}\right)}{\partial a_{j,l}} = \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}};$$

on powstaje z wyznacznika $A_{i,k}$ wskutek opuszczenia j-ego wiersza i l-ej kolumny, czyli z wyznacznika D wskutek opuszczenia i-ego i j-ego wierszy, k-ej i l-ej kolumny; jest więc to wyznacznik częściowy $(n-2)$-ego stopnia $\left(\S\ 50:\ \pm\, d_{\nu,\varrho}^{(n-2)}\right)$.

Podobnie rozumując, znaleźlibyśmy, że, wogóle, w wyznaczniku D spółczynnik przy iloczynie m elementów

$$a_{i,k}a_{j,l}\ldots a_{r,s},$$

jest

$$\frac{\partial^m D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}\ldots\partial a_{r,s}},$$

i że ta m-ta pochodna przedstawia wyznacznik częściowy $(n-m)$-ego stopnia $\left(\pm\, d_{\nu,\varrho}^{(n-m)}\right)$.

Wyrażenie $\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ nie zawiera tak elementu $a_{i,k}$, jakoteż żadnego elementu i-ego wiersza lub k-ej kolumny; dla tego

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,k}} = 0; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{i,l}} = 0;$$

$$\frac{\partial^m D}{\partial a_{i,k}^m} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 62.

Zupełna różniczka wyznacznika D względem jego n^2 elementów będzie summą n^2 składników

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_{i,k}}\, da_{i,k},$$

to jest

$$d\mathrm{D} = \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_{i,k}}\, da_{i,k} = \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \mathrm{A}_{i,k} da_{i,k}$$

$$= \sum_{i}^{1,\ldots,n} \mathrm{A}_{i,1} da_{i,1} + \sum_{i}^{1,\ldots,n} \mathrm{A}_{i,2} da_{i,2} + \ldots + \sum_{i}^{1,\ldots,n} \mathrm{A}_{i,n} da_{i,n}.$$

Którakolwiek z summ ostatniego wiersza, np.

$$\sum_{i}^{1,\ldots,n} \mathrm{A}_{i,k} a_{i,k} = \mathrm{A}_{1,k} da_{1,k} + \mathrm{A}_{2,k} da_{2,k} + \ldots + \mathrm{A}_{n,k} da_{n,k},$$

tem się różni od danego wyznacznika

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_{1,k} a_{1,k} + \mathrm{A}_{2,k} a_{2,k} + \ldots + \mathrm{A}_{n,k} a_{n,k},$$

że, zamiast elementów k-ej kolumny, wzięte są ich różniczki. Więc

$$d\mathrm{D} = \begin{vmatrix} da_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ da_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ da_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}, & da_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, & da_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, & da_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, da_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, da_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, da_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Zupełna różniczka wyznacznika $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ *jest summą* n^2 *składników postaci* $A_{i,k} da_{i,k}$, *czyli summą* n *wyznaczników, otrzymanych z danego wyznacznika w skutek zastąpienia* (*oddzielnie*) *elementów każdej kolumny* (*lub każdego wiersza*) *przez ich różniczki* [1].

§ 63.

Różniczkując odpowiednio wyznacznik, można otrzymać rozmaite jego własności, inaczej poprzednio wyprowadzone.

Tak, z powodu, że wyznacznik jest funkcyą liniową elementów rzędu (§ 8), możemy wprost zauważyć, że $\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ powstaje z tych wyrazów wyznacznika D, w które $a_{i,k}$ wchodzi, lecz już $a_{i,k}$ w wyrażeniu $\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ się nie znajduje, równie jak i żaden element i-ego wiersza lub k-ej kolumny. Wyrażenie więc $a_{i,k} \frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ przedstawia zebranie wszystkich tych wyrazów wyznacznika D, w które wchodzi element $a_{i,k}$. Ponieważ zaś w każdy wyraz wyznacznika wchodzi jeden element pewnego wiersza, jakoteż jeden element pewnej kolumny, więc tą drogą [2] otrzymujemy związki, wyprowadzone już w § 27-ym:

$$a_{i,1} \frac{\partial D}{\partial a_{j,1}} + a_{i,2} \frac{\partial D}{\partial a_{j,2}} + \ldots + a_{i,n} \frac{\partial D}{\partial a_{j,n}} = D, \quad \text{lub} = 0,$$

$$a_{1,i} \frac{\partial D}{\partial a_{1,j}} + a_{2,i} \frac{\partial D}{\partial a_{2,j}} + \ldots + a_{n,i} \frac{\partial D}{\partial a_{n,j}} = D, \quad \text{lub} = 0,$$

---

(1) Jacobi, ibidem.
(2) Jacobi, l. c., str. 295.

stosownie do tego, czy $j = i$, czyteż i jest różne od j.

Spółczynnik przy $a_{i,k}a_{j,l}$ w wyznaczniku D jest (§ 51)

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}};$$

podobnież spółczynnik przy $a_{i,l}a_{j,k}$ będzie

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,l}\partial a_{j,k}}.$$

Lecz z

$$a_{i,k}a_{j,l}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}}$$

przechodzimy do

$$a_{i,l}a_{j,k}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,l}\partial a_{j,k}}$$

przez wzajemne przestawienie w wyznaczniku D kolumn l-ej i k-ej; skutkiem tego wyznacznik D zmienia znak (§ 19) i jest [1]

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,l}\partial a_{j,k}} = -\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}}. \tag{1}$$

Możemy więc wyrazy wyznacznika, ujęte w składniki

$$+a_{i,k}a_{j,l}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}} + a_{i,l}a_{j,k}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,l}\partial a_{j,k}},$$

przedstawić przez wyrażenie

$$(a_{i,k}a_{j,l} - a_{i,l}a_{j,k})\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}} = \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,l} \\ a_{j,k}, & a_{j,l} \end{vmatrix}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k}\partial a_{j,l}}.$$

---

[1] JACOBI, l. c., str. 301.

Nadając tu dwu liczbom i i j, lub dwu liczbom k i l wartości, odpowiadające wszystkim $\binom{n}{2}$ różnym kombinacyom z n liczb

$$1, 2, \ldots, n,$$

po dwie, i biorąc summę tych wyrażeń, wyczerpiemy wszystkie wyrazy wyznacznika D, tak, że

$$D = \sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,l} \\ a_{j,k}, & a_{j,l} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k} \partial a_{j,l}} = \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{i,k}, & a_{i,l} \\ a_{j,k}, & a_{j,l} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,k} \partial a_{j,l}}. \qquad (2)$$

Mamy tu więc rozkład wyznacznika D na summę iloczynów dwu czynników, z których jeden jest wyznacznikiem częściowym drugiego stopnia (§ 50), drugi zaś jego dopełniającym wyznacznikiem częściowym siopnia (n—2)-ego (§§ 51, 61). Gdy nadto pierwsze czynniki są wyznacznikami częściowemi drugiego stopnia, utworzonemi z elementów, należących albo do pewnych dwu kolumn, albo do pewnych dwu wierszy, to widzimy, że wyrażenie (2) przedstawia nam rozkład wyznacznika według wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi dwu rzędów równoległych (§ 52).

Wyrażenia (2) możnaby jeszcze tak wyprowadzić. W otrzymanym w początku tego §-u rozkładzie

$$D = a_{i,1} \frac{\partial D}{\partial a_{i,1}} + a_{i,2} \frac{\partial D}{\partial a_{i,2}} + \ldots + a_{i,n} \frac{\partial D}{\partial a_{i,n}} \qquad (3)$$

ilości

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,1}}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{i,2}}, \ldots, \frac{\partial D}{\partial a_{i,n}}$$

są wyznacznikami (n—1)-ego stopnia (§ 61). Stosując więc do tych wyznaczników tenże sam rozkład (3), t. j. rozkładając je znowu według elementów wiersza ze wskaźnikiem np. j, mieć będziemy

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,1}}= \qquad a_{j,2}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,1}\partial a_{j,2}}+..+a_{j,n-1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,1}\partial a_{j,n-1}}+a_{j,n}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,1}\partial a_{j,n}};$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,2}}=a_{j,1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,2}\partial a_{j,1}} \qquad +\ldots+a_{j,n-1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,2}\partial a_{j,n-1}}+a_{j,n}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,2}\partial a_{j,n}};$$

. . . .

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,n}}=a_{j,1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,n}\partial a_{j,1}}+a_{j,2}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,n}\partial a_{j,2}}+\ldots+a_{j,n-1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,n}\partial a_{j,n-1}}.$$

Podstawiając te wyrażenia w rozkład (3) i mając na uwadze wyrażenie (1), otrzymamy drugie z wyrażeń (2).

W podobnyż sposób postępując dalej, dojdziemy do rozkładu wyznacznika według wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi trzech, czterech i t. d. rzędów równoległych (§ 52), a następnie i do rozkładu na summy iloczynów kilku wyznaczników częściowych (§ 55).

§ 64.

Wiemy, że, mnożąc przez siebie dwa wyznaczniki

$$D'=\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,n}\end{vmatrix}=a_{1,i}A_{1,i}+{}_{2,i}A_{2,i}+\ldots+a_{n,i}A_{n,i},$$

$$D''=\begin{vmatrix} b_{1,1},\ \ldots,b_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ b_{n,1},\ldots,b_{n,n}\end{vmatrix}=b_{1,k}B_{i,k}+b_{2,k}B_{2,k}+\ldots+b_{n,k}B_{n,k},$$

i przyjmując np. (§ 45)

$$a_{1,i}b_{1,k}+a_{2,i}b_{2,k}+\ldots+a_{l,i}a_{l,k}+\ldots+a_{n,i}b_{n,k}=c_{i,k},$$

otrzymamy, jako iloczyn,

$$D'D''=D=\begin{vmatrix} c_{1,1},\ldots,c_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n,1},\ldots,c_{n,n} \end{vmatrix}=c_{i,1}C_{i,1}+c_{i,2}C_{i,2}+\ldots+c_{i,n}C_{i,n}.$$

Weźmy pochodne obu stron równości

$$D'D''=D,$$

kolejno względem $a_{1,i}, a_{2,i},\ldots,a_{n,i}$, przyczem baczyć nam należy na to, że ilość D'' jest niezależną od ilości $a_{1,i},\ldots,a_{n,i}$, oraz, że one wchodzą tylko w skład elementów i-ego wiersza wyznacznika D, tak, że ilość D zależy od ilości $a_{1,i},\ldots,a_{n,i}$ przez elementy swego i-ego wiersza, które są :

$$c_{i,1}=a_{1,i}b_{1,1}+a_{2,i}b_{2,1}+\ldots+a_{n,i}b_{n,1},$$

$$c_{i,2}=a_{1,i}b_{1,2}+a_{2,i}b_{2,2}+\ldots+a_{n,i}b_{n,2},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$c_{i,n}=a_{1,i}b_{1,n}+a_{2,i}b_{2,n}+\ldots+a_{n,i}b_{n,n}.$$

Pochodne te więc będą :

$$D''\frac{\partial D'}{\partial a_{1,i}}=\frac{\partial D}{\partial c_{i,1}}\,\frac{\partial c_{i,1}}{\partial a_{1,i}}+\frac{\partial D}{\partial c_{i,2}}\,\frac{\partial c_{i,2}}{\partial a_{1,i}}+\ldots+\frac{\partial D}{\partial c_{i,n}}\,\frac{\partial c_{i,n}}{\partial a_{1,i}},$$

$$D''\frac{\partial D'}{\partial a_{2,i}}=\frac{\partial D}{\partial c_{i,1}}\,\frac{\partial c_{i,1}}{\partial a_{2i}}+\frac{\partial D}{\partial c_{i2}}\,\frac{\partial c_{i,2}}{\partial a_{2,i}}+\ldots+\frac{\partial D}{\partial c_{i,n}}\,\frac{\partial c_{i,n}}{\partial a_{2,i}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D''\frac{\partial D}{\partial a_{n,i}}=\frac{\partial D}{\partial c_{i,1}}\,\frac{\partial c_{i,1}}{\partial a_{n}}+\frac{\partial D}{\partial c_{i,2}}\,\frac{\partial c_{i,2}}{\partial a_{n,i}}+\ldots+\frac{\partial D}{\partial c_{i,n}}\,\frac{\partial c_{i,n}}{\partial a_{n,i}},$$

czyli

$$D''A_{1,i}=C_{i,1}b_{1,1}+C_{i,2}b_{1,2}+\ldots+C_{i,n}b_{1,n},$$

$$D''A_{2,i}=C_{i,1}b_{2,1}+C_{i,2}b_{2,2}+\ldots+C_{i,n}b_{2,n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D''A_{n,i}=C_{i,1}b_{n,1}+C_{i,2}b_{n,2}+\ldots+C_{i,n}b_{n,n}.$$

Mnożąc pierwszą z tych równości przez $B_{1,k}$, drugą przez $B_{2,k}$ i t.d., ostatnią przez $B_{n,k}$, a tak pomnożone dodając do siebie, spostrzeżemy, że po prawej stronie summy przy każdej ilości $C_{i,l}$ znajdzie się spółczynnik

$$b_{1,l}B_{1,k}+b_{2,l}B_{2,k}+\ldots+b_{n,l}B_{n,k},$$

który (§ 27) jest zerem dla wszystkich wartości l odmiennych od k, zaś dla $l=k$ jest $=D''$. Skutkiem tego prawa strona otrzymanej tu summy redukuje się do $D''C_{i,k}$. Jest więc

$$D''(A_{1,i}B_{1,k}+A_{2,i}B_{2,k}+\ldots+A_{n,i}B_{n,k})=D''C_{i,k},$$

czyli

$$A_{1,i}B_{1,k}+A_{2,i}B_{2,k}+\ldots+A_{n,i}B_{n,k}=C_{i,k},$$

co porównywając z zależnością założoną

$$a_{1,i}b_{1,k}+a_{2,i}b_{2,k}+\ldots+a_{n,i}b_{n,k}=c_{i,k},$$

dostrzegamy własność, którąśmy inaczej wyprowadzili w § 47-ym (1).

---

(1) Sposób otrzymania tego związku przez różniczkowanie podał JOAHIMSTHAL, *Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie* (CRELLE, *Journal*, t. XL, str. 46).

§ 65.

Gdy, mając dany wyznacznik n-ego stopnia

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

utworzymy systemat jego wyznaczników częściowych m-ego stopnia (§ 50), oraz systemat do tego ostatniego dołączony (§ 52):

$$\begin{array}{llll} \overset{(m)}{d}_{1,1}, & \overset{(m)}{d}_{1,2}, & \dots, & \overset{(m)}{d}_{1,\mu} \\ \overset{(m)}{d}_{2,1}, & \overset{(m)}{d}_{2,2}, & \dots, & \overset{(m)}{d}_{2,\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{(m)}{d}_{\mu,1}, & \overset{(m)}{d}_{\mu,2}, & \dots, & \overset{(m)}{d}_{\mu,\mu} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \overset{(m)}{A}_{1,1}, & \overset{(m)}{A}_{1,2}, & \dots, & \overset{(m)}{A}_{1,\mu}, \\ \overset{(m)}{A}_{2,1}, & \overset{(m)}{A}_{2,2}, & \dots, & \overset{(m)}{A}_{2,\mu}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{(m)}{A}_{\mu,1}, & \overset{(m)}{A}_{\mu,2}, & \dots, & \overset{(m)}{A}_{\mu,\mu}, \end{array}$$

gdzie $\mu = \binom{n}{m}$, to możemy badać własności tych dwóch systematów μ^2 ilości (będących wyznacznikami m-ego i $(n-m)$-ego stopnia), t. j. wyznaczników

$$\begin{vmatrix} \overset{(m)}{d}_{1,1}, & \dots, & \overset{(m)}{d}_{1,\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{(m)}{d}_{\mu,1}, & \dots, & \overset{(m)}{d}_{\mu,\mu} \end{vmatrix} = P_m, \qquad \begin{vmatrix} \overset{(m)}{A}_{1,1}, & \dots, & \overset{(m)}{A}_{1,\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{(m)}{A}_{\mu,1}, & \dots, & \overset{(m)}{A}_{\mu,\mu} \end{vmatrix} = \Delta_m.$$

Takiemi wyznacznikami będą np., gdy

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix}, \qquad m = 2, \qquad \mu = \binom{3}{2} = 3,$$

wyznaczniki

$$P_2=\begin{vmatrix} \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{2,3} \\ \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,2}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{3,3} \\ \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,2}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{3,3}, & -a_{3,2}, & a_{3,1} \\ -a_{2,3}, & a_{2,2}, & -a_{2,1} \\ a_{1,3}, & -a_{1,2}, & a_{1,1} \end{vmatrix};$$

lub, gdy

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4} \end{vmatrix}, \qquad m=2, \qquad \mu=\binom{4}{2}=6,$$

wyznaczniki :

$$P_2=\begin{vmatrix} \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,4}, & \Sigma\pm_{1,2}a_{2,3}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{2,4}, & \Sigma\pm a_{1,3}a_{2,4} \\ \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,2}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{1,3}a_{3,4} \\ \Sigma\pm a_{1,1}a_{4,2}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{4,3} & \Sigma\pm a_{1,2}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{1,3}a_{4,4} \\ \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,2}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,3},, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{2,3}a_{3,4} \\ \Sigma\pm a_{2,1}a_{4,2}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{4,3}, & \Sigma\pm_{2,2}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{2,3}a_{4,4} \\ \Sigma\pm a_{3,1}a_{4,2}, & \Sigma\pm a_{3,1}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{3,1}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{3,2}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{3,3}a_{4,4} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}
\Sigma\pm a_{3,3}a_{4,4}, & -\Sigma\pm a_{3,2}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{3,2}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{3,1}a_{4,4}, & -\Sigma\pm a_{3,1}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{3,1}a_{4,2} \\
-\Sigma\pm a_{2,3}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{4,4}, & -\Sigma\pm a_{2,2}a_{4,3}, & -\Sigma\pm a_{2,1}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{4,3}, & -\Sigma\pm a_{2,1}a_{4,2} \\
\Sigma\pm a_{2,3}a_{3,4}, & -\Sigma\pm a_{2,2}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,4}, & -\Sigma\pm a_{2,1}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,2} \\
\Sigma\pm a_{1,3}a_{4,4}, & -\Sigma\pm a_{1,2}a_{4,4}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{4,4}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{4,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{4,2} \\
-\Sigma\pm a_{1,3}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{3,4}, & -\Sigma\pm a_{1,2}a_{3,3}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{3,4}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{3,2} \\
\Sigma\pm a_{1,3}a_{2,4}, & -\Sigma\pm a_{1,2}a_{2,4}, & \Sigma\pm a_{1,2}a_{2,3} & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,4}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}
\end{vmatrix}.$$

Osobliwie ważnym jest przypadek, gdy $m=1$, wtedy $\mu=n$ i(§§ 53, 61)

$$P_1=D,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} A_{1,1},\ldots,A_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ A_{n,1},\ldots,A_{n,n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial a_{1,1}},\ldots,\frac{\partial D}{\partial a_{1,n}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial D}{\partial a_{n,1}},\ldots,\frac{\partial D}{\partial a_{n,n}}\end{vmatrix}=\Delta.$$

Ten wyznacznik Δ nazwiemy *wyznacznikiem systematu dołączonego do systematu elementów danego wyznacznika*, lub krócej *wyznacznikiem dołączonym do danego wyznacznika.* Tak np.

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{2,2}, & -a_{2,1} \\ -a_{1,2}, & a_{1,1}\end{vmatrix};$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma\pm a_{2,2}a_{3,3}, & -\Sigma\pm a_{2,1}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{2,1}a_{3,2} \\ -\Sigma\pm a_{1,2}a_{3,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{3,3}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{3,2} \\ \Sigma\pm a_{1,2}a_{2,3}, & -\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}, & \Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2} \end{vmatrix};$$

$$D = \begin{vmatrix} a, & 0, & b \\ c, & d, & 0 \\ 0, & e, & f \end{vmatrix} = adf + bce,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} d, & 0 \\ e, & f \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} c, & 0 \\ 0, & f \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} c, & d \\ 0, & e \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0, & b \\ e, & f \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a, & b \\ 0, & f \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} a, & 0 \\ 0, & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0, & b \\ d, & 0 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} df, & -cf, & ce \\ +eb, & af, & -ae \\ -bd, & +bc, & ad \end{vmatrix} = (adf + bce)^2.$$

§ 66.

Mnożąc przez siebie wyznaczniki P_m i Δ_m, otrzymamy, wogóle, jako element i-ego wiersza k-ej kolumny iloczynu (gdy mnożymy wiersze przez wiersze) wyrażenie

$$\overset{(m)}{d}_{i,1}\overset{(m)}{\mathrm{A}}_{k,1}+\overset{(m)}{d}_{i,2}\overset{(m)}{\mathrm{A}}_{k,2}+\ldots+\overset{(m)}{d}_{i,\mu}\overset{(m)}{\mathrm{A}}_{k,\mu},$$

które, przy i różnem od k, jest zerem, przy i zaś równem k, przedstawia wyznacznik D (§ 52). W iloczynie więc, który będzie wyznacznikiem μ-ego stopnia (§ 48), mamy (§ 35)

$$\mathrm{P}_m\Delta_m=\begin{vmatrix}\mathrm{D}, & 0, & 0, & \ldots & ,0\\ 0, & \mathrm{D}, & 0, & \ldots & ,0\\ . & . & . & . & .\\ 0, & 0, & 0, & \ldots & ,\mathrm{D}\end{vmatrix}=\mathrm{D}^{\mu}.$$

jest więc ([1])

$$\mathrm{D}_m\Delta_m=\mathrm{D}^{\binom{n}{m}}.$$

W przypadku, gdy $m=1$, związek ten przechodzi w następujący:

$$\mathrm{D}\Delta=\mathrm{D}^n,$$

zkąd ([2])

$$\Delta=\mathrm{D}^{n-1};$$

to jest: *wyznacznik systematu dołączonego do systematu elementów*

([1]) Cauchy, l. c., str. 102. Franke *Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten* (Crelle, *Journal*, t. LXI, str. 355), dowiódł, że

$$\mathrm{P}_m=\mathrm{D}^{\binom{n-1}{m-1}},\quad \Delta_m=\mathrm{D}^{\binom{n-1}{m}}.$$

([2]) Cauchy, l. c., str. 82.

danego wyznacznika n-*ego stopnia jest* (n—1)-*szą potęgą danego wyznacznika*. Naprzykład :

$$D = \begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ -x, & 0, & c, & b \\ -y, & -c, & 0, & a \\ -z, & -b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = (ax - by + cz)^2 ;$$

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & ,a^2x-aby+acz, & -abx+b^2y-bcz, & acx-bcy+c^2z \\ -a^2x+aby-acz, & 0 & , axz-byz+cz^2, & -axy+by^2-cyz \\ abx-b^2y+bcz, & -axz+byz-cz^2, & 0 & , ax^2-bxy+cxz \\ -acx+bcy-c^2z, & axy-by^2+cyz, & -ax^2+bxy-cxz, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{(ax^2-bxy+cxz)(a^2x-aby-acz)-(-axy+by^2-cyz)(-abx+b^2y-bcz)$$
$$+(axz-byz+cz^2)(acx-bcy+c^2z)\}^2$$

$$= \{(ax-by+cz)^3\}^2 = \{(ax-by+cz)^2\}^3$$
$$= D^3 = D^{4-1}.$$

§ 67.

Mnożąc przez siebie dwa wyznaczniki

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & . & . & . & ,a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1}, & . & . & . & ,a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & . & . & . & ,b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n,1}, & . & . & . & ,b_{n,n} \end{vmatrix},$$

otrzymamy, jako iloczyn, naprzykład przy

$$a_{i,1}b_{k,1} + a_{i,2}b_{k,2} + \ldots + a_{i,n}b_{k,n} = c_{i,k},$$

wyznacznik

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & \dots & ,c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1}, & \dots & ,c_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{D}.$$

Utwórzmy wyznaczniki systematów dołączonych do systematów elementów D′ i D″ :

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \dots & ,A_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1}, & \dots & ,A_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta', \qquad \begin{vmatrix} B_{1,1}, & \dots & ,B_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n,1}, & \dots & ,B_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta''.$$

Mnożąc przez siebie (wiersze przez wiersze) wyznaczniki Δ' i Δ'', mieć będziemy wyznacznik, którego elementem i-ego wiersza a k-ej kolumny będzie wyrażenie

$$A_{i,1}B_{k,1} + A_{i,2}B_{k,2} + \dots + A_{i,n}B_{k,n};$$

wyrażenie to (§ 47, 64) przedstawia ilość dołączoną do elementu $c_{i,k}$ wyznacznika D. Nazywając je $C_{i,k}$, możemy iloczyn $\Delta'\Delta''$ przedstawić za pomocą wyznacznika

$$\begin{vmatrix} C_{1,1}, & \dots, & C_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n,1}, & \dots, & C_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta,$$

będącego wyznacznikiem systematu dołączonego do systematu elementów wyznacznika D, iloczynu wyznaczników D′ i D″. Jest więc [1]

$$\Delta'\Delta'' = \Delta,$$

---

(1) Cauchy, l. c., str. 91.

to jest

$$\Sigma \pm A_{1,1} \ldots A_{n,n} \Sigma \pm B_{1,1} \ldots B_{n,n} = \Sigma \pm C_{1,1} \ldots C_{n,n}.$$

Wyznacznik, dołączony do iloczynu dwu danych wyznaczników, jest iloczynem wyznaczników, dołączonych do danych wyznaczników.

W przypadku, gdy $D'' = D'$, mamy

$$D = D'^2;$$

a ponieważ jednocześnie $\Delta'' = \Delta'$, więc jeszcze

$$\Delta = \Delta'^2.$$

Wyznacznik dołączony do wyznacznika, będącego kwadratem danego wyznacznika, jest kwadratem wyznacznika, dołączonego do danego wyznacznika.

§ 68.

Gdy, mając

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1}, \ldots, & A_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{n,1}, \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

utworzymy wyznacznik częściowy m-ego stopnia wyznacznika Δ (§ 50):

$$\begin{vmatrix} A_{\eta,p}, & A_{\eta,q}, \ldots, & A_{\eta,s} \\ A_{\theta,p}, & A_{\theta,q}, \ldots, & A_{\theta,s} \\ . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{\zeta,p}, & A_{\zeta,q} \ldots, & A_{\zeta,s} \end{vmatrix} = \overset{(m)}{\delta}_{i,k},$$

to temu wyznacznikowi częściowemu możemy nadać postać wyznacznika n-ego stopnia (§ 34)

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = \begin{vmatrix} A_{\eta,p},\ldots, & A_{\eta,s}, & A_{\eta,t},\ldots, & A_{\eta,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\zeta,p},\ldots, & A_{\zeta,s}, & A_{\zeta,t},\ldots, & A_{\zeta,v} \\ 0,\ldots, & 0, & 1,\ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0,\ldots, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Tak przedstawiony pomnóżmy przez dany wyznacznik D w postaci (§ 24)

$$D = (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_k} \begin{vmatrix} a_{\eta,p},\ldots, & a_{\eta,s}, & a_{\eta,t},\ldots, & a_{\eta,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\zeta,p},\ldots, & a_{\zeta,s}, & a_{\zeta,t},\ldots, & a_{\zeta,v} \\ a_{\varphi,p},\ldots, & a_{\varphi,s}, & a_{\varphi,t},\ldots, & a_{\varphi,v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\psi,p},\ldots, & a_{\psi,s}, & a_{\psi,t},\ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix},$$

gdzie ε_i i ε_k oznaczają liczby zmian układów wskaźników

$$\eta,\ \theta,\ldots,\ \zeta,\ \varphi,\ \chi,\ldots,\ \psi,$$

$$p,\ q,\ldots,\ s,\ t,\ u,\ldots,\ v.$$

Uskuteczniając to mnożenie (np. wiersze przez wiersze), mamy

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k}D=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\times$$

$$\begin{vmatrix} a_{\eta,p}A_{\eta,p}+\ldots+a_{\eta,v}A_{\eta,v},\ldots,a_{\zeta,p}A_{\eta,p}+\ldots+a_{\zeta,v}A_{\eta,v},\ldots,a_{\psi,p}A_{\eta,p}+\ldots+a_{\psi,v}A_{\eta,v} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\eta,p}A_{\zeta,p}+\ldots+a_{\eta,v}A_{\zeta,v},\ldots,a_{\zeta,p}A_{\zeta,p}+\ldots+a_{\zeta,v}A_{\zeta,v},\ldots,a_{\psi,p}A_{\zeta,p}+\ldots+a_{\psi,v}A_{\zeta,v} \\ a_{\eta,t}\quad,\ldots,\quad a_{\zeta,t}\quad,\ldots,\quad a_{\psi,t} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\psi,v}\quad,\ldots,\quad a_{\zeta,v}\quad,\ldots,\quad a_{\psi,v} \end{vmatrix}$$

czyli (§ 27)

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k}D=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}\begin{vmatrix} D, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & D, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & D, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{\eta,t}, & a_{\theta,t}, & \ldots, & a_{\zeta,t}, & a_{\varphi,t}, & \ldots, & a_{\psi,t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\eta,v}, & a_{\theta,v}, & \ldots, & a_{\zeta,v}, & a_{\varphi,v}, & \ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix},$$

inaczej (§§ 56, 33)

$$D\overset{(m)}{\delta}_{i,k}=(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k}D^m\begin{vmatrix} a_{\varphi,t}, & a_{\chi,t}, \ldots, & a_{\psi,t} \\ a_{\varphi,u}, & a_{\chi,u}, \ldots, & a_{\psi,u} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{\varphi,v}, & a_{\chi,v}, \ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix}.$$

albo (§ 18)

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = D^{m-1}(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \begin{vmatrix} a_{\varphi,t}, & a_{\varphi,u}, \ldots, & a_{\varphi,v} \\ a_{\chi,t}, & a_{\chi,u}, \ldots, & a_{\chi,v} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{\psi,t}, & a_{\psi,u}, \ldots, & a_{\psi,v} \end{vmatrix},$$

to jest ([1])

$$\Sigma \pm A_{\eta,p} A_{\theta,q} \ldots A_{\zeta,s} = D^{m-1} . (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \Sigma \pm a_{\varphi,t} a_{\chi,u} \ldots a_{\psi,v}.$$

Korzystając jeszcze z oznaczenia (§ 51)

$$(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \Sigma \pm a_{\varphi,t} a_{\chi,u} \ldots a_{\psi,v} = (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1} = \overset{(m)}{A}_{i,k},$$

otrzymany związek możemy tak przedstawić:

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = D^{m-1} \overset{(m)}{A}_{i,k},$$

ub też (§ 61, 65)

$$\sum \pm \frac{\partial D}{\partial a_{\eta,p}} \frac{\partial D}{\partial a_{\theta,q}} \cdots \frac{\partial D}{\partial a_{\zeta,s}} = D^{m-1} \frac{\partial^m D}{\partial a_{\eta,p} \partial a_{\theta,q} \ldots \partial a_{\zeta,s}}.$$

Wyznacznik częściowy m-*ego stopnia wyznacznika* Δ, *dołączonego do wyznacznika* D, *przedstawia iloczyn* (m—1)-*ej potęgi wyznacznika* D *przez ilość dołączoną do odpowiedniego wyznacznika częściowego wyznacznika* D.

([1]) Jacobi, l. c., str. 304. Zasadę przytoczonego tu dowodu podał Borhardt w liście (1853 r. lipiec) do Baltzer'a (Baltzer, l. c., w 4-em wyd. str. 58).

Np., gdy mamy wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} r_{1,1}, & r_{1,2},\ldots, & r_{1,p}, & s_1, & t_1 \\ r_{1,2}, & r_{2,2},\ldots, & r_{2,p}, & s_2, & t_2 \\ . & . & . & . & . \\ r_{1,p}, & r_{2,p},\ldots, & r_{p,p}, & s_p, & t_p \\ s_1, & s_2,\ldots, & s_p, & 0, & 0 \\ t_1, & t_2,\ldots, & t_p, & 0, & 0 \end{vmatrix}, \qquad (r_{j,l} = r_{l,j})$$

$(n = p + 2)$, i gdy nazwiemy

$$\begin{vmatrix} r_{1,1},\ldots, & r_{1,p} \\ . & . \\ r_{1,p},\ldots, & r_{p,p} \end{vmatrix} = R, \qquad \begin{vmatrix} r_{1,1},\ldots, & r_{1,p}, & s_1 \\ . & . & . \\ r_{1,p},\ldots, & r_{p,p}, & s_p \\ s_1,\ldots, & s_p, & 0 \end{vmatrix} = S,$$

$$\begin{vmatrix} r_{1,1},\ldots, & r_{1,p}, & t_1 \\ . & . & . \\ r_{1,p},\ldots, & r_{p,p}, & t_p \\ t_1,\ldots, & t_p, & 0 \end{vmatrix} = T,$$

$$\begin{vmatrix} r_{1,1},\ldots, & r_{1,p}, & t_1 \\ . & . & . \\ r_{1,p},\ldots, & r_{p,p}, & t_p \\ s_1,\ldots, & s_p, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{1,1},\ldots, & r_{1,p}, & s_1 \\ . & . & . \\ r_{1,p},\ldots, & r_{p,p}, & s_p \\ t_1,\ldots, & t_p, & 0 \end{vmatrix} = U,$$

to, przy $m=2$,

$$D\frac{\partial^2 D}{\partial a_{n-1,n-1}\partial a_{n,n}} = \Sigma \pm A_{n-1,n-1}.A_{n,n} =$$

$$A_{n-1,n-1}A_{n,n} - A_{n-1,n}A_{n,n-1},$$

czyli

$$DR = ST - U^2.$$

§ 69.

Z dwu takich związków

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = D^{m-1}\overset{(m)}{A}_{i,k},$$

$$\overset{(m)}{\delta}_{j,l} = D^{m-1}\overset{(m)}{A}_{j,l},$$

wypada [1]

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} : \overset{(m)}{\delta}_{j,l} = \overset{(m)}{A}_{i,k} : \overset{(m)}{A}_{j,l}.$$

Wyznaczniki częściowe jednakowego stopnia wyznacznika Δ, *dołączonego do wyznacznika* D, *są proporcyonalne względem ilości dołączonych do odpowiednich wyznaczników częściowych wyznacznika* D.

Z jednej z postaci wyprowadzonego w § poprzedzającym związku wypada

$$\frac{\partial^m D}{\partial a_{\eta,p}\partial a_{\theta,q}\ldots\partial a_{\zeta,s}} = \frac{1}{D^{m-1}}\sum \pm \frac{\partial D}{\partial a_{\eta,p}}\frac{\partial D}{\partial a_{\theta,q}}\cdots\frac{\partial D}{\partial a_{\zeta,s}},$$

co może niekiedy znaleść dogodne zastosowanie przy obliczaniu drugiej, trzeciej i t. d., wogóle, m-ej pochodnej danego

---

(1) Zob. JACOBI, ibidem.

wyznacznika za pomocą jego wartości i wartości jego pierwszych pochodnych.

Zestawiając wyprowadzone w §§ 65 i 67 związki

$$\Delta = D^{n-1},$$

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = \Sigma \pm A_{\eta,p} A_{\theta,q} \ldots A_{\zeta,s} = D^{m-1} \overset{(m)}{A}_{i,k},$$

widzimy, że, w przypadku

$$D = 1,$$

jest także

$$\Delta = 1,$$

skutkiem czego

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = \overset{(m)}{A}_{i,k}.$$

Jeśli wartość danego wyznacznika jest jednością, to wartością wyznacznika doń dołączonego jest także jedność, wyznaczniki zaś częściowe (jakiegokolwiek stopnia) wyznacznika dołączonego przedstawiają ilości dołączone do odpowiednich wyznaczników częściowych danego wyznacznika, i wzajemnie.

(Że ta wzajemność ma miejsce, przekonamy się w taki sposób. Aby wyznaczyć ilość dołączoną do wyznacznika częściowego $\overset{(m)}{\delta}_{i,k}$ w wyznaczniku Δ, zważmy, że z otrzymanego w tym przypadku związku

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_k} \overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1} \tag{α}$$

wypada

$$\overset{(n-m)}{\delta}_{\mu-i+1,\mu-k+1} = (-1)^{\varepsilon_{\mu-i+1} + \varepsilon_{\mu-k+1}} \overset{(m)}{d}_{i,k},$$

$$(-1)^{\varepsilon_{\mu-i+1} + \varepsilon_{\mu-k+1}} \overset{(n-m)}{\delta}_{\mu-i+1,\mu-k+1} = \overset{(m)}{d}_{i,k}. \tag{β}$$

Że zaś iloczyn

$$(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_k} \overset{(m)}{d_{i,k}} \overset{(n-m)}{d_{\mu-i+1,\mu-k+1}}$$

przedstawia dokładnie (§ 51) pewną liczbę wyrazów wyznacznika D, więc i iloczyn pierwszych stron odpowiednich równości (α) i (β), t. j.

$$\overset{(m)}{\delta_{i,k}}.(-1)^{\varepsilon_{\mu-i+1}+\varepsilon_{\mu-k+1}} \overset{(n-m)}{\delta_{\mu-i+1,\mu-k+1}}$$

przedstawia także dokładnie pewną liczbę wyrazów wyznacznika systematu dołączonego to jest wyznacznika Δ, skutkiem czego w tym wyznaczniku ilością dołączoną do wyznacznika częściowego $\overset{(m)}{\delta_{i,k}}$ jest

$$(-1)^{\varepsilon_{\mu-i+1}+\varepsilon_{\mu-k+1}} \overset{(n-m)}{\delta_{\mu-i+1,\mu-k+1}};$$

gdzie

$$\varepsilon_{\mu-i+1}\;,\;\varepsilon_{\mu-k+1}$$

są liczbami zmian układów wskaźników

$$\varphi,\ \chi,\ldots,\ \psi,\ \eta,\ \theta,\ldots,\ \zeta,$$

$$t,\ u,\ldots,\ v,\ p,\ q,\ldots,\ s.$$

Związek więc (β), wyprowadzony ze związku zasadniczego (α), wskazuje, że, w przypadku $D=1$, wyznacznik częściowy wyznacznika D przedstawia ilość dołączoną do odpowiedniego wyznacznika częściowego wyznacznika dołączonego Δ).

Ta ścisła zależność między danym wyznacznikiem i wyznacznikiem, doń dołączonym (osobliwie wyraźnie przejawiająca się w przypadku $D=1$), jest przyczyną, że wyznacznik systematu dołączonego bywa także nazywany *wyznacznikiem odwrotnym* (reciproke Determinante, déterminant reciproque).

W przypadku

$$D = 0,$$

jest także

$$\Delta = 0,$$

jakoteż, przy $m > 1$,

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = \Sigma \pm A_{\gamma,p} A_{\theta,q} \ldots A_{\zeta,s} = 0.$$

Jeśli dany wyznacznik ma wartość zero, to wyznacznik, doń dołączony, jak również wszystkie jego wyznaczniki częściowe drugiego i wyższych stopni, są zerami.

Gdy liczbie m nadamy wartość $m = 2$, to z równości zeru wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi dwu rzędów równoległych

$$\begin{aligned}
&\Sigma \pm A_{i,1} A_{j,2} = 0, \quad \text{czyli} \quad && A_{i,1} A_{j,2} - A_{j,1} A_{i,2} = 0, \\
&\Sigma \pm A_{i,1} A_{j,3} = 0, && A_{i,1} A_{j,3} - A_{j,1} A_{i,3} = 0, \\
&\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots, \\
&\Sigma \pm A_{i,1} A_{j,n} = 0, && A_{i,1} A_{j,n} - A_{j,1} A_{i,n} = 0,
\end{aligned}$$

wypada [1]

$$A_{i,1} : A_{j,1} = A_{i,2} : A_{j,2} = A_{i,3} : A_{j,3} = \ldots = A_{i,n} : A_{j,n},$$

czyli

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,1}} : \frac{\partial D}{\partial a_{j,1}} = \frac{\partial D}{\partial a_{i,2}} : \frac{\partial D}{\partial a_{j,2}} = \frac{\partial D}{\partial a_{i,3}} : \frac{\partial D}{\partial a_{j,3}} = \ldots = \frac{\partial D}{\partial a_{i,n}} : \frac{\partial D}{\partial a_{j,n}},$$

---

[1] JACOBI, *De elimitatione variabilis e duabus æquationibus algebraicis* (CRELLE, *Journal*, t. XV, str. 104).

jakoteż (§ 18)

$$A_{1,k} : A_{1,l} = A_{2,k} : A_{2,l} = A_{3,k} : A_{3,l} = \ldots = A_{n,k} : A_{n,l},$$

czyli

$$\frac{\partial D}{\partial a_{1,k}} : \frac{\partial D}{\partial a_{1,l}} = \frac{\partial D}{\partial a_{2,k}} : \frac{\partial D}{\partial a_{2,l}} = \frac{\partial D}{\partial a_{3,k}} : \frac{\partial D}{\partial a_{3,l}} = \ldots = \frac{\partial D}{\partial a_{n,k}} : \frac{\partial D}{\partial a_{n,l}}.$$

Jeśli dany wyznacznik jest zerem, to w systemacie elementów wyznacznika dołączonego elementy rzędów równoległych są proporcyonalne (¹).

§ 70.

Mając

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1}, \ldots, & A_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{n,1}, \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

możemy wyznacznik Δ rozłożyć według elementów pewnego jego rzędu (§ 25)

$$\Delta = A_{i,1}\alpha_{i,1} + A_{i,2}\alpha_{i,2} + \ldots + A_{i,n}\alpha_{i,n},$$

jeśli, w ogóle, przez $\alpha_{i,k}$ nazwiemy ilość (§§ 25, 61)

$$(-1)^{i+k} \begin{vmatrix} A_{1,1}\ , \ldots, & A_{1,k-1}\ , & A_{1,k+1}\ , \ldots, & A_{i,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{i-1,1}, \ldots, & A_{i-1,k-1}, & A_{i-1,k+1}, \ldots, & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1}, \ldots, & A_{i+1,k-1}, & A_{i+1,k+1}, \ldots, & A_{i+1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{n,1}\ , \ldots, & A_{n,k-1}\ , & A_{n,k+1}\ , \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{\partial \Delta}{\partial A_{i,k}}.$$

(¹) Zestawiając tę własność z poprzednią, porównaj twierdzenie § 30-ego.

Te ilości utworzą systemat

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2},\ldots,\ \alpha_{1,n}, \\ \alpha_{2,1},\ \alpha_{2,2},\ldots,\ \alpha_{2,n}, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ., \\ \alpha_{n,1},\ \alpha_{n,2},\ldots,\ \alpha_{n,n}, \end{array}$$

którego wyznacznik jest tem dla wyznacznika Δ, czem jest wyznacznik Δ dla wyznacznika D. Możemy więc wyznacznik tego systematu ilości $\alpha_{i,k}$, jako wyznacznik dołączony do wyznacznika dołączonego do wyznacznika D, nazwać *wyznacznikiem systematu dołączonego drugiego rzędu do systematu elementów wyznacznika* D [1], lub krócej, *wyznacznikiem dołączonym drugiego rzędu do wyznacznika* D.

W otrzymanej w § 68-ym zależności

$$\overset{(m)}{\delta}_{i,k} = \mathrm{D}^{m-1} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_k} \overset{(n-m)}{d}_{\mu-i+1,\mu-k+1}$$

przyjmując

$$m = n - 1,$$

z powodu, że wtedy (§ 53)

$$\mu = n,\ \ \varepsilon_i = i - 1,\ \ \varepsilon_k = k - 1,\ \ \overset{(1)}{d}_{r,s} = a_{r,s},$$

otrzymamy

$$\overset{(n-1)}{\delta}_{i,k} = \mathrm{D}^{n-2} . (-1)^{i+k} \overset{(1)}{d}_{n-i+1,n-k+1},$$

czyli

$$\overset{(n-1)}{\delta}_{i,k} = \mathrm{D}^{n-2} . (-1)^{i+k} a_{n-i+1,n-k+1}.$$

---

[1] Cauchy, l. c., str. 77, 82.

Nazywając

$$n-i+1=j, \qquad n-k+1=l,$$

zważywszy, że wtedy

$$(-1)^{i+k}=(-1)^{j+l},$$

możemy nasz związek tak przedstawić:

$$\overset{(n-1)}{\delta}_{n-j+1,n-l+1}=D^{n-2}.(-1)^{j+l}\, a_{j,l},$$

zkąd

$$(-1)^{j+l}.\overset{(n-1)}{\delta}_{n-j+1,n-l+1}=D^{n-2}\, a_{j,l}.$$

Lecz (§ 53)

$$(-1)^{j+l}\overset{(n-1)}{\delta}_{n-i+1,n-l+1}$$

$$=(-1)^{j+l}\begin{vmatrix} A_{1,1} & ,\ldots, & A_{1,l-1} & , A_{1,l+1} & ,\ldots, & A_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{j-1,1}, & \ldots, & A_{j-1,l-1}, & A_{j-1,l+1}, & \ldots, & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1}, & \ldots, & A_{j+1,l-1}, & A_{j+1,l+1}, & \ldots, & A_{j+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & ,\ldots, & A_{n,l-1} & , A_{n,l+1} & ,\ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix}=\alpha_{j,l},$$

więc

$$\alpha_{j,l}=\frac{\partial\Delta}{\partial A_{j,l}}=D^{n-2}\, a_{j,l}.$$

Ilość dołączona drugiego rzędu do elementu danego wyznacznika n-*ego stopnia jest przedstawiona przez iloczyn tegoż elementu przez* (n—2)-*gą potęgę danego wyznacznika* [1].

---

[1] Cauchy, l. c., str. 82.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

WYZNACZNIK UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH.

§ 71.

Gdy dany jest układ n równań liniowych z n zmiennemi niezależnemi

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = \xi_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = \xi_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

to wyznacznik systematu n^2 spółczynników tych równań

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = D,$$

nosi nazwę *wyznacznika układu równań* (1), lub [1] *wyznacznika równań* (1).

Jeśli wyznacznik D nie jest zerem, to każdemu układowi wartości skończonych dla

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\xi_n$$

odpowiada układ wartości skończonych dla

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n.$$

Jeśli w wyznaczniku

$$D = a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \ldots + a_{n,k}A_{n,k} \tag{2}$$

pomnożymy wszystkie elementy k-ej kolumny przez x_k, to (§ 29)

$$Dx_k = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k}x_k,\ldots,a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k}x_k,\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Nie naruszając równości, możemy (§ 31) do elementów k-ej kolumny wyznacznika po prawej dodać elementy pierwszej jego kolumny pomnożone przez x_1, drugiej pomnożone przez $x_2,\ldots,(k-1)$-ej pomnożnne przez x_{k-1}, $(k+1)$-ej pomnożone przez $x_{k+1},\ldots,n$-ej pomnożone przez x_n. Wtedy w k-ej kolumnie wyznacznika po prawej znajdują się wyrażenia,

---

(1) Jacobi: « earum æquationum Determinans. » (*De formatione…*, str. 296).

będące pierwszemi stronami równań (1); zastępując je przez drugie strony tych równań, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n,1},\ldots,a_{n,k},\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,\xi_1,\ldots,a_{1,n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n,1},\ldots,\xi_n,\ldots,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

lub, stosując do wyznacznika po prawej rozkład (2),

$$\mathrm{D}x_k = \mathrm{A}_{1,k}\xi_1 + \mathrm{A}_{2,k}\xi_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,k}\xi_k, \tag{3}$$

zkąd ([1])

$$x_k = \frac{\mathrm{A}_{1,k}\xi_1 + \mathrm{A}_{2,k}\xi_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,k}\xi_k}{\mathrm{D}},$$

czyli

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,k-1}, & \xi_1, & a_{1,k+1}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,k-1}, & \xi_2, & a_{n,k+1}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & a_{1,k+1}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,k-1}, & a_{n,k}, & a_{n,k+1}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

Nadając w związku (3) liczbie k wszystkie wartości $1, 2, \ldots, n$, ze związków

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}x_1 = \mathrm{A}_{1,1}\xi_1 + \mathrm{A}_{2,1}\xi_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,1}\xi_n, \\ \mathrm{D}x_2 = \mathrm{A}_{1,2}\xi_1 + \mathrm{A}_{2,2}\xi_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,2}\xi_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathrm{D}x_n = \mathrm{A}_{1,n}\xi_1 + \mathrm{A}_{2,n}\xi_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,n}\xi_n, \end{array}\right. \tag{4}$$

([1]) LEIBNITZ, CRAMER (porównaj § 17). Ta zaś ogólna postać dana przez CAUCHY'ego (l. c., str. 70).

zastępujących równania (1), otrzymamy podobne wyrażenia każdej z ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przez spółczynniki równań (1) i ilości $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Jeśli te ostatnie są stałe i nie wszystkie równe zeru, to otrzymane wyrażenia przedstawiają układ wartości dla n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zadosyć czyniących jednocześnie wszystkim n równaniom (1) — przedstawiają rozwiązanie równań (1).

Gdy dany jest układ równań liniowych, z n *niewiadomemi, to wartością każdej niewiadomej jest ułamek, w mianowniku którego jest wyznacznik tych równań, w liczniku zaś wyznacznik, otrzymany z poprzedniego w skutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej przez odpowiednie wyrazy wiadome równań.*

Wszystkie więc wartości niewiadomych mają spólny mianownik: wyznacznik układu równań. Spostrzeżenie tego, jakeśmy widzieli (§ 17), było punktem wyjścia rozwoju teoryi wyznaczników.

Naprzykład 1°)

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 40, \\ 5x + 9y - 7z = 47, \\ 9x + 8y - 3z = 97; \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 4, & -3, & 2 \\ 5, & 9, & -7 \\ 9, & 8, & -3 \end{vmatrix} = 178.$$

$$\begin{vmatrix} 40, & -3, & 2 \\ 47, & 9, & -7 \\ 97, & 8, & 3 \end{vmatrix} = 1780; \begin{vmatrix} 4, & 40, & 2 \\ 5, & 47, & -7 \\ 9, & 97, & -3 \end{vmatrix} = 356; \begin{vmatrix} 4, & -3, & 40 \\ 5, & 9, & 47 \\ 9, & 8, & 97 \end{vmatrix} = 534.$$

$$x = \frac{1780}{178} = 10; \qquad y = \frac{356}{178} = 2; \qquad z = \frac{534}{178} = 3.$$

2°)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 4, \\ 3x \qquad\;\; + z = 17, \\ x + y - 2z = 1; \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 2, & 3, & -3 \\ 3, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 4, & 3, & -3 \\ 17, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 50; \begin{vmatrix} 2; & 4, & -3 \\ 3, & 17, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2, & 3, & 3 \\ 3, & 0, & 17 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 20.$$

$$x = \frac{50}{10} = 5; \quad y = \frac{0}{10} = 0; \quad z = \frac{20}{10} = 2.$$

3°)

$$\begin{cases} \quad y + z + u = a, \\ x \quad\;\; + z + u = b, \\ x + y \quad\; + u = c, \\ x + y + z \qquad = d; \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

$$x = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} a, & 1, & 1, & 1 \\ b, & 0, & 1, & 1 \\ c, & 1, & 0, & 1 \\ d, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \frac{b + c + d - 2a}{3};$$

$$y = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0, & a, & 1, & 1 \\ 1, & b, & 1, & 1 \\ 1, & c, & 0, & 1 \\ 1, & d, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \frac{c + d + a - 2b}{3};$$

$$z = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0, & 1, & a, & 1 \\ 1, & 0, & b, & 1 \\ 1, & 1, & c, & 1 \\ 1, & 1, & d, & 1 \end{vmatrix} = \frac{d+a+b-2c}{3};$$

$$u = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & a \\ 1, & 0, & 1, & b \\ 1, & 1, & 0, & c \\ 1, & 1, & 1, & d \end{vmatrix} = \frac{a+b+c-2d}{3}.$$

§ 72 (¹).

W przypadku, gdy dane jest jedno równanie z jedną niewiadomą,

$$f(x)=0,$$

a lewa jego strona przedstawia się w postaci wyznacznika, to niekiedy, przez odpowiednie rozwinięcie lub też przekształcenie wyznacznika, możemy wprost znaleść pierwiastki równania. Naprzykład (²)

1°)

$$f(x) = \begin{vmatrix} Cx+D, & A, & B \\ ax+p, & -1, & 0 \\ bx+q, & 0, & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

(¹) Właściwie treść tego §-u ma tylko związek pośredni z badaniami, w tym rozdziale prowadzonemi, które mogą być także uważane, jako odnoszące się do zastosowania wyznaczników do rozwiązywania równań.

(²) Wszystkie przykłady tego §-u są wzięte z Dostor'a: *Éléments de la Théorie des Déterminants*, str. 81 i następne.

lecz tu

$$f(x) = \begin{vmatrix} C, & A, & B \\ a, & -1, & 0 \\ b, & 0, & -1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} D, & A, & B \\ p, & -1, & 0 \\ q, & 0, & -1 \end{vmatrix},$$

więc

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} D, & A, & B \\ p, & -1, & 0 \\ q, & 0, & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C, & A, & B \\ a, & -1, & 0 \\ b, & 0, & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C}.$$

2°)

$$f(x) = \begin{vmatrix} a^2 - x & , & ab - x\cos\theta \\ ab - x\cos\theta, & & b^2 - x \end{vmatrix} = 0;$$

$$f(x) = -bx \begin{vmatrix} 1 & , a \\ \cos\theta, & b \end{vmatrix} - ax \begin{vmatrix} a, & \cos\theta \\ b, & 1 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} 1 & , \cos\theta \\ \cos\theta, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x\sin^2\theta - a^2 - b^2 + 2ab\cos\theta);$$

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

3°)

$$f(x) = \begin{vmatrix} x, & a, & b, & c \\ a, & x, & 0, & 0 \\ b, & 0, & x, & 0 \\ c, & 0, & 0, & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$f(x)=x^3\begin{vmatrix} x, & \frac{a}{x}, & \frac{b}{x}, & \frac{c}{x} \\ a, & 1, & 0, & 0 \\ b, & 0, & 1, & 0 \\ c, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2, & a, & b, & c \\ a, & 1, & 0, & 0 \\ b, & 0, & 1, & 0 \\ c, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2abc\begin{vmatrix} x^2, & 1, & 1, & 1 \\ a, & \frac{1}{a}, & 0, & 0 \\ b, & 0, & \frac{1}{b}, & 0 \\ c, & 0, & 0, & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} x^2, & 1, & 1, & 1 \\ a^2, & 1, & 0, & 0 \\ b^2, & 1, & 1, & 0 \\ c^2, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x^2-a^2-b^2-c^2);$$

$$x'=x''=0,\quad x'''=+\sqrt{a^2+b^2+c^2},\quad x^{\mathrm{IV}}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

4°)

$$f(x)=\begin{vmatrix} x, & a, & a, & a \\ a, & x, & a, & a \\ a, & a, & x, & a \\ a, & a, & a, & x \end{vmatrix}\ (^1)=0;$$

(¹) Jestto szczególny przypadek wyznacznika ogólniejszego (SALMON *Lessons introductory to the modern higher algebra*, w trzeciem wydaniu Dublin, 1876 str. 16).

Gdy nazwiemy

$$(x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_n-x)=\varphi(x),$$

$$f(x)=\begin{vmatrix} x\,, & a, & a, & a \\ a-x, & x-a, & 0, & 0 \\ a-x, & 0, & x-a, & 0 \\ a-x, & 0, & 0, & x-a \end{vmatrix}=$$

$$=(x-a)^3\begin{vmatrix} x, & a, & a, & a \\ -1, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & 0 \\ -1, & & 0, & 1 \end{vmatrix}=(x-a)^3(x+3a);$$

$$x'=x''=x'''=a, \qquad x^{\mathrm{IV}}=-3a.$$

§ 73.

Gdy układ równań (4) § 71-ego

$$\begin{cases} \mathrm{D}x_1=\mathrm{A}_{1,1}\xi_1+\mathrm{A}_{2,1}\xi_2+\ .\ .\ .\ +\mathrm{A}_{n,1}\xi_n, \\ \mathrm{D}x_2=\mathrm{A}_{1,2}\xi_1+\mathrm{A}_{2,2}\xi_2+\ .\ .\ .\ +\mathrm{A}_{n,2}\xi_n, \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ , \\ \mathrm{D}x_n=\mathrm{A}_{1,n}\xi_1+\mathrm{A}_{2n}\xi_2+\ .\ .\ .\ +\mathrm{A}_{n,n}\xi_n, \end{cases} \qquad (4)$$

zechcemy rozwiązać względem ilości ξ_1, ξ_2,...,ξ_n, podobnie,

---

to

$$\begin{vmatrix} x_1, & x\,, & x,\ldots, & x \\ x\,, & x_2, & x,\ldots, & x \\ . & . & . & . \\ x\,, & x\,, & x,\ldots, & x_n \end{vmatrix}=\varphi(x)-x\,\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

jak w § 71-szym rozwiązaliśmy układ (1) względem ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to, nazywając w wyznaczniku tego układu (§§ 65, 66)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,n} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta = D^{n-1}$$

spółczynnik przy $A_{i,k}$ przez $\alpha_{i,k}$ (§ 70), otrzymamy

$$\begin{cases} \Delta\xi = \alpha_{1,1}Dx_1 + \alpha_{1,2}Dx_2 + \ldots + \alpha_{1,n}Dx_n, \\ \Delta\xi_2 = \alpha_{2,1}Dx_1 + \alpha_{2,2}Dx_2 + \ldots + \alpha_{2,n}Dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta\xi_n = \alpha_{n,1}Dx_1 + \alpha_{n,2}Dx_2 + \ldots + \alpha_{n,n}Dx_n, \end{cases}$$

czyli ([1])

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{1,1}}{D^{n-2}}x_1 + \frac{\alpha_{1,2}}{D^{n-2}}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1,n}}{D^{n-2}}x_n = \xi_1, \\ \frac{\alpha_{2,1}}{D^{n-2}}x_1 + \frac{\alpha_{2,2}}{D^{n-2}}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{2,n}}{D^{n-2}}x_n = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\alpha_{n,1}}{D^{n-2}}x_1 + \frac{\alpha_{n,2}}{D^{n-2}}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{n,n}}{D^{n-2}}x_n = \xi_n. \end{cases}$$

Te jednak równania są jednoznaczne z równaniami (1), więc ([2])

$$\frac{\alpha_{i,k}}{D^{n-2}} = a_{i,k},$$

([1]) Cauchy, l. c., str. 77.
([2]) Cauchy, ibidem.

zkąd wypada związek otrzymany w § 70-ym :

$$\alpha_{i,k} = D^{n-2} a_{i,k}.$$

§ 74.

Wyznacznik dwu następujących układów po n równań liniowych z n zmiennemi niezależnemi :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = \xi_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}a_n = \xi_n; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{2,1}y_2 + \ldots + a_{n,1}y_n = \eta_1, \\ a_{1,2}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{n,2}y_n = \eta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{1,n}y_1 + a_{2,n}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n = \eta_n, \end{cases} \qquad (5)$$

jest ten sam, spólny, mianowicie (§ 18):

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & ,a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1}, & \ldots & ,a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & \ldots & ,a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Układy takie o spólnym wyznaczniku nazywają się jeden względem drugiego *pochodnym* (système dérivé).

Z systematów (1) i (5) wypada

$$\left\{\begin{array}{l} Dx_1 = A_{1,1}\xi_1 + A_{2,1}\xi_2 + \ldots + A_{n,1}\xi_n, \\ Dx_2 = A_{1,2}\xi_1 + A_{2,2}\xi_2 + \ldots + A_{n,2}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Dx_n = A_{1,n}\xi_1 + A_{2,n}\xi_2 + \ldots + A_{n,n}\xi_n; \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Dy_1 = A_{1,1}\eta_1 + A_{1,2}\eta_2 + \ldots + A_{2,n}\eta_n. \\ Dy_2 = A_{2,1}\eta_1 + A_{2,2}\eta_2 + \ldots + A_{2,n}\eta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Dy_n = A_{n,1}\eta_1 + A_{n,2}\eta_2 + \ldots + A_{n,n}\eta_n. \end{array}\right. \tag{6}$$

Jeśli równania (6) pomnożymy : pierwsze przez ξ_1, drugie przez $\xi_2, \ldots,$ ostatnie przez ξ_n, tak pomnożone dodamy i uwzględnimy związki (4); alboteż, jeśli równania (4) pomnożymy : pierwsze przez η_1, drugie przez $\eta_2, \ldots,$ ostatnie przez η_n, tak pomnożone dodamy i uwzględnimy związki (6), — to, tak w jednym jak i w drugim razie, otrzymamy z dodania

$$D\xi_1 y_1 + D\xi_2 y_2 + \ldots + D\xi_n y_n = Dx_1\eta_1 + Dx_2\eta_2 + \ldots + Dx_n\eta_n,$$

czyli *związek* (¹)

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \ldots + \xi_n y_n = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_n\eta_n,$$

istniejący między ilościami, wchodzącemi w dwa układy o spólnym wyznaczniku.

(¹) Jacobi, l. c., str 296

§ 75.

W przypadku gdy w równaniach (1) wszystkie, prócz jednej, ilości po prawej są równe zeru, np.

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \ldots = \xi_n = 0,$$

to mamy układ n równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \ldots + a_{i-1,n}x_n = 0, \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = \xi_i, \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \ldots + a_{i+1,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = 0, \end{cases}$$

liniowych i wszystkich, prócz i-ego, jednorodnych. W tym przypadku związki (4) przechodzą w następujące

$$\mathrm{D}x_1 = \mathrm{A}_{i,1}\xi_i;\quad \mathrm{D}x_2 = \mathrm{A}_{i,2}\xi_i;\quad \mathrm{D}x_3 = \mathrm{A}_{i,3}\xi_i; \ldots; \mathrm{D}x_n = \mathrm{A}_{i,n}\xi_i, \tag{7}$$

zkąd

$$x_1 : \mathrm{A}_{i,1} = x_2 : \mathrm{A}_{i,2} = x_3 : \mathrm{A}_{i,3} = \ldots = x_n : \mathrm{A}_{i,n} (= \xi_i : \mathrm{D}),$$

czyli

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n = \mathrm{A}_{i,1} : \mathrm{A}_{i,2} : \mathrm{A}_{i,3} : \ldots : \mathrm{A}_{i,n}.$$

Gdy dany jest układ n *równań liniowych z* n *niewiadomemi, z których-to równań* n — 1 *jest jednorodnych, to wartości dla niewiadomych są proporcyonalne względem ilości dołączonych* *(w wyznaczniku równań) do odpowiednich spółczynników tych niewiadomych równania niejednorodnego.*

W szczególnym przypadku, gdy

$$\xi_i = 1,$$

to związki (7) stają się

$$Dx_1 = A_{i,1}; \quad Dx_2 = A_{i,2}; \ldots; Dx_n = A_{i,n},$$

a że (§ 61)

$$A_{i,k} = \frac{\partial D}{\partial a_{i,k}},$$

więc wtedy

$$x_1 = \frac{\frac{\partial D}{\partial a_{i,1}}}{D}; \quad x_2 = \frac{\frac{\partial D}{\partial a_{i,2}}}{D}; \quad ..; x_n = \frac{\frac{\partial D}{\partial a_{i,n}}}{D},$$

czyli [1]

$$x_1 = \frac{\partial \log D}{\partial a_{i,1}}; \quad x_2 = \frac{\partial \log D}{\partial a_{i,2}}; \ldots; x_n = \frac{\partial \log D}{\partial a_{i,n}}.$$

§ 76.

Jeśli w układzie (1) wszystkie ilości

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0,$$

to ten układ przechodzi na następujący układ n równań jednorodnych z n zmiennemi

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = 0, \end{array}\right. \tag{8}$$

---

(1) Bellavitis, l. c., § 21.

związki zaś (4) dają wtedy

$$Dx_1=0;\quad Dx_2=0;\ldots;\ Dx_n=0.$$

Jeśli więc wyznacznik D nie jest zerem, to układowi równań (8) zadosyć czynią tylko wartości (¹)

$$x_1=0;\quad x_2=0;\ldots;\ x_n=0;$$

naprzykład

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=0, \\ 5x_1+7x_2=0; \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 5, & 7 \end{vmatrix}=-1;$$

$$x_1=x_2=0.$$

Jeśli zaś wyznacznik $D=0$, to wtedy (§ 27)

$$\begin{cases} a_{1,1}A_{i,1}+a_{1,2}A_{i,2}+\ldots+a_{1,n}A_{i,n}=0, \\ a_{2,1}A_{i,1}+a_{2,2}A_{i,2}+\ldots+a_{2,n}A_{i,n}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{i,1}A_{i,1}+a_{i,2}A_{i,1}+\ldots+a_{i,n}A_{i,n}=D=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}A_{i,1}+a_{n,2}A_{i,2}+\ldots+a_{n,n}A_{i,n}=0. \end{cases}$$

Porównywając te n związków z n równaniami (8), widzimy, że, gdy niewiadomym nadamy wartości, zadosyć czyniące warunkowi (²)

$$x_1:x_2:x_3:\ldots:x_n=A_{i,1}:A_{i,2}:A_{i,3}:\ldots:A_{i,n}, \tag{9}$$

(¹) Jacobi, ibidem.
(²) Jacobi, ibidem.

to równania (8) będą sprawdzone. W proporcyi (9) wskaźnikowi i możemy widocznie nadać którąkolwiek jedną z wartości 1, 2,...,n. Oczywiście, aby proporcya (9) nie była illuzoryczną, potrzeba, ażeby nie wszystkie ilości $A_{i,k}$ były zerami.

Jeśli wyznacznik układu n *równań liniowych, jednorodnych, jest różny od zera, to tym równaniom zadosyć czynią jedynie wartości zero dla wszystkich niewiadomych; jeśli zaś ten wyznacznik jest zerem, a nie wszystkie jego wyznaczniki częściowe* (n—1)-ego *stopnia są równe zeru, to wartości tych niewiadomych są proporcyonalne względem ilości dołączonych (w tym wyznaczniku) do odpowiednich spółczynników jednego któregokolwiek z tych równań.*

Naprzykład 1°)

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2+\ x_3=0, \\ -2x_1+\ x_2+3x_3=0, \\ -6x_1+3x_2+2x_3=0; \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} 4, & -2, & 1 \\ -2, & 1, & 3 \\ -6, & 3, & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = -\begin{vmatrix} -2, & 1 \\ 3, & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ -6, & 2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 4, & -2 \\ -6, & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 7 : 14 : 0$$

$$= 1 : 2 ; 0,$$

a więc, gdy nadamy: dla x_1 wartość jakąkolwiek, dla x_2 wartość dwa razy większą niż dla x_1, dla x_3 zaś wartość zero, naprzykład

$$x_1=10; \quad x_2=2x_1=20; \quad x_3=0,$$

to sprawdzimy równania dane.

2°)

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 0, \\ 3x + 17y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0; \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 2, & 4, & -3 \\ 3, & 17, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 17, & 1 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3, & 17 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -35 : +7 : -14$$

$$= -5 : \quad 1 : -2;$$

jakąkolwiek więc tu nadamy wartość dla jednej z niewiadomych, naprzykład dla y, to, mnożąc tę wartość przez -5, otrzymamy wartość dla x, mnożąc ją zaś przez -2, otrzymamy wartość dla z.

Wogóle z proporcyi (9) wypada, że *jednej niewiadomej możemy nadać dowolną wartość*, byle dla pozostałych wyznaczyć wartości, zadosyć czyniące warunkowi (9).

Jeśli wyznacznik układu n *równań liniowych, jednorodnych, jest zerem, a nie wszystkie jego pierwsze minory są zerami, to układ równań jest jednokrotnie nieoznaczonym* (einfach unbestimmt).

§ 77.

Jeśli nietylko wyznacznik D układu równań (8), ale i wszystkie jego wyznaczniki częściowe $(n-1)$-ego stopnia są również zerami, to proporcya (9) staje się illuzoryczną (przy wszystkich wartościach wskaźnika i), a tem samem inną należy wtedy drogą odnaleźć rozwiązanie równań (8).

Postawmy kwestyę ogólniej. Przyjmijmy, że tak wyznacznik D, jak i wszystkie jego wyznaczniki częściowe $(n-1)$-ego, $(n-2)$-ego,..., $(m+1)$-ego stopni są równe zeru, lecz, że już nie wszystkie jego wyznaczniki częściowe m-ego stopnia są równe zeru.

Niechaj różnym od zera wyznacznikiem częściowym m-ego stopnia będzie wyznacznik np.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, a_{2,m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, \ldots, a_{m,m} \end{vmatrix} = d_{1,1}^{(m)}$$

Utwórzmy *ad hoc* wyznacznik $(m+1)$-ego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m}, & a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,m}, & a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,m}, & a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{m,n}x_n \\ a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m}, & a_{i,m+1}x_{m+1} + a_{i,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{i,n}x_n \end{vmatrix} = d.$$

Jest on tożsamościowo równy zeru przy jakiejkolwiek wartości $(1, 2, \ldots, n)$ wskaźnika i, składa się bowiem (§ 28) z $n-m$ składników

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, a_{1,m}, & a_{1,m+\lambda} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, a_{2,m}, & a_{2,m+\lambda} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, \ldots, a_{m,m}, & a_{m,m+\lambda} \\ a_{i,1}, & a_{i,2}, \ldots, a_{i,m}, & a_{i,m+\lambda} \end{vmatrix} x_{m+\lambda}$$

($\lambda=1, 2,\ldots,n-m$), z których każdy dla

$$i=1, 2,\ldots,m$$

tożsamościowo (§ 20), zaś dla

$$i=m+1, \quad m+2,\ldots,n$$

na mocy założenia (jako wyznacznik częściowy $(m+1)$-ego stopnia wyznacznika D) jest równy zeru. Rozkładając zaś wyznacznik d według elementów jego ostatniego wiersza i nazywając ilości dołączone do tych elementów przez

$$p_1, p_2, \;.\;.\;.\; ,p_m, p(=\overset{(m)}{d}_{1,1}),$$

widzimy, że te ilości od wartości, nadawanych dla wskaźnika i, całkiem nie zależą (gdyż pozostają wciąż temi samemi wyznacznikami częściowemi kombinacyi pierwszych m wierszy wyznacznika d), oraz, że pierwsze m z nich, t. j. ilości

$$p_1, p_2,\ldots,p_m,$$

jako będące (z odpowiedniemi znakami) wyznacznikami częściowemi m-ego stopnia wyznacznika d, zawierającemi jego $(m+1)$-szą kolumnę (§§ 25, 53), posiadają w każdym wyrazie po jednym elemencie $(m+1)$-ej kolumny wyznacznika d, a tem samem są funkcyami jednorodnemi, liniowemi względem zmiennych

$$x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_n.$$

Rozkład zaś sam jest

$$a_{i,1}p_1+a_{i,2}p_2+\ldots+a_{i,m}p_m+(a_{i,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{i,n}x_n)p=d=0.$$

Nadając liczbie i wszystkie wartości $1, 2, \ldots, n$, otrzymujemy związki

$$\begin{cases} a_{1,1}p_1 + a_{1,2}p_2 + \ldots + a_{1,m}p_m + (a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1,n}x_n)p = 0, \\ a_{2,1}p_1 + a_{2,2}p_2 + \ldots + a_{2,m}p_m + (a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2,n}x_n)p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}p_1 + a_{n,2}p_2 + \ldots + a_{n,m}p_m + (a_{n,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{n,n}x_n)p = 0, \end{cases}$$

Porównywając je z równaniami (8), które tak pisać możemy :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m + (a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{1,n}x_n) . 1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m + (a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{2,n}x_n) . 1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m + (a_{n,m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{n,n}x_n) . 1 = 0, \end{cases} \tag{8'}$$

spostrzegamy, że (§ 76)

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_m : 1 = p_1 : p_2 : \ldots : p_m : p, \tag{9'}$$

oraz, że z tej proporcyi wyznaczone wartości dla m niewiadomych

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_m \tag{10}$$

zadosyć czynić będą nietylko m pierwszym równaniom (8'), lecz również i każdemu pozostałemu z tych równań ([1]).

([1]) KRONECKER, w wykładach na uniwersytecie Berlińskim, w semestrze zimowym 1864/5 r. (Por. BALTZER l. c., w 2-em wydaniu str. 62).

Wyznaczając z warunku (9') wartości dla którejkolwiek z niewiadomych (10), mamy

$$x_k : 1 = p_k : p, \qquad k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_k = \frac{p_k}{p},$$

gdzie p_k, jakeśmy wspomnieli, jest funkcyą jednorodną liniową zmiennych

$$x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n. \tag{11}$$

Zatem $n - m$ *niewiadomym możemy nadać dowolne wartości*, byle, zależnie już od nich, wartości dla niewiadomych pozostałych wyznaczyć z proporcyi (9').

Jeśli tak wyznacznik układu n *równań jednorodnych liniowych, jak i jego wyznaczniki częściowe* (n — 1)*-ego,* (n — 2)*-ego,* ...,(m + 1)*-ego stopni są wszystkie równe zeru, to układ jest* (n — m)*-krotnie nieoznaczony.*

(Niekoniecznie atoli dowolne wartości możemy nadawać tylko zmiennym (11), aby, stosownie do nich, wyznaczać wartości (10) z proporcyi (9') : — owszem, którymkolwiek $n - m$ z pośród niewiadomych

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1},\ x_n$$

możemy nadać wartości dowolne, byle wartości dla pozostałych m niewiadomych wyznaczyć z proporcyi (9'). — Również, tylko dla ułatwienia w przedstawieniu przyjęliśmy wyżej, że, z wyznaczników częściowych m-ego stopnia wyznacznika D, wyznacznik $\overset{(m)}{d}_{1,1}$ jest różny od zera. Mogliśmy byli wziąć którykolwiek z różnych od zera wyznaczników częściowych m-ego stopnia : rozumowanie byłoby takież samo).

