http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

P. 167

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ WYDZIAŁU III NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH

ROK XL 1947

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA

EGZEMPLARZ RECENZYJNY

WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Z ZASIŁKU PREZYDIUM RADY MINISTRÓW I WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY

1948

http://rcin.org.pl

SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE LA CLASSE III SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

ANNÉE XL 1947

VARSOVIE
SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES
1948

http://rcin.org.pl

Posiedzenie
z dnia 8 listopada 1946 r.

W. Sierpiński

Sur une proposition de A. Lindenbaum équivalente à l'axiome du choix

Note présentée dans la séance du 8 Novembre 1946.

Dans la *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* de A. Lindenbaum et A. Tarski qui a été publiée dans ces Comptes rendus, XIX Année (1926), pp. 299—330, se trouve énoncé, entre plusieurs autres, p. 312, le théorème 82 $(L) A_6$ suivant de A. Lindenbaum:

L'axiome du choix équivaut à la proposition P suivante:

P. $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{n}$ *étant deux nombres cardinaux (non nuls) quelconques, ou bien chaque ensemble de puissance* $\mathfrak{m}$ *peut être décomposé en* $\mathfrak{n}$ *ensembles non vides et disjoints, ou bien chaque ensemble de puissance* $\mathfrak{n}$ *peut être décomposé en* $\mathfrak{m}$ *ensembles non vides et disjoints.*

Adolphe Lindenbaum fut tué par la Gestapo en 1941 sans avoir publié sa démenstration de son théorème qui m'est inconnue. Je présente ici celle que j'ai trouvé cette année.

1) Il résulte, comme on sait (d'après Zermelo) de l'axiome du choix, A, que tout ensemble peut être regardé comme bien ordonné et on en conclut sans peine que si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont deux nombres cardinaux, on a ou bien $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, ou bien $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, tout ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ est évidemment une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints (p. e. tous sauf un seul formés d'un seul élément), et si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ tout ensemble de puissance $\mathfrak{n}$ est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints. On a donc $A \rightarrow P$.

http://rcin.org.pl

2) Pour démontrer que $P \rightarrow A$, il suffira évidemment de démontrer que tout ensemble peut être regardé comme bien ordonné.

Soit donc M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$. Il existe des nombres ordinaux α tels que M est une somme d'une série (finie ou transfinie) du type α d'ensembles non vides et disjoints (p. e. $\alpha = 1$). Soit Z la totalité formée de tous ces nombres α et du nombre 0.

Vu qu'il y a au plus $2^{\mathfrak{n}^2}$ ensembles ordonnés formés d'éléments d'un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$, on voit sans peine que l'ensemble F de toutes les familles ordonnées de sous-ensembles distincts de M est de puissance $\leqslant 2^{(2^{\mathfrak{m}})^2} = 2^{2^{2\mathfrak{m}}}$.

Or, à tout nombre non nul α de Z correspond évidemment un sous-ensemble non vide de F formé de tous les éléments de F qui sont des familles ordonnées du type α de sous-ensembles non vides et disjoints de M dont la somme est M, et aux nombres non nuls distincts de Z correspondent des sous-ensembles distincts de F. Au nombre 0 de Z nous pouvons faire correspondre le sous-ensemble vide de F.

On a ainsi $\overline{Z} \leqslant 2^{\overline{F}}$, donc, vu que $\overline{F} \leqslant 2^{2^{2\mathfrak{m}}}$, $\overline{Z} \leqslant 2^{2^{2^{2\mathfrak{m}}}}$. Cela prouve que l'ensemble Z n'est pas la totalité de tous les nombres ordinaux qui implique l'antinomie de Burali-Forti.

Or, si $\alpha \in Z$ et $\xi < \alpha$, on a évidemment $\xi \in Z$. Soit $\zeta = \overline{Z}$, c. à. d. le type d'ordre de l'ensemble Z ordonné d'après la grandeur de nombres ordinaux qui le constituent.

