Kab

61

kw

39

P. MANSION.

PIERWSZE ZASADY METAGEOMETRYI

CZYLI

GEOMETRYI OGÓLNEJ

przełożył za upoważnieniem autora

S. Dickstein.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego
Warecka 14.

1897.

Opis nr: 44795

ДОЗВОЛЕНО ЦЕНЗУРОЮ
Варшава 10-го Іюня 1897 года.

PIERWSZE ZASADY METAGEOMETRYI

CZYLI

GEOMETRYI OGÓLNEJ

napisał

P. Mansion [1]).

Quidquid contradictionem non implicat,
Deus potest. Ś-ty Tomasz C. G. II. 22.

TREŚĆ.

I.

Wstęp.

W ciągu upłynionego stulecia matematycy poddawali podstawy zasadnicze nauki o przestrzeni badaniu krytycznemu, które doprowadziło ich do utworzenia, obok geometryi zwykłej, dwu innych

[1]) Szanowny autor upoważnił nas do ogłoszenia w „Wiadomościach matematycznych" przekładu tej pracy, która jest streszczeniem odczytów, mianych w „Institut supérieur de Philosophie" w Louvain dnia 16 maja, 30 maja i 6 czerwca 1895. *S. D.*

systemów geometryi, również dopuszczalnych tak pod względem ścisłości logicznej jak i pod względem stosowania ich do badania świata fizycznego.

Pierwszym z tych systemów jest geometrya Łobaczewskiego, nazwana tak od imienia uczonego (1793—1856), który znalazł jej podstawy około r. 1826 i podał jej wykład zupełny w licznych pismach, ogłoszonych w czasie od r. 1829—1856 [1]).

Drugi system stanowi geometrya riemannowska, której idea zasadnicza, bez żadnego prawie wszakże rozwinięcia, została podana przez Riemanna (1826—1866) w roku 1854, lecz ogłoszona dopiero w 1867 r. [2]).

Ogół tych trzech geometryj: euklidesowej, geometryi Łobaczewskiego i riemannowskiej, mających zresztą część wspólną, stanowi tak nazwaną Metageometryę lub Geometryę ogólną.

Fakt istnienia trzech różnych systemów geometryi ma wielką ważność z punktu widzenia filozoficznego. W samej rzeczy, pociąga on ze sobą obalenie jednej z podstaw dzieła Kanta: Kritik der reinen Vernunft, oraz stwierdza czczość tego, co można nazwać jego geometrycznym imperatywem.

Pragniemy tu wyłożyć sposobem elementarnym i pod formą dydaktyczną zasady metageometryi aż do podziału jej na trzy gałęzie oraz naszkicować konsekwencye filozoficzne, jakie stąd wyprowadzić można.

Wykład ten poprzedzimy krótkim zarysem historycznym najważniejszych prac nad zasadami geometryi od Euklidesa do De Tilly'ego. Czytelnik, który zechce podążyć za nami, będzie mógł stopniowo pozbyć się uprzedzenia, że może

---

[1]) Całkowite wydanie dzieł geometrycznych Łobaczewskiego profesora uniwersytetu kazańskiego, wydane zostało przez tenże uniwersytet w dwóch tomach in 4^0, str. 680. Tom I Kazań. 1883: prace w języku rosyjskim, Tom II Kazań. 1886: prace w językach niemieckim i francuskim.

[2]) Pod tytułem: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Rozprawy Getyngskie. 1867, t. XIII), powtórzone w zbiorowem wydaniu dzieł Riemanna (wyd. 1-o 1876, str. 254—269). Rozprawa ta istnieje w przekładzie polskim S. Dicksteina i Wł. Gosiewskiego (Pam. Tow. nauk ścisłych w Paryżu (t. IX r. 1877).

istnieć tylko jeden system geometryi oraz oswoić się z nowemi poglądami, które napotka później w dwu systemach geometryi nieeuklidesowej. Tym sposobem czytelnik, zanim stwierdzi wartość tych systemów z punktu widzenia logiki oraz badania przyrody, da im przystęp do swego umysłu, gdy dowie się, jakie to wybitne nazwiska przywiązane są do badań nad tym przedmiotem.

II.

Zarys historyczny.

Geometryę elementarną, jako naukę, utworzyli grecy w czasie od VI do III wieku przed Chr. Główne jej postępy można związać z kilkoma sławnemi imionami. Tales (640—548) lub jeden uczniów jego znalazł, że suma trzech kątów trójkąta równa się dwóm kątom prostym; Pytagoras (580—500), że w trójkącie prostokątnym kwadrat, wystawiony na przeciwprostokątnej, równa się sumie kwadratów, wystawionych na pozostałych bokach; Eudoxus (408—355), że ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa o tej samej podstawie i tej samej wysokości. Temuż matematykowi zawdzięczamy teoryę proporcyj pomiędzy wielkościami niespółmiernemi. Archimedes (287—212), prócz wiełu prawd matematycznych natury bardzo utajonej, odkrył nowe własności zasadnicze okręgu koła, walca, stożka i kuli.

Euklides (około r. 300), nieco wcześniejszy od Archimedesa, zebrał w swych „Elementach“ odkrycia geometryczne poprzedników swoich [1]), nie dodawszy nic istotnie nowego, lecz podstawiwszy niewzruszone dowody zamiast dowodzeń, które często bywały zbyt mało ścisłemi.

Doskonałość logiczna „Elementów“ Euklidesa zapewniła im niezaprzeczoną królewskość w nauczaniu aż do pojawienia się „Początków geometryi“ (Éléments de Géométrie) Legen-

[1]) Księga I—VI, XI—XIII „Elementów“ są poświęcone geometryi; księgi VII—X arytmetyce, nauce, w której Euklides był bardziej oryginalnym niż w geometryi: księga X jest prawie całkowicie zbiorem jego własnych poszukiwań.

dre'a (1752—1833) w r. 1794. Mniej ścisła, lecz za to pełniejsza od „Elementów“ Euklidesa, zawiera ta książka Legendre'a: wykład odkryć Archimedesa w geometryi elementarnej; teoryę trójkątów kulistych, która była też znaną starożytnym i której początki sięgają być może Eudoxusa; wreszcie noty uczone, odnoszące się do trudniejszych punktów, oraz traktat trygonometryi.

W „Elementach“ Euklidesa teorya linij równoległych i wszystko, co od niej zależy, polega na twierdzeniu następującem: Dwie proste na płaszczyźnie, tworzące z trzecią prostą, po tej samej stronie tej ostatniej, kąty wewnętrzne, których suma jest mniejsza od dwu kątów prostych, spotykają się z tej właśnie strony. Twierdzenie to, nazywane często postulatem Euklidesa, jest w rzeczy samej piątym z sześciu postulatów [1], które geometra grecki postawił na czele swej księgi nieśmiertelnej.

Od Euklidesa do Legendre'a wszystkie usiłowania matematyków, zajmujących się zasadami geometryi,ześrodkowywały się prawie wyłącznie na piątym postulacie Euklidesa. W przeciągu przeszło dwóch tysięcy lat czyniono próżne wysiłki, by postulat ten wywnioskować z twierdzeń poprzednio dowiedzionych. Ptolemeusz i Proklus w starożytności, Nassiredin w wiekach średnich, Clavius w czasie Odrodzenia, Wallis (1616—1707) i wielu innych, usiłujących dowieść tego postulatu, nie potrafili uczynić nic więcej, tylko zastąpić go postulatami prawie równoważnemi. Pomiędzy temi ostatniemi zdaje się, jedynie postulat Wallisa (1693): istnieją trójkąty podobne— przeżył swego twórcę [2]. W roku 1733 O. Saccheri, jezuita

---

[1]) Postulaty te podajemy dosłownie w dwu paragrafach następnych; znajdują się one razem z dziewięcioma aksiomatami po definicyach pierwszej księgi Euklidesa. W niektórych rękopisach (lecz nie w najlepszych) i w wielu edycyach postulaty czwarty, piąty i szósty stały się aksiomatami 10, 11 i 12-ym.

[2]) Co do wskazówek bibliograficznych, odnoszących się do rozmaitych autorów, o których mowa tu i w następstwie patrz nasz artykuł p t.: ,,Notice sur les recherches de M. De Tilly en Métagéométrie (Revue des questions scientifiques, 2-e série, t. VII, p. 584—595, 1895, tub Mathesis, 2-e série t. V, 1891. Supplément) i nasze sprawozdanie o dziele Stäckela; „Theorie der Parallellinien von

(1667—1733), bezwiednie odkrył nowy punkt widzenia, badając, co stanie się z zasadami geometryi, jeżeli się przypuści, że piąty postulat Euklidesa nie jest prawdziwym. Rozumując w tem przypuszczeniu, podał on wiele twierdzeń, między innemi następujące: „Dwie proste, położone na jednej płaszczyźnie, mogą zajmować trzy różne położenia względem siebie [1]): albo spotykają się, albo zbliżają się do siebie nieograniczenie bez spotkania, albo wreszcie mają prostopadłą wspólną, od której począwszy, rozchodzą się (Twierdzenie Saccheri'ego).

Lambert (1728—1777) jest na tej samej drodze, co Saccheri. Dowodzi on, że w przypadku, gdy postulat Euklidesa prawdziwym nie jest, powierzchnia trójkąta jest proporcyonalna do jego niedomiaru kątowego (Twierdzenie Lamberta, 1766, ogłoszone w 1786). Niedomiarem kątowym nazywamy różnicę pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą kątów trójkąta, która w uważanym przypadku jest zawsze mniejsza od dwu kątów prostych.

Taurinus (1794 — 1874) śmiałem przeczuciem znalazł (1826) dla tegoż przypadku wzór zasadniczy trygonometryi.

Saccheri, Lambert i Taurinus, nie wątpią zresztą wcale o bezwzględnej prawdziwości piątego postulatu Euklidego i uciekają się bezwiednie do innych postulatów, mniej lub więcej pozornych, dla wyprowadzenia go z poprzednich twierdzeń geometryi. Lecz równocześnie Lambert, a zwłaszcza Taurinus spostrzegają, dlaczego nie dochodzimy nigdy do sprzeczności, przypuszczając, że piąty postulat nie jest prawdziwym. Pochodzi to stąd, mówi drugi z nich, że istnieją prawdopodobnie powierzchnie krzywe, na których pewne linie krzywe mają własności analogiczne do własności linii prostej na płaszczyznie, jeżeli pozostawimy na uboczu własności, wyrażone piątym postulatem Eukli-

---

Euclid bis auf Gauss (Ib. t. VIII, p. 603—613, 1891 lub Mathesis, 2-e série, t. VI, 1896, Supplément).

[1]) W geometryi nieeuklidesowej dwie proste mogą zajmować tylko dwa różne położenie wzajemne: albo się spotykają, albo mają prostopadłą wspólną i wtedy są wszędzie w równej od siebie odległości.

desa [1]). Tak za Lambertem powiada on, że koła wielkie na kuli mają własności, bardzo podobne do własności prostych na płaszczyźnie, prócz własności, wyrażonej w piątym postulacie Euklidesa: dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni.

Legendre (opierając się milcząco na tym ostatnim postulacie) mógł dowieść z zupełną ścisłością dwu twierdzeń, któremi zajmowali się już byli Saccheri i Lambert, mianowicie: 1-o W trójkącie suma kątów nie może być większa od dwu kątów prostych (r. 1800). 2-o Jeżeli w jednym trójkącie suma kątów jest równa dwóm kątom prostym, to jest takąż we wszystkich trójkątach (twierdzenie z r. 1808, ogłoszone w r. 1833). Zresztą Legendre, podobnie jak wszyscy poprzedzający go geometrowie, napróżno usiłował udowodnić piąty postulat Euklidesa; wszakże próby jego dowodów, wielce godne uwagi, mogły go były doprowadzić do jednej z prawd zasadniczych metageometryi, t. j. do tego, że własności przestrzeni zależą od pewnego parametru.

Około r. 1819 lub może wcześniej, najznakomitszy z matematyków niemieckich Gauss (1777—1855) i prawnik Schweikart (1780—1857), doszli, niezależnie jeden od drugiego, do przekonania, że piąty postulat Euklidesa absolutnie dowieść się nie da, ponieważ nie zawiera się w pojęciu klasycznem prostej. Jeżeli odrzucimy ten postulat, to będzie można ustanowić geometryę ogólniejszą od geometryi Euklidesa i zupełnie ścisłą; geometrya euklidesowa jest jej przypadkiem szczególnym, a właściwie przypadkiem granicznym. Jedynie doświadczenie może stwierdzić, czy ten przypadek graniczny lub inny przypadek szczególny, bardzo blizki, jest urzeczywistniony w przyrodzie. Sławny astronom Bessel (1784—1846), pod wpływem Gaussa i Schweikarta, doszedł także do przekonania, że geometrya fizyczna nie jest, być może, geometryą euklidesową. Ani Gauss ani Schweikart nie ogłosili nic o tej geometryi ogólniejszej, o której mówimy, lecz nie

[1]) Był to pomysł zupełnie uzasadniony: Beltrami w r. 1868 dowiódł że w rzeczy samej linie geodezyjne pseudosfery mają te własności, o których wyżej mowa, i wyprowadził stąd wniosek, że piąty postulat Euklidesa nie daje się udowodnić w geometryi płaskiej.

pozostali bez wpływu na siostrzeńca tego ostatniego Taurinusa, który pozostawał z nimi w korespondencyi.