Naprzykład 1°)

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} -2, & 1, & 3 \\ 4, & -2, & 1 \\ -6, & 3, & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ -2, & 1 \end{vmatrix} = \overset{(2)}{d_{1,3}} = 7:$$

układ jednokrotnie nieoznaczony; jakoż:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & , & 3 & , & -2x_1 \\ -2 & , & 1 & , & 4x_1 \\ a_{i,2}, & & a_{i,3}, & & a_{i,1}x_1 \end{vmatrix};$$

$$x_2 : x_3 : x_1 = \begin{vmatrix} 3, & -2x_1 \\ 1, & 4x_1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1, & -2x_1 \\ -2, & 4x_1 \end{vmatrix} : \overset{(2)}{d_{1,3}}$$

$$= 14x_1 : 0.x_1 : 7$$

$$= 2x_1 : 0 : 1;$$

gdy x_1 dowolne, to $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 0$.

2°)

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3z + 2u = 0, \\ 16x + 6y + 7z + 5u = 0, \\ 10x + 4y + 4z + 3u = 0, \\ 10x + 2y + 7z + 4u = 0; \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 6, & 2, & 3, & 2 \\ 16, & 6, & 7, & 5 \\ 10, & 4, & 4, & 3 \\ 10, & 2, & 7, & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$\binom{4}{3} = 4:$ $\qquad \overset{(3)}{d}_{1,1} = \overset{(3)}{d}_{1,2} = \overset{(3)}{d}_{1,3} = \overset{(3)}{d}_{1,4} = 0,$

$$\overset{(3)}{d}_{2,1} = \overset{(3)}{d}_{2,2} = \overset{(3)}{d}_{2,3} = \overset{(3)}{d}_{2,4} = 0,$$

$$\overset{(3)}{d}_{3,1} = \overset{(3)}{d}_{3,2} = \overset{(3)}{d}_{3,3} = \overset{(3)}{d}_{3,4} = 0,$$

$$\overset{(3)}{d}_{4,1} = \overset{(3)}{d}_{4,2} = \overset{(3)}{d}_{4,3} = \overset{(3)}{d}_{4,4} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4, & 4 \\ 2, & 7 \end{vmatrix} = \overset{(2)}{d}_{6,4} = 20:$$

układ dwukrotnie nieoznaczony; znajdziemy rozwiązanie:

$$d = \begin{vmatrix} 4, & 4, & 10x + 3u \\ 2, & 7, & 10x + 4u \\ a_{i,2}, & a_{i,3}, & a_{i,1}x + a_{i,4}u \end{vmatrix};$$

$$y : z : 1 = \begin{vmatrix} 4, & 10x + 3u \\ 7, & 10x + 4u \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 4, & 10x + 3u \\ 2, & 10x + 4u \end{vmatrix} : \overset{(2)}{d}_{6,4}$$

$$= -5(6x + u) : -10(2x + u) : 20$$

$$= -6x - u : -2(2x + u) : 4;$$

gdy nadamy niewiadomym np.

$$x, z$$

wartości dowolne, to

$$y = \frac{z - 2x}{2}, \qquad u = -2(x + z);$$

naprzykład

$$x = 3, \quad z = -4, \quad y = -5, \quad u = 2.$$

§ 78.

W § 76-ym widzieliśmy, że jeżeli układ równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = 0, \end{cases} \tag{8}$$

nie jest illuzoryczny, t. j., jeśli tym równaniom nie mają czynić zadosyć jedynie wartości zero dla wszystkich niewiadomych; inaczej, jeśli one istotnie posiadają (spólne) rozwiązanie, to koniecznem jest, aby wyznacznik tego układu równań

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & , a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & , a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

W Algebrze ([1]), równość, powstała z przyrównania do zera pewnej funkcyi samych tylko spółczynników układu danych n równań (jakichkolwiek stopni) jednorodnych, z n niewiadomemi, wyrażająca warunek istnienia spólnego rozwiązania danych równań, nazywa się ich *równaniem wypadkowem* (æquatio resultans, la résultante, æquatio finalis). Samą zaś ową

([1]) Zobacz przekład polski dzieła SALMON'a *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, stanowiący drugi tom SĄGAJŁY *Wykładu zupełnego Algebry*, rozdział VI, strona 61.

funkcyę spółczynników nazywają *rugownikiem* [le résultant [1], eliminant [2]] tych równań, lub też rugownikiem wyrażeń algebraicznych jednorodnych (*form*), których przyrównanie do zera daje owe równania. Z tego więc, cośmy wyżej powiedzieli, wypada, że

Wyznacznik układu n *równań jednorodnych, liniowych, jest rugownikiem* [3] *tych równań* [4], *czyli rugownikiem* n *form liniowych z* n *zmiennemi*, przez przyrównanie do zera dających te równania.

§ 79.

Jeśli dane są dwie formy podwójne (to jest z dwięma zmiennemi) n-ego i m-ego stopni

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n, \\ \psi(x,y)=b_0x^m+b_1x^{m-1}y+b_2x^{m-2}y^2+\ldots+b_{m-1}xy^{m-1}+b_my^m, \end{cases}$$

to, jak zobaczymy, rugownik ich może być przedstawiony w postaci wyznacznika odpowiednio utworzonego układu równań.

Zajmiemy się metodami otrzymania takiego układu równań, któregoby wyznacznik przedstawiał rugownik form $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$.

---

(1) Bézout.

(2) De Morgan.

(3) Ta polska nazwa spotyka się po raz pierwszy u Sągajły, l. c., str. 61.

(4) To było przyczyną, że, przy początkowych badaniach wyznaczników, nie oddzielano ich pojęcia od pojęcia rugowników, tak dalece, że Cauchy, wprowadzając nazwę «déterminant,» zastrzega, iż: «les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes.» (*l. c.*, str. 51).

1. Aby dwa równania

$$\varphi(x,y)=0, \qquad \psi(x,y)=0$$

posiadały spólne rozwiązanie, np. x',y', potrzeba, aby tak forma $\varphi(x,y)$, jak i forma $\psi(x,y)$ w liczbie liniowych czynników, na jakie się rozkładają, miały spólny czynnik [1]

$$xy'-x'y.$$

Zważmy, że, czy pomnożymy formę $\varphi(x,y)$ przez pozostałe $m-1$ takich czynników liniowych formy $\psi(x,y)$, czyteż pomnożymy formę $\psi(x,y)$ przez pozostałe $n-1$ czynników liniowych formy $\varphi(x,y)$, to oczywiście, otrzymamy zawsze ten sam wypadek, w postaci funkcyi jednorodnej zmiennych x i y,

---

[1] Odpowiada to, w przypadku niejednorodnego równania $f(z)=0$, n-ego stopnia, mającego pierwiastki $z', z'', \ldots, \overset{(n)}{z}$, znanemu rozkładowi:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=a_0(z-z')(z-z'')\ldots(z-\overset{(n)}{z}).$$

Jeśli tu nazwiemy $z=\frac{x}{y}$, zaś $z'=\frac{x'}{y'}$, $z''=\frac{x''}{y''}, \ldots, \overset{(n)}{z}=\frac{\overset{(n)}{x}}{y^{(n)}}$, pomnożymy obie strony przez $\overset{n}{y}$, oraz przyjmiemy $a_0=y'y''\ldots\overset{(n)}{y}$, to

$$\varphi(x,\ y)=(xy'-x'y)(xy''-x''y)\ldots(x\overset{(n)}{y}-\overset{(n)}{x}y).$$

Skutkiem tego, ujawniając spólny czynnik form $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$, możemy pisać je tak:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(x.\,y)&=(xy'-x'y)(p_0x^{n-1}+p_1x^{n-2}y+p_2x^{n-3}y^2+\ldots\\&\qquad+p_{n-2}xy^{n-2}+p_{n-1}y^{n-1}),\\ \psi(x,\ y)&=(xy'-x'y)(q_0x^{m-1}+q_1x^{m-2}y+q_2x^{m-3}y^2+\ldots\\&\qquad+q_{m-2}xy^{m-2}+q_{m-1}y^{m-1}).\end{aligned}\right.$$

stopnia $(n+m-1)$-ego. Jeśli więc, mnożąc formę $\varphi(x,y)$ przez odpowiednio dobrane wyrażenie, otrzymamy funkcyę jednorodną $(n+m-1)$-ego stopnia, a mnożąc formę $\psi(x,y)$ przez odpowiednio utworzone wyrażenie, otrzymamy także funkcyę jednorodną $(n+m-1)$-ego stopnia, to warunki, pod któremi te iloczyny przedstawiają tę samą funkcyę, wyrażają warunki istnienia spólnego rozwiązania równań $\varphi(x,y)=0$ i $\psi(x,y)=0$.

W celu otrzymania takich warunków, pomnóżmy formę $\varphi(x,y)$ przez dowolną funkcyę jednorodną $(m-1)$-ego stopnia

$$A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}y+\ldots+A_{m-2}xy^{m-2}+A_{m-1}y^{m-1},$$

wprowadzającą m stałych dowolnych $A_0, A_1,\ldots, A_{m-2}, A_{m-1}$,— formę zaś $\psi(x,y)$ przez dowolną funkcyę jednorodną $(n-1)$-ego stopnia

$$-(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}y+\ldots+B_{n-2}xy^{n-2}+B_{n-1}y^{n-1}),$$

wprowadzającą n stałych dowolnych $B_0, B_1,\ldots, B_{n-2}, B_{n-1}$. Aby tak powstałe wyrażania jednorodne $(n+m-1)$-ego stopnia

$$(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}y+\ldots+A_{m-1}y^{m-1})(a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n),$$

$$-(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-1}y+\ldots+B_{n-1}y^{n-1})(b_0x^m+b_1x^{m-1}y+\ldots+b_my^m)$$

przedstawiały tęż samą funkcyę, to jest, aby tożsamościowo

$$(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}y^{m-1})(a_0x^n+\ldots+a_ny^n)+(B_0x^{n-1}+\ldots$$
$$+B_{n-1}y^{n-1})(b_0x^m+\ldots+b_my^m)=0,$$

potrzeba, aby w tych dwu wyrażeniach spółczynniki przy oddzielnych potęgach zmiennych

$$x^{n+m-1},\quad x^{n+m-2}y,\quad x^{n+m-3}y^2,\ldots,\quad xy^{n+m-2},\quad y^{n+m-1}$$

były też same, czyli w tylko-co wypisanej równości spółczynniki przy tych potęgach były równe zeru, mianowicie [w razie $m < n$ (1)]:

$$\begin{cases} a_0A_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +b_0B_0 = 0, \\ a_1A_0+A_0a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad +b_1B_0+b_0B_1 = 0, \\ a_2A_0+a_1A_1+a_0A_2 \qquad\qquad +b_2B_0+b_1B_1+b_0B_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nA_0+a_{n-1}A_1+a_{n-2}A_2+\dots+a_{n-m+1}A_{m-1} \\ \qquad\qquad +b_mB_{n-m}+b_{m-1}B_{n-m+1}+\dots+b_1B_{n-1}=0, \\ \qquad a_nA_1+a_{n-1}A_2+\dots+a_{n-m+2}A_{m-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +b_mB_{n-m+1}+\dots+b_2B_{n-1}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad\qquad\qquad a_nA_{m-1} \qquad\qquad +b_mB_{n-1}=0. \end{cases}$$

Te więc $n+m$ związków wyrażają, że wartości dla stałych, przedtem dowolnych,

$$A_0,\ A_1, \dots,\ A_{m-1},\ B_0,\ B_1, \dots,\ B_{n-1}$$

mają być tak oznaczone, aby tym związkom zadosyć czyniły. Aby zaś wartości dla tych $n+m$ ilości mogły być istotnie tak dobrane, potrzeba, aby te związki (które tworzą układ $n+m$ równań jednorodnych i liniowych względem $n+m$ niewiadomych $A_0, \dots, A_{m-1}$, $B_0, \dots, B_{n-1}$) miały rozwiązanie inne niż: wartości zero dla wszystkich tych ilości. To zaś miejsce mieć może wtedy, kiedy wyznacznik tego układu $n+m$ równań jest zerem (76). Równość więc zeru wyznacznika tego

---

(1) W przypadku $m=n$ wszystkie wyrażenia prostszą przybierają postać.

układu równań jest warunkiem istnienia spólnego rozwiązania równań

$$\varphi(x,y)=0, \qquad \psi(x,y)=0;$$

ten zatem *wyznacznik* $(n+m)$*-ego stopnia*

$$\begin{vmatrix}
a_0 ,0 ,0 ,...,0 ,b_0 ,0 ,0 ,...,0,0,0,...,0 \\
a_1 ,a_0 ,0 ,...,0 ,b_1 ,b_0 ,0 ,...,0,0,0,...,0 \\
a_2 ,a_1 ,a_0 ,...,0 ,b_2 ,b_1 \; b_0, ...,0,0,0,...,0 \\
. . . , ... \\
a_{m-1},a_{m-2},a_{m-3},...,a_0 ,b_{m-1},b_{m-2},b_{m-3},...,b_0,0,0,...,0 \\
a_m ,a_{m-1},a_{m-2},...,a_1 ,b_m ,b_{m-1},b_{m-2},...,b_1,b_0,0,...,0 \\
a_{m+1},a_m ,a_{m-1},...,a_2 ,0 ,b_m ,b_{m-1},...,b_2,b_1,b_0,...,0 \\
. . . . \\
a_n ,a_{n-1},a_{n-2},...,a_{n-m+1},0 ,0 ,0 ,...,b_m,b_{m-1},...,b_1 \\
0 ,a_n ,a_{n-1},...,a_{n-m+2},0 ,0 ,0 ,...,0 ,b_m ,...,b_2 \\
. . . . \\
0 ,0 ,0 ,...,a_n ,0 ,0 ,0 ,...,0 ,0 ,...,b_m
\end{vmatrix}$$

jest rugownikiem dwu danych form (1)

$$\varphi(x,y), \qquad \psi(x,y).$$

---

(1) Zasadę tej metody wyznaczenia rugownika podali Euler (*Mémoirs de l'ac. de Berlin*, 1764 r., str. 96) i Bézout (*Histoire de l'ac. de Paris*, 1764 r., str. 298).

Np. 1°) Znajdziemy rugownik dwu form kwadratowych podwójnych

$$\begin{cases} a_0x^2+a_1xy+a_2y^2, \\ b_0x^2+b_1xy+b_2y^2; \end{cases}$$

$$(A_0x+A_1y)(a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)+(B_0x+B_1x)(b_0x^2+b_1xy+$$
$$+b_2y^2)=0,$$

cztery ilości A_0, A_1, B_0, B_1 zadosyć czynić muszą czterem warunkom

$$\begin{cases} a_0A_0 \qquad\quad +b_0B_0 \qquad\quad =0, \\ a_1A_0+a_0A_1+b_1B_0+b_0B_1=0, \\ a_2A_0+a_1A_1+b_2B_0+b_1B_1=0, \\ \qquad a_2A_0 \qquad\quad +b_2B_1=0; \end{cases}$$

wyznacznik więc czwartego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_0, & 0\,, & b_0, & 0 \\ a_1, & a_0, & b_1, & b_0 \\ a_2, & a_1, & b_2, & b_1 \\ 0\,, & a_2, & 0\,, & b_2 \end{vmatrix} .$$

jest rugownikiem danych form.

2°) Aby wyznaczyć rugownik dwu form podwójnych, jednej czwartego, drugiej zaś trzeciego stopnia

$$\begin{cases} a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4 \\ b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+b_3y^3 \end{cases}$$

utworzymy

$$(A_0x^2+A_1xy+A_2y^2)(a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4)+$$
$$+(B_0x^3+B_1x^2y+B_2xy^2+B_3y^3)(b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+b_3y^3)=0,$$

co daje

$$\begin{cases}
a_0A_0 + b_0B_0 = 0, \\
a_1A_0 + a_0A_1 + b_1B_0 + b_0B_1 = 0, \\
a_2A_0 + a_1A_1 + a_0A_2 + b_2B_0 + b_1B_1 + b_0B_2 = 0, \\
a_3A_0 + a_2A_1 + a_1A_2 + b_3B_0 + b_2B_1 + b_1B_2 + b_0B_3 = 0, \\
a_4A_0 + a_3A_1 + a_2A_2 + b_3B_1 + b_2B_2 + b_1B_3 = 0. \\
a_4A_1 + a_3A_2 + b_3B_2 + b_2B_3 = 0, \\
a_4A_2 + b_3B_3 = 0;
\end{cases}$$

więc wyznacznik $4 + 3 = 7$-ego stopnia

$$\begin{vmatrix}
a_0, & 0, & 0, & b_0, & 0, & 0, & 0 \\
a_1, & a_0, & 0, & b_1, & b_0, & 0, & 0 \\
a_2, & a_1, & a_0, & b_2, & b_1, & b_0, & 0 \\
a_3, & a_2, & a_1, & b_3, & b_2, & b_1, & b_0 \\
a_4, & a_3, & a_2, & 0, & b_3, & b_2, & b_1 \\
0, & a_4, & a_3, & 0, & 0, & b_3, & b_2 \\
0, & 0, & a_4, & 0, & 0, & 0, & b_3
\end{vmatrix}$$

jest rugownikiem form danych.

2. Zamiast mnożyć formy $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ przez funkcye dowolne odpowiednio $(m-1)$-ego i $(n-1)$-ego stopni, możemy przyjąć inny punkt wyjścia [1], z którego dojdziemy również do tożsamościowej równości zeru summy dwu wyrażeń jednorodnych $(n+m-1)$-ego stopnia.

---

[1] Faa de Bruno, *Théorie générale de l'élimination* (Paryż, 1859, str. 36).

Jeśli równania $\varphi(x,y)=0$ i $\psi(x,y)=0$ mają spólne rozwiązanie, np. x', y', to dane formy mogą być tak przedstawione

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(x,y)&=(xy'-x'y)(p_0x^{n-1}+p_1x^{n-2}y+\ldots\\&\qquad+p_{n-2}xy^{n-2}+p_{n-1}y^{n-1}),\\\psi(x,y)&=-(xy'-x'y)(r_0x^{m-1}+r_1x^{m-2}y+\ldots\\&\qquad+r_{m-2}xy^{m-2}+r_{m-1}y^{m-1});\end{aligned}\right.$$

dzieląc te dwie równości przez siebie, otrzymujemy tożsamościowo

$$(r_0x^{m-1}+\ldots+r_{m-1}y^{m-1})(a_0x^n+\ldots+a_ny^n)+(p_0x^{n-1}+\ldots$$
$$+p_{n-1}y^{n-1})(b_0x^m+\ldots+b_my^m)=0,$$

co nam daje, jako warunki, $n+m$ równań jednorodnych liniowych względem $n+m$ ilości $p_0,\ldots, p_{n-1}, r_0,\ldots r_{m-1}$, mianowicie

$$\left\{\begin{array}{llr}a_0r_0 & +b_0p_0 & =0,\\ a_1r_0+a_0r_1 & +b_1p_0+b_0p_1 & =0,\\ a_2r_0+a_1r_1+a_0r_2 & +b_2p_0+b_1p_1+b_0p_2 & =0,\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \qquad a_nr_{m-1}+ & \qquad b_mp_{n-1} & =0,\end{array}\right.$$

a to nas prowadzi, jak poprzednio, do otrzymanej postaci rugownika.

3. Takąż samą postać rugownika dwu form $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ otrzymać możemy, postępując nieco odrębną [1] metodą, dogodną w różnych zastosowaniach.

---

[1]) Sylvester (*Philosophical Magazine*, 1840, N. 101).

Pomnóżmy równanie n-ego stopnia $\varphi(x,y)=0$ kolejno przez każdą z m ilości

$$x^{m-1},\ x^{m-2}y,\ x^{m-3}y^2,\ldots,\ xy^{m-2},\ y^{m-1},$$

zaś równanie m-ego stopnia $\psi(x,y)=0$ przez każdą z n ilości

$$x^{n-1},\ x^{n-2}y,\ x^{n-3}y^2,\ldots,\ xy^{n-2},\ y^{n-1};$$

otrzymamy w ten sposób $n+m$ równań jednorodnych $(n+m-1)$-ego stopnia

$$\begin{cases} x^{m-1}\varphi(x,y)=0, \\ x^{m-2}y\varphi(x,y)=0, \\ \cdots\cdots\cdot, \\ y^{m-1}\varphi(x,y)=0, \\ x^{n-1}\psi(x,y)=0, \\ x^{n-2}y\psi(x,y)=0, \\ \cdots\cdots\cdot, \\ y^{n-1}\psi(x,y)=0. \end{cases}$$

Istnienie spólnego rozwiązania równań

$$\varphi(x,y)=0,\quad \psi(x,y)=0,$$

prowadzi za sobą istnienie spólnego rozwiązania tych $n+m$ równań. W te równania wchodzą ilości

$$x^{n+m-1},\ x^{n+m-2}y,\ x^{n+m-3}y^2,\ldots,\ xy^{n+m-2},\ y^{n+m-1};$$

jeśli te ilości przyjmiemy za $n+m$ nowych zmiennych (nie zważając na ich wzajemny związek), to te równania przedstawiają układ $n+m$ równań jednorodnych i liniowych względem tych $n+m$ nowych zmiennych, co ujawnimy, pisząc je tak:

$$\left\{\begin{array}{rr}
a_0(x^{n+m-1})+a_1(x^{n-m-2}y)+\ldots+a_n(x^{m-1}y^n) & =0, \\
a_0(x^{n-m-2}y)+\ldots+a_{n-1}(x^{m-1}y^n)+a(x^{m-2}y^{n-1}) & =0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
a_0(x^ny^{m-1})+\ldots+a_n(y^{n+m-1}) & =0, \\
b_0(x^{n+m-1})+b_1(x^{n+m-2}y)+\ldots+b_m(x^{n-1}y^m) & =0, \\
b_0(x^{n+m-2}y)+\ldots+b_{m-1}(x^{n-1}y^m)+b_m(x^{n-2}y^{m+1}) & =0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
b_0(x^my^{n-1})+\ldots+b_m(y^{n+m-1}) & =0.
\end{array}\right.$$

Te równania, jakeśmy powiedzieli, mają mieć spólne rozwiązanie: wyznacznik układu tych równań jest dlatego równy zeru. Wyznacznik więc

$$\begin{vmatrix}
a_0, & a_1, \ldots, & a_{m-1}, & a_m & , a_{m+1}, \ldots, & a_{n-1}, & a_n & , 0 & , \ldots, 0 \\
0, & a_0, \ldots, & a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_m & , \ldots, a_{n-2}, & a_{n-1} & , a_n & , \ldots, 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, \ldots, & a_0 & , a_1 & , a_2 & , \ldots, a_{n-m}, & a_{n-m+1}, & a_{n-m+2}, & \ldots, a_n \\
b_0, & b_1, \ldots, & b_{m-1}, & b_m & , 0 & , \ldots, 0 & , 0 & , 0 & , \ldots, 0 \\
0, & b_0, \ldots, & b_{m-2}, & b_{m-1}, & b_m & , \ldots, 0 & , 0 & , 0 & , \ldots, 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, \ldots, & 0 & , 0 & , 0 & , \ldots, b_0 & , b_1 & , b_2 & , \ldots, b_m
\end{vmatrix}$$

jest rugownikiem danych form.

Ta metoda otrzymania układu równań, którego wyznacznik jest rugownikiem danych form, jako rozprzęgająca związki między potęgami zmiennych x i y i traktująca ilości

$$x^{n+m-1},\quad x^{n+m-2}y,\quad x^{n+m-3}y^2,\ldots,\quad y^{n+m-1}$$

jak gdyby odrębne zmienne niezależne, nazywa się *rozprzęgającą* [dialytical ([1])].

Np. 1°) [ustęp 1, 1°]

$$\begin{cases} a_0x^2+a_1xy+a_2y^2, \\ b_0x^2+b_1xy+b_2y^2; \end{cases}$$

tu tak pierwszą formę, jak i drugą wypadnie mnożyć przez x i przez y:

$$\begin{cases} a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2 \qquad\qquad =0, \\ \qquad\quad a_0x^2y+a_1xy^2+a_2y^3=0, \\ b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2 \qquad\qquad =0, \\ \qquad\quad b_0x^2y+b_1xy^2+b_2y^3=0; \end{cases}$$

rugownikiem więc jest wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & 0 \\ 0\,, & a_0, & a_1, & a_2 \\ b_0, & b_1, & b_2, & 0 \\ 0\,, & b_0, & b_1, & b_2 \end{vmatrix},$$

który tem tylko różni się od otrzymanego w ustępie 1-ym, że wiersze jednego są kolumnami drugiego i odwrotnie (§ 18).

([1]) Sylvester.

2°) Rugownik dwu form,

$$\begin{cases} ax^5 + bx^4y + cx^2y^3 + dy^5, \\ fx^2 + gxy + hy^2 \end{cases}$$

$(n=5,\ m=2)$, wyznaczymy za pomocą metody rozprzęgającej w następujący sposób:

$$\begin{cases} ax^6 + bx^5y + cx^3y^3 + dxy^5 = 0, \\ ax^5y + bx^4y^2 + cx^2y^4 + dy^6 = 0, \\ fx^6 + gx^5y + hx^4y^2 = 0, \\ fx^5y + gx^4y^2 + hx^3y^3 = 0, \\ fx^4y^3 + gx^3y^3 + hx^2y^4 = 0, \\ fx^3y^3 + gx^2y^4 + hxy^5 = 0, \\ fx^2y^4 + gxy^5 + hy^6 = 0. \end{cases}$$

Wyznacznik tego układu $5+2=7$-u równań

$$\begin{vmatrix} a, & b, & 0, & c, & 0, & d, & 0 \\ 0, & a, & b, & 0, & c, & 0, & d \\ f, & g, & h, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & f, & g, & h, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & f, & g, & h, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & f, & g, & h, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & f, & g, & h \end{vmatrix}$$

jest rugownikiem dwu form danych.

Ta metoda i metoda ustępu poprzedzającego mają tę samą zasadę, co metoda ustępu 1-go, doprowadzają do tejże samej, co ona, postaci rugownika, a tylko odróżniają się odmiennem postępowaniem przy tworzeniu układu równań.

4. Opartą na całkiem innej zasadzie, niż wyłożona w ustępie pierwszym, choć jej spółczesną [1], metodą utworzenia układu równań, którego wyznacznik jest rugownikiem form $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$, jest następująca.

Weźmy naprzód pod uwagę przypadek $m=n$. Aby znaleść rugownik dwu form n-ego stopnia

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n, \\ \psi_1(x,y)=b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\ldots+b_ny^n, \end{cases}$$

należy, jak wiemy, odszukać warunku istnienia spólnego rozwiązania równań

$$\varphi(x,\,y)=0,\quad \psi_1(x,\,y)=0.$$

Jeśli te równania mają spólne rozwiązanie, to mają je także n równań

$$\begin{cases} a_0\psi_1(x,y)-b_0\varphi(x,y)=0, \\ (a_0x+a_1y)\psi_1(x,y)-(b_0x+b_1y)\varphi(x,y)=0, \\ (a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)\psi_1(x,y)-(b_0x^2+b_1xy+b_2y^2)\varphi(x,y)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}y+\ldots+a_{n-1}y^{n-1})\psi_1(x,y)- \\ \qquad\qquad (b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}y+\ldots+b_{n-1}y^{n-1})\varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

---

[1] Bézout, l. c., str. 317.

W któremkolwiek k-em z tych równań,

$$(a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}y+\ldots+a_{k-2}xy^{k-2}+a_{k-1}y^{k-1})(b_0x^n+b_1x^{n-1}y+$$
$$\ldots+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n)-(b_0x^{k-1}+b_1x^{k-2}y+\ldots+b_{k-2}xy^{k-2}+$$
$$b_{k-1}y^{k-1})(a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n)=0,$$

po wykonaniu wskazanych mnożeń, wyrazy, w które wchodzi

$$x^{n+k-1},\ x^{n+k-2}y,\ldots,\ x^{n+1}y^{k-2},\ x^ny^{k-1},$$

znikają, pozostałe zaś mają spólny czynnik y^k, przez który ono może być podzielonem. Skutkiem tego to równanie sprowadza się do postaci

$$\lambda_{k-1,0}x^{n-1}+\lambda_{k-1,1}x^{n-2}y+\ldots+\lambda_{k-1,n-2}xy^{n-2}+\lambda_{k-1,n-1}y^{n-1}=0,$$

gdzie wogóle, spółczynnik przy $x^{n-l-1}y^l$ jest

$$\lambda_{k-1,l}=(a_0b_{k+l}-b_0a_{k+l})+(a_1b_{k-1+l}-b_1a_{k-1+l})+(a_2b_{k-2+l}-$$
$$-b_2a_{k-2+l})+\ldots+(a_{k-2}b_{2+l}-b_{k-2}a_{2+l})+(a_{k-1}b_{1+l}-b_{k-1}a_{1+l}),$$

które to wyrażenie, gdy umówimy się oznaczać (§ 15) każdy wyznacznik drugiego stopnia

$$a_pb_q-b_pa_q=\begin{vmatrix} a_p, & a_q \\ b_p, & b_q \end{vmatrix}=(a_pb_q),$$

możemy tak przedstawić (¹):

$$\lambda_{k-1,l}=(a_0b_{k+l})+(a_1b_{k-1+l})+(a_2b_{k-2+l})+\ldots$$
$$+(a_{k-2}b_{2+l})+(a_{k-1}b_{1+l}).$$

(¹) Jeśli $k+l>n$ i jest $k+l=n+f$, to, z powodu, że $b_{n+1}=$ $=a_{n+1}=b_{n+2}=\ldots=0$, wyrażenie spółczynnika $\lambda_{k-1,l}$ zacznie się dopiero od wyrazu (a_fb_n).

Wypisane więc wyżej n równań, po wykonaniu redukcyi i po podzieleniu przez najwyższą spólną potęgę ilości y, stają się n równaniami:

$$\begin{cases} \lambda_{0,0}x^{n-1} + \lambda_{0,1}x^{n-2}y + \lambda_{0,2}x^{n-3}y^2 + \ldots + \lambda_{0,n-1}y^{n-1} = 0, \\ \lambda_{1,0}x^{n-1} + \lambda_{1,1}x^{n-2}y + \lambda_{1,2}x^{n-3}y^2 + \ldots + \lambda_{1,n-1}y^{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{n-1,0}x^{n-1} + \lambda_{n-1,1}x^{n-2}y + \lambda_{n-1,2}x^{n-3}y^2 + \ldots + \lambda_{n-1,n-1}y^{n-1} = 0. \end{cases}$$

A gdy te równania mają mieć spólne rozwiązanie, to wyznacznik tego układu n równań jednorodnych i liniowych względem n niewiadomych

$$x^{n-1},\ x^{n-2}y,\ x^{n-3}y^2, \ldots,\ y^{n-1}$$

jest zerem. Że zaś to stanowi warunek, aby równania

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \psi_1(x,y) = 0$$

miały spólne rozwiązanie,— więc ten *wyznacznik* n-ego *stopnia*

$$\begin{vmatrix} \lambda_{0,0}, & \lambda_{0,1} & ,\ldots, & \lambda_{0,n-1} \\ \lambda_{1,0}, & \lambda_{1,1} & ,\ldots, & \lambda_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n-1,0}, & \lambda_{n-1,1}, & \ldots, & \lambda_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

przy

$$\lambda_{r,s} = (a_0b_{r+s+1}) + (a_1b_{r+s}) + \ldots + (a_rb_{s+1}) = \lambda_{s,r} \text{ [1]},$$

$$\lambda_{r,r} = (a_0b_{2r+1}) + (a_1b_{2r}) + \ldots + (a_rb_{r+1}),$$

---

[1] Gdyż wyrażenie dla $\lambda_{s,r}$ jest

$$\lambda_{s,r} = (a_0b_{r+s+1}) + (a_1b_{r+s}) + \ldots + (a_sb_{r+1}).$$

jest rugownikiem dwu form n-*ego stopnia*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n, \\ \psi_1(x,y) = b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \ldots + b_ny^n. \end{cases}$$

Jeśli zaś dane formy

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n, \\ \psi(x,y) = b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_my^m \end{cases}$$

Jeśli liczby s i r są różne od siebie i np. $s > r$, to

$$\lambda_{s,r} = (a_0b_{r+s+1}) + \ldots + (a_rb_{s+1}) + (a_{r+1}b_s) + \ldots + (a_sb_{r+1}),$$

$$\lambda_{s,r} = \lambda_{r,s} + (a_{r+1}b_s) + (a_{r+2}b_{s-1}) + \ldots + (a_{s-1}b_{r+2}) + (a_sb_{r+1}); \qquad (\alpha)$$

lecz każda para wyrazów

$$(a_{r+t}b_{s-t+1}) + (a_{s-t+1}b_{r+t}) = [a_{r+t}b_{s-t+1} - a_{s-t+1}b_{r+t}] +$$
$$+ [a_{s-t+1}b_{r+t} - a_{r+t}b_{s-t+1}] = 0,$$

więc

$$\lambda_{s,r} = \lambda_{r,s}.$$

Jeśli $s = r-1$, to ostatni wyraz wyrażenia dla $\lambda_{r,s} = \lambda_{r,r-1}$, t. j.

$$(a_rb_{s+1}) = (a_rb_r) = \begin{vmatrix} a_r, & a_r \\ b_s, & b_s \end{vmatrix} = 0,$$

(§ 20), skutkiem czego

$$\lambda_{r,r-1} = (a_0b_{2r}) + (a_1b_{2r-1}) + \ldots + (a_{r-1}b_{r+1}).$$

W razie gdy w (α) różnica $\lambda_{s,r} - \lambda_{r,s}$ przedstawia nieparzystą liczbę wyrazów (wyznaczników drugiego stopnia), co będzie wtedy, gdy $s - r = 2h + 1$, to również wyraz $(h+1)$-szy, nie weszły do żadnej pary wzajem się znoszących wyrazów, jest

$$(a_{r+h+1}b_{s-h}) = (a_{r+h+1}b_{r+h+1}) = 0.$$

są różnego stopnia i np. $m < n$, to utworzymy naprzód m równań

$$\begin{cases} a_0 x^{n-m}\psi(x,y) - b_0\varphi(x,y) = 0, \\ (a_0 x + a_1 y) x^{n-m}\psi(x,y) - (b_0 x + b_1 y)\varphi(x,y) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} y + \dots + a_{m-1} y^{m-1}) x^{n-m}\psi(x,y) - \\ \qquad - (b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} y + \dots + b_{m-1} y^{m-1})\varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

W któremkolwiek, i-em, z tych równań wyrazy, zawierające

$$x^{n+i-1},\ x^{n+i-2}y, \dots,\ x^{n+1}y^{i-2},\ x^n y^{i-1},$$

znikają, pozostałe zaś dzielą się przez y^i. Skutkiem tego ono sprowadzonem być może do postaci

$$\lambda_{i-1,0} x^{n-1} + \lambda_{i-1,1} x^{n-2} y + \dots + \lambda_{i-1,n-2} x y^{n-2} + \lambda_{i-1,n-1} y^{n-1} = 0,$$

gdzie, przy $i - 1 + l < m$, jest

$$\lambda_{i-1,l} = (a_0 b_{i+l}) + (a_1 b_{i+l-1}) + \dots + (a_{i-1} b_{l+1});$$

przy $i - 1 + l = m$, z powodu, że $b_{m+1} = 0$, jest

$$\lambda_{i-1,l} = \lambda_{i-1,m-i+1} = -b_0 a_{m+1} + (a_1 b_m) + (a_2 b_{m-1}) + \dots$$
$$+ (a_{i-1} b_{m-i+2});$$

w razie zaś $i - 1 + l > m$, przyjmując $i - 1 + l = m + j$, z powodu, że

$$b_{m+j+1} = b_{m+j} = b_{m+j-1} = \dots = b_{m+2} = b_{m+1} = 0,$$

mamy

$$\lambda_{i-1,l} = \lambda_{i-1,m+j+1-i} = -b_0 a_{m+j+1} - b_1 a_{m+j} - \dots$$
$$- b_j a_{m+1} + (a_{j+1} b_m) + (a_{j+2} b_{m-1}) + \dots$$
$$+ (a_{i-2} b_{m-i+3}) + (a_{i-1} b_{m-i+2}).$$

Jeśli do tych m równań dołączymy $n-m$ równań, powstałych z równania $\psi(x,y)=0$ w skutek pomnożenia go kolejno przez

$$x^{n-m-1},\quad x^{n-m-2}y,\quad x^{n-m-3}y^2,\ldots,\ y^{n-m-1},$$

to mieć będziemy razem n równań

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda_{0,0}x^{n-1}+\lambda_{0,1}x^{n-2}y+\ldots+\lambda_{0,n-1}y^{n-1}=0,\\
\lambda_{1,0}x^{n-1}+\lambda_{1,1}x^{n-2}y+\ldots+\lambda_{1,n-1}y^{n-1}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_{m-1,0}x^{n-1}+\lambda_{m-1,1}x^{n-2}y+\ldots+\lambda_{m-1,n-1}y^{n-1}=0,\\
x^{n-m-1}\psi(x,y)=0,\\
\qquad x^{n-m-2}y\psi(x,y)=0,\\
\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\qquad\qquad y^{n-m-1}\psi(x,y)=0,
\end{array}\right.$$

ednorodnych i liniowych względem n niewiadomych

$$x^{n-1},\ x^{n-2}y,\ldots,\ y^{n-1}.$$

Wyznacznik tego układu równań, to jest, *przy określonem wyżéj znaczeniu ilości* $\lambda_{i-1,k}$, *wyznacznik* n-*ego stopnia*

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
\lambda_{0,0}, & \lambda_{0,1}, & \lambda_{0,2}, \ldots, & \lambda_{0,m}, & \lambda_{0,m+1}, & \ldots, & \lambda_{0,n-1}\\
\lambda_{1,0}, & \lambda_{1,1}, & \lambda_{1,2}, \ldots, & \lambda_{1,m}, & \lambda_{1,m+1}, & \ldots, & \lambda_{1,n-1}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\lambda_{m-1,0}, & \lambda_{m-1,1}, & \lambda_{m-1,2}, \ldots, & \lambda_{m-1,m}, & \lambda_{m-1,m+1}, & \ldots, & \lambda_{m-1,n-1}\\
b_0, & b_1, & b_2, \ldots, & b_m, & 0 & \ldots, & 0\\
0, & b_0, & b_1, \ldots, & b_{m-1}, & b_m & \ldots, & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0, & 0, & 0, \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & b_m
\end{array}\right|,$$

jest rugownikiem dwu [1] *form* (n > m)

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n, \\ \psi(x,y) = b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_my^m. \end{cases}$$

Np. 1°) Dla odnalezienia rugownika dwu form trzeciego stopnia

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3, \\ \psi_1(x,y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3, \end{cases}$$

utworzymy trzy równania

$$\begin{cases} \dfrac{a_0\psi_1(x,y) - b_0\varphi(x,y)}{y} = 0, \\ \dfrac{(a_0x + a_1y)\psi_1(x,y) - (b_0x + b_1y)\varphi(x,y)}{y^2} = 0, \\ \dfrac{(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)\psi_1(x,y) - (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)\varphi(x,y)}{y^3} = 0, \end{cases}$$

---

[1] Z otrzymanego poprzednio (ustępy 1-3) wyznacznika wogóle $(n+m)$-ego stopnia, przedstawiającego rugownik dwu form podwójnych stopnia n-ego i m-ego, można wprost, przez odpowiednie przekształcenie, dojść do wyrażenia tego rugownika w postaci otrzymanego tu wyznacznika stopnia, określonego przez wyższy ze stopni danych form (porównaj Baltzer, *Th. u. Anw. d. Det.*, w czwartem wydaniu, strona 111 — 114).

Jeśli wyznaczniki, otrzymane w ustępach 1-ym i 3-im, nazwiemy E, odpowiednie zaś wyznaczniki tego (4-ego) ustępu nazwiemy B, to przy $m < n$,

$$E = (-1)^{\frac{(2n-m-1)m}{2}} B,$$

co, w razie $m = n$, przechodzi na

$$E = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} B$$

czyli

$$\begin{cases} (a_0b_1)x^2 + (a_0b_2)xy & + (a_0b_3)y^2 = 0, \\ (a_0b_2)x^2 + [(a_0b_3) + (a_1b_2)]xy + (a_1b_3)y^2 = 0, \\ (a_0b_3)x^2 & + (a_1b_3)xy + (a_2b_3)y^2 = 0; \end{cases}$$

wyznacznik więc trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & , (a_0b_3) \\ (a_0b_2), & (a_0b_3) + (a_1b_2), & (a_1b_3) \\ (a_0b_3), & (a_1b_3), & (a_2b_3) \end{vmatrix}$$

przedstawia rugownik danych form.

2°) Rugownikiem dwu form piątego stopnia

$$\begin{cases} a_0x^5 + a_1x^4y + a_2x^3y^2 + a_3x^2y^3 + a_4xy^4 + a_5y^5, \\ b_0x^5 + b_1x^4y + b_2x^3y^2 + b_3x^2y^3 + b_4xy^4 + b_5y^5, \end{cases}$$

jest wyznacznik piątego stopnia

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & , (a_0b_3) & , (a_0b_4) & , (a_0b_5) \\ (a_0b_2), & (a_0b_3)+(a_1b_2), & (a_0b_4)+(a_1b_3) & , (a_0b_5)+(a_1b_4) & , (a_1b_5) \\ (a_0b_3), & (a_0b_4)+(a_1b_3), & (a_0b_5)+(a_1b_4)+(a_2b_3) & , (a_1b_5)+(a_2b_4) & , (a_2b_5) \\ (a_0b_4), & (a_0b_5)+(a_1b_4), & (a_1b_5)+(a_2b_4) & , (a_2b_5)+(a_3b_4) & , (a_3b_5) \\ (a_0b_5), & +(a_1b_5), & +(a_2b_5) & , (a_3b_5) & , (a_4b_5) \end{vmatrix}.$$

3°) Jeśli dane są dwie formy podwójne, jedna czwartego, druga zaś drugiego stopnia:

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4, \\ \psi(x,y) = b_0x_2 + b_1xy + b_2y^2, \end{cases}$$

to dla wyznaczenia ich rugownika utworzymy równania

$$\begin{cases} \dfrac{a_0x^2\psi(x,y)-b_0\psi(x,y)}{y}=0, \\ \dfrac{(a_0x+a_1y)x^2\psi(x,y)-(b_0x+b_1y)\varphi(x,y)}{y^2}=0, \\ x\psi(x,y)=0, \\ y\psi(x,y)=0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} (a_0b_1)x^3+(a_0b_2)x^2y \qquad -b_0a_3xy^2 \qquad -b_0a_4y^3=0, \\ (a_0b_2)x^3+[-b_0a_3+(a_1b_2)]x^2y+[-b_0a_4-b_1a_3]xy^2-b_1a_4y^3=0, \\ b_0x^3 \qquad +b_1x^2y \qquad +b_2xy^2 \qquad =0, \\ \qquad b_0x^2y \qquad +b_1xy^2 \qquad +b_2y^3=0; \end{cases}$$

rugownik więc ich przedstawi wyznacznik czwartego stopnia

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & ,-b_0a_3 & ,-b_0a_4 \\ (a_0b_2), & -b_0a_3+(a_1b_2), & -b_0a_4-b_1a_3, & -b_1a_4 \\ b_0\ , & b_1 & , \quad b_2 & , \quad 0 \\ 0\ , & b_0 & , \quad b_1 & , \quad b_2 \end{vmatrix}.$$

5. Jeśli dane formy są jednakowego stopnia,

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n, \\ \psi_1(x,y)=b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\ldots+b_ny_n, \end{cases}$$

to do otrzymanej w poprzedzającym ustępie postaci ich rugownika dojść możemy, opierając się na odmiennej, od powyżej użytej, podstawie rozumowania [1].

Jeśli równania

$$\varphi(x,y)=0,\quad \psi_1(x,y)=0$$

mają spólne rozwiązanie, to równości

$$\varphi(x,y)+\lambda\psi_1(x,y)=0$$

staje się zadość przy jakiejkolwiek wartości dla λ. Jeśli np. x_1 i y_1, są dowolnie wzięte wartości zmiennych x i y, to możemy ilości λ nadać choćby wartość

$$\lambda=-\frac{\varphi(x_1,\ y_1)}{\psi_1(x_1,y_1)},$$

co podstawiając, mamy tożsamościowo

$$\varphi(x,\ y)\psi_1(x_1,\ y_1)-\varphi(x_1,\ y_1)\psi(x,\ y)=0$$

(przy jakichkolwiek wartościach x_1 i y_1). Pierwsza strona tej równości jest widocznie podzielną przez

$$xy_1-x_1y;$$

po uskutecznieniu tego dzielenia, zważywszy, że ta równość ma miejsce przy jakichkolwiek wartościach x_1 i y_1, z porównania do zera spółczynników przy

$$x_1^{n-1},\ x_1^{n-2}y_1,\ldots,\ x_1y_1^{n-2},\ y_1^{n-1},$$

---

(1) Metoda tego ustępu, w przypadku form jednakowego stopnia, jest pomysłu CAYLEY'go. Wyłożył ją naprzód SYLVESTER, *On a Theory of the Syzygetic relations of two rational integral functions...* (*Philosophical Transactions*, t. CXLIII, str. 516), następnie sam CAYLEY, *Note sur la méthode d'élimination de Bézout* (CRELLE, *Journal*, t. LIII, str. 366).

otrzymamy n równań liniowych jednorodnych względem n ilości

$$x^{n-1},\ x^{n-2}y, \ldots,\ xy^{n-2},\ y^{n-1}.$$

Wyznacznik układu tych równań przedstawi nam rugownik danych form $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$. Np.

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4, \\ \psi_1(x,y) = b_0x^4 + b_1x^3y + b_2x^2y^2 + b_3xy^3 + b_4y^4; \end{array}\right.$$

$$\frac{\varphi(x, y)\psi_1(x_1, y_1) - \varphi(x_1, y_1)\psi_1(x, y)}{xy_1 - x_1 y} =$$

$$= \{(a_0b_1)x^3 + (a_0b_2)x^2y + (a_0b_3)xy^2 + (a_0b_4)y^3\}x_1^3$$

$$+ \{(a_0b_2)x^3 + [(a_0b_3) + (a_1b_2)]x^2y + [(a_0b_4) + (a_1b_3)]xy^2 + (a_1b_4)y^3\}x_1^2y_1$$

$$+ \{(a_0b_3)x^3 + [(a_0b_4) + (a_1b_3)]x^2y + [(a_1b_4) + (a_2b_3)]xy^2 + (a_2b_4)y^3\}x_1y_1^2$$

$$+ \{(a_0b_4)x^3 + (a_1b_4)x^2y + (a_2b_4)xy^2 + (a_3b_4)y^3\}y_1^3 = 0;$$

$$\left\{\begin{array}{llll} (a_0b_1)x_3 + (a_0b_2)x^2y & + (a_0b_3)xy^2 & & + (a_0b_4)y^3 = 0, \\ (a_0b_2)x^3 + [(a_0b_3) + (a_1b_2)]x^2y & + [(a_0b_4) + (a_1b_3)]xy^2 & & + (a_1b_4)y^3 = 0, \\ (a_0b_3)x^3 + [(a_0b_4) + (a_1b_3)]x^2y & + [(a_1b_4) + (a_2b_3)]xy^2 & & + (a_2b_4)y^3 = 0, \\ (a_0b_4)x^3 + (a_1b_4)x^2y & + (a_2b_4)xy^2 & & + (a_3b_4)y^3 = 0; \end{array}\right.$$

wyznacznik więc

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & , (a_0b_3) & , (a_0b_4) \\ (a_0b_2), & (a_0b_3) + (a_1b_2), & (a_0b_4) + (a_1b_3) & , (a_1b_4) \\ (a_0b_3), & (a_0b_4) + (a_1b_3), & (a_1b_4) + (a_2b_3), & (a_2b_4) \\ (a_0b_4), & (a_1b_4), & (a_2b_4), & (a_3b_4) \end{vmatrix}$$

przedstawia rugownik danych form w takiej samej postaci, jakąbyśmy otrzymali, postępując według metody, w poprzedzającym ustępie wyłożonej.

Co się zaś tyczy przypadku, gdy dane dwie formy nie są jednakowego stopnia

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n, \\ \psi(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \dots + b_m y^m, \end{cases}$$

$(m < n)$, to sprowadzić go możemy do poprzedzającego, uważając zamiast tych form różnego stopnia dwie formy jednakowego stopnia:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n, \\ x^{n-m}\psi(x, y) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_m x^{n-m} y^m. \end{cases}$$

Np.

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3, \\ \psi(x, y) = b_0 x^2 + b_1 x y + b_2 y^2; \end{cases}$$

$$\frac{\varphi(x, y) x_1 \psi(x_1, y_1) - \varphi(x_1 y_1) x \psi(x, y)}{x y_1 - x_1 y} =$$

$$\begin{aligned} &= \{ (a_0 b_1) x^2 + (a_0 b_2) x y - b_0 a_3 y^2 \} x_1^2 \\ &+ \{ (a_0 b_2) x^2 + [- b_0 a_3 + (a_1 b_2)] x y - a_3 b_1 y^2 \} x_1 y_1 \\ &+ \{ - b_0 a_3 x^2 - b_1 a_3 x y - b_2 a_3 y^2 \} y_1^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a_0 b_1) x^2 + (a_0 b_2) x y - b_0 a_3 y^2 = 0, \\ (a_0 b_2) x^2 + [- b_0 a_3 + (a_1 b_2)] x y - b_1 a_3 y^2 = 0, \\ - b_0 a_3 x^2 - b_1 a_3 x y - b_2 a_3 y^2 = 0, \end{cases}$$

lub, po skróceniu ostatniego równania przez $-a_3$,

$$\begin{cases} (a_0b_1)x^2 + (a_0b_2)xy & -b_0a_3y^2 = 0, \\ (a_0b_2)x^2 + [-b_0a_3 + (a_1b_2)]xy - b_1a_3y^2 = 0, \\ b_0x^2 \qquad + b_1xy \qquad + \quad b_2y^2 = 0; \end{cases}$$

wyznacznik więc [1]

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & , & -b_0a_3 \\ (a_0b_2), & -b_0a_3 + (a_1b_2), & & -b_1a_3 \\ b_0, & b_1 & , & b_2 \end{vmatrix}$$

przedstawia rugownik danych form w takiej samej postaci, jaką byśmy otrzymali, stosując metodę ustępu poprzedzającego.

6. Istnieje jeszcze inna metoda [2] otrzymania rugownika dwu form podwójnych w postaci takiej samej, jak w ustępach 4-ym i 5-ym.

« Niechaj będą

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

» dwa równania algebraiczne (jednorodne), pierwsze n-ego,

---

(1) Wyznacznik ten, jako rezultat odmiennego nieco od CAYLEY'owskiego postępowania JOUBERT'a, błędnie, gdyż bez składnika $-b_0a_3$ w drugim elemencie głównym, podaje DOSTOR, l. c., str. 129.

(2) CAUCHY, *Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques*. (CAUCHY. *Exercices d'analyse et de phys. math.*, t. I., 1840, str. 393). Podaję ją prawie słowami CAUCHY'ego, wprowadzając tylko jednorodność wyrażeń i poprawiając pewną nieścisłość w znakowaniu (przy x^l nie mogą być spółczynniki a_l i b_l).

» drugie zaś m-ego stopnia, przy $m =$ lub $< n$. Można ogólnie
» przyjąć

$$\varphi(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n,$$

$$\psi(x, y) = b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n,$$

» gdzie jeden lub więcej ze spółczynników

$$b_0, b_1, \ldots$$

» sprowadzają się do zera, w przypadku $m < n$ [1]. Równanie
» ostateczne, które wypadnie z wyrugowania zmiennych z for-
» muł (1), wyrazi jedynie warunek, któremu zadosyć czynić
» muszą spółczynniki

$$a_0, a_1, \ldots, a_n; \; b_0, b_1, \ldots, b_n,$$

» aby równania (1) były sprawdzone przez jedne i te same
» wartości zmiennych. Zobaczmy teraz, jak należy się wziąć do
» uskutecznienia tego wyrugowania, to jest, żeby z dwu
» formuł

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = 0 \end{array} \right. \qquad (2)$$

» wyrugować potęgi zmiennych, przedstawione przez różne
» wyrazy szeregu

$$x^n, \; x^{n-1}y, \ldots, \; xy^{n-1}, \; y^n.$$

---

[1] Jeśli przyjmiemy, że pierwsze $n-m$ spółczynników są zerami, to należy formę pomnożyć przez y^{n-m}; jeśli zaś przyjmiemy, że ostatnie $n-m$ spółczynników ($b_{m+1}, \ldots, b_n$) są zerami, to należy formę pomnożyć przez x^{n-m}. Dodanie takiego czynnika nie wpływa na rugownik danych form, gdyż w ten sposób do istniejących m rozwiązań równania $\psi(x, y) = 0$ nie dołączamy rozwiązań różnych od zera. Gdybyśmy, tak jak Cauchy, dane równania wzięli w postaci niejednorodnej, to można nie dodawać owego czynnika.

« Zauważę naprzód, że, aby wyrugować x^n z równań (2),
» dosyć jest za pomocą dzielenia związać ze sobą te dwa rów-
» nania, przedstawiwszy je w postaciach :

$$a_0x^n + \ldots + a_ix^{n-i}y^i = -(a_{i+1}x^{n-i-1}y^{i+1} + \ldots + a_ny^n),$$
$$b_0x^n + \ldots + b_ix^{n-i}y^i = -(b_{i+1}x^{n-i-1}y^{i+1} + \ldots + b_ny^n),$$

» gdzie i oznacza którąkolwiek z liczb $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
» W ten sposób znajdziemy

$$\frac{a_0x^i + a_1x^{i-1}y + \ldots + a_{i-1}xy^{i-1} + a_iy^i}{b_0x^i + b_1x^{i-1}y + \ldots + b_{i-1}xy^{i-1} + b_iy^i} =$$
$$= \frac{a_{i+1}x^{n-i-1} + \ldots + a_{n-1}xy^{n-i-2} + a_ny^{n-i-1}}{b_{i+1}x^{n-i-1} + \ldots + b_{n-1}xy^{n-i-2} + b_ny^{n-i-1}},$$

» albo, znosząc mianowniki,

$$(a_0x^i + \ldots + a_iy^i)(b_{i+1}x^{n-i-1} + \ldots + b_ny^{n-i-1}) - (b_0x^i + \ldots$$
$$+ b_iy^i)(a_{i+1}x^{n-i-1} + \ldots + a_ny^{n-i-1}) = 0. \qquad (3)$$

» Jeśli dla krótkości spółczynnik przy $x^{n-k-1}y^k$ w pierwszej
» stronie równania (3) oznaczymy przez $H_{k,i}$, nietylko będzie
» przy jakiemkolwiek i i k

$$H_{k,i} = H_{i,k},$$

» lecz także, dla $k < i$,

$$H_{0,i} = a_0b_{i+1} - b_0a_{i+1},$$
$$H_{1,i} = a_1b_{i+1} - b_1a_{i+1} + H_{0,i+1},$$
$$H_{2,i} = a_2b_{i+1} - b_2a_{i+1} + H_{1,i+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

» a równanie (3) staje się

$$H_{0,i}x^{n-1} + H_{1,i}x^{n-2}y + \ldots + H_{n-2,i}xy^{n-2} + H_{n-1,i}y^{n-1} = 0.$$

» Jeśli w tem równaniu, z którego n-ta potęga x-a jest istotnie » wyrugowaną, nadamy dla i kolejno wartości $0, 1, 2, \ldots, n-1$, » to otrzymamy układ

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_{0,0}\ x^{n-1} + \mathrm{H}_{1,0}\ x^{n-2}y + \ldots \\ \qquad\qquad + \mathrm{H}_{n-2,0}\ xy^{n-2} + \mathrm{H}_{n-1,0}\ y^{n-1} = 0, \\ \mathrm{H}_{0,1}\ x^{n-1} + \mathrm{H}_{1,1}\ x^{n-2}y + \ldots \\ \qquad\qquad + \mathrm{H}_{n-2,1}\ xy^{n-2} + \mathrm{H}_{n-1,1}\ y^{n-1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{H}_{0,n-1}x^{n-1} + \mathrm{H}_{1,n-1}x^{n-2}y + \ldots \\ \qquad\qquad + \mathrm{H}_{n-2,n-1}xy^{n-2} + \mathrm{H}_{n-1,n-1}y^{n-1} = 0. \text{»} \end{array}\right.$$

Wyznacznik tego układu n równań liniowych jednorodnych względem n zmiennych

$$x^{n-1},\quad x^{n-2}y,\ \ldots, xy^{n-2},\quad y^{n-1},$$

to jest wyznacznik

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{H}_{0,0}\quad ,\ldots, \mathrm{H}_{n-1,0} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \mathrm{H}_{0,n-1}, \ldots, \mathrm{H}_{n-1,n-1} \end{array}\right|,$$

jest więc rugownikiem dwu danych form; jest on zaś tymże samym wyznacznikiem, co otrzymany powyżej w ustępie 4-ym, jak to z określenia ilości $\mathrm{H}_{k,i}$ wypada.

Naprzykład 1°)

$$\left\{\begin{array}{l} a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3, \\ b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{a_1x^2+a_2xy+a_3y^2}{b_1x^2+b_2xy+b_3y^2}, \\ \dfrac{a_0x+a_1y}{b_0x+b_1y}=\dfrac{a_2x+a_3y}{b_2x+b_3y}, \\ \dfrac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}=\dfrac{a_3}{b_3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_0b_1)x^2+(a_0b_2)xy \qquad\qquad +(a_0b_3)y^2=0, \\ (a_0b_2)x^2+[(a_0b_3)+(a_1b_2)]xy+(a_1b_3)y^2=0, \\ (a_0b_3)x^2 \qquad\qquad +(a_1b_3)xy+(a_2b_3)y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} H_{0,0}, & H_{1,0}, & H_{2,0} \\ H_{0,1}, & H_{1,1}, & H_{2,1} \\ H_{0,2}, & H_{1,2}, & H_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_0b_1), & (a_0b_2) & , (a_0b_3) \\ (a_0b_2), & (a_0b_3)+(a_1b_2), & (a_1b_3) \\ (a_0b_3), & (a_1b_3), & (a_2b_3) \end{vmatrix}.$$

2°) Gdy mamy znaleść rugownik dwu form

$$\begin{cases} a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4, \\ \qquad\qquad b_0x^2+b_1xy\ \ +b_2y^2, \end{cases}$$

to jest znaleść funkcyę spółczynników, której równość zeru warunkuje istnienie spólnego rozwiązania równań

$$\begin{cases} a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4=0, \\ \qquad\qquad b_0x^2+b_1xy+b_2y^2=0, \end{cases}$$

czyli równań

$$\begin{cases} a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4=0, \\ b_0x^4+b_1x^3y+b_2x^2y^2 \qquad\qquad\qquad =0, \end{cases}$$

to, według wyłożonej tu metody, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a_0(b_1x^3+b_2x^2y)-b_0(a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3)=0, \\ (a_0x+a_1y)b_2x^2-(b_0x+b_1y)(a_2x^2+a_3xy+a_4y^2)=0, \\ \qquad\qquad -(b_0x^2+b_1xy+b_2y^2)(a_3x+a_4y)=0, \\ \qquad\qquad -(b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2)b_4 \qquad =0. \end{cases}$$

Od przedostatniego równania odejmując ostatnie, pomnożone przez $\frac{a_3}{b_4}$, a tak powstałe dzieląc przez $-a_4$, ostatnie zaś równanie dzieląc przez $-b_4$, możemy powyższy układ (¹) tak przedstawić

$$\begin{cases} (a_0b_1)x^3+(a_0b_2)x^2y \qquad -b_0a_3xy^2 \qquad -b_0a_4y^3=0, \\ (a_0b_2)x^3+[-b_0a_3+(a_1b_2)]x^2y+[-b_0a_4-b_1a_3]xy^2-b_1a_4y^3=0, \\ \qquad\qquad b_0x^2y \qquad +b_1xy^2 \qquad +b_2y^3 \quad =0, \\ b_0x^3 \qquad +b_1x^2y \qquad +b_2xy^2 \qquad\qquad =0; \end{cases}$$

wyznacznik tego układu

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1), & a_0b_2 & , -b_0a_3 & , -b_0a_4 \\ (a_0b_2), & -b_0a_3+(a_1b_2), & -b_0a_4-b_1a_3, & -b_1a_4 \\ 0\ , & b_0 & , \quad b_1 & , \quad b_2 \\ b_0\ , & b_1 & , \quad b_2 & , \quad 0 \end{vmatrix},$$

przedstawia rugownik danych form.

(¹) Wogóle przy $m<n$, ostatnie $n-m$ równań uproszczonego układu możemy otrzymać przez bezpośrednie mnożenie równania $\psi(x,y)=0$ przez

$$x^{n-m-1},\ x^{n-m-2}y, \ldots,\ y^{n-m-1}.$$

7. Jak widzieliśmy, warunek, aby dwa równania ($m=n$, lub $m<n$),

$$\begin{cases} a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=0, \\ b_0x^m+b_1x^{m-1}y+\ldots+b_{m-1}xy^{m-1}+b_my^m=0, \end{cases} \tag{1}$$

mogły mieć miejsce jednocześnie, t. j. posiadały spólne rozwiązanie, x' i y', przedstawia równość zeru rugownika tych równań. Rugownik zaś ten, albo może być przedstawiony w postaci wyznacznika stopnia $(m+n)$-ego (ustępy 1-3), albotеž w postaci wyznacznika stopnia n-ego (ustępy 4-6). Oznaczmy ten wyznacznik, tak w jednym jak w drugim razie, w taki sposób :

$$\begin{vmatrix} l_{1,1}, & l_{1,2}, & \ldots, & l_{1,p} \\ l_{2,1}, & l_{2,2}, & \ldots, & l_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{p,1}, & l_{p,2}, & \ldots, & l_{p,p} \end{vmatrix} = \mathrm{R},$$

gdzie $p=n+m$, jeśli przez wyznacznik R rozumiemy postać rugownika otrzymąną w ustępach 1-ym i 3-cim; zaś $p=n$, jeśli przez wyznacznik R rozumiemy postać rugownika, wypisaną w ustępach 4-ym i 6-ym. Warunkiem istnienia spólnego rozwiązania równań (1) jest tożsamość

$$\mathrm{R}=0,$$

warunkująca także istnienie spólnego rozwiązania układu $n+m$ równań wypisanego w ustępie 3-im, lub układu n równań wypisanego w ustępach 4-ym i 6-ym; może być więc ona uważaną jako warunek istnienia spólnego rozwiązania ogólnego układu równań (przedstawiającego tamte)

$$\left\{\begin{array}{l} l_{1,1}x^{p-1}+l_{1,2}x^{p-2}y+\ldots+l_{1,p-1}xy^{p-2}+l_{1,p}y^{p-1}=0,\\ l_{2,1}x^{p-1}+l_{2,2}x^{p-2}y+\ldots+l_{2,p-1}xy^{p-2}+l_{2,p}y^{p-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ l_{p,1}x^{p-1}+l_{p,2}x^{p-2}y+\ldots+l_{p,p-1}xy^{p-2}+l_{p,p}y^{p-1}=0. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Ten układ p równań, jednorodnych i liniowych względem p zmiennych

$$x^{p-1},\ x^{p-2}y,\ \ldots,\ xy^{p-2},\ y^{p-1},$$

o wyznaczniku $R=0$, sprawdzonym być może przez różne od zera wartości tych zmiennych (§ 76). I jeśli w wyznaczniku R spółczynnik przy $l_{i,k}$ nazwiemy $L_{i,k}$, to wartości zmiennych, sprawdzające równania (2), czyli spólne ich rozwiązanie, wyznaczymy z proporcyi (§ 76)

$$x^{p-1} : x^{p-2}y : \ldots : xy^{p-2} : y^{p-1} = L_{i,1} : L_{i,2} : \ldots : L_{i,p-1} : L_{i,p},$$

przy jednej z p wartości $1, 2, \ldots, p-1, p$ liczby i, i w założeniu, że nie wszystkie $L_{i,k}$ są równe zeru. Z powyższej proporcyi wypada

$$x : y = L_{i,1} : L_{i,2} = L_{i,2} : L_{i,3} = \ldots = L_{i,p-1} : L_{i,p},$$

czyli

$$x : y = L_{i,k-1} : L_{i,k}$$

$(k=2, 3, \ldots, p-1, p)$, co można jeszcze pisać (§ 61) tak:

$$x : y = \frac{\partial R}{\partial l_{i,k-1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{i,k}}.$$

Ponieważ zaś równania (2) zastępują równania (1), więc spólne rozwiązanie równań (2) przedstawia jednocześnie spólne rozwiązanie równań (1). Jest więc [1]

$$x' : y' = \frac{\partial R}{\partial l_{i,k-1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{i,k}},$$

przy $i=1, 2,\ldots,p$; $k=2, 3,\ldots,p$. Naprzykład. Jeśli dane dwa równania

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0, \\ \qquad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0, \end{cases}$$

posiadają spólne rozwiązanie, x', y', to ich rugownik [2]

$$R = \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & 0 \\ 0, & a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & 0, & 0 \\ 0, & a', & b', & c', & 0 \\ 0, & 0, & a', & b', & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (ab'), & (ac') & , -a'd \\ (ac'), & -a'd+(bc'), & -b'd \\ a', & b' & , c' \end{vmatrix} = 0;$$

jeśli przyjmiemy, że ilości dołączone np. do pierwszych dwu

---

(1) Faa de Bruno, l. p., str. 71, 72, 195. W przypadku $p=m+n$ pozornie podobny związek otrzymał uprzednio Richelot *Nota ad teoriam eliminationis pertinens* (Crelle, *Journal*, t. XXI, str. 228): inne jednak wtedy znaczenie mają pochodne.

(2) Ściśle rzecz biorąc, przed drugą postacią rugownika winniśmy postawić znak —, gdyż w tym przypadku (ustęp 4, str. 323).

$$\frac{(2n-m-1)m}{2} = 3.$$

elementów drugiego wiersza pierwszej postaci rugownika są różne od zera, to spólne rozwiązanie wyznaczyć możemy z proporcyi

$$x' : y' = \frac{\partial R}{\partial l_{2,1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{2,2}} = -\begin{vmatrix} b, & c, & d, & 0 \\ b', & c', & 0, & 0 \\ a', & b', & c', & 0 \\ 0, & a', & b', & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a, & c, & d, & 0 \\ a', & c', & 0, & 0 \\ 0, & b', & c', & 0 \\ 0, & a', & b', & c' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b, & c, & d \\ b', & c', & 0 \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a, & c, & d \\ a', & c', & 0 \\ 0, & b', & c' \end{vmatrix} = \frac{c'[bc'-cb']+d[b'^2-a'c']}{c'[ca'-ac']-da'b'};$$

wyznaczyć je także możemy, zupełnie w tej samej postaci, przy pomocy drugiej z wypisanych postaci rugownika, biorąc

$$x' : y' = \frac{\partial R}{\partial l_{1,1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{1,2}} =$$

$$= \begin{vmatrix} -a'd+bc'-b'c, & -b'd \\ b' & , c' \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} ac'-a'c, & -b'd \\ a' & , c' \end{vmatrix}.$$

Weźmy równania liczebne -- np.

$$\begin{cases} x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4y^3 = 0, \\ x^2 - 2xy - 8y^2 \qquad = 0; \end{cases} \quad R = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -4, & -4, & 0 \\ 0, & 1, & , & -4, & -4 \\ 1, & -2, & -8, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2, & -8, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -2, & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x' : y' = \frac{\partial R}{\partial l_{2,1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{2,2}} = \frac{\partial R}{\partial l_{1,3}} : \frac{\partial R}{\partial l_{1,4}} = \text{etc.}$$

$$=-\begin{vmatrix}1, & -4, & -4, & 0\\ -2, & -8, & 0, & 0\\ 1, & -2, & -8, & 0\\ 0, & 1, & -2, & -8\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, & -4, & -4, & 0\\ 1, & -8, & 0, & 0\\ 0, & -2, & -8, & 0\\ 0, & 1, & -2, & -8\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0, & 1, & -4, & -4\\ 1, & 2. & 0, & 0\\ 0, & 1, & -8, & 0\\ 0, & 0, & -2, & 8\end{vmatrix} :- \begin{vmatrix}0, & 1, & 1, & -4\\ 1, & -2, & -8, & 0\\ 0, & 1, & -2, & 0\\ 0, & 0, & 1, & -8\end{vmatrix} = \text{etc.}$$

$$= -80 : 40 = 40 : -20 = \text{etc.} = -2 : 1.$$

Z drugiej postaci rugownika,

$$R = \begin{vmatrix}-2-1, & -8+4 & , +4\\ -8+4, & +4-8-8, & -8\\ 1 & , -2 & , -8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3, & -4, & 4\\ -4, & -12, & -8\\ 1, & -2, & -8\end{vmatrix} = 0,$$

wypada

$$x' : y' = \frac{\partial R}{\partial l_{1,1}} : \frac{\partial R}{\partial l_{1,2}} = \frac{\partial R}{\partial l_{3,2}} : \frac{\partial R}{\partial l_{3,3}} = \text{etc.}$$

$$= \begin{vmatrix}-12, & -8\\ -2, & -8\end{vmatrix} :- \begin{vmatrix}-4, & -8\\ 1, & -8\end{vmatrix}$$

$$=- \begin{vmatrix}-3, & 4\\ -4, & -8\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}-3, & -4\\ -4, & -12\end{vmatrix} = \text{etc.}$$

$$= 80 : -40 = -40 : 20 = \text{etc.} = -2 : 1.$$

W przypadku, gdy nietylko rugownik równań (1) $R=0$, lecz nadto wszystkie jego wyznaczniki częściowe $(p-1)$-ego, $(p-2)$-ego,...,$(p-r+1)$-ego stopni równe zeru, ale istnieją wyznaczniki częściowe $(p-r)$-ego stopnia różne od zera, — to, stosując do równań (2) metodę, wyłożoną w § 77-ym, wyznaczymy r rozwiązań spólnych, które wtedy posiadają równania (1) (1). Tak np. gdy mamy $(n=4)$.

$$\begin{cases} ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ey^4=0, \\ a'x^4+b'x^3y+c'x^2y^2+d'xy^3+e'y^4=0; \end{cases}$$

$$(p=n=4), \qquad R=\begin{vmatrix} l_{1,1}, & l_{1,2}, & l_{1,3}, & l_{1,4} \\ l_{2,1}, & l_{2,2}, & l_{2,3}, & l_{2,4} \\ l_{31} & l_{3,2}, & l_{3,3}, & l_{3,4} \\ l_{4,1}, & l_{4,2}, & l_{4,3}, & l_{4,4} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (ab'), & (ac') & , (ad') & , (ae') \\ (ac'), & (ad')+(bc'), & (ae')+(bd') & , (be') \\ (ad'), & (ae')+(bd'), & (be')+(cd') & , (ce') \\ (ae'), & (be'), & (ce') & , (de') \end{vmatrix}=0;$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4; \quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad \frac{\partial R}{\partial l_{i,k}}=0,$$

lecz są wyznaczniki częściowe $(p-r=2)$ stopnia 2-ego różne od zera, z których np.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,4}}=\begin{vmatrix} (ab'), & (ac') \\ (ac'), & (ad')+(bc') \end{vmatrix}=g,$$

---

(1) Metoda, którą tu przedstawiam, jest odrębną od metod wyznaczenia kilku spólnych pierwiastków, jakie podali: BRIOSCHI, *Détermination des racines communes à deux équations* (*Nouvelles Annales*, 1855, marzec), FAA DE BRUNO, l. c., str. 101, DOSTOR, l. c., str. 134.

to dane równania, a tem samem i ($p=4$) cztery równania (2)

$$\begin{cases}(ab')x^3+(ac')x^2y+(ad')xy^2+(ae')y^3=0,\\ (ac')x^3+[(ad')+(bc')]x^2y+[(ae')+(bd')]xy^2+(be')y^3=0,\\ (ad')x^3+[(ae')+(bd')]x^2y+[(be')+(cd')]xy^2+(ce')y^3=0,\\ (ae')x^3+(be')x^2y+(ce')xy^2+(de')y^3=0,\end{cases}$$

liniowe i jednorodne względem czterech niewiadomych

$$x^3,\quad x^2y,\quad xy^2,\quad y^3,$$

posiadają ($r=2$) dwa spólne rozwiązania. Aby je odnaleść, utworzymy wyznacznik ($p-r+1=3$-ego stopnia)

$$d=\begin{vmatrix}(ab'), & (ac'), & (ad')xy^2+(ae')y^3\\ (ac'), & (ad')+(bc'), & [(ae')+(bd')]xy^2+(be')y^3\\ l_{i,1}, & l_{1,2}, & l_{i,3}xy^2+l_{i,4}y^4\end{vmatrix}$$

$=0$, przy wszystkich wartościach $i=1, 2, 3, 4$ (§ 77). Będzie więc

$$x^3:x^2y:1=\begin{vmatrix}(ac'), & (ad')xy^2+(ae')y^3\\ (ad')+(bc'), & [(ae')+(bd')]xy^2+(be')y^3\end{vmatrix}:$$

$$:-\begin{vmatrix}(ab'), & (ad')xy^2+(ae')y^3\\ (ac'), & [(ae')+(bd')]xy^2+(be')y^3\end{vmatrix}:g,$$

czyli (§§ 61, 29)

$$x^3:x^2y:1=\left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,1}}x+\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,1}}y\right]y^2:$$

$$:\left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,2}}x+\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,2}}y\right]y^2:\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,4}}.$$

Z tej proporcyi wypada

$$x : y = \left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,1}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,1}}y\right] : \left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,2}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,2}}y\right],$$

czyli

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,2}}x^2 + \left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,2}} - \frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,1}}\right]xy - \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,1}}y^2 = 0; \qquad (\alpha)$$

jakoteż

$$x^2 : 1 = \left[\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,2}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,2}}y\right]y : \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,4}},$$

czyli

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,4}}x^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,2}}xy - \frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,2}}y^2 = 0. \qquad (\beta)$$

Każde z otrzymanych tu równań, jako wynik zrobionych wyżej założeń, przedstawia własność, spólną obu danym równaniom, to jest, dwa układy wartości dla niewiadomych, wyznaczone czyto z piewszego, czyto z drugiego z otrzymanych tu równań (te dwa równania są jednoznaczne), przedstawiają dwa spólne rozwiązania dwu równań danych. Objaśnimy to na przykładzie liczebnym. Gdy mamy

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y \qquad\qquad + xy^3 + 2y^4 = 0, \\ x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3 + 2y^4 = 0; \end{cases}$$

to

$$R = \begin{vmatrix} -6, & 6, & -6, & 0 \\ 6, & 6, & -6, & 12 \\ -6, & -6, & 6, & -12 \\ 0, & 12, & -12, & 12 \end{vmatrix} = 0,$$

wszystkie

$$\frac{\partial R}{\partial l_{i,k}} = 0,$$

i, chociaż

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{4,4}\partial l_{3,1}}=\begin{vmatrix}6, & -6\\ 6, & -6\end{vmatrix}=0,\quad \frac{\partial^2 R}{\partial l_{1,1}\partial l_{4,4}}=\begin{vmatrix}6, & -6\\ -6, & 6\end{vmatrix}=0,\quad \text{etc.}$$

lecz istnieją wyznaczniki $(p-r=2)$ drugiego stopnia różne od zera, np.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{3,3}\partial l_{4,4}}=\begin{vmatrix}-6, & 6\\ 6, & 6\end{vmatrix}=-72.$$

Dane zatem równania posiadają $(r=2)$ dwa spólne rozwiązania, które wyznaczyć możemy za pomocą równania (α)

$$-\begin{vmatrix}-6, & -6\\ 6, & -6\end{vmatrix}x^2+\left(-\begin{vmatrix}-6, & 0\\ 6, & 12\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6, & -6\\ 6, & -6\end{vmatrix}\right)xy-\begin{vmatrix}6, & 0\\ 6, & 12\end{vmatrix}y^2=0,$$

$$-72x^2+72xy-72y^2=0;$$

lub też za pomocą równania (β)

$$\begin{vmatrix}-6, & 6\\ 6, & 6\end{vmatrix}x^2-\left(-\begin{vmatrix}-6, & -6\\ 6, & -6\end{vmatrix}\right)xy-\left(-\begin{vmatrix}-6, & 0\\ 6, & 12\end{vmatrix}\right)y^2=0,$$

$$-72x^2+72xy-72y^2=0,$$

czyli

$$x^2-xy+y^2=0.$$

Że zaś temu równaniu zadosyć czynią wartości niewiadomych

$$x:y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}:1,$$

$$x:y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}:1,$$

— to one także przedstawią dwa układy rozwiązań spólnych równań danych.