Je dis que ζ non $\in Z$. En effet, s'il était $\zeta \in Z$, l'ensemble de tous les nombres ξ, où $0 \leqslant \xi < \zeta$ qui est, comme on sait, du type ζ, serait un segment de Z, ce qui est impossible, l'ensemble bien ordonné Z ne pouvant être semblable à son segment.

Soit $\mathfrak{n} = \overline{\zeta}$, c. à. d. la puissance de l'ensemble Z. Si l'ensemble M était une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints, on aurait évidemment $\zeta \in Z$, ce qui n'est pas le cas. L'ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ n'est donc pas une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints. Il résulte donc de la proposition P que l'ensemble Z (qui est de puissance $\mathfrak{n}$) est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints, soit $Z = \sum_{m \in M} E_m$.

L'ensemble Z étant bien ordonné, il existe (pour $m \in M$) dans chacun des ensembles E_m un élément premier p_m. L'en-

http://rcin.org.pl

semble $\{p_m\}_{m \in M}$ est évidemment de puissance $\mathfrak{m}$ et, en tant que sous-ensemble de Z, est bien ordonné.

Tout ensemble M peut donc être regardé comme bien ordonné et il en résulte, comme on sait, l'axiome du choix.

On a ainsi $P \to A$.

Le théorème de A. Lindenbaum est ainsi démontré.

W. Sierpiński

O pewnym twierdzeniu A. Lindenbauma równoważnym pewnikowi wyboru

Komunikat wygłoszony na posiedzeniu w dniu 8 listopada 1946 r.

Streszczenie

Autor dowodzi, że następujące twierdzenie jest równoważne pewnikowi wyboru:

Jeżeli M i N są dwa jakiekolwiek zbiory, to albo zbiór M daje się rozbić na tyle części nie pustych, rozłącznych, ile elementów ma zbiór N, albo też zbiór N daje się rozbić na tyle części nie pustych rozłącznych, ile elementów ma zbiór N.

W. Kemula

Nowy efekt w prądach granicznych
„Ukryte" prądy graniczne

Rozprawa przedstawiona na posiedzeniu 8 listopada 1946 r.

1. W roku 1934 W. Kemula i M. Michalski wykryli zjawisko „egzaltacji" prądów granicznych, badając redukcję tlenu, rozpuszczonego w roztworach różnych elektrolitów [1]).

Stwierdzono podówczas wyjątkowe zachowanie się wodnego roztworu HCl, co znalazło swoje uzasadnienie i doprowadziło do wniosku, że podczas redukcji tlenu na katodzie (przebiegają-

[1]) W. Kemula i M. Michalski. Roczniki Chemii, **16**, 533—541, 1936.

http://rcin.org.pl

cej w dwu etapach), tworzą się woda utleniona, woda i jony hydroksylowe. W myl równania sumarycznego redukcja tlenu przebiega następująco:

(1) $$O_2 + 4e + 4 H^{\cdot} OH' \rightarrow 2 H_2O + 4 OH'.$$

Ubytek tlenu, redukowanego na katodzie, uzupełniany jest drogą dyfuzji drobin z głębi roztworu. Tym samym jak długo trwa redukcja tlenu, k a t o d a otoczona jest ruchliwymi jonami OH', wędrującymi w głąb roztworu w kierunku ku anodzie.

Obserwowany mniejszy prąd graniczny jonów wodorowych, zamiast większego „egzaltowanego" wytłumaczyliśmy zobojętnieniem zdążających ku katodzie jonów wodorowych powstałymi jonami hydroksylowymi, którymi otoczona jest najbliższa katodzie warstewka roztworu.

Badając dalej procesy redukcji różnych substancyj jonowych i niejonowych, otrzymałem przy współudziale S. A j z e n b e r g a i E. R a u c h f l e i s c h na podstawie licznych polarogramów wyniki, które dla prądów granicznych można streścić następująco:

W przypadku redukcji jonów lub substancyj niejonowych, produkty powstałe mogą: 1) tworzyć amalgamaty z rtęcią katody lub 2) w razie, gdy produkty redukcji nie tworzą amalgamatów, gromadzą się one na powierzchni i z biegiem czasu w najbliższej odległości od katody. Wobec tego liczyć się należy z łączeniem się powstałych produktów z zdążającymi do katody jonami lub ciałami niejonowymi, zgromadzonymi „na przedpolu" katody.

