

premiers Livres des Éléments. C'est de quoi je vous entretiendrai une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le mériter.

9. Ensuite j'ai considéré la percussion, le mouvement et les autres effets que cause quelque impression, soit violente ou naturelle, en quoi je ne crois pas avoir mal employé le temps, puisqu'en une matière si épineuse, encore ai-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, et laquelle je pourrai peut-être augmenter avec le temps.

10. J'oubliois presque à vous dire que les nombres, dont vous avez déjà découvert des propriétés admirables, contiennent de grands mystères; mais, pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble, d'accord et sans jalousie, et desquels le génie fût naturellement porté à cette spéculation, ce qui est très difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ai parlé ci-dessus, je prendrai aussi plaisir à le considérer plus particulièrement, espérant que vous me ferez part de vos inventions, de quoi je vous supplie en qualité de etc.

XLII.

FERMAT A ROBERVAL.

< AOUT 1640 >

(*Va*, p. 161-162.)

MONSIEUR,

1. Après vous avoir remercié de vos civilités (1) et protesté que je serai ravi d'avoir des occasions à vous plaire, je vous supplierai de me faire part de votre invention sur le sujet des tangentes des lignes courbes et encore de vos spéculations mécaniques sur la percussion,

(1) Réponse à la Lettre précédente, XLI.

puisque vous me faites espérer la communication de vos pensées en cette matière.

2. Après cela, je vous dirai que M. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les mystères des nombres, en quoi il me semble qu'il est extrêmement versé. Je lui ai envoyé ⁽¹⁾ les belles propositions sur les progressions géométriques qui commencent à l'unité, lesquelles j'ai non seulement trouvées, mais encore démontrées, bien que la démonstration en soit assez cachée, ce que je vous prie d'essayer, puisque vous les avez vues.

3. Mais voici ce que j'ai découvert ⁽²⁾ depuis sur le sujet de la proposition 12 du cinquième Livre de Diophante, en quoi j'ai suppléé ce que Bachet avoue n'avoir pas su, et rétabli en même temps la corruption du texte de Diophante, ce qui seroit trop long à vous déduire. Il suffit que je vous donne ma proposition et que je vous fasse plutôt souvenir que j'ai autrefois démontré ⁽³⁾ qu'un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions. J'en demeurai pour lors là, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne sont ni quarrés, ni composés de deux quarrés, comme 21, 33, 77, etc., ce qui a fait dire à Bachet sur la division proposée de 21 en deux quarrés : *quod quidem impossibile est, ut reor, cum is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis*, où le mot de *reor* marque évidemment qu'il n'a point su la démonstration de cette impossibilité, laquelle j'ai enfin trouvée et comprise généralement dans la proposition suivante :

4. *Si un nombre donné est divisé par le plus grand quarré qui le mesure, et que le quotient se trouve mesuré par un nombre premier moindre*

(1) Voir Lettre XL, 6.

(2) Voir Tome I, *Observations* XXV et XXVI sur Diophante.

(3) Cette proposition avait été, en même temps que le second théorème énoncé Lettre XII, 3, envoyée par Mersenne à Descartes, le 22 mars 1638, comme démontrée par Fermat.

de l'unité qu'un multiple du quaternaire, le nombre donné n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Exemple : Soit donné 84. Le plus grand quarré qui le mesure est 4, le quotient 21, lequel est mesuré par 3 ou bien par 7, moindres de l'unité qu'un multiple de 4. Je dis que 84 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Soit donné 77. Le plus grand quarré qui le mesure est l'unité; le quotient 77, qui est ici le même que le nombre donné, se trouve mesuré par 11 ou par 7, moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire. Je dis que 77 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions. Etc.

Je vous avoue franchement que je n'ai rien trouvé en nombres qui m'ait tant plu que la démonstration de cette proposition, et je serai bien aise que vous fassiez effort de la trouver, quand ce ne seroit que pour apprendre si j'estime plus mon invention qu'elle ne vaut.

5. J'ai démontré ensuite cette proposition, qui sert à l'invention des nombres premiers :

Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entre eux, je dis qu'il ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme, par exemple, ajoutez l'unité, si vous voulez, à un quarré pair, soit le quarré 10 000 000 000, lequel avec 1 fait 10 000 000 001. Je dis que 10 000 000 001 ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4, et ainsi, lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ni par 3, ni par 7, ni par 11, etc.

6. Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Géométrie. Voici ce qu'on m'a proposé et que j'ai trouvé tout aussitôt :

Per datum extra vel intra parabolam punctum, rectam ducere quæ abscindat segmentum a parabola æquale dato spatium. Et, si punctum sit

intra parabolam, determinare minimum quod a parabola per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction, je vous ferai part de la mienne.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XLIII.

FERMAT A FRENICLE (1).

< AOUT? 1640 >

(A, f° 76.)

1. Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au-dessus :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc., tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.

2. Bien qu'on puisse faire une anatomie particulière qui est trop longue à décrire, il suffit de vous faire comprendre, dans l'exemple qui suit, la proposition que j'y ai faite :

Soit le nombre progressif augmenté de l'unité 8193, duquel l'exposant est 13 nombre premier. Je dis que, si vous divisez 8193 par 3, le

(1) Fragment publié par M. Ch. Henry (*Recherches etc.*, p. 192-193) d'après le brouillon d'Arbogast. Il porte sur la copie au net le titre : *Sur les nombres premiers de Fermat à Frenicle*, et la mention : *D'après la copie de Mersenne*.