Gdybyśmy rugownik danych równań wzięli w postaci wyznacznika ($p = n + m = 8$) ósmego stopnia

$$R = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & 1, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0, & 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2, & 0, & 1, & 2 \\ 1, & -4, & 6, & -5, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -4, & 6, & -5, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -4, & 6, & -5, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & -4, & 6, & -5, & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

to sprawdziwszy, że wszystkie wyznaczniki częściowe siódmego stopnia tego wyznacznika są równe zeru, lecz istnieją jego wyznaczniki częściowe szóstego ($p - r = 6$) stopnia różne od zera, naprzykład

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_{1,1} \partial l_{2,2}} = 72,$$

moglibyśmy i przy pomocy tej postaci rugownika, stosując metodę § 77-ego (w sposób, podobny powyższemu), odnaleźć owe ($r = 2$) dwa układy rozwiązań spólnych równań danych.

§ 80 (1).

Gdy z pomiędzy n form z n zmiennemi jedna jest kwadratową, pozostałe zaś liniowemi :

---

(1) Gdy dane są trzy lub więcej form z tyluż zmiennemi (lub trzy lub więcej równań jednorodnych z tyluż niewiadomemi), to, w ogólnym przy-

$$\left\{\begin{aligned} \varphi \;&= a_{1,1}x_1^2+2a_{1,2}x_1x_2+a_{2,2}x_2^2+2a_{1,3}x_1x_3+\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad +2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n+a_{n,n}x_n^2, \\ \varphi_1 &= b_{1,1}x_1 \;+b_{1,2}x_2 \;+b_{1,3}x_3 \;+\ldots+b_{1,n} \;\; x_n, \\ \varphi_2 &= b_{2,1}x_1 \;+b_{2,2}x_2 \;+b_{2,3}x_3 \;+\ldots+b_{2,n} \;\; x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-1} &= b_{n-1,1}x_1+b_{n-1,2}x_2+b_{n-1,3}x_0+\ldots+b_{n-1,n}x_n, \end{aligned}\right.$$

to równość zeru rugownika tych równań przedstawia warunek, aby równania

$$\varphi=0, \quad \varphi_1=0, \quad \varphi_2=0,\ldots, \quad \varphi_{n-1}=0 \tag{1}$$

---

padku, nie można utworzyć takiego układu równań, aby jego wyznacznik był rugownikiem danych form (CAYLEY, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. III, str. 116). Zob. SĄGAJŁO, l. c., str. 95.

W przypadku, gdy dane są trzy formy potrójne (z trzema zmiennemi) jednakowego stopnia, rugownik ich może być przedstawiony pod postacią wyznacznika odpowiednio utworzonego układu równań (SYLVESTER, *Cambridge a. D. M. J.*, t. VII., str 68).

Przedstawienie w postaci wyznacznikowej rugownika trzech form potrójnych kwadratowych, rugownika trzech form potrójnych sześciennych, oraz rugownika czterech form poczwórnych kwadratowych, metodą, zastosowalną tylko w wyliczonych przypadkach, niżej (Rozdział Dwunasty, §123) wyłożone będzie.

W tym-tu § okażemy, że rugownik n form z n zmiennemi, z których-to form jedna jest kwadratową, pozostałe zaś liniowemi, może być przedstawiony za pomocą wyznacznika (VERSŁUYS, *Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique*, w GRUNERT'a *Archiv der Mathematik und Physik*, część LIII, str. 138). Wyznacznikowa postać tego rugownika, jaką podaje GUENTHER (l. c., w drugiem wydaniu str. 121), jest całkiem błędną: wyznacznik ten stopnia $2n$-ego jest niemożliwy, jak o tem przez liczenie wierszy i kolumn, zapełnionych spółczynnikami form liniowych, przekonać się można.

Rugownik układu n form z n zmiennemi, z których dwie formy są kwadratowe, a pozostałe liniowe, może być wyrażony w postaci wyznaczmiały spólne rozwiązanie. Pierwsze z tych równań, $\varphi=0$, którego lewa strona może być tak przedstawioną:

$$\varphi=(a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n)x_1+(a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots$$
$$+a_{2,n}x_n)x_2+\ldots+(a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+\ldots+a_{n,n}x_n)x_n,$$

zastąpić możemy przez układ następujących n równań

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3+\ldots+a_{1,n-1}x_{n-1}+a_{1,n}x_n \\
\qquad\qquad =-(b_{1,1}\lambda_1+b_{2,1}\lambda_2+b_{3,1}\lambda_3+\ldots+b_{n-1,1}\lambda_{n-1}), \\
a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3+\ldots+a_{2,n-1}x_{n-1}+a_{2,n}x_n \\
\qquad\qquad =-(b_{1,2}\lambda_1+b_{2,2}\lambda_2+b_{3,2}\lambda_3+\ldots+b_{n-1,2}\lambda_{n-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+a_{3,n}x_3+\ldots+a_{n-1,n}x_{n-1}+a_{n,n}x_n \\
\qquad\qquad =-(b_{1,1}\lambda_1+b_{2,n}\lambda_2+b_{3,n}\lambda_3+\ldots+b_{n-1,n}\lambda_{n-1}),
\end{array}\right.$$

przy jakichkolwiek wartościach ilości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ldots,\lambda_{n-1}$. Mnożąc bowiem pierwsze z tych równań przez x_1, drugie przez $x_2,\ldots$, ostatnie przez x_n, a tak pomnożone dodając, otrzymamy tożsamościowo, według $n-1$ ostatnich równań (1),

$$\varphi=-\varphi_1\lambda_1-\varphi_2\lambda_2-\varphi_3\lambda_3-\ldots-\varphi_{n-1}\lambda_{n-1}=0.$$

Korzystając z tego, zamiast układu n równań (1), możemy

---

nika (GUNDELFINGER, *Auflösung eines Systems von Gleihungen, worunter zwei quadratisch und die übrigen linear*, w SCHLOEMILCH'a *Zeitschrift für Math. u. Ph.*, rocznik XVIII, str. 549). Wyrażenie to dość skomplikowane, — dlatego go nie przytaczamy.

wziąć jednoznaczny z nim układ $n+(n-1)=2n-1$ równań

$$
\begin{cases}
a_{1,1}\ x_1+a_{1,2}\ x_2+\ldots+a_{1,n}\ x_n+b_{1,1}\lambda_1+b_{2,1}\lambda_2+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +b_{n-1,1}\lambda_{n-1}=0, \\
a_{1,2}\ x_1+a_{2,2}\ x_2+\ldots+a_{2,n}\ x_n+b_{1,2}\lambda_1+b_{2,2}\lambda_2+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +b_{n-1,2}\lambda_{n-1}=0, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\
a_{1,n}\ x_1+a_{2,n}\ x_2+\ldots+a_{n,n}\ x_n+b_{1,n}\lambda_1+b_{2,n}\lambda_2+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +b_{n-1,n}\lambda_{n-1}=0, \\
b_{1,1}\ x_1+b_{1,2}\ x_2+\ldots+b_{1,n}\ x_n \qquad =0, \\
b_{2,1}\ x_1+b_{2,2}\ x_2+\ldots+b_{2,n}\ x_n \qquad =0, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\
b_{n-1,1}x_1+b_{n-1,2}x_2+\ldots+b_{n-1,n}x_n \qquad =0,
\end{cases}
$$

jednorodnych i liniowych względem $2n-1$ ilości

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}.$$

Równość więc zeru wyznacznika tego układu równań, t. j. wyznacznika

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & ,a_{1,2} & ,\ldots,a_{1,n-1} & ,a_{1,n} & ,b_{1,1} & ,b_{2,1} & ,\ldots,b_{n-1,1} \\
a_{1,2} & ,a_{2,2} & ,\ldots,a_{2,n-1} & ,a_{2,n} & ,b_{1,2} & ,b_{2,2} & ,\ldots,b_{n-1,2} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_{1,n-1} & ,a_{2,n-1} & ,\ldots,a_{n-1,n-1} & ,a_{n-1,n} & ,b_{1,n-1} & ,b_{2,n-1} & ,\ldots,b_{n-1,n-1} \\
a_{1,n} & ,a_{2,n} & ,\ldots,a_{n-1,n} & ,a_{n,n} & ,b_{1,n} & ,b_{2,n} & ,\ldots,b_{n-1,n} \\
b_{1,1} & ,b_{1,2} & ,\ldots,b_{1,n-1} & ,b_{1,n} & ,\ 0 & ,\ 0 & ,\ldots,\ 0 \\
b_{2,1} & ,b_{2,2} & ,\ldots,b_{2,n-1} & ,b_{2,n} & ,\ 0 & ,\ 0 & ,\ldots,\ 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
b_{n-1,1} & ,b_{n-1,2} & ,\ldots,b_{n-1,n-1} & ,b_{n-1,n} & ,\ 0 & ,\ 0 & ,\ldots,\ 0
\end{vmatrix},
$$

przedstawia warunek istnienia spólnego rozwiązania równań (1), *Ten zatem wyznacznik* (2n—1)-*ego stopnia jest rugownikiem danych form.*

§ 81.

Gdy dana jest forma z n zmiennemi, to rugownik n cząstkowych jej pierwszych pochodnych nazywa się *wyróżnikiem* [discriminant ([1])] danej formy, albo równania, otrzymanego z przyrównania danej formy do zera.

Ponieważ cząstkowe pierwsze pochodne formy kwadratowej z n zmiennemi przedstawiają n form liniowych z n zmiennemi, więc (§ 78) *wyróżnik formy kwadratowej z ilukolwiek zmiennemi zawsze w postaci wyznacznika przedstawionym być może.*

Naprzykład 1°)

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cz^3\,;$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = ax + by, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = bx + cz: \end{cases}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix} = ac - b^2. \ ([2])$$

(2°)

$$\varphi = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy\,;$$

([1]) Sylvester.

([2]) Tento właśnie wyróżnik $-\mathrm{D} = bb - ac$, Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ*, 1801, wydania tworzącego tom I *Werke* strona 122) nazywa determinantem formy $axx + 2bxy + cyy$ (porównaj § 8-y). Takie rozumienie wyrazu «determinant» utrzymuje się wciąż w pracach, odnoszących się do Teoryi Liczb.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = ax + b''y + b'z, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = b''x + a'y + bz, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = b'x + by + a''z; \end{cases}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a\,, & b''\,, & b' \\ b''\,, & a'\,, & b \\ b'\,, & b\,, & a'' \end{vmatrix} = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2\ (^1).$$

3°)

$$\varphi = a_{1,1}x_1{}^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2{}^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + \ldots$$

$$+ 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n}x_n{}^2;$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{1,1}\;, & a_{1,2}\;, & a_{1,3}\;, & \ldots, & a_{1,n-1}\;, & a_{1,n} \\ a_{1,2}\;, & a_{2,2}\;, & a_{2,3}\;, & \ldots, & a_{2,n-1}\;, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n-1}, & a_{2,n-1}, & a_{3,n-1}, & \ldots, & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n} \\ a_{1,n}\;, & a_{2,n}\;, & a_{3,n}\;, & \ldots, & a_{n-1,n}\;, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Jeśli dana forma jest podwójną n-ego stopnia, to jej cząstkowe pochodne pierwsze przedstawiają dwie formy podwójne $(n-1)$-ego stopnia, których rugownik może być otrzymany według metod § 79-ego. Zatem *wyróżnik formy podwójnej jakiego-*

---

(1) Gauss (l. c., str. 301) ilość $abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b''$, czyli $-\mathrm{D}$, nazywa determinantem formy $axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$.

kolwiek stopnia zawsze w postaci wyznacznika wyrażonym być może. Np.

$$\varphi = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4;$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3; \\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = a_1x^3 + 3a_2x^2y + 3a_3xy^2 + a_4y^3; \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_0, & 3a_1, & 3a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ 0, & a_0, & 3a_1, & 3a_2, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & a_0, & 3a_1, & 3a_2, & a_3 \\ a_1, & 3a_2, & 3a_3, & a_4, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 3a_2, & 3a_3, & a_4, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 3a_2, & 3a_3, & a_4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3(a_0a_2 - a_1^2), & 3(a_0a_3 - a_1a_2), & (a_0a_4 - a_1a_3) \\ 3(a_0a_3 - a_1a_2), & a_0a_4 + 8a_1a_3 - 9a_2^2, & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \\ (a_0a_4 - a_1a_3), & 3(a_1a_4 - a_2a_3), & 3(a_2a_4 - a_3^2) \end{vmatrix}.$$

Ten wyróżnik (1) można tak przedstawić (2):

$$D = (a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)^3 - 27(a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 + 2a_1a_2a_3)^2.$$

Jeśli wyróżnik formy podwójnej

$$\varphi = \varphi(x, y),$$

---

(1) Przed drugą postacią wyróżnika postawiliśmy znak — dlatego, że w tym przypadku (§ 79, ustęp 4, str. 323) $\frac{n(n-1)}{2} = 3$.

(2) Boole i Cayley.

czyli rugownik dwu form

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

jest zerem, to równania

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

mają spólne rozwiązanie, np. x', y', a tem samem formy $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ mają (§ 79, 1) spólny czynnik

$$xy' - x'y,$$

skutkiem czego w daną formę φ tenże czynnik wchodzi, conajmniej, w drugiej potędze. Widzimy więc, że za równością zeru wyróżnika formy podwójnej idzie istnienie rozwiązania wielokrotnego (lub rozwiązań wielokrotnych) równania, powstałego z przyrównania do zera formy danej. Np.

$$\varphi=ax^2+2bxy+cy^2; \qquad D=\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix}=ac-b^2;$$

jesli $D=0$, to równanie

$$ax^2+2bxy+cy^2=0$$

posiada dwukrotne rozwiązanie

$$x':y'=-\frac{b}{a}:1.$$

(Jeśli forma potrójna wogóle n ego stopnia

$$\varphi=\varphi(x, y, z)$$

może być przedstawioną w postaci

$$\varphi=(a'x+a''y+a'''z)^2\zeta+(a'x+a''y+a'''z)(b'x+b''y+b'''z)\iota+$$
$$(b'x+b''y+b'''z)^2\theta,$$

gdzie a', a'', a''', b', b'', b''' są funkcyami spółczynników danej formy, zaś ζ, η, θ formami potrójnemi $(n-2)$-ego stopnia, to w wyrazach każdej pochodnej

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

znajdzie się już-to czynnik $a'x+a''y+a'''z$, już-też czynnik $b'x+b''y+b'''z$. Dlatego dla wartości zmiennych, zadosyć czyniących związkom

$$\begin{cases} a'x+a''y+a'''z=0, \\ b'x+b''y+b'''z=0, \end{cases}$$

rugownik pierwszych pochodnych $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, a tem samem wyróżnik danej formy potrójnej φ jest zerem. Te więc wartości zmiennych przedstawią rozwiązania wielokrotne równania

$$\varphi(x, y, z)=0.$$

Podobnie forma poczwórna zmiennych x, y, z, u, w przypadku, gdy może być wyrażoną jako funkcya drugiego stopnia jednorodna względem wyrażeń

$$a'x+a''y+a'''z+a^{\text{IV}}u,$$

$$b'x+b''y+b'''z+b^{\text{IV}}u,$$

$$c'x+c''y+c'''z+c^{\text{IV}}u,$$

posiada wyróżnik równy zeru, a tem samem i rozwiązania wielokrotne. I t. d).

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

WYZNACZNIK PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWEGO.

§ 82.

Jeśli dana jest jedna lub kilka funkcyj zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_n,$$

np. $f(x_1,\ldots,x_n)$, $\varphi(x_1,\ldots,x_n),\ldots$, i jeśli w tych funkcyach zastępujemy ([1]) te zmienne przez zmienne nowe, związane z poprzedniemi za pomocą związków liniowych

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ x_2 = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n,1}y + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

skutkiem czego dane funkcye przechodzą na funkcye nowych

([1]) Odpowiada to w Geometryi zmianie układu spółrzędnych.

zmiennych $F(y_1,\ldots,y_n)$, $\Phi(y_1,\ldots,y_n),\ldots$, to mówimy, że dokonywamy *przekształcenia liniowego* (transformatio linearis) (podstawienia l.) funkcyj danych, zaś wyznacznik układu (1), to jest

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = M,$$

nazywamy *wyznacznikiem*, albo *modułem* [1] *przekształcenia liniowego.*

(Wyznacznik ten nie może być zerem, dopóki ilości $x_1, x_2,\ldots,x_n$ są od siebie niezależne, § 116).

Jeśli wyznacznik $M = +1$, to przekształcenie takie jest *przekształceniem liniowem o module jedność* (unimodular).

Jeśli w wyznaczniku M ilość dołączoną do elementu $a_{i,k}$ nazwiemy $A_{i,k}$, to, stosując związki (4) § 71-ego do powyższych równań (1), określających przekształcenie, za pomocą którego od funkcyi zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ przechodzimy do funkcyi zmiennych $y_1,\ldots,y_n$, spostrzeżemy, że odwrotnie, od funkcyi przekształconej (t. j. zmiennych $y_1,\ldots,y_n$) przejdziemy do funkcyi początkowej (t. j. dawnych zmiennych $x_1,\ldots,x_n$) za pomocą także liniowego przekształcenia

$$\left\{\begin{aligned} My_1 &= A_{1,1}x_1 + A_{2,1}x_2 + \ldots + A_{n,1}x_n\,, \\ My_2 &= A_{1,2}x_1 + A_{2,2}x_2 + \ldots + A_{n,2}x_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ My_n &= A_{1,n}x_1 + A_{2,n}x_2 + \ldots + A_{n,n}x_n, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

---

[1] SYLVESTER. Jego pomysłu jest terminologia tego rozdziału.

o module (§ 66)

$$\begin{vmatrix} \frac{A_{1,1}}{M}, & \ldots, & \frac{A_{n,1}}{M} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1,n}}{M}, & \ldots, & \frac{A_{n,n}}{M} \end{vmatrix} = \frac{M^{n-1}}{M^n} = \frac{1}{M}.$$

Przekształcenie (2) nazwiemy *odwrotnem* względem przekształcenia (1).

§ 83.

Dwa układy po n zmiennych

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, \ldots, x_n, \\ x'_1, & x'_2, \ldots, x'_n, \end{matrix} \tag{1}$$

skutkiem tegoż samego przekształcenia przechodzące odpowiednio na układy zmiennych

$$\begin{matrix} y_1, & y_2, \ldots, y_n, \\ y'_1, & y'_2, \ldots, y'_n; \end{matrix}$$

to jest dwa tak związane układy (1), że jeśli

$$\begin{cases} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n, \end{cases}$$

to także

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}y'_1 + a_{1,2}y'_2 + \ldots + a_{1,n}y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = a_{n,1}y'_1 + a_{n,2}y'_2 + \ldots + a_{n,n}y'_n, \end{cases}$$

nazywają się *układami zmiennych zgodnemi* (congredient).

Mogą zaś być dwa układy po n zmiennych

$$\begin{matrix} x_1,\ x_2,\ldots,x_n, \\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n, \end{matrix} \tag{2}$$

przechodzące odpowiednio na układy nowych zmiennych

$$\begin{matrix} y_1,\ y_2,\ldots,y_n, \\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots,\eta_n, \end{matrix}$$

w taki sposób, że gdy

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n, \end{array}\right. \tag{3}$$

to jednocześnie

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}\xi_1 = \mathrm{A}_{1,1}\eta_1 + \mathrm{A}_{1,2}\eta_2 + \ldots + \mathrm{A}_{1,n}\eta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{M}\xi_n = \mathrm{A}_{n,1}\eta_1 + \mathrm{A}_{n,2}\eta_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n,n}\eta_n. \end{array}\right. \tag{4}$$

Jeśli moduł przekształcenia (3) nazwaliśmy M, to moduł przekształcenia (4) jest $\frac{1}{\mathrm{M}}$. Pomnóżmy jednak związki (4) odpowiednio przez $a_{1,i},\ a_{2,i},\ldots,a_{n,i}$, a tak pomnożone dodajmy do siebie; wtedy (§ 27)

$$\mathrm{M}(a_{1,i}\xi_1 + a_{2,i}\xi_2 + \ldots + a_{n,i}\xi_n) = \mathrm{M}\eta_i,$$

zkąd ($i = 1,\ 2,\ldots,n$)

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = a_{1,1}\xi_1 + a_{2,1}\xi_2 + \ldots + a_{n,1}\xi_n \\ \eta_3 = a_{1,2}\xi_1 + a_{2,1}\xi_2 + \ldots + a_{n,2}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_n = a_{1,n}\xi_1 + a_{2,n}\xi_2 + \ldots + a_{n,n}\xi_n. \end{array}\right. \tag{5}$$

Ten układ n równań (5) przedstawia przekształcenie odwrotne względem założonego przekształcenia (4), lecz jest bezpośredniem i równoważnem jego następstwem, — tak, że z przekształcenia (5) możemy wyprowadzić (§§ 82, 71) przekształcenie (4) i wzajemnie. Skutkiem tego zamiast przyjmować przekształcenia (3) i (4), jako określające zależność, istniejącą między dwoma układami (2), możemy, jako określenie tej zależności, przyjąć układy (3) i (5), choć pierwszy, t. j. (3), prowadzi od dawnych zmiennych do nowych, gdy drugi, (5), nowe zmienne wyraża przez dawne. Przekształcenia (3) i (5) mają ten sam moduł, a elementy wyznacznika, będącego modułem przekształcenia (3), są równe odpowiednim elementom sprzężonym wyznacznika, przedstawiającego moduł przekształcenia (5), i wzajemnie [1]. Dlatego określone przez przekształcenia (3) i (5), czyli przez przekszałcenia (3) i (4), dwa układy (2) nazwiemy *układami zmiennych sprzężonemi* (contragredient, « przeciwzgodnemi »?). Np. pewna funkcya φ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, skutkiem przekształcenia liniowego

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ x_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n\,, \end{array}\right.$$

przechodzi na funkcyę zmiennych $y_1, \ldots, y_n$; wogóle $(i=1,2,\ldots n)$ mamy, jak wiadomo,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i},$$

---

[1] Jedno przekształcenie możnaby nazwać *przestawionem* (transponirte Substitution, Aronhold, *Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie*, w Crelle *Journal*, t. LXII, str. 315). Niewłaściwie

lecz

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_i}=a_{1,i};\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_i}=a_{2,i}\ ;\ .\ .\ .\ ;\ \frac{\partial x_n}{\partial y_i}=a_{n,i}\ ;$$

będzie zatem

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=a_{1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{2,1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ .\ .\ .+a_{n,1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=a_{1,2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{2,2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ .\ .\ .+a_{n,2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}=a_{1,n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{2,n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ .\ .\ .+a_{n,n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n};
\end{array}\right.\qquad(5')$$

za liniowem zatem przekształceniem (3) zmiennych idzie przekształcenie liniowe (5′) pochodnych. Są więc względem siebie sprzężonemi wzajemnie: układ zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_n$$

układ symbolów działania

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ .\ .\ .\ .\ ,\frac{\partial}{\partial x_n},$$

Zauważyć jeszcze możemy, że, ponieważ dwa układy po n równań liniowych (3) i (5), są według określenia § 74-ego, względem siebie pochodne, to *między zmiennemi układów sprzężonych* (2) *i nowemi zmiennemi istnieje związek* (§ 74):

$$x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n=y_1\eta_1+y_2\eta_2+\ldots+y_n\eta_n.$$

---

wielu autorów nazywa jedno z tych przekształceń odwrotnem (inverse, reciproke), gdyż taka nazwa może być słusznie użytą tylko w tem znaczeniu, co wyżej w § 82-im.

§ 84.

Jeśli dany układ n liniowych funkcyj n zmiennych

$$\begin{cases} f_1 = l_{1,1}x_1 + l_{1,2}x_2 + \ldots + l_{1,n}x_n, \\ f_2 = l_{2,1}x_1 + l_{2,2}x_2 + \ldots + l_{2,n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n = l_{n,1}x_1 + l_{n,2}x_2 + \ldots + l_{n,n}x_n, \end{cases}$$

którego wyznacznik (§ 71) jest

$$D = \begin{vmatrix} l_{1,1}, & \ldots & ,l_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n,1}, & \ldots & ,l_{n,n} \end{vmatrix},$$

ulegnie liniowemu przekształceniu

$$\begin{cases} x_1 = a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n,1}y_1 + \ldots + a_{n,n}y_n; \end{cases} \qquad M = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

to otrzymamy

$$\begin{cases} f_1 = l_{1,1}(a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n) + \ldots + l_{1,n}(a_{n,1}y_1 + \ldots + a_{n,n}y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = l_{n,1}(a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n) + \ldots + l_{n,n}(a_{n,1}y_1 + \ldots + a_{n,n}y_n), \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} f_1 = (l_{1,1}a_{1,1} + l_{1,2}a_{2,1} + \ldots + l_{1,n}a_{n,1})y_1 + \ldots \\ \qquad\qquad + (l_{1,1}a_{1,n} + l_{1,2}a_{2,n} + \ldots + l_{1,n}a_{n,n})y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n = (l_{n,1}a_{1,1} + l_{n,2}a_{2,1} + \ldots + l_{n,n}a_{n,1})y_1 + \ldots \\ \qquad\qquad + (l_{n,1}a_{1,n} + l_{n,2}a_{2,n} + \ldots + l_{n,n}a_{n,n})y_n, \end{cases}$$

lub, przy

$$l_{i,1}a_{1,k}+l_{i,2}a_{2,k}+\ldots+l_{i,n}a_{n,k}=c_{i,k},$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1=c_{1,1}y_1+c_{1,2}y_2+\ldots+c_{1,n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n=c_{n,1}y_1+c_{n,2}y_2+\ldots+c_{n,n}y_n. \end{array}\right.$$

Funkcye więc $f_1, f_2,\ldots,f_n$ są liniowemi względem nowych zmiennych $y_1, y_2,\ldots,y_n$; wyznacznik układu tak przekształconego jest (§ 45)

$$\begin{vmatrix} c_{1,1},\ldots,c_{1,n}\\ \ldots\ldots\\ c_{n,1},\ldots,c_{n,n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_{1,1},\ldots,l_{1,n}\\ \ldots\ldots\\ l_{n,1},\ldots,l_{n,n}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,n}\\ \ldots\ldots\\ a_{n,1},\ldots,a_{n,n}\end{vmatrix}=\mathrm{DM}.$$ [1]

Jeśli układ n *liniowych funkcyj* n *zmiennych ulegnie przekształceniu liniowemu, to wyznacznik układu przekształconego jest iloczynem wyznacznika początkowego układu przez moduł przekształcenia.*

Jeśli układ n *liniowych funkcyj* n *zmiennych ulegnie przekształceniu liniowemu o module jedność, to wyznacznik układu przekształconego jest równy wyznacznikowi układu początkowego.*

§ 85.

Na szczególną zasługuje uwagę przekształcenie liniowe

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n=a_{n,1}y_1+\ldots+a_{n,n}y_n, \end{array}\right.\qquad \mathrm{M}=\begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots,a_{1,n}\\ \ldots\ldots\\ a_{n,1},\ldots,a_{n,n}\end{vmatrix}\qquad (1)$$

---

[1] Zasadę tego rozumowania spotykamy naprzód u JOACHIMSTHAL'a (l. c., str. 22) wprawdzie przy założeniu odwrotnem (porów. niżej Do-

w przypadku, gdy przez nie summa kwadratów zmiennych

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

na summę kwadratów nowych zmiennych

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$

przechodzi [1].

Znajdziemy, jakim warunkom zadość czynić muszą spółczynniki nowych zmiennych, czyli, jakie wtedy istnieć muszą związki między elementami wyznacznika M.

Aby dla wszystkich wartości zmiennych miała miejsce równość

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

czyli

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,n}y_n)^2+(a_{2,1}y_1+\ldots+a_{2,n}y_n)^2$$
$$+\ldots+(a_{n,1}y_1+\ldots+a_{n,n}y_n)^2;$$

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=(a_{1,1}^2+a_{2,1}^2+\ldots+a_{n,1}^2)y_1^2+(a_{1,2}^2+a_{2,2}^2+\ldots$$
$$a_{n,2}^2)y_2^2+\ldots+(a_{1,n}^2+a_{2,n}^2+\ldots+a_{n,n}^2)y_n^2+2(a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,1}a_{2,2}+$$
$$\ldots+a_{n,1}a_{n,2})y_1y_2+\ldots+2(a_{1,n-1}a_{1,n}+a_{2,n-1}a_{2,n}+\ldots$$
$$+a_{n,n-1}a_{n,n})y_{n-1}y_n,$$

---

datek Drugi. I, 1). Ogólniej w takimże celu (t. j. dla wyprowadzenia iloczynu dwu wyznaczników) użył jej później BRIOSCHI, *La teorica dei Determinanti* (wywód formuły 30).

[1] Jest ono szczególnym przypadkiem przekształcenia liniowego, skutkiem którego forma kwadratowa

$$A_{1,1}x_1^2+A_{1,2}x_1x_2+A_{2,2}x_2^2+A_{1,3}x_1x_3+\text{etc.}$$

przechodzi na formę kwadratową

$$A_{1,1}y_1^2+A_{1,2}y_1y_2+A_{2,2}y_2^2+A_{1,3}y_1y_3+\text{etc.}$$

elementy wyznacznika M winny być takiemi, żeby zadosyć czyniły

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

związkom [1], a mianowicie : n związkom typu

$$a_{1,i}^2 + a_{2,i}^2 + \ldots + a_{n,i}^2 = 1,$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, jakoteż $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ związkom typu

$$a_{1,i}a_{1,k} + a_{2,i}a_{2,k} + \ . \ . \ . \ + a_{n,i}a_{n,k} = 0,$$

(i, k przedstawiają kombinacye liczb 1, 2,...,n po dwie). Jeśli więc elementy wyznacznika M zadosyć czynią tym $\frac{n(n+1)}{2}$ warunkom, to zawsze [2]

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

W roztrząsanym tu przypadku przekształcenie liniowe (1) nazywa się *przekształceniem prostokątnem* [3] (orthogonal'nem).

---

(1) Euler, *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (*Novi Commentarii Ac. Sc. Imp. Petrolitanæ*, t. XV, za rok 1770, str. 75).

(2) Euler. l. c., str. 84.

(3) Nazwa ta tem się objaśnia, że takiem jest właśnie przekształcenie, za pomocą którego od prostokątnego układu osi spółrzędnych przechodzimy, nie zmieniając początku układu, do nowego układu również prostokątnego. Tak, gdy od osi prostokątnych X, Y przechodzimy do osi prostokątnych X', Y',

$$\begin{cases} x = x'\cos(XX') + y'\cos(XY'), \\ y = x'\cos(YX') + y'\cos(YY'); \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x'\cos(XX') - y'\sin(XX') \\ y = x'\sin(XX') + y'\cos(XX'), \end{cases}$$

Jako więc określenie przekształcenia prostokątnego możemy przyjąć równie dobrze: albo warunek, aby przez nie summa kwadratów zmiennych przechodziła na summę kwadratów nowych zmiennych; albo też (jednoznaczne z tym warunkiem) powyższe $\frac{n(n+1)}{2}$ związków między elementami modułu.

---

gdzie $a_{1,1} = \cos(XX')$ etc., to

$n = 2$:
$$\cos^2(XX') + \cos^2(YX') = 1,$$
$$\cos^2(XY') + \cos^2(YY') = 1;$$

$\binom{n}{2} = 1$:
$$\cos(XX')\cos(XY') + \cos(YX')\cos(YY') = 0.$$

Podobnie, gdy mamy z układu prostokątnego osi spółrzędnych X, Y, Z, nie zmieniając początku układu, przejść do nowego także prostokątnego X', Y', Z',

$$\begin{cases} x = x'\cos(XX') + y'\cos(XY') + z'\cos(XZ'), \\ y = x'\cos(YX') + y'\cos(YY') + z'\cos(YZ'), \\ z = x'\cos(ZX') + y'\cos(ZY') + z'\cos(ZZ'), \end{cases}$$

to, jak wiadomo,

$n = 3$:
$$\cos^2(XX') + \cos^2(YX') + \cos^2(ZX') = 1,$$
$$\cos^2(XY') + \cos^2(YY') + \cos^2(ZY') = 1,$$
$$\cos^2(XZ') + \cos^2(YZ') + \cos^2(ZZ') = 1;$$

$\binom{n}{2} = 3$:
$$\cos(XX')\cos(XY') + \cos(YX')\cos(YY') + \cos(ZX')\cos(ZY') = 0,$$
$$\cos(XY')\cos(XZ') + \cos(YY')\cos(YZ') + \cos(ZY')\cos(ZZ') = 0.$$
$$\cos(XZ')\cos(XX') + \cos(YZ')\cos(YX') + \cos(ZZ')\cos(ZX') = 0.$$

Kwadrat zaś odległości od początku układu, punktu, którego dawne spółrzędne są x, y, z, a nowe x', y', z', nie uległ zmianie, więc

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

§ 86.

Na mocy tych $\frac{n(n+1)}{2}$ warunków określających przekształcenie prostokątne, wypada:

I. Podnieśmy moduł do kwadratu (§ 46)

$$M^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}^2 + \dots + a_{n,1}^2, & \dots & ,a_{1,1}a_{1,n} + \dots + a_{n,1}a_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}a_{1,1} + \dots + a_{n,n}a_{1,n}, & \dots, & a_{1,n}^2 + \dots + a_{n,n}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & ,0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \dots & ,1 \end{vmatrix} = 1,$$

więc ([1]) : albo

$$M = +1,$$

albo

$$M = -1.$$

Moduł przekształcenia prostokątnego jest dodatną albo odjemną jednością.

([1]) Jacobi, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares...* (Crelle, *Journal*, t. XII, str. 9).

II. Skutkiem tego (§ 84) :

Wyznacznik układu n *funkcyj liniowych* n *zmiennych, uległego przekształceniu prostokątnemu, albo jest równy wyznacznikowi układu początkowego, alboteż różni się odeń znakiem.*

III. Summa

$$\begin{aligned}a_{1,i}x_1+\ldots+a_{n,i}x_n &= a_{1,i}(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,n}y_n)+\ldots \\ &\quad +a_{n,i}(a_{n,1}y_1+\ldots+a_{n,n}y_n) \\ &= (a_{1,i}a_{1,1}+\ldots+a_{n,i}a_{n,1})y_1+\ldots+(a_{1,i}^2+\ldots \\ &\quad +a_{n,i}^2)y_i+\ldots+(a_{1,i}a_{1,n}+\ldots+a_{n,i}a_{n,n})y_n \\ &= 1\,.\,y_i\end{aligned}$$

$(i=1,\ 2,\ldots,n)$. Zatem [1]

Jeśli od zmiennych $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ *przechodzimy do zmiennych* $y_1,\ y_2,\ldots,y_n$ *za pomocą przekształcenia prostokątnego*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ x_2 = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

to nawzajem, od zmiennych $y_1,\ y_2,\ldots,y_n$ *przejdziemy do zmiennych* $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ *za pomocą przekształcenia*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n \\ y_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

---

(1) CAUCHY, *Mémoire sur le changement des variables dans les intégrales*. (*Exercices d'anal. et de phys. math.*, t. IV, str. 140).

także prostokątnego (§ 18), a dwa te układy po n równań są pochodne jeden względem drugiego (§ 74), same zaś układy zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ i $y_i,\ldots,y_n$ posiadają własności układów sprzężonych (§ 83).

IV. Ponieważ przekształcenie (2) jest także prostokątnem, to między elementami modułu M podstawienia prostokątnego (1) ma jeszcze miejsce $\frac{n(n+1)}{2}$ związków (§ 85) takich [1]

$$a_{i,1}^2+a_{i,2}^2+\ldots+a_{i,n}^2=1,$$

$$a_{i,1}a_{k,1}+a_{i,2}a_{k,2}+\ldots+a_{i,n}a_{k,n}=0.$$

W wyznaczniku przekształcenia prostokątnego summa kwadratów elementów jakiegokolwiek rzędu jest jednością, summa zaś iloczynów odpowiednich elementów dwu jakichkolwiek rzędów równoległych jest zerem.

V. Mnożąc każdy z n związków

$$a_{1,1}a_{1,k}+\ldots+a_{i,1}a_{i,k}+\ldots+a_{n,1}a_{n,k}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$a_{1,k}^2+\ldots+a_{i,k}^2+\ldots+a_{n,k}^2=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$a_{1,n}a_{i,k}+\ldots+a_{i,n}a_{i,k}+\ldots+a_{n,n}a_{n,k}=0,$$

przez odpowiednią z ilości dołączonych w wyznaczniku M do elementów jego i-ego wiersza, t. j. przez

$$A_{i,1},\ldots,A_{i,k},\ldots,A_{i,n},$$

---

(1) Euler, l. c., str. 75. Punkt wyjścia u Eulera stanowią te wszystkie $n(n+1)$ związków (przy $n=3$).

a tak pomnożone związki dodając, otrzymamy

$$a_{1,k}(a_{1,1}A_{i,1}+\ldots+a_{1,n}A_{i,n})+\ldots+a_{i,k}(a_{i,1}A_{i,1}+\ldots+a_{i,n}A_{i,n})+\ldots$$

$$+a_{n,k}(a_{n,1}A_{i,1}+\ldots+a_{n,n}A_{i,n})=A_{i,k},$$

zkąd (§ 27) wypada [1]

$$a_{i,k}M=A_{i,k},$$

więc (I), *albo* $A_{i,k}=+a_{ik}$, *alboteż* $A_{i,k}=-a_{i,k}$. Tem się właśnie objaśnia, że powyższe przekształcenie (2), odwrotne względem przekształcenia (1), zgadza się ze związkami (2) § 82-ego.

VI. Tę zależność możemy uogólnić. Związek (§ 68)

$$\Sigma\pm A_{\eta,p}\ldots A_{\zeta,s}=D^{m-1}\frac{\partial^m D}{\partial a_{\eta,p}\ldots\partial a_{\zeta,s}},$$

na mocy wyprowadzonej (V) własności dla modułu przekształcenia prostokątnego, przechodzi na następujący:

$$M^m\Sigma\pm a_{\eta,p}\ldots a_{\zeta,s}=M^{m-1}\frac{\partial^m M}{\partial a_{\eta,p}\ldots\partial a_{\zeta,s}},$$

t. j. [2] (§§ 50, 61)

$$M\overset{(m)}{d}_{i,k}=\overset{(m)}{A}_{i,k},$$

więc *albo* $\overset{(m)}{A}_{i,k}=\overset{(m)}{d}_{i,k}$, *alboteż* $\overset{(m)}{A}_{i,k}=-\overset{m}{d}_{i,k}$.

§ 87.

Ponieważ n^2 spółczynników przekształcenia prostokątnego funkcyi (lub funkcyj) zmiennych $x_1, x_2,\ldots,x_n$ na funkcyą (lub funkcye) zmiennych nowych $y_1, y_2,\ldots,y_n$ zadosyć czynić

---

[1] JACOBI, l. c., str. 9.
[2] JACOBI, ibidem.

muszą $\frac{n(n+1)}{2}$ związkom zasadniczym (§ 85); wszystkie więc mogą być wyrażone w funkcyi

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

ilości dowolnych. Nazwijmy te ilości

$$\left\{\begin{array}{llll} b_{1,2}, & b_{1,3}, \ldots, & b_{1,n-1}, & b_{1,n}, \\ & b_{2,3}, \ldots, & b_{2,n-1}, & b_{2,n}, \\ & & \ldots\ldots\ldots, & \\ & & b_{n-2,n-1}, & b_{n-2,n}, \\ & & & b_{n-1,n}, \end{array}\right. \qquad (\alpha)$$

Zależność między dawnemi zmiennemi i nowemi jest określoną przez n związków jednoczesnych (1) § 85-ego. Możemy przedstawić ją jednak, wprowadzając n nowych ilości $z_1, z_2, \ldots, z_n$, przy pomocy $2n$ jednoczesnych związków (czyli dwu jednoczesnych układów po n związków) takich:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 = z_1 + b_{1,2}z_2 + b_{1,3}z_3 + \ldots + b_{1,n-1}z_{n-1} + b_{1,n}z_n \\ x_2 = -b_{1,2}z_1 + z_2 + b_{2,3}z_3 + \ldots + b_{2,n-1}z_{n-1} + b_{2,n}z_n, \\ x_3 = -b_{1,3}z_1 - b_{2,3}z_2 + z_3 + \ldots + b_{3,n-1}z_{n-1} + b_{3,n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = -b_{1,n}z_1 - b_{2,n}z_2 - b_{3,n}z_3 - \ldots - b_{n-1,n}z_{n-1} + z_n, \end{array}\right. \qquad (\beta) \\ \\ \left\{\begin{array}{l} y_1 = z_1 - b_{1,2}z_2 - b_{1,3}z_3 - \ldots - b_{1,n-1}z_{n-1} - b_{1,n}z_n, \\ y_2 = b_{1,2}z_1 + z_2 - b_{2,3}z_3 - \ldots - b_{2,n-1}z_{n-1} - b_{2,n}z_n, \\ y_3 = b_{1,3}z_1 + b_{2,3}z_2 + z_3 - \ldots - b_{3,n-1}z_{n-1} - b_{3,n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = b_{1,n}z_1 + b_{2,n}z_2 + b_{3,n}z_3 + \ldots + b_{n-1,n}z_{n-1} + z_n, \end{array}\right. \qquad (\gamma) \end{array}\right.$$

byle n^2 spółczynników $a_{1,1},\ldots,a_{1,n},\ldots,a_{n,n}$ tak wyrazić w funkcyi $\frac{n(n-1)}{2}$ ilości (α), iżby warunkom prostokątności przekształcenia (§ 85) stało się zadość.

Z każdych dwu odpowiadających sobie związków (β) i (γ)

$$\begin{cases} x_i = -b_{1,i}z_1 - \ldots - b_{i-1,i}z_{i-1} + z_i + b_{i,i+1}z_{i+1} + \ldots + b_{i,n}z_n, \\ y_i = \quad b_{1,i}z_1 + \ldots + b_{i-1,i}z_{i-1} + z_i - b_{i,i+1}z_{i+1} - \ldots - b_{i,n}z_n, \end{cases}$$

wypada ($i = 1, 2,\ldots,n$)

$$x_i + y_i = 2z_i. \tag{δ}$$

Układy (β) i (γ) są względem siebie pochodne (§ 74): spólny wyznacznik tych układów jest

$$\begin{vmatrix} 1, & b_{1,2}, & b_{1,3}, & \ldots, & b_{1,n-1}, & b_{1,n} \\ -b_{1,2}, & 1, & b_{2,3}, & \ldots, & b_{2,n-1}, & b_{2,n} \\ -b_{1,3}, & -b_{2,3}, & 1, & \ldots, & b_{3,n-1}, & b_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -b_{1,n}, & -b_{2,n}, & -b_{3,n}, & \ldots, & -b_{n-1,n}, & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{B}.$$

Jeśli w tym wyznaczniku B ilość dołączoną do elementu, zajmującego w i-ym wierszu miejsce k-te, t. j. iloczyn $(-1)^{i+k}$ przez wyznacznik ($n-1$)-ego stopnia, otrzymamy z wyznacznika B w skutek opuszczenia w nim i-ego wiersza i k-ej kolumny (§ 25), nazwiemy $\mathrm{B}_{i,k}$, tak, że wyznacznik dołączony do wyznacznika B (§ 65) jest

$$\begin{vmatrix} \mathrm{B}_{1,1}, & \mathrm{B}_{1,2}, \ldots, & \mathrm{B}_{1,n} \\ \mathrm{B}_{2,1}, & \mathrm{B}_{2,2}, \ldots, & \mathrm{B}_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{B}_{n,1}, & \mathrm{B}_{n,2}, \ldots, & \mathrm{B}_{n,n} \end{vmatrix}.$$

to ze związków (β) i (γ) wypada $2n$ jednoczesnych związków odwrotnych (§ 82)

$$\left\{\begin{array}{l}
Bz_1 = B_{1,1}x_1 + B_{2,1}x_2 + \ldots + B_{i,1}x_1 + \ldots + B_{n,1}x_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bz_i = B_{1,i}x_1 + B_{2,i}x_2 + \ldots + B_{i,i}x_i + \ldots + B_{n,i}x_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bz_n = B_{1,n}x_1 + B_{2,n}x_2 + \ldots + B_{i,n}x_i + \ldots + B_{n,n}x_n; \\
Bz_1 = B_{1,1}y_1 + B_{1,2}y_2 + \ldots + B_{1,i}y_i + \ldots + B_{1,n}y_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bz_i = B_{i,1}y_1 + B_{i,2}y_2 + \ldots + B_{i,i}y_i + \ldots + B_{i,n}y_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bz_n = B_{n,1}y_1 + B_{n,2}y_2 + \ldots + B_{n,i}y_i + \ldots + B_{n,n}y_n.
\end{array}\right.$$

Pomnożywszy każde równanie przez 2, a następnie w każdem zastępując $2z_i$, według (δ), przez $x_i + y_i$, mamy z tych równań

$$\left\{\begin{array}{llll}
By_1 = (2B_{1,1}-B)x_1 + 2B_{2,1}x_2 + \ldots + & 2B_{i,1}x_i + \ldots + & 2B_{n,1}x_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
By_i = \quad 2B_{1,i}x_1 + 2B_{2,i}x_2 + \ldots + & (2B_{i,i}-B)x_i + \ldots + & 2B_{n,i}x_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
By_n = \quad 2B_{1,n}x_1 + 2B_{2,n}x_2 + \ldots + & 2B_{i,n}x_i + \ldots + & (2B_{n,n}-B)x_n; \\
Bx_1 = (2B_{1,1}-B)y_1 + 2B_{1,2}y_2 + \ldots + & 2B_{1,i}y_i + \ldots + & 2B_{1,n}y_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bx_i = \quad 2B_{i,1}y_1 + 2B_{i,2}y_2 + \ldots + & (2B_{i,i}-B)y_i + \ldots + & 2B_{i,n}y_n, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\
Bx_n = \quad 2B_{n,1}y_1 + 2B_{n,2}y_2 + \ldots + & 2B_{n,i}y_i + \ldots + & (2B_{n,n}-B)y_n,
\end{array}\right.$$

czyli, po podzieleniu każdego równania przez B i nazwaniu

$$\left.\begin{aligned}\frac{2B_{i,k}}{B}&=a_{i,k},\\[2ex] \frac{2B_{i,i}-B}{B}&=a_{i,i},\end{aligned}\right\}\qquad(\varepsilon)$$

$2n$ jednoczesnych związków

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=a_{1,1}x_1+a_{2,1}x_2+\ldots+a_{i,1}x_i+\ldots+a_{n,1}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_i=a_{1,i}x_1+a_{2,i}x_2+\ldots+a_{i,i}x_i+\ldots+a_{n,i}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_n=a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+\ldots+a_{i,n}x_i+\ldots+a_{n,n}x_n,\end{array}\right.\qquad(\eta)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=a_{1,1}y_1+a_{1,2}y_2+\ldots+a_{1,i}y_i+\ldots+a_{1,n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_i=a_{i,1}y_1+a_{i,2}y_2+\ldots+a_{i,i}y_i+\ldots+a_{i,n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n=a_{n,1}y_1+a_{n,2}y_2+\ldots+a_{n,i}y_i+\ldots+a_{n,n}y_n.\end{array}\right.\qquad(\zeta)$$

Z tych jednoczesnych związków (η) i (ζ) wypada tożsamościowo

$$\begin{aligned}y_i=\;&a_{1,i}(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,i}y_i+\ldots+a_{1,n}y_n)+\\ &\qquad\ldots+a_{n,i}(a_{n,1}y_1+\ldots+a_{n,i}y_i+\ldots+a_{n,n}y_n)\\ =\;&(a_{1,i}a_{1,1}+\ldots+a_{i,i}a_{i,1}+\ldots+a_{n,i}a_{n,1})y_1+\\ &\qquad\ldots+(a_{1,i}^2+\ldots+a_{i,i}^2+\ldots+a_{n,i}^2)y_i+\\ &\qquad\ldots+(a_{1,i}a_{1,n}+\ldots+a_{i,i}a_{i,n}+\ldots+a_{n,i}a_{n,n})y_n,\end{aligned}$$

$(i=1,..,n)$, zkąd wypada n związków

$$\overset{2}{a}_{1,i}+\overset{2}{a}_{2,i}+\ldots+\overset{2}{a}_{n,i}=1,$$

oraz $\binom{n}{2}$ związków

$$a_{1,i}a_{1,k}+a_{2,i}a_{2,k}+\ldots+a_{n,i}a_{n,k}=0,$$

$(k=1, 2,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n)$. Spółczynniki zatem tak przekształcenia (η), za pomocą którego od zmiennych nowych przechodzimy do zmiennych dawnych, jak i przekształcenia (ζ), za pomocą którego, odwrotnie, od zmiennych dawnych przechodzimy do zmiennych nowych, zadosyć czynią warunkom przekształcenia prostokątnego (§§ 85, 86 III, IV).

Przekształcenie

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=a_{1,1}y_1+a_{1,2}y_2+\ldots+a_{1,n}y_n, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ x_n=a_{n,1}y_1+a_{n,2}y_2+\ldots+a_{n,n}y_n; \end{array}\right. \quad \mathrm{M}=\left|\begin{array}{c} a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,n} \\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{n,1},a_{n,2},\ldots,a_{n,n} \end{array}\right|, \quad \zeta)$$

przy określonych przez związki (ε) *elementach modułu* M, *jako funkcyj* $\frac{n(n-1)}{2}$ *ilości dowolnych* (α), *jest przekształceniem prostokątnem* ([1]).

([1]) Tę ogólną metodę rozwiązania zadania podał CAYLEY, *Sur quelques propriétés des déterminants gauches* (CRELLE, *Journal*, t. XXXII, str. 119-121). Można, jak to robi CAYLEY, rozwiązanie uogólnić — choć to jest zbyteczne — przyjmując za główne elementy wyznacznika B wielkości dowolne, zamiast jedności. — Warunek, aby wszystkie spółczynniki przekształcenia były całkowitemi, postawili w swych badaniach: HERMITE, *Sur une question relative à la théorie des nombres* (LIOUVILLE, *Journal*, t. XIV, str. 21); WEIHRAUCH, *Zur Construction einer unimodularen Determinante* (SCHLOEMILCH, *Zeitschrift*, rocznik XXI, str. 34).

Roztrząsnąć jeszcze należy kwestyę czy moduł tego przekształcenia prostokątnego,

$$M=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{B^n}\begin{vmatrix} 2B_{1,1}-B, & 2B_{1,2}, & \ldots, & 2B_{1,n} \\ 2B_{2,1}, & 2B_{2,2}-B, & \ldots, & 2B_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2B_{n,1}, & 2B_{n,2}, & \ldots, & 2B_{n,n}-B \end{vmatrix},$$

jest dodatną, czyteż odjemną jednością (§ 86, I).

Z powyższego wypada

$$B^nM=\begin{vmatrix} 2B_{1,1}-B, & 2B_{1,2}, & \ldots, & 2B_{1,n} \\ 2B_{2,1}, & 2B_{2,2}-B, & \ldots, & 2B_{2,n} \\ & & & \\ 2B_{n,1}, & 2B_{n,2}, & \ldots, & 2B_{n,n}-B \end{vmatrix},$$

mnożąc ten wyznacznik przez wyznacznik (¹)

$$B=\begin{vmatrix} 1, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ -b_{1,2}, & 1, & \ldots, & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{1,n}, & -b_{2,n}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix},$$

(¹) Z rozłożenia wyznacznika B według elementów wiersza (§ 25) wypada wogóle (§ 27):

$$-b_{1,k}B_{i,1}-b_{2,k}B_{i,2}-\ldots+b_{k,n}B_{i,n}$$

$=B$, lub $=0$, stosownie do tego, czy $i=k$, czyteż i jest różne od k.

otrzymujemy w iloczynie (§ 44)

$$B^{n+1}M = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & \ldots & ,c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1}, & \ldots & ,c_{n,n} \end{vmatrix},$$

gdzie, przy $i<k$,

$$c_{i,k} = -2B_{i,1}b_{1,k} - \ldots - (2B_{i,i} - B)b_{i,k} - \ldots - 2B_{i,k-1}b_{k-1,k} + 2B_{i,k} + \ldots + 2B_{i,n}b_{k,n}$$

$$= 2(-B_{i,1}b_{1,k} - \ldots - B_{i,i}b_{i,k} - \ldots - B_{i,k-1}b_{k-1,k} + B_{i,k} + B_{i,k+1}b_{k,k+1} + \ldots + B_{i,n}b_{k,n}) + Bb_{i,k}$$

$$= Bb_{i,k};$$

przy $i=k$,

$$c_{i,i} = -2B_{i,1}b_{1,i} - \ldots - 2B_{i,i-1}b_{i-1,i} + (2B_{i,i} - B) + \ldots + 2B_{i,n}b_{i,n}$$

$$= 2(-B_{i,1}b_{1,i} - \ldots - B_{i,i-1}b_{i-1,i} + B_{i,i} + B_{i,i+1}b_{i,i+1} + \ldots + \ldots + B_{i,n}b_{i,n}) - B = 2B - B$$

$$= B;$$

przy $i>k$

$$c_{i,k} = -2B_{i,1}b_{1,k} - \ldots - 2B_{i,k-1}b_{k-1,k} + 2B_{i,k} + \ldots + 2(B_{i,i} - B)b_{k,i} + \ldots + 2B_{i,n}b_{k,n}$$

$$= (-2B_{i,1}b_{1,k} - \ldots - B_{i,k-1}b_{k-1,k} + B_{i,k} + B_{i,k+1}b_{k,k+1} + \ldots + B_{i,i}b_{k,i} + \ldots + B_{i,n}b_{k,n}) - Bb_{k,i}$$

$$= -Bb_{k,i}.$$

Więc

$$B^{n+1}M = \begin{vmatrix} B\ , & Bb_{1,2}, & Bb_{1,3}, \ldots, & Bb_{1,n} \\ -Bb_{1,2}, & B\ , & Bb_{2,3}, \ldots, & Bb_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -Bb_{1,n}, & -Bb_{2,n}, & -Bb_{3,n}, \ldots, & B \end{vmatrix}$$

$$= B^n \begin{vmatrix} 1, & b_{1,2}, .., & b_{2,n} \\ -b_{1,2}, & 1, & b_{2,n} \\ . & . & . \\ -b_{1,n}, & -b_{2,n}, ..., & 1 \end{vmatrix} = B^n . B,$$

czyli

$$B^{n+1} M = B^{n+1},$$

zkąd wypada (¹)

$$M = +1.$$

Określone za pomocą związków (ε) *w funkcyi* $\frac{n(n-1)}{2}$ *ilości dowolnych* (α) *przskształcenie prostokątne* (ζ) *jest przekształceniem o module jedność.*

Ażeby zaś mieć przekształcenie o module -1, należy tylko, albo w wyznaczniku **M** przestawić dwa rzędy równoległe (§ 19), albo wszystkie elementy jednego rzędu pomnożyć (§ 29) przez -1.

§ 88.

Zastosujmy metodę w poprzedzającym § wyłożoną do kilku najprostszych przypadków.

$n=2$. To dowolną jest $\binom{n}{2}=1$ ilość: nazwijmy ją λ. Wtedy

$$B = \begin{vmatrix} 1, & \lambda \\ -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2,$$

wyznacznik zaś systematu dołączonego jest

$$\begin{vmatrix} B_{1,1}, & B_{1,2} \\ B_{2,1}, & B_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \lambda \\ -\lambda, & 1 \end{vmatrix}.$$

(¹) Baltzer, l. c., w czwartem wydaniu str. 176.

skutkiem czego, według formuł (ε),

$$a_{1,1}=\frac{2B_{1,1}-B}{B}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2};\quad a_{1,2}=\frac{2B_{1,2}}{B}=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2};$$

$$a_{2,1}=\frac{2B_{2,1}}{B}=-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2};\quad a_{2,2}=\frac{2B_{2,2}-B}{B}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

i

$$M=\begin{vmatrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{vmatrix}=+1;$$

przy jakiejkolwiek więc wartości λ, przekształcenie

$$\begin{cases} x_1=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}y_1+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}y_2, \\ x_2=-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}y_1+\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}y_2 \end{cases}$$

jest prostokątnem, o module jedność. Jeśli ilość dowolną wyrazimy inaczej, np.

$$-\lambda=tg\,\frac{1}{2}\,\alpha,$$

to przekształcenie

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}y_1-\dfrac{2tg\,\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}y_2, \\[2ex] x_2=\dfrac{2tg\,\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}y_1+\dfrac{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}y_2, \end{cases}$$

czyli $\left(tg\,\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)$ przekształcenie [1]

$$\begin{cases} x_1 = y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha, \\ x_2 = y_1\sin\alpha + y_2\cos\alpha, \end{cases}$$

przy jakiejkolwiek wartości kąta α, jest przekształceniem prostokątnem o module jedność.

$n=3$. Ilości dowolnych jest $\binom{n}{2}=3$; nazwijmy je $\nu, -\mu, \lambda$; przez nie wyrazimy wszystkie $n^2=9$ spółczynników ogólnego przekształcenia prostokątnego [2]. Jest więc

$$B = \begin{vmatrix} 1, & \nu, & -\mu \\ -\nu, & 1, & \lambda \\ \mu, & -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2;$$

$$\begin{vmatrix} B_{1,1}, & B_{1,2}, & B_{1,3} \\ B_{2,1}, & B_{2,2}, & B_{2,3} \\ B_{3,1}, & B_{3,2}, & B_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\lambda^2, & \lambda\mu+\nu, & \nu\lambda-\mu \\ \lambda\mu-\nu, & 1+\mu^2, & \mu\nu+\lambda \\ \nu\lambda+\mu, & \mu\nu-\lambda, & 1+\nu^2 \end{vmatrix};$$

$$M = \begin{vmatrix} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & 2\,\frac{\lambda\mu+\nu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & 2\,\frac{\nu\lambda-\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ 2\,\frac{\lambda\mu-\nu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & 2\,\frac{\mu\nu+\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ 2\,\frac{\nu\lambda+\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & 2\,\frac{\mu\nu-\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{vmatrix} = 1,$$

---

(1) Porównaj § 85, przypisek.

(2) EULER (l. c., str. 101) daje ogólne wyrażenia tych spółczynników w funkcyi czterech ilości dowolnych; wyrażenia te, gdy stale przyjmiemy jedną z nich (p) równą zeru, przechodzą na te, które tu są wyprowadzone, a które podał RODRIGUES, *Sur les lois géométriques, qui regissent les déplacements d'un système solide* (LIOUVILLE, *Journal*, t, V, str. 405).

a przekształcenie

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}y_1+2\,\frac{\lambda\mu+\nu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_2+2\,\frac{\nu\lambda-\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_3,\\ x_2 &= 2\,\frac{\lambda\mu-\nu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}y_1+\frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_2+2\,\frac{\mu\nu+\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_3,\\ x_3 &= 2\,\frac{\nu\lambda+\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_1+2\,\frac{\mu\nu-\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_2+\frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,y_3 \end{aligned}\right.$$

jest prostokątnem, o module jedność — przy jakichkolwiek wartościach λ, μ i ν.

$n=4$. Ilości dowolnych $\binom{n}{2}=6$: nazwijmy je $\nu, -\mu, \rho, \lambda, \sigma, \tau$; przez nie wyrazimy wszystkie $n^2=16$ spółczynników ogólnego przekształcenia prostokątnego (¹). Mamy zatem

$$B=\begin{vmatrix} 1, & \nu, & -\mu, & \rho \\ -\nu, & 1, & \lambda, & \sigma \\ \mu, & -\lambda, & 1, & \tau \\ -\rho, & -\sigma, & -\tau, & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2+\sigma^2+\tau^2+(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau)^2,$$

(¹) EULER (l. c., str. 102) daje bez dowodu podobne wyrażenia przez 8 ilości dowolnych. CAYLEY (l. c., str. 122) wyprowadza podane tu wyrażenia, jako zastosowanie danej przezeń ogólnej metody (§ 87). Pewne nieścisłości w formułach, które tam zostały przeoczone, nie znajdują się już w takichże wyrażeniach ponownie przezeń danych w *Sept différents mémoires d'analyse*, N° 6. *Recherches ultérieures sur les déterminants gauches* (CRELLE, *Journal*, t. L, str. 310). Zachowuję oznaczenie ilości dowolnych, jakiego CAYLEY użył w *Recherches ultérieures*...

elementy zaś wyznacznika dołączonego są

$$
\begin{array}{ll}
B_{1,1}= \ 1+\lambda^2+\sigma^2+\tau^2, & B_{1,2}=-\nu+\mu\lambda-\rho\sigma-\tau(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), \\
B_{2,1}= \ \nu+\lambda\mu-\sigma\rho+\tau(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), & B_{2,2}= \ 1+\mu^2+\rho^2+\tau^2, \\
B_{3,1}=-\mu+\lambda\nu-\tau\rho-\sigma(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), & B_{3,2}= \ \lambda+\mu\nu-\sigma\tau+\rho(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), \\
B_{4,1}= \ \rho-\tau\mu+\sigma\nu+\lambda(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau); & B_{4,2}= \ \sigma-\rho\nu+\tau\lambda+\mu(\lambda\rho+\mu\tau+\nu\tau); \\
B_{1,3}= \ \mu+\nu\lambda-\rho\tau+\sigma(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), & B_{1,4}=-\rho-\mu\tau+\nu\sigma-\lambda(\lambda\rho+\mu\tau+\nu\tau), \\
B_{2,3}=-\lambda+\nu\mu-\sigma\tau-\rho(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), & B_{2,4}=-\sigma+\lambda\tau-\nu\rho-\mu(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), \\
B_{3,3}= \ 1+\nu^2+\rho^2+\sigma^2, & B_{3,4}=-\tau-\lambda\sigma+\mu\rho-\nu(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau), \\
B_{4,3}= \ \tau+\rho\mu-\sigma\lambda+\nu(\lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau); & B_{4,4}= \ 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2.
\end{array}
$$

Przy pomocy tych wyrażeń, można już, według wzorów (ε) § 87-ego, znaleść wyrażenie szesnastu spółczynników przekształcenia czterech zmiennych, które, przy jakichkolwiek wartościach ilości λ, μ, ν, ρ, σ, τ, jest prostokątnem i o module jedność.

§ 89.

Oznaczmy formę, lub układ kilku form, głoską f. Niechaj f, wskutek przekształcenia liniowego o module M, przechodzi na formę, lub na układ kilku form F. Jeśli, wogóle, ze spółczynników i zmiennych, zachodzących w f, w pewien sposób utworzymy funkcyę całkowitą φ, zaś przez Φ nazwiemy funkcyę, w podobny sposób powstałą z odpowiednich spółczynników i zmiennych, zachodzących w F, i jeśli ma miejsce związek

$$\Phi = M^p \varphi,$$

przy całkowitem p, to mówimy, że funkcya φ jest *hyperdeterminantem* (1) («nadwyznacznikiem»?) formy, lub układu

(1) CAYLEY, *Mémoire sur les hyperdéterminants* (CRELLE, *Journal*, t. XXX, str. 1). Nazwy : invariant i t. d. wprowadził SYLVESTER (Philosophical Magazine, 1851, II, str. 396 i w różnych późniejszych pracach).

form f. W przypadku przekształcenia o module jedność (§ 82), $M = +1$, powyższy związek ogólny przeszedłby na szczególny

$$\Phi = \varphi.$$

Jeśli hyperdeterminant jest stopnia zero względem zmiennych, czyli jest funkcyą samych tylko spółczynników, zachodzących w f, to nazywa się *niezmiennikiem* (¹) (invariant), gdy zaś jest wyższego stopnia względem zmiennych, to jest, gdy one istotnie weń wchodzą, nazywa się *spółzmiennikiem* (²) (covariant).

Wogóle «w nauce o formach bada się własności takich cał- » kowitych połączeń spółczynników i zmiennych, które tylko » pewną potęgą modułu odróżniającą się wartość przyjmują, » gdy się je dla początkowej, lub dla przekształconej (³) funkcyi » utworzy. Jeśli pewne połączenie takie zawiera tylko spółczyn- » niki, to nazywa się niezmiennikiem; jeśli zaś zawiera także » i zmienne, to nazywane bywa spółzmiennikiem» (⁴).

Np. forma

$$f = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$$

wskutek przekształcenia

$$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2; \end{cases} \qquad M = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

(¹) Trzaska, l. c., str. 1074.

(²) Trzaska, ibidem.

(³) liniowo.

(⁴) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Lipsk, 1872, str. 3.

przechodzi na formę

$$F = (a_0\alpha_2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2)y_1^2 + 2[a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta]y_1y_2$$
$$+ (a_0\beta^2 + 2a_1\beta\delta + a_2\delta^2)y_2^2,$$

którą możemy tak pisać

$$F = A_0y_1^2 + 2A_1y_1y_2 + A_2y_2^2.$$

Gdy zaś utworzymy funkcyę spółczynników formy f,

$$\rho = a_0a_2 - a_1^2,$$

oraz podobną ze spółczynników odpowiednich formy F

$$P = A_0A_2 - A_1^2,$$

to spostrzeżemy, że

$$A_0A_2 - A_1^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(a_0a_2 - a_1^2),$$

czyli

$$P = M^2\rho,$$

więc funkcya $a_0a_2 - a_1^2$ (wyróżnik formy f, § 81, 1°) jest niezmiennikiem formy $a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$

Podobnie, gdy dany jest układ f dwu form

$$\begin{cases} f_1 = a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2, \\ f_2 = b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2, \end{cases}$$

przechodzący wskutek przekształcenia liniowego

$$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2; \end{cases} \qquad M = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

na układ F form

$$\begin{cases} F_1 = A_0 y_1^2 + A_1 y_1 y_2 + A_2 y_2^2, & A_0 = a_0\alpha^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2, \\ & A_1 = 2a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2a_2\gamma\delta. \\ & A_2 = a_0\beta^2 + a_1\beta\delta + a_2\delta^2; \\ F_2 = B_0 y_1^2 + B_1 y_1 y_2 + B_2 y_2^2, & B_0 = b_0\alpha^2 + b_1\alpha\gamma + b_2\gamma^2, \\ & B_1 = 2b_0\alpha\beta + b_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2b_2\gamma\delta, \\ & B_2 = b_0\beta^2 + b_1\beta\delta + b_2\delta^2, \end{cases}$$

to biorąc funkcyę spółczynników form f,

$$\chi = 2a_0 b_2 - a_1 b_1 + 2a_2 b_0,$$

i odpowiednią funkcyę spółczynników form F,

$$X = 2A_0 B_2 - A_1 B_1 + 2A_2 B_0,$$

znajdziemy, podstawiając wypisane wyrażenia spółczynników A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 i B_2, że

$$2A_0B_2 - A_1B_1 + 2A_2B_0 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(2a_0b_2 - a_1b_1 + 2a_2b_0),$$

$$X = M^2\chi;$$

funkcya zatem χ jest niezmiennikiem układu dwu form f_1 i f_2.

Dla tychże dwu form f utwórzmy funkcyę

$$2\psi = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

czyli

$$\psi = (a_0b_1 - a_1b_0)x_1^2 + 2(a_0b_2 - a_2b_0)x_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & -2x_1x_2 \\ a_2\,, & a_0\,, & a_1 \\ b_2\,, & b_0\,, & b_1 \end{vmatrix},$$

i podobną dla przekształconych form F

$$\Psi = \begin{vmatrix} y_1^2, & y_2^2, & -2y_1y_2 \\ A_2, & A_0, & A_1 \\ B_2, & B_0, & B_1 \end{vmatrix}.$$

Zważywszy, że przekształcenie odwrotne względem tu zastosowanego daje nam (§ 82)

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\delta x_1 - \beta x_2}{M}, \\ y_2 = \dfrac{-\gamma x_1 + \alpha x_2}{M}, \end{cases}$$

możemy funkcyę Ψ tak przedstawić:

$$\Psi = \frac{1}{M^2}\begin{vmatrix} x_2^2\beta^2 - 2x_1x_2\beta\delta + x_1^2\delta^2, & x_2^2\alpha^2 - 2x_1x_2\alpha\gamma + x_1^2\gamma^2, & 2x_2^2\alpha\beta - 2x_1x_2(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2x_1^2\gamma\delta \\ a_0\beta^2 + a_1\beta\delta + a_2\delta^2, & a_0\alpha^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2, & 2a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2a_2\gamma\delta \\ b_0\beta^2 + b_1\beta\delta + b_2\delta^2, & b_0\alpha^2 + b_1\alpha\gamma + b_2\gamma^2, & 2b_0\alpha\beta + b_1(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2b_2\gamma\delta \end{vmatrix}$$

zkąd (§§ 28, 29, 20, 19)

$$\Psi = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^3}{M^2}\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & -2x_1x_2 \\ a_2 & a_0, & a_1 \\ b_2, & b_0, & b_1 \end{vmatrix},$$

czyli

$$\Psi = M\psi.$$

Funkcya zatem ψ jest spółzmiennikiem danych form f_1 i f_2.