Powstałe produkty mogą być: a) elektrycznie obojętne, np. H, H_2O_2, CH_3OH itd., b) mogą mieć charakter jonowy, jeżeli powstają jony o niższym stopniu utlenienia, ale o t y m s a m y m znaku, — co zmusza je do skupienia się wokół katody np. $Fe^{\cdots} \rightarrow Fe^{\cdot\cdot}$ itp., oraz c) mogą utworzyć się jony o z n a k u p r z e c i w n y m, np. OH' z O_2, CN' z $Hg(CN)_2$ itd., wtedy wędrują one od katody w głąb roztworu.

Zbadane były również przypadki k a t o d o w e j redukcji a n i o n ó w, w swoich skutkach mogące powodować analogiczne efekty.

2. Metoda polarograficzna zajmuje się zwykle roztworami ciał o znacznym rozcieńczeniu i przeważnie o charakterze jo-

http://rcin.org.pl

nowym[2]). Rozwijająca się w szybkim tempie analiza ciał organicznych o charakterze niejonowym musi się liczyć z wspomnianymi w pukcie 2) a, b, c, możliwościami reagowania zredukowanych uprzednio ciał, którymi pokryta jest powierzchnia katody lub wysycona najbliższa warstewka przykatodowa a to ze względów następujących:

Jak wiadomo, oznaczanie ilości substancyj opiera się na istniejącej proporcjonalności między stężeniem ciała a jego prądem granicznym.

$$I_d = K . C$$

gdzie C — stężenie redukującego się ciała,

$$K = 605 . n . D^{1/2} m^{2/3} t^{1/6};$$

tutaj n = wartościowość jonu, D = stała dyfuzji, m = wydajność kapilary, czyli ilość rtęci w gramach na sek., t = czas trwania kropli rtęci.

Istnienie zjawiska „tłumienia" i „egzaltacji" zmusza do stosowania w praktyce nadmiaru obojętnych elektrolitów, aby uniknąć zakłócających wpływów migracji jonów w polu między elektrodami.

3. W myśl otrzymanych przez nas wyników doświadczalnych liczyć się należy z istnieniem „u k r y t y c h" prądów granicznych, czyli takich, które się nie uwidaczniają w postaci fal, odpowiadających e f e k t y w n e m u stężeniu redukującej się substancji, gdyż są „w b u d o w a n e" w fale obcego redukującego się ciała lub jonu, których produkty, skupione w warstwie przykatodowej „neutralizują" zdążające przez dyfuzję ku katodzie ciała bądź wprost elektrycznie, np.

$$H^{\cdot} + OH' \rightarrow H_2O,$$

bądź chemicznie, np.

$$HCHO + 2\,e + 2\,H^{\cdot}\,OH' \rightarrow CH_3OH + 2\,OH'.$$

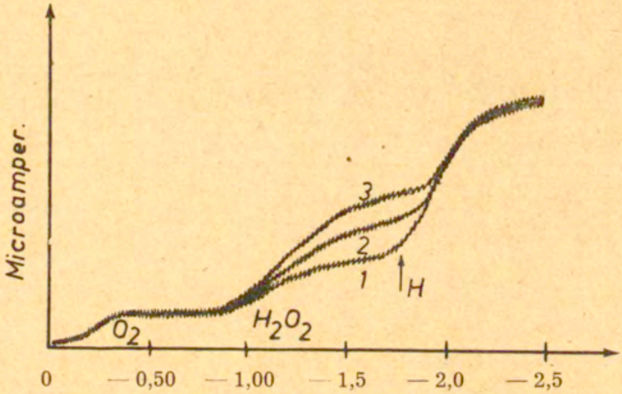
W pierwszej linii ważną rolę odgrywać będą: gazowy tlen O_2, obecny we wszystkich roztworach, sporządzonych przy dostępie powietrza i dający w wyniku redukcji jony hydroksy-

---

[2]) Opis aparatury i założeń teoretycznych p. W. Kemula. Przegląd Elektrotechniczny, 23, 170—175, 1947.