Dwaj młodsi od Gaussa uczeni: jeden rosyjski Łobaczewski, drugi węgierski Jan Bolyai (1802—1860) doszli do tych samych wyników, co Gauss. Bolyai w r. 1832 w dodatku do dzieła swego ojca ogłosił krótki wykład systemu geometryi, niezależnej od piątego postulatu Euklidesa. Łobaczewski dnia 12/24 Lutego 1826 r. miał lekcyę publiczną o tym przedmiocie w uniwersytecie kazańskim, w r. 1829 zaś ogłosił zasady tej nowej geometryi, która słusznie nosi obecnie nazwę geometryi Łobaczewskiego. W ciągu przeszło ćwierci wieku aż do roku 1856 z niepokonaną wytrwałością rozwijał on badania swe w tej dziedzinie, lubo znikąd nie dostawał zachęty [1]).

W r. 1854 Riemann wypowiedział w swej lekcyi wstępnej kilka nowych i głębokich myśli o zasadach geometryi, ogłoszonych drukiem dopiero w r. 1867, po śmierci tego wielkiego geometry [2]). Istotę zasadniczą części tych pomysłów można streścić w ten sposób: Szósty postulat Euklidesa, podobnie jak i piąty, nie zawiera się w zwykłej definicyi linii prostej. Odrzucając ten szósty postulat, można utworzyć geometryę różną od geometryi Łobaczewskiego i także ogólniejszą od geometryi Euklidesa, której ta ostatnia jest również przypadkiem granicznym. Jest to właśnie geometrya riemannowska.

De Tilly, nie znając badań Łobaczewskiego, znalazł wszystkie jego rezultaty zasadnicze drogą sobie właściwą, nieco po roku 1860. W roku 1868 ogłosił De Tilly cynematykę statykę i dynamikę, odpowiadającą systemowi Łobaczewskiego. W roku 1872 i 1873 wykazał, że piąty postulat Euklidesa nie daje się udowodnić żadnem rozumowaniem geometrycznem. W r. 1878 podał zupełny wykład zasad geometryi ogólnej, wychodząc z pojęcia odległości lub przedziału pomiędzy dwoma punktami. To pojęcie pierwotne, które już Cauchy w r. 1833 uczynił był podstawą geometryi, rozstrząsa De Tilly z magistralną ścisłością i wyprowadza z niego kolejno geometrye: Riemanna,

---

1) Patrz wyżej przypisek na str. 2-ej.

2) Patrz wyżej przypisek na str. 2-ej.

Łobaczewskiego i Euklidesa. W r. 1893 poszedł jeszcze dalej i wykazał, że każda z tych geometryj zawarta jest całkowicie w związkach Lagrange'a i Scheringa pomiędzy odległościami wzajemnemi pięciu punktów.

Nikt, o ile wiemy, nie badał głębiej od De Tilly'ego podstaw zasadniczych geometryi. To też w poniższym wykładzie prace jego przewodniczyć nam będą, jakkolwiek postaramy się formę naszego wykładu zbliżyć, o ile można, do euklidesowej, celem uprzystępnienia metageometryi większej liczbie czytelników [1]).

III.

Definicye i cztery pierwsze postulaty [2]).

1. Punktem jest to, co nie ma części (Euklides I. Def. 1).

2. Linia jest długością bez szerokości. Krańce linii są punktami (I. Def. 2, 3).

3. Powierzchnia jest to, co ma tylko długość i szerokość. Krańce powierzchni są liniami (I. Def. 5, 6).

4. Bryła jest to, co posiada długość, szerokość i grubość. Krańce bryły są powierzchniami (XI. Def. 1, 2).

5. Linia prosta jest to linia, która leży jednakowo na wszystkich swoich punktach (I. Def. 4).

---

[1]) Znakomici geometrowie Cayley, Klein, Darboux, Poincaré, Beltrami, Riemann, Helmholtz, Lie i inni badali wyczerpująco różne teorye analityczne i geometryczne, mające najściślejszy związek z poszukiwaniami, których dzieje przedstawiliśmy treściwie pod formą elementarną. W ten sposób dowiedli pośrednio wielu twierdzeń geometryi ogólnej. Dla braku dostateczne kompetencyi nie możemy podać tu zarysu tych poszukiwań.

[2]) W poniższym wykładzie podajemy definicye, postulaty i twierdzenia według „Elementów" Euklidesa, ponieważ dzieło to stanowi po dzień dzisiejszy najbardziej znany i ścisły podręcznik geometryi. Posługujemy się wielkiem wydaniem greckiem, łacińskiem i francuskiem Peyrarda (Paryż 1814, 1816, 1818, 3 tomy in 4°). Dajemy zresztą z definicyj to, co jest niezbędnie koniecznem, prócz jednego wyjątku, i nie przytaczamy dziewięciu aksiomatów Euklidesa, ponieważ te, z których korzystamy milcząco, są przyjęte przez wszystkich.

Uwaga. Powiemy na początku następnego paragrafu, jak definicyę tę, o której tyle dyskutowano, rozumieli Euklides i wszyscy geometrowie.

Postulat pierwszy [1]. Przeprowadzić od jakiegokolwiek punktu do jakiegokolwiek innego linię prostą (I. Post. 1).

Postulat drugi. I przedłużyć w linii prostej i sposobem ciągłym linię ograniczoną (I. Post. 2).

6. Powierzchnia płaska jest taka, która leży jednakowo na wszystkich prostych, które zawiera (I. Def. 7 [2]).

7. Koło jest figurą płaską, objętą jedną linią, którą nazywamy okręgiem tak, że wszystkie proste, poprowadzone do okręgu z pewnego punktu, umieszczonego na tej figurze, są równemi. Ten punkt nazywa się środkiem koła (I. Def. 15, 16), proste zaś nazywają się promieniami.

Postulat trzeci. Nakreślić koło z jakiegokolwiek środka i o jakimkolwiek promieniu (I. Post. 3).

8. Kula jest powierzchnią taką, że wszystkie proste, poprowadzone z punktu, nazwanego środkiem, do punktów tej powierzchni, są równemi sobie. Te proste nazywają się promieniami kuli (XI. Def. 14—17 zmienione).

9. Kąt prostokreślny jest to wzajemne nachylenie dwóch prostych (I. Def. 8—9 skrócone).

10. Gdy prosta spotyka drugą i tworzy z nią dwa kąty równe: jeden po jednej, drugi po drugiej stronie, to każdy z tych kątów

---

[1]) Można głębiej, niż to uczynił Euklides, badać pojęcia zasadnicze geometryi i powiększyć znacznie liczbę postulatów. Patrz np. prace matematyka włoskiego Peano: „I principii di Geometria logicamente esposti“ (Turyn, Bocca, 1889, 8°, str. 40) i „Sulle fondamenti della Geometria“ (Rivista di matematica, 1894, IV, str. 51—90)“. W ostatnim paragrafie rozprawy niniejszej pokazujemy, w jaki sposób Cauchy sprowadza pojęcia prostej i płaszczyzny do pojęcia odległości. Lecz należy zauważyć, że postulaty 5-y i 6-y są prawie jedynemi, któremi poważnie zajmowali się geometrowie.

[2]) Prosimy czytelnika, aby dopuścił możność istnienia podobnej powierzchni, jako postulat dodatkowy, aż do naszego paragrafu końcowego Definicyę Euklidesa rozumiano zawsze w sensie definicyi Legendre'a: Płaszczyzna jest to powierzchnia, w której, gdy weźmiemy dwa punkty dowolne i połączymy je prostą, to linia ta będzie całkowicie leżała na powierzchni.

nazywa się prostym, i pierwsza linia nazywa się prostopadłą do drugiej (I. Def. 9).

P o s t u l a t c z w a r t y. Wszystkie kąty proste są równe sobie (I. Post. 4 [1]).

11. Kąt rozwarty jest to kąt większy od prostego (I. Def. 11).

12. Kąt ostry jest to kąt mniejszy od prostego (I. Def. 12).

13. Figury prostokreślne lub wielokąty są zakończone liniami prostemi (I. Def. 20).

14. Figury trójboczne lub trójkąty są utworzone przez trzy proste; czworoboki—przez cztery proste (I. Def. 21, 22).

15. Trójkąt równoboczny jest to trójkąt, mający trzy boki równe; równoramienny—dwa boki równe; różnoboczny—trzy boki różne; prostokątny—który ma kąt prosty; rozwartokątny—kąt rozwarty; ostrokątny—trzy kąty ostre (I. Def. 24—29 [2]).

16. Czworobok jest kwadratem, gdy ma wszystkie boki równe i kąty równe; prostokątem—gdy ma tylko kąty równe; kwadratem ukośnym lub rombem—gdy ma tylko boki równe; romboidem—gdy jego boki i kąty przeciwległe są równe (I. Def. 30—33 zmienione [3]).

IV.

Postulaty piąty i szósty. Trzy geometrye.

Wyżej podana definicya prostej, nawet gdy ją uzupełnimy za pomocą postulatów 2, 3, 4 wyraża jedynie zupełną jednorodność

[1]) Ten postulat, pozornie bezpożyteczny jest w rzeczy samej niezbędny, jak to powiedzieliśmy już dawniej, dla tego, aby uniknąć rozpatrywania w jednym i tym samym systemie geometryi różnych gatunków linij prostych. Wprowadzenie tego postulatu przez E u k l i d e s a do „Elementów“ pokazuje, jak głęboko badał on zasady geometryi.

[2]) Możność istnienia figur, mających powyższe własności, wyprowadza się dość łatwo z rozmaitych twierdzeń elementarnych E u k l i d e s a.

[3]) Dajemy te definicye, niepotrzebne nam w dalszym wykładzie, dla pokazania, w jaki sposób należy zmodyfikować definicye E u k l i d e s a, aby módz przystosować je do geometryi ogólnej. Można jeszcze łatwo, przy pomocy „Elementów“, wykreślić figury, o których mowa w Nr. 16.

linii, t. j. tożsamość wszystkich prostych i wszystkich części każdej z nich. Słowem, prosta jest linią jednorodną całkowicie określoną przez dwa którekolwiek ze swych punktów, dostatecznie zbliżone.

Euklides w swym wykładzie geometryi używa jeszcze dwóch innych postulatów, odnoszących się do prostej, a mianowicie:

Postulat piąty. Jeżeli prosta, spotykająca dwie proste (leżące na tej samej płaszczyźnie), tworzy z jednej strony kąty wewnętrzne, których suma jest mniejsza od dwu kątów prostych, to proste te, przedłużone nieograniczenie, spotykają się z tej strony, po której suma jest mniejsza od dwu kątów prostych (I, postulat 5).

Postulat szósty. Dwie proste nie zamykają przestrzeni (I, postulat 6).

Określamy geometryę euklidesową jako tę, która przyjmuje postulaty 5 i 6; riemanowską jako tę, w której odrzucamy postulat 6, w której przeto, jak to okażemy, postulat 5 daje się udowodnić, jako wynik z twierdzeń go poprzedzających; geometryę Łobaczewskiego, jako tę, w której odrzucamy postulat 5, w której zatem, według tego co powiedziano, postulat 6 zachodzi koniecznie, gdyż odrzucenie go równałoby się przyjęciu istnienia postulatu 5-go.

Jest wiele własności prostej a także płaszczyzny i przestrzeni, odmiennych w trzech geometryach. Lecz liczne znów inne własności są niezależne od postulatów 5 i 6 i tworzą część wspólną wszystkim trzem systemom. Są i takie własności, które są wspólnemi tylko dwóm systemom.

Podamy pierwsze 26 twierdzeń Euklidesa, które nie opierają się ani na postulacie 5-ym, ani też w pewnym sensie, jak to powiemy niżej, na postulacie 6-ym, a więc należą do trzech geometryj.

V.

Dwadzieścia sześć twierdzeń elementarnych, wspólnych trzem geometryom.

W wykładzie poniższym opuszczamy dowodzenia lub rozwiązania, łatwe do znalezienia lub identyczne z dowodzeniami i rozwiązaniami Legendre'a; inne szkicujemy tylko, pozostawiając w ogólności czytelnikowi trud kreślenia figur. W pierwszem stadyum dogodniej jest przyjąć, że poniższe twierdzenia są wyłożone tylko w geometryi euklidesowej i w geometryi Łobaczewskiego; następnie po twierdzeniu XXXIII, którego miejsce logiczne powinnoby być właściwie przed paragrafem niniejszym, wprowadzić do pewnej liczby tych podań pewne ograniczenia niezbędne,—jak to wskażemy po podaniu XXIII-em—na to, aby te twierdzenia były też prawdziwemi i w geometryi riemannowskiej.

I. Na prostej danej i skończonej nakreślić trójkąt równoboczny [Patrz Legendre, II. Zad. 10].

II. Od punktu danego A poprowadzić prostą, równą prostej danej BC. [Łączymy A i B prostą, na AB kreślimy trójkąt równoboczny ABD; okrąg, zakreślony ze środka B promieniem BC, przecina prostą DB przedłużoną w punkcie E; okrąg ze środka D, zakreślony promieniem DE, przecina prostą DA przedłużoną w punkcie F. Linia $AF = BC$. Konstrukcya ta opiera się jedynie na trzech pierwszych postulatach i na podaniu I].

III. Dane są dwie proste nierówne; odjąć od większej prostą, równą mniejszej. [Rozwiązanie sprowadza się do poprzedzającego].

IV. Dwa trójkąty są równe, gdy mają kąt równy, zawarty między dwoma bokami odpowiednio równemi [patrz Legendre, I, post. 6].