Jeśli dwa układy zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ldots,$$

$$\xi_1,\ \xi_2,\ldots,$$

są sprzężone (§ 83) i wskutek przekształcenia liniowego o module M przechodzą odpowiednio na układy

$$y_1,\ y_2,\ldots,$$

$$\eta_1,\ \eta_2,\ldots,$$

układ zaś f danych form zmiennych x_1, $x_2,\ldots$, ze spółczynnikami a_0, $a_1,\ldots,\ldots$, w skutek tegoż przekształcenia przechodzi na układ form F (więc o zmiennych y_1, $y_2,\ldots$), ze spółczynnikami A_0, $A_1,\ldots,\ldots$, to funkcya spółczynników, zachodzących w f, oraz zmiennych ξ_1, $\xi_2,\ldots$,

$$\varphi = \varphi(a_0,\ a_1,\ldots,\ldots,\xi_1,\ \xi_2,\ldots),$$

w razie, gdy po przekształceniu utworzona funkcya odpowiednia

$$\Phi = \Phi(A_0,\ A_1,\ldots,\ldots,\eta_1,\ \eta_2,\ldots)$$

zadosyć czyni związkowi

$$\Phi = M^{\nu}\varphi,$$

nazywa się (funkcya φ) *preciwzmiennikiem* (1) [contravariant, zugehörige Form (2)] danego układu form f. Np. jeśli

$$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \varepsilon y_3, \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_3 + \zeta y_3, \\ x_3 = \rho y_1 + \sigma y_2 + \tau y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1 = \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 + \rho\xi_3, \\ \eta_2 = \beta\xi_1 + \delta\xi_2 + \sigma\xi_3, \\ \eta_3 = \varepsilon\xi_1 + \zeta\xi_2 + \tau\xi_3; \end{cases} \quad M = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \varepsilon \\ \gamma, & \delta, & \zeta \\ \rho, & \sigma, & \tau \end{vmatrix},$$

$$f = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2,$$

---

(1) Sągajło, l. c., str. 143.

(2) Aronhold, l. c., str, 315.

to funkcya

$$\varphi = (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}^2)\xi_1^2 + 2(a_{1,3}a_{2,3} - a_{1,2}a_{3,3})\xi_1\xi_2 + (a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}^2)\xi_2^2$$
$$+ 2(a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2})\xi_1\xi_3 + 2(a_{1,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,1})\xi_2\xi_3$$
$$+ (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)\xi_3^2$$

(będąca formą kwadratową o zmiennych ξ_1, ξ_2, ξ_3) jest przeciwzmiennikiem danej formy f, co można sprawdzić przez dokonanie przekształcenia formy f, utworzenie dla formy F odpowiedniej funkcyi Φ i przez wyrażenie spółczynników oraz zmiennych η_1, η_2, η_3 funkcyi Φ za pomocą spółczynników formy f, oraz zmiennych ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Funkcye, których zależność od danych form nie zmienia się wskutek liniowego przekształcenia, więc : niezmienniki, spółzmienniki, przeciwzmienniki, można nazwać ogólnie *funkcyami* (albo : formami) *towarzyszącemi danym* (concomitant : « spółtowarzyszący, » « spółidący w orszaku »). A jeśli w tego rodzaju funkcyę wchodzą jednocześnie oba układy zmiennych, t. j. zmienne zachodzące w danych formach i zmienne układu sprzężonego,

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots),$$

przy

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots, \ldots, y_1, y_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots) =$$
$$= M^p \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots),$$

to taką funkcyę możemy nazwać *funkcyą towarzyszącą mieszaną* [mixed concomitant (1), divariant (2), Zwischenform (3)]. Taką jest np. funkcya

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n,$$

---

(1) SYLVESTER,

(2) SALMON, *Lessons intr. t. t. modern higher Algebra* (w trzeciem wydaniu str. 114).

(3) ARONHOLD, l. c., str. 336.

25

gdyż (§ 83) [p ma więc wartość zero]:

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \ldots + y_n\eta_n = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Badania własności rozmaitych takich funkcyj, posiadających tę spólną cechę, że ich stosunek względem danych form nienarusza się w skutek przekształcenia liniowego, odniedawna [1] są systematycznie prowadzone : jednak już tworzą charakterystyczną w Matematyce gałąź oddzielną [2], nazywaną już-to « Nową Algebrą wyższą », już-też « Algebrą przekształceń liniowych », i nader ważne znajdują zastosowania [3].

---

[1] GAUSS, w *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) zajmuje się badaniem funkcyj towarzyszących formom kwadratowym podwójnym i potrójnym. BOOLE w *Cambridge. Mat. Journal* (t. III, 1841) dowodzi ogólnie niezmienności wyróżników. CAYLEY'go prace (*Camb. M. J.* t. IV, 1845, i w CRELLE, *Journal*, t. XXX, 1846) wykazały istnienie funkcyj, posiadających charakter niezmienności, nie będących jednak wyróżnikami, posłużyły różnym uczonym za punkt wyjścia do nowych badań w tym kierunku, z których najwybitniejsze są : SYLVESTER'*a On the principles of the Calculus of Forms* (*C. a. D. M. J.*, t. VII, 1852); HERMITE'a (tamże, t. IX, 1854); CAYLEY'go *Memoirs upon Quantics* (w różnych tomach *Philosophical Transactions*, poczynając od t. CXLIV, 1854); ARONHOLD'a *Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie* (CRELLE, *Journal*, t. LXII, 1863); GORDAN, *Ueber das Formensystem binærer Formen* (Lipsk, oddzielnie, 1875); JORDAN, *Mémoire sur les covariant des formes binaires* (LIOUVILLE, *Journal*, serya III, t. II, 1876).

[2] Co do wykładów systematycznych oddzielnych działów tej teoryi, zaznaczyć należy przedewszystkiem klassyczny i dostępny podręcznik SALMON'a *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, trzy wydania; ostatnie : Dublin, 1876) przełożony na wiele języków; polski przekład stanowi drugi tom SĄGAJŁY *Wykładu zupełnego Algebry* (Paryż, 1874); — oraz : FIEDLER'a *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binæren Formen* (Lipsk, 1862); CLEBSCH'a *Theorie der binaeren algebraischen Formen* (Lipsk, 1872); FAA DE BRUNO *Théorie des formes binaires* (Turyn, 1876).

[3] Zmiany spółrzędnych uskuteczniają się w Geometryi za pomocą przekształceń liniowych (§§ 82, 85). Niezmiennik formy potrójnej (której

Nam tu iść może tylko o zaznaczenie cechy «niezmienności» niektórych z już otrzymanych wyznaczników, jakoteż tych, któremi jeszcze zajmować się będziemy.

Tak np., z § 84-ego wypada :

Wyznacznik układu n *form liniowych, czyli ich rugownik* (§ 78), *jest niezmiennikiem tych form.*

A że rugownik dwu form podwójnych n-ego i m-ego stopnia może być uważany za rugownik n równań liniowych z n zmiennemi, lub $n+m$ równań liniowych z $n+m$ zmiennemi (§ 79), więc :

Wyznacznik, przedstawiający rugownik dwu form podwójnych, jest niezmiennikiem tych form.

Dla tejże przyczyny (§ 80) :

Wyznacznik, przedstawiający rugownik układu n *form z* n *zmiennemi, z których jedna kwadratowa, pozostałe zaś liniowe, jest niezmiennikiem tych form.*

Również (§ 81) :

Wyznacznik, przedstawiający wyróżnik formy kwadratowej, jest niezmiennikiem tej formy.

Wyznacznik, przedstawiający wyróżnik formy podwójnej, jest niezmiennikiem tej formy.

---

równość zeru przedstawia płaską linię krzywą), lub poczwórnej (która, przyrównana do zera, przedstawia powierzchnię), jest funkcyą spółczynników, której równość zeru wyraża własność krzywej lub powierzchni, niezależną od wyboru osi; równy zaś zeru spółzmiennik albo przeciwzmiennik przedstawia inną krzywą lub powierzchnię, której elementy mają z daną krzywą lub powierzchnią pewien związek, niezależny od wyboru osi. Podobnież objaśnić można ważność zastosowania w Geometryi analitycznej i Geometryi wyższej własności funkcyj towarzyszących układowi kilku danych form podwójnych, potrójnych, etc. Zob. znakomitą pracę : Clebsch'a *Vorlesungen über Geometrie.* Lipsk, 1875.

ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

WYZNACZNIK SYMETRYCZNY.

§ 90.

Punktem wyjścia naszych dotychczasowych badań ogólnych było przypuszczenie, że elementy wyznacznika są od siebie niezależne (§ 4): mimo to jednak te badania doprowadzały nas do wyznaczników, w których między elementami istniały pewne związki. Takiego rodzaju wyznaczniki mieć muszą pewne, im tylko właściwe, własności, które częścią są modyfikacyą własności ogólnych, częścią zaś mają całkiem odrębny charakter,

O wyczerpaniu wszystkich przypuszczeń co do różnych zależności, istnieć mogących między elementami wyznacznika, mowy być nie może. Zajmiemy się więc najwięcej tylko charakterystycznemi przypadkami wyznacznika o elementach w pewnym ze sobą związku będących.

W tym Rozdziale badać będziemy własności wyznacznika, w którym każde dwa elementy sprzężone (§ 5) są sobie równe, t. j. wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix},$$

w którym, przy wszystkich wartościach 1, 2,...,n liczb i i k, jest zawsze

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Taki wyznacznik nazywamy *wyznacznikiem symetrycznym*.

Symetrycznemi więc były : wyznacznik przedstawiający kwadrat jakiegokolwiek wyznacznika (§ 46); wyznacznik obu zadań § 60-ego; wyznacznik przedstawiający rugownik dwu form podwójnych jednakowego stopnia w postaci wyznacznika stopnia, określonego przez stopień danych form (§ 79, 4); wyznacznik przedstawiający wyróżnik formy kwadratowej (§81); wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia, przedstawiający wyróżnik formy podwójnej n-ego stopnia (§ 81).

W wyznaczniku symetrycznym, z powodu związku, zachodzącego między elementami, niezależnych jest tyle elementów, ile jest par elementów sprzężonych więcej elementy główne. W powyższym więc wyznaczniku D n-ego stopnia niezależnych jest $\frac{n(n+1)}{2}$ elementów; przyjmując za takowe elementy

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, a_{1,n-2} & , a_{1,n-1} & , a_{1,n} & , \\
 & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, a_{2,n-2} & , a_{2,n-1} & , a_{2,n} & , \\
 & & a_{3,3}, & \ldots, a_{3,n-2} & , a_{3,n-1} & , a_{3,n} & , \\
 & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & , \\
 & & & a_{n-2,n-2}, & a_{n-2,n-1}, & a_{n-2,n}, & \\
 & & & & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n}, & \\
 & & & & & a_{n,n} & ,
\end{array}$$

możemy ujawnić symetryczność danego wyznacznika D, przedstawiając go w postaci

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ,a_{1,2} & ,\ldots, a_{1,i-1} & ,a_{1,i} & ,a_{1,i+1} & ,\ldots, a_{1,n-1} & ,a_{1,n} \\ a_{1,2} & ,a_{2,2} & ,\ldots, a_{2,i-1} & ,a_{2,i} & ,a_{2,i+1} & ,\ldots, a_{2,n-1} & ,a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,i} & ,a_{2,i} & ,\ldots, a_{i-1,i} & ,a_{i,i} & ,a_{i,i+1} & ,\ldots, a_{i,n-1} & ,a_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n-1} & ,a_{2,n-1} & ,\ldots, a_{i-1,n-1} & ,a_{i,n-1} & ,a_{i+1,n-1} & ,\ldots, a_{n-1,n-1} & ,a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & ,a_{2,n} & ,\ldots, a_{i-1,n} & ,a_{i,n} & ,a_{i+1,n} & ,\ldots, a_{n-1,n} & ,a_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{S}.$$

W tym wyznaczniku wszystkie elementy głównej przekątnej nie mają sobie równych. Gdyby jednak był dany wyznacznik, którego elementy niegłównej przekątnej nie miały sobie równych, z pozostałych zaś każde dwa były sobie równe i zupełnie podobnie odnośnie do niegłównej przekątnej były ustawione jak elementy równe wyznacznika S są ustawione względem głównej przekątnej, to taki wyznacznik ($a_{i,k} = a_{n+1-k,n+1-i}$),

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , a_{1,2} & , a_{1,3} & ,\ldots, a_{1,n-2}, & a_{1,n-1}, & a_{1,n} \\ a_{2,1} & , a_{2,2} & , a_{2,3} & ,\ldots, a_{2,n-2}, & a_{2,n-1}, & a_{1,n-1} \\ a_{3,1} & , a_{3,2} & , a_{3,3} & ,\ldots, a_{3,n-2}, & a_{2,n-2}, & a_{1,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-2,2}, & \ldots, a_{3,2} & , a_{2,2} & , a_{1,2} \\ a_{n,1} & , a_{n-1,1}, & a_{n-2,1}, & \ldots, a_{3,1} & , a_{2,1} & , a_{1,1} \end{vmatrix},$$

przez odpowiednie przestawienie rzędów równoległych może być sprowadzony do takiej postaci, że niemające sobie w tym wyznaczniku równych elementy niegłównej przekątnej znajdą się w głównej przekątnej (§ 24). Np.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & b \\ f, & d, & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c, & b, & a \\ b, & e, & d \\ a, & d, & f \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ e, & f, & g, & c \\ h, & i, & f, & b \\ j, & h, & e, & a \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} d, & c, & b, & a \\ c, & g, & f, & e \\ b, & f, & i, & h \\ a, & e, & h, & j \end{vmatrix}.$$

§ 91.

Jeśli w wyznaczniku $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$, przy $a_{i,k} = a_{k,i}$, czyli w wyznaczniku

$$S = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & , a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix},$$

raz opuścimy i-y wiersz i k-ą kolnmnę, drugi raz zaś k-y wiersz i i-ą kolumnę, to otrzymamy dwa wyznaczniki $(n-1)$-ego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , \ldots , & a_{1,k-1}, a_{1,k+1}, & \ldots & , a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,i-1}, & \ldots & \ldots & \ldots & , a_{i-1,n} \\ a_{1,i+1}, & \ldots & \ldots & \ldots & , a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & , \ldots , & a_{k-1,n}, a_{k+1,n}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , \ldots, & a_{1,i-1}, & a_{1,i+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k-1}, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ,a_{k-1,n} \\ a_{1,k+1}, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ,a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & , \ldots, & a_{i-1,n}, & a_{i+1,n}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sobie równe (§ 18). Którykolwiek więc z tych wyznaczników, pomnożony przez $(-1)^{i+k} = (-1)^{k+i}$, przedstawia tak ilość dołączoną w wyznaczniku S do elementu $a_{i,k}$, jak i ilość dołączona do elementu $a_{k,i}$ (§ 25), czyli z założonego w wyznaczniku $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ związku $a_{i,k} = a_{k,i}$ wypada $A_{i,k} = A_{k,i}$. Skutkiem tego wyznacznik dołączony do wyznacznika S (§ 65), t. j. wyznacznik $\Sigma \pm A_{1,1} \ldots A_{n,n}$, może być tak przedstawiony (§ 66):

$$S^{n-1} = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots & ,A_{1,n} \\ A_{1,2}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, & \ldots & ,A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,n}, & A_{2,n}, & A_{3,n}, & \ldots & ,A_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik, dołączony do wyznacznika symetrycznego, jest także symetryczny.

§ 92.

Jeśli w wyznaczniku $D = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ element $a_{k,i}$ jest wogóle zależnym od elementu $a_{i,k}$, to, gdy mamy brać pochodną wyznacznika D względem elementu $a_{i,k}$, należy ją brać i względem $a_{i,k}$ wyraźnego i względem $a_{i,k}$ uwikłanego w $a_{k,i}$:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}+\frac{\partial D}{\partial a_{k,i}}\,\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}};$$

tę pochodną cząstkową, wziętą względem i wyraźnego i uwikłanego $a_{i,k}$, oznaczymy używanym w tym celu symbolem $\left(\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}\right)$. Więc

$$\left(\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}\right)=\frac{\partial D}{\partial a_{i,1}}+\frac{\partial D}{\partial a_{k,i}}\,\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}}.$$

Lecz $\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}$ i $\frac{\partial D}{\partial a_{k,i}}$, jako pochodne wyznacznika D względem wyraźnych $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$, przedstawiają (§ 61) ilości dołączone w wyznaczniku D do elementów $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$, ilości, oznaczone (§ 25) przez $A_{i,k}$ i $A_{k,i}$. Powyższa zatem formuła daje nam, przy i różnem od k, związek

$$\left(\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}\right)=A_{i,k}+A_{k,i}\,\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}}, \tag{1}$$

zachodzący w razie istnienia zależności tylko między elementami $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$.

Stosując ten związek do wyznacznika symetrycznego

$$S=\begin{vmatrix} a_{1,1},\dots, & a_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_{1,n},\dots, & a_{n,n}\end{vmatrix},$$

z powodu, że $a_{k,i}=a_{i,k}$, $\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}}=1$, oraz (§ 91) $A_{k,i}=A_{i,k}$, mamy

$$\frac{\partial S}{\partial a_{i,k}}=A_{i,k}+A_{i,k},$$

czyli, że *w wyznaczniku symetrycznym, dla wszystkich wartości* k *różnych od* i, *jest* (¹)

$$\frac{\partial S}{\partial a_{i,k}} = 2A_{i,k},$$

zaś dla $k = i$

$$\frac{\partial S}{\partial a_{i,i}} = A_{i,i}.$$

§ 93.

Wyprowadzony w § 58-ym rozkład wyznacznika $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ według elementów i-ego wiersza i k-ej kolumny

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = a_{i,k} A_{i,k} - \sum_{j,l} a_{i,l} a_{j,k} A_{i,j,k,l}$$

(gdzie $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$)

wielce się upraszcza w zastosowaniu do wyznacznika symetrycznego, w razie gdy $k = i$. Wtedy bowiem w rozkładzie

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = a_{i,i} A_{i,i} - \sum_{j,l} a_{i,l} a_{j,i} A_{i,j,i,l} \tag{1}$$

wyznacznik $A_{i,i}$, jako powstający z wyznacznika symetrycznego $(a_{k,i} = a_{i,k})$

$$S_n = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{1,n}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

(¹) Jacobi, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis...* Crelle, *Journal*, t. XII, str. 20).

na skutek opuszczenia i-ego wiersza i i-ej kolumny, to jest wyznacznik

$$A_{i,i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ,\ldots, & a_{1,i-1} & , & a_{1,i+1} & ,\ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,i-1} & ,\ldots, & a_{i-1,i-1} & , & a_{i-1,i+1} & ,\ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{1,i+1} & ,\ldots, & a_{i-1,i+1} & , & a_{i+1,i+1} & ,\ldots, & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & ,\ldots, & a_{i-1,n} & , & a_{i+1,n} & ,\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

jest także wyznacznikiem symetrycznym [1] stopnia $(n-1)$-ego. Ilości więc dołączone do sprzężonych elementów wyznacznika $A_{i,i}$, np. do $a_{l,j}$ i $a_{j,l}$, są sobie równe (§ 91), czyli

$$A_{i,l,i,j} = A_{i,j,i,l}. \tag{2}$$

We wzorze (1) $\sum\limits_{j,l}$ odnosi się do wszystkich $n-1$ wartości

$$1, 2,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n$$

tak dla liczby j, jak i dla liczby l. Pośród więc wszystkich $(n-1)^2$ składników ujętych przez tę summę, będzie $n-1$ składników, odpowiadających jednakowym wartościom liczb j i l, które wydzieliwszy i zesummowawszy, otrzymujemy

$$-\sum_j a_{i,j} a_{j,i} A_{i,j,i,j} = -\sum_j a^2_{i,j} A_{i,j,i,j}$$

---

(1) Jak i, wogóle, wszystkie główne minory (§ 50) wyznacznika symetrycznego.

(gdyż $a_{j,i}=a_{i,j}$). Z pozostałych składników, każde dwa odpowiadające sobie, po dodaniu, dadzą według (2)

$$a_{i,l}a_{j,i}A_{i,j,i,l}+a_{i,j}a_{l,i}A_{i,l,i,j}=2a_{i,j}a_{i,l}A_{i,j,i,l}.$$

Wzór więc (1) przyjmie taką postać (*przy* $a_{k,i}=a_{i,k}$):

$$S_n=\Sigma\pm a_{1,1}\ldots a_{n,n}=a_{i,i}A_{i,i}-\sum a^2_{i,j}A_{i,j,i,j}$$

$$-2\sum_{j,l}a_{i,j}a_{i,l}A_{i,j,i,l}, \qquad (2)$$

gdzie $\sum$ *przedstawia* n—1 *składników, odpowiadających wartościom* 1, 2,..., i—1, i+1,...,n *liczby* j, *zaś* $\sum\limits_{j,l}$ *odnosi się do* $\binom{n-1}{2}$ *składników, powstających wskutek nadania liczbom* j, l *wartości, odpowiadających wszystkim kombinacyom tychże* n — 1 *wartości po dwie.*

§ 94.

W tylko-co otrzymanym rozkładzie, wyznacznik $A_{i,j,i,j}$, jako powstający (§ 58) wskutek opuszczenia wiersza ze wskaźnikiem j i kolumny ze wskaźnikiem j w wyznaczniku symetrycznym $A_{i,i}$ jest także wyznacznikiem symetrycznym $(n-2)$-ego stopnia (§ 93). Żaden jednak z wyznaczników $A_{i,j,i,l}$, w powyższym wzorze zachodzących, nie jest symetrycznym.

Dwa jakiekolwiek z pośród tych wyznaczników $(n-2)$-ego stopnia, np.

$$A_{i,j,i,l}, \quad A_{i,p,i,q} \qquad (1)$$

powstały skutkiem opuszczenia różnoimiennych wiersza i kolumny w wyznaczniku symetrycznym $A_{i,i}$. Skutkiem tego opuszczenia wyznaczniki (1) mają mniej niż wyznacznik $A_{i,i}$ o dwa elementy główne, mianowicie (odpowiednio)

$$a_{j,j} \text{ i } a_{l,l}; \qquad a_{p,p} \text{ i } a_{q,q},$$

oraz o $(n-2)+(n-3)=2n-5$ elementów niegłównych, tak, że dwa wyznaczniki (1) posiadają też samą liczbę (jednakowo, ogólnie uważając, względem głównej przekątnej ułożonych) tak elementów nie mających sobie równych, jak i par elementów równych sobie. To jest przyczyną, że każde dwa wyznaczniki (1) z pośród $\binom{n-1}{2}$ takich wyznaczników, zachodzących we wzorze (2) § 93-ego, mają jednakową liczbę różnych wyrazów, którą nazwiemy np. ρ_{n-2}. Wtedy w owym wzorze summa

$$-\Sigma\, 2a_{i,j}a_{i,l}A_{i,j,i,l},$$

jako składająca się z $\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ składników

$$-2a_{i,j}a_{i,l}A_{i,j,i,l},$$

każdego o ρ_{n-2} różnych wyrazach, zawiera różnych

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\rho_{n-2}$$

wyrazów. Jeśli jeszcze liczbę różnych wyrazów wyznacznika symetrycznego m-ego stopnia oznaczymy przez σ_m, to, na mocy powyższego, wypada według wzoru (2) § 93-ego

$$\sigma_n=\sigma_{n-1}+(n-1)\sigma_{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\rho_{n-2}. \tag{2}$$

Ten związek jest ogólny — zastąpmy więc w nim n przez $n-1$:

$$\sigma_{n-1}=\sigma_{n-2}+(n-2)\sigma_{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}\rho_{n-3}. \tag{3}$$

Odnajdźmy teraz związek zachodzący między liczbami ρ_{n-2} ρ_{n-3}.

Wyznacznik $(n-2)$-ego stopnia [ze znakiem $(-1)^{j+l}$]

$$A_{i,j,i,l} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,i-1}, a_{1,i+1}, \ldots, a_{1,l-1}, a_{1,l+1}, \ldots, a_{1,j}, \ldots, a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,i-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{i-1,n} \\ a_{1,i+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,l}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{l,j}, \ldots, a_{l,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,j-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{j-1,n} \\ a_{1,j+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{j+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,n}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

(posiadający ρ_{n-2} różnych wyrazów) rozłóżmy według elementów wiersza ze wskaźnikiem l (§ 25). Wtedy spółczynnik przy elemencie $a_{l,j}$, który moglibyśmy oznaczyć przez $A_{i,j,l,i,l,j}$, jako powstały z $A_{i,j,i,l}$ przez opuszczenie wiersza ze wskaźnikiem l i kolumny ze wskaźnikiem j, a tem samem z danego wyznacznika symetrycznego $S_n = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ przez opuszczenie wierszy ze wskaźnikami i, j, l i kolumn ze wskaźnikami i, l, j (więc przez opuszczenie wierszy i kolumn jednoimiennych) jest wyznacznikiem symetrycznym $(n-3)$-ego stopnia o σ_{n-3} różnych wyrazach. Spółczynniki zaś przy pozostałych $n-3$ elementach tego wiersza są (dodatne lub odjemne) wyznaczniki $(n-3)$-ego stopnia (ogólnego typu $A_{i,j,l,i,l,k}$), niesymetryczne, o jednakowej, jakeśmy wyżej widzieli (gdyż uważane być mogą jako powstające z opuszczenia różnoimiennych wiersza i kolumny w wyznaczniku symetrycznym $A_{i,l,i,l}$), liczbie różnych wyrazów, mianowicie ρ_{n-3}. Z tego więc rozkładu wypada szukany związek

$$\rho_{n-2} = \sigma_{n-3} + (n-3)\rho_{n-3},$$

co podstawiając w powyżej wyprowadzony związek (2), mamy

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + (n-1)\,\sigma_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\sigma_{n-3} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}\,\rho_{n-3}.$$

Odejmując zaś od tej równości równość (3), po uprzedniem pomnożeniu jej przez $n-1$, otrzymamy

$$\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\sigma_{n-3},$$

czyli [1]

$$\sigma_n = n\sigma_{n-1} - \binom{n-1}{2}\sigma_{n-3}.$$

---

[1] Cayley dla otrzymania tego wzoru uogólnia (bez odpowiedniego uzasadnienia) uwagi przez się zrobione nad wyznacznikami stopnia 4-ego, tworzy funkcyę rodzącą liczb różnych wyrazów wyznacznika symetrycznego (przy argumencie: stopień wyznacznika) oraz równanie różniczkowe tej funkcyi, całkuje to równanie i zmienia jego postać. Ten rachunek Cayley'go został ogłoszony w trzeciem wydaniu dzieła Salmon'a *Lessons i. t. t. m. h. A.*, str. 39-42. Podany zaś tu sposób wyprowadzenia tego wzoru, oparty na metodach właściwych nauce o wyznacznikach, przedstawił mi (1878, maj) student drugiego kursu, Jan Stodołkiewicz, którego praca o tym dowodzie będzie wkrótce ogłoszoną w piśmie: *Izwiestja Cesarskiego Uniwersytetu Warszawskiego* (1878 r. № 6.)

Ta formuła służy do kolejnego obliczania liczby różnych wyrazów wyznacznika symetrycznego, przy pomocy takichże liczb, odnoszących się do wyznaczników symetrycznych niższych stopni.

Ponieważ

$$S_1=1;\quad S_2=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} \end{vmatrix}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2;$$

$$S_3=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$=a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,2}^2a_{1,1}-a_{1,3}^2a_{2,2}-a_{2,3}^2a_{3,3}+2a_{1,2}a_{1,3}a_{2,3},$$

zkąd

$$\sigma_1=1;\quad \sigma_2=2;\quad \sigma_3=5,$$

więc

$$\sigma_4=4\sigma_3-\binom{3}{2}\sigma_1=17;$$

$$\sigma_5=5\sigma_4-\binom{4}{2}\sigma_2=73;$$

$$\sigma_6=6\sigma_5-\binom{5}{2}\sigma_3=388,$$

etc.

§ 95.

Jeśli dany wyznacznik symetryczny ma wartość zero

$$S=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \cdots & ,a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n}, & \cdots & ,a_{n,n} \end{vmatrix}=0,$$

to wtedy (§ 69) tak wyznacznik dołączony (§ 91)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \dots & ,A_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,n}, & \dots & ,A_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

jak i wszystkie jego wyznaczniki częściowe drugiego i wyższych stopni są zerami. W szczególności, np.

$$\begin{vmatrix} A_{t,t}, & A_{t,u} \\ A_{t,v}, & A_{u,v} \end{vmatrix} = A_{t,t}A_{u,v} - A_{t,u}A_{t,v} = 0. \tag{1}$$

Utwórzmy wyznacznik symetryczny $(n+1)$-ego stopnia, dodając do kwadratu elementów powyższego wyznacznika S jeden wiersz i jedną kolumnę elementów, np. pierwsze,

$$\begin{vmatrix} a_{0,0}, & y_1, & y_2, & \dots & ,y_n \\ y_1, & a_{1,1}, & a_{1,2} & \dots & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & a_{1,n}, & a_{2,n}, & \dots & ,a_{n,n} \end{vmatrix} = Q,$$

i zastosujmy doń rokład (1) § 93-ego (według elementów dodanego wiersza i dodanej kolumny). Będzie :

$$Q = a_{0,0}S - \sum_i y_i^2 A_{i,i} - 2\sum_{i,k} y_i y_k A_{i,k},$$

co, z powodu, że, według założenia, $S=0$, daje nam rozkład

$$Q = -\sum_i y_i^2 A_{i,i} - 2\sum_{i,k} y_i y_k A_{i,k}, \tag{2}$$

gdzie w $\sum\limits_i$ wskaźnik i otrzymuje n wartości $1, 2, \dots, n$, zaś w $\sum\limits_{i,k}$ wskaźniki i i k otrzymują wartości przedstawiające wszystkie $\binom{n}{2}$ kombinacyj z n liczb 1, 2,...,n po dwie.

Ze związku (1) wypada

$$A_{i,i}A_{k,k}=A_{i,k}^2,$$

skąd

$$A_{i,k}=\sqrt{A_{i,i}}\sqrt{A_{k,k}},$$

(gdzie wartości $\sqrt{A_{i,i}}$ i $\sqrt{A_{k,k}}$ należy wziąć z takiemi znakami, aby ich iloczyn był $+A_{i,k}$, nie zaś $-A_{i,k}$), co podstawiając w nasz wzór (2), mamy

$$Q=-\left(\sum_i y_i^2 A_{i,i}^2+\sum_{i,k} 2.y_i\sqrt{A_{i,i}}.y_k\sqrt{A_{k,k}}\right).$$

Wyrażenie jednak po prawej, zgodnie ze znaczeniem $\sum\limits_i$ i $\sum\limits_{i,k}$, możemy tak pisać :

$$Q=-\left(\sum_i y_i A_{i,i}\right)^2$$

$$=-(y_1\sqrt{A_{1,1}}+y_2\sqrt{A_{2,2}}+\ldots+y_n\sqrt{A_{n,n}})^2.$$

Jeśli wszystkie ilości $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, etc. są dodatne, to wyznacznik Q przedstawia kwadrat odjemny; jeśli zaś są one wszystkie odjemne, to Q przedstawia kwadrat dodatny. W każdym jednak razie :

Jeśli dany wyznacznik symetryczny jest zerem, to wyznacznik symetryczny o jedność wyższego stopnia, utworzony z danego *przez dodanie wiersza i kolumny, jest względem ilości dodanych (dodatnym lub odjemnym) kwadratem zupełnym* (¹).

§ 96.

Gdy jakikolwiek wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & , a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots & , a_{n,n} \end{vmatrix}$$

mamy podnieść do potęgi parzystej, np. do potęgi $2m$, to zważmy, że

$$D^{2m} = (D^m)^2,$$

gdzie D^m, jako iloczyn m wyznaczników n-ego stopnia, jest także wyznacznikiem n-ego stopnia (§ 48), np.

$$D^m = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & , b_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots & , b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Jakimkolwiekby był ten wyznacznik D^m, to, podnosząc go do kwadratu, otrzymamy

$$D^{2m} = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & \ldots & , c_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & \ldots & , c_{n,n} \end{vmatrix},$$

gdzie (§ 46)

$$c_{i,k} = b_{i,1}b_{k,1} + b_{i,2}b_{k,2} + \ldots + b_{i,n}b_{k,n} = c_{k,i}.$$

(¹) SALMON, l. c., w pierwszem wydaniu (1859) nr. 154, w trzeciem str. 32.

Parzysta potęga jakiegokolwiek wyznacznika jest wyznacznikiem symetrycznym.

§ 97.

Wyznacznik symetryczny n-*ego stopnia może być uważany jako kwadrat pewnego wyznacznika* n-*ego stopnia.* Gdyż, aby wyznacznik

$$S=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix};$$

o $\frac{n(n+1)}{2}$ różnych elementach był kwadratem wyznacznika

$$D=\begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & ,b_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & \ldots & ,b_{n,n} \end{vmatrix},$$

potrzeba aby n^2 elementów wyznacznika D zadosyć czyniły $\frac{n(n+1)}{2}$ związkom

$$\begin{cases} b_{i,1}^2+b_{i,2}^2+\ldots+b_{i,n}^2=a_{i,i}^2, \\ b_{i,1}b_{k,1}+b_{i,2}b_{k,2}+\ldots+b_{i,n}b_{k,n}=a_{i,k}, \end{cases}$$

tak, że, przy danych ilościach $a_{1,1},\ldots,a_{1,n},\ldots,a_{n,n}$, oraz dowolnie wziętych wartościach dla $\frac{n(n-1)}{2}$ z ilości $b_{1,1},\ldots,b_{1,n},\ldots,$ $b_{n,1},\ldots,b_{n,n}$, pozostałe $\frac{n(n+1)}{2}$ z ostatnich ilości wyrazić możemy z tych związków, a wtedy otrzymamy wyznacznik D, którego kwadratem jest dany wyznacznik S.

Na mocy tego jakakolwiek potęga, np. m-a, wyznacznika S będzie jednocześnie przedstawiać D^{2m}, a tem samem będzie (§ 96) wyznacznikiem symetrycznym.

Jakakolwiek potęga wyznacznika symetrycznego jest także wyznacznikiem symetrycznym (1).

§ 98.

Jeśli w wyznaczniku

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & ,a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \cdot & \cdot & \cdot & ,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

nietylko $a_{i,k} = a_{k,i}$, lecz jeszcze dla wszystkich możliwych wartości liczby j, jest

$$a_{i,k} = a_{i+j,k-j}, \quad a_{i,k} = a_{i-j,k+j}$$

np.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ b, & c, & d, & e, & f \\ c, & d, & e, & f, & g \\ d, & e, & f, & g, & h \\ e, & f, & g, & h, & i \end{vmatrix}.$$

---

(1) Tego twierdzenia bezpośrednio (przez podnoszenie wyznacznika S do potęgi m-ej), lecz w sposób dość skomplikowany, dowiódł SEELIGER, *Bemerkungen über symmetrische Determinanten und Anwendung dieser auf eine Aufgabe der analytischen Geometrie* (SCHLOEMILCH, *Zeitschrift*, rocznik XX, str. 467). Prostszy dowód, który tu podałem, jest jednak zupełnie ścisły.

(gdzie więc np. $a_{4,3} = a_{4+1,3-1} = a_{4-1,3+1} = a_{4-2,3+2} = f$), to taki wyznacznik symetryczny

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots, & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_2, & a_3, & a_4, & \dots, & a_n, & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, & \dots, & a_{2n-4}, & a_{2n-3} \\ a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & \dots, & a_{2n-3}, & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

nazwiemy (1) *wyznacznikiem ściślej symetrycznym* [persymmetrical (2), orthosymmetrische (3)].

Jeśli wypisany wyznacznik nazwiemy P_{2n-2}, to, według tego znakowania, istnieje (4) związek (§ 61)

$$\frac{\partial P_{2n-2}}{\partial a_{2n-2}} = P_{2n-4}.$$

---

(1) Lub wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots, & a_{n-3}, & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_n, & a_0, & a_1, & \dots, & a_{n-4}, & a_{n-3}, & a_{n-2} \\ a_{n+1}, & a_n, & a_0, & \dots, & a_{n-5}, & a_{n-4}, & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-3}, & a_{2n-4}, & a_{2n-5}, & \dots, & a_n, & a_0, & a_1 \\ a_{2n-2}, & a_{2n-3}, & a_{2n-4}, & \dots, & a_{n+1}, & a_n, & a_0 \end{vmatrix},$$

który, po przekształceniu, sprawiającem, że elementy niegłównej przekątnej staną się głównemi elementami (porów. § 90), przyjmuje postać wyznacznika wyżej wypisanego.

(2) SYLVESTER.

(3) HANKEL.

(4) BRIOSCHI, *La teorica*...§ VIII.

Wypiszmy kolejno za sobą wszystkie $2n-1$ różnych elementów wyznacznika ściślej symetrycznego

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & a_n, & \ldots, & a_{2n-3}, & a_{2n-2} \end{vmatrix} = \mathrm{P}.$$

Pod niemi, w drugim wierszu, wypiszmy pierwsze ich różnice, t. j. ilości które otrzymamy, gdy od każdego elementu odejmiemy element poprzedzający; w następnym wierszu wypiszmy pierwsze różnice pierwszych różnic, czyli drugie różnice danych elementów, i t. d. Według przyjętego znakowania, przedstawi się to tak :

$$\begin{array}{lllllllll}
a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & . & . & . \\
 & \Delta_1, & \Delta_{1,1}, & \Delta_{1,2}, & \Delta_{1,3}, & \Delta_{1,4}, & . & . & . \\
 & & \Delta_2, & \Delta_{2,1}, & \Delta_{2,2}, & \Delta_{2,3}, & . & . & . \\
 & & & \Delta_3, & \Delta_{3,1}, & \Delta_{3,2}, & . & . & . \\
 & & & & \Delta_4, & \Delta_{4,1}, & . & . & . \\
 & & & & & \Delta_5, & . & . & . \\
 & & & & & & . & . & .
\end{array}$$

gdzie więc $\Delta_1 = a_1 - a_0$; $\Delta_{1,1} = a_2 - a_1$; $\Delta_2 = \Delta_{1,1} - \Delta_1$; $\Delta_{1,3} = a_3 - a_2$; $\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2} - \Delta_{1,1}$ etc.

Jeśli teraz w danym wyznaczniku P od elementów każdej kolumny odejmiemy odpowiednie elementy kolumny bezpośrednio poprzedzającej, to dany wyznacznik nie ulegnie zmianie (§ 31), lecz, przy zastosowaniu powyższego oznaczenia, przyjmie postać

$$P=\begin{vmatrix} a_0 & , \Delta_1 & , \Delta_{1,1}, \ldots, & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & , \Delta_{1,1} & , \Delta_{1,2}, \ldots, & \Delta_{1,n-3} \\ a_2 & , \Delta_{1,2} & , \Delta_{1,3}, \ldots, & \Delta_{1,n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & \Delta_{1,n-1}, & \Delta_{1,n}, \ldots, & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}.$$

Gdy następnie w tym wyznaczniku od elementów trzeciej i następnych kolumn odejmiemy odpowiednie elementy kolumny bezpośrednio poprzedzającej, to otrzymamy

$$P=\begin{vmatrix} a_0 & , \Delta_1 & , \Delta_2 & , \Delta_{2,1} & , \ldots, & \Delta_{2,n-1} \\ a_1 & , \Delta_{1,1} & , \Delta_{2,1} & , \Delta_{2,2} & , \ldots, & \Delta_{2,n-2} \\ a_2 & , \Delta_{1,2} & , \Delta_{2,2} & , \Delta_{2,3} & , \ldots, & \Delta_{2,n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & \Delta_{1,n-1}, & \Delta_{2,n-1}, & \Delta_{2,n-2}, & \ldots, & \Delta_{2,2n-4} \end{vmatrix}.$$

Znów od elementów czwartej i następnych kolumn odejmując odpowiednie elementy kolumny bezpośrednio poprzedzającej, i wciąż dalej powtarzając podobne działania, dopóki nakoniec z kolei nie odejmiemy już tylko elementów przedostatniej kolumny od odpowiednich elementów ostatniej, dojdziemy do postaci

$$P=\begin{vmatrix} a_0 & , \Delta_1 & . \Delta_2 & , \Delta_3 & , \ldots, & \Delta_{n-1} \\ a_1 & , \Delta_{1,1} & , \Delta_{2,1} & , \Delta_{3,1} & , \ldots, & \Delta_{n-1,1} \\ a_2 & , \Delta_{1,2} & , \Delta_{2,2} & , \Delta_{3,2} & , \ldots, & \Delta_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & \Delta_{1,n-1}, & \Delta_{2,n-1}, & \Delta_{3,n-1}, & \ldots, & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Uskuteczniając jeszcze na wierszach tego wyznacznika takie same działania, jakeśmy wykonali na kolumnach danej postaci wyznacznika P, otrzymamy

$$P = \begin{vmatrix} a_0, & \Delta_1, & \Delta_2, & \ldots, & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1, & \Delta_2, & \Delta_3, & \ldots, & \Delta_n \\ \Delta_2, & \Delta_3, & \Delta_4, & \ldots, & \Delta_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{n-1}, & \Delta_n, & \Delta_{n+1}, & \ldots, & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Porównywając tę postać z początkowo daną postacią wyznacznika P, powiemy:

Wyznacznik ściślej symetryczny nie ulega zmianie, jeśli w nim elementy zastąpione zostaną przez odpowiednie początkowe wyrazy w szeregach kolejnych różnic jego elementów [1]. Np.

$$P = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 4, & 7, & 12 \\ 2, & 4, & 7, & 12, & 19 \\ 4, & 7, & 12, & 19, & 30 \\ 7, & 12, & 19, & 30, & 45 \\ 12, & 19, & 30, & 45, & 70 \end{vmatrix};$$

1,	2,	4,	7,	12,	19,	30,	45,	70;
	1,	2,	3,	5,	7,	11,	15,	25;
		1,	1,	2,	2,	4,	4,	10;
			0,	1,	0,	2,	0,	6;
				1,	− 1,	2,	− 2,	6;
					− 2,	3,	− 4,	8;
						5,	− 7,	12;
							− 12,	19;
								31;

(1) HANKEL, *Ueber eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten*. Göttingen, 1861, str. 5.

$$P=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & 1, & -2, & 5 \\ 0, & 1, & -2, & 5, & -12 \\ 1, & -2, & 5, & -12, & 31 \end{vmatrix},$$

§ 99.

Jeśli w wyznaczniku ściślej symetrycznym n-ego stopnia

$$P=\begin{vmatrix} a_0 & , a_1, & a_2 & ,\ldots, & a_{n-1} \\ a_1 & , a_2, & a_3 & ,\ldots, & a_n \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & \ldots, & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

elementy są funkcyą wskaźnika, określoną przez związek

$$a_i=(b+i)^m$$

$(i=0, 1,\ldots, 2n-2)$, gdzie b jest jakąkolwiek liczbą stałą, zaś m liczbą całkowitą, czyli, jeżeli elementy tworzą postęp arytmetyczny m-ego porządku, to

$$\Delta_m=1.2\ldots m; \quad \Delta_{m+1}=\Delta_{m+2}=\ldots=0.$$

Skutkiem tego, według przekształcenia § 98-ego, w przypadku $m<n-1$, wyznacznik da się zastąpić przez inny, w którym tak elementy niegłównej przekątnej, jak i wszystkie elementy po jednej jej stronie są zerami (a tem samem jedna lub kilka ostatnich kolumn wypełnione są zerami). Dany więc wyznacznik P jest zerem.

Jeśli wyznacznik ściślej symetryczny jest utworzony przez kolejno po sobie następujące wyrazy postępu arytmetycznego, którego porządek jest niższy niż o jedność zmniejszony stopień wyznacznika, to dany wyznacznik jest zerem ([1]).

Np. 1°)

$$P = \begin{vmatrix} 9, & 16, & 25, & 36, & 49 \\ 16, & 25, & 36, & 49, & 64 \\ 25, & 36, & 49, & 64, & 81 \\ 36, & 49, & 64, & 81, & 100 \\ 49, & 64, & 81, & 100, & 121 \end{vmatrix};$$

$$a_i = (3+i)^2; \quad n = 5; \quad m = 2 < 4;$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & 64, & 81, & 100, & 121; \\ & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & 17, & 19, & 21; \\ & & 2, & 2, & 2, & 2, & 2. & 2, & 2; \\ & & & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0; \\ & & & & 0, & \ldots & & & \end{array}$$

$$P = \begin{vmatrix} 9, & 7, & 2, & 0, & 0 \\ 7, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

([1]) Baltzer, l. c., w 4-tem wydaniu str. 25.

2°)

$$P = \begin{vmatrix} 1, & 8, & 27, & 64, & 125 \\ 8, & 27, & 64, & 125, & 216 \\ 27, & 64, & 125, & 216, & 343 \\ 64, & 125, & 216, & 343, & 512 \\ 125, & 216, & 343, & 512, & 729 \end{vmatrix}$$

$$a_i = (1+i)^3;\ n = 5;\ m = 3 < 4;\ \Delta_3 = 1.2.3 = 6;\ \Delta_4 = \Delta_5 = \ldots = 0;$$

$$P = 0.$$

Jeśli zaś $m = n - 1$, to w przekształconym wyznaczniku wszystkie elementy niegłównej przekątnej będą $\Delta_m = 1.2 \ldots m$, wszystkie elementy po jednej jej stronie Δ_{m+1}, Δ_{m+2} etc. równe zeru, — wyznacznik redukuje się do iloczynu elementów niegłównej przekątnej (§ 33, § 12, 16°), czyli

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1.2 \ldots m)^n.$$

Jeśli wyznacznik ściśle symetryczny n-*ego stopnia jest utworzony przez kolejno po sobie następujące wyrazy postępu arytmetycznego* (n — 1)-*ego porządku, to wyznacznik jest* (¹) *dodatną lub odjemną* n-ą *potęgą fakultetu* 1.2.3...(n — 1).

Np. ($n = 4$; $b = 3$; $m = 3$)

$$\begin{vmatrix} 27, & 64, & 125, & 216 \\ 64, & 125, & 216, & 343 \\ 125, & 216, & 343, & 512 \\ 216, & 343, & 512, & 729 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27, & 37, & 24, & 6 \\ 37, & 24, & 6, & 0 \\ 24, & 6, & 0, & 0 \\ 6, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = +(1.2.3)^4$$

(¹) Baltzer, ibidem.

$(n=3,\ b=1,\ m=2)$

$$\begin{vmatrix} 1, & 4, & 9 \\ 4, & 9, & 16 \\ 9, & 16, & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 3, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -(1.2)^3.$$

Zadanie. — Objaśnić dla czego, przy

$$a_i = \binom{b+i+n}{n} = \frac{(b+i+n)(b+i+n-1)\ldots(b+i+1)}{1.2\ldots n},$$

jest

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & , a_1, & a_2 & ,\ldots, & a_{n-1} \\ a_1 & , a_2, & a_3 & ,\ldots, & a_n \\ . & . & . & , & . & . & . & . & . \\ a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & \ldots, & a_{2n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

§ 100.

Gdy dane są jakiekolwiek n ilości

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \tag{1}$$

to wyznacznik n-ego stopnia, przez ich kolejne potęgi utworzony

$$\begin{vmatrix} 1 & , 1 & , 1 & ,\ldots, & 1 \\ \alpha_1 & , \alpha_2 & , \alpha_3 & ,\ldots, & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & , \alpha_2^2 & , \alpha_3^2 & ,\ldots, & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \alpha_3^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

możemy pisać

$$\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_2^3 \ldots \alpha_n^{n-1},$$

jeśli się umówimy, aby przy tworzeniu wyrazów z wyrazu głównego $+\alpha_1^0\alpha_2^1\alpha_3^2\ldots\alpha_n^{n-1}$ uważać wykładniki czy-to za pierwsze czy-też za drugie wskaźniki (§ 8).

Wyznacznik $D_n=0$ w razie, gdy którekolwiek dwie z ilości (1) są sobie równe. Funkcya zatem tych ilości, przedstawiona przez wyznacznik D_n, jest podzielną (§ 20) przez każdą z $\dfrac{n(n-1)}{2}$ różnic

$$\begin{array}{llll} \alpha_2-\alpha_1, & \alpha_3-\alpha_1, & \alpha_4-\alpha_1,\ldots, & \alpha_n-\alpha_1\;, \\ & \alpha_3-\alpha_2, & \alpha_4-\alpha_2,\ldots, & \alpha_n-\alpha_2\;, \\ & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\;, \\ & & & \alpha_n-\alpha_{n-1}. \end{array}$$

Gdy utworzymy iloczyn tych różnic

$$(\alpha_2-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})=\Pi_n,$$

to ten iloczyn, równie jak i wyznacznik D_n, jest względem ilości (1) stopnia $\dfrac{n(n-1)}{2}=0+1+2+\ldots+(n-1)$. Stosunek więc funkcyi D_n do iloczynu Π_n może być tylko ilością od ilości (1) niezależną, czyli czynnikiem stałym. Aby ten czynnik oznaczyć, zważmy, że główny wyraz wyznacznika D_n jest

$$+\alpha_1^0\alpha_2^1\alpha_3^2\alpha_4^3\ldots\alpha_n^{n-1}=+\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^3\ldots\alpha_n^{n-1},$$

który w iloczynie Π_n zachodzi ze znakiem $+$; czynnik więc ów jest jednością. Jest więc

$$D_n=\Pi_n,$$

czyli [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & ,\ 1 & ,\ldots, & 1 \\ \alpha_1 & ,\ \alpha_2 & ,\ldots, & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1} & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_1). \\ .(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_2). \\ \ldots\ldots \\ .(\alpha_n-\alpha_{n-1}). \end{array}$$

(1) Przy $n=3$: VANDERMONDE, l. c., str. 369; ogólnie: CAUCHY, *Mémoire Sur les Fonctions...*, str. 48.

Jeśli ilości (1) są pierwiastkami równania n-ego stopnia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

gdzie więc

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n),$$

to Π_n jest iloczynem różnic pierwiastków tego równania, który także przez wyznacznik D_n może być przedstawiony.

Ten wyznacznik D_n podnieśmy do kwadratu. Gdy nazwiemy (¹)

$$D_n^2 = \Delta_{n,n},$$

to otrzymamy (§ 46)

$$\Delta_{n,n} = \begin{vmatrix} 1 + 1 + \ldots + 1, & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, & \ldots, & \alpha_1^{n-1} + \alpha_2^{n-1} + \ldots + \alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2, & \ldots, & \alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_n^n \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2, & \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \ldots + \alpha_n^3, & \ldots, & \alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1} + \ldots + \alpha_n^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} + \alpha_2^{n-1} + \ldots + \alpha_n^{n-1}, & \alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_n^n, & \ldots, & \alpha_1^{2n-2} + \alpha_2^{2n-2} + \ldots + \alpha_n^{2n-2} \end{vmatrix},$$

albo, wprowadzając często w Algebrze używane oznaczenie summy jednakowych potęg pierwiastków danego równania, mianowicie

$$\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i + \ldots + \alpha_n^i = s_i,$$

(¹) To oznaczenie niema związku ze znaczeniem podobnych symbolów w § 98-ym.

wyznacznik ściślej symetryczny

$$\Delta_{n,n} = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1, & s_2 & ,\dots, & s_{n-1} \\ s_1 & , s_2, & s_3 & ,\dots, & s_n \\ s_2 & , s_3, & s_4 & ,\dots, & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \dots, & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ten wyznacznik, z powodu, że $D_n = \Pi_n^2$, przedstawia jednocześnie iloczyn kwadratów różnic pierwiastków danego równania. Jest więc wogóle

$$\Delta_{n,n} = \Pi_n^2, \tag{2}$$

czyli [1]

$$\begin{vmatrix} s_0 & , s_1, & s_2 & ,\dots, & s_{n-1} \\ s_1 & , s_2, & s_3 & ,\dots, & s_n \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \dots, & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\dots(\alpha_1-\alpha_n)^2. \\ .(\alpha_2-\alpha_3)^2\dots(\alpha_2-\alpha_n)^2. \\ \dots\dots \\ .(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2. \end{array}$$

Otrzymany tu wyznacznik ściślej symetryczny $\Delta_{n,n}$ może być inaczej jeszcze wyrażony. Ponieważ

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n),$$

to wartości pierwszej pochodnej funkcyi $f(x)$, po zastąpieniu w niej zmiennej przez pierwiastki równania $f(x)=0$, są

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_0(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_1-\alpha_n), \\ f'(\alpha_2) &= a_0(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_2-\alpha_n), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ f'(\alpha_n) &= a_0(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

---

[1] CAUCHY, *Mémoire sur les sommes alternées, connues sur le nom de résultantes.* (*Exercices d'an. et de ph. math.*, t. II, str. 169.)

Mnożąc te równości przez siebie, otrzymamy

$$f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n \Pi_n^2,$$

więc [1]

$$\Pi_n^2 = \Delta_{n,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-n} f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_n).$$

Z tego wyrażenia widzimy, że jeżeli którykolwiek z pierwiastków (1) równania $f(x)=0$, np. α_i, jest także pierwiastkiem równania $f'(x)=0$, czyli jeśli α_i jest podwójnym (wogóle: wielokrotnym) pierwiastkiem równania $f(x)=0$, to $\Delta_{n,n}=0$. Wyznacznik więc $\Delta_{n,n}$ przedstawia (§ 81) wyróżnik równania [2] $f(x)=0$, czyli funkcyi $f(x)$ [3].

§ 101.

Gdybyśmy mieli wyznacznik ściślej symetryczny n-ego stopnia, utworzony przez kolejno po sobie następujące ilości s_i, lecz, gdyby pierwszą nie była ilość s_0, ale np. s_k, to wyznacznik taki

$$\begin{vmatrix} s_k, & s_{k+1}, & s_{k+2}, & \ldots, & s_{k+n-1} \\ s_{k+1}, & s_{k+2}, & s_{k+3}, & \ldots, & s_{k+n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k+n-1}, & s_{k+n}, & s_{k+n+1}, & \ldots, & s_{k+2n-2} \end{vmatrix} =$$

(1) CAUCHY, *Mémoire sur la Détermination des Racines réelles dans les Équations algébriqnes* (*Journal de l'éc. polyt.*, XVII cahier, str. 486).

(2) Któremu-to równaniu, kładąc $x=\frac{y}{z}$ i mnożąc przez z^n, można nadać postać równania jednorodnego.

(3) Porównaj przytaczany wyżej SĄGAJŁY przekład dzieła SALMON'a str. 117.

$$=\begin{vmatrix} \alpha_1^k+\ldots+\alpha_n^k, & \ldots, & \alpha_1^{k+n-1}+\ldots+\alpha_n^{k+n-1} \\ \alpha_1^{k+1}+\ldots+\alpha_n^{k+1}, & \ldots, & \alpha_1^{k+n}+\ldots+\alpha_n^{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{k+n-1}+\ldots+\alpha_n^{k+n-1}, & \ldots, & \alpha_1^{k+2n-2}+\ldots+\alpha_n^{k+2n-2} \end{vmatrix}$$

może być uważany jako iloczyn dwu wyznaczników: jednego

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}=\Pi_n,$$

drugiego zaś

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^k, & \alpha_2^k, & \ldots, & \alpha_n^k \\ \alpha_1^{k+1}, & \alpha_2^{k+1}, & \ldots, & \alpha_n^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{k+n-1}, & \alpha_2^{k+n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{k+n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1^k\alpha_2^k\ldots\alpha_n^k\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}=\alpha_1^k\alpha_2^k\ldots\alpha_n^k\Pi_n;$$

zatem

$$\begin{vmatrix} s_k, & s_{k+1}, & s_{k+2}, & \ldots, & s_{k+n-1} \\ s_{k+1}, & s_{k+2}, & s_{k+3}, & \ldots, & s_{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k+n-1}, & s_{k+n}, & s_{k+n+1}, & \ldots, & s_{k+2n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1^k\alpha_2^k\ldots\alpha_n^k\Pi_n^2=\alpha_1^k\alpha_2^k\ldots\alpha_n^k\Delta_{n,n}. \qquad (3)$$

Gdybyśmy zaś z ilości s_i utworzyli wyznacznik ściślej symetryczny stopnia wyższego niż n, np.

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} s_0 &, s_1, & s_2 &, \ldots, & s_{m-1} \\ s_1 &, s_2, & s_3 &, \ldots, & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \ldots + 1 &, \ldots, & \alpha_1^{m-1} + \ldots + \alpha_n^{m-1} \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n &, \ldots, & \alpha_1^{m} + \ldots + \alpha_n^{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-1} + \ldots + \alpha_n^{m-1}, & \ldots, & \alpha_1^{2m-2} + \ldots + \alpha_n^{2m-2} \end{vmatrix} .$$

$(m > n)$, to rozkładając taki wyznacznik na składniki (§ 28) przekonalibyśmy się, że każdy ze składników byłby zerem (§§ 29, 20). Zatem przy $m > n$, jest

$$\Delta_{n,m} = 0.$$

W razie zaś $m < n$, jest (¹) (§ 46)

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} s_0 &, s_1, & s_2 &, \ldots, & s_{m-1} \\ s_1 &, s_2, & s_3 &, \ldots, & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 1 &, 1 &, \ldots, & 1 \\ \alpha_\eta &, \alpha_\theta &, \ldots, & \alpha_\psi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_\eta^{m-1}, & \alpha_\theta^{m-1}, & \ldots, & \alpha_\psi^{m-1} \end{vmatrix}^2$$

$$\Delta_{n,m} = \Sigma \left\{ (\alpha_\eta - \alpha_\theta)^2 \ldots (a_\eta - a_\psi)^2 \ldots (\alpha_\chi - \alpha_\psi)^2 \right\}, \qquad (4)$$

(¹) CAYLEY, *Note sur les fonctions de M. Sturm* (LIOUVILLE, *Journal.* t. XI, str. 297).

gdzie znak Σ odnosi się do wszystkich $\binom{n}{m}$ kombinacyj z n liczb 1, 2,..., n po m, które zamiast układu wskaźników $\eta, \theta, \ldots, \chi, \psi$ podstawić należy.

W przypadku, gdy nie wszystkie pierwiastki

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{1}$$

równania $f(x)=0$ są od siebie różne, tak, że z pośród nich jest tylko np. l różnych, których wartości nazwiemy np.

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \tag{5}$$

to wyznacznik $\Delta_{n,m}$, przy $m > l$, jest równy zeru, gdyż wszystkie wyznaczniki-składniki, na które $\Delta_{n,m}$ się rozłoży, mieć będą dwie lub więcej kolumn elementów odpowiednio proporcyonalnych (§ 30). W razie zaś $m = l$, wyznacznik

$$\Delta_{n,l} = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1, & s_2 & ,\ldots, & s_{l-1} \\ s_1 & , s_2, & s_3 & ,\ldots, & s_l \\ . & . & . & . & . \\ s_{l-1}, & s_l, & s_{l+1}, & \ldots, & s_{2l-2} \end{vmatrix}$$

może być wyrażony za pomocą różnych pierwiastków (5). Jeśli, wogóle, w szeregu (1), pierwiastków, posiadających wartość, oznaczoną w szeregu (5) przez β_j, jest γ_j, czyli, jeśli w szeregu (1) jest γ_1 pierwiastków mających wartość β_1, γ_2 mających wartość β_2, i t. d. $(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_l = n)$, to

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i$$

$$= \gamma_1 \beta_1^i + \gamma_2 \beta_2^i + \ldots + \gamma_l \beta_l$$

wyznacznik

$$\Delta_{n,l} =$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_l & ,\ldots, & \gamma_2\beta_2^{l-1} + \gamma_2\beta_2^{l-1} + \ldots + \gamma_l\beta_l^{l-1} \\ \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \ldots + \gamma_l\beta_l & ,\ldots, & \gamma_1\beta_1^{l} + \gamma_2\beta_2^{l} + \ldots + \gamma_l\beta_l^{l} \\ \gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2 + \ldots + \gamma_l\beta_l^2 & ,\ldots, & \gamma_1\beta_1^{l+1} + \gamma_2\beta_2^{l+1} + \ldots + \gamma_l\beta_l^{l+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1\beta_1^{l-1} + \gamma_2\beta_2^{l-1} + \ldots + \gamma_l\beta_l^{l-1} & ,\ldots, & \gamma_1\beta_1^{2l-2} + \gamma_2\beta_2^{2l-2} + \ldots + \gamma_l\beta_l^{2l-2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{n,l} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & , \gamma_2 & ,\ldots, & \gamma_l \\ \gamma_1\beta_1 & , \gamma_2\beta_2 & ,\ldots, & \gamma_l\beta_l \\ \gamma_1\beta_1^2 & , \gamma_2\beta_2^2 & ,\ldots, & \gamma_l\beta_l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1\beta_1^{l-1} & , \gamma_2\beta_2^{l-1} & ,\ldots, & \gamma_l\beta_l^{l-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & , 1 & ,\ldots, & 1 \\ \beta_1 & , \beta_2 & ,\ldots, & \beta_l \\ \beta_1^2 & , \beta_2^2 & ,\ldots, & \beta_l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^{l-1} & , \beta_2^{l-1} & ,\ldots, & \beta_l^{l-1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{n,l} = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l \begin{vmatrix} 1 & , 1 & ,\ldots, & 1 \\ \beta_1 & , \beta_2 & ,\ldots, & \beta_l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^{l-1} & , \beta_2^{l-1} & ,\ldots, & \beta_l^{l-1} \end{vmatrix}^2;$$

$$\Delta_{n,l} = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(\beta_1 - \beta_2)^2(\beta_1 - \beta_3)^2\ldots(\beta_1 - \beta_l)^2.$$
$$.(\beta_2 - \beta_3)^2\ldots(\beta_2 - \beta_l)^2.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$.(\beta_{l-1} - \beta_l)^2.$$

Więc gdy równanie n-ego stopnia $f(x) = 0$ ma różnych l pierwiastków, to wyznacznik $\Delta_{n,l}$ przedstawia iloczyn kwadratów różnic samych tylko różnych pierwiastków [1]. Np. jeśli równanie szóstego stopnia posiada trzy różne pierwiastki

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$$

($l=3$), z których np. pierwszy trzykrotny, drugi zaś dwukrotny, to

$$\Delta_{6,3}=\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3+\ \ 2+\ \ 1, & 3\beta_1+2\beta_2+\beta_3, & 3\beta_1^2+2\beta_2^2+\beta_3^2 \\ 3\beta_1+2\beta_2+\beta_3, & 3\beta_1^2+2\beta_2^2+\beta_3^2, & 3\beta_1^3+2\beta_2^3+\beta_3^3 \\ 3\beta_1^2+2\beta_2^2+\beta_3^2, & 3\beta_1^3+2\beta_2^3+\beta_3^3, & 3\beta_1^4+2\beta_2^4+\beta_3^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{6,3}=3.2.1.(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_1-\beta_3)^2(\beta_2-\beta_3)^2.$$

Wszystkie zaś tu wyznaczniki $\Delta_{6,4}$, $\Delta_{6,5}$ etc. są równe zeru. Do tegoż przykładu stosując związek (3), znajdziemy np.

$$\begin{vmatrix} s_5, & s_6, & s_7 \\ s_6, & s_7, & s_8 \\ s_7, & s_8, & s_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & , 2 & , 1 \\ 3\beta_1 & , 2\beta_2 & , \beta_3 \\ 3\beta_1^2, & 2\beta_2^2, & \beta_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \beta_1^5, & \beta_2^5, & \beta_3^5 \\ \beta_1^6, & \beta_2^6, & \beta_5^6 \\ \beta_1^7, & \beta_2^7, & \beta_3^7 \end{vmatrix}$$

$$=3.2.1.\beta_1^5\beta_2^5\beta_3^5(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2;$$

podobne zaś wyznaczniki 4-ego i wyższych stopni będą tu zerami.

---

(1) Bellavitis, l. c., § 46.

§ 102.

Jeśli zamiast n ilości (1) § 100-ego weźmiemy $n+1$ ilości

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n,\ x,$$

to, podobnie jak w § 100, znajdziemy, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\ldots, & 1 & ,1 \\ \alpha_1 & ,\alpha_2 & ,\ldots, & \alpha_n & ,x \\ & & & & \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots & ,\alpha_n^{n-1}, & x^{n-1} \\ \alpha_1^n & ,\alpha_2^n & ,\ldots & ,\alpha_n^n & ,x^n \end{vmatrix}$$

przedstawia iloczyn $\frac{n(n+1)}{2}$ różnic

$$\begin{aligned} &(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)\quad(x-\alpha_1)\ . \\ &\qquad .(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_2)\quad(x-\alpha_2)\ . \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad .(\alpha_n-\alpha_{n-1})(x-\alpha_{n-1}). \\ &\qquad\qquad\qquad .(x-\alpha_n)\ . \end{aligned}$$

Ilości

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

mogą być pierwiastkami równania n-ego stopnia. Niechaj to równanie, w którem możemy nadto przyjąć, że spółczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest jedność, będzie

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Wtedy w wypisanym powyżej iloczynie ostatnie czynniki wierszy

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)=f(x),$$

pozostałe zaś czynniki tworzą iloczyn róznic pierwiastków równania $f(x)=0$. Jest więc

$$\begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\dots & ,1 & ,1 \\ \alpha_1 & ,\alpha_2 & ,\dots & ,\alpha_n & ,x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \dots & ,\alpha_n^{n-1}, & x^{n-1} \\ \alpha_1^n & ,\alpha_2^n & ,\dots & ,\alpha_n^n & ,x^n \end{vmatrix} = f(x)\Pi_n$$

$$=(x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_{n-1}x+p_n)\begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\dots & ,1 \\ \alpha_1, & ,\alpha_2 & ,\dots & ,\alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \dots & ,\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Po prawej stronie tej równości spółczynnikiem przy x^i jest $p_{n-i}\Pi_n$, po lewej zaś, t. j. w wyznaczniku który pisać możemy $\Sigma\pm\alpha_1^0\alpha_2^1\dots\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n^{n-1}x^n$, spółczynnikiem przy x^i jest ilość dołączona do elementu, będącego w $(n+1)$-ej kolumnie i w wierszu $(i+1)$-ym (§ 25), t. j. iloczyn

$$(-1)^{(n+1)+(i+1)}=(-1)^{n+i}=(-1)^{(n+i)-2i}=(-1)^{n-i},$$

przez wyznacznik $(n+1)-1=n$-ego stopnia, powstały z wyznacznika $\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\ldots\alpha_n{}^{n-1}x^n$ przez opuszczenie $(i+1)$-ego wiersza i $(n+1)$-ej kolumny, t. j. przez wyznacznik

$$\Sigma\pm\alpha^0{}_1\alpha^1{}_2\ \ldots\ \alpha_i^{i-1}\alpha_{i+1}^{i+1}\ldots\alpha_n{}^n.$$

Porównywając ze sobą te dwa wyrażenia spółczynnika przy x^i, mamy

$$p_{n-i}\Pi_n=(-1)^{n-i}\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\ldots\alpha_i^{i-1}\alpha_{i+1}^{i+1}\ldots\alpha_n{}^n.$$

Kładąc w tej równości kolejno $i+1=1, 2,\ldots,n-1,\ n,\ n+1$, otrzymamy z niej ([1])

$$\begin{aligned}
\Sigma\pm\alpha_1{}^1\alpha_2{}^2\alpha_3{}^3\ldots\alpha_{n-2}^{n-2}\alpha_{n-1}^{n-1}\alpha_n^n &= (-1)^n p_n\Pi_n,\\
\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^2\alpha_3{}^3\ldots\alpha_{n-2}^{n-2}\alpha_{n-1}^{n-1}\alpha_n^n &= (-1)^{n-1} p_{n-1}\Pi_n,\\
\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\alpha_3{}^3\ldots\alpha_{n-2}^{n-2}\alpha_{n-1}^{n-1}\alpha_n^n &= (-1)^{n-2} p_{n-1}\Pi_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots,\\
\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\alpha_3{}^2\ldots\alpha_{n-2}^{n-3}\alpha_{n-1}^{n-1}\alpha_n^n &= p_2\Pi_n,\\
\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\alpha_3{}^2\ldots\alpha_{n-2}^{n-3}\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n^n &= -p_1\Pi_n,\\
\Sigma\pm\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1\alpha_3{}^2\ldots\alpha_{n-2}^{n-3}\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n^{n-1} &= \Pi_n,
\end{aligned}$$

co daje nam możność wyrażenia spółczynników równania

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ +p_{n-1}x+p_n=0,$$

jako ilorazów dwu wyznaczników n-ego stopnia, utworzonych przez pierwiastki tego równania.

([1]) MAINARDI (TORTOLINI, *Annali*, t. I, 1850, str. 76).

Jeśli otrzymany powyżej wyznacznik $(n+1)$-ego stopnia

$$f(x)\Pi_n = \begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\ldots & ,1 & ,1 \\ \alpha_1 & ,\alpha_2 & ,\ldots & ,\alpha_n & ,x \\ \ldots & , \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & ,\alpha_2^{n-1} & ,\ldots & ,\alpha_n^{n-1} & ,x^{n-1} \\ \alpha_1^n & ,\alpha_2^n & ,\ldots & ,\alpha_n^n & ,x^n \end{vmatrix},$$

pomnożymy przez (§§ 34, 48)

$$\Pi = \begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\ldots & ,1 \\ \alpha_1 & ,\alpha_2 & ,\ldots & ,\alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & ,\alpha_2^{n-1} & ,\ldots & ,\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,\ldots & ,1 & ,0 \\ \alpha_1 & ,\alpha_2 & ,\ldots & ,\alpha_n & ,0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & ,\alpha_2^{n-1} & ,\ldots & ,\alpha_n^{n-1} & ,0 \\ 0 & ,0 & ,\ldots & ,0 & ,1 \end{vmatrix},$$

to otrzymamy (mnożąc wiersze przez wiersze), według (2) § 100-ego,

$$f(x)\Delta_{n,n} = \begin{vmatrix} s_0 & ,s_1 & ,\ldots & ,s_{n-1} & ,1 \\ s_1 & ,s_2 & ,\ldots & s_n & ,x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & ,s_n & ,\ldots & ,s_{2n-2} & ,x^{n-1} \\ s_n & ,s_{n+1} & ,\ldots & ,s_{2n-1} & ,x^n \end{vmatrix},$$

czyli [1]

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} =$$

$$= (x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n) \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

co także daje nam możność, w sposób podobny powyższemu, wyrażenia spółczynników $p_1,\ldots,p_n$ jako ilorazów dwu wyznaczników utworzonych przez summy jednakowych potęg ierwiastków równania danego.

§ 103.

Ilość s_i, summy równych pierwiastków równania

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0,$$

są związane ze sobą znanemi związkami [2]

---

(1) JOACHIMSTHAL, *Bemerkungen über den Sturmschen Satz* (CRELLE, *Journal*, t. XLVIII, str. 393).

(2) NEWTON, *Arithmetica universalis*.

$$\begin{cases} s_0 - n = 0, \\ s_1 + p_1 = 0, \\ s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0, \\ s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} + \ldots + p_{n-2} s_1 + (n-1) p_{n-1} = 0, \\ s_{n+m} + p_1 s_{n+m-1} + p_2 s_{n+m-2} + \ldots + p_{n-2} s_{m+2} + p_{n-1} s_{m+1} + p_n s_m = 0 \end{cases}$$

(przy $m = 0, 1, 2,$ i t. d.). Te związki dają nam możność wyrażenia ilości s_i [1], a temsamem i wyznacznika

---

[1] Biorąc z tych związków (zaczynając od drugiego) i związków po sobie następujących, możemy je uważać jako i liniowych równań albo ze zmiennemi $s_1, s_2, \ldots, s_i$, alboteż ze zmiennemi $p_1, p_2, \ldots, p_i$, i będziemy mogli z nich odpowiednio wyznaczyć (§ 71) albo s_i w funkcyi ilości $p_1, p_2, \ldots, p_i$, albo też p_i w funkcyi ilości $s_1, s_2, .., s_i$. Będzie więc (Salmon, l. c., w 3-em wyddniu str. 52):

$$s_2 = \begin{vmatrix} p_1, & 1 \\ 2p_2, & p_1 \end{vmatrix}; \qquad s_3 = \begin{vmatrix} p_1, & 1, & 0 \\ 2p_2, & p_1, & 1 \\ 3p_3, & p_2, & p_1 \end{vmatrix};$$

$$s_4 = \begin{vmatrix} p_1, & 1, & 0, & 0 \\ 2p_2, & p_1, & 1, & 0 \\ 3p_3, & p_2, & p_1, & 1 \\ 4p_4, & p_3, & p_2, & p_1 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$$p_2 = \frac{1}{1.2} \begin{vmatrix} s_1, & 1 \\ s_2, & s_1 \end{vmatrix}; \quad p_3 = \frac{1}{1.2.3} \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2 \\ s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix};$$

$$p_4 = \frac{1}{1.2.3.4} \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3 \\ s_4, & s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$\Delta_{n,n}$ [1] w funkcyi spółczynników równania danego, bez uprzedniego jego rozwiązywania. Mając zaś takie wyrażenie wyznacznika $\Delta_{n,n}$, możemy niekiedy nierozwiązując danego równania, obliczyć jego pierwiastki. Tak np. [2], gdy dane jest równanie 5-ego stopnia

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x + 8 = 0,$$

$(p_1 = -4,\ p_2 = 1,$ etc.), którego pierwiastki, oznaczyć się mające, nazwijmy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, — to ze związków

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = s_0 - 5, \\ 0 = s_1 - 4, \\ 0 = s_2 - 4.s_1 + 2.1, \\ 0 = s_3 - 4.s_2 + 1.s_1 + 3.10, \\ 0 = s_4 - 4.s_3 + 1.s_2 + 10.s_1 + 4.(-4), \\ 0 = s_5 - 4.s_4 + 1.s_3 + 10.s_2 - 4.s_1 + 8s_0, \\ 0 = s_6 - 4s_5 + 1.s_4 + 10s_3 - 4s_2 + 8s_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

znajdziemy kolejno

$$s_0 = 5,\ s_1 = 4,\ s_2 = 14,\ s_3 = 22,\ s_4 = 50,\ s_5 = 94, \text{ etc.}$$

Twórzmy kolejno

$$\Delta_{5,2} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5, & 4 \\ 4, & 14 \end{vmatrix} = 54;$$

---

(1) Baltzer, l, c., w 4-em wydaniu str. 83.