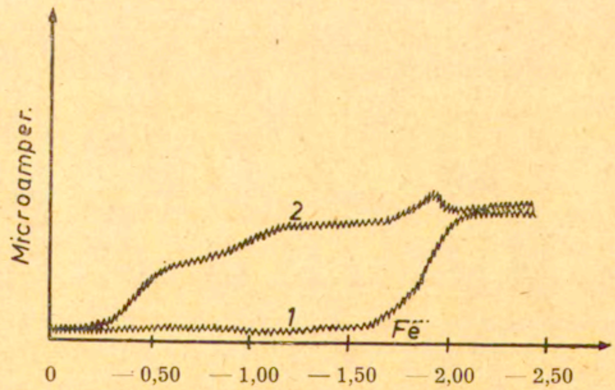
http://rcin.org.pl

lowe OH′, o ile specjalnie nie będzie usunięty, oraz jony wodorowe H˙. z wolnych kwasów — powstałe na skutek hydrolizy, oraz poprostu z wody (p. Rys. 1 i 2).



Rys. 1. Krzywa dolna: 0,001 n. roztwór HCl (zadany 6 kroplami nasyconego roztworu fuksyny). Następnie dodano kolejno po 0,2 cm³. 0,1 n. roztworu H_2O_2 (krzywe 2 i 3).

Lower curve: 0,001 n. solution of HCl (with 6 drops of saturated fuchsine solution). Added twice 0,2 cm³. 0,1 n. solution of H_2O_2. (Curves 2 and 3).



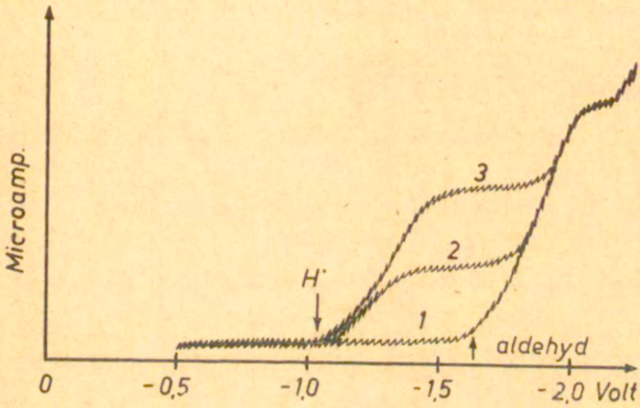
Rys. 2. Krzywa dolna: 0,001 n. Fe $(NO_3)_2$ (pozbawiony powietrza). Krzywa górna: to samo na powietrzu.

Lower curve: 0,002 n. Fe $(NO_3)_2$ (without air). Upper curve: the same open to the air.

Zdążające ku katodzie kationy, których wodorotlenki są mało rozpuszczalne lub słabo zdysocjowane n i e d a j ą f a l i, o i l e i c h s t ę ż e n i e n i e j e s t w i ę k s z e o d

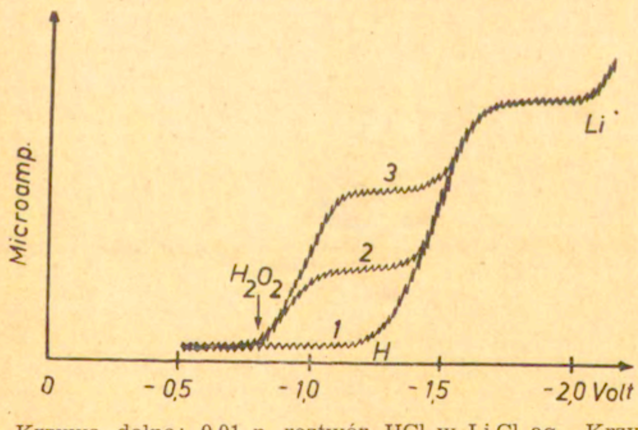
http://rcin.org.pl

s t ę ż e n i a j o n ó w h y d r o k s y l o w y c h, otaczających katodę, a powstałych z redukcji tlenu. Stwierdziliśmy to na jonach: $Fe^{\cdot\cdot}$, $Mn^{\cdot\cdot}$, $Pb^{\cdot\cdot}$, $H^{\cdot}$, NH_4 itd. Pozwala to np. miareczko-