V. W trójkącie równoramiennym BAC kąty B i C, przeciwległe bokom równym AC, AB są równe. Przedłużamy boki AC i AB poza C i B, odpowiednio do E i D; kąty CBD i BCE będą także równe. [Weźmy $CE=BD$ na przedłużeniach boków AC, AB; poprowadźmy proste CD, BE; trójkąty ACD, ABE, następnie BCD i BCE są równe i t. d.].

VI. Odwrotnie, jeżeli w trójkącie dwa kąty są równe, to boki im przeciwległe będą równe i trójkąt będzie równoramiennym. [Patrz Legendre, I, 13].

VII. Dwa trójkąty ABC, ABD, położone po jednej stronie prostej AB, nie mogą być takiemi, aby było $AC = AD$, $BC = BD$. [Poprowadźmy CD, trójkąty ACD, BCD są równoramienne; jeżeli C jest zewnątrz trójkąta ABD i D zewnątrz trójkąta ABC, kąt ACD jest większy od BCD lub równego mu BDC, a zatem większy od ADC, co jest niedorzecznością, gdyż $ACD = ADC$; jeżeli C jest wewnątrz ADB, to niechaj EC, FD będą przedłużeniami boków BC, BD, wtedy kąt ACD jest większy od ECD lub od równego mu FDC, a więc większy od ADC, co jest niedorzecznością, gdyż $ACD = ADC$.]

VIII. Dwa trójkąty są równe, gdy mają po trzy boki odpowiednio równe. [Dowodzenie przy pomocy twierdzenia poprzedzającego].

IX. Podzielić kąt dany na dwie równe części. [Patrz Legendre, II. Zad. 5].

X. Podzielić prostą daną na dwie części równe. [Patrz Legendre, II. Zad. 1].

XI. Z punktu danego na prostej wystawić do niej prostopadłą. [Patrz Legendre, II. Zad. 2].

XII. Z punktu danego zewnątrz prostej poprowadzić do niej prostopadłą. [Patrz Legendre, II. Zad. 3].

XIII. Każda prosta, spotykająca drugą, tworzy z nią dwa kąty przyległe, których suma jest równa dwóm kątom prostym. [Patrz Leg. I. Zad. 2].

XIV. Jeżeli suma dwóch kątów przyległych równa się dwóm kątom prostym, to ramiona zewnętrzne tych kątów leżą na jednej prostej. [Patrz Leg., I. Zad. 4].

XV. Jeżeli dwie proste przecinają się, to kąty wierzchołkiem przeciwległe są równe. [Patrz Leg., I. Zad. 5].

Wniosek. Jeżeli prosta tworzy, z jednej i drugiej strony punktu, kąty równe z dwiema innemi prostemi, to te ostatnie są przedłużeniem jedna drugiej.

XVI. Gdy przedłużymy wzdłuż BD (Fig. 1) bok AB trójkąta ABC, to kąt zewnętrzny CBD będzie większy od każdego z kątów wewnętrznych nieprzyległych BAC, BCA. [Niechaj E będzie środkiem boku BP; przedłużmy AE o długość $EF = AE$, poprowadźmy FB. Trójkąt $BEF = ACE$, więc bok $BCA = BCF < CBD$. W ten sam sposób stwierdzamy, że kąt wierzchołkiem przeciwległy względem kąta CBD jest większy od CAB.

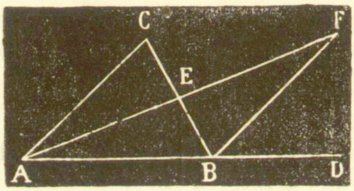

Fig. 1.

XVII. Suma dwu kątów trójkąta jest mniejsza od dwu kątów prostych. [Wynik z twierdzenia poprzedzającego].

XVIII. W trójkącie ABC naprzeciw boku większego AC leży kąt większy B. [Na boku $AC > AB$ odetnijmy długość $AD = AB$, będzie kąt $B > ABD$, który jest równy kątowi $ADB > C$].

XIX. W trójkącie naprzeciw kąta większego leży bok większy. [Wynik twierdzenia poprzedzającego].

XX. W trójkącie ABC bok AB jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych boków AC, CB. [Przedłużmy AC na długość $CD = BC$ poprowadźmy DB; będzie kąt $D =$ kątowi $DBC < DBA$, a zatem $AB < DA$, DA zaś $= BC + CB$].

W n i o s e k. W wielokącie jeden bok jest mniejszy od sumy pozostałych boków.

XXI. Jeżeli z punktu, wziętego wewnątrz trójkąta, poprowadzimy do końców jednego boku dwie proste, to suma tych prostych będzie mniejsza od sumy dwu pozostałych boków trójkąta, a kąt pomiędzy temi prostemi będzie większy od kąta pomiędzy bokami. [Dowodzenie za pomocą podań 16 i 20; patrz także L e g. I, 9].

XXII. Nakreślić trójkąt, mający jako boki trzy proste, z których każda jest mniejsza od sumy dwóch pozostałych. [Patrz Le g. II. Zad. 10].

XXIII. W punkcie prostej danej nakreślić kąt równy danemu. [Patrz Leg., II. Zad. 4].

XXIV. Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego i jeżeli kąt, zawarty pomiędzy temi bokami w pierwszym trójkącie, jest mniejszy od kąta, zawartego między odpowiedniemi bokami w drugim trójkącie, to trzeci bok pierwszego trójkąta będzie większy od trzeciego boku drugiego trójkąta. [Patrz Leg. I. 10].

XXV. Odwrotnie, jeżeli dwa boki jednego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego trójkąta i bok trzeci pierwszego jest większy od boku trzeciego w drugim, to i kąt, zawarty pomiędzy dwoma pierwszemi bokami w pierwszym, będzie większy od kąta, zawartego pomiędzy odpowiedniemi bokami w drugim. [Patrz Leg. I, 10, Scholion].

XXVI. Dwa trójkąty są równe, jeżeli mają po dwa kąty odpowiednio równe i po boku, zawartym pomiędzy kątami równemi, odpowiednio równym. [Niechaj ABC, DEF będą dwa trójkąty, w których $AB = DE$, kąty $A = D$, $B = E$ lub $C = F$. Gdyby było $AC > DF$, to odłożywszy $AG = DF$ na boku AC i poprowadziwszy GB, otrzymalibyśmy trójkąt AGB = trójkątowi DEF. Stąd byłby kąt E = kątowi $GBA < ABC$, co jest niedorzecznością, jeżeli $E = B$; lub byłby kąt F=kątowi $AGB > ACB$, co jest niedorzecznością, jeżeli przyjmiemy, że kąt $F = C$].

VI.

Twierdzenia wspólne geometryi euklidesowej i geometryi Łobaczewskiego [1]).

XXVII. Jeżeli prosta (nieriemannowska) tworzy z dwiema innemi prostemi (również nieriemannowskiemi) AB, CD kąty naprzemianległe

[1]) Te twierdzenia z wyjątkiem XXIX-go, które przejmujemy od Euklidesa, są niezależne od postulatu 5-go, lecz opierają się w istocie rzeczy na postulacie 6-ym.

wewnętrzne równe AEF, EFD to te dwie proste nie spotykają się (Euklides I, 27). [Gdyż gdyby te dwie proste spotykały się po stronie punktów B i D, w punkcie, dajmy na to, G, mielibyśmy kąt AEF zewnętrzny dla trójkąta EFG, równy kątowi zewnętrznemu EFG lub EFD, co jest niedorzecznem według XVI. Podobnież proste nie mogą spotkać się po drugiej stronie, w punkcie jakimś H po za punktami A i C].

Wniosek Dwie proste nie spotykają się także, gdy i kąty naprzemianległe zewnętrzne lub kąty odpowiadające (jeden zewnętrzny i drugi zewnętrzny po tej samej stronie poprzecznej) są równe, lub gdy suma dwóch kątów wewnętrznych lub zewnętrznych po jednej stronie jest równa dwóm prostym [Euklides I, 28].

XXVIII. Pierwsze twierdzenie Legendre'a. W trójkącie (nieriemannowskim) suma trzech kątów nie może być większa od dwóch kątów prostych.

Dowodzenie pierwsze (Legendre, Géométrie. Wyd. 3-e. Paryż. Didot 1800, księga I, tw. 19).

„Niechaj będzie, jeżeli to możliwe (Fig. 2), trójkąt ABC, w którym suma trzech kątów jest większa od dwu kątów prostych.

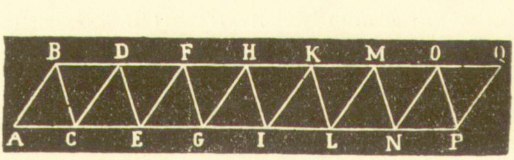

Fig. 2.

Przedłużmy AC, na przedłużeniu weźmy $CE=AC$, uczyńmy kąt $ECD=CAB$, bok $CD=AB$, poprowadźmy DE i BD. Trójkąt CDE będzie równy trójkątowi BAC, ponieważ oba mają po kącie równym, zawartym pomiędzy bokami odpowiednio równemi (tw. IV); będzie zatem kąt $CED=ACB$, kąt $CDE=ABC$ i bok trzeci ED równy bokowi trzeciemu BC.

Ponieważ linia ACE jest prostą, to suma kątów ACB, BCD, DCE jest równa dwóm kątom prostym; ponieważ zaś zakładamy, że suma kątów trójkąta ABC jest większa od dwu kątów prostych, będzie zatem:

$$CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD,$$

a odejmując od stron obu tej nierówności wyraz wspólny im ACB oraz $CAB = ECD$, znajdziemy $ABC > BCD$. Ponieważ zaś boki AB, BC trójkąta ABC są równe odpowiednio bokom CD, CB trójkąta BCD, więc wynika stąd, że kąt trzeci AC jest większy od boku trzeciego BD (tw. XXIV).

Wyobraźmy sobie linię AC nieograniczenie przedłużoną oraz szereg trójkątów równych i podobnie umieszczonych: ABC, CDE, EFG, GHI i t. d.; jeżeli przez wierzchołki ich sąsiednie poprowadzimy proste BD, DF, FH, HK i t. d., utworzymy równocześnie szereg trójkątów pośrednich BCD, DEF, FGH i t. d., które będą wszystkie równemi sobie, gdyż będą miały po kącie równym, zawartym pomiędzy bokami odpowiednio równemi. Będzie tedy $BD = DF = FH = HK$ i t. d.

To mając, oznaczmy różnicę dwu prostych AC i BD, z których pierwsza ma być większa od drugiej, przez d; to wtedy jest jasnem, że $2d$ będzie różnicą pomiędzy prostą ACE, równą $2AC$, a linią prostą lub łamaną BDF, równą $2BD$; będzie tym sposobem $AE - BF = 2d$. Podobnież będzie $AG - BH = 3d$, $AI - BK = 4d$ i td. Otóż, chociażby różnica d była dowolnie małą, jest widocznem, że będąc powtórzona dostateczną liczbę razy, stanie się większą od długości dowolnie danej. Można będzie zatem przypuścić, że szereg trójkątów rozciąga się tak daleko, że jest $AP - BQ > 2AB$, a wtedy byłoby $AP > BQ + 2AB$. Lecz z drugiej strony linia AP, jako prosta, jest krótsza od linii łamanej $ABPQ$, łączącej końce A i P, tak że będzie zawsze $AP < AB + BQ + QP$ lub $AP < BQ + 2AB$. Tak więc założenie, z któregośmy wyszli, doprowadziło do sprzeczności; a stąd wynika, że suma kątów trójkąta ABC nie może być większa od dwu kątów prostych".

D o w o d z e n i e d r u g i e [1]. Załóżmy, że suma kątów trójkąta ABC (Fig. 1, tw. XVI) jest większa od dwu kątów prostych,

[1] To drugie dowodzenie, które także zawdzięczamy L e g e n d r e'owi, znajduje się w księdze (tw. 19 jego „Geometryi", lecz tylko w wydaniu 12-em (1823) z nieznacznym błędem, który poprawił Ł o b a c z e w s k i w Nr. 19 swo-

naprzykład o kąt α. Niechaj BC będzie najmniejszym bokiem trójkąta ABC. Łatwo widzieć, że suma kątów trójkąta ABF równa się sumie kątów trójkąta ABC. Nadto, najmniejszy bok BAC trójkąta ABC równa się sumie kątów $AFB + BAF$ trójkąta ABF. Mniejszy z tych dwu kątów AFB, BAF, jeżeli są nierównemi, jest mniejszy od $\frac{1}{2}$ BAC, a jeżeli są równemi, to każdy z nich równa się $\frac{1}{2}$ BAC. Postępując z trójkątem ABF tak samo jak z trójkątem ABC, wyprowadzimy z niego inny trójkąt, którego kąt najmniejszy jest co najwyżej równy połowie mniejszego z kątów AFB, BAF, a więc równy co najwyżej $\frac{1}{4}$ BAC. Postępując w ten sposób dalej, doszlibyśmy do trójkąta, w którym suma kątów byłaby zawsze równa sumie kątów trójkąta ABC, t j. równałaby się dwóm kątom prostym więcej α. Lecz równocześnie mielibyśmy w tym trójkącie dwa kąty, których suma byłaby dowolnie małym ułamkiem kąta BAC, a więc byłaby mniejszą od α; oraz trzeci kąt, mniejszy od dwu prostych. W tym trójkącie zatem suma kątów byłaby równocześnie: 1-o równa 2 kąt. prost. $+ \alpha$; 2-o mniejsza niż 2 kąt. prost. powiększone o kąt mniejszy od α, doszlibyśmy tedy do sprzeczności. Wynika stąd, iż nie można przyjąć, że w trójkącie nieriemannowskim suma kątów jest większa od dwu kątów prostych. Tym sposobem twierdzenie zostało udowodnione.