(2) Bellavitis, l. c., § 50.

$$\Delta_{5,3} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5, & 4, & 14 \\ 4, & 14, & 22 \\ 14, & 22, & 50 \end{vmatrix} = 0;$$

nasze więc równanie posiada (§ 101) tylko $l = 2$ różne pierwiastki, których wartości nazwiemy β_1 i β_2; wartości te powtórzone (§ 101) pierwsza γ_1 razy, druga zaś γ_2 razy, odtworzą pierwiastki α_1, α_2, α_3, α_4, α_4.

Nadto jest (§ 101)

$$\Delta_{5,2} = \gamma_1\gamma_2(\beta_1 - \beta_2)^2 = 54.$$

Idzie więc o wyznaczenie pierwiastków różnych β_1, β_2, oraz ich wielokrotności, t. j. liczb γ_1 i γ_2.

Te dwie wartości β_1 i β_2 mogą być uważane jako pierwiastki równania kwadratowego (o różnych pierwiastkach)

$$z^2 + q_1 z + q_2 = 0.$$

Temu równaniu zadosyć czynią, według powyższego, pierwiastki danego równania, — więc

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + q_1\alpha_1^1 + q_2\alpha_1^0 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ \alpha_5^2 + q_1\alpha_5^1 + q_2\alpha_5^0 = 0. \end{cases}$$

Dodając te pięć tożsamości do siebie, mamy związek

$$s_2 + q_1 s_1 + q_2 s_0 = 0,$$

czyli

$$14 + q_1 . 4 + q_2 . 5 = 0,$$

któremu spółczynniki q_1 i q_2 tożsamościowo czynić muszą zadość. Możemy więc np. przyjąć $q_1 = -1$, zaś $q_2 = -2$. Ilości więc β_1 i β_2 są pierwiastkami równania

$$z^2 - z - 2 = 0.$$

Gdy summy jednakowych potęg pierwiastków tego równania nazwiemy

$$\beta_1^i + \beta_2^i = s'_i,$$

to, obliczając, podobnie jak powyżej, ilości s'_i, mamy

$$\begin{cases} 0 = s'_0 - 2, \\ 0 = s'_1 + 1.(-1), \\ 0 = s'_2 - 1.s'_1 - 2s'_0, \\ 0 = s'_3 - 1.s'_2 - 2s'_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

skąd

$$s'_0 = 2,\ s'_1 = 1,\ s'_2 = 5,\ s'_3 = 7,\ \text{etc.}$$

$$\Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} s'_0, & s'_1 \\ s'_1, & s'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 5 \end{vmatrix} = 9;$$

$$\Delta_{2,2} = \Pi_2{}^2 = (\beta_1 - \beta_2)^2 =$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 3,$$

Dobierając wartości dla β_1 i β_2, którychby różnica była 3, a takie, żeby zadosyć czyniły równaniu

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

znajdujemy

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = -1.$$

Te więc dwie wartości: 2 i -1 przedstawiają różne pierwiastki danego równania.

Aby wyznaczyć wielokrotności tych pierwiastków, zważmy, że z wyrażeń

$$\Delta_{1,2} = \gamma_1\gamma_2(\beta_1 - \beta_2)^2 = 54,$$
$$\Delta_{2,2} = (\beta_1 - \beta_2)^2 = 9,$$

wypada

$$\gamma_1\gamma_2 = 6.$$

Jeden więc z tych pierwiastków jest trzykrotny, drugi zaś dwukrotny.

§ 104.

Wyznacznik § 102-ego

$$\begin{vmatrix} s_0 & , s_1 & , s_2 & , \ldots & , s_{n1} & , 1 \\ s_1 & , s_2 & , s_3 & , \ldots & , s_n & , x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n & , s_{n+1}, & \ldots & , s_{2n-2}, & x^{n-1} \\ s_n & , s_{n+1}, & s_{n+2}, & \ldots & , s_{2n-1}, & x^n \end{vmatrix} = (x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n)\Delta_{n,n}$$

przedstawia funkcyę n-ego stopnia zmiennej x, w której-to funkcyi spółczynnikiem przy najwyższej potędze zmiennej, t. j. przy x, jest wyznacznik ściślej symetryczny $\Delta_{n,n}$, który jest wyróżnikiem (§ 100) funkcyi

$$x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = f(x).$$

Nazwijmy $f(x)\Delta_{n,n} = F_n$. Jeśli do tego wyznacznika

$$F_n = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1 & , s_2 & , \ldots & , s_{n-1} & , 1 \\ s_1 & , s_2 & , s_3 & , \ldots & , s_n & , x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n & , s_{n+1}, & \ldots & , s_{2n-2}, & x^{n-1} \\ s_n & , s_{n+1}, & s_{n+2}, & \ldots & , s_{2n-1}, & x^n \end{vmatrix},$$

w którym elementy ostatniej kolumny tworzą postęp ilorazowy, zastosujemy przekształcenie § 41-ego, zważając przytem, że (§ 25)

$$(-1)^{1+(n+1)} = (-1)^{n+2} = (-1)^{n},$$

a następnie w przekształconym wyznaczniku elementy wszystkich wierszy pomnożymy (§ 35) przez -1, to wyrazimy F_n jako wyznacznik ściślej symetryczny;

$$F_n = (-1)^n \begin{vmatrix} s_1 - s_0 x & , s_2 - s_1 x & , \dots & , s_n - s_{n-1} x \\ s_2 - s_1 x & , s_3 - s_2 x & , \dots & , s_{n+1} - s_n x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n - s_{n-1} x, & s_{n+1} - s_n x, & \dots & , s_{2n-1} - s_{2n-2} x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & , s_1 x - s_2 & , \dots & , s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & , s_2 x - s_3 & , \dots & , s_n x - s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} x - s_n, & s_n x - s_{n+1}, & \dots & , s_{2n-2} x - s_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Gdy zamiast n weźmiemy jakąkolwiek liczbę $i < n$, to możemy podobnie oznaczyć $(i = n-1,\ n-2, \dots, 2,\ 1)$

$$F_i = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1 & , s_2 & , \dots & , s_{i-1}, & 1 \\ s_1 & , s_2 & , s_3 & , \dots & , s_i & , x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i-1}, & s_i & , s_{i+1}, & \dots & , s_{2i-2}, & x^{i-1} \\ s_i & , s_{i+1}, & s_{i+2}, & \dots & , s_{2i-1}, & x^i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & , s_1 x - s_2 & , \dots & , s_{i-1} x - s_i \\ s_1 x - s_2 & , s_2 x - s_3 & , \dots & , s_i x - s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} x - s_i, & s_i x - s_{i+1}, & \dots & , s_{2i-2} x - s_{2i-1} \end{vmatrix},$$

a te wyznaczniki, z których drugi ma postać wyznacznika ściślej symetrycznego, przedstawiają funkcyę F_i stopnia i-ego względem zmiennej x, w której spółczynnikiem przy najwyższej potędze zmiennej, t. j. przy x^i, jest (§ 101)

$$\begin{vmatrix} s_0 & , s_1, & s_2 & , \dots & , s_{i-1} \\ s_1 & , s_2, & s_3 & , \dots & , s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1}, & s_i, & s_{i+1}, & \dots & , s_{2i-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n,i}.$$

Wprowadzając jeszcze $F_0 = 1$, mamy tu $n+1$ funkcyj

$$F_n,\ F_{n-1},\ F_{n-2},\dots,F_{i+1},\ F_i,\ F_{i-1},\dots,F_2,\ F_1,\ 1. \qquad (1)$$

Jeśli je będziemy uważać w postaciach wyznaczników ściślej symetrycznych, to każda z funkcyi (1) powstaje z bezpośrednio poprzedzającej przez opuszczenie w wyznaczniku ściśle symetrycznym, ją (poprzedzającą) przedstawiającym, ostatniego wiersza i ostatniej kolumny. Skutkiem tego, jeśli ze względu na jasność dalszych związków, w każdym wyznaczniku ściślej symetrycznym nazwiemy element j-ego wiersza i k-ej kolumny przez $a_{j,k}$, t. j. wprowadzimy oznaczenie

$$F_m = \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & , s_1 x - s_2 & , \dots & , s_{m-1} x - s_m \\ s_1 x - s_2 & , s_2 x - s_3 & , \dots & , s_m x - s_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} x - s_m, & s_m x - s_{m+1}, & \dots & , s_{2m-2} x - s_{2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1,1}\ , & a_{1,2}\ , & \cdot & \cdot & \cdot & ,a_{1,m} \\ a_{2,1}\ , & a_{2,2}, & \cdot & \cdot & \cdot & ,a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \cdot & \cdot & \cdot & ,a_{m,m} \end{vmatrix},$$

to (§ 61)

$$\mathrm{F}_i=\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i+1,i+1}}; \qquad \mathrm{F}_{i-1}=\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial a_{i,i}}=\frac{\partial^2 \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i+1,i+1}\partial a_{i,i}}.$$

Według zaś związku, wyprowadzonego w § 68-ym, jest ogólnie

$$\mathrm{F}_{i+1}\frac{\partial^2 \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i+1,i+1}\partial a_{i,i}}=\Sigma\pm\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i+1,i+1}}\ \frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i}},$$

czyli, jak tu,

$$\mathrm{F}_{i+1}\mathrm{F}_{i-1}=\mathrm{F}_i\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i}}-\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i+1,i}}\ \frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i+1}}.$$

Lecz, z powodu symetryczności wyznacznika F_{i+1}, ilości dołączone w nim do elementów $a_{i+1,i}$, i $a_{i,i+1}$, przedstawione przez pochodne wchodzące w ostatni wyraz tego związku (§ 61), są sobie równe (§ 92). Na mocy tego otrzymany związek mo˙emy tak przedstawić :

$$\mathrm{F}_{i+1}\mathrm{F}_{i-1}=\mathrm{F}_i\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i}}-\left(\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i+1}}\right)^2.$$

Ztąd wypada, że jeśli zmiennej x nadamy wartość sprawiającą, iż

$$\mathrm{F}_i=0,$$

to

$$\mathrm{F}_{i+1}\mathrm{F}_{i-1}=-\left(\frac{\partial \mathrm{F}_{i+1}}{\partial a_{i,i+1}}\right)^2,$$

czyli, że iloczyn $\mathrm{F}_{i+1}\mathrm{F}_{i-1}$ jest odjemny, a więc funkcye F_{i+1} i F_{i-1}, sąsiednie funkcyi F_i, przy tej wartości zmiennej, przy której $F_i=0$, same otrzymują wartości przeciwnego znaku. Że zaś funkcya F_i może przedstawiać którąkolwiek z funkcyi szeregu (1), więc powiemy, że [1]

Wyrazy szeregu

$$F_n,\ F_{n-1},\ \ldots,F_2,\ F_1,\ 1 \tag{1}$$

posiadają własność charakteryzującą funkcye (reszty) STURM'*a, t. j., jeśli dla pewnej wartości zmiennej która z tych funkcyj jest zerem, to funkcye sąsiednie (poprzedzająca i następująca) dla tejże wartości zmiennej są przeciwnego znaku.*

Spółczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x w funkcyi F_i jest, jak widzieliśmy, $\Delta_{n,i}$. Zatem spółczynniki przy najwyższej potędze zmiennej w każdej z funkcyj szeregu (1) tworzą szereg wyznaczników ściślej symetrycznych

$$\Delta_{n,n},\quad \Delta_{n,n-1},\ \ldots,\Delta_{n,2},\ \Delta_{n,1},\ 1$$

czyli [2]

$$\begin{vmatrix} s_0 & ,\ldots, s_{n-1} \\ \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & \ldots, s_{2n-2} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} s_0 & ,\ldots, s_{n-2} \\ \ldots & \ldots \\ s_{n-2} & ,\ldots, s_{2n-4} \end{vmatrix},\ldots,\quad \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix},\quad s_0,\quad 1 \tag{2}$$

Zważmy jeszcze, że w szeregu (1) pierwsza funkcya, t. j.

$$F_n=f(x)\Delta_{n,n},$$

jest iloczynem dwu czynników, z których drugi niezależny od zmiennej x, więc równanie

$$F_n=0,$$

---

[1] JOACHIMSTHAL, l. c., str. 400.

[2] Te wyznaczniki, według związku (4) § 101-ego, przedstawiają funkcye symetryczne iloczynów (odpowiednio po $n-1,\ldots, 2, 1, 0$) kwadratów różnic pierwiastków równania $f(x)=0$.

jest równoważne z równaniem

$$f(x) = 0,$$

zaś funkcye (1), jako posiadające na mocy powyżej dowiedzionego cechą charakterystyczną reszt STURM'a, od takich reszt, właściwych, według twierdzenia STURM'a, równaniu $f(x)=0$, różnić się mogą tylko przez czynniki stałe. Z tego wypada, że (gdy te odróżniające czynniki są dodatne [1], to) :

Równanie $f(x)=0$ posiada wszystkie pierwiastki rzeczywiste w razie, gdy wszystkie wyrazy szeregu (2) są dodatne [2].

§ 105.

Szczególny przypadek wyznacznika ściślej symetrycznego (§ 98, przypisek)

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_n, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{n-3}, & a_{n-2} \\ a_{n+1}, & a_n, & a_0, & \ldots, & a_{n-4}, & a_{n-3} \\ \cdot, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-3}, & a_{2n-4}, & a_{2n-5}, & \ldots, & a_0, & a_1 \\ a_{2n-2}, & a_{2n-3}, & a_{2n-4}, & \ldots, & a_n, & a_0 \end{vmatrix} =$$

---

[1] SYLVESTER (*Philos. Magazine*, 1839, grudzień), badając funkcye symetryczne iloczynów kwadratów różnic pierwiastków równania $f(x)=0$, dowiódł, że te czynniki stałe odróżniające funkcye (1) od właściwych równaniu $f(x)=0$ reszt STURM'a są kwadratami, a tem samem ilościami dodatnemi. Dowodu tego nie przytaczam tu, gdyż on jest dość długi i nie przedstawia zastosowania własności wyznaczników. Podaje go SALMON. l. c., w 4-em wyd. str. 48. Czytelnika pragnącego się zapoznać z własnościami funkcyj STURM'a, odsyłam do klassycznego podręcznika : J. A. SERRET, *Cours d'algèbre supérieure*, 4 wydanie, t. I (1877), str. 276 i następne.

[2] SYLVESTER, ibidem.

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n-1}, & a_{n-2}, \ldots, & a_2 & , a_1 & , a_0 \\ a_{n-2}, & a_{n-3}, \ldots, & a_1 & , a_0 & , a_n \\ a_{n-3}, & a_{n-4}, \ldots, & a_0 & , a_n & , a_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & , a_0 & , \ldots, a_{2n-5}, & a_{2n-4}, & a_{2n-3} \\ a_0 & , a_n & , \ldots, a_{2n-4}, & a_{2n-3}, & a_{2n-2} \end{vmatrix};$$

w którym, przy wszystkich możliwych wartościach liczby k, jest

$$a_{n+k} = a_{n-k-1},$$

to jest wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0 & , a_1 & , a_2, \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_{n-1}, & a_0 & , a_1, \ldots, & a_{n-3}, & a_{n-2} \\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_0, \ldots, & a_{n-4}, & a_{n-3} \\ . & . & . & . & . \\ a_2 & , a_3 & , a_4, \ldots, & a_0 & , a_1 \\ a_1 & , a_2 & , a_3, \ldots, & a_{n-1}, & a_0 \end{vmatrix} = N,$$

posiadający w każdym rzędzie też same elementy, tak, że z jednego rzędu otrzymujemy następny skutkiem kołowego przestawienia elementów (§ 11), nazwiemy *wyznacznikiem doskonale symetrycznym* [doppeltorthosymmetrische (¹)].

W każdym wyrazie wyznacznika N, *doskonale symetrycznego stopnia* n-*ego*, *summa wskaźników elementów jest liczbą przez* n *podzielną* (²). W i-ym bowiem wierszu k-y element posiada

(¹) Guenther, w 4-em wydaniu str. 83.

(²) Baltzer, l. c., w 4-em wydaniu str. 101. Cała również dalsza treść tego §-u jest rozwinięciem ustępu tegoż dzieła Baltzer'a (str. 99-102).

wskaźnik albo $-i+k$, albo $n-i+k$, stosownie do tego, czy i jest mniejszą czyteż większą liczbą niż k. Jeśli więc w pewien wyraz wyznacznika wszedł r-y element pierwszego wiersza, s-y drugiego, t-y trzeciego i t. d., to summa wskaźników elementów tego wyrazu jest

$$-1-2-3-\ldots+r+s+t+\ldots+\lambda n,$$

gdzie λ oznacza liczbę elementów, w których wskaźnik wiersza jest większą liczbą niż wskaźnik kolumny (i może mieć wartość od 0 do $n-1$). Lecz liczby $r, s, t,\ldots$, wskaźniki kolumn, porządkiem tylko różnić się mogą od szeregu liczb 1, 2, 3,...; w powyższéj więc summie

$$-1-2-3-\ldots+r+s+t+\ldots=0,$$

a summa wskaźników elementów wyrazu $=\lambda n$, q. e. d.

Jeśli α jest pierwiastkiem pierwotnym n-ego stopnia z jedności, to potęgi

$$\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

mają wartości różne od 1 i funkcya całkowita ilości α może mieć n wyrazów (¹) (gdyż $\alpha^n=1$, $\alpha^{n+m}=\alpha^m$). Np.

$$\varphi(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1}. \tag{1}$$

Podstawiając zamiast α wszystkie n pierwiastków z jedności, które nazwijmy

$$\alpha=\alpha_1, \quad \alpha^2=\alpha_2, \quad \alpha^3=\alpha_3,\ldots, \quad \alpha^{n-1}=\alpha_{n-1}, \quad 1=\alpha^n=\alpha_n,$$

otrzymamy n wartości sprzężonych (²) powyższej funkcyi

$$\varphi(\alpha_1),\ \varphi(\alpha_2),\ \varphi(\alpha_3),\ldots,\ \varphi(\alpha_{n-1}),\ \varphi(\alpha_n),$$

(¹) WARING, *Miscelanea analytica* (1762, str. 44).

(²) KUMMER, *De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant.* (Wrocław, 1844, a także LIOUVILLE. *Journal*, t. XII, str. 187): « numeri conjuncti ».

które możemy uważać jako pierwiastki pewnego równania n-ego stopnia, o spółczynnikach od α niezależnych, ale będących funkcyami całkowitemi ilości $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Aby wyrazić $\varphi(\alpha)$ za pomocą ilości $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, pomnóżmy kolejno równanie $\varphi(\alpha)=0$ przez

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1};$$

pamiętając, że $\alpha^n = 1$, oraz pisząc pod sobą wyrazy zawierające jednakowe potęgi ilości α. Tą drogą dochodzimy do układu n związków

$$\left\{\begin{array}{lllll}
[a_0-\varphi(\alpha)]+ & a_1\alpha+ & a_2\alpha^2+\ldots+ & a_{n-1}\alpha^{n-1} & =0,\\
a_{n-1}+[a_0-\varphi(\alpha)]\alpha+ & & a_1\alpha^2+\ldots+ & a_{n-2}\alpha^{n-1} & =0,\\
a_{n-2}+ & a_{n-1}\alpha+[a_0-\varphi(\alpha)]\alpha^2+\ldots+ & & a_{n-3}\alpha^{n-1} & =0,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots,\\
a_1+ & a_2\alpha+ & a_3\alpha^2+\ldots+[a_0-\varphi(\alpha)]\alpha^{n-1} & & =0,
\end{array}\right.$$

jednorodnych i liniowych względem n ilości

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1},$$

co prowadzi (§ 76) do związku

$$\begin{vmatrix}
a_0-\varphi(\alpha), & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1}\\
a_{n-1}, & a_0-\varphi(\alpha), & a_1, & \ldots, & a_{n-2}\\
a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_0-\varphi(\alpha), & \ldots, & a_{n-3}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_0-\varphi(\alpha)
\end{vmatrix} = 0.$$

Jest-to szukane równanie n-ego stopnia względem $\varphi(\alpha)$, o pierwiastkach $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n)$. W tem równaniu wyraz, niezależny od zmiennej $\varphi(\alpha)$, podzielony przez spółczynnik przy najwyższej potędze zmiennej, to jest przy $[\varphi(\alpha)]^n$, przedstawia, jak wiadomo, iloczyn pierwiastków tego równania, pomnożony przez $(-1)^n$. Uważając zaś w wypisanym wyznaczniku każdą jego kolumnę, jako utworzoną przez dwu-składnikowe elementy (więc, wogóle, k-ą kolumnę jako utworzoną przez elementy

$$a_{k-1}+0, a_{k-2}+0, \ldots, a_1+0, a_0-\varphi(\alpha), a_{n-1}+0, \ldots, a_k+0),$$

i rozkładając ten wyznacznik na składniki (§ 28), spostrzeżemy, że w tem równaniu wyraz, od $\varphi(\alpha)$ niezależny, jest

$$\begin{vmatrix} c_0 & , a_1, \ldots, & a_{n-1} \\ a_{n-1}, & a_0, \ldots, & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_1 & , a_2, \ldots, & a_0 \end{vmatrix} = \mathrm{N},$$

wyraz zaś zawierający najwyższą potęgę zmiennej $\varphi(\alpha)$ jest

$$\begin{vmatrix} -\varphi(\alpha), & 0 & , \ldots, & 0 \\ 0 & , -\varphi(\alpha), & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & , \quad 0 & , \ldots, & -\varphi(\alpha) \end{vmatrix} = (-1)^n[\varphi(\alpha)]^n.$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{N}}{(-1)^n} = (-1)^n \varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n),$$

zkąd widzimy, że iloczyn n sprzężonych wartości ilości $\varphi(\alpha)$, czyli tak zwana *norma* [1] n-*wartościowej ilości* $\varphi(\alpha)$ *wyraża się*

---

[1] KUMMER (ibidem): « norma numeri complexi ».

rzez wyznacznik doskonale symetryczny, mianowicie (¹)

$$\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_n)=\begin{vmatrix} a_0 & , a_1,\ldots a_{n-1} \\ a_{n-1}, & a_0,\ldots a_{n-2} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_1 & , a_2\;.\;.\;a_0 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Związek (2) prowadzi w niektórych przypadkach do ciekawych wyrażeń. Tak np., jeśli w (1)

$$a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=1,$$

to, z powodu, że, przy $i<n$,

$$\alpha_i+\alpha_i^2+\ldots+\alpha_i^{n-1}+1=0,$$

jest

$$\varphi(\alpha_1)=a_0-1,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,$$

$$\varphi(\alpha_{n-1})=a_0-1,$$

$$\varphi(\alpha_n)=a_0+1+1+\ldots+1=a_0+n-1,$$

skutkiem czego, według (2),

$$\begin{vmatrix} a_0, & 1, & 1,\ldots, & 1 \\ 1, & a_0, & 1,\ldots, & 1 \\ 1, & 1, & a_0,\ldots, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 1, & 1, & 1,\ldots, & a_0 \end{vmatrix}=(a_0+n-1)(a_0-1)^{n-1}.$$

(¹) Spottiswoode, l. c., str. 375.

Jeśli w (1) ilości

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n-1}$$

tworzą postęp ilorazowy, np.

$$1,\ v,\ v^2,\ldots,\ v^{n-1},$$

to wyrażenie (1) ilości $\varphi(\alpha)$ przedstawia summę n wyrazów postępu ilorazowego i

$$\varphi(\alpha)=\frac{1-v^n}{1-v\alpha}.$$

Wtedy, z powodu związków

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n&=0,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n&=0,\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n&=(-1)^n.(-1),\end{aligned}$$

(gdyż $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ są pierwiastkami równania $\alpha^n-1=0$), jest

$$(1-v\alpha_1)(1-v\alpha_2)\ldots(1-v\alpha_n)=1-v^n,$$

skutkiem czego związek (2) daje

$$\begin{vmatrix}1\ , & v\ , & v^2, & \ldots & ,v^{n-1}\\ v^{n-1}, & 1\ , & v\ , & \ldots & ,v^{n-2}\\ v^{n-2}, & v^{n-1}, & 1\ , & \ldots & ,v^{n-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ v\ , & v^2\ , & v^3, & \ldots & ,1\end{vmatrix}=(1-v^n)^{n-1}.$$

Jeśli w (1)

$$a_2=a_3=\ldots=a_{n-1}=0,$$

to, z tegoż co w poprzedzającym przypadku, powodu, jest

$$(a_0+a_1z_1)(a_0+a_1z_2)\ldots(a_0+a_1z_n)=a_0^n-(-a_1)^n,$$

skutkiem czego, według (2)

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & 0, & \ldots & ,0, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots & ,0, & 0 \\ 0, & 0, & a_0, & \ldots & ,0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & a_0, & a_1 \\ a_1, & 0, & 0, & \ldots & ,0, & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n-(-a_1)^n.$$

§ 106.

Wyznacznik wogóle symetryczny (§ 90)

$$S=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & ,a_{1,n} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & ,a_{2,n} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}, & \ldots & ,a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & a_{3,n}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

jest szczególnym przypadkiem wyznacznika $(i=\sqrt{-1})$,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ,a_{1,2}+ib_{1,2}, & a_{1,3}+ib_{1,3}, & \ldots & ,a_{1,n}+ib_{1,n} \\ a_{1,2}-ib_{1,2}, & a_{2,2} & ,a_{2,3}+ib_{2,3}, & \ldots & ,a_{2,n}+ib_{2,n} \\ a_{1,3}-ib_{1,3}, & a_{2,3}-ib_{2,3}, & a_{3,3} & ,\ldots & ,a_{3,n}+ib_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}-ib_{1,n}, & a_{2,n}-ib_{2,n}, & a_{3,n}-ib_{3,n}, & \ldots & ,a_{n,n} \end{vmatrix},$$

w którym elementy główne są rzeczywiste, elementy zaś sprzężone są ilościami zespolonemi [1] sprzężonemi. W przypadku bowiem

$$b_{1,2} = \ldots = b_{n-1,n} = 0;$$

przechodzi ten wyznacznik na wyznacznik S. Z tego powodu ten wyznacznik, ogólniejszy od symetrycznego, możnaby nazwać *wyznacznikiem hypersymetrycznym* (albo : ogólniej symetrycznym).

Zastępując w tym wyznaczniku i przez $-i$, spostrzeżemy, że wiersze stają się kolumnami i odwrotnie (§ 18) więc wyznacznik od $i = \sqrt{-1}$ nie zależy [2], czyli :

Wyznacznik hypersymetryczny ma wartość rzeczywistą.

---

(1) Uważam « ilość *zespoloną* » za daleko szczęśliwsze tłomaczenie nazwy « numerus *complexus* », niż używane dotąd « liczba *złożona* », jako wybitniej charakteryzujące pojęcie takiej ilości, a także dla tego, że liczba « złożona » ma inne znaczenie jeszcze, mianowicie jako przeciwstawienie liczby « pierwszej ». Nazwę « zespolona », w tem znaczeniu użytą, napotkałem niedawno w rękopiśmie pracy o nierozwiązalnosci algebraicznej równań stopnia wyższego nad czwarty, zakommunikowanej mi do przejrzenia. Nazwisko jej autora pozostało mi niewiadomem.

(2) Hermite (*Comptes rendus de l'ac. d. sc.*, t. XLI, str. 181).

ROZDZIAŁ JEDENASTY.

WYZNACZNIK SKOŚNY. PFAFFIAN.

§ 107.

Jeśli w wyznaczniku

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \dots & ,a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \dots & ,a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \dots & ,a_{n,n} \end{matrix}\right|,$$

między elementami sprzężonemi istnieje związek

$$a_{k,i} = -a_{i,k}$$

(przy wszystkich różnych od siebie wartościach liczb i i k), to taki wyznacznik

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \dots & ,a_{1,n} \\ -a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \dots & ,a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,n}, & -a_{2,n}, & -a_{3,n}, & \dots & ,a_{n,n} \end{matrix}\right|,$$

nazwiemy *wyznacznikiem skośnym* (1) [gauche (2), skew, gobbo, schiefe, symmetrale (3)]. Zgodnie z określeniem wyznacznika skośnego, elementy główne są (wogóle) jakiekolwiek.

Wyznacznik B w podstawieniu prostokątnem (§§ 87, 88) jest wyznacznikiem skośnym.

§ 108.

Jeśli w wyznaczniku m-ego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots & , a_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \dots & , a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

co do niegłównych elementów robimy założenie

$$a_{i,1} = \dots = a_{i,i-2} = 0, \quad a_{i,i-1} = -1, \quad a_{i,i+1} = +1, \quad a_{i,i+2} = \dots = a_{i,m} = 0,$$

$(i = 1, 2, \dots, m)$, główne zaś elementy nazwiemy

$$a_{i,i} = q_i,$$

to mieć będziemy (szczególny) wyznacznik skośny

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , a_{1,2} & , \dots & , a_{1,m-1} & , a_{1,m} \\ a_{2,1} & , a_{2,2} & , \dots & , a_{2,m-1} & , a_{2,m} \\ a_{3,1} & , a_{3,2} & , \dots & , a_{3,m-1} & , a_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1}, & a_{m-1,2}, & \dots & , a_{m-1,m-1}, & a_{m-1,m} \\ a_{m,1} & , a_{m,2} & , \dots & , a_{m,m-1} & , a_{m,m} \end{vmatrix} =$$

(1) TRZASKA, l. c. str. 1055.

(2) CAYLEY, *Sur quelques propriétés des determinants gauches*. (CRELLE, *Journal*, t. XXXII, str. 119).

(3) NATANI, *Mathemathisches Wörterbuch* (Hoffmann i Natani, t. VI, Berlin, 1867, str. 618.

$$\begin{vmatrix} q_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 & ,0 \\ -1, & q_2, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 & ,0 \\ 0, & -1, & q_3, & 1, & \ldots, & 0, & 0 & ,0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & -1, & q_{m-1}, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1 & ,q_m \end{vmatrix} = D_m.$$

Stosując doń wzór, wyprowadzony w § 67-ym, mamy

$$D_m \frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{m,m} \partial a_{m-1,m-1}} = \frac{\partial D_m}{\partial a_{m,m}} \frac{\partial D_m}{\partial a_{m-1,m-1}} - \frac{\partial D_m}{\partial a_{m-1,m}} \frac{\partial D_m}{\partial D_{m,m-1}}, \quad (1)$$

jakoteż

$$D_m \frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{1,1} \partial a_{m,m}} = \frac{\partial D_m}{\partial a_{1,1}} \frac{\partial D_m}{\partial a_{m,m}} - \frac{\partial D_m}{\partial a_{1,m}} \frac{\partial D_m}{\partial a_{m,1}}. \quad (2)$$

Lecz zgodnie z powyższem oznaczeniem, (§ 61)

$$\frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{m,m} \partial a_{m-1,m-1}} = \begin{vmatrix} q_1. & 1, & 0, & \ldots & ,0 \\ -1, & q_2, & 1, & \ldots & ,0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & ,q_{m-2} \end{vmatrix} = D_{m-2};$$

nazywając jeszcze wyznacznik $(m-2)$-ego stopnia

$$\frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{1,1} \partial a_{m,m}} = \begin{vmatrix} q_2, & 1, & 0, & \ldots & ,0 \\ -1, & q_3, & 1, & \ldots & ,0 \\ \ldots & \ldots & , & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & ,q_{m-1} \end{vmatrix} = N_{m-1},$$

mieć będziemy po prawej stronie związków (1) i (2), z powodu, że w każdym i-ym wierszu tylko elementy $a_{i,i-1}$, $a_{i,i}$, $a_{i,i+1}$ są różne od zera, takie wyrażenia dla pochodnych (§§ 25, 61):

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{m,m}} = D_{m-1}, \quad \frac{\partial D_m}{\partial a_{1,1}} = N_m,$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{m-1,m-1}} = q_m D_{m-2},$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{m-1,m}} = (-1)^{2m-1}\left[a_{m,m-1}\frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{m-1,m-1}\partial a_{m,m}}\right] = + D_{m-2};$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{m,m-1}} = (-1)^{2m-1}\left[a_{m-1,m}\frac{\partial^2 D_m}{\partial a_{m-1,m-1}\partial a_{m,m}}\right] = - D_{m-2}$$

nadto (§§ 25, 33)

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{1,m}} = \begin{vmatrix} -1, & q_2, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & q_3, & \dots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1},$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{m,1}} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ q_2, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & q_3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & -1, & q_{m-1}, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Związki więc (1) i (2) możemy tak przedstawić:

$$D_m D_{m-2} = q_m D_{m-1} D_{m-2} + D_{m-2}^2,$$

$$D_m N_{m-1} = N_m D_{m-1} - (-1)^{m-1},$$

czyli

$$D_m = q_m D_{m-1} + D_{m-2}. \tag{1}$$

$$N_m D_{m-1} - D_m N_{m-1} = (-1)^{m+1}. \tag{2}$$

Z wyrażenia (1) widzimy, że wyznacznik skośny m-ego stopnia D_m jest mianownikiem $(m+2)$-ego ([1]) reduktu ułamka ciągłego, którego ilorazy niezupełne [quotiens incomplets ([2])] są

$$0,\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots,$$

mianowicie ułamka

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cdots}}}} = 0 + 1 : (q_1 + 1 : (q_2 + \ldots + 1 : (q_m + 1 : (q_{m+1} + \ldots$$

Z wyrażenia zaś (2) widzimy, że N_m, wyznacznik skośny $(m-1)$-ego stopnia, będący pierwszą pochodną mianownika względem drugiego niezupełnego ilorazu (pierwszego elementu głównego),

$$N_m = \frac{\partial D_m}{\partial q_1},$$

jest licznikiem $(m+2)$-ego reduktu tegoż ułamka ciągłego.

([1]) Według rachowania, jakie przyjmuje J. A. SERRET, l. c., t. I, str. 11.

([2]) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*.

Zatem $(m+2)$-i redukt wypisanego ułamka ciągłego, który-to redukt nazwiemy $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$, jest [1]

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{N_m}{D_m} = \frac{\left(\frac{\partial D_m}{\partial q_1}\right)}{D_m} = \frac{\partial \log D_m}{\partial q_1}.$$

---

[1] Spottiswoode, l. c., str. 374. Podobne zaś badanie nad wyznacznikiem nieskośnym (lecz symetrycznym)

$$\begin{vmatrix} q_1, & 1, & 0, \ldots, & 0 & , & 0 \\ 1, & q_2, & 1, \ldots, & 0 & , & 0 \\ 0, & 1, & q_3, \ldots, & 0 & , & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & q_{m-1}, & & 1 \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 1 & , & q_m \end{vmatrix} = D_m,$$

prowadzi do wyrażenia $(m+2)$-ego reduktu ułamku ciągłego

$$0+1:(q_1 - 1:(q_2 - 1:(q_3 - \ldots - 1:(q_{m-1} - 1:(q_m - 1:(q_{m+1} - \ldots$$

w postaci także

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{\partial \log D_m}{\partial q_1}.$$

(Spottiswoode, ibidem).

Thiele, *Bemarkning om Kjaedebroker* (Tychsen, *Tidsskrift for Mathematik,* t. V, str. 144), przy pomocy wyznacznika

$$\begin{vmatrix} q_1, & -1, & 0, \ldots, & 0 & , & 0 \\ p_2, & q_2, & -1, \ldots, & 0 & , & 0 \\ 0, & p_3, & q_3, \ldots, & 0 & , & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & q_{m-1}, & & -1 \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & p_m & , & q_m \end{vmatrix} = D_m,$$

Np., redukty ułamka ciągłego

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\dots}}}} = 0+1:(2+1:(3+1:(1+1:(5+\dots$$

są:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{0};\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{0}{1};$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{\partial D_1}{\partial q_1}:D_1=1:2=\frac{1}{2};$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{\partial D_2}{\partial q_1}:D_2=3:\begin{vmatrix}2, & 1\\ -1, & 3\end{vmatrix}=\frac{3}{7};$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{\partial D_3}{\partial q_1}:D_3=\begin{vmatrix}3, & 1\\ -1, & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2, & 1, & 0\\ -1, & 3, & 1\\ 0, & -1, & 1\end{vmatrix}=\frac{4}{9};$$

---

otrzymuje

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}=\frac{p_1\left(\frac{\partial D_m}{\partial q_1}\right)}{D_m}=p_1\frac{\partial \log D_m}{\partial q_1},$$

jako wyrażenie $(m+\lambda)$-ego reduktu ułamka ciągłego ogólniejszego

$$0+p_1:(q_1+p_2:(q_2+\dots+p_m:(q_m+\dots.$$

Badaniom zastosowań własności wyznaczników do wyrażeń, dających się rozwinąć na ułamki ciągłe, poświęca GUENTHER w swoim podręczniku *Lehrbuch der Determinanten-Theorie*... cały rozdział V (Kettenbruchdeterminanten), w 2-em wydaniu, str. 122 — 143.

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{\partial D_4}{\partial q_1} : D_4 = \begin{vmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -1, & 1, & 1 \\ 0, & -1, & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 3, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 5 \end{vmatrix} = \frac{23}{52};$$

etc.

§ 109.

Jeśli w wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

związek (§ 107)

$$a_{k,i} = -a_{i,k}$$

ma się odnosić do wszystkich wartości i i k, więc i do $k=i$, to

$$a_{i,i} = -a_{i,i},$$

co wymaga, aby

$$a_{i,i} = 0,$$

to taki wyznacznik skośny

$$\begin{vmatrix} 0\ , & a_{1,2}, & a_{1,3}, \ldots, & a_{1,n} \\ -a_{1,2}, & 0\ , & a_{2,3}, \ldots, & a_{2,n} \\ -a_{1,3}, & -a_{2,3}, & 0\ , \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ -a_{1,n}, & -a_{2,n}, & -a_{3,n}, \ldots, & 0 \end{vmatrix} = G_n.$$

nazwiemy *wyznacznikiem skośnym i symetrycznym* [gauche et symétrique ([1]), emisimmetrico ([2]), symmetrale D. mit leerer Diagonale ([3])].

Na takie wyznaczniki może być rozłożony jakikolwiek wyznacznik skośny.

Według § 59 jest wogóle

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \mathrm{N} + \sum_i a_{i,i} \mathrm{N}_i + \sum_{i,k} a_{i,i} a_{k,k} \mathrm{N}_{i,k} + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

gdzie nie ma składnika, któryby zawierał tylko $n-1$ elementów głównej przekątnej.

Jeśli ten rozkład według elementów głównej przekątnej zastosujemy do wyznacznika skośnego

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ -a_{1,2}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -a_{1,n}, & -a_{2,n}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{D}_n,$$

to dlań N jest wyznacznikiem, wyżej oznaczonym przez G_n, więc $\mathrm{N} = \mathrm{G}_n$. Jeśli zaś przez $\overset{(i)}{\mathrm{G}}_{n-1}$ oznaczymy wyznacznik skośny i symetryczny $(n-1)$-ego stopnia, powstały z G_n przez opuszczenie i-ego wiersza oraz i-ej kolumny, przez $\overset{(i,k)}{\mathrm{G}}_{n-2}$ wyznacznik skośny i symetryczny $(n-2)$-ego stopnia po-

---

([1]) CAYLEY, *Sur les déterminants gauches* (CRELLE, t. XXXVIII, str. 93).

([2]) BELLAVITIS, l. c. § 51.

([3]) NATANI, ibidem.

wstały z G_n przez opuszczenie wierszy i kolumn ze wskaźnikami i i k,..., to tu $N_i = \overset{(i)}{G}_{n-1}$, $N_{i,k} = \overset{(i,k)}{G}_{n-2}$,... Zatem

$$D_n = G_n + \sum_i a_{i,i}\overset{(i)}{G}_{n-1} + \sum_{i,k} a_{i,i}a_{k,k}\overset{(i,k)}{G}_{n-2} + \ldots + \sum_{i,\ldots,q} a_{i,i}a_{k,k}\ldots a_{q,q}\overset{(i,\ldots,q)}{G_3}$$

$$+ \sum_{i,\ldots,r} a_{i,i}a_{k,k}\ldots a_{q,q}a_{r,r}\overset{(i,\ldots,r)}{G_2} + a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}. \qquad (1)$$

Wyznacznik skośny może być rozłożony na wyznaczniki skośne i symetryczne. Np.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ -b, & d, & e \\ -c, & -e, & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & b, & c \\ -b, & 0, & e \\ -c, & -e, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a\begin{vmatrix} 0, & e \\ -e, & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0, & c \\ -c, & 0 \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} 0, & b \\ -b, & 0 \end{vmatrix} + adf.$$

Dlatego już dalej zajmować się będziemy własnościami tylko wyznaczników skośnych i symetrycznych. Na mocy tych własności spostrzeżemy, że w rozkładzie (1) pewne wyrazy znikają (§ 110), w pozostałych zaś zachodzą czynniki będące zupełnemi kwadratami (§ 112).

§ 110.

Jakikolwiek wyznacznik skośny i symetryczny n-ego stopnia

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ -a_{1,2}, & 0 \quad , \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -a_{1,n}, & -a_{2,n}, \ldots, & 0 \end{vmatrix} = G_n,$$

po pomnożeniu każdego z jego n wierszy przez -1, przechodzi (§ 35) na

$$\begin{vmatrix} 0 & , -a_{1,2}, \ldots, & -a_{1,n} \\ a_{1,2}, & 0 \;, \ldots, & -a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, \ldots, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n G_n.$$

Wyznacznik ten jest równy poprzedniemu, gdyż wiersze jednego są kolumnami drugiego, i odwrotnie (§ 18); zatem

$$G_n = (-1)^n G_n.$$

W przypadku n nieparzystego np. $n = 2m + 1$, jest

$$G_{2m+1} = -G_{2m+1},$$

co wymaga, aby

$$G_{2m+1} = 0.$$

Wyznacznik skośny i symetryczny nieparzystego stopnia jest zerem (¹).

Skutkiem tego w rozkładzie (1) § 109 wyznacznika skośnego D_n wszystkie wyznaczniki G_s, przy nieparzystem s, są równe zeru, tak, że, jeśli $n = 2m$, to

$$D_{2m} = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{2m,2m} + \sum_{i,\ldots,r} a_{i,i}\ldots a_{r,r} \overset{(i,\ldots,r)}{G_2} + \sum_{i,\ldots,p} a_{i,i}\ldots a_{p,p} \overset{(i,\ldots,p)}{G_4} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i,k} a_{i,i} a_{k,k} \overset{(i,k)}{G_{2m-2}} + G_{2m};$$

(¹) JACOBI, *Ueber die Pfaffsche Metode*... (CRELLE, *Journal*, t. II, str. 354).

jeśli zaś $n = 2m+1$, to

$$D_{2m+1} = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{2m+1,2m+1} + \sum_{i,\ldots,r} a_{i,i}\,.\,a_{r,r}\overset{(i,\ldots,r)}{G_2}$$

$$+\sum_{i,\ldots,p} a_{i,i}\,..a_{p,p}\overset{(i,\ldots,p)}{G_4} + \ldots + \sum_{i,k,l} a_{i,i}a_{k,k}a_{l,l}\overset{(i,k,l)}{G_{2m-2}} + \sum_{i} a_{i,i}\overset{(i)}{G_{2m}}.$$

§ 111.

W § 92-im wyprowadziliśmy, na przypadek, gdy w wyznaczniku

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1},\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , & \cdot\ \cdot \\ a_{n,1},\ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

istnieje zależność między elementami $a_{k,i}$ i $a_{i,k}$, związek

$$\left(\frac{\partial D}{\partial a_{i,k}}\right) = A_{i,k} + A_{k,i}\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}}$$

Ten związek w zastosowaniu do wyznacznika skośnego i symetrycznego G_n, w którym

$$a_{k,i} = -a_{i,k},$$

przechodzi na

$$\frac{\partial G_n}{\partial a_{i,k}} = A_{i,k} - A_{k,i}. \tag{1}$$

Lecz w wyznaczniku G_n ilości $A_{i,k}$ i $A_{k,i}$ są (§§ 25, 35, 18)

$$A_{i,k} = (-1)^{i+k}\begin{vmatrix} 0 & ,\ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1},\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ -a_{1,i-1}, & \ldots & \ldots & \ldots, & a_{i-1,n} \\ -a_{1,i+1}, & \ldots & \ldots & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ -a_{1,n} & ,\ldots, & -a_{k-1,n}, & -a_{k+1,n},\ldots, & 0 \end{vmatrix};$$

$$A_{k,i} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 0 & ,\ldots, & a_{1,i-1}, & a_{1,i+1},\ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,k-1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_{k-1,n} \\ -a_{1,k+1}, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,n} & , \cdot & \cdot & \cdot & , 0 \end{vmatrix};$$

$$A_{k,i} = (-1)^{n-1} A_{i,k}. \tag{2}$$

Jeśli więc wyznacznik G_n jest parzystego stopnia, $n = 2m$, to $n - 1 = 2m - 1$, i

$$A_{k,i} = - A_{i,k},$$

skutkiem czego, na mocy związku (1), jest [1]

$$\frac{\partial G_{2m}}{\partial a_{i,k}} = A_{i,k} + A_{i,k} = 2A_{i,k}.$$

Co się zaś tyczy ilości dołączonej do elementu głównego wyznacznika G_{2m}, to (110)

$$A_{i,i} = \frac{\partial G_{2m}}{\partial a_{i,i}} = \overset{(i)}{G}_{2m-1} = 0.$$

Z tego jeszcze widzimy, że wyznacznik dołączony (§ 65) do wyznacznika

$$G_{2m} = \begin{vmatrix} 0 & , & a_{1,2} & ,\ldots, & a_{1,2m} \\ -a_{1,2} & , & 0 & ,\ldots, & a_{2,2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,2m}, & & -a_{2,2m}, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

(1) Baltzer, l. c., str. 27.

jest (§ 66)

$$\overset{2m-1}{G_{2m}} = \begin{vmatrix} 0 & , & A_{1,2} & ,\ldots, & A_{1,2m} \\ -A_{1,2} & , & 0 & ,\ldots, & A_{2,2m} \\ . & . & . & . & . \\ -A_{1,2m} & , & -A_{2,2m} & ,\ldots, & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

W przypadku zaś, gdy wyznacznik G_n jest nieparzystego stopnia, $n = 2m + 1$, to $n - 1 = 2m$, według więc (2) jest

$$A_{k,i} = A_{i,k};$$

zatem na mocy wzoru (1) jest

$$\frac{\partial G_{2m+1}}{\partial a_{i,k}} = 0,$$

zaś

$$A_{i,i} = \frac{\partial G_{2m+1}}{\partial a_{i,i}} = \overset{(i)}{G_{2m}}.$$

A wyznacznik, dołączony do wyznacznika (§ 110)

$$G_{2m+1} = \begin{vmatrix} 0 & , & a_{1,2} & ,\ldots, & a_{1,2m+1} \\ -a_{1,2} & , & 0 & ,\ldots, & a_{2,2m+1} \\ . & . & . & . & . \\ -a_{1,2m+1} & , & -a_{2,2m+1} & ,\ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

jest

$$\overset{2m}{G_{2m+1}} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & , & A_{1,2} & ,\ldots, & A_{1,2m+1} \\ A_{1,2} & , & A_{2,2} & ,\ldots, & A_{2,2m+1} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1,2m+1} & , & A_{2,2m+1} & ,\ldots, & A_{2m+1,2m+1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

W wyznaczniku skośnym i symetrycznym, dla wszystkich wartości i *i* k, *różnych od siebie, jest, zależnie od stopnia wyznacznika,*

$$\frac{\partial G_{2m}}{\partial a_{i,k}} = 2A_{i,k}; \quad \frac{\partial G_{2m+1}}{\partial a_{i,k}} = 0;$$

zaś przy $k=i$

$$\frac{\partial G_{2m}}{\partial a_{i,i}} = 0; \quad \frac{\partial G_{2m+1}}{\partial a_{i,k}} = A_{i,i}.$$

Z wyrażeń nadto (3) i (4) wypada :

Wyznacznik dołączony do wyznacznika skośnego i symetrycznego, parzystego stopnia, jest także wyznacznikiem skośnym i symetrycznym; wyznacznik zaś dołączony do wyznacznika skośnego i symetrycznego, nieparzystego stopnia, jest wyznacznikiem symetrycznym i równy jest zeru.

§ 112.

Gdy mamy wyznacznik skośny i symetryczny parzystego stopnia

$$G_{2m} = \begin{vmatrix} 0 , & a_{1,2} , & a_{1,3} ,\ldots, & a_{1,2m} \\ -a_{1,2} , & 0 , & a_{2,3} ,\ldots, & a_{2,2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,2m}, & -a_{2,2m}, & -a_{3,2m},\ldots, & 0 \end{vmatrix},$$

to jakikolwiek jego pierwszy główny minor, jako wyznacznik skośny i symetryczny nieparzystego stopnia, jest zerem (§ 110), naprzykład

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 0 , & a_{2,3} ,\ldots, & a_{2,2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{2,2m}, & -a_{3,2m},\ldots, & 0 \end{vmatrix} = \overset{(1)}{G}_{2m-1} = 0.$$

Nazwijmy w wyznaczniku $A_{1,1}$ ilość dołączoną do elementu $a_{j,l}$ przez [1] $\alpha_{j,l}$. Wtedy wyznacznik, dołączony do wyznacznika $A_{1,1}$, jest (§ 111)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2,2}, & \alpha_{2,3}, & \ldots, & \alpha_{2,2m} \\ \alpha_{2,3}, & \alpha_{3,3}, & \ldots, & \alpha_{3,2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,2m}, & \alpha_{3,2m}, & \ldots, & \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix}$$

i tak on (§ 111) jak i wszystkie jego wyznaczniki częściowe drugiego i wyższych stopni są zerami (§ 69). W szczególności

$$\begin{vmatrix} \alpha_{j,j}, & \alpha_{j,l} \\ \alpha_{j,l}, & \alpha_{l,l} \end{vmatrix} = \alpha_{j,j}\alpha_{l,l} - \alpha_{j,l}^2 = 0,$$

zkąd wypada związek

$$\alpha_{j,l} = \sqrt{\alpha_{j,j}}\sqrt{\alpha_{l,l}}, \tag{1}$$

w którym pierwiastki kwadratowe z ilości $\alpha_{j,j}$ i $\alpha_{l,l}$ powinny być wzięte z takiemi znakami, aby ich iloczyn był $+\alpha_{j,l}$, nie zaś $-\alpha_{j,l}$.

Stosując do wyznacznika G_{2m} wyprowadzony w § 58-ym rozkład wyznacznika według elementów np. pierwszego jego wiersza i pierwszej kolumny, t. j. rozkład

$$D = a_{1,1}A_{1,1} - \sum_{j,l} a_{j,1}a_{1,l}A_{1,j,1,l},$$

---

[1] $\alpha_{j,l}$, według znakowania § 58-ego, jest ilością $A_{1,j,1,l}$. Zaś $\alpha_{j,j}$, według oznaczenia wprowadzonego w § 109-ym, jest $G_{2m-2}^{(1\,j)}$.

mieć będziemy, z powodu, że tu

$$a_{1,1}=0,\ A_{1,1}=0,\ a_{j,1}=-a_{1,j},\ A_{1,j,1,l}=\alpha_{j,l},$$

następujące wyrażenie danego wyznacznika:

$$G_{2m}=\sum_{j,l} a_{1,j}a_{1,l}\alpha_{j,l},$$

gdzie, przy każdej wartości $j=2, 3,...,2m$, również l otrzymuje każdą wartość $2, 3,...,2m$. Wprowadzając wyrażenie (1) mamy

$$G_{2m}=\sum_{j,l} a_{1,j}a_{1,l}\sqrt{\alpha_{j,j}}\sqrt{\alpha_{l,l}},$$

czyli

$$G_{2m}=\sum_{j,l} a_{1,j}\sqrt{\alpha_{j,j}}\ .\ a_{1,l}\sqrt{\alpha_{l,l}}.$$

Ponieważ przy każdej wartości $2, 3,...,2m$ liczby j, należy liczbie l nadawać każdą z wartości $2, 3,...,2m$, więc czynnik $a_{1,j}\sqrt{\alpha_{j,j}}$ nie zależy od czynnika $a_{1,l}\sqrt{\alpha_{l,l}}$ i wzajemnie i dla tego możemy pisać

$$G_{2m}=\left(\sum_{j} a_{1,j}\sqrt{\alpha_{j,j}}\right)\left(\sum_{l} a_{1,l}\sqrt{\alpha_{l,l}}\right);$$

a gdy wszystko jest jedno jaką głoską oznaczymy ilości, otrzymujące też same wartości, to jeszcze

$$G_{2m}=\left(\sum_{j} a_{1,j}\sqrt{\alpha_{j,j}}\right)^2. \tag{2}$$

Z tego związku widzimy, że jeśli wszystkie ilości $\alpha_{j,j}$ są zupełnemi kwadratami, to i wyznacznik G_{2m} przedstawia zupełny kwadrat. Lecz (§ 109)

$$\alpha_{jj} = \overset{(1,j)}{G_{2m-2}};$$

zatem wyznacznik skośny i symetryczny stopnia parzystego jest zupełnym kwadratem, jeśli jego częściowe (stopnia niższego o dwie jedności) wyznaczniki, powstałe wskutek opuszczenia jednoimiennych dwu wierszy i dwu kolumn, będące więc także wyznacznikami skośnemi i symetrycznemi, są zupełnemi kwadratami. Stosując to dalej, widzimy, że wszystkie G_{2m-2} będą zupełnemi kwadratami, jeśli takiemiż będą wszystkie G_{2m-4}, a to znów w ten sam sposób zależy od wszystkich $G_{2m-6}, G_{2m-8}, \ldots, G_4, G_2$. Ostatecznie więc, aby wyznacznik G_{2m} był zupełnym kwadratem, potrzeba, aby wszystkie G_2 były zupełnemi kwadratami. Lecz skośne i symetryczne wyznaczniki częściowe drugiego stopnia danego wyznacznika G_{2m} są typu

$$\begin{vmatrix} 0, & a_{i,k} \\ -a_{i,k}, & 0 \end{vmatrix} = a_{i,k}^2; \qquad (3)$$

są więc kwadratami elementów danego wyznacznika. Zatem G_{2m} jest zupełnym kwadratem wyrażenia, które według związków kolejno otrzymywanych ze wzoru (2) i według (3), jest całkowitą funkcyą elementów wyznacznika G_{2m}.

Wyznacznik skośny i symetryczny parzystego stopnia jest kwadratem całkowitej funkcyi jego elementów (¹). Np.

$$G_4 = \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ -a_{1,2}, & 0, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ -a_{1,3}, & -a_{2,3}, & 0, & a_{3,4} \\ -a_{1,4}, & -a_{2,4}, & -a_{3,4}, & 0 \end{vmatrix}; \quad A_{1,1} = \begin{vmatrix} 0, & a_{2,3}, & a_{2,4} \\ -a_{2,3}, & 0, & a_{3,4} \\ -a_{2,4}, & -a_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

(¹) CAYLEY, l. c. str. 95.

$$G_4 = (a_{1,2}\sqrt{\alpha_{2,2}} + a_{1,3}\sqrt{\alpha_{3,3}} + a_{1,4}\sqrt{\alpha_{4,4}})^2;$$

$$\alpha_{2,2} = \begin{vmatrix} 0, & a_{3,4} \\ -a_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = a_{3,4}^2; \quad \alpha_{3,3} = \begin{vmatrix} 0, & a_{2,4} \\ -a_{2,4}, & 0 \end{vmatrix} = a_{2,4}^2;$$

$$\alpha_{4,4} = \begin{vmatrix} 0, & a_{2,3} \\ -a_{2,3}, & 0 \end{vmatrix} = a_{2,3}^2;$$

należy tu wziąć $\sqrt{\alpha_{2,2}}$, $\sqrt{\alpha_{3,3}}$ i $\sqrt{\alpha_{4,4}}$ z takiemi znakami, aby było jednocześnie (§§ 25, 37)

$$\sqrt{\alpha_{2,2}}\sqrt{\alpha_{3,3}} = \alpha_{2,3} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a_{2,3}, & a_{3,4} \\ -a_{2,4}, & 0 \end{vmatrix} = -a_{2,4}a_{3,4}.$$

$$\sqrt{\alpha_{3,3}}\sqrt{\alpha_{4,4}} = \alpha_{3,4} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0, & a_{2,3} \\ -a_{2,4}, & -a_{3,4} \end{vmatrix} = -a_{2,3}a_{2,4};$$

najdogodniej więc przyjąć

$$\sqrt{\alpha_{2,2}} = +a_{3,4}; \quad \sqrt{\alpha_{3,3}} = -a_{2,4}; \quad \sqrt{\alpha_{4,4}} = +a_{2,3}.$$

Jest więc (porównaj § 12, 11°)

$$G_4 = (a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})^2.$$

Na mocy tej własności wyznacznika skośnego i symetrycznego, stopnia parzystego, w różnych od zera składnikach wyrażenia dla D_n w § 109 ym, czyli w składnikach wyrażeń dla D_{2m} i D_{2m+1} w § 110-ym wszystkie ilości G są zupełnemi kwadratami pewnych całkowitych funkcyj elementów wyznacznika danego. Gdyby nadto w danym wyznaczniku skośnym wszystkie elementy główne były sobie równe

$$D_n = \begin{vmatrix} x, & a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ -a_{1,2}, & x, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -a_{1,n}, & -a_{2,n}, \ldots, x \end{vmatrix},$$

to, według owych wzorów § 110-ego, będzie tu

$$D_{2m+1}=x^{2m+1}+x^{2m-1}\Sigma G_2+x^{2m-3}\Sigma G_4+\ldots+x^3\Sigma G_{2m-2}+x\Sigma G_{2m};$$

$$D_{2m}=x^{2m}+x^{2m-2}\Sigma G_2+x^{2m-4}\Sigma G_4+\ldots+x^2\Sigma G_{2m-2}+G_{2m}.$$

Ostatnia formuła wskazuje, że *wyznacznik skośny stopnia parzystego z równemi sobie elementami głównemi jest summą kwadratów wyrażeń całkowitych względem jego elementów i przedstawia więc zawsze ilość dodatną.*

Np. 1°)

$$\begin{vmatrix} x, & a, & b \\ -a, & x, & c \\ -b, & -c, & x \end{vmatrix} = x^3+x(a^2+b^2+c^2):$$

2°)

$$\begin{vmatrix} x, & a, & b, & c \\ -a, & x, & d, & e \\ -b, & -d, & x, & f \\ -c, & -e, & -f, & x \end{vmatrix} = x^4+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)+(af-be+cd)^2.$$

§ 113.

Ze związku (2) § 112-ego wypada

$$\sqrt{G_{2m}}=\Sigma a_{1,j}\sqrt{G_{2m-2}}, \tag{1}$$

gdzie j otrzymuje $2m-1$ wartości. Ztąd widzimy, że $\sqrt{G_{2m}}$ przedstawia się jako summa $2m-1$ składników, z których każdy zawiera $\sqrt{G_{2m-2}}$. Stosując to dalej, spostrzegamy, że każda ilość $\sqrt{G_{2m-2}}$ może być przedstawiona jako summa $(2m-2)-1=2m-3$ wyrazów, z których każdy zawiera $\sqrt{G_{2m-4}}$, i t. d., nakoniec $\sqrt{G_4}$ posiada $4-1=3$ wyrazy, a w każdym $\sqrt{G_2}$

przedstawiający, jakeśmy widzieli (§ 112), tylko jeden składnik: element wyznacznika. Funkcya więc $\sqrt{G_{2m}}$, całkowita (§ 112) względem elementów wyznacznika G_{2m}, po uskutecznieniu kolejnych według wzoru (1) podstawień $\sqrt{G_{2m-2}}, \sqrt{G_{2m-4}}, \ldots, \sqrt{G_4}$, $\sqrt{G_2} = a_{i,k}$, posiada

$$(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3.1$$

wyrazów.

Jeden z tych wyrazów funkcyi $\sqrt{G_{2m}}$ jest

$$a_{1,2}a_{3,4}a_{5,6}\ldots a_{2m-1,2m}$$

gdyż jego kwadrat

$$(a_{1,2}a_{3,4}\ldots a_{2m-1,2m})^2 = a_{1,2}a_{1,2}a_{3,4}a_{3,4}\ldots a_{2m-1,2m}a_{2m-1,2m}$$
$$= (-1)^m a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}\ldots a_{2m-1,2m}a_{2m,2m-1},$$

(z powodu, że $a_{k,i} = -a_{i,k}$) jest wyrazem wyznacznika G_{2m}, z każdego bowiem wiersza i z każdej kolumny systematu elementów tego wyznacznika wzięty jest tylko jeden element (§ 8), a zmian, zachodzących tylko w drugich wskaźnikach, jest m.

Tę z dwu wartości $\sqrt{G_{2m}}$, w której wyraz

$$a_{1,2}a_{3,4}a_{5,6}\ldots a_{2m-1,2m}$$

jest poprzedzony znakiem $+$, nazywają *Pfaffianem* ([1]). Przy początkowych badaniach jej własności, oznaczano ją symbolem

$$(1, 2, 3, \ldots, n-1, n),$$

([1]) Badaniem własności tej funkcyi (niezależnie od jej związku z wyznacznikiem G_{2m}) zajmował się JACOBI: *Ueber die Pfaffsche Methode eine gewöhnliche Differenzialgleichung zwischen 2n Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren* (CRELLE, *Journal*, t. II, str. 354 i nast.); *Teoria novi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi* (CRELLE, *Journal*, t. XXIX, str. 237 i nast.).

rozumiejąc przez n liczbę parzystą. Jeśli się umówimy, dla krótkości przedstawiać ją znakiem P_{2m}, to

$$P_{2m} = (1, 2, 3, \ldots, 2m-1, 2m) = a_{1,2}a_{3,4}\ldots a_{2m-1,2m} + \ldots$$

Pfafian rzędu 2m *jest względem elementów funkcyą całkowitą* m-*ego stopnia.*

Obliczony w § 112-ym wyznacznik skośny i symetryczny 4-ego stopnia, daje nam bezpośrednio postać Pfaffiana czwartego rzędu

$$P_4 = (1, 2, 3, 4) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}.$$

§ 114.

Pfaffian posiada wiele własności analogicznych względem własności wyznacznika.

Jeśli w funkcyi P_{2m} wzajemnie między sobą przestawimy dwa wskaźniki, np. i i k, a tak otrzymane wyrażenie nazwiemy P'_{2m}, to $(P'_{2m})^2$ winno być tem, co otrzymamy, jeśli w wyznaczniku G_{2m} przestawimy wzajemnie wskaźniki i i k. Lecz te wskaźniki i i k zachodzą w wyznaczniku i jako pierwsze i jako drugie wskaźniki. Przestawiając więc w G_{2m} wzajemnie naprzód np. pierwsze wskaźniki i i k, otrzymamy (§ 19) $-G_{2m}$,

---

Że owa utworzona i badana przez Jacobi'ego funkcya jest pierwiastkiem kwadratowym wyznacznika skośnego i symetrycznego spotrzegł Cayley (l. c., str. 105). Scheibner *Ueber Halbdeterminanten* (*Berichte der K. S. Gesell. d. Wiss. zu Leipzig*, t. XI, str. 151) podaje inny na to dowód i nazywa tę funkcyę «półwyznacznikiem». Ciekawy dowód, opierający się na bezpośredniem badaniu wyrazów wyznacznika G_{2m}, podaje Mertens, *Ueber die Determinanten, deren correspondirende elemente* $a_{p,q}$ *und* $a_{q,p}$ *entgegengesetzt gleich sind* (Crelle, *Journal*, t. LXXXII, str. 207 i nast.).

a następnie przestawiając wzajemnie wskaźniki drugie i i k, otrzymamy $+ G_{2m}$. Będzie zatem

$$(P'_{2m})^2 = G_{2m}.$$

A ponieważ i

$$P_{2m}^2 = G_{2m},$$

więc

$$(P'_{2m})^2 = P_{2m}^2,$$

zkąd wypada albo

$$P'_{2m} = P_{2m},$$

albo

$$P'_{2m} = -P_{2m}.$$

Po przestawieniu więc wskaźników albo wszystkie wyrazy nie zmieniają się, albo wszystkie wyrazy zmieniają znak. Niechaj np. $a_{i,k}\alpha$ przedstawia zebranie tych wszystkich wyrazów funkcyi P_{2m}, w które wchodzi element $a_{i,k}$ (w spółczynniku zatem α niema już ani wskaźnika i ani wskaźnika k), to temu w funkcyi P'_{2m} odpowie wyrażenie $a_{k,i}\alpha$. Ponieważ jednak elementy tych funkcyj są elementami skośnego i symetrycznego wyznacznika, t. j.

$$a_{k,i} = -a_{i,k},$$

zatem $a_{i,k}\alpha$ i $a_{k,i}\alpha$ są równe lecz przeciwnego znaku. Jest więc

$$P'_{2m} = -P_{2m}.$$

Pfaffian wskutek wzajemnego przestawienia dwu wskaźników zmienia znak. Więc np.

$$(1, 2, 4, 3) = -(1, 2, 3, 4),$$

$$a_{1,2}a_{4,3} - a_{1,4}a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,4} = -(a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3});$$

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, 2m-1, 2m) = -(3, 2, 1, 4, \ldots, 2m-1, 2m),$$

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, 2m-1, 2m) = (-1)^{m-1}(2, 3, 4, \ldots, 2m-1, 2m, 1),$$

etc.

Jeśli w Pfaffianie pewien wskaźnik, np. k, zastąpimy przez jakikolwiek inny z zachodzących w nim, np. przez wskaźnik i, zatrzymując jednocześnie wskaźnik i wszędzie tam, gdzie był poprzednio, to wtedy $P_{2m}=0$, gdyż wtedy funkcya P_{2m} nie zmieni się wskutek przestawienia nowego wskaźnika i z utrzymanym wskaźnikiem i, a według powyżej dowiedzionego winno być $P_{2m}=-P_{2m}$.

Jeśli w Pfaffianie dwa wskaźniki są jednakowe, to jest on tożsamościowo równy zeru. Np. zastępując w Pfaffianie (1, 2, 3, 4) wskaźnik 2 przez wskaźnik 1, otrzymamy

$$(1, 1, 3, 4)=a_{1,1}a_{3,4}-a_{1,3}a_{1,4}+a_{1,4}a_{1,3}=0,$$

gdyż $a_{1,1}=0$.

Otrzymamy w § 113 związek (2)

$$\sqrt{G_{2m}}=\sum_i a_{1\,i}\sqrt{G_{2m-2}^{(1,i)}},$$

możemy inaczej tak przedstawić

$$P_{2m}=\sum_i a_{1,i}P_{2m-2}^{(1,i)}, \tag{1}$$

lub ogólniej

$$P_{2m}=\sum_i a_{i,k}P_{2m-2}^{(i,k)};\quad P_{2m}=\sum_k a_{i,k}P_{2m-2}^{(i,k)}; \tag{2}$$

czyli

$$P_{2m}=a_{i,1}P_{2m-2}^{(i,1)}+\ldots+a_{i,i-1}P_{2m-2}^{(i,i-1)}+a_{i,i+1}P_{2m-2}^{(i,i+1)}+$$
$$\ldots+a_{i,2m}P_{2m-2}^{(i,2m)}.$$

Pfaffian można rozłożyć według elementów któregolwiek rzędu wyznacznika skośnego i symetrycznego (będącego jego kwadratem), *a spółczynnikami tych elementów są Pfaffiany bezpośrednio niższego stopnia.*

W tym rozkładzie *spółczynnik przy elemencie $a_{i,k}$ jest Pfaffianem, którego kwadrat przedstawia wyznacznik skośny i symetryczny,* $\overset{(i,k)}{G}_{2m-2}$, *będący* $(2m-2)$-*ego stopnia wyznacznikiem częściowym wyznacznika* G_{2m}, *dopełniającym* (§ 51) *jego wyznacznik częściowy*

$$\left|\begin{matrix} 0\ , & a_{i,k} \\ -a_{i,k}, & 0 \end{matrix}\right|.$$

Z wyrażenia (2) wypada wyrażenie dla *cząstkowej pochodnej Pfaffiana względem elementu*

$$\frac{\partial P_{2m}}{\partial a_{i,k}} = \overset{(i,k)}{P}_{2m-2}.$$

Związek (1), przy pomocy symbolu przytoczonego w § poprzedzającym, jeśli zważymy, że, jak już wiemy

$$(1, 2,\ldots,i-1,\ i,i+1,\ldots,2m)$$
$$=(-1)^{i-2}(1,\ i,\ 2,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,2m),$$

skutkiem czego $[(-1)^{i-2}=(-1)^i]$

$$\sqrt{\overset{(1,i)}{G}_{2m-2}}=\overset{(1,i)}{P}_{2m-2}=(-1)^i(2,\ 3,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,2m)=$$
$$=(i+1,\ i+2,\ldots,2m,\ 2,\ 3,\ldots,i-1),$$

może być tak przedstawionym

$$(1, 2,\ldots,2m)=a_{1,2}(3,\ 4,\ \ldots,2m)+a_{1,3}(4,\ldots,2m,\ 2)+\ldots$$
$$+a_{1,i}(i+1,\ldots,2m,2,\ldots,i-1)+\ldots+a_{1,2m}(2,3,\ldots,2m-1).$$

Ten-to właśnie związek służył początkowo jako określenie funkcyi $(1,\ 2,\ldots,2m)$.

ROZDZIAŁ DWUNASTY.

WYZNACZNIK FUNKCYJNY.

§ 115.

Jeśli mamy n funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$, zależnych od n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, t. j.

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right. \tag{1}$$

to wyznacznik układu n związków (§ 71)

$$\left\{\begin{array}{l} dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n, \\ dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} dx_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

(liniowych względem różniczek zmiennych), t. j. wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}, \tag{3}$$

który można jeszcze tak pisać

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \tag{3'}$$

nazywa się *wyznacznikiem funkcyjnym* ([1]) ilości $y_1,\dots,y_n$ względem zmiennych $x_1,\dots,x_n$, albo *Jakobianem* ([2]) funkcyj $y_1,\dots,y_n$

([1]) HOËNE-WROŃSKI w rozprawie *Réfutation de la Théorie des Fonctions analitiques de Langrange*, przedstawionej akademii Paryzkiej w 1810 r., a wydrukowanej (Paryż) w 1812 r., na str. 15-ej, jakoteż w *Philosophie de la Technie* (Paryż, 1815, część I) na str. 193-ej, używa, pod nazwą głoski hebrajskiej «szin», w swoich dowodzeniach wyrażeń wyznacznikowych, których elementy nie są ilościami stałemi, lecz są utworzone przez ilości zmienne, połączone ze sobą za pomocą pewnych związków; przyczem zauważyć należy, że wyrażenia te są dane w postaci ogólnej.

(W 1841 roku) JACOBI, *De Determinantibus functionalibus* (CRELLE, *Journal*, t. XXII) bada szczegółowo własności wyznacznika systematu pierwszych pochodnych funkcyj względem zmiennych. To było przyczyną, że takim wyznacznikom od jego nazwiska miano «Jakobianów» nadal

([2]) CAYLEY (CRELLE, *Journal*, t. LII, str. 276).

względem zmiennych $x_1,\ldots,x_n$. Oznaczać go będziemy albo głoską J, albo też, skoro nam będzie szło o wyraźne oznaczenie zmiennych niezależnych, za pomocą symbolu ([1])

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Np. Jakobian funkcyj

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1^3 - 3b_1 x_2 x_3^2, \\ y_2 = a_2 x_1 x_2^2 - b_2 x_2 x_3, \\ y_3 = a_3 x_1^3 + b_3 x_3, \end{cases}$$

jest

$$J = \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 3 \begin{vmatrix} a_1 x_1^2, & -b_1 x_3^2 & , -2b_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_2^2, & 2a_2 x_1 x_2 - b_2 x_3, & -b_2 x_2 \\ 3a_3 x_1^2, & 0 & , b_3 \end{vmatrix}.$$

Jeśli podstawiając w związki (1) pewien systemat wartości zmiennych, np.

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$$

otrzymujemy wartości zero dla ilości $y_1, y_2, \ldots, y_n$, to układ (1) przechodzi na układ

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

([1]) Donkin, *Philosophical Transactions*, t. CXLIV, część I, str. 72. Znakowanie takie objaśnia się wielką analogią między własnościami Jakobianu i własnościami pochodnej, na którą Jacobi (l. c.) ciągle zwraca uwagę.

Donki[n] używa [z]nakowan[ia] […]

i wtedy wyznacznik funkcyjny (3')

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

otrzymuje odpowiednią wartość, jeśli i w nim przyjmiemy także $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. Np., dla układu równań

$$\begin{cases} x^4 - 2y + 3 = 0. \\ 2x^2 + y - 4 = 0, \end{cases}$$

którym zadosyć czynią systematy wartości

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = \quad 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{-5}, \\ y = \quad 14, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{-5}, \\ y = \quad 14, \end{cases}$$

wyznacznik funkcyjny

$$J = 4 \begin{vmatrix} x^3, -2 \\ x, \quad 1 \end{vmatrix},$$

otrzymuje odpowiednie wartości

$$12; \quad -12; \quad -12\sqrt{-5}; \quad 12\sqrt{-5}.$$

§ 116.