Rys. 3. Krzywa dolna: 0,01 n. roztwór aldehydu w Li Cl. Krzywe 2 i 3 po dodaniu HCl aq.

Lower curve: 0,01 n. solution of aldehyde in Li Cl. Curves 2 and 3 obtained ofter HCl aq. was added.



Rys. 4. Krzywa dolna: 0,01 n. roztwór HCl w Li Cl aq. Krzywe 2 i 3 po dodaniu H_2O_2 aq.

Lower curve: 0,01 n. solution of HCl in Li Cl. Curves 2 and 3 after H_2O_2 eq. was added.

wać polarometrycznie kwasem rozpuszczony gazowy tlen itp. Dla jonów u $C^{\cdot\cdot}$ z roztworów obojętnych tego efektu spodziewać się nie należy, gdyż wydzielają się one przy bardziej dodatnim potencjale, aniżeli potencjał redukcji tlenu.

http://rcin.org.pl

Analogicznie będzie przebiegać „na przedpolu“ reakcja, gdy w roztworze obecny jest $Hg(CN)_2$, uwalniający na katodzie jony CN' itp.

Tak samo nie dają fali np. aldehydy w kwaśnych roztworach, fakt znany od dawna, ale dotychczas niewytłumaczony. Na podstawie powyższego łatwo stwierdzić, że częściowe oznaczenie aldehydu w kwaśnym roztworze j e s t m o ż l i w e, ale jedynie w przypadku, kiedy stężenie jonów wodorowych jest m n i e j s z e od stężenia aldehydu, gdyż wydzielony na katodzie wodór redukuje równoważną ilość aldehydu a fala jego „wbudowuje się“ — jest „ukryta“ w fali aldehylu i dopiero wtedy występuje, o ile stężenie aldehydu jest większe od stężenia jonów wodorowych (p. Rys. 3). Podobnie przebiega elektroliza roztworu H_2O_2 w kwaśnych roztworach (p. Rys. 4). Jest to więc ogólna prawidłowość, która pozwoli wyjaśnić dotychczas tajemnicze zachowanie się wielu substancyj redukowanych na elektrodach rtęciowych i prawdopodobnie innych.

4. Streszczając powyższe wywody można stwierdzić, że w jednym przypadku np. dodając kwasu do obojętnego roztworu KCl (przy dostępie tlenu powietrza) do osiągnięcia pewnego stężenia wogóle fala wodoru się nie pokaże, gdyż jony $H^{\cdot}$ są wyłapywane przed osiągnięciem katody, w innych „wbudowuje“ się, a nawet pokrywa (maskuje) falę redukującego się przy bardziej ujemnym potencjale ciała, jak to jest w przypadku aldehydu octowego w kwaśnym roztworze lub wody utlenionej w kwaśnym roztworze.

Powyższe przykłady (p. rysunki 1, 2 i 3) dostatecznie ilustrują, czym są „ukryte“ prądy graniczne.

Zjawiska opisane przebiegają w roztworach rozcieńczonych bez znacznego nadmiaru elektrolitu. Niestety, badania niniejsze przerwane zostały w czerwcu 1941 roku z powodu działań wojennych. Zbadanie więc zjawisk w roztworach o nadmiarze obcych soli zamierzam wykonać, jak tylko warunki na to pozwolą.

Zakład Chemii Nieorganicznej U. W.

http://rcin.org.pl

W. Kemula

A new phenomenon of the „latent" limiting currents

Summary.