XXIX. Drugie twierdzenie Legendre'a. Jeżeli w jednym trójkącie suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym, to będzie też równą dwóm kątom prostym w każdym innym trójkącie.

„Załóżmy, że w trójkącie ABC (Fig. 3) suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym, dwa tedy z tych trzech kątów, — niechaj niemi będą A i C, — muszą być ostre [1]). Z wierzchołka B trzeciego

jej pracy: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie des Parallellinien" (Dzieła str. 557). Dowodzenie to opiera się na tej samej konstrukcyi, co wyżej podane twierdzenie XVI Euklidesa.

[1]) Dajemy dosłowne dowodzenie Łobaczewskiego (Geom. Untersuchungen i t. d. Nr. 20. Dzieła str. 558); nie jest ono może dostatecznie rozwinięte, lecz czytelnik może je sobie dopełnić tam, gdzie jest zbyt zwięzłem. Legendre dał inne dowodzenie dłuższe.

kąta poprowadźmy prostopadłą p do boku przeciwległego AC. Ta prostopadła podzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty prostokątne; w każdym z nich suma kątów powinna być też równa dwu kątom prostym, gdyż inaczej byłaby ona w jednym z nich większą od dwu prostych, a więc w trójkącie całkowitym mniejszą od dwu prostych. Otrzymamy tym sposobem trójkąt prostokątny, w którym ramionami kąta prostego będą p i q; przy pomocy niego będzie można utworzyć czworobok o bokach przeciwległych równych (tw. XXII) i o bokach przyległych p i q, wzajemnie prostopadłych. Powtarzając tę konstrukcyę, będzie można utworzyć inny czworobok,

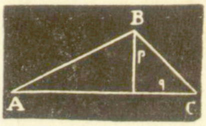

Fig 3.

którego bokami będą np i q i nakoniec czworobok $ABCD$ (Fig 4), mający boki wzajemnie prostopadłe i w którym $AB = mq$, $BC = np$, $DC = mq$, $AD = np$, gdzie m i n są jakiekolwiek liczby całkowite. Ten ostatni czworobok za pomocą przekątnej AC podzieli się na dwa trójkąty prostokątne równe ABC, ADC; w każdym z tych trójkątów suma trzech kątów będzie równa dwóm kątom prostym. Otóż można wziąć za m i n liczby dostateczne wielkie tak, aby trójkąt prostokątny ABC w którym ramiona kąta prostego są $AB = mq$ $BC = nq$, zawierał w swem wnętrzu każdy dany inny trójkąt prostokątny FBF, gdy uczynimy tak, aby kąty proste obu trójkątów przypadły na siebie. Prowadząc linię EC, otrzymujemy trójkąty prostokątne, mające z poprzedzającym po boku wspólnym. Trójkąt ABC

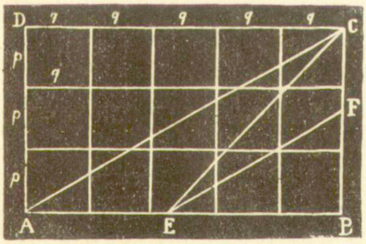

Fig 4.

jest utworzony przez połączenie dwu trójkątów ACE, ECB; w każdym z nich suma trzech kątów nie może być większa od dwu kątów prostych; powinna ona być zatem w każdym z nich równą dwóm prostym, gdyż inaczej nie byłaby równa dwóm prostym w trójkącie całkowitym. Podobnież trójkąt ECB składa się z dwu trójkątów ECF, FEB, skąd wynika, że w trójkącie FEB suma trzech kątów powinna być równa dwóm kątom prostym. To powinno zachodzić ogólnie dla jakiegokolwiek trójkąta, gdyż każdy trójkąt może być rozłożony na dwa trójkąty prostokątne“.

Wniosek. W geometryi nieriemannowskiej możliwe są tylko dwie hypotezy: suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym we wszystkich trójkątach, albo jest mniejsza od dwóch kątów prostych we wszystkich trójkątach.

VII.

Twierdzenia charakterystyczne geometryi euklidesowej i geometryi Łobaczewskiego [1].

XXX. Jeżeli postulat piąty jest prawdziwy, to dwie proste nie spotykające się tworzą z poprzeczną kąty wewnętrzne, których suma jest równa dwóm kątom prostym (Euklides I, 29).

Gdy bowiem ta suma nie jest równa dwóm kątom prostym, wtedy jest większa od dwu kątów prostych po jednej stronie poprzecznej, mniejsza są zaś od dwu kątów prostych po stronie drugiej, albowiem według twierdzenia XIII, suma czterech kątów wewnętrznych jest równa czterem kątom prostym. Lecz według postulatu piątego proste dane powinny się spotkać po stronie poprzecznej, po której ta suma jest mniejszą od dwu kątów prostych, a to sprzeciwia się założeniu. A więc i t. d.

Uwaga. W geometryi euklidesowej proste nie spotykające się nazywamy równoległemi.

Wniosek. Dwie równoległe tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, kąty naprzemianległe zewnętrzne równe, kąty odpowiadające (t. j. położone po jednej stronie, jeden wewnętrzny, drugi zewnętrzny) równe.

XXXI. Jeżeli *BD* jest przedłużeniem boku *AB* (fig. 5) trójkąta *ABC*, to kąt zewnętrzny *CBD* równa się sumie dwu kątów wewnętrznych nie przyległych mu

[1]) W tym paragrafie i następnym przyjmujemy postulat 6-y Euklidesa.

ACB, *BAC*; suma zaś trzech kątów wewnętrznych trójkątów jest równa dwóm kątom prostym, jeżeli postulat piąty jest prawdziwy. (Euklides I, 31—32).

Utwórzmy kąt *CBF* równy kątowi *ACB* (tw. XYIII); prosta *BF* będzie równoległa do prostej *AC* (tw. XXVII), a stąd (tw. XXX, wniosek) kąt *FBD* będzie równy kątowi *CAB*. A więc kąt *CBD*, równy *CBF*+*FBD*, będzie równy sumie dwu kątów wewnętrznych *ACB*, *CAB*. Stąd *ABC* + *CBD* równa się sumie trzech kątów wewnętrznych *ABC*, *ACB*, *CAB*.

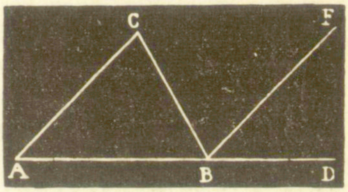

Fig. 5.

Wniosek. Jeżeli postulat piąty jest prawdziwy, suma kątów w czworoboku równa się czterem kątom prostym.

XXXII. Odwrotnie, jeżeli suma kątów w każdym trójkącie jest równa dwóm kątom prostym, to postulat piąty jest prawdziwy, t. j. dwie proste *AB*, *CD*, tworzące z trzecią prostą *EF* po jednej stronie poprzecznej dwa kąty wewnętrzne, których suma jest równa dwóm kątom prostym, będąc przedłużone dostatecznie, przecinają się po tej stronie (Legendre, wyd. 12-e. I. 23).

„Niechaj suma *BEF*+*EFD* (Fig. 6) będzie mniejsza od dwu kątów prostych; poprowadźmy prostą *FG* w ten sposób, aby kąt

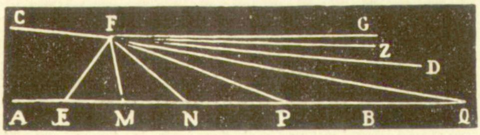

Fig. 6.

EFG=*AEF*; otrzymamy wtedy sumę *BEF*+*EFG*=*BEF*+*AEF* t. j. równą dwóm kątom prostym, a ponieważ suma *BEF*+*EFD* jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przeto prosta DF zawarta będzie wewnątrz kąta EFG.

Przez punkt F poprowadźmy pochyłą FM, spotykającą prostą AB w punkcie M; kąt ABF będzie równy GFM, gdyż dodając po jednej i drugiej stronie po $EFM + FEM$, otrzymujemy po każdej stronie dwa kąty proste. Bierzemy $MN = FM$ i prowadzimy FN; kąt AMF zewnętrzny dla trójkąta FMN równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych MFN; MNF (tw. XXXI); te zaś kąty są równe, ponieważ leżą naprzeciwko boków równych MN, FM; a zatem kąt AMF lub równy mu MFG jest dwa razy większy od kąta MFN. Prostą więc FN dzieli na dwie równe części kąt GFN i spotyka linię AB w punkcie N, położonym w odległości $MN = FM$.

Tymże sposobem dowieść można, że gdy weźmiemy $NP = FN$, wyznaczymy na prostej AB punkt F, w którym kończy się prosta FP, tworząca kąt GFP, równy połowie kąta GFN lub czwartej części kąta GFM.

Można więc kolejno brać połowę, część czwartą, ósmą i t. d. kąta GFM; proste zaś, za pomocą których uskutecznia się to dzielenie, spotykać będą prostą AB w punktach coraz bardziej odległych, lecz łatwych do wyznaczenia, gdyż $MN = FM$, $NP = FN$, $PQ = FP$ i t. d.

Lecz prowadząc to kolejne dzielenie kąta GFM, dojdziemy do kąta GFZ mniejszego niż kąt dany GFD, i pozostanie prawdą to, że prosta FZ przedłużona spotyka prostą AB w punkcie oznaczonym; tem bardziej więc prosta FD, zawarta w kącie EFZ, spotyka prostą AB".

W n i o s e k I. W geometryi euklidesowej, t. j. przy przyjęciu postulatów 5-go i 6-go, suma trzech kątów trójkąta jest równa dwóm kątom prostym.

W n i o s e k II. W geometryi Ł o b a c z e w s k i e g o, t. j. gdy odrzucamy postulat 5-y i przyjmujemy 6-y, suma trzech kątów trójkąta jest zawsze mniejsza od dwóch kątów prostych; suma kątów czworoboku jest mniejsza od czterech kątów prostych.

Gdyż nie może być większą (twier. XXVIII); gdyby zaś była równa dwóm prostym w jednym trójkącie, byłaby takąż we wszystkich (tw. XXXI) i wtedy (tw. XXXII) postulat piąty byłby prawdziwy, co sprzeciwia się określeniu geometryi Łobaczewskiego.

Uwaga. Zbierając powyższe fakty, powiemy, że suma kątów trójkąta jest równa dwóm bokom prostym w geometryi euklidesowej, mniejsza od dwu prostych—w geometryi Łobaczewskiego. Zobaczymy, że w geometryi riemannowskiej jest większą od dwóch kątów prostych.

VIII.

Twierdzenia charakterystyczne geometryi riemannowskiej [1]).

XXXIII. Jeżeli dwie proste, przechodzące przez punkt A, mają drugi punkt[2]) przecięcia B, wtedy wszystkie inne proste na płaszczyznie dwóch pierwszych prostych, przechodzące przez punkt A, przechodzą także przez punkt B[3]).

---

[1]) Prosimy usilnie czytelnika, aby nie czytał rozumowań poniższych, nadając milcząco wyrazowi „prosta“ to znaczenie, jakie on posiada w geometryi Euklidesa lub Łobaczewskiego. W paragrafie niniejszym, którego miejsce logiczne—wyłączając ostatnie twierdzenie—powinnoby być po paragrafie czwartym, wyrazy: prosta, płaszczyzna, koło, oznaczają utwory geometryczne, posiadające jedynie własności, wypowiedziane w definicyach 5-ej, 6-ej i 7-ej i w pierwszych czterech postulatach; nadto przez samą definicyę geometryi riemannowskiej odrzucamy postulat 6-ty i dlatego przyjmujemy, że istnieje przynajmniej jedna para prostych, mogących zamykać przestrzeń.

[2]) Punkt drugi jest wzięty w znaczeniu właściwem; przyjmujemy, że pomiędzy A i B niema punktu X, wspólnego prostym uważanym; gdyby bowiem tak było, punkt B byłby przynajmniej trzecim, nie zaś drugim punktem przecięcia tych prostych.

[3]) Gauss zauważył—i można to udowodnić sposobem elementarnym,—że w geometryi nieeuklidesowej nie istnieje dla figur płaskich podobieństwo bez równości. Nie ma tedy sposobu nakreślenia figury podobnej do figury nieeuklidesowej w skali mniejszej od rzeczywistości; można tylko wskazać jej rozkład ogólny. Z tego to powodu musimy punkt B naznaczyć na kierunku wszystkich prostych figury.

Niechaj będą (fig. 7) dwie proste Aa, Ad, spotykające się poraz drugi w punkcie B. Z punktu A, jako ze środka, promieniem Aa, mniejszym od AB, zakreślmy koło $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, spotykające prostą Aa w punkcie a, prostą Ad w punkcie d. Przyjmujemy dla ustalenia myśli, że łuk ad stanowi $\frac{3}{7}$ okręgu. Można pomyśleć na okręgu punkt g, taki, że łuk dg równa się łukowi ad; powiadamy, że prosta Ag spotka prostą Ad w punkcie B. W samej

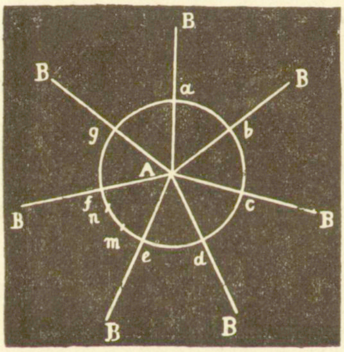

Fig. 7.

rzeczy, można przenieść figurę $AaBdA$, utworzoną przez dwie proste AaB, AdB w ten sposób, że pierwsza z tych prostych AaB zleje się z drugą AdB, ta zaś z prostą Ag. Ponieważ zaś proste AaB, AdB spotykają się w punkcie B, więc to samo będzie z temi prostemi w ich nowem położeniu AdB i Ag, co było do okazania.