Jeśli Jakobian funkcyj $y_1, \ldots, y_n$ względem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ nie jest tożsamościowo równy zeru, to według związków (2) § 115-ego możemy różniczki dx wyrazić za pomocą różniczek dy, gdyż wtedy (§ 71)

$$J dx_k = J_{1,k} dy_1 + J_{2,k} dy_2 + \ldots + J_{n,k} dy_n,$$

gdzie $J_{i,k}$ oznacza (§ 25) ilość dołączoną w wyznaczniku J do elementu $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$.

Wyznacznik zaś J jest tożsamościowo równy zeru, jeśli ilość $y_1,\ldots,y_n$ nie są od siebie niezależne, lecz są związane ze sobą (choćby jednym) związkiem, w który nie wchodzi żadna zmienna niezależna, np. związkiem

$$\varphi(y_1, y_2,\ldots,y_n)=0. \tag{1}$$

Wtedy bowiem jest

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}=0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=0; \end{array}\right. \tag{2}$$

ponieważ jednak nie mogą być jednocześnie wszystkie $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}$ równe zeru, gdyż oznaczałoby to, że ilości $y_1,\ldots,y_n$ nie są związane zależnością (1), co się sprzeciwia założeniu, więc (§ 76) wyznacznik tego układu n równań (2), jednorodnych i liniowych względem n ilości

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_n},$$

jest tożsamościowo równy zeru, t. j.

$$J=\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=0$$

Inaczej jeszcze możemy tego dowieść, w założeniu istnienia związku (1), mnożąc elementy któregokolwiek np. i-ego wiersza wyznacznika J przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$, a następnie w wyznaczniku (§ 29),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,J=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_2}, \dots, & \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

dodając (§ 31) do elementów i-ego wiersza odpowienie elementy pierwszego pomnożone przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$, drugiego pomnożone przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}$,..., $(i-1)$-ego pomnożone przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i-1}}$, $(i+1)$-ego pomnożone przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i+1}}$,..., ostatniego pomnożone przez $\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}$. W tak przekształconem wyrażeniu dla $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}J$ otrzymamy, na mocy związków (2), w i-ym wierszu wyznacznika same zera. Jest więc tożsamościowo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,J=0.$$

Że zaś to ma miejsce dla wszystkich wartości i, a nie wszystkie $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$ są równe zeru, więc tożsamościowo

$$J=0.$$

Dowiedziemy, że odwrotnie, jeśli tożsamościowo $J=0$, to ilości $y_1, y_2, \dots, y_n$ są związane zależnością, w którą nie wchodzi żadna z ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W tym celu, z jednego ze związków układu

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right. \tag{3}$$

którego-to układu Jakobian jest tożsamościowo zerem,

$$J = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0,$$

np. z pierwszego, jedną z istotnie zachodzących zmiennych x wyraźmy w funkcyi pozostałych ilości : $x_1 = g(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, co podstawiając w drugie z równań (3), wyrazimy je w postaci

$$y_2 = \psi_2(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Wyciągając znów z tego równania wyrażenie dla x_2 w funkcyi pozostałych ilości : $x_2 = h(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$, i podstawiając je w trzecie z równań (3), mieć będziemy

$$y_3 = \psi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n).$$

I t. d. Otrzymamy w ten sposób nowy układ równań, równoważny układowi (3). A gdy, dla jednokształtności, i pierwsze z równan (3) napiszemy tak : $y_1 = \psi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, to ów układ n związków będzie :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 = \psi_2(y_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_3 = \psi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

Mamy tu wogóle,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k},$$

zkąd

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} - \ldots - \frac{\partial \psi_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_k}. \quad (5)$$

Wyznacznik zatem ad hoc (§ 33)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ 0, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ 0, & 0, & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}.$$

może być według (5) przedstawiony w postaci iloczynu (powstającego przez mnożenie wierszy przez wiersze) dwu wyznaczników (§ 44)

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial \psi_3}{\partial y_1}, & -\frac{\partial \psi_3}{\partial y_2}, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}, & -\frac{\partial \psi_n}{\partial y_2}, & -\frac{\partial \psi_n}{\partial y_3}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_3}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix},$$

z których pierwszy redukuje się (§ 33) do jedności, drugi zaś (§ 18) jest wyznacznikiem J. Mamy zatem

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=1.\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=\mathrm{J} \tag{6}$$

$=0$ (według założenia, co wymaga, aby choć jeden z n czynników iloczynu po lewej był równy zeru. Pierwsze z tych czynników są wogóle różne od zera, gdyż w naszem tu postępowaniu przyjęliśmy najogólniejszy przypadek, że funkcya ψ_1 zawiera zmienną x_1, funkcya ψ_2 zmienną $x_2,\ldots$, funkcya ψ_i zmienną $y_i,\ldots$. Mogą więc być równemi zeru tylko ostatnie czynniki tego iloczynu, a w każdym razie jest

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=0. \tag{7}$$

Że zaś w funkcyę ψ_n nie wchodzą ilości x ze wskaźnikami mniejszemi od n, a według (7) funkcya ψ_n jest także niezależną od zmiennej x_n, więc w funkcyę ψ_n żadna z ilości $x_1, x_2,\ldots, x_n$ nie wchodzi. Ostatni więc ze związków (4) jest już w każdym razie

$$y_n=\psi_n(y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}),$$

czyli, wogóle: $\varphi(y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}, y_n)=0$. Widzimy więc, że założenie J=0 doprowadziło nas do wykazania istnienia związku między ilościami $y_1, \ldots, y_n$, w który nie wchodzą zmienne niezależne. Łącząc to z poprzednio dowiedzionem, powiemy:

Aby między n *funkcyami* n *zmiennych istniał związek, od tychże zmiennych niezależny, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby Jakobian tych funkcyj względem zmiennych był tożsamościowo równy zeru* [1].

Np.

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 5x_2 + x_3\,, \\ y_2 &= -5x_1 + 8x_2 + 2x_3, \\ y_3 &= x_1 + 2x_2 - 4x_3; \end{aligned}\right. \qquad J = \begin{vmatrix} 2, & -5, & 1 \\ -5, & 8, & 2 \\ 1, & 2, & -4 \end{vmatrix};$$

obliczając wartość wyznacznika J, znajdziemy J=0, — istnieje więc związek między ilościami y_1, y_2, y_3, niezależnemi od x_1, x_2, x_3; jakoż jest tu

$$2y_1 + y_2 = -y_3.$$

§ 117.

Gdyby, ogólniej, dane były n funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$, zależnych od m zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_m$, to jest

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{aligned}\right. \tag{1}$$

[1] Jacobi, l. c., str. 328. Podany tu pierwszy dowód pierwszej części tego twierdzenia, prowadzony jest według Jacobi'ego, drugi zaś jej dowód według Baltzer'a l. c., w 4-em wydaniu str. 128. Dowód drugiej części twierdzenia według redakcyi Hoüel'a odpowiedniego ustępu dzieła: Imschenetsky *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*

to *w przypadku* $n > m$ układ ten prowadziłby do $n - m$ związków między ilościami $y_1, \ldots, y_n$, którebyśmy otrzymali z układu (1) po wyrugowaniu m zmiennych $x_1, \ldots, x_m$. I dla tego Jakobian każdych m z ilości $y_1, \ldots, y_n$ względem zmiennych $x_1, \ldots, x_m$ jest zerem [1]. Możemy to łącznie tak przedstawić (§ 16)

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{matrix}\right\| = 0.$$

Gdyby $n = m$, mielibyśmy przypadek, roztrząsany w dwu paragrafach poprzedzających.

Nakoniec *w przypadku* $n < m$, wybierając z pośród m zmiennych $x_1, \ldots, x_m$, którekolwiek n, np.

$$x_\alpha, \quad x_\beta, \ldots, \quad x_\nu,$$

otrzymać możemy Jakobian częściowy n funkcyj $y_1, \ldots, y_n$ względem tych n zmiennych $x_\alpha, \ldots, x_\nu$:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\alpha}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\beta}, \ldots, & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\nu} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_\alpha}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_\beta}, \ldots, & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}, & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_\beta}, \ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_\nu} \end{matrix}\right| = \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_\nu} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\nu)}.$$

du premier ordre, traduit du russe par Hoüel (Paryż, 1869), str. 12. Co do uogólnienia tego twierdzenia zobacz niżej § 118.

(1) Jacobi, l. c., str 340.

A biorąc w ten sposób każde n z pośród m ilości $x_1, \ldots, x_m$, i wyznaczając względem nich podobny częściowy Jakobian danych funkcyj, znajdziemy, że (§ 16)

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{matrix}\right\| = \sum_{\alpha,\ldots,\nu} \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\nu)},$$

gdzie znak $\sum\limits_{\alpha,\ldots,\nu}$ odnosi się do wszystkich $\binom{m}{n}$ kombinacyj z m ilości $x_1, \ldots, x_m$ po n (1).

O warunkach istnienia w tym przypadku związku między ilościami $y_1, \ldots, y_n$, niezależnego od zmiennych $x_1, \ldots, x_m$, mówić będziemy oddzielnie w następującym paragrafie.

§ 118.

Dla funkcyj $y_1, \ldots, y_n$, przedstawionych przez układ (1) § 117-ego, możnaby, w przypadku $n < m$, dowieść twierdzenia, odpowiadającego twierdzeniu § 116-ego, mianowicie twierdzenia:

Aby między n *funkcyami* m = n + q *zmiennych istniał związek, od tychże zmiennych niezależny, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby wyznaczniki* n *funkcyj względem którychkolwiek* n *zmiennych były równe zeru* (2).

---

(1) Porównaj Jacobi, l. c., str. 339 i 340.

(2) Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paryż, t. I (1864), str. 71. To twierdzenie podane tam jest bez dowodu. Pierw-

Twierdzenie to jednak jest objęte w następującem, ogólniejszem [1]:

« *Aby pomiędzy* n *funkcyami* $y_1, \ldots, y_n$ m *zmiennych niezależnych* $x_1, \ldots, x_m$ *mogła zachodzić pewna liczba* p *związków,*
» *niezależnych od tychże* m *zmiennych niezależnych* $x_1, .., x_m$,
» *potrzeba i wystarcza, aby pomiędzy* n *funkcyami* $y_1, \ldots, y_n$
» *było* n — p *takich funkcyj* $y_1, y_2, \ldots, y_{n-p}$, *żeby ich wyznacz-*
» *nik funkcyjny stopnia* (n — p)*-ego*

$$\frac{\partial(y_1,\ldots, y_{n-p})}{\partial(x_1,\ldots, x_{n-p})} \tag{1}$$

» *względem pewnych* n — p *zmiennych niezależnych* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$,
» *był różny od zera, zaś* p(m — n + p) *wyznaczników funkcyj-*
» *nych stopnia* (n — p + 1)*-ego*

$$\frac{\partial(y_1,\ldots, y_{n-p}, y_i)}{\partial(x_1,\ldots, x_{n-p}, x_k)} \tag{2}$$

» ($i = n-p+1,\ n-p+2, \ldots, n-1,\ n$; $k = n-p+1,\ n-p+2,$
» $\ldots,\ m-1,\ m$) *zamieniało się tożsamościowo na zero, to jest*
» *przy wszelkich znaczeniach* m *zmiennych niezależnych* x_k. *Twier-*
» *dzenie to odnosi się do przypadku* $m > n - p > 0$.

» *a*) Ponieważ z założenia istnieje p związków różnych między n funkcyami $y_1, \ldots, y_n$, niezależnych od m zmiennych $x_1, \ldots, x_m$, można więc je rozwiązać względem pew-

---

szy dowód tego twierdzenia jest pośrednio dany przez KRONECKER'a 1869, marzec), przy uzasadnianiu inaczej wysłowionego twiedzenia. Zob. BALTZER, l. c., w trzeciem i czwartem (str. 133) wydaniu.

(1) TRZASKA, *O pewnem zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych* (*Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłysh w Paryżu*, t. I, str. 113). W tej rozprawie autor podaje dwa dowody swego twierdzenia. Drugi z nich przytaczam tu nieomal dosłownie (str. 119 - 121.)

» nych p funkcyj, któremi niech będą funkcye y_i, przy
» $i=n-p+1,\ldots, n$, i nadać związkom kształt

$$0=y_i-\varphi_i(y_1,\ldots, y_{n-p}). \tag{3}$$

» Oznaczywszy dla krótkości drugą stronę ostatniego równania
» przez ψ_i, a pochodną $\frac{\partial\psi_i}{\partial y_l}$ przez $\psi_{i,l}$, i pamiętając że $\psi_{i,i}$ jest
» różną od zera (równą mianowicie jedności), i założywszy dla
» krótkości $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=y_{i,k}$, można nadać wyznacznikowi (2) kształt

$$(\psi_{i,i})^{-1}\cdot\begin{vmatrix} y_{1,1} & ,\ldots, & y_{n-p,1} & , & \frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} \\ . & . & . & . & . \\ y_{1,n-p} & ,\ldots, & y_{n-p,n-p} & , & \frac{\partial\psi_i}{\partial x_{n-p}} \\ y_{1,k} & ,\ldots, & y_{n-p,k} & , & \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

» pomnożywszy wyznacznik (2) przez $(\psi_{i,i})^{-1}$, a ostatni jego
» wiersz pionowy przez $\psi_{i,i}$, i dodawszy do tego wiersza wiersze
» równoległe, pomnożone odpowiednio przez $\psi_{i,l}(l=1,2,\ldots,n-p)$,
» gdyż przez to wyznacznik zmianie nie ulega (§§ 29, 31),
» nadto pamiętając, że drugie strony równań (3) dają

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}=\psi_{i,i}y_{i,k}+\sum_{l=1}^{l=n-p}\psi_{i,l}y_{l,k}.$$

» Ponieważ zaś równania (3) nie zawierają wcale wyraźnie
» zmiennych x_k, więc ostatni rząd pionowy wyznaczni-
» ków (4), jako złożony z samych zer, sprawia, że wyznacz-
» niki (4) są zerami. Więc istnienie p związków różnych między n
» funkcyami $y_1,\ldots, y_n$ pociąga za sobą równania (2), i jeżeli te
» związki są jedynemi, to na mocy twierdzenia poprzedzającego
» (t. j. twierdzenia § 116-ego) wyznacznik (1) jest różny od
» zera.

» *b*) Ponieważ wyznacznik (1) zakładamy różnym od zera, » więc, na mocy twierdzenia poprzedzającego (§ 116), $n-p$ » funkcyj $y_1, \ldots, y_{n-p}$ są różnemi, można je więc rozwiązać » względem $n-p$ zmiennych $x_1, \ldots, x_{n-p}$; a wstawiwszy tak » otrzymane wyrażenia w wyrażenia pozostałych p funkcyj » $y_{n-p+1}, \ldots, y_n$, otrzymamy p równań

$$0 = y_i - \chi_i(y_1, \ldots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \ldots, x_m) \tag{5}$$

» $(i = n-p+1, \; n-p+2, \ldots, n)$, których drugą stronę » oznaczać będziemy dla krótkości przez ψ_i, a pochodną $\frac{\partial \psi_i}{\partial y_l}$ » przez $\psi_{i,l}$, jakto już wyżej miało miejsce. Postępując jak » w części dowodu *a*), i pamiętając, że równania (5) dają, » gdy $k < i$

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} = \psi_{i,i} y_{i,k} + \sum_{l=1}^{l=n-p} \psi_{i,l} y_{l,k},$$

» a gdy $k = i$, lub $k > i$,

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} = \psi_{i,i} y_{i,k} + \sum_{l=1}^{l=n-p} \psi_{i,l} y_{l,k} + \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\right],$$

» gdzie $\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\right]$ oznacza pochodną częściową ψ_i względem x_k » wyraźnie zachodzącego; przez co zastrzeżenia (2) przybiorą » kształt

$$(\psi_{i,i})^{-1} \begin{vmatrix} y_{1,1} & ,\ldots, & y_{n-p,1} & , & \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,n-p}, & \ldots, & y_{n-p,n-p} & , & \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-p}} \\ y_{1,k} & ,\ldots, & y_{n-p,k} & , & -\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\right] \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

» $(i=n-p+1,\ldots,n;\ \ k=n-p+1,\ldots,m)$. Lecz równa-
» nia (5), nie zawierając zmiennych $x_1, x_2,\ldots, x_{n-p}$ wyraźnie,
» sprawiają, że w równaniach (6) składniki ostatniego wiersza
» pionowego wyznaczników są zerami, z wyjątkiem ostatniego
» składnika $-\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right]$; można więc nadać tym równaniom
» kształt

$$-(\psi_{i,i})^{-1}\frac{\partial(y_1,\ldots,y_{n-p})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-p})}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right]=0.$$

» Że zaś pierwsze dwa czynniki pierwszych stron tych równań
» są różne od zera (mianowicie pierwszy jest jednością, a drugi
» z założenia różny od zera), otrzymujemy więc $p(m-n+p)$
» równań

$$\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right]=0,$$

» $(i=n-p+1,\ldots,n,\ k=n-p+1,\ldots,m)$, które do-
» wodzą, że p związków (5), które nie zawierają wyraźnie $n-p$
» zmiennych $x_1,\ldots,x_{n-p}$, nie zawierają także $m-n+p$
» zmiennych pozostałych $x_{n-p+1},\ldots,x_m$. Tak więc zastrze-
» żenia (1) i (2) oznajmiają istnienie tylko p związków różnych
» między n funkcyami $y_1,\ldots,y_n$, niezależnych od zmiennych
» $x_1,\ldots,x_m$ ».

§ 119.

Ilości

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\ldots \tag{1}$$

mogą być nie, jak w §§ poprzedzających, wyraźnemi, lecz *uwikłanemi funkcyami zmiennych*

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ldots \tag{2}$$

W najprostszym przypadku, gdy ilości (1) jest n i ilości (2) także n, a mamy, ogólnie, n związków

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(y_1, \ldots, y_n, \quad x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_i(y_1, \ldots, y_n, \quad x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(y_1, \ldots, y_n, \quad x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

to z któregokolwiek związku (3) wypada

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0,$$

$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n)$, czyli

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k},$$

Jeśli więc utworzymy wyznacznik (§ 29)

$$\left|\begin{array}{l} -\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ -\frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array}\right| = (-1)^n \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

to można go uważać jako iloczyn dwu wyznaczników (§ 44):

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array}\right| = \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial y_n},$$

i (§ 18)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}.$$

Ze związku zaś

$$(-1)^n \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

wypada (¹)

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}}. \tag{4}$$

Gdybyśmy we związkach (3) uważali ilości (2) jako funkcye zmiennych niezależnych (1), to takąż drogą otrzymalibyśmy

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}}{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}. \tag{5}$$

Z równości zaś (4) i (5) wypada (²)

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1 \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = 1,$$

t. j., że jeden z tych dwu wyznaczników funkcyjnych jest odwrotnoscią drugiego.

(¹) Jacobi, l. c., str. 338.

(²) Moebius, *Ueber eine allgemeinere Art der Affinitæt geometrischer Figuren* (Crelle, *Journal*, t. XII, str. 116). Jacobi, l. c., str. 339.

ZADANIA. 1°) Objaśnić, dla czego, jeśli mamy układ związków

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right.$$

i uważmy ilości (1) jako funkcye ilości (2), to, przy $m > n$, jest

$$(-1)^n \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \sum_{\alpha,\ldots,\nu} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_\alpha, \ldots, y_\nu)} \frac{\partial(y_\alpha, \ldots, y_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

gdzie $\sum\limits_{\alpha,\ldots,\nu}$ odnosi się do wszystkich kombinacyj z m ilości $y_1, \ldots, y_m$ po n; zaś, przy $m < n$, jest

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ , \ldots\ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{array} \right\| = 0.$$

2°) Objaśnić, dla czego, jeśli mamy układ związków

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right.$$

i uważamy ilości (1) jako funkcye ilości (2), to, przy $m < n$, mieć będziemy

$$(-1)^m \sum_{\alpha,\ldots,\mu} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_\alpha, \ldots, x_\mu)} = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \sum_{\alpha,\ldots,\mu} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_\alpha, \ldots, x_\mu)},$$

gdzie $\sum\limits_{\alpha,\ldots,\mu}$ odnosi się do wszystkich kombinacyj z n ilości $x_1,\ldots,x_n$ po m, a każdy składnik po lewej jest równy odpowiedniemu składnikowi po prawej, tak, że

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_\alpha,\ldots,x_\mu)}=(-1)^m\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_\alpha,\ldots,x_\mu)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}};$$

zaś, w przypadku $m>n$, na mocy związków ($i=1,\ldots,m$):

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k}=-\frac{\partial F_i}{\partial x_k},$$

($k=1,\ldots,n$), oraz związków tożsamościowych

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_k}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial y_k}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_k}=\frac{\partial F_i}{\partial y_k},$$

($k=n+1,\ldots,m$; każde $\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial y_k}$ dla $\lambda>k$ i $\lambda<k$ jest zerem),

mieć będziemy

$$(-1)^n\sum\pm\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\frac{\partial F_{n+1}}{\partial y_{n+1}}\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=\sum\pm\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\ldots$$

$$\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_{n+1}}\ldots\frac{\partial y_m}{\partial y_m},$$

(§ 33) zkąd wypada [1]

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=(-1)^n\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_n,F_{n+1},\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n,y_{n+1},\ldots,y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}}.$$

---

(1) Jacobi, l. c., str. 344.

a, wrazie, gdy $n=1$, jest [1]

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, y_2, \ldots, y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}}.$$

Przedostatni (a tem samem i ostatni) związek można uogólnić. Jeśli z pośród m ilości $y_1, \ldots, y_m$ weźmiemy jakiekolwiek n np. $y_\alpha, \ldots, y_\nu$, a pozostałe $m-n$ z nich nazwiemy $y_\rho, \ldots, y_\psi$, to w podobny sposób znajdziemy, wogóle,

$$\frac{\partial(y_\alpha, \ldots, y_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, y_\rho, \ldots, y_\psi)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}},$$

a rozprzestrzeniając to na wszystkie kombinacye $y_\alpha, \ldots, y_\nu$ z m ilości $y_1, \ldots, y_m$ po n, mamy

$$\sum_{\alpha, \ldots, \nu} \frac{\partial(y_\alpha, \ldots, y_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\displaystyle\sum_{\alpha, \ldots, \nu} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, y_\rho, \ldots, y_\psi)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}},$$

gdzie po prawej, w każdym składniku, $m-n$ ilości $y_\rho, \ldots, y_\psi$, oznaczają te z ilości $y_1, \ldots, y_m$, które nie weszły do odpowiedniej kombinacyi $y_\alpha, \ldots, y_\nu$ (§ 50). Wrazie zaś $n=1$, jest

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, y_\beta, \ldots, y_\mu)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}},$$

gdzie $y_\beta, \ldots, y_\mu$ są $m-1$ z m ilości $y_1, \ldots, y_m$, pozostałych po wyłączeniu jednej z nich, mianowicie y_α.

---

(1) JACOBI, ibidem.

§ 120.

Jeśli dane ilości

$$y_1,\ y_2,\ldots,y_m, \tag{1}$$

są funkcyami ilości

$$z_1,\ z_2,\ldots,z_n, \tag{2}$$

które znów są funkcyami ilości

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_p, \tag{3}$$

a chcemy wyznaczyć Jakobian ilości (1) uważanych jako funkcye ilości (3), to zważmy naprzód, że wogóle

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_k}+\frac{\partial y_i}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_k}+\ldots. \tag{4}$$

Wrazie $p<m$, istnieje (§ 117) $m-p$ związków między ilościami (1), w które nie wchodzą zmienne niezależne (3), a tem samem [1] Jakobian «funkcyj, które wszystkie przez mniejszą «liczbę niewiadomych mogą być wyrażone [1]», jest równy zeru,

Wrazie $p=m<n$, ze związków (4) wypada (§ 44),

$$\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial y_m}{\partial x_m}=\sum_{\alpha,\ldots,\mu}\left(\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial z_\alpha}\ldots\frac{\partial y_m}{\partial z_\mu}\sum\pm\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial z_\mu}{\partial x_m}\right),$$

czyli

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}=\sum_{\alpha,\ldots,\mu}\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(z_\alpha,\ldots,z_\mu)}\frac{\partial(z_\alpha,\ldots,z_\mu)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)},$$

gdzie $\sum\limits_{\alpha,\ldots,\mu}$ odnosi się do wszystkich kombinacyj z n ilości $z_1,\ldots,z_n$ po m [2].

---

[1] Jacobi, l. c., str. 340.
[2] Jacobi, ibidem.

Wrazie zaś $p=m=n$, też związki (4) wskazują, że [3]

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \sum \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_n}{\partial x_n},$$

czyli

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)} \frac{\partial(z_1,\dots,z_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}. \tag{5}$$

Możemy tu uważać n ilości (1) jako funkcye n zmiennych (2), które-to zmienne, skutkiem przekształcenia, zastąpione zostają przez n zmiennych (3); wtedy powiemy : *Jakobian funkcyj danych względem nowych zmiennych równa się iloczynowi Jakobianu tych funkcyj względem zmiennych dawnych, pomnożonemu przez Jakobian zmiennych dawnych względem zmiennych nowych.*

Gdyby przekształcenie, skutkiem którego n zmiennych (2) przechodzi na n zmiennych (3) było liniowem (§ 82), np.

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n, \\ z_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ z_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n; \end{aligned} \qquad \mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \dots, a_{2,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix},$$

to wtedy

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = a_{i,k},$$

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \mathrm{M},$$

a związek (5) przechodzi na

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \mathrm{M}\,\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}.$$

([1]) JACOBI, ibidem.

Widzimy ztąd, że (§ 89) Jakobian posiada charakter niezmienności.

Jakobian danych funkcyi jest ich niezmiennikiem lub spółzmiennikiem.

Np., gdy dany jest układ dwu form :

$$\begin{cases} f_1 = a_0 z_1^2 + a_1 z_1 z_2 + a_2 z_2^2, \\ f_2 = b_0 z_1^2 + b_1 z_1 z_2 + b_2 z_2^2, \end{cases}$$

które ulegają przekształceniu liniowemu, np.

$$\begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ z_2 = \gamma x_1 + \delta x_2; \end{cases} \qquad M = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

to Jakobian tych form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_0 z_1 + a_1 z_2, & a_1 z_1 + 2a_2 z_2 \\ 2b_0 z_1 + b_1 z_2, & b_1 z_1 + 2b_2 z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[(a_0 b_1 - a_1 b_0) z_1^2 + 2(a_0 b_2 - a_2 b_0) z_1 z_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) z_2^2],$$

daje nam formę kwadratową podwójną

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) z_1^2 + 2(a_0 b_2 - a_2 b_0) z_1 z_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) z_2^2,$$

będącą spółzmiennikiem (1) danych form f_1 i f_2, jakeśmy to zresztą bezpośrednio w § 89-ym wyprowadzili.

---

(1) Każde z równań, powstałych z przyrównania danych form do zera, przedstawiać nam może np. parę punktów. Wtedy i równanie, powstałe z przyrównania tego spółzmiennika do zera, przedstawi nam parę punktów, będącą w pewnej zależności względem dwu par punktów $f_1=0$ i $f_2=0$, niezmiennej skutkiem przekształcenia liniowego, a więc niezawisłej od punktów, od których liczymy odległość. Przedstawi ono nam mianowicie parę punktów harmonicznie sprzężonych tak z parą punktów $f_1=0$, jak i z parą punktów $f_2=0$, czyli przedstawia punkty podwójne inwolucyi punktów, wyznaczonej temi dwiema parami punktów.

§ 121.

Jeśli

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, y_n,$$

są funkcyami jednej zmiennej niezaleznej, x, *a kolejne ich pochodne oznaczone zostaną, wogóle,*

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i^{(1)}, \ \frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i^{(2)}, \ \ldots, \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} = y_i^{(n-1)},$$

to jest zawsze

$$\begin{vmatrix} \lambda y_1, & (\lambda y_1)^{(1)}, & \ldots, & (\lambda y_1)^{(n-1)} \\ \lambda y_2, & (\lambda y_2)^{(1)}, & \ldots, & (\lambda y_2)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda y_n, & (\lambda y_n)^{(1)}, & \ldots, & (\lambda y_n)^{(n-1)} \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} y_1, & y_1^{(1)}, & \ldots, & y_1^{(n-1)} \\ y_2, & y_2^{(1)}, & \ldots, & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & y_n^{(1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

gdzie λ *oznacza albo ilość stałą, albotež pewną funkcyę zmiennej niezależnej* ([1]).

« Można bez trudności udowodnić to twierdzenie, rozwijając « pochodne, które zachodzą po lewej i opierając się na dwu « znanych własnościach wyznaczników : 1° można dodać do « wszystkich lub odjąć od wszystkich elementów pewnej ko- « lumny ilości proporcyonalne do elementów innej kolumny; « 2° jeżeli każdy element pewnej kolumny pomnożymy przez

---

([1]) HESSE, *Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale* (CRELLE, *Journal*, t. LIV, str. 249). Twierdzenie to, jako niemal oczywiste, podaje HESSE bez dowodu.

« ten sam czynnik λ, to cały wyznacznik zostanie pomnożony « przez λ [1] ».

W przypadku, gdy λ jest ilością stałą, należy w wyznaczniku po lewej podstawić

$$(\lambda y_1)^{(k)} = \lambda y_i^{(k)},$$

i twierdzenie staje się oczywistem (§ 29).

Jeśli zaś λ jest funkcyą zmiennej niezależnej, to, według znanego wzoru [2] na pochodną iloczynu dwu funkcyj, jest

$$(\lambda y_i)^{(k)} = \lambda y_i^{(k)} + \binom{k}{1}\lambda^{(1)} y_i^{(k-1)} + \binom{k}{2}\lambda^{(2)} y_i^{(k-2)} + \ldots$$
$$+ \binom{k}{1}\lambda^{(k-1)} y_i^{(1)} + \lambda^{(k)} y_i.$$

Podstawiając w wyznaczniku po lewej zamiast każdego $(\lambda y_i)^{(k)}$ odpowiednie wyrażenie, a następnie rozkładając ten wyznacznik na składniki (§ 28), spostrzeżemy, że wszystkie, prócz jednego, wyznaczniki-składniki są równe zeru (§ 30), różnym zaś od zera jest tylko składnik

$$\begin{vmatrix} \lambda y_1, & \lambda y_1^{(1)}, & \ldots & ,\lambda y_1^{(n-1)} \\ \lambda y_2, & \lambda y_2^{(1)}, & \ldots & ,\lambda y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda y_n, & \lambda y_n^{(1)}, & \ldots & ,\lambda y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

co (§ 29) przekonywa o prawdziwości twierdzenia.

---

[1] Moigno i Lindeloef, *Calcul des variations* (Paryż, 1861), str. 187. Żmurko, *Dowód na twierdzenie Hessego o wyznaczniku funkcyjnym* (*Pamiętnik Tow. Nauk Ścisłych*, t. I, 1871, str. 89-92) dowodzi tegoż twierdzenia innym, wielce złożonym sposobem. (Porównaj mój artykuł: «Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu. Sprawozdanie za lata 1870-1876» w piśmie «Ateneum». Warszawa, 1877, styczeń, str. 177).

[2] Leibnitz'a.

§ 122.

Jeśli mamy układ funkcyj

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x_1,\ x_2,\ldots), \\ f_2 = f_2(x_1,\ x_2,\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{1}$$

jednorodnych względem zmiennych, a stopnia: pierwsza n_1-ego, druga n_2-ego,..., to, według znanego twierdzenia [1], jest

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2 + \ldots = n_1 f_1, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2 + \ldots = n_2 f_2, \\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{2}$$

Jeśli nazwiemy głoską J Jakobian funkcyj (1), t. j.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ldots \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \mathrm{J},$$

a w nim ilość dołączoną do elementu $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ przez $\mathrm{J}_{i,k}$, to z układu równań (2) wypada wogóle (§ 71)

$$\mathrm{J}x_i = \mathrm{J}_{1,i} n_1 f_1 + \mathrm{J}_{2,i} n_2 f_2 + \ldots \tag{3}$$

Jeśli dla zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ldots \tag{4}$$

---

[1] EULER'a.

nadamy w wyrażeniach (1) wartości odpowiednio

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tag{5}$$

zadosyć czyniące równaniom

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0; \dots,$$

to ze związku (3), mającego miejsce dla każdego x_i, wypada, że tymże wartościom (5) dla zmiennych (4) odpowiada (§ 115) wartość Jakobianu zero.

Jeśli danemu układowi równań jednorodnych zadosyć czyni pewien systemat wartości dla niewiadomych, to temuż systematowi odpowiadająca wartość Jakobianu jest również zerem (1).

W przypadku, gdy

$$n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n,$$

to związek (3) można tak pisać:

$$\mathrm{J}x_i = n(\mathrm{J}_{1,i} f_1 + \mathrm{J}_{2,i} f_2 + \dots),$$

a biorąc pochodne obu stron tej równości, raz względem x_i, a drugi raz względem x_l, gdzie l ma wszelką możliwą wartość prócz jednej wartości i, otrzymujemy

$$\mathrm{J} + x_i \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_i} = n\left(f_1 \frac{\partial \mathrm{J}_{1,i}}{\partial x_i} + f_2 \frac{\partial \mathrm{J}_{2,i}}{\partial x_i} + \dots\right) + n\left(\mathrm{J}_{1,i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \mathrm{J}_{2,i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots\right),$$

$$x_i \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_l} = n\left(f_1 \frac{\partial \mathrm{J}_{1,i}}{\partial x_l} + f_2 \frac{\partial \mathrm{J}_{2,i}}{\partial x_l} + \dots\right) + n\left(\mathrm{J}_{1,i} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} + \mathrm{J}_{2,i} \frac{\partial f_2}{\partial x_l} + \dots\right).$$

(1) HESSE, *Ueber die Elimination*... (CRELLE, *Journal*, t. XXVIII, str. 78).

Zważywszy, że (§ 27)

$$\mathrm{J}_{1,i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\mathrm{J}_{2,i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\ldots=\mathrm{J},$$

$$\mathrm{J}_{1,i}\frac{\partial f_1}{\partial x_l}+\mathrm{J}_{2,i}\frac{\partial f_2}{\partial x_l}+\ldots=0,$$

możemy powyższe związki tak przedstawić

$$x_i\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_i}=n\left(f_1\frac{\partial \mathrm{J}_{1,i}}{\partial x_i}+f_2\frac{\partial \mathrm{J}_{2,i}}{\partial x_i}+\ldots\right)+(n-1)\mathrm{J},$$

$$x_i\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_l}=n\left(f_1\frac{\partial \mathrm{J}_{1,i}}{\partial x_l}+f_2\frac{\partial \mathrm{J}_{2,i}}{\partial x_l}+\ldots\right).$$

Jeśli zmiennym (4) nadamy wartości (5), sprawiające, że

$$f_1=0;\quad f_2=0;\ \ldots,$$

to, według dowiedzionego twierdzenia, dla tegoż systematu wartości zmiennych jest także $\mathrm{J}=0$, skutkiem czego z powyższych związków, mających miejsce dla każdego x_i, wypada

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_i}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x_l}=0.$$

Jeśli dane są równania jednorodne jednakowego stopnia, to systematowi wartości dla niewiadomych, sprawdzającemu te równania, odpowiadają wartości zero nietylko Jakobianu tych równań, lecz i jego pochodnych względem zmiennych ([1]).

Np.

$$\begin{cases} f_1=3x_1^2-15x_1x_2+18x_2^2, \\ f_2=\ x_1^2+\ 3x_1x_2-10x_2^2; \end{cases}$$

([1]) Hesse, l. c., str. 80.

$$J=\begin{vmatrix} 6x_1-15x_2, & -15x_1+36x_2 \\ 2x_1+\ 3x_2, & 3x_1-20x_2 \end{vmatrix}=48(x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2);$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=96(x_1-2x_2),$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_2}=192(-x_1+2x_2);$$

równaniu $f_1=0$ zadosyć czynią wartości $\dfrac{x_1}{x_2}=2$, $\dfrac{x_1}{x_2}=3$, równaniu zaś $f_2=0$ wartości $\dfrac{x_1}{x_2}=2$, $\dfrac{x_1}{x_2}=-5$; systemat więc wartości zadosyć czyniących jednocześnie obu równaniom

$$f_1=0 \quad \text{i} \quad f_2=0,$$

jest $\dfrac{x_1}{x_2}=2$, np.

$$x_1=2, \quad x_2=1;$$

dla tego zaś systematu wartości, jak to jest widoczne z powyżej wypisanych wyrażeń, jest

$$J=0, \quad \frac{\partial J}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial x_2}=0.$$

§ 123.

Wyprowadzone w poprzedzającym § własności wyznacznika funkcyjnego dozwalają w kilku przypadkach nadać *rugownikowi* danych form postać wyznacznikową ([1]).

1. Gdy dane są *trzy formy potrójne kwadratowe*

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z), \tag{1}$$

([1]) Sylvester. Porównaj § 80, przypisek.

to, aby można było, przy pomocy metody rozprzęgającej (§ 79, ustęp 3), przedstawić ich rugownik w postaci wyznacznika, należy mieć sześć równań jednorodnych i liniowych względem sześciu ilości

$$x^2,\ xy,\ y^2,\ xz,\ yz,\ z^2. \tag{2}$$

Trzy równania daje przyrównanie danych form do zera. Systemat wartości dla x, y i z, przedstawiający spólne tych trzech równań rozwiązanie, sprowadza do zera tak Jakobian danych form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y}, & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}, & \frac{\partial f_3}{\partial y}, & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathrm{J},$$

jak i jego pochodne (§ 122)

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x},\quad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y},\quad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial z}, \tag{3}$$

Że zaś elementy wyznacznika J są wyrażeniami jednorodnemi pierwszego stopnia względem zmiennych, to wyznacznik J jest trzeciego, a jego pochodne (3) drugiego stopnia. A gdy spólne rozwiązanie równań, powstałych z przyrównania każdej z trzech form (1) do zera, sprowadza jednocześnie do zera każde z trzech wyrażeń (3), więc warunek istnienia spólnego rozwiązania trzech równań

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \end{cases}$$

jest jednocześnie warunkiem istnienia spólnego rozwiązania sześciu równań

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

jednorodnych i liniowych względem sześciu ilości (2), i przez zastosowanie metody rozprzęgającej wyrażonym zostanie przez równość zeru wyznacznika szóstego stopnia, będącego funkcyą samych tylko spółczynników danych form. Wyznacznik zaś ten przedstawi (§§ 78, 79) rugownik danych trzech form kwadratowych potrójnych.

2. Jeśli dane są *trzy formy potrójne sześcienne*

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z),$$

to ich Jakobian $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial z} = J$ jest funkcyą jednorodną szóstego stopnia, zaś pochodne

$$\frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \frac{\partial J}{\partial z},$$

takiemiż funkcyami piątego stopnia względem zmiennych. Na tejże samej więc, co w poprzedzającym przypadku, zasadzie, tworząc układ dwudziestu jeden równań

$$\begin{cases} x^2 f_1 = 0, & x^2 f_2 = 0, & x^2 f_3 = 0, & \dfrac{\partial J}{\partial x} = 0, \\ xy f_1 = 0, & xy f_2 = 0, & xy f_3 = 0, & \dfrac{\partial J}{\partial y} = 0, \\ y^2 f_1 = 0, & y^2 f_2 = 0, & y^2 f_3 = 0, & \dfrac{\partial J}{\partial z} = 0, \\ xz f_1 = 0, & xz f_2 = 0, & xz f_3 = 0, & \\ yz f_1 = 0, & yz f_2 = 0, & yz f_3 = 0, & \\ z^2 f_1 = 0, & z^2 f_2 = 0, & z^2 f_3 = 0, & \end{cases}$$

jednorodnych i liniowych względem dwudziestu jeden ilości

$$\begin{array}{ccccccc} x^5, & x^4 y, & x^3 y^2, & x^2 y^3, & xy^4, & x^2 y^2 z, & x^3 yz, \\ y^5, & x^4 z, & x^3 z^2, & x^2 z^3, & xz^4, & x^2 yz^2, & xy^3 z, \\ z^5, & y^4 z, & y^3 z^2, & y^2 z^3, & yz^4, & xy^2 z^2, & xyz^3, \end{array}$$

których-to równań spólne rozwiązanie jest jednocześnie spólnem rozwiązaniem (jednoznacznych) równań, powstałych z przyrównania danych form do zera,

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \end{cases}$$

możemy z tego układu dwudziestu jeden równań metodą rozprzęgającą otrzymać rugownik danych form potrójnych sześciennych f_1, f_2, f_3, w postaci wyznacznika dwudziestego pierwszego stopnia.

3. Gdy dane są *cztery formy poczwórne kwadratowe*

$$f_1(x, y, z, u), \quad f_2(x, y, z, u), \quad f_3(x, y, z, u), \quad f_4(x, y, z, u),$$

to ich Jakobian $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial z} \frac{\partial f_4}{\partial u} = \mathrm{J}$ jest funkcyą jednorodną czwartego stopnia, a jego pochodne

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial z}, \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u},$$

trzeciego stopnia względem zmiennych. Spólne rozwiązanie układu równań

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ f_4 = 0, \end{array}\right.$$

jest spólnem rozwiązaniem jednoznacznego układu dwudziestu równań

$$\left\{\begin{array}{lllll} xf_1 = 0, & xf_2 = 0, & xf_3 = 0, & xf_4 = 0, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} = 0, \\ yf_1 = 0, & yf_2 = 0, & yf_3 = 0; & yf_4 = 0, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} = 0, \\ zf_1 = 0, & zf_2 = 0, & zf_3 = 0, & zf_4 = 0, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial z} = 0, \\ uf_1 = 0, & uf_2 = 0, & uf_3 = 0, & uf_4 = 0, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u} = 0, \end{array}\right.$$

jednorodnych i liniowych względem dwudziestu ilości

$$\begin{array}{llllll} x^3, & y^3, & z^3, & u^3, & & \\ x^2y, & x^2z, & x^2u, & y^2z, & y^2u, & z^2u \\ xy^2, & xz^2, & xu^2, & yz^2, & yu^2, & zu^2, \\ xyz, & xyu, & xzu, & yzu, & & \end{array}$$

a wyznacznik tego układu dwudziestu równań, więc wyznacznik dwudziestego stopnia, otrzymany metodą rozprzęgającą, przedstawi rugownik danych czterech form poczwórnych kwadratowych.

Metoda, za pomocą której w powyższych trzech przypadkach otrzymaliśmy wyznacznikową postać rugownika przy pomocy pierwszych pochodnych Jakobianu danych form, nie może być rozprzestrzenioną na inne układy form.

§ 124.

Jeśli dana jest n-krotna całka,

$$A = \int^{(n)} F(y_1 \; . \; . \; . \; y_n) dy \; . \; . \; . \; dy_n,$$

a granice całkowania są oznaczone i skończone, i wypada ją przekształcić, zastępując zmienne $y,\ldots y_n$ przez nowe zmienne $x_1,\ldots,x_n$, związane z dawnemi za pomocą związków

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \; x_2, \; . \; . \; . \; , x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, \; x_2, \; . \; . \; . \; , x_n), \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \\ y_n = f_n(x_1, \; x_2, \; . \; . \; . \; , x_n), \end{array}\right. \tag{1}$$

skutkiem czego funkcya $F(y_1,\ldots,y_n)$ przechodzi na funkcyę nowych zmiennych

$$\Phi(x_1, \; . \; . \; . \; , x_n),$$

to, rozumując podobnie jak w § 116-ym, możemy związki (1) zastąpić (w najogólniejszym przypadku) przez związki

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \psi_1(x_1, \ . \ . \ . \ , x_n), \\ y_2 = \psi_2(y_1, \ x_2, \ . \ . \ . \ , x_n), \\ y_3 = \psi_3(y_1, \ y_2, \ x_3, \ . \ . \ . \ , x_n), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \\ y_n = \psi_n(y_1, \ . \ . \ . \ , y_{n-1}, \ x_n), \end{array}\right. \tag{2}$$

co prowadzi nas do związku (6) § 116-ego

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \ . \ . \ . \ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} = \frac{\partial(y_1, \ . \ . \ . \ , y_n)}{\partial(x_1, \ . \ . \ . \ , x_n)}, \tag{3}$$

Ponieważ tu porządek całkowania jest dowolny, to, zaczynając od całkowania względem y_n, możemy w całce A ilość y_n zastąpić przez prawą stronę ostatniego z równań (2); nadto, z powodu, że, przy tem całkowaniu, ilości $y_1, \ . \ . \ . \ , y_{n-1}$ nie zmieniają się, wypadnie w podintegralnem wyrażeniu zastąpić jednocześnie dy_n przez

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} dx_n,$$

(oraz odpowiednio zmienić granice); będzie więc

$$\mathrm{A} = \int^{(n)} \mathrm{F}(y_1, \ldots, y_{n-1}, \ \psi_n) \ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \, dy_1 \ldots dy_{n-1} dx_n.$$

Podobnie zważając, że, przy całkowaniu względem y_{n-1}, możemy w ostaniem wyrażeniu ilość y_{n-1} zastąpić przez prawą stronę przedostatniego z równań (2), oraz, że, przy tem całkowaniu, ilości $y_1, \ldots, y_{n-2}, \ x_n$ nie zmieniają się, znajdziemy

$$\mathrm{A} = \int^{(n)} \mathrm{F}(y_1, \ldots, y_{n-2}, \ \psi_{n-1} \ \psi_n) \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \, dy_1 \ldots dy_{n-2} dx_{n-1} dx_n.$$

Postępując tak samo wciąż dalej, dojdziemy nakoniec do wyrażenia

$$A=\int^{(n)} F(\psi_1,\ldots,\psi_n)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}dx_1\ldots dx_n.$$

W tem wyrażeniu funkcya $F(\psi_1,\ldots,\psi_n)$, wyrażona w samych tylko nowych zmiennych $x_1,\ldots,x_n$, jest funkcyą $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$; według zaś (3) iloczyn $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}$ może być zastąpiony przez Jakobian zmiennych dawnych względem zmiennych nowych, tak, że ([1])

$$A=\int^{(n)}\Phi(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}dx_1\ldots dx_n.$$

§ 125.

Gdy dane jest równanie różniczkowe cząstkowe, liniowe i pierwszego rzędu

$$X_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial y}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial y}{\partial x_n}=0,$$

w którem

$$X_1,\quad X_2,\ \ldots,X_n,$$

są funkcyami zmiennych

$$x_1,\quad x_2,\ \ldots,x_n,$$

i gdy

$$y_1,\ \ldots,y_{i-1},\ y_{i+1},\ \ldots,y_n$$

([1]) Przekształcenie całki dwukrotnej podał EULER (1759, *Novi Commentationes Ac. Imp. Petropolitanae*, t. XIV, str. 72), całki trzykrotnej LAGRANGE (1773, *Mem, de l'Ac. de Berlin*, str. 125), całki n-krotnej JACOBI, (1834) *De binis quibuslibet...* (str.38); (1841) *De Determinantibus funtionalibus* (str. 358), oraz CATALAN 1840 (*Bulletin de l'Ac. de Bruxelles*, t. XIII, str. 6; 1841, *Mémoires couronnées de l'Ac. de Bruxelles*, t. XIV). — Zasada przeprowadzonego tu postępowania wzięta jest z JACOBI'ego *De Determinantibus...*

są $n-1$ od siebie niezależnemi rozwiązaniami tego równania, tak, że, nazywając lewą stronę równania, np. przez $\varphi(y)$, mamy

$$\varphi(y_1)=0,\ldots,\varphi(y_{i-1})=0,\ \varphi(y_{i+1})=0,\ldots,\varphi(y_n)=0, \tag{1}$$

to można wyznaczyć *mnożnik* [multiplicator ([1])] równania różniczkowego cząstkowego

$$\varphi(y)=0,$$

lub równania różniczkowego cząstkowego

$$X_i - X_1\frac{\partial x_i}{\partial x_1} - \ldots - X_{i-1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i-1}} - X_{i+1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} - \ldots - X_n\frac{\partial x_i}{\partial x_n} = 0,$$

lub też układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_i : \ldots : dx_n = X_1 : X_2 : \ldots : X_i : \ldots : X_n,$$

przez który pomnożone rozwiązanie $\varphi(y_i)$ przedstawi Jakobian funkcyj $y_1,\ldots,y_n$ względem zmiennych $x_1,\ldots,x_n$. Jeśli bowiem w wyznaczniku $J=\sum\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}$ ilość dołączona do elementu $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ jest $J_{i,k}$, to z tożsamości (1) i wyrażenia dla $\varphi(y_i)$, t. j. z układu związków

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial y_1}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}X_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial y_i}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial y_i}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}X_n = \varphi(y_i),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial y_n}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2}X_n + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}X_n = 0,
\end{array}\right.$$

([1]) JACOBI, *Teoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi* (CRELLE, *Journal*, t. XXVII, str. 210) wypada (§ 75)

$$\frac{J_{i,1}}{X_1}=\frac{J_{i,2}}{X_2}=\ldots=\frac{J_{i,n}}{X_n}=\frac{J}{\varphi(y_i)}.$$

W razie, jeśli wartość tych równych stosunków nazwiemy M, to

$$M\varphi(y_i)=J.$$

lość M, czyli tak zwany *mnożnik* JACOBI'ego ([1]), zadosyć czyni równaniu różniczkowemu cząstkowemu

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0.$$

§ 126.

Na szczególną uwagę zasługuje Jakobian funkcyj np.

$$u_1,\quad u_2,\ \ldots,u_n \tag{1}$$

względem zmiennych np.

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n, \tag{2}$$

w przypadku, gdy funkcye (1) są pierwszemi pochodnemi pewnej funkcyi u względem zmiennych (2). Ten wyznacznik funkcyjny

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\sum\pm\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\ \ldots\frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

([1]) Badania własności i zastosowań mnożnika JACOBI'ego czytelnik znajdzie wyczerpująco przedstawione w dziele: ZAJĄCZKOWSKI, *Wykład nauki równaniach różniczkowych*. Paryż, 1877 (część II, rozdziały XIV i XV.)

który można tak przedstawić :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, & \dots, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n},$$

albo jeszcze, nazywając na podobieństwo oznaczeń (1),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{i,k},$$

w sposób taki :

$$\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2}, & \dots, & u_{1,n} \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & \dots, & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1}, & u_{n,2}, & \dots, & u_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm u_{1,1} u_{2,2} \dots u_{n,n},$$

nosi nazwę [1] *wyznacznika funkcyi u*, lub [2] *Hessianu*, a własności jego mają rozmaite zastosowania tak w Algebrze, jak i w Geometryi.

---

[1] Hesse, *Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Veriabeln* (Crelle *Journal*, t. XXVIII, str. 83). Badania własności i zastosowań tego wyznacznika prowadził Hesse przez lat wiele, ogłaszając rezultaty tych badań w różnych, poczynając od XXVIII-ego, tomach Crelle *Journal*. Miano «Hessianu» dla tego wyznacznika wprowadził

[2] Sylvester (*Cambridge and Dublin Math. Jour.*, t. VI, str. 186).

Z powodu, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i},$$

czyli

$$u_{i,k} = u_{k,i},$$

Hessian jest wyznacznikiem symetrycznym (§ 90).

Jeśli u jest funkcyą m-ego stopnia względem n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, to drugie jej pochodne są $(m-2)$-ego stopnia, a jej Hessian, jako wyznacznik n-ego stopnia względem elementów (§ 8), t. j. drugich pochodnych, jest funkcyą $n(m-2)$-ego stopnia względem zmiennych.

Hessian funkcyi u, zależnej od zmiennych (2), oznaczać będziemy albo H, albo H_u, alboteż, skoro nam idzie o uwydatnienie zmiennych, od których funkcya u zależy, symbolem H_{u_x}.

§ 127.

Jeśli dana funkcya u zmiennych

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \tag{1}$$

skutkiem liniowego przekształcenia (§ 82)

$$\begin{cases} x_1 = a_{1,1} z_1 + a_{1,2} z_2 + \ldots + a_{1,n} z_n, \\ x_2 = a_{2,1} z_1 + a_{2,2} z_2 + \ldots + a_{2,n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n,1} z_1 + a_{n,2} z_2 + \ldots + a_{n,n} z_n; \end{cases}$$

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

przechodzi na funkcyę zmiennych

$$z_1,\ z_2, \ldots, z_n, \tag{2}$$

to zależność między

$$\mathrm{H}_{u_x} \text{ i } \mathrm{H}_{u_z}$$

możemy wykryć w następujący sposób.

Tak pochodne

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \tag{3}$$

jak i pochodne

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_n}, \tag{4}$$

są funkcyami ilości (1) zależnych od ilości (2). Stosując więc do funkcyj (3) i do funkcyj (4) wzór (5) § 120-ego, mamy

$$\sum \pm \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)}{\partial z_n} =$$

$$= \sum \pm \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n} \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial z_n}, \tag{5}$$

$$\sum \pm \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)}{\partial z_n} =$$

$$= \sum \pm \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)}{\partial x_n} \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial z_n}, \tag{6}$$

gdzie

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial z_n} = \sum \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \mathrm{M}.$$

Związki (5) i (6) mogą być tak przedstawione:

$$\sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial z_n} = \sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n} \mathrm{M},$$

$$\sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_n} = \sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial z_n} \mathrm{M},$$

zkąd, podstawiając wyrażenie dla $\sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial z_n}$ z pierwszego związku w drugi, otrzymujemy [1]

$$\sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_n} = \mathrm{M}^2 \sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n},$$

czyli

$$\mathrm{H}_{u_z} = \mathrm{M}^2 \mathrm{H}_{u_x}.$$

Posiada więc Hessian charakter niezmienności (§ 89).

Hessian funkcyi jest jej niezmiennikiem, albo spółzmiennikiem.

§ 128.

Jeśli funkcya u jest jednorodną m-ego stopnia względem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, to, jak wiadomo,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = mu.$$

Stosując tęż własność do funkcyj $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jednorodnych $(m-1)$-ego stopnia, mamy

$$\begin{aligned} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \ldots + u_{1,n}x_n &= (m-1)u_1, \\ u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2 + \ldots + u_{2,n}x_n &= (m-1)u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots, \\ u_{n,1}x_1 + u_{n,2}x_2 + \ldots + u_{n,n}x_n &= (m-1)u_n. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] HESSE, c. l., str. 89.

Z tych $n+1$ tożsamościowych związków

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{mu}{m-1}(-m+1)+u_1\ x_1+u_2\ x_2+\ldots+u_n\ x_n=0, \\ \quad u_1(-m+1)+u_{1,1}x_1+u_{1,2}x_2+\ldots+u_{1,n}x_n=0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad u_n(-m+1)+u_{n,1}x_1+u_{n,2}x_2+\ldots+u_{n,n}x_n=0, \end{array}\right. \qquad (2)$$

jednorodnych względem $n+1$ ilości

$$-(m-1),\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n, \qquad (3)$$

wypada (§ 76)

$$D=\begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1}, & u_1\ ,\ldots, & u_n \\ u_1, & u_{1,1}\ ,\ldots, & u_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n, & u_{n,1},\ldots, & u_{n,n} \end{vmatrix}=0.$$

Ilością dołączoną w tym wyznaczniku do pierwszego głównego elementu jest wyznacznik (§ 126) symetryczny H_u. Jeśli zaś ilość dołączoną w wyznaczniku H_u do elementu $u_{i,k}$ nazwiemy $H_{i,k}$, to, stosując do powyższego wyznacznika (symetrycznego) D rozkład § 93-ego według elementów pierwszego jego wiersza i pierwszej kolumny, mieć będziemy

$$\frac{mu}{m-1}H_u-\sum_{i,j}u_iu_jH_{i,j}=0 \qquad (4)$$

$(i=1,\ldots,\ n;\ j=1,\ldots,\ n)$, co można (§ 28) i tak przedstawić ([1]):

([1]) Hesse, *Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung* (Crelle, *Journal*, t. XXXVIII, str. 242, wzór 4.).

$$\begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1}, & u_1, \ldots, & u_n \\ 0, & u_{1,1}, \ldots, & u_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & u_{n,1}, \ldots, & u_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & u_1, \ldots, & u_n \\ u_1, & u_{1,1}, \ldots, & u_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n, & u_{n,1}, \ldots, & u_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Jeśli ilości dołączone w wyznaczniku D do elementów u_i i $u_{i,k}$ nazwiemy odpowiednio U_i i $U_{i,k}$, to wyznacznik dołączony (§ 65) do wyznacznika D jest (§ 91) także symetryczny, i tak on, jak i jego wyznaczniki częściowe drugiego i wyższych stopni, są równe zeru (§ 69), to jest

$$U_{i,k} = U_{k,i};$$

$$\begin{vmatrix} H_u, & U_1, & U_2, \ldots, & U_n \\ U_1, & U_{1,1}, & U_{1,2}, \ldots, & U_{1,n} \\ U_2, & U_{1,2}, & U_{2,2}, \ldots, & U_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n, & U_{1,n}, & U_{2,n}, \ldots, & U_{n,n} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} H_u, & U_i \\ U_i, & U_{i,i} \end{vmatrix} = H_u U_{i,i} - U_i^2 = 0; \qquad U_i = \sqrt{H_u}\sqrt{U_{i,i}};$$

$$\begin{vmatrix} U_{i,i}, & U_{i,j} \\ U_{i,j}, & U_{j,j} \end{vmatrix} = U_{i,i} U_{j,j} - U_{i,j}^2 = 0; \qquad U_{i,j} = \sqrt{U_{i,i}}\sqrt{U_{j,j}}.$$

Z powodu równości zeru wyznacznika D układu równań (2), wartości ilości (3) są (§ 76) proporcyonalne względem ilości dołączonych w wyznaczniku D do odpowiednich spółczynników któregokolwiek z równań (2). Będzie więc wogóle, uwzględniając powyższe wyrażenia dla U_i i $U_{i,j}$,

$$\begin{aligned} -(m-1):x_1:x_2:\ldots:x_n &= H_u : U_1 : U_2 : \ldots : U_n, \\ &= \sqrt{H_u} : \sqrt{U_{1,1}} : \sqrt{U_{2,2}} : \ldots : \sqrt{U_{n,n}}, \\ &= U_i : U_{i,1} : U_{i,2} : \ldots : U_{i,n}, \end{aligned}$$

zkąd otrzymujemy wyrażenia (¹)

$$U_i = -\frac{x_i}{m-1} H_u,$$

$$U_{i,j} = \frac{x_i x_j}{(m-1)^2} H_u.$$

Wyznacznik dołączony do wyznacznika H_u, to jest wyznacznik (§ 66)

$$\begin{vmatrix} H_{1,1},\ldots, & H_{1,n} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \\ H_{n,1},\ldots, & H_{n,n} \end{vmatrix} = H_u^{\,n-1},$$

jest także symetryczny (§ 91) i jest funkcyą $n(n-1)(m-2)$-ego stopnia względem zmiennych $x_1,\ldots, x_n$.

§ 129.

Ponieważ Hessian funkcyi u jest (§ 126) Jakobianem jej pierwszych pochodnych

$$u_1, u_2,\ldots, u_n$$

(¹) Hesse, *Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung* (Crelle, *Journal*, t. XXVIII, str. 103, wzór 80). *Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung* (str. 242, wzory 5).

względem zmiennych

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,$$

to, według twierdzenia §-u 116-ego, mamy tu:

Jeśli między pochodnemi pierwszemi jednorodnej funkcyi względem zmiennych istnieje związek, od zmiennych niezależny, to Hessian funkcyi jest tożsamościowo równy zeru.

Jeśli Hessian funkcyi jednorodnej jest tożsamościowo równy zeru, to między pochodnemi pierwszemi funkcyi ma miejsce związek, niezależny od zmiennych.

Jeśli między pierwszemi pochodnemi funkcyi jednorodnej u istnieje względem nich jednorodny i liniowy związek, niezależny od zmiennych,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0 \tag{1}$$

(więc $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są stałe), to, stosując do funkcyi u przekształcenie liniowe

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & = z_1 & + & a_1 & z_n, \\ x_2 & = z_2 & + & a_2 & z_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1} & = z_{n-1} & + & a_{n-1} & z_n, \\ x_n & = & & a_n & z_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

mieć będziemy wogóle

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_n} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_n} + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_n},$$

czyli, według (2),

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = a_1u_1 + \ldots + a_{n-1}u_{n-1} + a_nu_n = 0$$

na mocy założenia (1). Funkcya więc u, po uskutecznieniu przekształcenia (2), niezależy od zmiennej z_n i jest tylko funkcyą $n-1$ zmiennych $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.

Jeśli między pierwszemi pochodnemi jednorodnej funkcyi n *zmiennych istnieje związek względem tych pochodnych jednorodny i liniowy, a od zmiennych niezależny, to dana funkcya może być, po uskutecznieniu liniowego przekształcenia, wyrażoną jako funkcya* n — 1 *zmiennych* (1). Np., gdy

$$u = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + xz - 5xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 = 2x - 5y + z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_2 = 8y + 2z - 5x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u_3 = -4z + 2y + x;$$

lecz tu

$$2u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

więc naprzód

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 2, & -5, & 1 \\ -5, & 8, & 2 \\ 1, & 2, & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

a następnie, stosując do funkcyi u przekształcenie liniowe

$$\begin{cases} x = \xi + a_1\zeta = \xi + 2\zeta, \\ y = \eta + a_2\zeta = \eta + \zeta, \\ z = \quad\;\; a_3\zeta = \zeta, \end{cases}$$

(1) Hesse, *Ueber die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von* n *unabhängigen Variabeln...* (Crelle, *Jour.*, tom XLII, str. 122).

znajdziemy

$$u = (x-2z)^2 + 4(y-z)^2 - 5(x-2z)(y-z)$$
$$= \xi^2 + 4\eta^2 - 5\xi\eta.$$

§ 130.

Gdy funkcya jednorodna u₁ *zależna od* n *zmiennych*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{1}$$

skutkiem liniowego przekształcenia może być wyrażoną za pomocą n — 1 *tylko nowych zmiennych*

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1},$$

to Hessian funkcyi u *względem zmiennych* (1) *jest tożsamościowo równy zeru* (¹), gdyż według § 127-ego,

$$\mathrm{H}_{u_x} = \mathrm{H}_{u_z}\ \mathrm{D}^{-2},$$

wyznacznik zaś H_{u_z} jest tożsamościowo równy zeru, gdyż w nim, na mocy założenia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_n} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial z_n} = 0, \ldots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_n} = 0.$$

Gdyby dana funkcya u była funkcyą jednorodną drugiego stopnia ($m=2$) względem n zmiennych (1), to, według wzorów (1) § 128-ego,

$$\left\{\begin{array}{l} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \ldots + u_{1,n}x_n = u_1, \\ u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2 + \ldots + u_{2,n}x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}x_1 + u_{n,2}x_2 + \ldots + u_{n,n}x_n = u_n. \end{array}\right. \tag{2}$$

(¹) Hesse, l. c., str. 119.

W wyznaczniku tego układu równań liniowych

$$\begin{vmatrix} u_{1,1},\ldots, & u_{1,n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot \\ u_{n,1},\ldots, & u_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{H},$$

tak każdy element $u_{i,k}$, jak i jego ilość dołączona $\mathrm{H}_{i,k}$ są w naszym przypadku stopnia zero względem zmiennych, czyli ilościami stałemi. Z układu zaś równań (2) mamy (§ 71):

$$\mathrm{H}x_k = \mathrm{H}_{1,k}u_1 + \mathrm{H}_{2,k}u_2 + \ldots + \mathrm{H}_{n,k}u_n.$$

Ztąd wypada, że, jeśli tożsamościowo $\mathrm{H}=0$, ma miejsce związek

$$\mathrm{H}_{1,k}u_1 + \mathrm{H}_{2,k}u_2 + \ldots + \mathrm{H}_{n,k}u_n = 0$$

jednorodny i liniowy względem pierwszych pochodnych funkcyi u i od zmiennych niezależny, a temsamem (§ 129) funkcya u może być wyrażoną przez $n-1$ zmiennych.

Jeśli Hessian funkcyi jednorodnej, kwadratowej, ilukolwiek n *zmiennych, jest tożsamościowo równy zeru, to między pierwszemi jej pochodnemi istnieje względem tych pochodnych jednorodny związek liniowy, od zmiennych niezależny, i funkcya za pomocą liniowego przekształcenia może być przeobrażoną na funkcyę jednorodną* n — 1 *zmiennych.*

Jeśli u jest funkcyą jednorodną podwójną jakiegokolwiek stopnia, to

$$u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 = (m-1)u_1,$$

$$u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2 = (m-1)u_2,$$

i, przy

$$\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2} \\ u_{2,1}, & u_{2,2} \end{vmatrix} = \mathrm{H},$$

jest

$$\mathrm{H}x_1 = (m-1)(u_1 u_{2,2} - u_2 u_{1,2}). \tag{3}$$

Jeśli tożsamościowo $\mathrm{H} = 0$, t. j.

$$u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad u_{1,1} : u_{1,2} = u_{1,2} : u_{2,2},$$

to ze związku (3) wypada

$$u_1 u_{2,2} - u_2 u_{1,2} = 0, \quad \text{czyli} \quad u_1 : u_2 = u_{1,2} : u_{2,2}.$$

Związek zaś

$$u_1 : u_2 = u_{1,1} : u_{1,2} = u_{1,2} : u_{2,2},$$

to jest

$$u_1 : u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} : \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} : \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

może mieć miejsce tylko wtedy, gdy stosunek $u_1 : u_2$ jest od ilości tak x_1, jak x_2, niezależny, czyli: gdy jest stały. Nazywając tę stałą wartość stosunku przez $-\frac{a_2}{a_1}$, mamy

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0,$$

a tem samem (§ 129) funkcya u może być wyrażona jako funkcya jednej zmiennej.

Jeśli Hessian funkcyi podwójnej, jednorodnej, jakiegokolwiek stopnia, jest tożsamościowo równy zeru, to między pierwszemi jej pochodnemi istnieje związek jednorodny i liniowy względem tych pochodnych, niezależny od zmiennych, i funkcya za pomocą linio-

wego przekształcenia może być przeobrażoną na funkcyę jednej zmiennej, będącą jednomianem (1). Np.

$$u = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3;$$

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 48x - 72y, & -72x + 108y \\ -72x + 108y, & 108x - 162y \end{vmatrix} = 0,$$

jakoż

$$u_1 = 24x^2 - 72xy + 54y^2,$$
$$u_2 = -36x^2 + 108xy - 81y^2.$$

---

(1) Ta własność formy podwójnej i poprzedzająca formy kwadratowej są szczególnemi własnościami, odwrotnemi względem ogólnej, wypowiedzianej na początku tego §-u. Ogólnej własności odwrotnej, t. j. że: «jeżeli Hessian formy z n zmiennemi jest tożsamościowo równy zeru, to ta forma za pomocą liniowego przekształcenia może być wyrażoną, jako zależna tylko od $n-1$ zmiennych» usiłował dowieść Hesse (l. c., str. 119, i w *Zur Teorie der ganzen homogenen Functionen*, Crelle, *Journal*, t. LVI, str. 263). — Pasch, *Zur Theorie der Hesseschen Determinante* (Crelle, t. LXXX, str. 169), uważając dowody Hesse'go za nieścisłe, dowodzi prawdziwości tego t.z. «twierdzenia Hesse'go» dla sześciennych form tak potrójnych, jak i poczwórnych. Gordan, *Ueber einen Satz von Hesse* (*Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*, Heft VIII, str. 89; 1875) podaje spólnie z Noether'em obmyślany, wielce skomplikowany dowód dla form potrójnych. Noether, *Ueber die algebraischen formen mit identisch verschwindender Hesse'scher Determinante* (*Sitzungsberichte*... Heft VIII, str. 51; 1876), również spólnie z Gordan'em, w inny sposób dowodzi, że to twierdzenie ma miejsce dla form potrójnych i poczwórnych, i podaje (str. 56) przykład, który wskazuje, że to twierdzenie nie jest ogólne. Mianowicie, jeśli A, B, C są podwójne formy μ-ego stopnia ($\mu > 1$) zmiennych x_1 i x_2, takie, że nie istnieje między niemi liniowy związek, od zmiennych niezależny, to wtedy Hessian funkcyi

$$x_3\mathrm{A} + x_4\mathrm{B} + x_5\mathrm{C}$$

widocznie jest tożsamościowo równy zeru, chociaż między pierwszemi pochodnemi tej funkcyi nie zachodzi żaden związek liniowy, niezależny od zmiennych.

więc

$$3u_1 + 2u_2 = 0,$$

a po podstawieniu

$$x = \xi + 3\eta,$$

$$y = \quad 2\eta,$$

wypada

$$u = 8(x - \frac{3}{2}y)^3$$

$$u = 8\xi^3.$$

§ 131.

Jeśli mamy, wogóle, niejednorodną funkcyę f stopnia m-ego względem $n-1$ zmiennych

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_{n-1},$$

to podstawiając w nią zamiast tych zmiennych odpowiednio

$$\frac{x_1}{x_n}, \; \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \; \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

i mnożąc przez $x_n{}^m$, otrzymamy funkcyę jednorodną stopnia m-ego względem n zmiennych

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n,$$

którą nazwijmy u; funkcya u przechodzi na funkcyę f, przy $x_n = 1$.

Oznaczając, jak poprzednio,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{i,k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = u_{i,k},$$

mieć tu będziemy

$$f_j = u_j, \quad f_{j,l} = u_{j,l}$$

przy wartościach 1, 2,..., $n-1$ dla liczb j i l.

Utworzymy wyznacznik n-ego stopnia

$$-\mathrm{V} = \begin{vmatrix} 0 & , f_1 & ,\ldots, & f_{n-1} \\ f_1 & , f_{1,1} & ,\ldots, & f_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n-1}, & f_{n-1,1}, & \ldots, & f_{n-1,n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & , u_1 & ,\ldots, & u_{n-1} \\ u_1 & , u_{1,1} & ,\ldots, & u_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-1}, & u_{n-1,1}, & \ldots, & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

albo

$$\mathrm{V} = -\frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} 0 & , u_1 & , u_2 & ,\ldots, & u_{n-1} \\ (m-1)u_1 & , u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\ldots, & u_{1,n-1} \\ (m-1)u_2 & , u_{2,1} & , u_{2,2} & ,\ldots, & u_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (m-1)u_{n-1}, & u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \ldots, & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Dodajmy do elementów pierwszej kolumny ostatniego wyznacznika odpowiednie elementy drugiej, pomnożone przez $-x_1$, elementy trzeciej, pomnożone przez $-x_2$,..., elementy ostatniej, pomnożone przez $-x_{n-1}$. Wtedy na mocy związków (2) §-u 128, jest

$$V=\frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} mu-x_nu_n & , u_1 & , u_2 & ,\dots, u_{n-1} \\ -x_nu_{1,n} & , u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\dots, u_{1,n-1} \\ -x_nu_{2,n} & , u_{2,1} & , u_{2,2} & ,\dots, u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_nu_{n-1,n}, & u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \dots, u_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

czyli

$$V=\frac{mu}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\dots, u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & , u_{2,2} & ,\dots, u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \dots, u_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^{n-1}\frac{x_n}{m-1}\begin{vmatrix} u_1 & , u_2 & ,\dots, u_{n-1} & , u_n \\ u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\dots, u_{1,n-1} & , u_{1,n} \\ u_{2,1} & , u_{2,2} & ,\dots, u_{2,n-1} & , u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \dots, u_{n-1,n-1}, & u_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Pierwszy z wyznaczników po prawej jest ilością $H_{n,n}$. Co się zaś tyczy drugiego, to, postępując z nim podobnie jak poprzednio z wyznacznikiem (1), mamy

$$\begin{vmatrix} u_1 & , u_2 & ,\dots, u_n \\ u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\dots, u_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \dots, u_{n-1,n} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} (m-1)u_1, & (m-1)u_2, & \ldots & ,(m-1)u_n \\ u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\ldots & ,u_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & , u_{n-1,2} & ,\ldots & ,u_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} x_n u_{n,1}, & x_n u_{n,2}, & \ldots & ,x_n u_{n,n} \\ u_{1,1} & , u_{1,2} & ,\ldots & ,u_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \ldots & ,u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{x_n}{m-1}\,\mathrm{H}.$$

Jest więc [1]

$$\mathrm{V}=\frac{m}{m-1}\,u\mathrm{H}_{n,n}-\frac{x_n^2}{(m-1)^2}\,\mathrm{H}. \qquad (2)$$

Z tego tożsamościowego związku okazuje się, że systemat wartości zmiennych, zadosyć czyniący dwu równaniom

$$u=0 \quad \text{i} \quad \mathrm{V}=0,$$

zadosyć także czyni równaniu

$$\mathrm{H}=0;$$

że zaś równanie $u=0$ jest tem samem równaniem, co $f=0$, więc ze związku (2) wypada, że *układ równań*

$$f=0, \quad \mathrm{V}=0,$$

jest jednoznaczny z układem równań

$$u=0, \quad \mathrm{H}=0,$$

i odwrotnie.

---

(1) Hesse, *Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung* (Crelle, *Journal*, t. XXXVIII, str. 242, wzór 5 na $D_{3,3}$). Porów. str. 516.

