cas, si vous ajoutez au quotient de la seconde division, multiplié par la différence des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur.

Exemple : 117 est mesuré par 3. Divisez encore 117 par 4; le quotient sera 29 et le reste de la division 1.

Ajoutez au quotient 29, multiplié par la différence des diviseurs (qui ne change ici rien, parce que c'est l'unité), le reste de la dite division, qui est 1; la somme 30 sera aussi mesurée par 3, premier diviseur.

J'ai déjà trop écrit et il me semble qu'il est temps que vous parliez, après avoir employé si mal votre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je suis etc.

XLV.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 25 DÉCEMBRE 1640.

(A, f^{os} 12-13 *bis*, B, f^{o} 19.)

Mon Révérend Père,

1. Je languissois dans l'attente de vos lettres et de M. de Frenicle. Je suis bien aise qu'il approuve ce que j'ai fait [1]; et afin qu'il ne soit plus en doute de ce que je lui demande, voici trois questions que je lui propose, pource que les spéculations que j'y ai faites ne me satisfont pas pleinement :

1° La raison essentielle pourquoi 3, 5, 17, 257, etc. à l'infini, sont toujours nombres premiers;

2° Qu'il me donne quelqu'un de ses autres moyens pour trouver

(1) La réponse de Frenicle à la Lettre XLIV est perdue.

à l'infini des nombres premiers de tels nombres de figures qu'on voudra.

Sur quoi je voudrois être éclairci si une de mes pensées est vraie, qu'en la progression d'un nombre pair, comme 6, toutes les puissances + 1 de la progression qui ont pour exposant : 1, 2, 4, 8, 16, etc. sont nombres premiers, si elles ne sont pas mesurées par un de ceux-ci : 3, 5, 17, 257, etc.; laquelle proposition, si elle est vraie, est de très grand usage.

Si je puis une fois tenir la raison fondamentale que 3, 5, 17, etc. sont nombres premiers, il me semble que je trouverai de très belles choses en cette matière, car déjà j'ai trouvé des choses merveilleuses dont je vous ferai part, après que j'aurai eu votre réponse et celle de M. Frenicle.

3° Je lui demande un moyen plus général que celui que j'ai inventé pour savoir quels sont les multiples de l'exposant utiles à la division.

Après cela, je travaillerai aux propositions que vous me demandez.

2. Sur le sujet des triangles rectangles (1), voici mes fondements :

1° Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple du quaternaire, est une seule fois la somme de deux quarrés, et une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

2° Le même nombre et son quarré sont chacun une fois la somme de deux quarrés;

Son cube et son quarréquarré sont chacun deux fois la somme de deux quarrés;

Son carrécube et son cubecube sont chacun trois fois la somme de deux quarrés;

Etc., à l'infini.

3° Ce même nombre étant une fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle, son quarré l'est deux fois, son cube trois, son quarréquarré quatre, etc. à l'infini.

(1) *Comparer*, Tome I, l'*Observation VII sur Diophante*.

4° Étant donné un nombre, pour savoir combien de fois il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, divisez-le par tous les nombres premiers, plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui le mesurent. Puis rangez les exposants des puissances des dits nombres premiers qui mesurent le nombre donné, en tel ordre que bon vous semblera, l'un après l'autre. Multipliez le premier par le second deux fois, et à cela ajoutez la somme du premier et du second; puis multipliez cette dernière somme deux fois par le troisième, et ajoutez au produit tant la dite dernière somme que le troisième, etc. à l'infini. La dernière somme marquera à combien de triangles le nombre donné peut servir d'hypoténuse.

Les nombres premiers qui sont moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, ni 2, non plus que leurs puissances, ne font rien à la question, et n'augmentent ni ne diminuent le nombre des dits triangles rectangles.

Soit, par exemple, un nombre donné mesuré par 5, par le quarré de 13, par le cube de 17, et par le cube aussi de 29.

Nous aurons quatre diviseurs dont les exposants de leurs puissances, qui mesurent le nombre donné, sont :

1, 2, 3, 3.

Je multiplie le premier par le second deux fois : viendra 4; ajoutez-y le premier et le second : viendra 7. Je multiplie 7 par le troisième 3 deux fois : viendra 42, auquel ajoutant 7 et 3, c'est 52. Je multiplie 52 par le quatrième (qui est 3) deux fois : viendra 312, auquel ajoutant 52 et 3, viendra 367.

Je dis donc que le nombre donné sera l'hypoténuse de 367 triangles rectangles et non plus.