Niechaj będzie jeszcze łuk $gc = dg$, $cf = gc$, $fb = cf$, $be = fb$. Proste Ag, Ac, Af, Ab, Ae spotkają się także z prostemi Ad i Aa w punkcie B. W ten sposób, siedm prostych, przechodzących przez punkt A i przez siedm punktów a, b, c, d, e, f, g (one te właśnie dzielą okrąg na części równe), spotkają się wszystkie w punkcie B. Dwie którekolwiek z nich nie mogą przeciąć się w punkcie, położonym przed punktem B; gdyby bowiem przecinały się w jakimś punkcie X, zanim przetną się w punkcie B, to możnaby dowieść, że też samo miałoby miejsce i dla innych prostych, a więc dla prostych Aa i Ad, a stąd punkt B nie byłby drugim punktem przecięcia tych ostatnich.

Proste Am, An, przechodzące przez punkty podziału jednego z tych łuków, np. ef na trzy lub więcej części równych, przetną się także po raz drugi w punkcie B. Przyjmijmy na początek, że jedna z tych prostych Am spotyka prostą AeB w punkcie B; wtedy, jak wyżej, łatwo dowieść, że prosta An spotyka prostą Am w punkcie B, podobnież jąk dowiedziono, że Ag spotyka Ad w punkcie B. Gdyby prosta Am spotykała prostą AeB przed punktem B, np. w punkcie X, wtedy, jak wyżej, musiałyby proste An i Af spotykać proste Am i Ae w punkcie X; a zatem punkt B nie byłby punktem drugiego spotkania prostych Af i Ae [1]).

Proste tedy, przechodzące przez punkt A i przez punkty podziału okręgu na jakąkolwiek liczbę części równych, t. j. wszystkie wyobrażalne proste, wychodzące z punktu A, spotykają prostą Aa po raz drugi w punkcie B [2])

Wniosek I. Dwie jakiekolwiek proste, przechodzące przez inny punkt C płaszczyzny, przecinają się w drugim punkcie D, położonym w tej samej odległości od punktu C, w jakiej znajduje się punkt A od punktu B. Albowiem można przesunąć na płaszczyźnie te proste w ten sposób, aby punkt C zlał się z punktem A, aby same te proste zlały się z dwiema prostemi,

---

[1]) Zauważyć należy, że prosta Am, nieograniczenie przedłużona, powinna spotykać prostą AeB lub AfB, lub obie te proste razem, w punkcie B. Gdyby bowiem było inaczej, to moglibyśmy wziąć na Am długość Amp większą od AeB np równą $AeBq$, gdzie q jest po za punktem B na linii AeB. Okrąg, zakreślony ze środka A promieniem Aq, miałby punkt q zewnątrz i punkt p wewnątrz przestrzeni $AeBfA$, zamkniętej prostemi AeB, AfB, i spotykałby przynajmniej jednę z prostych w pewnym punkcie Y. Odległość AY, mniejsza od AB (lub równa AB), byłaby równa promieniowi Aq, większemu od AP, co jest niedorzecznem.

[2]) Można uważać, — jeżeli chcemy, — łuki niespółmierne z okręgiem; lecz przypadek ten zgodnie ze znaczeniem symbolicznem wyrazu „niaspółmierny“, sprowadza się do przypadku rozważanego w tekście.

przechodzącemi przez punkt A i spotkały się po raz drugi w punkcie D. Odległość AB lub CD oznaczać będziemy przez $2\,\Delta$.

Wniosek II. Prosta aA, przedłużona po za punkt A wzdłuż Aa', kończy się w punkcie B, gdzie spotyka proste AdB, AcB.

Określenie. Dwa punkty takie, jak A i B, odległe na $2\,\Delta$, nazywają się przeciwległemi.

Wniosek III. Punktowi A' prostej Aa (fig. 8) odpowiada punkt przeciwległy B', położony na przedłużeniu prostej aB; prosta $A'Aa'$, przedłużona, kończy się w punkcie B', a więc przedłużenie prostej aB po za punkt B ku B' zlewa się z prostą $Aa'B$. Stąd prosta riemannowska jest linią zamkniętą $AaBa'B$ o długości $4\,\Delta$, na której można posuwać się nieograniczenie jak na okręgu koła; odległość największa punktów na niej wynosi $2\,\Delta$.

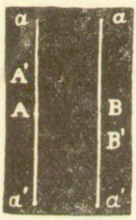

Fig. 8.

Wniosek IV. Płaszczyzna riemannowska, utworzona przez ogół prostych riemannowskich Aa, Ab i t. d., jest powierzchnią zamkniętą, podzieloną na dwa obszary przez każdą z tych prostych.

Wniosek V. Dwie jakiekolwiek proste riemannowskie m i n przecinają się w dwóch punktach przeciwległych. W rzeczy samej (fig. 9), przeprowadźmy prostą AC od punktu A pierwszej

Fig. 9

prostej m do punktu C drugiej prostej n; prosta AC spotka pierwszą prostą w drugim punkcie B, przeciwległym punktowi A, drugą zaś prostą w drugim punkcie D, przeciwległym punktowi C. Prostą $ACBA$, na której znajdują się punkty C i D, punkt B dzieli na dwie części równe; punkt C znajduje się w części pierwszej, punkt D w części drugiej, ponieważ $CD = AB = 2\,\Delta$.

A zatem linia m otacza w zupełności punkt C, ponieważ łączy punkty A i B po prawej i po lewej stronie prostej ACB. Wynika stąd, że linia n, łącząca punkty C i D, znajdujące się też po prawej i po lewej stronie prostej ACB, spotyka linię n w dwóch punktach. Te punkty są przeciwległemi według wniosku 1-go.

Wniosek VI. W geometryi riemannowskiej postulat 5-y Euklidesa jest zawsze prawdziwy, albowiem proste, na jednej płaszczyźnie położone, zawsze się spotykają. W geometryi Łobaczewskiego postulat 6-ty Euklidesa jest zawsze prawdziwy; gdyby bowiem był nieprawdziwym w jednym tylko przypadku, to możnaby stąd wyprowadzić twierdzenie XXXIII, a z niego wniosek VI, który nie jest prawdziwym w geometryi Łobaczewskiego.

Uwaga. Dwadzieścia sześć twierdzeń § V są prawdziwemi w geometryi riemannowskiej; lecz w niektórych z nich należy wprowadzić ograniczenie, pochodzące stąd, że odległości uważane w danych tych twierdzeń, konstrukcye lub rozumowania nie powinny przekraczać granicy 2Δ, by dowodzenia i rozwiązania były bez zarzutu. Dla trójkątów najprościej przyjąć w definicyi, że boki ich są mniejsze od 2Δ. Znajdujemy dość łatwo, że konstrukcya, przyjęta w twierdzeniu I, pociąga za sobą to, iż bok mającego się wykreślić trójkąta równobocznego jest mniejszy nietylko od 2Δ, lecz nawet od $\frac{4}{3}\Delta$. Podobne wszakże ograniczenie nie stosuje się do twierdzeń II i III, w których konstrukcye zawsze są wykonalne, i więcej niż raz jeden w razie potrzeby. W twierdzeniu XVI i w twierdzeniach do tegoż zależnych zakłada się w istocie rzeczy, że długości uważane są mniejsze od 2Δ. Lecz znaczna liczbą twierdzeń, wbrew pozorom, utrzymuje się we wszystkich przypadkach.

Dla zwięzłości nie wymieniamy szczegółowo ograniczeń, jakie należy wprowadzić do twierdzeń § V-go; czytelnik, obznajmiony z geometryą euklidesową, pozna z łatwością, że własności figur prostokreślonych płaszczyzny riemannowskiej są analogicznemi do własności figur, utworzonych na powierzchni kuli przez łuki kół wielkich. Co się tyczy twierdzeń XXVII do XXXII, gdzie wyraźnie lub niewyraźnie zachodzą proste nieskończone, to oczywiście twierdzenia te mogą być dowiedzione tylko w geometryi Euklidesa lub Łobaczewskiego.

XXXIV. W trójkącie riemannowskim ABC suma trzech kątów trójkąta jest większa od dwóch kątów prostych (dowodzenie De Tilly'ego). Niechaj E będzie środkiem prostej CB (fig. 10); poprowadźmy prostą AE i przedłużmy ją o długość $EF = AE$; poprowadźmy też prostą FB. Trójkąt EFB będzie równy trójkątowi EAC. Przyjmijmy, że punkt F znajduje się wewnątrz trójkąta CBO, gdzie O jest punktem spotkania prostych ACQ i AB; t. j. punktem przeciwległym

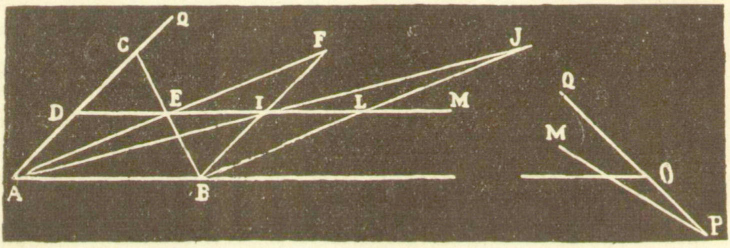

Fig. 10.

punktowi A. Niechaj I będzie środkiem prostej BF. Poprowadźmy prostą AI i przedłużmy ją tak, aby IJ było równe AI. Jeżeli punkt I znajduje się wewnątrz trójkąta BFO, to niechaj punkt L będzie środkiem prostej BI, $LN = AL$ (punkt N znajduje się po za granicami rysunku). Jeżeli punkt N jest jeszcze punktem wewnętrznym trójkąta BJO, to uskutecznijmy podobną konstrukcyę w trójkącie ABN i postępujmy w ten sposób dalej nieograniczenie.

Suma kątów w kolejnych trójkątach ABC, ABF, ABJ, ABN i t. d. jest zawsze jednakową, jak to łatwo widzieć. Rozumie się, że za kąt B w trójkątach ABF, ABJ, ABN . . . przyjmujemy sumy $ABE + EBF$, $ABI + IBJ$, $ABL + LBN$ i t. d.

Jeżeli jeden z tych kątów B, coraz bardziej rosnących, jest większy od dwóch prostych lub równy dwóm prostym, lub inaczej mówiąc, jeżeli jeden z punktów I, L i t. d., znajduje się zewnątrz trójkąta BCO lub na linii BO, twierdzenie jest dowiedzionem, gdyż ten kąt B, razem z dwoma pozostałemi kątami trójkąta, daje sumę większą od dwu kątów prostych.

Otóż, jeden z punktów I, L i t. d. jest koniecznie zewnątrz trójkąta BCO. W rzeczy samej, niechaj punkt D będzie środkiem prostej AC; poprowadźmy proste DE, EI, IL i t. d. Trójkąt CDE równa się trójkątowi BEI, przeto kąt CED równa się kątowi IEB, $EI = DE$ i jest przedłużeniem prostej DE. W tenże sposób dowodzi się, że IL równa się prostej EI i jest tej przedłużeniem. Prosta $DEIL$ przecina prostą $ACQO$ w punkcie P, położonym po za punktem O w odległości $OP = AD$. Stąd jeżeli na prostej $DEIL$ odkładać będziemy nieograniczenie proste EI, IL i t. d., równe prostej DE, która jest mniejszą od DEP t. j. od $2\,\Delta$, to przynajmniej jeden z punktów I, L i t. d. znajdzie się już to na linii AB, już to zewnątrz trójkąta BCO. Twierdzenie więc nasze jest dowiedzionem.

W n i o s e k. W czworoboku riemannowskim suma kątów jest większa od czterech kątów prostych.

IX.

Streszczenie. Istota postulatów 5-go i 6-go.

Treść, podana w pięciu paragrafach poprzedzających, daje się streścić w sposób następujący.

W wykładzie systematycznym geometryi dochodzimy logicznie do postawienia dwóch dylematów.

D y l e m a t p i e r w s z y.

1. A l b o istnieje, co najmniej, jedna para prostych różnych, mających dwa punkty wspólne (g e o m e t r y a r i e m a n n o w s k a). W tym przypadku każda para prostych, mających punkt wspólny, ma jeszcze drugi punkt wspólny, nazwany przeciwległym pierwszemu; suma zaś kątów każdego trójkąta jest większa od dwu kątów prostych;

2. a l b o dwie proste różne nie mogą mieć nigdy dwóch punktów wspólnych (postulat 6-y; g e o m e t r y a n i e r i e m a-

n o w s k a) i w tym przypadku suma kątów trójkąta nie jest nigdy większą od dwu kątów prostych (Twierdzenie pierwsze L e g e n d r e'a).

D y l e m a t d r u g i.