Jeśli $n=3$, $x_3=1$, zaś x_1 i x_2 są prostokątnemi spółrzędnemi bieżącemi punktu, to równanie

$$f=0,$$

przedstawia ogólne równanie krzywej płaskiej m-ego porządku, której promień krzywości ρ w punkcie (x_1, x_2) wyraża się przez znany wzór

$$\rho=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2},$$

czyli

$$\rho=\pm\frac{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{f_{1,1}f_2^2-2f_{1,2}f_1f_2+f_{2,2}f_1^2},$$

Lecz

$$f_1^2 f_{2,2}+f_2^2 f_{1,1}-2f_1 f_2 f_{1,2}=-\begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2 \\ f_1, & f_{1,1}, & f_{1,2} \\ f_2, & f_{2,1}, & f_{2,2} \end{vmatrix}=\mathrm{V},$$

więc

$$\rho=\pm\frac{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{V}},$$

W razie, gdy (x_1, x_2) jest punktem przegięcia krzywej $f=0$,

$$\rho=\infty, \quad \text{czyli} \quad \mathrm{V}=0.$$

Gdy więc u jest jednorodną funkcyą zmiennych x_1, x_2, x_3, przechodzącą na funkcyę f, przy $x_3=1$, to powiemy, że: punkty przegięcia krzywej $f=0$, czyli $u=0$, są wyznaczone przez równania

$$f=0, \quad \mathrm{V}=0,$$

czyli, na mocy powyżej dowiedzionego, przez równania [1]

$$u=0, \qquad H=\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2}, & u_{1,3} \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & u_{2,3} \\ u_{3,1}, & u_{3,2}, & u_{3,3} \end{vmatrix}=0.$$

Lecz równanie $H=0$ przedstawia krzywą porządku $3(m-2)$-ego (§ 126), więc punkty przecięcia [2] krzywych $u=0$ i $H=0$ są jednocześnie punktami przegięcia danej krzywej [3] $u=0$, czyli: krzywa m-ego porządku posiada wogóle, co najwyżej, $3m(m-2)$ punktów przegięcia [4]. Jeśli $m=3$, to $3m(m-2)=9$, czyli krzywa trzeciego porządku posiada 9 punktów przegięcia. Zważywszy, że $H=0$ przedstawia krzywą trzeciego porządku i że dwie jakiekolwiek krzywe trzeciego porządku posiadają 9 punktów przecięcia, możemy wszystkie krzywe trzeciego porządku, przechodzące przez punkty przegięcia krzywej trzeciego porządku $u=0$, przedstawić przez równanie

$$\alpha u+\beta H=0,$$

przy dowolnych stałych α i β, oraz wnieść, że: wszystkie krzywe trzeciego porządku, które przechodzą przez 9 punktów

---

[1] Podstawiając w powyższe wyrażenie na ρ wartość dla V, która tu, według (2), jest:

$$V=-\frac{1}{(m-1)^2}H,$$

mamy (Hesse, l. c., str. 243)

$$\rho=\pm\frac{(m-1)^2(u_1^2+u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

[2] Liczba spólnych rozwiązań dwu równań: $u=0$ i $H=0$, jest iloczynem ich stopni, więc: $3m(m-2)$.

[3] Hesse, *Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung*. (Crelle, *Journal*, t. XXVIII, str. 104).

[4] Pluecker, *Solution d'une question fondamentale...* (Crelle, t. XII, str. 105).

przegięcia pewnej krzywej trzeciego porządku, przecinają się wzajemnie w punktach przegięcia [1].

Jeśli $n=4$, $x_4=1$, zaś x_1, x_2, x_3 są prostokątnemi spółrzędnemi bieżącemi punktu, to równanie

$$f=0,$$

przedstawia ogólne równanie powierzchni m-ego porządku. A gdy promienie krzywości dwu przęcięć głównych przez punkt (x_1, x_2, x_3) oznaczymy przez ρ_1 i ρ_2, to, według znanego wzoru [2],

$$\rho_1\rho_2=\frac{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}{V},$$

gdzie

$$V=-\begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2, & f_3 \\ f_1, & f_{1,1}, & f_{1,2}, & f_{1,3} \\ f_2, & f_{2,1}, & f_{2,2}, & f_{2,3} \\ f_3, & f_{3,1}, & f_{3,2}, & f_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Dla punktów tej powierzchni, w których jeden z promieni ρ_1 lub ρ_2 jest nieskończenie wielki, t. j. dla punktów przegięcia powierzchni (czyli jej punktów parabolicznych), jest więc $V=0$. Jeśli zatem przez u oznaczymy jednorodną funkcyę czterech zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4, przechodzącą na funkcyę f, przy

---

(1) Hesse, l. c., str. 107. Tę własność posiadają krzywe tylko trzeciego porządku, gdyż Hessian jest tegoż samego stopnia co funkcya tylko wtedy, gdy funkcya jest formą potrójną sześcienną, lub czwartego stopnia podwójną.

(2) Albo, według (2),

$$\rho_1\rho_2=-\frac{(m-1)^2(u_1+u_2^2+u_3^2)^2}{H}.$$

$x_4=1$, to powimy, że: punkty przegięcia powierzchni $f=0$, czyli $u=0$, są wyznaczone przez równania

$$f=0, \quad V=0,$$

czyli przez równania

$$u=0, \quad H=\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2}, & u_{1,3}, & u_{1,4} \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & u_{2,3}, & u_{2,4} \\ u_{3,1}, & u_{3,2}, & u_{3,3}, & u_{3,4} \\ u_{4,1}, & u_{4,2}, & u_{4,3}, & u_{4,4} \end{vmatrix}=0.$$

Równanie $H=0$ przedstawia powierzchnię porządku $4(m-2)$-ego (§ 126), więc: punkty przegięcia powierzchni m-ego porządku leżą na powierzchni porządku $4(m-2)$-ego (1), a linia przecięcia tych dwu powierzchni jest linią przegięcia powierzchni $u=0$, czyli linią jej punktów parabolicznych.

---

(1) Hesse, l. c., str. 104.

DODATEK I.

O WYZNACZNIKACH SZEŚCIENNYCH I WYZNACZNIKACH PORZĄDKU WYŻSZEGO.

1. Mając danych n^3 elementów, nazwijmy je tąż samą głoską z trzema wskaźnikami ([1]), np. $a_{i,j,k}$, umówiwszy się, aby

---

([1]) Znakowanie z trzema wskaźnikami spotykamy już u VANDERMOND'a w *Remarques sur les problèmes de situation* (*Mém. de l'ac. de Paris*, 1771), a następnie u SOMOV'a w *Mémoire sur les accélerations de divers ordres* (*Mém. de l'ac. de S. Pétersbourg*, t. VIII, 1864), co ich doprowadza do wyrażeń, będących wyznacznikami sześciennemi.

Badaniem własności wyznaczników sześciennych i porządku wyższego zajmowali się:

DE GASPARIS: *Sur le déterminants dont les élements ont plusieurs indices* («par Jean Blaise Grandpas», 1861); *Sopra due teoremi dei determinanti a tre indice ed un altra maniera di formazione de gli elementi di un determinante ad* m *indice* (*Rendiconti dell'ac. di Napoli*, t. VIII, 1868).

DAHLANDER: *Om en klass funktioner, hvilka ega flera egenskaper analoga med determinanternes.* (*Oefvers af K. Vet.-Ac.*, foerhendi. 1863).

ARMENANTE: *Sui determinanti cubici.* (BATAGLINI, *Giornale di matematiche*, t. VI, 1868).

PADOVA: *Sui determinanti cubici.* (BATAGLINI, *Giornale*, t. VI).

ZEHFUSS: *Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten*, (Frankfurt, 1868).

GARBIERI: *Determinanti formati di elementi con un numero qualunque d'indici* (BATAGLINI, t. XV, 1877).

GUENTHER (l. c., w drugiem wydaniu rozdział IX).

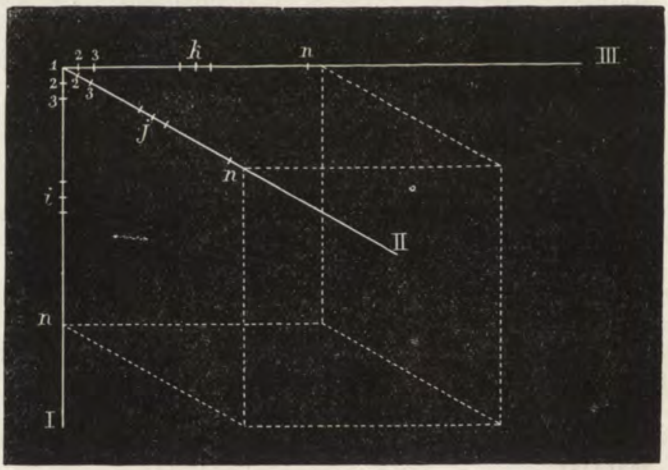
każdemu z tych trzech wskaźników nadawać każdą z n wartości

$$1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,n.$$

Aby jednak formuły były wyraźnemi, piszmy, zamiast $a_{i,j,k}$ wprost (i, j, k), albo nawet (ijk) w razie, gdy wszystkie wskaźniki są liczbami jednocyfrowemi, tak, że np.

$$a_{5,2,8} = (5,\ 2,\ 8) = (528).$$

2. Te n^3 elementów ustawmy w *stos sześcienny* tak, żeby wszystkie n^2 elementów, mających pierwszy wskaźnik i, były w jednej i tej samej płaszczyznie (warstwie) np. poziomej, od wierzchu i-ej, żeby nadto wszystkie n^2 elementów, mających ten sam drugi wskaźnik j, były w jednej i tej samej j-ej od



zewnątrz (z pewnej strony uważając) płaszczyznie pionowej, prostopadłej do płaszczyzny także pionowej od zewnątrz k-ej (z pewnej uważając strony), zawierającej n^2 elementów, posiadających ten sam wskaźnik trzeci k. Oznaczmy nadto kierunek, w którym od płaszczyzny do płaszczyzny zmienia się wskaźnik i od 1 do n, jakoteż te równoległe względem siebie płaszczyzny, przez I; kierunek, w którym się zmienia wskaźnik j od 1 do n, jakoteż odpowiednie równoległe względem siebie płaszczyzny, przez II; wreszcie kierunek, w którym się zmienia wskaźnik k od 1 do n, jakoteż odpowiednie równoległe względem siebie płaszczyzny, przez III. Te płaszczyzny I, II i III nazywać będziemy *płaszczyznami kierunkowemi*.

Tak np., gdy $n = 4$ ($n^3 = 64$), to układy elementów każdej z czterech płaszczyzn przedstawią się (uważając te płaszczyzny kolejno od góry) tak:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(111), & (112), & (113), & (114), & & & \\
 & (121), & (122), & (123), & (124), & & \\
 & & (131), & (132), & (133), & (134), & \\
 & & & (141), & (142), & (143), & (144); \\[1em]
(211), & (212), & (213), & (214), & & & \\
 & (221), & (222), & (223), & (224), & & \\
 & & (231), & (232), & (233), & (234), & \\
 & & & (241), & (242), & (243), & (244); \\[1em]
(311), & (312), & (313), & (314), & & & \\
 & (321), & (322), & (323), & (324), & & \\
 & & (331), & (332), & (333), & (334), & \\
 & & & (341), & (342), & (343), & (344); \\[1em]
(411), & (412), & (413), & (414), & & & \\
 & (421), & (422), & (423), & (424), & & \\
 & & (431), & (432), & (433), & (434), & \\
 & & & (441), & (442), & (443), & (444).
\end{array}
$$

3. Z tych n^3 elementów, w powyżej określony sposób ustawionych w stos sześcienny, czyli z tego *systematu sześciennego*

elementów, utwórzmy iloczyny po n elementów, wybranych tak, aby w każdy iloczyn weszły elementy z każdej z n płaszczyzn I, z każdej z n płaszczyzn II i z każdej z n płaszczyzn III, ale, aby w żadnym iloczynie nie było jednocześnie dwu elementów jednej oddzielnej którejkolwiek z tych płaszczyzn. Jednym z takich iloczynów będzie np. iloczyn

$$(1) \qquad (111)(222)(333)\ldots(nnn).$$

Jeśli nazwiemy liczbę

$$1.2.3\ldots n = \mathrm{N},$$

to takich różnych iloczynów będzie N^2. Wszystkie możemy wyprowadzić z iloczynu (1), niezmieniając jednych, np. drugich wskaźników, a przestawiając w nim naprzód np. pierwsze wskaźniki elementów między sobą, a w każdym z tak otrzymanych n iloczynów przestawiając wskaźniki trzecie między sobą.

Iloczyn (1) poprzedźmy przez znak $+$. Innym zaś w sposób, powyżej opisany, zeń utworzonym iloczynom nadajmy znak $+$ lub —, stosownie do tego, czy summa dwu liczb: liczby zmian w układzie pierwszych wskaźników i liczby zmian w układzie trzecich wskaźników, jest parzystą, czy nieparzystą. Tak np., przy $n=4$, iloczynowi

$$(414)(123)(331)(242)$$

wypadnie nadać znak —, gdyż w układzie pierwszych wskaźników 4132 jest zmian 4, a w układzie trzecich wskaźników 4312 jest zmian 5, zaś $4+5=9$, liczba nieparzysta.

4. Summa algebraiczna wszystkich tych N^2 różnych iloczynów po n elementów, poprzedzonych przez właściwe znaki, tworzy *wyznacznik sześcienny* (n-ego stopnia) danego systematu sześciennego n^3 elementów.

Tak np., gdy $n=3$, to mamy następujący wyznacznik sześcienny $3^3=27$ elementów o $(1.2.3)^2=36$ wyrazach:

$$D=\left|\begin{array}{ccccc}
(111), & (112), & (113), & & \\
 & (121), & (122), & (123), & \\
 & & (131), & (132), & (133) \\[1ex]
(211), & (212), & (213), & & \\
 & (221), & (222), & (223), & \\
 & & (231), & (232), & (233) \\[1ex]
(311), & (312), & (313), & & \\
 & (321), & (322), & (323), & \\
 & & (331), & (332), & (333)
\end{array}\right|$$

$$\begin{aligned}
=&+(111)(222)(333)-(111)(223)(332)-(112)(221)(333)\\
&+(112)(223)(331)+(113)(221)(332)-(113)(222)(331)\\
&-(111)(322)(233)+(111)(323)(232)+(112)(321)(233)\\
&-(112)(323)(231)-(113)(321)(232)+(113)(322)(231)\\
&-(211)(122)(333)+(211)(123)(332)+(212)(121)(333)\\
&-(212)(123)(331)-(213)(121)(332)+(213)(122)(331)\\
&+(211)(322)(133)-(211)(323)(132)-(212)(321)(133)\\
&+(212)(323)(131)+(213)(321)(132)-(213)(322)(131)\\
&+(311)(122)(233)-(311)(123)(232)-(312)(121)(233)\\
&+(312)(123)(231)+(313)(121)(232)-(313)(122)(231)\\
&-(311)(222)(133)+(311)(223)(132)+(312)(221)(133)\\
&-(312)(223)(131)-(313)(221)(132)+(313)(222)(131),
\end{aligned}$$

któryby można tak oznaczać

$$D = \Sigma \pm (111)(222)(333),$$

czyli właściwie

$$D = \Sigma \pm a_{1,1,1} a_{2,2,2} a_{3,3,3}.$$

5. Jeśli we wszystkich wyrazach wyznacznika przestawimy wzajemnie pewne dwa pierwsze wskaźniki elementów między sobą, to liczba zmian odpowiadających układowi pierwszych wskaźników elementów każdego wyrazu powiększy się o liczbę nieparzystą (§ 19), skutkiem czego summa liczby zmian pierwszych i trzecich wskaźników takoż powiększy się o liczbę nieparzystą, a tem samem wyrazy, które były dodatnemi, staną się, po owem przestawieniu wskaźników, odjemnemi, i wzajemnie.

Toż samo będzie, jeśli we wszystkich wyrazach wyznacznika wzajemnie przestawimy pewne dwa trzecie wskaźniki między sobą.

Gdybyśmy zaś we wszystkich wyrazach wyznacznika przestawili wzajemnie pewne dwa wskaźniki drugie między sobą, to zważmy, że przestawienie w jakimkolwiek wyrazie np.

$$(al\alpha)\ldots(dx\delta)\ldots(my\mu)\ldots(rn\rho) \tag{1}$$

dwu wskaźników drugich x i y,

$$(al\alpha)\ldots(dy\delta)\ldots(mx\mu)\ldots(rn\rho), \tag{2}$$

jest jednoznaczne z przestawieniem jednoczesnem w tymże iloczynie (1) dwu wskaźników pierwszych d i m oraz dwu wskaźników trzecich δ i μ,

$$(al\alpha)\ldots(mx\mu)\ldots(dy\delta)\ldots(rn\rho) \tag{3}$$

a wypadki tych działań, iloczyny (2) i (3), odróżniają się tylko porządkiem czynników. Liczba zaś zmian w układach pierwszych i trzecich iloczynu (3) powiększyła się, według powyższego, o summę pewnych dwu liczb nieparzystych, czyli iloczyny (3) i (1) są sobie równe i przez ten sam poprzedzone znak. Aże iloczyn (2) jest tymże samym iloczynem (3), więc i iloczyn (2) mieć będzie tenże sam znak, co iloczyn (1). Toż samo co do każdego wyrazu wyznacznika.

Według więc przyjętej tu zasady (nr. 3) przy określeniu wyrazów wyznacznika, wypada powiedzieć:

Wyznacznik sześcienny zmienia znak, jeśli wzajemnie przestawimy dwie płaszczyzny I, *lub też dwie płaszczyzny* III.

Wyznacznik sześcienny nie zmienia znaku, jeśli wzajemnie przestawimy dwie płaszczyzny II.

Będzie więc np. wyznacznik D nru 4-ego

$$D = -\left|\begin{array}{lllll}
(113), & (112), & (111) & & \\
 & (123), & (122), & (121) & \\
 & & (133), & (132), & (131) \\[1ex]
(213), & (212), & (211) & & \\
 & (223), & (222), & (221), & \\
 & & (233), & (232), & (231) \\[1ex]
(313), & (312), & (311) & & \\
 & (323), & (322), & (321) & \\
 & & (333), & (232), & (331)
\end{array}\right|$$

$$
=+\left|\begin{array}{lllll}
(111), & (112), & (113) & & \\
 & (131), & (132), & (133) & \\
 & & (121), & (122), & (123) \\
 & & & & \\
(211), & (212), & (213) & & \\
 & (231), & (232), & (233) & \\
 & & (221), & (222), & (223) \\
 & & & & \\
(311), & (312), & (313) & & \\
 & (331), & (332), & (333) & \\
 & & (321), & (322), & (323)
\end{array}\right|,
$$

czyli

$$
\Sigma\pm(111)(222)(333)=-\Sigma\pm(113)(222)(331)=
$$

$$
=+\Sigma\pm(111)(232)(323).
$$

Ztąd jeszcze wypada:

Wyznacznik sześcienny jest tożsamościowo równy zeru, jeśli dwie płaszczyzny I, *lubteż dwie płaszczyzny* III, *mają wszystkie elementy odpowiednio sobie równe.*

6. Zgodnie z wyżej podanym (nr. 3) sposobem tworzenia wyrazów wyznacznika z wyrazu głównego (111)(222)...(nnn), i na mocy drugiego z twierdzeń nru 5-ego możemy powiedzieć:

Wyznacznik sześcienny n-*ego stopnia może być przedstawiony jako summa* 1.2...n *zwykłych* (*płaskich*) *wyznaczników* n-*ego stopnia* ([1]), biorąc dla utworzenia oddzielnego wyznacznika

---

([1]) Dahlander, l. c., str. 300.

z każdej z równoległych (w pewnym kierunku) płaszczyzn kolejno coraz inne rzędy równoległe. Tak np.

$$\Sigma \pm (111)(222) = \begin{vmatrix} (111), & (112) \\ (221), & (222) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (121), & (122) \\ (211), & (212) \end{vmatrix},$$

$$\Sigma \pm (111)(222)(333) = \begin{vmatrix} (111), (112), (113) \\ (221), (222), (223) \\ (331), (332), (333) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (111), (112), (113) \\ (231), (232), (233) \\ (321), (322), (323) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (121), (122), (123) \\ (211), (212), (213) \\ (331), (332), (333) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (121), (122), (123) \\ (231), (232), (233) \\ (311), (312), (313) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (131), (132), (133) \\ (211), (212), (213) \\ (321), (322), (323) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (131), (132), (133) \\ (221), (222), (223) \\ (311), (312), (313) \end{vmatrix}$$

7. *Iloczyn dwu zwykłych (płaskich) wyznaczników jest wyznacznikiem sześciennym.*

Gdy mamy dwa zwykłe wyznaczniki n-ego stopnia:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & . & . & . & ,a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1}, & . & . & . & ,a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & . & . & . & ,b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n,1}, & . & . & . & ,b_{n,n} \end{vmatrix},$$

to ich iloczyn

$$AB = C = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \ldots + a_{1,n}b_{1,n}, \ldots, a_{1,1}b_{n,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,n} \\ a_{2,1}b_{1,1} + \ldots + a_{2,n}b_{1,n}, \ldots, a_{2,1}b_{n,1} + \ldots + a_{2,n}b_{n,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}b_{1,1} + \ldots + a_{n,n}b_{1,n}, \ldots, a_{n,1}b_{n,1} + \ldots + a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix},$$

jak wiemy (§§43, 44), rozłożony być może na n^n wyznaczników-składników (§ 28), z których tylko $1.2.3\ldots n$ jest różnych od zera (§ 30). — Utworzymy wyznacznik sześcienny D, którego równoległe w pewnym kierunku płaszczyzny niechaj będą utworzone przez elementy:

pierwsza $\quad a_{1,1}b_{1,1},\ a_{1,2}b_{1,2},\ \ldots, a_{1,n}b_{1,n},$

$$a_{2,1}b_{1,1},\ a_{2,2}b_{1,2},,\ \ldots, a_{2,n}b_{1,n},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_{n,1}b_{1,1},\ a_{n,2}b_{1,2},\ \ldots, a_{n,n}b_{1,n},$$

druga $\quad a_{1,1}b_{2,1},\ a_{1,2}b_{2,2},\ \ldots, a_{1,n}b_{2,n},$

$$a_{2,1}b_{2,1},\ a_{2,2}b_{2,2},\ \ldots, a_{2,n}b_{2,n},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_{n,1}b_{2,1},\ a_{n,2},b_{2,2},\ \ldots, a_{n,n}b_{2,n};$$

i t. d. (wogóle elementy i-ej płaszczyzny wyznacznika D są elementami wyznacznika A pomnożonemi: elementy pierwszej kolumny przez $b_{i,1}$, drugiej przez $b_{i,2}\ldots$ ostatniej przez $b_{i,n}$). Z tak utworzonego wyznacznika D biorąc z tych płaszczyzn kolejno coraz inne rzędy (kolumny owe) równoległe, otrzymamy [1], według ustępu poprzedzającego, $1.2\ldots n$ płaskich

---

[1] Padova, (l. c., str. 183).

wyznaczników składników, będących jednocześnie różnemi od zera wzmiankowanemi powyżej składnikami wyznacznika C. Zatem

$$AB = D.$$

8. Jeśli, rozwinąwszy wyznacznik sześcienny n-ego stopnia, oddzielimy wszystkie wyrazy, w które wchodzi element $a_{i,j,k}$, a w nich ten właśnie czynnik wyłączymy za nawias, to w nawiasie powstanie summa $\left(\frac{N}{n}\right)^2$ wyrazów, a w każdym wyrazie $n-1$ czynników, nienależących do i-ej z płaszczyzn I, ani do j-ej z płaszczyzn II, ani do k-ej z płaszczyzn III, tak, że wyrażenie w nawiasie będzie wyznacznikiem sześciennym $(n-1)$-ego stopnia stosu sześciennego elementów, powstałego z danego skutkie musunięcia i-ej płaszczyzny I, j-ej płaszczyzny II, oraz k-ej płaszczyzny III. Ten wyznacznik $(n-1)$-ego stopnia, może być wraz ze znakiem, z jakim go wziąć należy, wyrażony przez *pochodną danego wyznacznika sześciennego*

$$D = \Sigma \pm a_{1,1,1} \ldots a_{n,n,n}$$

względem (wyraźnego) $a_{i,j,k}$, to jest przez

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i,j,k}}.$$

Aby wyznaczyć znak, z jakim powinien być wzięty ten wyznacznik sześcienny $(n-1)$-ego stopnia, żeby przedstawiał dokładnie spółczynnik przy $a_{i,j,k}$ w danym wyznaczniku D, zważmy, że możemy j-ą z płaszczyzn II przestawiać kolejno z płaszczyznami równoległemi do niej, przed nią będącemi, co nie wpłynie na zmianę znaku (ustęp 5). Skutkiem tego przestawienia pierwszą pionową płaszczyzną II będzie

$$
\begin{array}{l}
a_{1,j,1},\ a_{1,j,2},\ldots,\ a_{1,j,k},\ldots,\ a_{1,j,n},\\
a_{2,j,1},\ a_{2,j,2},\ldots,\ a_{2,j,k},\ldots,\ a_{2,j,n},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{i,j,1},\ a_{i,j,2},\ldots,\ a_{i,j,k},\ldots,\ a_{i,j,n},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n,j,1},\ a_{n,j,2},\ldots,\ a_{n,j,k},\ldots,\ a_{n,j,n}.
\end{array}
$$

Gdybyśmy teraz i-ą poziomą płaszczyznę przesuwali w górę dotąd, dopóki ona nie stanie się pierwszą, to za każdem przestawieniem jej z płaszczyzną, nad nią będącą, wyznacznik zmienia znak (nr. 5); zatem, po uskutecznieniu tych $i-1$ przesunięć, wyznacznik zmieni $(i-1)$ razy swój znak (§ 25). Robiąc to samo następnie z k-tą pionową płaszczyzną III, znajdziemy, że wyznacznik zmieni znów swój znak $k-1$ razy. Ostatecznie więc [1] *spółczynnik przy* $a_{i,j,k}$ *w wyznaczniku sześciennym* D *będzie przez*

$$(-1)^{i-1+k-1}=(-1)^{i+k}$$

pomnożonym wyznacznikiem, powstającym z D, *przez opuszczenie* i-*ej płaszczyzny* I, j-*ej płaszczyzny* II, *oraz* k-*ej płaszczyzny* III.

To daje nam możność *rozłożenia wyznacznika sześciennego według* n^2 *elementów którejkolwiek z płaszczyzn kierunkowych.*

---

[1] Guenther przyjmuje inną zasadę rozumowania, co prowadzi go do błędnego twierdzenia, tak, że np. rozwinięcie wyznacznika $\Sigma\pm(111)(222)$ na str. 190 (l. c.) jest, co do znaków, inne, niż na str. 189, a w drugim wierszu rozwinięcia wyznacznika $\Sigma\pm(111)(222)(333)$ znaki (str. 190) powinny być wprost przeciwne. Armenante (l. c. str. 177), nieuwzględniając, że jeden szereg wskaźników winien być niezmienny, błędnie wyznacza znak.

Np. rozkładając wyznacznik $\Sigma\pm(111)(222)$ według elementów drugiej płaszczyzny I, mamy

$$\Sigma\pm(111)(222) = -(211)(122) + (212)(121) - (221)(112) + \\ + (222)(111).$$

9. Opierając się na tym rozkładzie wyznacznika sześciennego według elementów płaszczyzny kierunkowej, łatwo dowieść, że

Aby wyznacznik sześcienny pomnożyć przez jakąkolwiek ilość, należy przez nią pomnożyć wszystkie elementy jednej którejkolwiek z jego płaszczyzn kierunkowych.

Jeśli wszystkie elementy jednej płaszczyzny kierunkowej są summami m *składników, to wyznacznik dany może być rozłożony na summę* m *składników, z których każdy jest także wyznacznikiem sześciennym tegoż samego stopnia, co dany.*

Jeśli wszystkie elementy wyznacznika sześciennego z jednej strony którejkolwiek z płaszczyzn przekątnych stosu sześciennego elementów są zerami, to dany wyznacznik sześcienny redukuje się do poprzedzonego właściwym znakiem wyznacznika zwykłego (płaskiego) elementów, znajdujących się w owej płaszczyznie przekątnej.

10. Pochodna pierwsza wyznacznika sześciennego względem elementu przedstawia ilość, dołączoną w tym wyznaczniku do owego elementu (nr. 7). Podobnie znaleźlibyśmy, że m-ta pochodna wyznacznika sześciennego n-ego stopnia przedstawi dokładnie *wyznacznik dopełniający*, $(n-m)$-ego stopnia, odpowiedni *wyznacznik częściowy*, m-ego stopnia, danego wyznacznika sześciennego.

Przy pomocy tych wyznaczników częściowych moglibyśmy [1]

---

[1] Armenante (l. c., str. 180).

uskutecznić *rozkład wyznacznika sześciennego według wyznaczników częściowych pewnej kombinacyi płaszczyzn równoległych* (§ 51), odnaleść odpowiednie uogólnienie *twierdzenia wyznacznikowego* (§ 55), oraz różne odpowiednie wnioski wyprowadzić. Wyrażenia te jednak byłyby wielce złożone, a przedstawienie ich należyte nie byłoby tu całkiem usprawiedliwione ważnością ich zastosowań.

11. W podobny sposób, jak powyżej, przy pomocy trójwskaźnikowego znakowania elementów, doszliśmy do wyrażeń wyznacznikowych sześciennych, możemy również, oznaczając n^m elementów przez tę samą głoskę z m wskaźnikami, utworzyć wyrażenie, będące *wyznacznikiem* m-ego *porządku*, n-ego stopnia.

Jeśli same tylko wskaźniki, bez głoski, pisać będziemy, to wyraz główny takiego wyznacznika jest

$$+(1, 1, \ldots, 1_{(m)})(2, 2, \ldots, 2_{(m)})\ldots(n, n, \ldots, n_{(m)}).$$

Jako odpowiadającą rzędowi elementów w wyznacznikach płaskich, a płaszczyznie elementów w wyznacznikach sześciennych, przyjmiemy tu « warstwę » elementów posiadających pewien jeden (z któregokolwiek « szeregu » wskaźników) ten sam wskaźnik. W wyznaczniku jest więc n warstw « równoległych » w pewnym « kierunku, » a w każdej n^{m-1} elementów.

Aby z wyrazu głównego utworzyć pozostałe, przyjmijmy, że pewien np. q-y szereg wskaźników, t. j. $1_{(q)}, 2_{(q)}, \ldots, n_{(q)}$, wciąż pozostaje niezmiennym [1] (te n warstw q-ego kierunku nazy-

---

[1] Jeśli wyznacznik jest nieparzystego porządku, to najdogodniej przyjąć, że środkowe wskaźniki są nieporuszane przy rozwijaniu wyznacznika. Na niezmienność wskaźników pewnego szeregu zwrócił uwagę ZEHFUSS (l. c.), który, dla odróżnienia, oznacza je liczbami rzymskiemi.

wać będziemy «stałemi »). Przestawiajmy zaś we wszelki możliwy sposób: wskaźniki 1-ego szeregu między sobą, 2-go między sobą ,...,$(q-1)$-ego między sobą, $(q+1)$-ego między sobą ,..., m-ego między sobą. Skutkiem tego, jeśli nazwiemy

$$1.2...n = \mathrm{N},$$

wyznacznik mieć będzie

$$\mathrm{N}^{m-1}$$

wyrazów. Znak każdego wyrazu określimy w ten sposób. Jeśli w l-ych wskaźnikach ma miejsce p_l zmian, to wyraz posiada znak $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy odnosząca się do tego wyrazu summa

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{q-1} + p_{q+1} + \ldots + p_m$$

jest liczbą parzystą, czy nieparzystą.

Z tego jeszcze wypada, że:

Wyznacznik zmienia znak, jeśli dwa wskaźniki, odpowiadające pewnym warstwom nie będącym stałemi, wzajemnie jeden przez drugi we wszystkich wyrazach zastąpione zostaną.

Jeśli we wszystkich wyrazach wyznacznika wzajemnie jeden przez drugi zastąpione zostaną dwa wskaźniki, odpowiadające warstwom stałym, to wyznacznik, stosownie do parzystości lub nieparzystości jego porządku, zmienia znak, lub nie zmienia znaku.

Wyznacznik porządku parzystego jest zerem, gdy elementy dwu jakichkolwiek warstw równoległych są odpowiednio te same; w razie zaś nieparzystości jego porządku jest wtedy zerem, gdy owe o odpowiednio jednakowych elementach warstwy nie są warstwami stałemi.

Mnożąc wszystkie elementy pewnej warstwy wyznacznika przez ten sam czynnik, tem samem mnożymy dany wyznacznik przez ten czynnik.

Jeśli wszystkie elementy pewnych warstw $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ (równoległych lub nie) są summami odpowiednio $s_\alpha, s_\beta, \ldots, s_\varepsilon$ składników, to wyznacznik może być wyrażony jako summa $s_\alpha s_\beta \ldots s_\varepsilon$ składników wyznaczników (tegoż, co dany, porządku). —

Wyznacznik wyższego porządku można także rozłożyć według n^{m-1} elementów jakiejkolwiek, np. r-ej warstwy. Spółczynnik każdego elementu będzie wyznacznikiem tegoż samego porządku, lecz o jedność niższego stopnia, powstałym z danego przez opuszczenie m różnokierunkowych warstw, zawierających ów element, wziętym nadto z właściwym znakiem. Tak spółczynnik elementu

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots, i_m},$$

będzie miał znak [1] określony, przy m nieparzystem, przez

$$(-1)^{i_1 + \ldots + i_{q-1} + i_{q+1} + \ldots + i_r + \ldots i_m},$$

---

[1] Guenther (l. c., str. 194) podaje inne prawidło ogólne na określenie znaku tego spółczynnika. O błędności takowego przekonywa choćby ta okoliczność, że ono się nie sprawdza przy $m=2$, to jest, gdy dany wyznacznik jest płaskim.

Już po opracowaniu tego Dadatku doszła mnie praca Garbieri'ego, w której znajduje się inna ogólna formula na określenie tego znaku, zgodna jednak z podanemi powyżej. Gdy bowiem oznaczymy

$$i_1 + \ldots + i_q + \ldots + i_m = i,$$

to znak, według Garbieri'ego (l. c., str. 99), będzie (tak przy parzystem jak i nieparzystem m) określony przez

$$(-1)^{i+mi_q}.$$

a przy m parzystem, przez

$$(-1)^{i_1+\ldots+i_{q-1}+i_q+i_{q+1}+\ldots+i_r+\ldots+i_m}.$$

W razie, gdy elementy wyznacznika D są od siebie niezależne, to ten spółczynnik będzie wyrażony przez

$$\frac{\partial D}{\partial a_{i_1,\ldots,i_r,\ldots,i_m}}.$$

DODATEK II.

ZASTOWANIA WYZNACZNIKÓW DO GEOMETRYI[1].

I[2].

1. . . . .

Jeżeli oznaczymy

$$l_{0,0}=x\xi+y\eta+z\zeta, \quad l_{1,0}=x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta, \quad l_{2,0}=x_2\xi+y_2\eta+z_2\zeta,$$

$$l_{0,1}=x\xi_1+y\eta_1+z\zeta_1, \quad l_{1,1}=x_1\xi_1+y_1\eta_1+z_1\zeta_1, \quad l_{2,1}=x_2\xi_1+y_2\eta_1+z_2\zeta_1,$$

$$l_{0,2}=x\xi_2+y\eta_2+z\zeta_2, \quad l_{1,2}=x_1\xi_2+y_1\eta_2+z_1\zeta_2, \quad l_{2,2}=x_2\xi_2+y_2\eta_2+z_2\zeta_2,$$

---

(1) W badaniach geometrycznych tak przedstawienie związków, jak i ich przekształcanie i roztrząsanie znakomicie się ułatwia przez zastosowanie wyrażeń wyznacznikowych. Rozejrzeć się jednak w ogromie prac w tym kierunku, ugrupować ich rezultaty i takowe wykładem systematycznym powiązać ze sobą: praca-to wymagająca czasu bardzo wiele i odpowiednia przy opracowaniu oddzielnego studyum z takim celem. Ze ścieśnionego zaś założenia, jakie *tu* może być postawione, mianowicie : wskazać czytelnikowi zastosowania własności wyznaczników do badań geometrycznych najprostszych, najlepiej, zdaje się, można się wywiązać, podając wyjątki z kilku odpowiednich prac poważnych, z których pierwsza (2) powszechnie, jako klassyczna, jest uważana.

(2) Ustęp I stanowi przekład z opuszczeniem początku (określenie wyznacznika) i zakończenia (por. § 64) pracy Joachimsthal'a *Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie* (Crelle, *Journal*, t. XL, 1850 r,

(Wiele materyału odnoszącego się do najprostszych zastosowań wyznaczników do Geometryi, zgromadził Dostor *Eléments de la théorie des Déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace*. Paryż, 1877.

Wyznaczniki, jako jedno z narzędzi badania, są należycie uwzględnione w dziele ; Sągajło : *Zasady Geometryi analitycznej* według pracy Painvin'a. Część I. Paryż, 1877.

to mieć będziemy

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{0,0}, & l_{0,1}, & l_{0,2} \\ l_{1,0}, & l_{1,1}, & l_{1,2} \\ l_{2,0}, & l_{2,1}, & l_{2,2} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

czyli

$$\left\{x(y_1z_2 - z_1y_2) + y(z_1x_2 - x_1z_2) + z(x_1y_2 - x_2y_1)\right\}\left\{\xi(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1) + \right.$$

$$\left. + \eta(\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2) + \zeta(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\right\}$$

$$= l_{0,0}(l_{1,1}l_{2,2} - l_{2,1}l_{1,2}) + l_{1,0}(l_{2,1}l_{0,2} - l_{0,1}l_{2,2}) + l_{2,0}(l_{0,1}l_{1,2} - l_{1,1}l_{0,2}); \qquad (2)$$

a wzór podobny odnosi się również do wyznaczników jakiegokolwiek stopnia. Można tego wzoru dowieść, rozwiązując dwoma różnemi sposobami równania

$$\begin{aligned} h &= x\,U + y\,V + z\,W, & U &= \xi u + \xi_1 v + \xi_2 w, \\ h_1 &= x_1U + y_1V + z_1W, & V &= \eta u + \eta_1 v + \eta_2 w, \\ h_2 &= x_2U + y_2V + z_2W, & W &= \zeta u + \zeta_1 v + \zeta_2 w, \end{aligned}$$

gdzie u, v, w są niewiadomemi. Istotnie można albo zacząć od podstawienia wartości dla U, V, W w pierwszy układ, albo wyraziwszy U, V, W z pierwszego układu, podstawić wyrażenia znalezione w drugi układ. Porównywając wartości dla u, v, w, otrzymane temi dwiema drogami [1], albo tylko ich mianowniki, otrzymamy bezpośrednio wzór (1).

Pewien szczególny przypadek zasługuje jeszcze na uwagę. Przyjmując

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \text{etc. etc.};$$

kładąc nadto

$$\begin{aligned} s_0 &= x^2 + y^2 + z^2, & p_{0,1} &= xx_1 + yy_1 + zz_1, \\ s_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & p_{0,2} &= xx_2 + yy_2 + zz_2, \\ s_2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, & p_{1,2} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \end{aligned}$$

---

(1) Porównaj § 84.

ze związków (1) i (2) otrzymamy

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0, & p_{0,1}, & p_{0,2} \\ p_{0,1}, & s_1, & p_{1,2} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2 \end{vmatrix}; \qquad (3)$$

$$\{x(y_1z_2 - z_1y_2) + y(z_1x_2 - x_1z_2) + z(x_1y_2 - y_1x_2)\}^2$$
$$= s_0s_1s_2 - s_0p_{1,2}^2 - s_1p_{0,2}^2 - s_2p_{0,1}^2 + 2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}. \qquad (4)$$

Jest rownież

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & t \\ x_1, & y_1, & z_1, & t_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & t_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & t_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0, & p_{0,1}, & p_{0,2}, & p_{0,3} \\ p_{0,1}, & s_1, & p_{1,2}, & p_{1,3} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2, & p_{2,3} \\ p_{0,3}, & p_{1,3}, & p_{2,3}, & s_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Wartość wyznacznika po prawej jest

$$s_0s_1s_2s_3 - s_0s_1p_{2,3}^2 - s_2s_3p_{0,1}^2 + 2s_0p_{1,2}p_{1,3}p_{2,3} + p_{0,1}^2p_{2,3}^2 - 2p_{0,1}p_{2,3}p_{0,2}p_{1,3}$$
$$- s_0s_2p_{1,3}^2 - s_1s_3p_{0,2}^2 + 2s_1p_{0,2}p_{0,3}p_{2,3} + p_{0,2}^2p_{1,3}^2 - 2p_{0,1}p_{2,3}p_{0,3}p_{1,2}$$
$$- s_0s_3p_{1,2}^2 - s_1s_2p_{0,3}^2 + 2s_2p_{0,1}p_{0,3}p_{1,3} + p_{0,3}^2p_{1,2}^2 - 2p_{0,2}p_{1,3}p_{0,3}p_{1,2}$$
$$+ 2s_3p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}. \qquad (5 \text{ bis})$$

Wszystkie te związki mogą być zastosowane do formuł Geometryi analitycznej, przedstawiających się pod postacią wyznaczników. Przytoczę tylko dwa wzory, mianowicie : na pole trójkąta i na objętość ostrosłupa trójkątnego, wyrażone za pomocą spółrzędnych prostokątnych wierzchołków. Niechaj A przedstawia pole trójkąta o wierzchołkach (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2); jest wtedy

$$\pm 2\text{A} = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix}; \qquad (6)$$

albo, gdy początek jest w jednym z wierzchołków,

$$\pm 2\text{A} = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix}.$$

Objętość ostrosłupa, którego jeden z wierzchołków jest w początku układu może być wyrażona przez wzór znany

$$\pm 6P = x(y_1z_2 - y_2z_1) + y(z_1x_2 - x_1z_2) + z(x_1y_2 - x_2y_1) = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix},$$

a w przypadku ogólnym przez wzór

$$\pm 6P = \begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Po podaniu tych zasad, przechodzę do rzeczy.

2. Zagadnienie. — Wyrazić pole trójkąta za pomocą równań trzech boków.

Równania boków niechaj będą

$$\left\{ \begin{aligned} l\xi + m\eta + n &= 0, \\ l'\xi + m'\eta + n' &= 0, \\ l''\xi + m''\eta + n'' &= 0, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

a (x, y) punkt przecięcia drugiej i trzeciej prostej, (x', y') wierzchołek przeciwległy drugiej prostej i (x'', y'') trzeci wierzchołek trójkąta. Będziemy mieć widocznie dziewięć równań

$$\begin{array}{lll} lx + my + n = p, & lx' + my' + n = 0, & lx'' + my'' + n = 0, \\ l'x + m'y + n' = 0, & l'x' + m'y' + n' = p', & l'x'' + m'y'' = n' = 0, \\ l''x + m''y + n'' = 0, & l''x' + m''y' + n'' = 0, & l''x'' + m''y'' + n'' = p'', \end{array}$$

gdzie p, p' i p'' oznaczają trzy ilości różne od zera, których wartości niżej oznaczymy.

Utwórzmy wyznacznik stron lewych i wyznacznik stron prawych i porównajmy te wyrażenia. Wyznacznik prawych stron

$$\begin{vmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & p', & 0 \\ 0, & 0, & p'' \end{vmatrix}$$

jest $pp'p''$. Wyznacznik stron lewych, według (1), może być rozłożony na dwa czynniki

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ l'', & m'', & n'' \end{vmatrix},$$

z których pierwszy, bez względu na znak, jest podwójnem polem trójkąta danego, czyli $= \pm 2A$. Pisząc

$$N = \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ l'', & m'', & n'' \end{vmatrix} = l(m'n''-m''n')+l'(m''n-mn'')+l''(mn'-m'n), \tag{9}$$

mieć będziemy

$$\pm 2NA = pp'p''. \tag{10}$$

Wartość dla p znajdziemy, rugując x i y z równań

$$lx+my+n-p=0,$$
$$l'x+m'y+n' \quad =0,$$
$$l''x+m''y+n'' \quad =0,$$

albo, co wychodzi na jedno, podstawiając $n-p$ zamiast n w równanie $N=0$. To nam daje

$$N=(l'm''-m'l'')p \quad \text{i również}$$
$$N=(l''m-lm'')p',$$
$$N=(lm'-ml')p'';$$

$$A=\pm\frac{1}{2}\frac{N^2}{(l'm''-l''m')(l''m-lm'')(lm'-l'm)}=\pm\frac{1}{2}\frac{N^2}{\frac{\partial N}{\partial n}\frac{\partial N}{\partial n'}\frac{\partial N}{\partial n''}}. \tag{11}$$

Przydatek (1). Łatwo teraz znaleźć wartości boków.

---

(1) «Corollaire.»

Niechaj f będzie długością boku przedstawionego przez pierwsze równanie (8), a π odpowiadającą wysokością; mieć będziemy

$$f\pi = 2\Lambda,$$

$$\pi = \pm \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \pm \frac{p}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \pm \frac{\mathrm{N}}{\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial n}\sqrt{l^2 + m^2}},$$

zkąd

$$f = \pm \frac{\sqrt{l^2 + m^2}\,\mathrm{N}}{\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial n'}\,\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial n''}}.$$

3. Zagadnienie. — Znaleźć objętość ostrosłupa trójkątnego z równań ścian.

Równania czterech ścian niechaj będą

$$\left\{\begin{aligned} a\xi + a'\eta + a''\zeta + a''' &= 0, \\ b\xi + b'\eta + b''\zeta + b''' &= 0, \\ c\xi + c'\eta + c''\zeta + c''' &= 0, \\ d\xi + d'\eta + d''\zeta + d''' &= 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

a (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') wierzchołki odpowiednio przeciwległe. Możnaby ustanowić szesnaście równań, podobnych dziewięciu równaniom nru poprzedzającego, i otrzymać za pomocą takiegoż samego postępowania

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'', & a''' \\ b, & b', & b'', & b''' \\ c, & c', & c'', & c''' \\ d, & d', & d'', & d''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \end{vmatrix} = pp'p''p''', \tag{13}$$

gdzie

$$p = ax + a'y + a''z + a''',$$

$$p' = bx + b'y + b''z + b''' \text{ etc. etc.}$$

Nazywając głoską N pierwszy wyznacznik wzoru (13), mamy

$$\mathrm{N} = a'''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial a'''} + b'''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial b'''} + c'''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial c'''} + d'''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial d'''},$$

gdyż wyznacznik N jest liniowy względem ilości a''', b''', c''', d'''. Lecz ponieważ p jest dane przez równanie $N=0$, w którem a''' zostało zastąpione przez $a'''-p$, to znajdziemy

$$p=\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial a'''}};\quad p'=\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial b'''}};\quad p''=\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial c'''}};\quad p'''=\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial d'''}}.$$

Wyznacznik drugi wzoru (13), bez względu na znak, przedstawia sześć razy wziętą objętość P ostrosłupa; mieć więc będziemy

$$P=\pm\frac{1}{6}\frac{N^3}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\frac{\partial N}{\partial b'''}\frac{\partial N}{\partial c'''}\frac{\partial N}{\partial d'''}}. \tag{14}$$

Oto jest formuła żądana.

Przydatek. Jeśli A, B, C, D są pola czterech ścian odpowjadających czterem równaniom (12), i jeśli π jest wysokość opuszczona na ścianę A, mają miejsce równania następujące

$$3P=\pi A;$$

$$\pi=\pm\frac{ax+a'y+a''z+a'''}{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}=\pm\frac{p}{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}=\pm\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}};$$

skutkiem czego

$$\left\{\begin{aligned}
A&=\pm\frac{1}{2}N^2\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}{\frac{\partial N}{\partial b'''}\frac{\partial N}{\partial c'''}\frac{\partial N}{\partial d'''}} \quad \text{i również}\\
B&=\pm\frac{1}{2}N^2\frac{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2}}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\frac{\partial N}{\partial c'''}\frac{\partial N}{\partial d'''}},\\
C&=\pm\frac{1}{2}N^2\frac{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\frac{\partial N}{\partial b'''}\frac{\partial N}{\partial d'''}},\\
D&=\pm\frac{1}{2}N^2\frac{\sqrt{d^2+d'^2+d''^2}}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\frac{\partial N}{\partial b'''}\frac{\partial N}{\partial c'''}}.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

To są wyrażenia ścian.

Porównywając iloczyn ABC z P^2, mamy

$$P^2 = \pm \frac{2}{9} ABC \sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)}\,\frac{\partial N}{\partial d'''}. \quad (16)$$

Załóżmy (co jest oczywiście możliwem), że a, a', a'' są dostawami kątów, jakie prostopadła, opuszczona z początku na ścianę A, tworzy z kierunkami dodatnemi osi, i tož samo co do ścian B i C. Nazwijmy prócz tego kąty dwuścienne między ścianami B i C, C i A, A i B odpowiednio przez l, m, n i przyjmijmy początek układu we wnętrzu ostrosłupa. Będzie wtedy

$$a^2+a'^2+a''^2 = b^2+b'^2+b''^2 = c^2+c'^2+c''^2 = 1;$$

$$bc + b'c' + b''c'' = -\cos l;$$

$$ca + c'a' + c''a'' = -\cos m;$$

$$ab + a'b' + a''b'' = -\cos n.$$

Tworząc wyznacznik N, znajdujemy

$$\frac{\partial N}{\partial d''} = a(b'c''-b''c') + b(c'a''-c''a') + c(a'b''-a''b').$$

Kwadrat tego wyrażenia przy pomocy związku (4) przekształconym być może na

$$(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2) - (a^2+a'^2+a''^2)(bc+b'c'+b''c'')$$
$$-(b^2+b'^2+b''^2)(ca+c'a'+c''a'')-(c^2+c'^2+c''^2)(ab+a'b'+a''b'')$$
$$+2(ab+a'b'+a''b'')(ac+a'c'+a''c'')(bc+b'c'+b''c'')$$
$$=1-\cos l^2-\cos m^2-\cos n^2-2\cos l\cos m\cos n,$$

zkąd wypada

$$P^2 = \frac{2}{9} ABC\sqrt{1-\cos l^2-\cos m^2-\cos n^2-2\cos l\cos m\cos n}: \quad (17)$$

wzór, którym objętość ostrosłupa przedstawioną jest przez trzy ściany i kąty dwuścienne, jakie one tworzą.

Później wrócimy do ostrosłupa, a teraz przejdziemy do innych zagadnień, które mogą być rozwiązane za pomocą wzorów (3) i (4).

4. Zagadnienie. Znaleźć promień koła, przechodzącego przez trzy dane punkty.

Jedyna trudność jest znaleźć tu postępowanie symetryczne dla wyrugowania ilości α i β z trzech równań

$$\left\{\begin{aligned} &(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0,\\ &(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-r^2=0.\\ &(x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2-r^2=0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Gdy przyjmiemy

$$N=\begin{vmatrix} x-\alpha, & y-\beta, & r\sqrt{-1}\\ x'-\alpha, & y'-\beta, & r\sqrt{-1}\\ x''-\alpha, & y''-\beta, & r\sqrt{-1} \end{vmatrix},$$

to według (3) i (4), mamy

$$N^2=\begin{vmatrix} s_0 & , p_0 & , p_{0,2}\\ p_{0,1}, & s_1 & , p_{1,2}\\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2 \end{vmatrix},$$

gdzie

$$\left\{\begin{aligned} s_0 &= (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2,\\ p_{0,1} &= (x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)-r^2,\\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Lecz ze względu na równania (18), jest

$$s_0=s_1=s_2=0,$$

$$-2p_{0,1}+s_0+s_1=(x-x')^2+(y-y')^2,$$

więc

$$p_{0,1}=-\frac{1}{2}\{(x-x')^2+(y-y')^2\}=-\frac{1}{2}h^2,$$

jak również

$$p_{0,2}=-\frac{1}{2}g^2;\qquad p_{1,2}=-\frac{1}{2}f^2,$$

gdzie f, g, h są trzema bokami trójkąta, utworzonego przez punkty dane. Ztąd zatem wypada

$$N^2 = \begin{vmatrix} 0 \; , & -\frac{1}{2}h^2, & -\frac{1}{2}g^2 \\ -\frac{1}{2}h^2, & 0 \; , & -\frac{1}{2}f^2 \\ -\frac{1}{2}g^2, & -\frac{1}{2}f^2, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}f^2g^2h^2.$$

Lecz jest

$$N = \begin{vmatrix} x-\alpha, & y-\beta, & r\sqrt{-1} \\ x'-\alpha, & y'-\beta, & r\sqrt{-1} \\ x''-\alpha, & y''-\beta, & r\sqrt{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\,, & y\,, & r\sqrt{-1} \\ x', & y', & r\sqrt{-1} \\ x'', & y'', & r\sqrt{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{-1}.r \begin{vmatrix} x\,, & y\,, & 1 \\ x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \end{vmatrix} = 2r\sqrt{-1}.A,$$

gdzie A jest polem trójkąta. Zatem $-\frac{1}{4}f^2g^2h^2 = (2r\sqrt{-1}A)^2$, czyli

$$r = \frac{fgh}{4A}. \tag{19}$$

Przydatek 1-y. Wzór poprzedzający, wyrażający twierdzenie dobrze znane, bezpośrednio prowadzi do równania promienia koła stycznego do trzech innych kół.

Niechaj O będzie środkiem a ρ promieniem koła dotykającego w ten sam sposób trzy okręgi kół, z założenia zewnętrzne jedne względem drugich; niechaj nadto a i b będą dwoma punktami styczności, r i r' promieniami odpowiednich kół, zaś A i B ich środkami. W dwóch trójkątach AOB i aOb, mających spólny kąt O, jest

$$\sin\frac{1}{2}O = \frac{1}{2}\frac{ab}{\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{AB^2-(AO-BO)^2}{AO.BO}}. \tag{19*}$$

Lecz $AO - BO = \pm(r-r')$, a pierwiastek z mianownika przedstawia długość stycznej zewnętrznej, wziętą między dwoma punktami styczności. Zatem, oznaczając przez F, G, H odległości środków A, B, C od środka koła szukanego, przez f, g, h spólne styczne zewnętrzne, w powyższy sposób określone, a przez f', g', h' odległości bc, ca, ab, gdzie a, b, c są punktami styczności okręgu koła (O) z okręgami kół (A), (B), (C), mieć będziemy, według (19*)

$$\frac{f'}{\rho} = \frac{f}{\sqrt{(\mathrm{GH})}}; \quad \frac{g'}{\rho} = \frac{g}{\sqrt{(\mathrm{FH})}}; \quad \frac{h'}{\rho} = \frac{h}{\sqrt{(\mathrm{FG})}},$$

a ze względu na wzór (19)

$$f'^2 g'^2 h'^2 = \rho^2 \{(f' + g' + h')(f' + g' - h')(f' - g' + h')(-f' + g' + h')\},$$

gdzie pole A trójkąta jest wyrażone przez jego boki. Podstawiając tu wartości poprzedzające, mamy

$$f^2 g^2 h^2 = (f\sqrt{\mathrm{F}} + g\sqrt{\mathrm{G}} + h\sqrt{\mathrm{H}})(f\sqrt{\mathrm{F}} + g\sqrt{\mathrm{G}} - h\sqrt{\mathrm{H}})(f\sqrt{\mathrm{F}} - g\sqrt{\mathrm{G}} + h\sqrt{\mathrm{H}}).$$
$$.(-f\sqrt{\mathrm{F}} + g\sqrt{\mathrm{G}} + h\sqrt{\mathrm{H}}). \qquad (19 \text{ bis})$$

Ta uwagi godna formuła daje promień ρ, gdyż trzy odległości niewiadome F, G, H zależą od czterech promieni ρ, r, r', r'' przez związki

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \rho \pm r, \\ \mathrm{G} &= \rho \pm r' \\ \mathrm{H} &= \rho \pm r''. \end{aligned} \qquad (20)$$

Jeśli koło szukane nie dotyka wszystkich okręgów w ten sam sposób, to dwie z pośród ilości f, g, h staną się stycznemi spólnemi wewnętrznemi. Jeśli koła nie są zewnętrznemi jedne względem drugich, to trzeba uskutecznić niezbędne zmiany, które bez trudności znaleźć można.

Przydatek 2-i. Postępowanie symetryczne, któregośmy tu stosowali, daje nam także możność rozwiązania zagadnienia odnoszącego się do ellipsy, podobnego do powyżej rozwiniętego.

5. Zagadnienie. Wyznaczyć pole trójkąta wpisanego w ellipsę.

Niechaj (x, y), (x', y'), (x'', y'') będę trzema punktami ellipsy

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0; \qquad (21)$$

a im przeciwległe cięciwy między temi punktami niech będą odpowiednio f, g, h; połowy średnic równoległych do f, g, h niechaj będą odpowiednio D, D′, D″, zaś A polem trójkąta wpisanego. Nazwijmy

$$\mathrm{N} = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{y}{b}, & \sqrt{-1} \\ \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & \sqrt{-1} \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & \sqrt{-1} \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{-1}}{ab}\mathrm{A};$$

zatem

$$\mathrm{N}^2 = \begin{vmatrix} s_0\ , & p_{0,1}, & p_{0,2} \\ p_{0,1}, & s_1\ , & p_{1,2} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2 \end{vmatrix}, \qquad \text{gdzie} \left\{ \begin{array}{l} s_0 \ = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1, \\ p_{0,1} = \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} - 1, \\ \quad \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

Mając na uwadze równanie ellipsy, mamy $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ i $\mathrm{N} = 2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}$. Lecz

$$-2p_{0,1} + s_0 + s_1 = \frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2} = \frac{h^2}{\mathrm{D}''^2},$$

czyli

$$p_{0,1} = -\frac{1}{2}\,\frac{h^2}{\mathrm{D}''^2}, \quad \text{i} \quad \mathrm{N}^2 = 2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2} = -\frac{1}{4}\,\frac{f^2g^2h^2}{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2\mathrm{D}''^2}.$$

Ztąd wypada

$$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\,ab\,\frac{fgh}{\mathrm{DD}'\mathrm{D}''}, \tag{22}$$

to jest:

Podwójne pole trójkąta wpisanego w ellipsę tak się ma do iloczynu osi, jak iloczyn jego boków do iloczynu średnic do nich równoległych.

Przydatek 1-y. Dla koła, przez teżsame punkty przechodzącego, mieć będziemy

$$a = b = \mathrm{D} = \mathrm{D}' = \mathrm{D}'' = r,$$

gdzie r jest promień koła: więc

$$\mathrm{A} = \frac{fgh}{4r}.$$

Dzieląc ten związek, który jest związkiem (19), przez (22), otrzymujemy

$$r = \frac{DD'D''}{ab}, \tag{23}$$

to jest :

Promień koła przechodzącego przez trzy punkty ellipsy jest równy iloczynowi połów średnic równoległych do boków trójkąta wpisanego, podzielonemu przez iloczyn połów osi.

Przydatek 2-i. Równanie przecięcia ostrokręgowego, odniesionego do jednego z ognisk, jako początku,

$$x^2 + y^2 - \lambda^2(x+p)^2 = 0,$$

nadaje się do rachunku podobnego do powyżej rozwiniętego. Niechaj s, t, u będą trzema cięciwami poprowadzonemi przez ognisko i równoległemi do trzech boków trójkąta wpisanego, Q czwartą cięciwą przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do osi wielkiej, a r promieniem koła przechodzącego przez wierzchołki trójkąta wpisanego; mieć będziemy

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{stu}{Q}}. \tag{24}$$

Przydatek 3-i. Wzory poprzedzające są możliwe do uogólnienia, które w krótkości wyłożę.

Niechaj

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

będzie równaniem przecięcia ostrokręgowego, a (x, y), (x', y'), (x'', y'') trzema jakiemikolwiek punktami, leżącemi lub nie leżącemi na tem przecięciu. Przyjmijmy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = s, \qquad \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1 = p_{1,2},$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = s_1, \qquad \frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} - 1 = p_{2,0},$$

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 = s_2, \qquad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = p_{0,1}.$$

Kładąc nadto

$$\mathrm{N} = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{y}{b}, & 1 \\ \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & 1 \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & 1 \end{vmatrix} = \pm 2\frac{\mathrm{A}}{ab};\ \mathrm{N}' = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{y}{b}, & -1 \\ \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & -1 \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & -1 \end{vmatrix} = \mp 2\frac{\mathrm{A}}{ab},$$

gdzie A jest polem trójkąta utworzonego przez te trzy punkty, mamy

$$\mathrm{NN}' = -\frac{4\mathrm{A}^2}{a^2b^2}.$$

Lecz według (1)

$$\mathrm{NN}' = \begin{vmatrix} s_0, & p_{0,1}, & p_{0,2} \\ p_{0,1}, & s_1, & p_{1,2} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2 \end{vmatrix},$$

więc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(ab)\left\{-s_0s_1s_2 + s_0p_{1,2}^2 + s_1p_{0,2}^2 + s_2p_{0,1}^2 - 2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Ten wzór obejmuje wielką liczbę przypadków. Dla trójkąta wpisanego mamy $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ i otrzymujemy formuły już rozwinięte. Dla trójki punktów sprzężonych, t. j. takich trzech punktów, które mają własność, że biegunowa każdego punktu przechodzi przez dwa pozostałe, mieć będziemy $p_{0,1} = p_{0,2} = p_{1,2} = 0$ i $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(ab)(s_0s_1s_2)^{\frac{1}{2}}$. Lecz wyrażenie $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ oznacza odległość punktu od środka przecięcia ostrokręgowego, podzieloną przez połowę średnicy, mającej tenże kierunek co owa odległość; zatem:

Jeśli e, e_1, e_2 są odległościami trzech punktów sprzężonych od środka przecięcia ostrokręgowego, d, d_1, d_2 połowami średnic, mających tenże kierunek co odległości e, e_1, e_2, to pole trójkąta między temi punktami sprzężonemi jest

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}ab\sqrt{-\left(\frac{e^2}{d^2}-1\right)\left(\frac{e_1^2}{d_1^2}-1\right)\left(\frac{e_2^2}{d_2^2}-1\right)}, \quad (26)$$

gdzie a i b są połowami osi przecięcia ostrokręgowego.

Przejdźmy teraz do kuli i do ostrosłupa.

6. ZAGADNIENIE. — Znaleźć promień kuli przechodzącej przez cztery punkty dane:

Niechaj będzie λ odległością punktów (x_3, y_3, z_3) i (x, y, z),

λ' » » (x_2, y_2, z_2) i (x_1, y_1, z_1);

μ » » (x_3, y_3, z_3) i (x_1, y_1, z_1),

μ' » » (x_2, y_2, z_2) i (x, y, z);

ν » » (x_3, y_3, z_3) i (x_2, y_2, z_2),

ν' » » (x, y, z) i (x_1, y_1, z_1);

wtedy λ i λ', μ i μ', ν i ν' będą przeciwległemi krawędziami ostrosłupa trójkątnego między czterema punktami danemi. Postępowanie przy rugowaniu α, β, γ z czterech równań

$$\left\{\begin{array}{l}
(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=0,\\
(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2-r^2=0,\\
(x_2-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2+(z_2-\gamma)^2-r^2=0,\\
(x_3-\alpha)^2+(y_3-\beta)^2+(z_3-\gamma)^2-r^2=0,
\end{array}\right.$$

jest takież samo, jak w nrze 4ym. Przyjmijmy

$$N=\begin{vmatrix}
x-\alpha, & y-\beta, & z-\gamma, & r\sqrt{-1}\\
x_1-\alpha, & y_1-\beta, & z_1-\gamma, & r\sqrt{-1}\\
x_2-\alpha, & y_2-\beta, & z_2-\gamma, & r\sqrt{-1}\\
x_3-\alpha, & y_3-\beta, & z_3-\gamma, & r\sqrt{-1}
\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}
x, & y, & z, & r\sqrt{-1}\\
x_1, & y_1, & z_1, & r\sqrt{-1}\\
x_2, & y_2, & z_2, & r\sqrt{-1}\\
x_3, & y_3, & z_3, & r\sqrt{-1}
\end{vmatrix}=\pm 6rP\sqrt{-1},$$

gdzie P jest objętością ostrosłupa trójkątnego. Owóż, według (5),

$$N^2 = \begin{vmatrix} s_0, & p_{0,1}, & p_{0,2}, & p_{0,3} \\ p_{0,1}, & s_1, & p_{1,2}, & p_{1,3} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2, & p_{2,3} \\ p_{0,3}, & p_{1,3}, & p_{2,3}, & s_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & -\frac{1}{2}\nu'^2, & -\frac{1}{2}\mu'^2, & -\frac{1}{2}\lambda^2 \\ -\frac{1}{2}\nu'^2, & 0, & -\frac{1}{2}\lambda'^2, & -\frac{1}{2}\mu^2 \\ -\frac{1}{2}\mu'^2, & -\frac{1}{2}\lambda'^2, & 0, & -\frac{1}{2}\nu^2 \\ -\frac{1}{2}\lambda^2, & -\frac{1}{2}\mu^2, & -\frac{1}{2}\nu^2, & 0 \end{vmatrix}$$

gdyż $s_0 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0$, jak również s_1, s_2, s_3, zaś $2p_{0,1} = 2(x-\alpha)(x_1-\alpha) + 2(y-\beta)(y_1-\beta) + 2(z-\gamma)(z_1-\gamma) - 2r^2$

$$= -\left\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right\} + s_0 + s_1 = -r'^2$$

i podobnież dla $p_{0,2}$, $p_{0,3}$, $p_{1,2}$, $p_{1,3}$, $p_{2,3}$. Ztąd wypada

$$-36r^2P^2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0, & -\nu'^2, & -\mu'^2, & -\lambda^2 \\ -\nu'^2, & 0, & -\lambda'^2, & -\mu^2 \\ -\mu'^2, & -\lambda'^2, & 0, & -\nu^2 \\ -\lambda^2, & -\mu^2, & -\nu^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wartość ostatniego wyznacznika może być wypisaną według (5 bis); otrzymamy mianowicie

$$-(24rP)^2 = \lambda^4\lambda'^4 + \mu^4\mu'^4 + \nu^4\nu'^4 - 2\mu^2\mu'^2\nu^2\nu'^2 - 2\nu^2\nu'^2\lambda^2\lambda'^2 - 2\lambda^2\lambda'^2\mu^2\mu'^2,$$

$$r = \frac{1}{24P}\sqrt{(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')(\lambda\lambda'+\mu\mu'-\nu\nu')(\lambda\lambda'-\mu\mu'+\nu\nu')(-\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')}. \qquad (27)$$

P. Crelle pierwszy podał tę godną uwagi postać tego związku, który bez trudności otrzymać można za pomocą takiego postępowania przy rugowaniu, z jakiegosmy zrobili użytek.

Przydatek 1-y. Można otrzymać wzór podobny do (22), odnoszący się do objętości ostrosłupa trójkątnego wpisanego w ellipsoidę. Niechaj (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), etc., będą czterema punktami na ellipsoidzie

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0,$$

a L, L′, M, M′, N, N′ połowami średnic równoległych do krawędzi $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$; znajdziemy za pomocą rachunku podobnego do nru 5-go, dla objętości ostrosłupa

$$\mathrm{P}=\frac{1}{24}(abc)\left\{\left(\frac{\lambda\lambda'}{\mathrm{LL}'}+\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'}+\frac{\nu\nu'}{\mathrm{NN}'}\right)\left(\frac{\lambda\lambda'}{\mathrm{LL}'}+\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'}-\frac{\nu\nu'}{\mathrm{NN}'}\right)\left(\frac{\lambda\lambda'}{\mathrm{LL}'}-\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'}+\frac{\nu\nu'}{\mathrm{NN}'}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{\lambda\lambda'}{\mathrm{LL}'}+\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'}+\frac{\nu\nu'}{\mathrm{NN}'}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

Oznaczmy pierwiastek tego wzoru przez T a piewiastek wzoru (27) przez S, wtedy promień kuli przechodzącej przez cztery punkty ellipsoidy będzie

$$r=\frac{1}{abc}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{T}}. \qquad (29)$$

Jeżeli cztery punkty, zamiast być rozmieszczonemi na powierzchni, tworzą systemat punktów sprzężonych, to objętość ostrosłupa, przez nie wyznaczonego, będzie

$$\mathrm{P}=\frac{1}{6}(abc)\sqrt{-\left(\frac{e^2}{d^2}-1\right)\left(\frac{e_1^2}{d_1^2}-1\right)\left(\frac{e_2^2}{d_2^2}-1\right)\left(\frac{e_3^2}{d_3^2}-1\right)}, \qquad (30)$$

gdzie e, e_1, e_2, e_3 są odległościami czterech punktów od środka powierzchni, a d, d_1, d_2, d_3 połowami średnic o tym samym co odległość kierunku. — Mimochodem zauważę, że trzy wierzchołki trójkąta mogą być zawsze uważane jako trzy punkty, sprzężone względem koła o środku rzeczywistym i promieniu rzeczywistym lub urojonym, co nie ma miejsca dla ostrosłupa i kuli, chyba że cztery wysokości spotykają się w tym samym punkcie.

Przydatek 2-i. Dodam jeszcze wzór na objętość P ostrosłupa, którego jeden wierzchołek jest w środku ellipsojdy, a trzy pozostałe na jej powierzchni.

Nazwijmy

$$\mathrm{N}_0 = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{y}{b}, & \frac{z}{c} \\ \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & \frac{z'}{c} \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & \frac{z''}{c} \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} \frac{\mathrm{P}}{abc}.$$

Niechaj λ, μ, ν będą trzema bokami podstawy, przeciwległemi odpowiednim wierzchołkom (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), a L, M, N, połowami średnic odpowiednio równoległych; wtedy jest

$$\frac{\lambda^2}{\mathrm{L}^2} = \frac{(x'-x'')}{a^2} + \frac{(y'-y'')}{b^2} + \frac{(z'-z'')^2}{c^2}$$

$$= 2\left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2} - \frac{z'z''}{c^2}\right)$$

i również dla $\frac{\mu^2}{\mathrm{M}^2}$, $\frac{\nu^2}{\mathrm{N}^2}$; albo też

$$\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mathrm{L}^2},$$

$$\frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} + \frac{z''z}{c^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\mathrm{M}^2}.$$

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\mathrm{N}^2}.$$

Lecz

$$\mathrm{N}_0^2 = \begin{vmatrix} s_0, & p_{0,1}, & p_{0,2} \\ p_{0,1}, & s_1, & p_{1,2} \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & s_2 \end{vmatrix},$$

gdzie

$$\begin{cases} s_0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{etc.} \\ p_{0,1} = \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} + \dfrac{zz'}{c^2} = 1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\nu^2}{N^2}, \quad \text{etc.,} \end{cases}$$

$$\left(\pm\frac{6P}{abc}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & , 1 - \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{N^2}, & 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{M^2} \\ 1 - \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{N^2}, & 1 & , 1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L^2} \\ 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{M^2}, & 1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L^2}, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\lambda^4}{4L^4} - \frac{\mu^4}{4M^4} - \frac{\nu^4}{4N^4} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2L^2M^2} + \frac{\lambda^2\nu^2}{2L^2N^2} + \frac{\mu^2\nu^2}{2M^2N^2} - \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{4L^2M^2N^2},$$

z tem

$$P = \frac{1}{12}(abc)\left[\left(\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} - \frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L} - \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right)\right. \tag{31}$$

$$\left.\times\left(-\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right) - \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{L^2M^2N^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Założywszy, że trzy punkty (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') są na płaszczyznie średnicowej, mieć będziemy $P = 0$, zaś

$$\left(\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} - \frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L} - \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right)\left(-\frac{\lambda}{L} + \frac{\mu}{M} + \frac{\nu}{N}\right) = \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{L^2M^2N^2}. \tag{32}$$

Jest to wzór na wyrażenie związku między trzema bokami trójkąta wpisanego w ellipsę i połowami średnic równoległych.

7. *Uwagi nad formułami poprzedzającemi. Warunki znajdowania się czterech punktów na okręgu koła i pięciu punktów na powierzchni kuli.* Wyznaczniki, które się przedstawiały w dotychczasowych rachunkach, są albo wyznacznikami o elementach nierównych, albo też wyznacznikami symetrycznemi ze względu na przekątną, jak wyznaczniki prawych stron wzorów (3) i (5), a w niektórych z nich elementy przekątnej, któreśmy oznaczali przez s_0, s_1, s_2, s_3, stawały się zerami. Zastanawiając się nad zagadnieniami, któreśmy tylkoco roztrząsali, spostrzedz można,

że w tych wszystkich, które się rozwiązują przy pomocy wyznaczników ogólnych, istnieje analogia między trójkątem i kołem z jednej strony, a ostrosłupem i kulą z drugiej strony. Lecz za każdym razem, gdy pewna własność dwu płaskich figur może być okazana za pomocą wyznacznika postaci

$$\begin{vmatrix} 0, & c, & b \\ c, & 0, & a \\ b, & a, & 0 \end{vmatrix}$$

(a to są, na nieszczęście, własności najcenniejsze i najszykowniejsze), analogia i prostota ustają dla figur w przestrzeni. Różnica zależy tu więc od tego faktu analitycznego, że wyznacznik trzeciego stopnia, któryśmy wypisali, jest równy $2abc$, iloczynowi wymiernemu względem elementów, gdy tymczasem wyznacznik czwartego stopnia

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & 0, & c', & b' \\ b, & c', & 0, & a' \\ c, & b', & a', & 0 \end{vmatrix} = a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 - 2aa'bb' - 2aa'cc' - 2bb'cc' \quad (33)$$

rozkłada się tylko na czynniki niewymierne.