5° Pour trouver, par exemple, le moindre nombre de tous ceux qui sont 367 fois seulement l'hypoténuse d'un triangle rectangle, je double le nombre donné et au dit double j'ajoute l'unité : viendra 735, duquel je prends tous les diviseurs séparément. Quoiqu'un nombre mesure et par soi et par ses puissances, j'entends tous les diviseurs qui sont nombres premiers; le dit nombre se trouve donc divisé aux dites conditions par 3, 5, 7, 7. J'ôte de chacun des dits diviseurs l'unité et prends la moitié du reste : viendra 1, 2, 3, 3.

Il faut donc prendre quatre nombres premiers plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, et prendre leurs puissances exposées par les dits quatre nombres. En quoi faisant, vous satisferez à la question généralement en multipliant les dites quatre puissances entre elles.

Que si vous voulez le moindre nombre satisfaisant à la question, il faudra prendre les quatre plus petits nombres premiers de la qualité requise, qui sont : 5, 13, 17, 29, et pour leurs puissances, il faut que celle du plus petit ait le plus grand exposant, et ainsi des autres. Nous prendrons donc le cube de 5, le cube de 13, le quarré de 17, et 29, et multipliant tous les uns par les autres, nous aurons le moindre nombre de tous ceux qui servent d'hypoténuse à 367 triangles rectangles et non plus.

3. Il s'ensuit de là que si le double du nombre donné, plus 1, est nombre premier, en ce cas le nombre cherché ne peut être divisé que par un seul nombre premier plus grand de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme si vous demandez un nombre qui serve d'hypoténuse à 20 triangles rectangles et non plus, pource que 41 est nombre premier, il faut prendre la 20^e puissance d'un nombre premier de la qualité requise.

Vous trouverez, par conséquence aisée, un nombre qui ait autant de diviseurs différents que vous voudrez et qui puisse satisfaire à la question, lorsqu'elle est possible. J'entends des diviseurs de la qualité requise, car vous y en pouvez mettre, comme nous avons dit, autant que vous voudrez de ceux qui sont moindres de l'unité qu'un multiple de 4, ou bien 2 et telle de ses puissances que vous voudrez.

Je vous écris ceci si fort à la hâte que je ne prends pas garde si je fais des fautes, et omets beaucoup de choses dont je vous dirai le menu une autre fois.

4. Pour la *question des ellipses* (¹), elle se déduira fort aisément de ce que vous venez de voir, car la question va là *à trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à 12 triangles et non plus, de telle qualité que la dite hypoténuse ait plus grande proportion au plus grand des deux autres côtés que le dit plus grand au moindre :* c'est-à-dire que chacun des dits triangles soit comme, par exemple, 29, 21, 20. Ce qui est aisé, et ayant trouvé le dit nombre, son quarré sera le demi-diamètre des ellipses.

Il le faut quarrer, afin que la perpendiculaire sur le foyer soit un nombre entier. J'en dis assez pour me faire entendre à M. Frenicle.

5. J'ajoute encore qu'une toute pareille règle à la précédente des hypoténuses sert à cette question :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il est la différence de deux nombres desquels le produit est un nombre quarré.

Et n'y a que cette différence, qu'en cette question tous les nombres premiers hormis 2 sont utiles, ce qui n'est pas en la précédente des hypoténuses.

Comme, si un nombre est mesuré par 3 et par le quarré de 5, les exposants étant 1 et 2, multipliez le premier par le second deux fois, à quoi ajoutant leur somme, viendra 7. Vous pouvez donc assurer que 75 est 7 fois la différence de deux nombres desquels le produit fait un quarré.

Pour avoir le plus petit, vous userez de même voie.

Or, pour trouver tous les triangles et aussi les dits nombres en cette

(¹) *Voir* sur cette question, antérieurement proposée par Frenicle à Descartes, les *Lettres* de ce dernier, du 20 décembre 1638 (éd. Clerselier, II, 95), du 9 février 1639 (II, 97), du 30 avril 1639 (III, 84). Frenicle avait demandé de construire sur le même grand axe ($2a$) un nombre déterminé d'ellipses telles que pour chacune la distance des foyers ($2c$) fût supérieure au petit axe ($2b$) et qu'on pût exprimer en nombres entiers le grand axe, le petit axe, la distance ($a-c$) d'un foyer au sommet voisin, et l'excès $\left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)$, sur la distance des foyers, de la distance de l'un d'eux à l'extrémité de l'ordonnée passant par l'autre.

question, la chose est assez aisée, de quoi je vous écrirai séparément, si vous voulez.

De cette dernière question, on peut tirer l'invention d'hyperboles au lieu d'ellipses, etc.

Dès que M. de Frenicle m'aura écrit, je lui donnerai des propositions que je juge, sans me flatter, qu'il estimera incomparablement plus belles que tout ce dont nous avons encore parlé.

Je suis,

Mon Révérend Père,

Votre très humble serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 25 décembre 1640.