Jeżeli przyjmiemy drugą z powyższych hypotez, to:

1. a l b o dwie proste płaszczyzny, tworzące z poprzeczną kąty, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, spotykają się (postulat 5-y; g e o m e t r y a e u k l i d e s o w a). Wtedy suma kątów każdego trójkąta jest równa dwóm kątom prostym; ten przypadek zachodzi, jeżeli suma kątów chociażby jednego trójkąta równa się dwóm kątom prostym (Twierdzenie drugie L e g e n d r e'a);

2. a l b o, istnieje przynajmniej jedna para prostych tej samej płaszczyzny, które się nie spotykają, a tworzą z poprzeczną kąty, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych (g e o m e t r y a Ł o b a c z e w s k i e g o). W tym przypadku suma kątów każdego trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Te same myśli można wyrazić jeszcze pod inną postacią, a mianowicie:

Definicya 5-a oraz postulaty 1-y, 2-gi i 4-y charakteryzują r o d z a j: *prosta*.

Jeżeli dołączymy do tego tylko postulat 5-y, otrzymamy definicyę p r o s t e j r i e m a n n o w s k i e j; jeżeli dołączymy tylko postulat 6-y, — definicyę p r o s t e j Ł o b a c z e w s k i e g o; jeżeli wreszcie dołączymy postulaty 5-y i 6-y — będziemy mieli definicyę p r o s t e j e u k l i d e s o w e j.

Suma kątów w trójkącie riemannowskim jest większą od dwóch kątów prostych; jest mniejszą od dwóch kątów prostych w trójkącie Ł o b a c z e w s k i e g o; równa dwóm kątom prostym w trójkącie euklidesowym.

Ponieważ własności płaszczyzny, lub ogólniej, własności przestrzeni, zależą co do swej istoty od własności prostej, przeto należy rozróżniać także płaszczyzny i przestrzenie riemannowskie, Ł o b a c z e w s k i e g o i euklidesowe.

Własności wspólne trzem geometryom, są własnościami r o d z a j ó w: *prosta*, *płaszczyzna*, *przestrzeń*. W podręcznikach są one pomieszane bez odróżnienia z własnościami należącemi bądź do jednej, bądź do dwóch gatunków, które powyżej określono.

W przedstawieniu poprzedniem nie uciekaliśmy się do żadnego z twierdzeń dowolnych, które Kant nazwał sądami syntetycznemi a priori, Postulaty 5-y i 6-y nie należą wcale do tej kategoryi twierdzeń. Są to poprostu definicye zapoznane, jak się trafnie wyraził p. Lechalas. Postulaty 5-y i 6-y są niezbędne do odróżnienia gatunków rodzaju *prosta* i nic nadto [1]). Nie są one ani zawarte w definicyi prostej ogólnej ani nie są z nią w sprzeczności. Są wprost od tej definicyi niezależnemi.

X.

Zarys głównych twierdzeń metageometryi. Niemożność udowodnienia postulatów.

Doszedłszy raz do twierdzenia podstawowego o sumie trzech kątów trójkąta w geometryi euklidesowej, Łobaczewskiego lub Riemanna, możemy już wyłożyć równoległe te trzy gałęzie metageometryi lub geometryi ogólnej, jak to uczynił De Tilly w swym sławnym zarysie z r. 1878.

---

[1]) Niechaj nam wolno będzie podać tu porównanie. W algebrze badamy własności równań stopnia drugiego o spółczynnikach rzeczywistych: $ax^2+bx+c=o$. Równania te dzielą się na trzy klasy, według tego czy b^2-4ac jest ujemnem, dodatniem lub równem zeru, lub inaczej mówiąc, według tego, czy pierwiastki są urojone, równe albo też rzeczywiste i nierówne. Pewne własności równań stopnia drugiego są wspólne wszystkim trzem klasom: inne należą tylko do jednej albo do dwóch z pomiędzy tych klas. Można powiedzieć, naśladując język geometryczny, że $b^21-4ac > o$ jest postulatem, charakteryzującym równanie o pierwiastkach rzeczywistych nierównych; $b^2-4ac=o$ postulatem, cechującym równania o pierwiastkach równych; wreszcie $b^2-4ac < o$ postulatem, cechującym równania o pierwiastkach urojonych. Lecz umysł dziwaczny, mało obeznany z teoryami algebraicznemi i nasiąknięty poglądami Kanta, mógłby powiedzieć: rozum ludzki jest tak utworzony, iż przyjmuje bez żadnego sprawdzenia, że dla każdego równania stopnia drugiego jest $b^2-4ac = o$; związek ten jest „sądem syntetycznym a priori“, którego nie możemy nie przyjąć, ani też ściśle uzasadnić.

Metageometrya zawiera najprzód wiele twierdzeń wspólnych trzem geometryom. Za takie uważać można w „Geometryi“ Legendre'a, prócz 18 pierwszych twierdzeń w księdze I-ej, znaczną część twierdzeń w księgach II i IV, całą księgę VII oraz małą część księgi IV i VI.

Przeciwnie, teorya równoległych, teorya podobieństwa, mierzenie długości, powierzchni i objętości, jak są wyłożone u Legendre'a, należą wyłącznie do geometryi euklidesowej, zarówno jak i związek podstawowy

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad . \; . \; . \quad (E)$$

pomiędzy przeciwprostokątną a i przeciwprostokątnemi b i c w trójkącie prostokątnym, oraz wszystko, co od tego związku zasadniczo zależy.

W geometryi Łobaczewskiego teoryę równoległych zastępuje twierdzenie Saccheri'ego i jego wyniki: dwie proste płaszczyzny albo spotykają się, albo są asymptotami jedna dla drugiej, albo wreszcie rozchodzą się nieograniczenie, poczynając od prostopadłej wspólnej. Teorya podobieństwa nie istnieje; lecz łatwo stwierdzić, że dwa trójkąty, mające kąty odpowiednio równe, są równe. Szukanie długości, powierzchni i objętości uskutecznia się inaczej niż w geometryi euklidesowej. Znajdujemy tu np., że powierzchnia trójkąta jest proporcyonalna do jego niedomiaru kątowego, t. j do różnicy pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą jego kątów (twierdzenie Lamberta); bez względu przeto na wielkość trójkąta powierzchnia jego jest zawsze mniejszą od pewnej granicy skończonej. Związek pomiędzy trzema prostokątną a bokami trójkąta jest

$$\cos\mathrm{h}\frac{a}{l} = \cos\mathrm{h}\frac{b}{l}\cos\mathrm{h}\frac{c}{l} \quad . \; . \; . \quad (L)$$

gdzie l jest stałą, nazwaną stałą Łobaczewskiego [1]).

W geometryi riemannowskiej dwie proste płaszczyzny spotykają się zawsze w dwóch punktach przeciwległych; dwa trójkąty

[1]) cos h. sin h oznaczają dostawę i wstawę hyperboliczną.

o kątach równych są równe; teorya podobieństwa nie istnieje. Szukanie długości, powierzchni i objętości uskutecznia się prawie tak samo, jak w geometryi **Łobaczewskiego**. Powierzchnia trójkąta jest zawsze skończona i proporcyonalna do nadmiaru kątowego t. j. do różnicy pomiędzy sumą jego kątów a dwoma kątami prostemi Związek pomiędzy przeciwprostokątną, a przy prostokątnemi wyraża się w ten sposób

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} \quad . \; . \; . \quad (R)$$

gdzie r jest stałą, zwaną stałą riemannowską; tak, z $2\Delta = \pi r$ [1]).

Ze związków (E), (L), (R) wyprowadza się trygonometrye płaskie: euklidesową, **Łobaczewskiego** lub riemannowską. Różnią się one od siebie, lecz trygonometrya sferyczna jest jednakową we wszystkich systemach i identyczna z trygonometryą riemannowską płaską

Z każdego ze związków (E), (L), (R) wyprowadza się jeszcze odpowiedni związek pomiędzy dziesięcioma odległościami wzajemnemi pięciu punktów; nazwijmy te związki: (E'), (L'), (R'). **Lagrange** znalazł pierwszy z iych związków, **Schering** dwa pozostałe. **De Tilly** udowodnił, że związek (E') streszcza w sobie całkowicie geometryę euklidesową i że podobnie związki (L'), (R') streszczają w sobie dwie geometrye nieeuklidesowe. Można to samo przeto powiedzieć o związkach prostszych (E), (L), (R), ponieważ z nich dają się wyprowadzić związki (E'), (L'), (R') [2]).

---

[1]) Co do dowodu związku (L) patrz artykuł M. **Gérarda** w „Nouvelles Annales de mathématiques", 3-a ser. t. XII, str. 74—84 (luty 1893); co do związku (R) nasze: „Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de **Riemann**" (Supplément à „Mathesis" 1895, 2-e série, t. V). Zresztą dzieła **De Tilly**'ego zawierają dowody wszystkich twierdzeń, o których mowa w tekście.

[2]) Z punktu widzenia analizy związki (R'), (L'), (E') dają się wyprowadzić z następującego związku pomiędzy odległościami $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ jaki gokolwiek punktu x od punktów 1, 2, 3, 4, 5:

$$\alpha\cos\left(\frac{1\,x}{r}\right)+\beta\cos\left(\frac{2\,x}{r}\right)+\gamma\cos\left(\frac{3\,x}{r}\right)+\delta\cos\left(\frac{4\,x}{r}\right)+\varepsilon\cos\left(\frac{5\,x}{r}\right)=0,$$

gdzie α, β, γ, δ, ε są stałemi, od x niezależnemi. Znajdujemy (R'), gdy za x przyj-

Z punktu widzenia analizy matematycznej, związki (E), (L), (R) są przypadkami szczególnemi jednej równości. W rzeczy samej, związki (L) i (R) przekształcają się na związek (E), jeżeli uczynimy r lub l nieskończonem; związek (L) przechodzi na związek (R) i odwrotnie, jeżeli założymy $l = r\sqrt{-1}$. Podobnież związki (L') i (R') przechodzą na (E'), jeżeli uczynimy r lub l nieskończonem, wreszcie (L') staje się (R') i odwrotnie, jeżeli $l = r\sqrt{-1}$.

Trzy geometrye są, w gruncie rzeczy, rozwinięciem wyników ze związków (E) lub (E') (geometrya euklidesowa), (L) lub (L') (geometrya Łobaczewskiego), (R) lub (R') (geometrya riemannowska) Wszystkie trzy przeto są zarówno ścisłe i bez zarzutu pod względem budowy logicznej. W szczególności stosuje się to do geometryi euklidesowej. Lecz zanim sprowadzono do tego stopnia prostoty podstawy zasadnicze nauki o przestrzeni, nie umiano stwierdzić, że postulaty 5-y i 6-y geometryi euklidesowej mogą istnieć obok siebie, obok definicyj i innych postulatów De Tilly to, sprowadzając wszystkie prawdy trzech geometryj do związków (E'), (L'), (R') pomiędzy odległościami pięciu punktów, oparł na niewzruszonej podstawie zasady nietylko dwu geometryj nieeuklidesowych lecz także i geometryi euklidesowej.

Uwagi poprzedzające o związkach analitycznych pomiędzy odległościami wierzchołków trójkąta prostokątnego lub też pomiędzy jakiemikolwiek pięcioma punktami pozwalają nam zrozumieć a posteriori, dlaczego na próżno przez dwa tysiące lat usiłowano udowodnić postulaty 5-y i 6-y W gruncie rzeczy w tych próbach bezowocnych, usiłowano udowodnić, że związki (E) lub (E') są równoważne związkom (L), (L') lub (R), (R'). Otóż jest to oczywiście niemożliwem: albowiem, aby wyprowadzić (E') z (L')

---

mujemy kolejno 1, 2, 3, 4, 5, a następnie rugujemy stałe z pięciu otrzymanych równań; znajdujemy (L'), kładąc $r = l\sqrt{-1}$; znajdujemy wreszcie (E) jako przypadek graniczny, odpowiadający nieskończonym wartościom stałej r lub l. Patrz nasz artykuł o tym przedmiocie w „Annales de la Societé scientifique de Bruxelles“ 1894—1895, t. XIX, 2-e partie pp. 189—196.

Zresztą nic łatwiejszego nad utworzenie geometryi analitycznej ogólnej o czterech lub więcej wymiarach, t. j. geometryi, którą charakteryzuje związek pomiędzy odległościami sześciu lub więcej punktów.

lub (E) z (L), trzeba dołączyć do (L) lub (L') warunek dodatkowy, $l = \infty$; podobnież z (R) można otrzymać (E) lub z (R') otrzymać (E') tylko wtedy, gdy się założy $r = \infty$.

XI.

Geometrya fizyczna.

„Widzieliśmy, że gdy staniemy na stanowisku czysto-rozumowem, to wszystkie geometrye, ponieważ mogą być zbudowane bez prowadzenia do sprzeczności, mają jednakową wartość; jedne są tak samo prawdziwe jak drugie. Lecz można zapytać, do której z nich jest przystosowany nasz wszechświat. Dla wielu odpowiedź na to pytanie nie jest wątpliwą; wszechświat nasz jest euklidesowym. Temu twierdzeniu bez zastrzeżeń trzeba niezbędnie przeciwstawić najprzód ograniczenie, któremu nie zaprzeczy nikt, kto szedł dotąd za biegiem myśli naszych Z chwilą, gdy szukany system geometryi nie ma żadnej cechy konieczności, możemy go poznać jedynie za pomocą metody obserwacyj; tylko przez pomiary dojść będziemy mogli do oznaczenia parametru naszego wszechświata; do przyjęcia, że wszechświat nasz jest identyczny z samym sobą, do czego a priori nic nas nie zmusza. Odtąd, oznaczenie to będzie mogło być uskutecznione tylko z pewnym stopniem przybliżenia, jak wszystkie oznaczenia doświadczalne (G. Lechalas, Etude sur l'espace et le temps Paryż. 1896, str. 88"). Dalej trzeba będzie przyjąć, że możemy być praktycznie pewni niezmienności wzorców miar naszych, gdy używamy ich w różnych miejscach, przy zachowaniu wszystkich innych tych samych okoliczności.