Aby powyższe uwagi objaśnić na nowym przykładzie, zbadajmy warunki, pod jakiemi cztery punkty będą na okręgu koła, jakoteż pięć punktów na powierzchni kuli. Dla koła należy wyrugować α, β i γ z czterech równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ x_1^2 + y_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma = 0. \end{cases}$$

Wiemy, że rezultatem rugowania jest

$$\begin{vmatrix} (x^2 + y^2), & x, & y, & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2), & x_1, & y_1, & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2), & x_2, & y_2, & 1 \\ (x_3^2 + y_3^2), & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

albo

$$0=(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix}.$$

Za pomocą takiegoż rachunku znajdziemy dla kuli

$$(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + (x_4^2+y_4^2+z_4^2)\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

to jest :

Gdy a, b, c, d są cztery punkty na okręgu koła, a o punkt jakikolwiek, to będzie

$$\Sigma \pm oa^2. \text{ trójkąt } bcd = 0, \tag{34}$$

jak również dla pięciu punktów a, b, c, d, e na powierzchni kuli :

$$\Sigma \pm oa^2. \text{ ostrosłup } bcde = 0. \tag{35}$$

Te dwa twierdzenia, odnoszące się do koła i do kuli, były zaznaczone przez p. LUCHTERHANDT'a (tom XXIII, CRELLE, *Journal*). Zdaje się, że zbytecznem jest robić uwagę, że w dwu summach, z których jedna ma cztery, a druga pięć wyrazów, znaki trafnie mają być wzięte. Ich analogia pochodzi ztąd, że oba one są wyprowadzone z wyznaczników ogólnych.

Lecz jakkolwiek szykownym jest wzór (34), to jednak nie przedstawia on, jak wiadomo, najprostszego warunku dla czterech punktów na kole. Żeby zeń otrzymać inny, należy się zwrócić do rezultatów nru 4go, otrzymanych z wyznaczników pewnej szczególnej postaci. Mamy dla promienia koła przechodzącego przez a, b, c :

$$r = \frac{ab.\ ac.\ bc}{4.\ \text{trójkąt}\ abc},$$

a dla czwartego punktu d tegoż koła

$$r = \frac{ab.ad.bd}{4.\ \text{trójkąt}\ abd},$$

zatem

$$\frac{ac.bc}{\text{trójkąt}\ abc} = \frac{ad.bd}{\text{trójkąt}\ abd}, \tag{36}$$

co prowadzi do warunku

$$\sin acb = \sin adb,$$

czyli : dwa kąty acb, adb są kątami albo równemi, albo spełniającemi się. Stosując takież postępowanie do kuli i robiąc użytek ze związku (27), otrzymamy wprawdzie wzór analogiczny ze wzorem (36), lecz niższy odeń pod względem szykowności. Mianowicie, aby pięć punktów a, b, c, d, e znajdowały się na tej samej kuli, potrzeba, aby

$$\frac{1}{\text{ostrosłup}\ abcd}\Big\{(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')(\lambda\lambda' + \mu\mu' - \nu\nu')(\lambda\lambda' - \mu\mu' + \nu\nu')(-\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\text{ostrosłup}\ abce}\Big\{(l\lambda' + m\mu' + n\nu')(l\lambda' + m\mu' - n\nu')(l\lambda' - m\mu' + n\nu')(-l\lambda' + m\mu' + n\nu')\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\lambda' = cb, \qquad \lambda = ad, \qquad l = ae,$$

$$\mu' = ca, \qquad \mu = bd, \qquad m = be,$$

$$\nu' = ab, \qquad \nu = cd, \qquad n = ce,$$

lecz z tego związku nie można wyciągnąć żadnego wniosku ważnego ze względu na kąty figury.

Przydatek. Przyjmując w związku (34) środek koła za punkt o, otrzymujemy zeń tożsamość. Żeby zaradzić tej niedogodności, należy zamiast pól trójkątów postawić iloczyny boków, co jest możliwem, gdyż te cztery punkty są na tym samym okręgu: skutkiem tego otrzymamy

$$\Sigma \pm oa^2 . bc . cd . bd = 0,$$

albo

$$\Sigma \pm \frac{oa^2}{ab . ac . ad} = 0.$$

Żeby ustalić wybór znaków, przyjmijmy, że a i c, b i d są przeciwległemi wierzchołkami czworokąta wypukłego; wtedy mieć będziemy

$$\frac{1}{ac}\left\{\frac{oa^2}{ab . ad} + \frac{oc^2}{cb . cd}\right\} = \frac{1}{ba}\left\{\frac{ob^2}{ba . bc} + \frac{od^2}{da . dc}\right\}. \qquad (37)$$

Ten wzór nie jest pozbawiony ważności w teoryi koła. Daje on np. stosunek przekątnych ac i bd, jeśli o jest środkiem. Jeśli punkt jest w jednym z wierzchołków, to wzór ten przedstawia twierdzenie Ptolomeusza.

8. *Kąty dwuścienne ostrosłupa.* Oznaczmy przez A, B, C, D cztery ściany ostrosłupa trójkątnego, a jego kąty dwuścienne

między	B	i	C	przez	l,	między	D	i	A	przez	l',
»	C	»	A	»	m,	»	D	»	B	»	m',
»	A	»	B	»	n,	»	D	»	C	»	n',

przez $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ odpowiednie krawędzie. Teorya rzutów prostokątnych daje nam wzory znane

$$\begin{aligned}
-\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos n + \mathrm{C}\cos m + \mathrm{D}\cos l' &= 0,\\
\mathrm{A}\cos n - \mathrm{B} + \mathrm{C}\cos l + \mathrm{D}\cos m' &= 0,\\
\mathrm{A}\cos m + \mathrm{B}\cos l - \mathrm{C} + \mathrm{D}\cos n' &= 0,\\
\mathrm{A}\cos l' + \mathrm{B}\cos m' + \mathrm{C}\cos n' - \mathrm{D} &= 0.
\end{aligned} \qquad (38)$$

Wypadek rugowania A, B, C, D daje

$$\begin{vmatrix} -1, & \cos n, & \cos m, & \cos l' \\ \cos n, & -1, & \cos l, & \cos m' \\ \cos m, & \cos l, & -1, & \cos n' \\ \cos l', & \cos m', & \cos n', & -1 \end{vmatrix} = 0. \tag{38*}$$

Bardzo łatwo można wyznaczyć wartość tego wyznacznika za pomocą wzoru (5 bis); ztąd dojdzie się do wzoru znanego, otrzymanego przez wielu Geometrów, z których tu tylko wskażę na autora Geometryi położenia. Podobny wzór dla trójkąta

$$0 = \begin{vmatrix} -1, & \cos n, & \cos m \\ \cos n, & -1, & \cos l \\ \cos m, & \cos l, & -1 \end{vmatrix} = -1 + \cos n^2 + \cos m^2 + \cos l^2 + 2\cos l \cos m \cos n$$

wskazuje, że summa kątów stanowi dwa kąty proste. Lecz chociaż nie istnieje związek podobny dla kątów dwuściennych, wszystkie jednak wzory między trzema kątami, których summa stanowi dwa kąty proste, znajdą sobie podobne dla kątów dwuściennych ostrosłupa. Rozwinę kilka z nich.

Przyjmijmy:

$$\alpha = 1 - \cos l^2 - \cos m'^2 - \cos n'^2 - 2\cos l \cos m' \cos n',$$

$$\beta = 1 - \cos l'^2 - \cos m^2 - \cos n'^2 - 2\cos l' \cos m \cos n',$$

$$\gamma = 1 - \cos l'^2 - \cos m'^2 - \cos n^2 - 2\cos l' \cos m' \cos n,$$

$$\delta = 1 - \cos l^2 - \cos m^2 - \cos n^2 - 2\cos l \cos m \cos n,$$

gdzie α, β, γ, δ mogą być bez trudności przekształcone na iloczyny.

Otrzymamy według (17)

$$P^2 = \frac{2}{9}\,ABC\sqrt{\delta} = \frac{2}{9}\,ABD\sqrt{\gamma} = \frac{2}{9}\,ACD\sqrt{\beta} = \frac{2}{9}\,BCD\sqrt{\alpha},$$

więc

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{B}{\sqrt{\beta}} = \frac{C}{\sqrt{\gamma}} = \frac{D}{\sqrt{\delta}}, \tag{39}$$

i, mając na uwadze związki (38);

$$\left\{\begin{aligned}\sqrt{\alpha} &= \sqrt{\beta}\cos n + \sqrt{\gamma}\cos m + \sqrt{\delta}\cos l',\\ \sqrt{\beta} &= \sqrt{\alpha}\cos n + \sqrt{\gamma}\cos l + \sqrt{\delta}\cos m',\\ \sqrt{\gamma} &= \sqrt{\alpha}\cos m + \sqrt{\beta}\cos l + \sqrt{\delta}\cos n',\\ \sqrt{\delta} &= \sqrt{\alpha}\cos l' + \sqrt{\beta}\cos m' + \sqrt{\gamma}\cos n'.\end{aligned}\right. \tag{40}$$

Te wzory są tylko przekształceniami związku (38); istnieje analogia między niemi i wzorem $\sin l = \sin(m+n)$, albo

$$\sqrt{(1-\cos l^2)} = \cos n\sqrt{(1-\cos m^2)} + \cos m\sqrt{(1-\cos n^2)},$$

dla trójkąta płaskiego.

Uwaga. Wzór (39) przedstawia pewne uogólnienie twierdzenia o stosunku boków trójkąta płaskiego; jest inne jeszcze, które, jestem tego pewny, nie mogło nie zwrócić uwagi Geometrów, lecz którego, nie przypominam sobie, bym gdzie znalazł. Mamy według znanego twierdzenia

$$P = \frac{2}{3}\,BC\,\frac{\sin l}{\lambda} = \frac{2}{3}\,AD\,\frac{\sin l'}{\lambda},$$

zatem

$$P^2 = \frac{4}{9}\,ABCD\,\frac{\sin l \sin l'}{\lambda\lambda'}, \tag{41}$$

zkąd otrzymujemy

$$\frac{\lambda\lambda'}{\sin l \sin l'} = \frac{\mu\mu'}{\sin m \sin m'} = \frac{\nu\nu'}{\sin n \sin n'}, \tag{42}$$

to jest:

Iloczyny krawędzi przeciwległych są proporcyonalne do iloczynów wstaw im przeciwległych kątów dwuściennych.

Do innych twierdzeń dojdziemy za pomocą następującego postępowania. Z początku spółrzędnych prostokątnych, który przyjmujemy wewnątrz ostrosłupa, opuśćmy prostopadłe na ściany A, B, C, D, i niechaj będą

$$\alpha',\ \alpha'',\ \alpha''';\quad \beta',\ \beta'',\ \beta''';\quad \gamma',\ \gamma'',\ \gamma''';\quad \delta',\ \delta'',\ \delta'''$$

dostawami kątów między osiami dodatnemi i prostopadłemi. Przyjmijmy

$$N=\begin{vmatrix} A\alpha', & A\alpha'', & A\alpha''', & A\sqrt{-1} \\ B\beta', & B\beta'', & B\beta''', & B\sqrt{-1} \\ C\gamma', & C\gamma'', & C\gamma''', & C\sqrt{-1} \\ D\delta', & D\delta'', & D\delta''', & D\sqrt{-1} \end{vmatrix} \tag{43}$$

$$=A\sqrt{-1}\begin{vmatrix} B\beta', & B\beta'', & B\beta''' \\ C\gamma', & C\gamma'', & C\gamma''' \\ D\delta', & D\delta'', & D\delta''' \end{vmatrix} - B\sqrt{-1}\begin{vmatrix} A\alpha', & A\alpha'', & A\alpha''' \\ C\gamma', & C\gamma'', & C\gamma''' \\ D\delta', & D\delta'', & D\delta''' \end{vmatrix} + \ldots.$$

albotež, za pomocą związków (14), (15), (16)

$$\pm N=\frac{2}{9}(A+B+C+D)P^2\sqrt{-1}. \tag{44}$$

Podnosząc do kwadratu, otrzymujemy wyznacznik, którego tylko pierwszy wiersz wypiszę:

$$A^2(\alpha'^2+\alpha''^2+\alpha'''^2-1),\qquad AB(\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta'''-1),$$
$$AC(\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma'''-1),\qquad AD(\alpha'\delta'+\alpha''\delta''+\alpha'''\delta'''-1).$$

Lecz

$$\alpha'^2+\alpha''^2+\alpha'''^2-1=0,\ \text{a}\ \alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta'''=-\cos n,$$
$$\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma'''=-\cos m,\ \text{etc.},$$

zatem

$$\begin{vmatrix} 0 & ,-AB(1+\cos n), & -AC(1+\cos m), & -AD(1+\cos l') \\ -AB(1+\cos n), & 0 & ,-BC(1+\cos l), & -BD(1+\cos m') \\ -AC(1+\cos m), & -BC(1+\cos l), & 0 & ,-CD(1+\cos n') \\ -AD(1+\cos l'), & -BD(1+\cos m'), & -CD(1+\cos n'), & 0 \end{vmatrix}=N^2. \tag{45}$$

Kładąc $2\cos\frac{1}{2}n^2$ zamiast wyrażeń $(1+\cos n)$ etc., i obliczając wyznacznik według wzoru (33), otrzymujemy

$$N^2=-16A^2B^2C^2D^2U,$$

gdzie

$$\begin{aligned}U = &\left(\cos\frac{1}{2}l\ \cos\frac{1}{2}l' + \cos\frac{1}{2}m\ \cos\frac{1}{2}m' + \cos\frac{1}{2}n\ \cos\frac{1}{2}n'\right)\\ &\times\left(\cos\frac{1}{2}l\ \cos\frac{1}{2}l' + \cos\frac{1}{2}m\ \cos\frac{1}{2}m' - \cos\frac{1}{2}n\ \cos\frac{1}{2}n'\right)\\ &\times\left(\cos\frac{1}{2}l\ \cos\frac{1}{2}l' - \cos\frac{1}{2}m\ \cos\frac{1}{2}m' + \cos\frac{1}{2}n\ \cos\frac{1}{2}n'\right)\\ &\times\left(-\cos\frac{1}{2}l\ \cos\frac{1}{2}l' + \cos\frac{1}{2}m\ \cos\frac{1}{2}m' + \cos\frac{1}{2}n\ \cos\frac{1}{2}n'\right).\end{aligned}$$

Wypada ztąd

$$\left\{\frac{2}{9}(A+B+C+D)P\sqrt{-1}\right\}^2 = -16A^2B^2C^2D^2U,$$

więc

$$P^2 = \frac{8}{9}\ \frac{ABCD}{A+B+C+D}\sqrt{U}. \tag{46}$$

Lecz mamy według (17)

$$AP^2 = \frac{2}{9}\,ABCD\sqrt{\alpha},$$

jak również podobne wyrażenia dla BP^2, CP^2, DP^2; zatem, biorąc summę i dzieląc przez (46),

$$4\sqrt{U} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}. \tag{47}$$

Oto jest nowe równanie między sześciu kątami dwuściennemi ostrosłupa, przedstawiające analogię ze związkiem między trzema kątami trójkąta :

$$\sin l + \sin m + \sin n = 4\cos\frac{1}{2}l\cos\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}n.$$

Przenosząc początek, z któregośmy opuścili prostopadłe na ściany, do jednej z przestrzeni ograniczonych przez nieskończenie przedłużone ściany płaszczyzn, otrzymamy inne wzory, podobne do poprzedzających.

Przydatek. Przy stosowaniu tegoż samego postępowania rachunkowego do trójkąta, wzór (45) staje się

$$\mathrm{N}=\left\{2(a+b+c)\mathrm{A}\sqrt{-1}\right\}^2$$

$$=\begin{vmatrix} 0, & -ab(1+\cos n), & -ac(1+\cos m) \\ -ab(1+\cos n), & 0, & -bc(1+\cos l) \\ -ac(1+\cos m), & -bc(1+\cos l), & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0, & -\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2], & -\frac{1}{2}[(a+c)^2-b^2] \\ -\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2], & 0, & -\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2] \\ -\frac{1}{2}[(a+c)^2-b^2], & -\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2], & 0 \end{vmatrix}$$

albo

$$\mathrm{A}^2=\frac{[(b+c)^2-a^2][(c+a)^2-b^2][(a+b)^2-c^2]}{16(a+b+c)^2},$$

gdzie A jest polem, zaś a, b, c bokami trójkąta. Znosząc w mianowniku czynniki licznika, otrzymujemy znany wzór na pole wyrażone przez boki.

9. *Wzory różne odnoszące się do ostrosłupa trójkątnego.* Poprzedzające wzory dają sposób bardzo prosty dla wyrażenia krawędzi, ścian i objętości ostrosłupa przez promień kuli opisanej i przez kąty dwuścienne. Dodam jeszcze te związki, choćby dla zachęcenia do znalezienia szykowniejszych.

Zestawiając wzory (27) i (41), mamy

$$r=\frac{16}{81}\,\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2}{24\mathrm{P}^5}\sqrt{\mathrm{V}},$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathrm{V}= &(\sin l\sin l'+\sin m\sin m'+\sin n\sin n')(\sin l\sin l'+\sin m\sin m'-\sin n\sin n') \\ &\times(\sin l\sin l'-\sin m\sin m'+\sin n\sin n')(-\sin l\sin l'+\sin m\sin m' \\ &+\sin n\sin n').\end{aligned} \tag{48}$$

Lecz można przyjąć $A^2P^4=\frac{4}{81}A^2B^2C^2D^2\alpha$ (17); skutkiem czego

$$6Pr=\frac{A^2}{\alpha}\sqrt{V}=\frac{B^2}{\beta}\sqrt{V}=\frac{C^2}{\gamma}\sqrt{V}=\frac{D^2}{\delta}\sqrt{V}. \tag{49}$$

Ztąd wypada

$$216P^3r^3=\frac{A^2B^2C^2V^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta\gamma}.$$

Lecz według (17)

$$P^4=\frac{4}{81}A^2B^2C^2\delta,$$

zatem

$$P=\frac{32}{3}\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{V^{\frac{3}{2}}}r^3. \tag{50}$$

Po podstawieniu tych wartości w równania (49), one stają się

$$\left\{\begin{aligned} A&=\frac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\alpha}, & C&=\frac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\gamma},\\ B&=\frac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\beta}, & D&=\frac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\delta}.\end{aligned}\right. \tag{51}$$

Według wzoru, z któregośmy już robili użytek, mamy

$$P=\frac{2}{3}BC\frac{\sin l}{\lambda}=\frac{2}{3}AD\frac{\sin l'}{\lambda'},$$

zatem

$$\left\{\begin{aligned} \lambda&=4r\sqrt{\frac{\beta\gamma}{V}}\sin l, & \lambda'&=4r\sqrt{\frac{\alpha\delta}{V}}\sin l',\\ \mu&=4r\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{V}}\sin m, & \mu'&=4r\sqrt{\frac{\beta\delta}{V}}\sin m',\\ \nu&=4r\sqrt{\frac{\alpha\beta}{V}}\sin n, & \nu'&=4r\sqrt{\frac{\gamma\delta}{V}}\sin n'.\end{aligned}\right. \tag{52}$$

Co się tyczy kątów utworzonych przez krawędzie przeciwległe, to one są dane przez wzory wyprowadzone z pewnego twierdzenia odnoszącego się do wyznaczników, lecz odmiennego od twierdzenia o mnożeniu. Ten wzór, który daje twierdzenie o mnożeniu, jak to zaraz okażę (1), jest

$$(\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta''')(\gamma'\delta'+\gamma''\delta''+\gamma'''\delta''')-$$
$$-(\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma''')(\beta'\delta'+\beta''\delta''+\beta'''\delta''')=(\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma'')(\beta''\delta'''-\beta'''\delta'')$$
$$+(\alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma''')(\beta'''\delta'-\beta'\delta''')+(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')(\beta'\delta''-\beta''\delta'). \tag{53}$$

Przyjmując oznaczenia nru poprzedzającego, znajdziemy, że ilości $\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''$, $\alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma'''$, $\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma'$ są proporcyonalne do dostaw linii prostopadłej do linij

$$x:y:z=\alpha':\alpha'':\alpha''',$$
$$x:y:z=\gamma':\gamma'':\gamma''',$$

które przedstawiają prostopadłe do ścian A i C ostrosłupa; zatem $\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''$, etc., będą proporcyonalne do dostaw kątów między krawędzią μ, linii przecięcia dwu ścian A i C, a osiami. Znajdziemy podług znanych metod

$$\cos(\mu, x)=\frac{\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''}{\sqrt{(\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma'')^2+(\alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma''')^2+(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')^2}}$$
$$=\frac{\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''}{\sqrt{(\alpha'^2+\alpha''^2+\alpha'''^2)(\gamma'^2+\gamma''^2+\gamma'''^2)-(\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma''')^2}}$$
$$=\frac{\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''}{\sqrt{1-\cos m^2}},$$

zatem

$$\alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma''=\pm\sin m\cos(\mu, x), \qquad \beta''\delta'''-\beta'''\delta''=\sin m'\cos(\mu', x),$$
$$\alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma'''=\pm\sin m\cos(\mu, y), \qquad \beta'''\delta'-\beta'\delta'''=\sin m'\cos(\mu', y),$$
$$\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma'=\pm\sin m\cos(\mu, z), \qquad \beta'\delta''-\beta''\delta'=\sin m'\cos(\mu', z).$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy z równania (53)

$$\cos n\cos n'-\cos l\cos l'=\sin m\sin m'\cos(\mu, \mu') \tag{54}$$

---

(1) Porównaj § 64 i drugi odsyłacz na str. 548.

zatem

$$\cos(\mu, \mu') = \frac{\cos n \cos n' - \cos l \cos l'}{\sin m \sin m'}.$$

Przez zamianę głosek znajdziemy $\cos(\lambda, \lambda')$, $\cos(\nu, \nu')$, a dodając te wzory otrzymamy

$$\sin l \sin l' \cos(\lambda, \lambda') + \sin m \sin m' \cos(\mu, \mu') + \sin n \sin n' \cos(\nu, \nu') = 0. \qquad (55)$$

Wzór podobny, mianowicie

$$\lambda\lambda' \cos(\lambda, \lambda') + \mu\mu' \cos(\mu, \mu') + \nu\nu' \cos(\nu, \nu') = 0 \qquad (56)$$

podał Carnot (*Mém. sur la relation qui existe entre les distances de 5 points*). Lecz ponieważ iloczyny wstaw, $\sin l \sin l'$, są proporcyonalne do iloczynów krawędzi, to jeden z tych wzorów prowadzi za sobą drugi. Związek biegunowy wzoru (54), mianowicie wzór między sześciu odległościami czterech punktów kuli i kątem utworzonym przez przedłużenia boków przeciwległych lub przez przekątne, zawdzięczamy p. Gauss'owi (zob. *Considerationes generales circa superficies curvas*, § 2. form. VI). Mam zasadę mniemać, że postępowanie dla dojścia do wzoru (54) jest toż samo, którem się kierował ten znakomity Geometra.

Dla wyrażenia najkrótszych odległości krawędzi przeciwległych, należy za punkt wyjścia wziąć wzór znany

$$\frac{1}{6} \lambda\lambda' f \sin(\lambda, \lambda') = T,$$

gdzie f przedstawia najkrótszą odległość między λ i λ'.

Przydatek 1szy. Niechaj f, g, h będą najkrótszemi odległościami krawędzi przeciwległych, zaś a, b, c, d czterema wysokościami ostrosłupa; bardzo łatwo będzie dowieść związku

$$\frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}. \qquad (57)$$

Przydatek 2i. . . . .

II[1].

1. Wyrażenie dla promienia koła, stycznego do trzech kół danych, może być wyprowadzone w następujący sposób. Niechaj

$$a_1,\ b_1,\ r_1; \qquad a_2,\ b_2,\ r_2; \qquad a_3,\ b_3,\ r; \qquad u,\ v,\ \mathrm{H}$$

będą spółrzędne środka i promienie trzech kół danych i koła szukanego. Oznaczmy dla krótkości

$$(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2-(r_2-r_3)^2=\mathrm{A},$$

$$(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2-(r_3-r_1)^2=\mathrm{B},$$

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-(r_1-r_2)^2=\mathrm{C},$$

$$-\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2+2\mathrm{BC}+2\mathrm{CA}+2\mathrm{AB}=\mathrm{D},$$

$$(-\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\mathrm{A}r_1+(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})\mathrm{B}r_2+(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{C}r_3=\mathrm{E},$$

$$\begin{vmatrix} u-a_1, & v-b_1, & r_1+\mathrm{H} \\ u-a_2, & v-b_2, & r_2+\mathrm{H} \\ u-a_3, & v-b_3, & r_3+\mathrm{H} \end{vmatrix}=\mathrm{S}.$$

Otrzymamy wtedy, mnożąc wiersze przez wiersze,

$$\mathrm{S}^2=\begin{vmatrix} u-a_1, & v-b_1, & r_1+\mathrm{H} \\ u-a_2, & v-b_2, & r_2+\mathrm{H} \\ u-a_3, & v-b_3, & r_3+\mathrm{H} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1-u, & b_1-v, & r_1+\mathrm{H} \\ a_2-u, & b_2-v, & r_2+\mathrm{H} \\ a_3-u, & b_3-v, & r_3+\mathrm{H} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0\ , & \frac{1}{2}\mathrm{C}, & \frac{1}{2}\mathrm{B} \\ \frac{1}{2}\mathrm{C}, & 0\ , & \frac{1}{2}\mathrm{A} \\ \frac{1}{2}\mathrm{B}, & \frac{1}{2}\mathrm{A}, & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\mathrm{ABC}. \tag{1}$$

---

(1) Jest-to przekład artykułu MERTENS'a : *Auszug aus einem Schreiben des Herrn Mertens an den Herausgeber*. (CRELLE, *Journal*, t. LXXVII, 1874 r.), który przedstawia niejako dopełnienie powyższej pracy JOACHIMSTHAL'a.

Z drugiéj jednak strony, wyznacznik S oraz podwójne pole trójkąta, utworzonego przez środki trzech kół danych, mogą być przywiedzione do postaci

$$S=\begin{vmatrix} 1, & 0 & , 0 & , 0 \\ 0, & u-a_1, & v-b_1, & r_1+H \\ 0, & u-a_2, & v-b_2, & r_2+H \\ 0, & u-a_3, & v-b_3, & r_3+H \end{vmatrix}, \qquad 2\Delta=\begin{vmatrix} 0, & 0 & , 0 & , & -1 \\ 1, & a_1-u, & b_1-v, & & r_1+H \\ 1, & a_2-u, & b_2-v, & & r_2+H \\ 1, & a_3-u, & b_3-v, & & r_3+H \end{vmatrix}$$

które, po pomnożeniu wierszy przez wiersze, dają

$$2\Delta S=-\begin{vmatrix} 0, & r_1+H, & r_2+H, & r_3+H \\ 1, & 0, & \frac{1}{2}C, & \frac{1}{2}B \\ 1, & \frac{1}{2}C, & 0, & \frac{1}{2}A \\ 1, & \frac{1}{2}B, & \frac{1}{2}A, & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}(DH+E). \tag{2}$$

Rugując S z (1) i (2), otrzymujemy

$$DH+E=4\Delta\sqrt{ABC}$$

$$H=\frac{-E+4\Delta\sqrt{ABC}}{D}. \tag{3}$$

Otrzymamy promienie wszystkich kół, stycznych do trzech kół danych, nadając r_1, r_2, r_3 w wyrażeniu (3) odpowiednie znaki.

2. Podobne postępowanie dozwala znaleźć wyrażenie dla promienia kuli, stycznej do czterech kul danych. Niechaj

$$a_1, b_1, c_1, r_1; \quad a_2, b_2, c_2, r_2; \quad a_3, b_3, c_3, r_3; \quad a_4, b_4, c_4, r_4; \quad u, v, w, H$$

będą spółrzędnemi środka i promieniami czterech kul danych i piątej szukanej, zaś ∇ objętością czworościanu utworzonego przez środki kul danych; nadto dla skrócenia przyjmijmy

$$(a_i-a_k)^2+(b_i-b_k)^2+(c_i-c_k)^2-(r_i-r_k)^2=A_{i,k},$$

$$-A_{1,2}^2A_{3,4}^2-A_{1,3}^2A_{2,4}^2-A_{1,4}^2A_{2,3}^2+2A_{1,3}A_{1,4}A_{2,3}A_{2,4}+2A_{1,4}A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}+$$
$$+2A_{1,2}A_{1,3}A_{3,4}A_{2,4}=L,$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & A_{1,4} \\ 1, & A_{1,2}, & 0, & A_{2,3}, & A_{2,4} \\ 1, & A_{1,3}, & A_{2,3}, & 0, & A_{3,4} \\ 1, & A_{1,4}, & A_{2,4}, & A_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{M},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & r_1, & r_2, & r_3, & r_4 \\ 1, & 0, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & A_{1,4} \\ 1, & A_{1,2}, & 0, & A_{2,3}, & A_{2,4} \\ 1, & A_{1,3} & A_{2,3}, & 0, & A_{3,4} \\ 1, & A_{1,4}, & A_{2,4}, & A_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{N},$$

$$\begin{vmatrix} u - a_1, & v - b_1, & w - c_1, & r_1 + \mathrm{H} \\ u - a_2, & v - b_2, & w - c_2, & r_2 + \mathrm{H} \\ u - a_3, & v - b_3, & w - c_3, & r_3 + \mathrm{H} \\ u - a_4, & v - b_4, & w - c_4, & r_4 + \mathrm{H} \end{vmatrix} = \mathrm{T}.$$

Mnożąc (wiersze przez wiersze) wyznacznik T przez wyznacznik, który z T powstanie skutkiem pomnożenia elementów pierwszych trzech kolumn przez -1, otrzymamy

$$\mathrm{T}^2 = -\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2} A_{1,2}, & \frac{1}{2} A_{1,3}, & \frac{1}{2} A_{1,4} \\ \frac{1}{3} A_{1,2} & 0, & \frac{1}{2} A_{2,3}, & \frac{1}{2} A_{2,4} \\ \frac{1}{2} A_{1,3}, & \frac{1}{2} A_{2,3}, & 0, & \frac{1}{2} A_{3,4} \\ \frac{1}{2} A_{1,4}, & \frac{1}{2} A_{2,4}, & \frac{1}{2} A_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \mathrm{L}. \qquad (4)$$

Z drugiej strony jest jednak

$$T = \begin{vmatrix} 1, & 0 & , 0 & , 0 & , 0 \\ 0, & u - a_1, & v - b_1, & w - c_1, & r_1 + H \\ 0, & u - a_2, & v - b_2, & w - c_2, & r_2 + H \\ 0, & u - a_3, & v - b_3, & w - c_3, & r_3 + H \\ 0, & u - a_4, & v - b_4, & w - c_4, & r_4 + H \end{vmatrix};$$

$$6\nabla = \begin{vmatrix} 0, & 0 & , 0 & , 0 & , 1 \\ 1, & a_1 - u, & b_1 - v, & c_1 - w, & r_1 + H \\ 1, & a_2 - u, & b_2 - v, & c_2 - w, & r_2 + H \\ 1, & a_3 - u, & b_3 - v, & c_3 - w, & r_3 + H \\ 1, & a_4 - u, & b_4 - v, & c_4 - w, & r_4 + H \end{vmatrix},$$

przez pomnożenie znajdziemy

$$6\Delta T = \begin{vmatrix} 0, & r_1+H, & r_2+H, & r_3+H, & r_4+H \\ 1, & 0 \quad , & \frac{1}{2}A_{1,2}, & \frac{1}{2}A_{1,3}, & \frac{1}{2}A_{1,4} \\ 1, & \frac{1}{2}A_{1,2}, & 0 \quad , & \frac{1}{2}A_{2,3}, & \frac{1}{2}A_{2,4} \\ 1, & \frac{1}{2}A_{1,3}, & \frac{1}{2}A_{2,3}, & 0 \quad , & \frac{1}{2}A_{3,4} \\ 1, & \frac{1}{2}A_{1,4}, & \frac{1}{2}A_{2,4}, & \frac{1}{2}A_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(MH+N). \qquad (5)$$

Rugowanie T z (4) i (5) daje (¹)

$$MH + N = 12\Delta\sqrt{L},$$

$$H = \frac{-N + 12\Delta\sqrt{L}}{M}.$$

---

(1) W «Przypisku» do tomu 1-ego podręcznika *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego* Folkierskiego znajdzie czytelnik (1077 — 1079) odmienne rozwiązanie tego zadania, które (1871 r.) dał Trzaska, opierając się na wynikach badań, podanych niżej, w pierwszej części ustępu IV-ego.

III[1].

O nakreśleniu do trzech kół danych, leżących na powierzchni jednej kuli, czwartego koła, leżącego na tejże powierzchni. Wiadomo, że pomiędzy odległościami kulistemi czterech punktów A_1, A_2, A_3, A_4, leżących dowolnie na powierzchni kuli, zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos a_{1,2}, & \cos a_{1,3}, & \cos a_{1,4} \\ \cos a_{2,1}, & 1, & \cos a_{2,3}, & \cos a_{2,4} \\ \cos a_{3,1}, & \cos a_{3,2}, & 1, & \cos a_{3,4} \\ \cos a_{4,1}, & \cos a_{4,2}, & \cos a_{4,3}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

gdzie ogólnie

$$a_{r,s} = -a_{s,r}$$

oznacza łuk koła wielkiego, łączący punkty A_r i A_s, liczony od A_r ku A_s w pewną stronę.

Zadanie sprowadza się widocznie do znalezienia wielkości promienia kulistego koła stycznego szukanego. Przypuśćmy bowiem, że zadanie jest rozwiązane i że A_r, p_r (przy $r = 1, 2, 3, 4$) oznaczają środki i odpowiednie promienie kuliste czterech kół uważanych. Jeżeli A_4 jest środkiem koła stycznego szukanego, to odległości tegoż środka od trzech środków A_1, A_2, A_3 kół danych można wyrazić przez wzór

$$a_{r,4} = \pm (j_r p_r + p_4)$$

$(r = 1, 2, 3)$, gdzie ilości j_r oznaczają jedności dodatne lub odjemne, podług tego, czy koło A_r i A_4 są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie. Zadanie więc polega na rozwiązaniu równania

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & , \cos a_{1,2} & , \cos a_{1,3} & , \cos(j_1 p_1 + p_4) \\ \cos a_{1,2} & , 1 & , \cos a_{2,3} & , \cos(j_2 p_2 + p_4) \\ \cos a_{1,3} & , \cos a_{2,3} & , 1 & , \cos(j_3 p_3 + p_4) \\ \cos(j_1 p_1 + p_4), & \cos(j_2 p_2 + p_4), & \cos(j_3 p_3 + p_4), & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

względem p_4.

---

(1) Jest-to wyjątek z pracy Trzaski pod wypisanym tytułem ogłoszonej w tomie 1-ym *Pamiętnika Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu*.

Równaniu (2) można nadać kształt równania drugiego stopnia względem $\tang p_4$ lub $\operatorname{ctang} p_4$, pamiętając, że jest

$$\cos(j_r p_r + p_4) = \cos p_r \cos p_4 - j_r \sin p_r \sin p_4$$

$r = 1, 2, 3)$; — opierając się bowiem na najprostszych własnościach wyznaczników można mu nadać kształt

$$0 = \mathrm{A}(\cos p_4)^2 - 2\mathrm{B}\cos p_4 \sin p_4 + \mathrm{C}(\sin p_4)^2, \tag{3}$$

gdzie spółczynniki mają znaczenie następujące:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1\ , & \cos a_{1,2}, & \cos a_{1,3}, & \cos p_1 \\ \cos a_{1,2}, & 1\ , & \cos a_{2,3}, & \cos p_2 \\ \cos a_{1,3}, & \cos a_{2,3}, & 1\ , & \cos p_3 \\ \cos p_1\ , & \cos p_2\ , & \cos p_3\ , & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1\ , & \cos a_{1,2}, & \cos a_{1,3}, & \cos p_1 \\ \cos a_{1,2}, & 1\ , & \cos a_{2,3}, & \cos p_2 \\ \cos a_{1,3}, & \cos a_{2,3}, & 1\ , & \cos p_3 \\ j_1 \sin p_1, & j_2 \sin p_2, & j_3 \sin p_3, & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{vmatrix} 1\ , & \cos a_{1,2}, & \cos a_{1,3}, & j_1 \sin p_1 \\ \cos a_{1,2}, & 1\ , & \cos a_{2,3}, & j_2 \sin p_2 \\ \cos a_{1,3}, & \cos a_{2,3}, & 1\ , & j_3 \sin p_3 \\ j_1 \sin p_1, & j_2 \sin p_2, & j_3 \sin p_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Rozłożywszy bowiem wyznacznik, stanowiący drugą stronę równania (2), na summę dwu wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \cos a_{1,2}, & \cos a_{1,3} \\ \cos a_{1,2}, & 1\ , & \cos a_{2,3} \\ \cos a_{1,3}, & \cos a_{2,3}, & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & \cos a_{1,2} & \cos a_{1,3} & \cos(j_1p_1+p_4) \\ \cos a_{1,2} & 1 & \cos a_{2,3} & \cos(j_2p_2+p_4) \\ \cos a_{1,3} & \cos a_{2,3} & 1 & \cos(j_3p_3+p_4) \\ \cos(j_1p_1+p_4) & \cos(j_2p_2+p_4) & \cos(j_3p_3+p_4) & 0 \end{vmatrix},$$

możemy drugiemu z nich nadać kształt

$$a(\cos p_4)^2 - 2\mathrm{B}\cos p_4 \sin p_4 + c(\sin p_4)^2,$$

gdzie a i c są wyznacznikami różniącemi się odpowiednio od wyznaczników A i C tem, że ostatnie elementy głównych przekątnych są zerami zamiast być jednościami. Następnie dochodzimy do równania (3), które ostatecznie rozwiązuje zagadnienie.

W powyższy sposób otrzymujemy pozornie szesnaście rozwiązań, gdyż równanie (3) jest drugiego stopnia, a każda z trzech ilości j_1, j_2, j_3 może przybierać dwie wartości : $+1$ lub -1. Zważywszy jednak, że koło na kuli leżące ma dwa bieguny i że styczne promieni kulistych odpowiednich tym biegunom są znaków przeciwnych (gdyż promienie są spełniającemi); że zmieniając znaki wszystkich czterech ilości j_1, j_2, j_3, p_4 nie zmieniamy równania (3) (gdyż to wychodzi na zmianę bieguna koła A_4) : widzimy, że otrzymamy wszystkie rozwiązania możebne różne w ogólności, robiąc co do znaków trzech ilości j_1, j_2, j_3, zamiast wszystkich możebnych ośmiu przypuszczeń, połowę tylko, to jest cztery, tak dobranych, aby, zmieniając razem wszystkie znaki w tychże przypuszczeniach, wypadły cztery pozostałe przypuszczenia możebne. Dwa, między innemi, układy następujące zadość czynią ostatniemu zastrzeżeniu :

	j_1, j_2, j_3,		j_1, j_2, j_3,
1.	$+, +, +,$		$-, -, -,$
2.	$+, +, -,$	lub	$-, -, +,$
3.	$+, -, +,$		$-, +, -,$
4.	$-, +, +,$		$+, -, -.$

Wybraćby można jeszcze i inne układy, lecz pierwszy z dwu dopiero przytoczonych jest najdogodniejszym, wymaga bowiem najmniejszej liczby zmian znaków, mianowicie tylko trzech. Zadanie ma więc w ogólności ośm rozwiązań różnych.

IV [1].

1. *Związek między odległościami wzajemnemi pięciu punktów w przestrzeni.* Niechaj x_s, y_s, z_s będą spółrzędne któregokolwiek z pięciu punktów; x_r, y_r, z_r spółrzędne szóstego punktu. Przyjmijmy

$$a_{r,s} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2,$$

$$c_s = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2; \qquad h = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2.$$

Mamy:

$$a_{r,s} - c_s = h - 2x_rx_s - 2y_ry_s - 2z_rz_s,$$

skutkiem czego

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} - c_1, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ a_{r,2} - c_2, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,5} - c_5, & 1, & x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik, tworzący lewą stronę tego równania, może być tak napisany:

$$\begin{vmatrix} c_1, & a_{r,1} - c_1, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ c_2, & a_{r,2} - c_2, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_5, & a_{r,5} - c_5, & 1, & x_5, & y_5, & z_5 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Dodając do elementów drugiej kolumny odpowiednie elementy pierwszej, mamy

$$\begin{vmatrix} c_1, & a_{r,1}, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ c_2, & a_{r,2}, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_5, & a_{r,5}, & 1, & x_5, & y_5, & z_5 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Jest to wyjątek z pracy Brioschi'ego: *Sur quelques questions de la géométrie de position.* (Crelle, *Journal*, 1855, t. Ł).

Z tego równania wnosimy, że iloczyn dwu wyznaczników

$$\begin{vmatrix} c_1, & a_{r,1}, & 1, & -2x_1, & -2y_1, & -2z_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_5, & a_{r,5}, & 1, & -2x_5, & -2y_5, & -2z_5 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & a_{r,1}, & c_1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & a_{r,5}, & c_5, & x_5, & y_5, & z_5 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

jest równy zeru i że

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}^2, & a_{r,1}a_{r,2}+a_{1,2}, & \ldots, & a_{r,1}a_{r,5}+a_{1,5}, & a_{r,1}+1 \\ a_{r,1}a_{r,2}+a_{1,2}, & a_{r,2}^2, & \ldots, & a_{r,2}a_{r,5}+a_{2,5}, & a_{r,2}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1}a_{r,5}+a_{1,5}, & a_{r,2}a_{r,5}+a_{2,5}, & \ldots, & a_{r,5}^2+1, & a_{r,5}+1 \\ a_{r,1}+1, & a_{r,2}+1, & \ldots, & a_{r,5}+1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Przyjmijmy, że punkt szósty schodzi się z pierwszym; wtedy

$$a_{r,1} = 0,\ a_{r,2} = a_{1,2}, \ldots,\ a_{r,5} = a_{1,5}.$$

Podstawiając te wartości w wyznacznik po lewej stronie ostatniego równania, dodając następnie do elementów drugiego wiersza odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez $-a_{1,2}$, do elementów trzeciego wiersza odpowiednie pierwszego, pomnożone przez $-a_{1,3}$, i t. d., i nakoniec od elementów ostatniego wiersza odejmując odpowiednie elementy pierwszego, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,5}, & 1 \\ a_{1,2}, & 0, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,5}, & 1 \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & 0, & a_{3,4}, & a_{3,5}, & 1 \\ a_{1,4}, & a_{2,4}, & a_{3,4}, & 0, & a_{4,5}, & 1 \\ a_{1,5}, & a_{2,5}, & a_{3,5}, & a_{4,5}, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie jest tem właśnie równaniem, które się znajduje rozwiniętem w memoarze CARNOT'a *Sur la relation qui existe*, etc.

Oczywiście, że związki analogiczne dla *czterech* punktów na *płaszczyźnie* i *trzech* punktów na *prostej* będą:

$$\begin{vmatrix} 0\ , & a_{1,2}, & a_{1,5}, & a_{1,4}, & 1 \\ a_{1,2}, & 0\ , & a_{2,3}, & a_{2,4}, & 1 \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & 0\ , & a_{3,4}, & 1 \\ a_{1,4}, & a_{2,4}, & a_{3,4}, & 0\ , & 1 \\ 1\ , & 1\ , & 1\ , & 1\ , & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0\ , & a_{1,2}, & a_{1,3}, & 1 \\ a_{1,2}. & 0\ , & a_{2,3}, & 1 \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & 0\ , & 1 \\ 1\ , & 1\ , & 1\ , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. objętość *czworościanu*, mającego za wierzchołki te *cztery* punkty, jest zerem, jak również pole *trójkąta*, mającego za wierzchołki te *trzy* punkty.

2. *Związek między wzajemnemi odległościami pięciu punktów znajdujących się na ellipsoidzie.* Niechaj będzie

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

równaniem ellipsoidy, $\delta_{r,s}$ odległością prostolinijną jej punktu s od jakiegokolwiek punktu r wziętego w przestrzeni; $D_{r,s}$ połową jej średnicy równoległej do $\delta_{r,s}$. Nazywając:

$$\frac{\delta_{r,s}{}^2}{D_{r,s}} = a_{r,s}; \quad h = 1 + \frac{x_r{}^2}{\alpha^2} + \frac{y_r{}^2}{\beta^2} + \frac{z_r{}^2}{\gamma^2},$$

mamy

$$a_{r,s} = h - \frac{2x_r}{\alpha^2} x_s - \frac{2y_r}{\beta^2} y_s - \frac{2z_r}{\gamma^2} z_s,$$

skutkiem czego

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ a_{r,2}, & 1. & x_2, & y_2, & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,5}, & 1, & x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Kwadrat wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}, & \sqrt{-1}, & \frac{x_1}{\alpha}, & \frac{y_1}{\beta}, & \frac{z_1}{\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,5}, & \sqrt{-1}, & \frac{x_5}{\alpha}, & \frac{y_5}{\beta}, & \frac{z_5}{\gamma} \end{vmatrix}$$

będzie więc zerem, i będzie

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}^2 & , a_{r,1}a_{r,2} - \frac{1}{2}a_{1,2}, & \ldots, & a_{r,1}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{1,5} \\ a_{r,1}a_{r,2} - \frac{1}{2}a_{1,2}, & a_{r,2}^2 & \ldots, & a_{r,2}a_{2,5} - \frac{1}{2}a_{2,} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{r,1}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{1,5}, & a_{r,2}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{2,5} & \ldots, & a_{r,5}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Przypuszczając, że punkt r znajduje się razem z pierwszym, a odejmując następnie od elementów drugiego wiersza odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez $a_{1,2}$, i t. d., otrzymamy związek szukany:

$$\begin{vmatrix} 0 & , a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & a_{1,5} \\ a_{1,2}, & 0 & , a_{2,3}, & a_{2,4}, & a_{2,5} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,5}, & a_{2,5}, & a_{3,5}, & a_{4,5}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Związek analogiczny między czterema punktami położonemi na elipsie będzie

$$\begin{vmatrix} 0 & , a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4} \\ a_{1,2}, & 0 & , a_{2,3}, & a_{2,4} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & 0 & , a_{3,4} \\ a_{1,4}, & a_{2,4}, & a_{3,4}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

V[1].

Jeżeli $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ przedstawiają spółrzędne jakiegokolwiek punktu płaszczyzny, to równanie przecięcia ostrokręgowego, znajdującego się na tej płaszczyznie, będzie

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fxz + 2hxy = 0.$$

---

(1) W tym ustępie i w następującym podane są wyjątki dzieła Brioschi'ego: *La teorica dei Determinanti*.

Aby prosta, przedstawiona przez równanie

$$lx + my + nz = 0$$

była styczną do tego przecięcia ostrokręgowego, potrzeba aby miały miejsce związki

$$\left\{\begin{array}{l} ax_1 + hy_1 + fz_1 - \frac{1}{2}l = 0, \\ hx_1 + by_1 + ez_1 - \frac{1}{2}m = 0, \\ fx_1 + ey_1 + cz_1 - \frac{1}{2}n = 0, \\ lx_1 + my_1 + nz_1 \qquad = 0, \end{array}\right.$$

gdzie x_1, y_1, z_1 są spółrzędne punktu styczności. Warunkiem niezbędnym, aby prosta była styczna do przecięcia ostrokręgowego, będzie więc

$$\begin{vmatrix} a, & h, & f, & l \\ h, & b, & e, & m \\ f, & e, & c, & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Gdy wyobrazimy sobie drugą prostą

$$l_1x + m_1y + n_1z = 0,$$

to warunkiem, aby ona dotykała przecięcie ostrokręgowe, będzie

$$\begin{vmatrix} a, & h, & f, & l_1 \\ h, & b, & e, & m_1 \\ f, & e, & c, & n_1 \\ l_1, & m_1, & n_1, & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Aby znaleźć spółrzędne punktu styczności, zauważmy, że, nazywając

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & h, & f, & l, & l_1 \\ h, & b, & e, & m, & m_1 \\ f, & e, & c, & n, & n_1 \\ l, & m, & n, & 0, & 0, \\ l_1, & m_1, & n_1, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

i mając na uwadze (1) i (2), otrzymujemy równania

$$\begin{cases} l\dfrac{\partial\Delta}{\partial l_1}+m\dfrac{\partial\Delta}{\partial m_1}+n\dfrac{\partial\Delta}{\partial n_1} \qquad\quad =0,\\[2mm] a\dfrac{\partial\Delta}{\partial l_1}+h\dfrac{\partial\Delta}{\partial m_1}+f\dfrac{\partial\Delta}{\partial n_1}+l\mathrm{H}\ =0,\\[2mm] h\dfrac{\partial\Delta}{\partial l_1}+b\dfrac{\partial\Delta}{\partial m_1}+e\dfrac{\partial\Delta}{\partial n_1}+m\mathrm{H}=0,\\[2mm] f\dfrac{\partial\Delta}{\partial l_1}+e\dfrac{\partial\Delta}{\partial m_1}+c\dfrac{\partial\Delta}{\partial n_1}+n\mathrm{H}\ =0,\end{cases}$$

gdzie pochodne częściowe są wzięte względem elementów ostatniej kolumny i gdzie nadto przyjęliśmy

$$\pm\begin{vmatrix} a, & h, & f, & l\\ h, & b, & e, & m\\ f, & e, & c, & n\\ l_1, & m_1, & n_1, & 0\end{vmatrix}=\mathrm{H}.$$

Wypada ztąd, że spółrzędne punktu styczności pierwszej prostej będą wyznaczone przez stosunki

$$x_1 : y_1 : z_1=\frac{\partial\Delta}{\partial l_1} : \frac{\partial\Delta}{\partial m_1} : \frac{\partial\Delta}{\partial n_1},$$

i że, podobnież, dla spółrzędnych punktu styczności drugiej prostej, jest

$$x_2 : y_2 : z_2=\frac{\partial\Delta}{\partial l} : \frac{\partial\Delta}{\partial m} : \frac{\partial\Delta}{\partial n}.$$

Pamiętając, że

$$\frac{\partial\Delta}{\partial m}\frac{\partial\Delta}{\partial n_1}-\frac{\partial\Delta}{\partial m_1}\frac{\partial\Delta}{\partial n}=\Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial m\partial n_1},$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial n}\frac{\partial\Delta}{\partial l_1}-\frac{\partial\Delta}{\partial n_1}\frac{\partial\Delta}{\partial l}=\Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial n\partial l_1},$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial l}\frac{\partial\Delta}{\partial m_1}-\frac{\partial\Delta}{\partial l_1}\frac{\partial\Delta}{\partial m}=\Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial l\partial m_1},$$

mamy równanie cięciwy styczności

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial m\partial n_1}x+\frac{\partial^2\Delta}{\partial n\partial l_1}y+\frac{\partial^2\Delta}{\partial l\partial m_1}z=0,$$

albo, oznaczając przez x_0, y_0, z_0 spółrzędne punktu spotkania dwu stycznych,

$$(ax_0+hy_0+fz_0)x+(hx_0+by_0+ez_0)y+(fx_0+ey_0+cz_0)z=0, \quad (3)$$

albo jeszcze

$$x_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Prosta, którą przedstawia to równanie, jest *biegunową* punktu (x_0, y_0, z_0), który nazywa się *biegunem*.

Biorąc dwie inne proste, przedstawione przez równania

$$\left.\begin{aligned}\lambda x+\mu y+\nu z=0,\\ \lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z=0,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

i zakładając, że one dotykają przecięcia ostrokręgowego, biegunową ich punktu przecięcia mieć będziemy wyrażoną przez równanie

$$\begin{vmatrix} a, & h, & f \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} h, & b, & e \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} f, & e, & c \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} z=0.$$

Jeśli przez X, Y, Z oznaczymy spółrzędne punktu spotkania dwu biegunowych, przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne spólnego przecięcia dwu prostych (4) i jeśli przyjmiemy, dla krótkości,

$$\begin{vmatrix} b, & e \\ e, & c \end{vmatrix}=\mathrm{A}, \qquad \begin{vmatrix} a, & f \\ f, & c \end{vmatrix}=\mathrm{B}, \qquad \begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix}=\mathrm{C},$$

$$\begin{vmatrix} e, & h \\ c, & f \end{vmatrix}=\mathrm{H}, \qquad \begin{vmatrix} h, & b \\ f, & e \end{vmatrix}=\mathrm{F}, \qquad \begin{vmatrix} h, & a \\ e, & f \end{vmatrix}=\mathrm{E},$$

to mieć będziemy

$$A\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} + H\begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} = kX,$$

$$H\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} = kY,$$

$$F\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} = kZ,$$

przy nieoznaczonem k. Z tych równań, przyjmując

$$R = \begin{vmatrix} A, & H, & F \\ H, & B, & E \\ F, & E, & C \end{vmatrix},$$

wyprowadzamy

$$\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{R}\left\{ X\begin{vmatrix} B, & E \\ E, & C \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} E, & H \\ C, & F \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} H, & B \\ F, & E \end{vmatrix}\right\},$$

$$\begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{R}\left\{ X\begin{vmatrix} E, & H \\ C, & F \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} A, & F \\ F, & E \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} H, & A \\ E, & F \end{vmatrix}\right\},$$

$$\begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{R}\left\{ X\begin{vmatrix} H, & B \\ F, & E \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} H, & A \\ E, & F \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} A, & H \\ H, & B \end{vmatrix}\right\}.$$

Gdy zauważymy, że, oznaczając przez S wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a, & h, & f \\ h, & b, & e \\ f, & e, & c \end{vmatrix},$$

mamy

$$\begin{vmatrix} B, & E \\ E, & C \end{vmatrix} = aS, \qquad \begin{vmatrix} A, & F \\ F, & C \end{vmatrix} = bS, \qquad \begin{vmatrix} A, & H \\ H, & B \end{vmatrix} = cS,$$

$$\begin{vmatrix} E, & H \\ C, & F \end{vmatrix} = hS, \qquad \begin{vmatrix} H, & B \\ F, & E \end{vmatrix} = fS, \qquad \begin{vmatrix} H, & A \\ E, & F \end{vmatrix} = eS,$$

$$R = S^2,$$

wypadnie z powyższego

$$\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{S}(aX + hY + fZ),$$

$$\begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{S}(hX + bY + eZ),$$

$$\begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} = \frac{k}{S}(fX + eY + cZ).$$

Lecz równanie prostej, przechodzącej przez dwa bieguny, t. j. przez dwa punkty (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), jest

$$\begin{vmatrix} y_0, & y_1 \\ z_0, & z_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_0, & z_1 \\ x_0, & x_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_0, & x_1 \\ y_0, & y_1 \end{vmatrix} z = 0;$$

stanie się więc ono, ze względu na równania poprzedzające, takiem:

$$(aX + hY + fZ)x + (hX + bY + eZ)y + (fX + eY + cZ)z = 0.$$

Prosta, przedstawiona przez to równanie jest biegunową punktu (X, Y, Z), a dwa systematy złożone, jeden z punktu (x_0, y_0, z_0) i z ostatniej prostej, na której się ten punkt znajduje, drugi z punktu (X, Y, Z) i prostej (3), na której ten ostatni punkt leży, są *wzajemnie biegunowe* jeden względem drugiego.

VI.

Gdy danych jest sześć punktów na płaszczyźnie, wyznaczyć miejsce geometryczne takiego siódmego punktu, żeby proste, idące z tego punktu ku sześciu punktom danym, tworzyły wiązkę w inwolucyi.

Niech x, y będą spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu tego miejsca geometrycznego: $x_1, y_1; \ldots; x_6, y_6$ spółrzędnemi danych punktów stałych. Przyjmując, że owe sześć prostych są przecięte przez prostą jakąkolwiek, którą przyjmiemy za oś x-ów, i oznaczając przez $a_1, a_2, \ldots, a_6$ odległości punktów przecięcia od początku, będziemy mieli inwolucyę wiązki wyrażoną przez równanie

$$(a_1 - a_4)(a_3 - a_6)(a_5 - a_2) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1) = 0. \qquad (1)$$

Lecz łatwo znajdziemy, że

$$a_1 = \frac{xy_1 - x_1 y}{y_1 - y}, \qquad a_2 = \frac{xy_2 - x_2 y}{y_2 - y}, \quad \text{etc.},$$

a następnie

$$a_1 - a_4 = \frac{(xy_1 - x_1 y)(y_4 - y) - (xy_4 - x_4 y)(y_1 - y)}{(y_1 - y)(y_4 - y)},$$

wyrażenie, które się sprowadza do

$$a_1 - a_4 = \frac{y}{(y_1 - y)(y_4 - y)} \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_4, & y_4 \\ 1, & x_1, & y_1 \end{vmatrix},$$

gdyż wogóle, przy

$$D = \begin{vmatrix} c_{1,1}, \ldots, c_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1}, \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix},$$

jest

$$\frac{\partial D}{\partial c_{r,s}} \frac{\partial D}{\partial c_{t,u}} - \frac{\partial D}{\partial c_{t,s}} \frac{\partial D}{\partial c_{r,u}} = D \frac{\partial^2 D}{\partial c_{r,s} \partial c_{t,u}}.$$

Podstawiając zaś te wartości dla $a_1 - a_4$, etc. w równanie (1), otrzymamy, jako równanie miejsca geometrycznego szukanego,

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_4, & y_4 \\ 1, & x_1, & y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_6, & y_6 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_5, & y_5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_3, & y_3 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_5, & y_5 \\ 1, & x_4, & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_6, & y_6 \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie przedstawia widocznie krzywą trzeciego rzędu, a ponieważ sprawdza się ono dla $x = x_1, x_2, \ldots, x_6$; $y = y_1, y_2, \ldots, y_6$, więc krzywa ta przechodzi przez sześć punktów danych.

KONIEC.

Prace w języku polskim, do *teoryi* wyznaczników się odnoszące, są następujące :

1865 r. Babczyński. *O determinantach*, oddzielny przy końcu ustęp w kursie (litografowanym) «Algebra wyższa podług wykładu professora Babczyńskiego w Szkole Głównej Warszawskiej» w r. a. 1864/5, 4°, str. 289 — 320.

(Rzadkość tych kursów litografowanych wywołuje podanie tu treści tak tej, jak i następnej pracy). N. 1. Wszystkie n! przemian z n ilości dzielą się na dwie połowy i powstają z jednej jakiejkolwiek przemiany, jedne w skutek parzystej, drugie w skutek nieparzystej liczby przestawień po dwie ilości. N. 2. Zamiast przestawień można rozważać zmiany lub różnice. Iloczyn różnic przemian pierwszej klassy jest dodatny, drugiej odjemny. Dwie przemiany, z których jedna powstała z drugiej w skutek jednego przestawienia, należą do klass różnych, gdyż odpowiadające im iloczyny są z przeciwnemi znakami. N. 3. Określenie determinantu, czyli (por. § 8) *wyznacznika* $\Sigma \pm a_\lambda^\alpha a_\mu^\beta \dots a_\omega^\nu$ stopnia n-ego, jako summy algebraicznej iloczynów po n czynników. Różne oznaczenia. Nr. 4. Za każdem przestawieniem dwu czynników przestawiamy jednocześnie znaczki górne i dolne; ten sam więc determinant wypadnie, czy utworzymy go przez przemiany górnych, czy też przez przemiany dolnych znaczków. Oddzielne dowodzenie, że w determinancie można przyjąć wiersze za kolumny. W razie, gdy górne znaczki razem wzięte są te same co dolne; to można w determinancie przestawić znaczki dolne z górnemi. Przypadek $a_\theta^\rho = a_\rho^\theta$. W razie $a_\theta^\rho = -a_\rho^\theta$, w skutek takiego przestawienia znaczków determinant $R = (-1)^n R_1$; w przypadku nieparzystego n jest $R = 0$; warunek $a_\theta^\rho = -a_\rho^\theta$ obejmuje $a_\rho^\rho = 0$. N. 5. Determinant, w którym elementy jednego wiersza lub jednej kolumny są wszystkie równe zeru. Z wyrazów dodatnych determinantu w skutek przestawienia dwu dolnych lub górnych znaczków powstają wyrazy odjemne. Elementy dwu kolumn lub dwu wierszy sobie równe. Aby determinant pomnożyć przez pewną ilość, należy elementy wiersza lub elementy kolumny przez nią pomnożyć. Wydzielenie spólnego czynnika elementów wiersza lub kolumny. Determinant, którego elementy kolumny są summami jednakowej liczby składników. Determinant powstający z danego przez przestawienie tak wierszy między sobą, jak i kolumn; przestawienie dwu wierszy lub dwu kolumn wywołuje zmianę znaku. N. 6. Jeśli stopień determinantu $n = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_l$, to determinant może być wyrażony jako summa iloczynów determinantów stopni $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$. Przypadek, gdy $l = 2$, oraz szczególny przypadek, gdy $a_\tau^\gamma = 0$ dla π^1 wartości τ i π_2 wartości γ. Przypadek, gdy $\tau = 2$ i $\pi = 1$; spółczynnik elementu. Determinant, w którym wszystkie, prócz jednego, elementy wiersza lub kolumny są zerami. Summa elementów wiersza, pomnożonych przez spółczynniki elementów innego wiersza, jest zerem. Determinant, który w skutek zachodzących zer sprowadza się do jednego wyrazu. Rozkład determinantu według elementów wiersza i kolumny. N. 7. Twierdzenie o mnożeniu we wszystkich trzech przypadkach. Stopień determinantu przedstawiającego iloczyn kilku determinantów różnych stopni.

1866 r. Zajączkowski. *O wyznacznikach* (*determinantach*), w kursie (litografowanym) «Geometrya analityczna, wykład professora Dra Władysława Zajączkowskiego w Szkole Głównej Warszawskiej,» w r. a. 186⁵/₆, 4°, str. 72 — 88.

Odczyt 13-y. — 46. Ogólne określenie wyznacznika, jako funkcyi spółczynników n równań jednorodnych stopnia pierwszego z n zmiennemi, otrzymanej po wyrugowaniu zmiennych. Wyznacznik dwu takich równań; jego oznaczenie; przestawienie wierszy z kolumnami, wierszy lub kolumn między sobą. 47. Symbol dwuwierszowy o trzech kolumnach. Wyznacznik trzech równań; jego oznaczenie; przestawienie wierszy z kolumnami; przestawienie dwu wierszy lub dwu kolumn, parzysta liczba takich przestawień. 48. Symbol trzywierszowy o czterech kolumnach. Wyznacznik czterech równań. 49. Wyznacznik n-ego stopnia jako summa iloczynów. Znak wyrazu zależy od parzystej lub nieparzystej liczby przestawień po dwie skazówki w pierwszym wyrazie. Oznaczenie składników jedną literą z dwiema skazówkami.

Odczyt 14-y — 50. Zastąpienie wierszy przez kolumny. Przestawienie dwu wierszy lub dwu kolumn; kołowa zamiana wszystkich kolumn lub wszystkich wierszy. Dwa wiersze lub dwie kolumny identyczne. 51. Pomnożenie wszystkich składników jednej kolumny lub jednego wiersza przez ten sam czynnik; przykłady. Wyznacznik, w którym elementy rzędów są summami jednakowej liczby składników. Dodanie do składników jednego rzędu równych wielokrotność, rzędu równoległego. 52. Iloczyn dwu wyznaczników trzeciego stopnia. Formuła iloczynu dwu wyznaczników n-ego stopnia, oraz kwadratu wyznacznika n-ego stopnia. 53. Minory wyznacznika. Wyznacznik uporządkowany podług składników rzędu. Formuła pierwszego minoru. Tożsamościowe związki między minorami i składnikami wyznacznika. 54. Rozwiązanie systematu równań pierwszego stopnia. Proporcyonalność rozwiązań równań jednorodnych do spółczynników składników wiersza wyznacznika (¹) (²).

1870 r. Trzaska. *Krótkie wiadomości o wyznacznikach skreślił Władysław Trzaska*, przypisek do dzieła «Zasady rachunku różniczkowego i całkowego... wyłożył... Władysław Folkierski,» tom I, Paryż, 8°, str. 1031 — 1087.

Porównaj § 55 i ustęp II Dodatku drugiego.

1871 r. Żmurko. *Dowód na twierdzenie Hesse'go o wyznaczniku funkcyjnym, napisał Wawrzyniec Żmurko* w dzienniku «Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu,» tom I, 4°, str. 89 — 92.

Por. § 121.

1871 r. Trzaska. *O pewnem zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych, napisał Władysław Trzaska*, tamże, str. 113 — 121.

Por. § 118. Zobacz moje sprawozdanie w piśmie «Ateneum» (Warszawa), rocznik 1877, t. I, str. 179.

(¹) W dalszym ciągu kursu autor przytacza zastosowania własności wyznaczników do przedstawienia i roztrząsania formuł. Pierwszą pracą drukowaną, w której własności wyznaczników wzięte zostały za narzędzie badania, jest : *Przyczynek do teoryi największości i najmniejszości funkcyj zależnych od ilukolwiek ilości zmiennych, przez Dra Władysława Zajączkowskiego* («Roczniki c. k. Towarzystwa naukowego Krakowskiego,» t. XXXV, 1867 r.)

(²) Prócz tych dwu wykładów, żadne inne w b. Szkole Głównej Warszawskiej nie obejmowały wyznaczników, ani ich zastosowań. Dlatego niektóre ze wskazówek, jakie podaje Folkierski («Biblioteka Warszawska,» 1873, t. III, str. 157), co do powstania słownictwa, są niedokładne.

1874 r. Sągajło. Pierwrze cztery rozdziały przekładu pracy Lessons introductory to the modern higher Algebra by Georg Salmon, stanowiącego tom drugi dzieła, zatytułowanego «Wykład zupełny Algebry... Adolf Sągajło.» Paryż, 4°; str. 8—46.

1877 r. Żelewski «*Nauka o wyznacznikach z zastosowaniami wyłożona... przez Dra A. Żelewskiego.*» Kraków, 8°, str. X i 191.

Zob. moje o tej książce sprawozdanie w dzienniku: «Przegląd Krytyczny», Kraków; rocznik 1877, str. 261—265, oraz wzmiankę w: «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» Ohrtmann'a, Berlin, rocznik 1877.

* *
*

P. S. W czasie druku tej pracy wyszło dzieło: «Algebra, przez G.-H. Niewęgłowskiego». Część Pierwsza (algebra elementarna). Paryż, 1879, 8°. Obejmuje ono (str. 422-461) «Rozdział V. O Wyznacznikach».

Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, a przewodniczącego w Towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, wyszły następujące dzieła matematyczne :

1. Norzewski Roch. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie*. Paris, 1852, in-8°, soixante pages de texte et deux planches lithographiées (wyczerpane).

2. G.-H. Niewęgłowski, b. profesor analizy w Szkole Wyższej Polskiej Montparnasse, egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika w Paryżu :

— *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień, ćwiczenia), Paryż, 1866, in-8° stron 352. Cena 1 tal. 10 sgr.

3. — *Geometrya. Część I, Geometrya płaska* (wydanie drugie), w Paryżu, 1868 roku, stron 436 in-8°, figury w tekscie. Cena 1 tal. 10 sgr.

4. — *Geometrya. Część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 sgr.

5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami*. Paryż, 1870 roku, in-8°, stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 sgr.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. Folkierski, inżynier cywilny, b. uczeń szkoły politechnicznej w Karlsruhe, licencyat nauk matematycznych P. F. Sorbony, profesor Mechaniki w Szkole wyższej przygotowawczej w Paryżu, tom I zawierający Rachunek rożniczkowy oraz dodatek Władysława Trzaski o Wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, stron XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 sgr. (wyczerpane).

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I. Główne artykuły przez pp. Franke, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę. Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 talary.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II. Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego. Paryż, 1872, in-4°, stron 245, figur 8. Cena 2 talary. (Obadwa tomy razem oprawne, 3 tal. 22 sgr. 6 fen.)

9. *Wykład Hydrauliki wraz z teoryą machin wodnych*, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z Hodrostatyki i Hydrodynamiki; przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Władysława Klugera (inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, in-8°, stron LVI i 1018. Figur w tekście 110, oprawa angielska. Cena 20 franków.

10. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, tom II *Rachunek Całkowy*. Część pierwsza : całkowanie różniczek i t. d. Paryż, 1873, in-8°, stron XVI i 752, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład Mechaniki cząsteczkowej* (*molekularnej*), przez Wła-

dysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznej. Tomu I^{go} części różniczkowej zeszyt pierwszy. Paryż, 1873, in-8°, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu;* tom III, zawierający wypracowania pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1873, stron VIII i 354, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Mechanika rozumowa*, przez G.-H. Niewęgłowskiego, dwa tomy. Tom I, *Statyka i Dynamika punktu.* In-8°, stron 544 z figurami; cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry*, przez Adolfa Sągajłę, w czterech tomach. Tom pierwszy: *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8°, stron 632, z figurami. Cena 5 fr. 50 cent.

15. *Bibliografia piśmiennictwa polskiego z dzieła Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dra Teofila Żebrawskiego, członka Akademii Krakowskiej. Kraków, 1873, in-8°, stron 617, z tablicami. Cena 3 talary.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom IV, zawierający wypracowania pp A. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankego, W. Klugera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). In-4°, Paryż, 1874, czterdzieści dwa arkusze druku, figur w tekscie 100. Cena 12 franków.

17. *Wykład zupełny Algebry*, przez Adolfa Sągajłę, w czterech tomach. Tom II: *Teorya wyznaczników i jej przedniejsze zastosowania*. Paryż, 1874, in-8°, stron 400. Cena 5 fr. 50 cent.

18. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom V zawierający prace pp. K. Maszkowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojcie-

chowskiego, J. Rostafińskiego i S. Baranowskiego In-4°, Paryż, 1874, czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 24, tablic 20. Cena fr. 16.

19. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VI, zawierający prace pp. J. Rostafińskiego, A. Martynowskiego, S. Elzanowskiego, W. Zajączkowskiego i M. Girdwoynia. In-4°, Paryż, 1875, czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 10, tablic litografowanych 12, stalorytów 8. Cena franków 20.

20. G. R. Niewęgłowski : *Mechanika Rozumowa*, tom II, *Dynamika układów materyalnych. Hydrostatyka i Hydrodynamika.* Paryż, 1876, in-8°, stron 885, z figurami w tekscie. Cena 15 franków.

21. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VII zawierający prace pp. Wł. Gosiewskiego, K. Brandta, K. Hertza i S. Dicksteina, A. Sękowskiego, M. A. Baranieckiego, B. Rejchmana, M. A. Baranieckiego i A. Sągajły. In-8° Paryż, 1875, czterdzieści arkuszy druku, figur w tekscie (drzeworytów) 56, miedziorytów typograficznych (sur cuivre en relief) 2, tablic : miedzioryt 1, stalorytów 4, fotodruk 1. Cena fr. 20.

22. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VIII zawierający prace pp. M. A. Baranieckiego, Wł. Gosiewskiego, M. Hulewicza, Z. Laskowskiego, J. Rostafińskiego, A. Sągajły, A. Transon (tłomaczenie z francuzkiego), Abla Transon (tłomaczenie z francuzkiego), M. A. Baranieckiego. In-4°, Paryż. 1876, trzydzieści arkuszy druku, figur w tekscie : drzeworytów 18 i tablica jedna litografowana. Cena franków 20.

23. Wł. Kluger : *Wykład Wytrzymałości Materyałów.* Paryż, 1876. In-8°, stron 595 z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

24. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IX zawierający prace pp. : M. Girdwoynia, Ł. Wojciechowskiego, Wł. Gosiewskiego. S. Dicksteina i Gosiewskiego. M. Szystowskiego, K. Brandta i J. Śniechowskiego. Paryż, 1877, pięćdziesiąt arkuszy druku in-4°, drzeworytów 75, tablic litografowanych 11, miedziorytów 2. Cena 20 fr.

25. *Wykład Nauki o Równaniach Różniczkowych*, przez Wł. Zajączkowskiego, doktora filozofii, profesora Matematyki w Akademii Technicznej Lwowskiej. In-8°, str. XXIV i 902 z figurami w tekscie. Cena 25 fr,

26. *Geometrya Analityczna*, przez A. Sągajłę, tom I in-4°, zawierający sto arkuszy druku z figurami w tekscie. Paryż, 1877 roku. Cena 25 fr.

27. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom X zawierający prace pp. J. Sochockiego, E. Habicha, M. A. Baranieckiego, W. Gosiewskiego, M. A. Baranieckiego, T. Chudzińskiego, K. Brandta, W. Trzaski, W. Trzaski, M. Szystowskiego i A. Martynowskiego. Paryż 1878, czterdzieści arkuszy druku in 4°, drzeworytów 76, tablic litografowanych 9. Cena 20 fr.

28. G.-H. Niewęgłowski, *Algebra*, t. I-szy. Paryż, 1879, str. XII i 893, in-8°. Cena 12 fr.

29. M.-A. Baraniecki, *Teorya Wyznaczników*. Paryż, 1879, str. X i 595, z figurami w tekscie, in 8°. Cena 15 fr.

ZNAJDUJA SIĘ OBECNIE W DRUKU :

30. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom XI in-4°.

31. Ernest Sągajło, *Geometrya Wykreślna*, in 4°.

PARYŻ — DRUKARNA E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2.

BARANIECKI

TEORYA
Wyznaczników