W tem założeniu, możnaby określić doświadczalnie, która z trzech geometryj idealnych odpowiada światu fizycznemu i znaleźć, gdyby szło o to, wartość stałych Riemanna lub Łobaczewskiego.

W praktyce nitka wyprężona, bardzo delikatna, jest realizacyą możliwie dokładną ogólnego pojęcia prostej i pozwala nam stwierdzić, że krawędzie takiego ciała stałego są prostemi, że pewne powierzchnie są płaskiemi i t. d. Można więc zbudować narzędzia miernicze elementarne, np. liniały podzielone, za pomocą których można oceniać i porównywać odległości.

Można też kreślić figury geometryczne na płaszczyźnie, np. trójkąty prostokątne równoramienne. Przyjmijmy najprzód, że znaleziono dla podobnego trójkąta, że przeciwprostokątna równa się $\frac{4}{3}$ któregokolwiek z pozostałych boków. Wniesiemy stąd łatwo, że ta figura jest riemannowską, albowiem można oznaczyć wartość rzeczywistą $x = \frac{1}{4}\pi$, która sprawdza związek (R), napisany w przypadku obecnym pod postacią

$$\cos x \cos x = \cos \frac{4}{3} x,$$

gdzie x oznacza stosunek boku trójkąta do stałej riemannowskiej, gdy przeciwnie nie ma żadnej wartości na x, sprawdzającej związki (L) i (E), jak o tem można się przekonać. Stała riemannowska, będzie równa bokowi pomnożonemu przez $(4:\pi)$.

Przypuśćmy następnie, że znaleziono trójkąt prostokątny równoramienny, w którym stosunek przeciwprostokątnej do któregokolwiek z pozostałych boków równa się $2195:1469$; wniesiemy stąd, że ta figura należy do systemu geometryi Łobaczewskiego, dlatego, że związek (L), napisany w postaci

$$\cos\mathrm{h}\, x \cos\mathrm{h}\, x = \cos\mathrm{h} \frac{2195}{1469} x,$$

gdzie x oznacza stosunek boku do stałej Łobaczewskiego, spełnia się prawie dla $x = \sqrt{2}$, gdy tymczasem żadna inna wartość rzeczywista nie spełnia związków (R) lub (E). Stała Łobaczewskiego jest prawie równa bokowi, pomnożonemu przez $\sqrt{2}$.

Po trzecie, jeżeli mamy trójkąt równoramienny, w którym stosunek przeciwprostokątnej do któregokolwiek z pozostałych boków równa się $\sqrt{2}$, wniesiemy stąd, że ta figura jest euklidesową, albowiem związek (E) jest jedynym związkiem, spełniającym się przy tem założeniu.

Lecz, prawdę mówiąc, ten ostatni przypadek nigdy miejsca mieć nie będzie, gdyż nie możemy ściśle wymierzyć dwu długości, których stosunek jest liczbą niewymierną $\sqrt{2}$. Wartość przybliżona pierwiastka kwadratowego z 2 jest 1, 41421 35623 73... W praktyce można znaleść na wartości stosunku przeciwprostokątnej do boku trójkąta prostokątnego równoramiennego wartości przybliżone $\sqrt{2}$, np. wartości przybliżone przez niedomiar

1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 i t. d.

lub przybliżone przez nadmiar:

1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422 i t. d.

W pierwszym razie znajdziemy, że trójkąt jest riemanowskim; w drugim, że jest trójkątem Łobaczewskiego[1]). Lecz bez względu na stopień dokładności pomiaru, nigdy nie znajdziemy ściśle $\sqrt{2}$ na szukany stosunek; nie można więc stwierdzić doświadczalnie, że trójkąt prostokątny równoramienny jest euklidesowym.

Ten wniosek stosuje się do każdej figury, złożonej z pewnej liczby punktów, których odległości mierzymy. Te odległości, znane tylko przybliżenie, mogą prawie sprawdzać związek (E); lecz można zawsze parametrom r i l, zachodzącym w związkach (R') i (L') nadać wartość względnie do mierzonych odległości, dostatecznie wielką tak, aby te parametry z równą dokładnością sprawdzały związki (R') i (L'). A zatem jest niemożebnem stwierdzić, *że geometrya fizyczna jest euklidesową, nawet wtedy, gdy nią jest w rzeczy samej*

W istocie, w części wszechświata, dostępnej wprost lub pośrednio pomiarom naszym, geometrya fizyczna jest przybliżenie euklidesową. Wszystkie mierzone odległości sprawdzają z bardzo

---

[1]) Dla okazania tego, uzasadniamy za pomocą analizy wyższej następujące twierdzenie: Trójkąt prostokątny równoramienny jest trójkątem riemannowskim, euklidesowym lub trójkątem Łobaczewskiego stosownie do tego, czy stosunek przeciwprostokątny do boku jest mniejszy od $\sqrt{2}$, równy $\sqrt{2}$ lub większy od $\sqrt{2}$.

wielkiem przybliżeniem związek (E') lub związki nieeuklidesowe (R') i (L'), które, praktycznie rzecz biorąc, nie różnią się od związku (E'). Wyobraźnia nasza jest też, jeżeli tak powiedzieć wolno, bardzo przybliżenie euklidesową. Lecz pewne złudzenia optyczne, które pomiary i rozumowanie łatwo prostuje, na pierwszy rzut oka zdają się być w zgodzie z geometryami nieeuklidesowemi: 1-o Długie aleje równoległe drzew dają nam obraz prostych asymptotycznych Łobaczewskiego. 2-o Gdy na sklepieniu niebieskiem śledzimy wzrokiem dwa kierunki, wychodzące z jednego punktu widnokręgu, dochodzimy do przeciwległego punktu widnokręgu, jak gdybyśmy postępowali według prostych riemannowskich [1].

XII.

Metageometrya i kantyzm.

Euklides określił przed dwudziestu dwoma wiekami w swych „Elementach" pojęcia zasadnicze geometryi: punkt, prostą, płaszczyznę i t. d. ze ścisłością wystarczającą na to, by można było oprzeć na nich dedukcyę logiczną części ogólnej nauki o przestrzeni. Nadto, w postulatach 5-ym i 6-ym wyspecyalizował w istocie rzeczy definicyę prostej, aby można było udowodnić zasady specyalne tej części geometryi ogólnej, która nosi obecnie miano geometryi euklidesowej.

[1] „Reid okazał, że gdyby człowiek został zredukowany do samego zmysłu wzroku, i gdyby poznawszy, że rozciągłość powierzchowniowa ma dwa wymiary, brał za linie proste to, co w samej rzeczy stanowi łuki kół wielkich nakreślonych na powierzchni kuli, której środek znajduje się w oku—wtedy trójkąty, uważane za prostokątne, mogłyby mieć dwa, a nawet trzy kąty proste lub rozwarte i geometrya takiego człowieka byłaby zupełnie różną od naszej. Dwie np. linie, które on poczytywałby za proste, przecinałyby się zawsze w dwu punktach, tak że pojęcie dwóch prostych równoległych byłoby dla niego pojęciem sprzecznem". Ampère „Essai sur la philosophie des sciences". Première partie (2-e éd. str. 64.)

Łobaczewski, Riemann i ich następcy utworzyli dwie inne gałęzie geometryi ogólnej, geometryę Łobaczewskiego i geometryę Riemanna.

Trzy gałęzie metageometryi są naukami rozumowanemi, złożonemi z twierdzeń, których dowodzi się bez uciekania do doświadczenia, jedynie za pomocą analizy i porównywania pojęć zasadniczych. Te twierdzenia zatem są sądami analitycznemi, o ile nadajemy temu terminowi znaczenie tradycyjne: propositio per se nota, nie zaś znaczenie kantowskie sądów tożsamościowych lub jakoby tożsamościowych.

Z charakteru analitycznego twierdzeń geometrycznych wynika wartość apodyktyczna trzech gałęzi metageometryi i możliwość posługiwania się każdą z nich w dowodzeniach twierdzeń analizy czystej. Tak tedy za pomocą geometryi euklidesowej można było utworzyć trygonometryę ogólną, t. j. teoryę funkcyj: wstawa i dostawa, którą można też wyłożyć wprost bez pomocy geometryi. Teorya wstaw i dostaw mogła być następnie spożytkowana do badania geometryi Łobaczewskiego i Riemanna, tak, że pozornie, lecz tylko pozornie, te dwie geometrye opierać się zdają z konieczności na geometryi euklidesowej.

Geometrya fizyczna, przeciwnie, jest nauką obserwacyjną, w której posługujemy się geometryą rozumowaną, jako pomocniczą. Obserwacya ta pozwala wnioskować, że odległości fizyczne w przyrodzie sprawdzają bardzo przybliżenie związek (E) lub związki (L') i (R'), gdy w nich r i l są dostatecznie wielkie; inaczej mówiąc obserwacya uczy nas, że geometrya fizyczna jest prawie geometryą euklidesową i o trzech wymiarach. Z punktu widzenia logicznego, to ostatnie twierdzenie jest więc sądem empirycznym, albo — jeżeli chcemy użyć innej terminologii — sądem syntetycznym a posteriori.

W pierwszem wydaniu swojej Krytyki czystego rozumu (1781), później w formie bardziej rozwiniętej w wydaniu drugiem (1787) Kant wypowiedział o geometryi poglądy, będące w zupełnem przeciwieństwie z powyższem.

Zauważono (Milhaud, „Kant comme savant", w „Revue philosophique" z maja 1895, str. 482—510), że Kant nie posiadał poważnych wiadomości naukowych. Dotykał on wielu pytań, lecz raczej jako filozof niż uczony, będąc na sposób starożytnych, zaprzątnięty głównie myślą o zapewnieniu wiedzy podstaw a priori. Po Newtonie, po uczonych XVIII-go stulecia, Kant wydaje się nie należącym do swego czasu. Jego poglądy, nieraz genialne, mają charakter zbyt nieokreślony. Czujemy, że nie tworzą się one ani w zetknięciu z faktami, ani nawet w zetknięciu z wiedzą matematyczną ówczesną. Są one przeniknione naiwnością, mimo pozory formy uczonej, i przypominają raczej pewne teorye Arystotelesa lub nawet jończyków, niż Eulera lub Newtona" (str. 102—103).

Lecz Kant nauczył się i uczył matematyki elementarnej i był uderzony charakterem powszechności i konieczności jej twierdzeń. Z jednej strony miał głębokie przekonanie o pewności apodyktycznej tych twierdzeń; z drugiej zaś nie widział możności sprowadzenia ich do sądów analitycznych, co wynikło z powodu zbyt ciasnego pojmowania przezeń tych ostatnich. To przekonanie i ta niemożność doprowadziły go do utworzenia z matematyki (i później z metafizyki) nauki bezwzględnie subjektywnej. Twierdzenia zasadnicze matematyki, a zwłaszcza geometryi, z założenia pozbawione sprawdzenia we właściwem znaczeniu tego wyrazu, lecz takie zarazem, że umysł przystaje do nich z koniecznością, nazywa Kant sądami syntetycznemi a priori, dla odróżnienia ich od sądów syntetycznych a posteriori, lub twierdzeń empirycznych, w których atrybut wyraża pewną własność niekonieczną podmiotu [1]). Przestrzeń dla Kanta jest wyobrażeniem

[1]) Kant przytacza wyraźnie niewielką tylko liczbę rzekomych sądów syntetycznych a priori, odnoszących się do geometryi W trójkącie bok jeden jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych, przestrzeń ma tylko trzy wymiary; dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni i t. d. Pierwsze z tych twierdzeń jest w rzeczywistości należącym do geometryi rozumowej sądem analitycznym, którego dowód naszkicowaliśmy w § V według Euklidesa. Twierdzenie drugie należy do geometryi fizycznej, jest sądem syntetycznym a posteriori. Twierdzenie trzecie jest postulatem 6-ym Euklidesa, równoważnym definicyi, jak to wykazaliśmy w § IX. O tym postulacie 6-ym Kant mówi najprzód ze ścisłością geometry riemannowskiego: „So ist in dem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Wiederspruch" (Transc. Anal. II, 3, Nr. 4), lecz następnie system pociąga

koniecznem a priori, służącem za podstawę wszelkiej poglądowości zewnętrznej i będącem przyczyną pewności apodyktycznej wszystkich zasad geometrycznych.

Metageometrya jest w radykalnej sprzeczności z tem pojęciem przestrzeni, jako wyobrażeniem koniecznem a priori. W rzeczy samej, metageometrya pociąga za sobą możliwość nieograniczonej liczby różnych geometryj; najprzód geometryi euklidesowej, następnie wszystkich odmian geometryj nieeuklidesowych, odpowiadających wszelkim pomyśleć się dającym wartościom parametrów r i l. W jakiż sposób pogląd kantowski na przestrzeń mógłby dawać umysłowi wszystkie te różne geometrye, jako wyobrażenie konieczne a priori? Jest to oczywiście niemożliwem. Metageometrya jest niemniej w przeciwieństwie z poglądami Kanta, na przestrzeń około r. 1769, gdy wraz z różnymi filozofami przyjmował, że przestrzeń jest rzeczywistością zewnętrzną, istniejącą niezależnie od przedmiotów. W takim systemie podobnie jak w tym, w którym geometrya byłaby nauką zupełnie empiryczną, istnienie trzech systemów geometryi rozumowej jest równie niezrozumiałem, jak w systemie „Krytyki czystego rozumu“.

Nakoniec, metageometrya pozwala nam odpowiedzieć za pomocą argumentu ad hominem na pierwszą antynomię rozumu czystego: Świat jest równocześnie skończonym i nieskończonym w przestrzeni. Gdyby nawet rozumowanie Kanta było ścisłem; gdyby sprzeczność, którą zaznacza, nie pochodziła jedynie z pomieszania przestrzeni rzeczywistej i przestrzeni idealnej, to dla usunięcia wszelkich trudności wystarczyłaby uwaga, że w wykładzie Kanta tkwi w ukryciu przyjęcie, iż świat jest euklidesowym. Otóż, gdyby był riemannowskim, antynomia

go do wyrzeczenia twierdzenia wprost przeciwnego. W fizyce cytuje Kant jako sądy syntetyczne a priori: prawo stałości masy i prawo równości działania i przeciwdziałania; wątpimy, by rozumiał on ściśle znaczenie tych dwóch zasad, które są sądami syntetycznemi a posteriori. Sądzimy, że wszystkie sądy syntetyczne a priori Kanta należą do jednej z następujących kategoryj: są albo postulatami, t. j. „przebranemi“ definicyami; albo sądami analitycznemi, których nie umiał zanalizować; albo wreszcie sądami syntetycznemi a posteriori, których natury empirycznej nie poznał.

nie miałaby sensu; zasadniczo i faktycznie świat byłby skończonym.

Gdy się zastanowimy nad ciągiem myśli, które doprowadziły Kanta do jego systemu, dojdziemy do wniosku, który wyraził był p. Milhaud w wyżej wzmiankowanym artykule: „Punktem wyjścia „Krytyki czystego rozumu“ jest całkiem naiwne stwierdzenie charakteru konieczności i powszechności sądów matematycznych“ (str. 109). Subjektywizm metafizyczny Kanta, zdaje się, wyszedł z jego subjektywizmu matematycznego; na czele „Krytyki czystego rozumu“ postawiono, że tu użyjemy szczęśliwego wyrażenia p. Lechalasa, pewien gatunek imperatywu geometrycznego.

Metageometrya, wykazująca czczość poglądów Kanta na przestrzeń, zburzyła tedy metafizykę krytycyzmu, jak o tem wyraziliśmy się we Wstępie [1]).

DODATEK.

Geometrya, jako fizyka matematyczna odległości.

Leibniz określił linię prostą w sposób następujący: Prosta jest miejscem punktów nieruchomych ciała, które porusza się tak, że dwa jego punkty pozostają stałemi [2]).

---

[1]) „Hat nun Helmholtz Recht und ist das Kantische Fundament falsch, so fällt damit auch der Inhalt und die Methode, welche hieraus nothwendig hervorgewachsen; dann ist ferner die jahrhundertlange Richtung der deutschen Philosophie eine verfehlte“. (A. Krause, „Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschanung und der geometrischen Axiome“, Lahr 1878, Vorwort), Helmholtz jest tu cytowany, jako przedstawiciel poglądu o empirycznem źródle postulatów.

[2]) „Sit corpus aliquod, cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescientia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit“. (Dzieła matematyczne Leibniza, wyd. Gerhardta, V, str. 137. porów. Cantor Gesch. d. Math. III, str. 32 .

Ta definicya prostej może być, bez zmiany istotnej, daną w postaci dogodniejszej, jeżeli wprowadzimy pojęcie odległości lub przedziału pomiędzy dwoma punktami, rozumiejąc przez to liczbę, charakteryzującą tę parę punktów. Początek doświadczalny tego pojęcia odległości znają wszyscy: pewne ciała stałe wydają się nam niezmiennemi i mówimy, że dwa ich punkty są w takiej a takiej odległości, jeżeli możemy umieścić pomiędzy temi punktami uważany również za niezmienny liniał z podziałką lub części liniału, najmniejszą liczbę razy; ta liczba jest miarą odległości lub wprost odległością dwu punktow.

To założywszy i uważając pojęcie odległości za pojęcie pierwotne, Cauchy określił prostą w sposób następujący: Prosta AB jest taką linią, że każdy z jej punktów jest w takiej odległości od punktu A i od punktu B, w jakiej nie jest żaden z punktów przestrzeni. Każdy punkt H zewnątrz prostej, przeciwnie jest takim punktem, że istnieje przynajmniej jeden punkt K, tak samo odległy od punktów A i B, jak jest odległym punkt H.

Ta definicya jest równoważną definicyi Leibniza: w samej rzeczy, jeżeli obracamy ciało, zawierające równocześnie punkty A, B, M, H około punktów A i B, przyjętych za stałe, to jest jasnem, że gdy punkt M znajduje się na prostej AB, to on pozostaje nieruchomym na zasadzie definicyi, gdy tymczasem punkt H może przyjąć inne położenie K

Definicya prostej, podana przez Cauchy'ego, jakkolwiek w istocie rzeczy identyczna z definicyą Leibniza, ma nad tą ostatnią tę wyższość, że prowadzi do analogicznego określenia płaszczyzny. U Cauchy'ego płaszczyzną ABC jest powierzchnia taka, że każdy z jej punktów jest w takiej odległości od trzech punktów, o których zakładamy, że nie leżą na jednej prostej, w jakiej nie znajduje się żaden inny punkt przestrzeni. Każdy punkt H zewnątrz płaszczyzny jest przeciwnie takim punktem, że istnieje przynajmniej jeden punkt inny K, tak samo odległy od punktów A, B, C, jak punkt H.

Uważajmy trzy punkty A, B, M, położone na prostej, oraz punkt H zewnętrzny. Jeżeli. założywszy, że A i B są stałemi.

będziemy ciało, do którego należą punkty A, B, M, H, obracali w ten sposób, aby punkt H sprowadzić do położenia punktu K, wtedy punkt M, według definicyi Leibniza, pozostanie nieruchomym. Można przeto powiedzieć, że ciało obraca się około prostej AM lub BM, zamiast powiedzieć, że obraca się około AB; inaczej mówiąc, prosta AB jest identyczna z prostą AM lub z prostą BM, jeżeli punkt M znajduje się na AB.

Można wyrazić to samo, wprowadzając do poprzedzających rozważań pojęcie odległości t. j. posługując się definicyą Cauchy'ego, a to sposobem następującym. Przyjmijmy, że dla każdego punktu X dwie z odległości XA, XB, XM od punktów A, B, M prostej określają trzecią odległość (twierdzenie A). Jeżeli X jest punktem H zewnętrznym względem prostej AB, to istnieć będzie punkt K taki, że $KA=HA$, $KB=HB$, przeto będzie $KM=HM$. Lecz związki $KA=HA$, $KM=HM$ wyrażają, że H i K są punktami zewnętrznemi względem prostej AM; podobnież $KB=HB$, $KM=HM$ wyrażają, że H i K są zewnątrz prostej BM. Każdy zatem punkt zewnętrzny względem AB jest zewnętrzny względem AM i względem BM; ponieważ i odwrotne twierdzenie jest prawdziwem, przeto prosta AB jest identyczna z prostą AM i z prostą BM.

Powyższe rozważania można zastosować i do płaszczyzny. Niechaj będzie płaszczyzna, określona przez trzy punkty A, B, C; niechaj M będzie czwartym punktem tej płaszczyzny. Przyjmijmy, że dla każdego punktu X trzy z pomiędzy odległości XA, XB, XC, XM określają czwartą (twierdzenie B). Jeżeli X jest punktem H zewnętrznym względem płaszczyzny ABC, to istnieć będzie, według definicyi płaszczyzny, podanej przez Cauchy'ego taki punkt K, że będzie $KA=HA$, $KB=HB$, $KC=HC$, a zatem będzie $KM=HM$. Ostatni związek wraz z dwoma z poprzedzających wyraża, że H i K są punktami zewnętrznemi względem płaszczyzny ABM, lub względem płaszczyzny BCM, lub wreszcie względem płaszczyzny CAM. Ponieważ i odwrotne twierdzenie jest prawdziwem, przeto płaszczyzny ABC, ABM, BCM, CAM są identycznemi.

Możemy teraz dowieść następującego twierdzenia: Prosta MN całkowicie jest zawartą w płaszczyźnie ABC, które zawiera jej dwa punkty M i N (twierdzenie C). W rzeczy samej, według powyższego, płaszczyzna ABC jest identyczna z płaszczyzną ABM, która jest znów identyczna z płaszczyzną AMN. Niechaj H będzie punktem zewnętrznym względem płaszczyzny ABC lub AMN. Według definicyi Cauchy'ego, istnieć tedy będzie drugi punkt K tak, że będzie $KA=HA$, $KM=HM$, $KN=HN$ Otóż, dwie ostatnie równości wyrażają, że punkty K i H są zewnętrznemi względem prostej MN. Ponieważ więc każdy punkt zewnątrz płaszczyzny ABC będzie zewnętrznym względem prostej MN, przeto prosta ta nie może mieć żadnego ze swych punktów zewnątrz płaszczyzny, a więc cała zawartą jest w płaszczyźnie [1]).

Twierdzenie C jest przeto wynikiem twierdzeń A i B. Jaka jest istota tych twierdzeń? Czy są one wynikiem definicyi prostej i płaszczyzny, podanych przez Cauchy'ego; czy są postulatami, które należy dołączyć do powyższych definicyi, dla scharakteryzowania zupełnego prostej i płaszczyzny; czy są wreszcie twierdzeniami niezgodnemi z powyższemi dwiema definicyami?

Można dać taką częściową odpowiedź na te pytania. Jeżeli przyjmiemy twierdzenie C lub twierdzenia A i B, z których ono wypływa, to znajdziemy, jak o tem była mowa w § X, w każdym z trzech systemów geometryi związek pomiędzy dziesięcioma odległościami pięciu jakichkolwiek punktów. Można podobnież otrzymać związek pomiędzy sześcioma odległościami, czterech punktów płaszczyzny oraz związek pomiędzy trzema odległościami trzech punktów prostej.

Odwrotnie, ze związków tych, nie przedstawiających nic w sobie sprzecznego, można łatwo za pomocą analizy wyprowa-

[1]) Definicye Euklidesa, dane dla prostej i płaszczyzny, są, jak sądzimy, streszczeniem rozważań, podobnych do powyższych; przynajmniej definicye te, tak ciemne na pierwsze wejrzenie, nadają się do interpretacyi literalnej, zgodnej z powyższem. Gauss w r. 1829 w liście z d. 27 Stycznia do Bessela słusznie krytykuje definicyę płaszczyzny, podaną przez Legendre'a: „Definicya płaszczyzny, powiada, jako powierzchni, zawierającej wszelką prostą, która łączy dwa jej punkty, zawiera więcej warunków, niż potrzeba do jej wyznaczenia. Definicya ta mieści w sobie twierdzenie, które powinno być pierwiej uzasadnionem.

dzić czy to twierdzenie C, czy to twierdzenia A i B; te więc rożne twierdzenia zgadzają się jedne z drugiemi, trzecia przeto z powyżej trzech uczynionych hypotez powinna być odrzucona. Inaczej mówiąc twierdzenia A i B są albo wynikami definicyi Cauchy'ego albo są jej dopełnieniem. Nie można zresztą rozstrzygnąć tym sposobem, który z dwu ostatnich przypadków zachodzi.

Lecz można pójść jeszcze dalej. Skoro tylko doszliśmy, jak wyżej do posługiwania się związkami, charakteryzującemi odpowiodnio przestrzeń o trzech wymiarach, płaszczyznę lub przestrzeń o dwu wymiarach i prostą lub przestrzeń o jednym wymiarze, to musimy już logicznie przyjąć całkowicie sposób przedstawienia rzeczy, podany przez De Tilly'ego i uważać geometryę za fizykę matematyczną odległości. W tym sposobie przedstawienia, odległość dwu punktów określona tak, jak to wyżej uczyniono, staje się jedynem pojęciem nieprzywiedlnem geometryi. Wyprowadzamy z niego pojęcie figur równych, tak trudne do ustalenia w inny sposób; następnie za pośrednictwem związków, charakteryzujących prostą, płaszczyznę i przestrzeń o trzech wymiarach, dajemy definicye długości, pól i objętości; wreszcie, bez uciekania się do jakiegokolwiek postulatu, wyprowadzamy całą geometryę pod trzema różnemi postaciami, t. j. geometryę Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna.

Wykład elementarny geometryi ogólnej, naszkicowany przez nas w §§ III—X podług Euklidesa, Łobaczewskiego, Riemanna i ich następców, prowadzi do związków charakterystycznych pomiędzy odległościami trzech punktów prostej, czterech punktów płaszczyzny, pięciu punktów przestrzeni o trzech wymiarach. Odwrotnie, wykład analityczny De Tilly'ego, oparty na pojęciu odległości i na związkach, o których mowa, pozwala znaleść wszystkie rezultaty wykładu elementarnego i stwierdza, że definicye, postulaty i pewniki, które są podstawą tego wykładu elementarnego są zgodne jedne z drugiemi. Wykład elementarny i wykład analityczny, razem wzięte, stanowią tedy system zupełny geometryi ogólnej, który, z punktu widzenia ścisłości, bezwzględnie jest bez zarzutu.

Mansion, PIERWSZE ZASADY METAGEOMETRYI