A new phenomenon of the „latent" limiting currents has been found. The short description is following:

In the case of the reduction of the ions and neutral organic substances on the cathode the products may:

1. react with the mercury of the cathode forming the amalgams, or

2. in the case, if these products do not react with mercury, they accumulate on the electrode or around it. This fact of the accumulating of different kind of new ions or substances around electrode has been investigated, having very great influence on the behaviour of ions and neutral organic substances, migrating to the cathode.

The new formed products may:

a) be electrically neutral, as H_2, H_2O_2, $CH_3.OH$ e. s. o.

b) have the ionic character, if they forme the ions with a lower oxidation degree but having the same sign they accumulate by electrostatic forces around the cathode, for exemple $Fe^{\cdot\cdot\cdot} \rightarrow Fe^{\cdot\cdot}$ e. s. o. At last they may,

c) forme the ions with reciproque sign as: OH' from O_2, CN' from $Hg(CN)_2$ e. s. o. In the last case they migrate in the bulk of solution toward the anode.

The phenomenon of „exaltation" and the exceptional behaviour of hydrogenic ions in the solution of electrolytes, saturated with the oxygen, have been described formerly by W. Kemula [1]). (Fig. 1, 2).

The experimental results of this publication prove, that they exist the „latent" („superposed", „covered") limiting currents, which are completely not observable on the polarografic curves or only as a little part of that height of the „wave", which corresponds to the effectiv concentration of reduced ions.

The cause is, that the ions or molecules migrating to the cathode are „neutralised" by the ions or neutral molecules formerly reducel so, that resulting „wave" is lower, corresponding

http://rcin.org.pl

to the concentration of the „annihilating" ions or moleculs which are surrounding the cathode.

It is a general rule concerning the processes, which take place on the mercury cathode and may be investigated by the polarografic methode. Similar processes probably olso take place on the electrodes from other materials.

Especially misterious behaviour of several reducible substances as the reduction of acetic aldehyde in acidic solutions, (Fig. 3) influence of H_2O_2 on the height of the „wave" of the hydrogen ions e. s. o. could be easily explained.

This investigation was carried out in 1941. The further studies were interrupted by the war. When the circonstances will permit, the author will continue the researches on this interesting subject in the presence of different salts, which, as it is known, have an influence on the migration of the ions.

The Institute of Inorganic Chemistry of the University of Warsaw.

http://rcin.org.pl

P o s i e d z e n i e

z dnia 24 stycznia 1947 r.

Z. R ó ż y c k i

O rozmieszczeniu stopnia geotermicznego w Polsce

Rozprawa wzgl. streszczenie nie zostały nadesłane do Redakcji, wobec czego ogłoszenie wyników nastąpi później.

E d w a r d M a r c z e w s k i

Two-valued measures and prime ideals in fields of sets

Presented January 24, 1947.

1. I n t r o d u c t i o n. A non-empty additive and complementative family of sets is called a *field* of sets. A non-negative and additive set function defined for all sets belonging to a field K of sets is called a *measure* in K. A measure $\mu(E)$ in K is called *countably additive*, whenever

$$\mu(E_1+E_2+\dots)=\mu(E_1)+\mu(E_2)+\dots$$

for each sequence $\{E_n\}$ of disjoint sets such that

$$E_n \epsilon \mathsf{K} (n=1, 2, \dots) \quad \text{and} \quad E_1+E_2\dots\epsilon \mathsf{K}.$$

In this paper we consider measures assuming only the values 0 and 1, termed shortly *two-valued* measures. A two-valued measure vanishing for any one-element set, but not vanishing identically, will be called *non-trivial*.

http://rcin.org.pl

Ulam has shown that

I. In the field of all subsets of an arbitrary infinite set there is a two-valued non-trivial measure [1]).

II. No two-valued non-trivial measure in the field of all subsets of a line segment is countably additive [2]).

The proof of theorem I makes use of the axiom of choice. In connection with this, Sierpiński has shown that

III. With the aid of any two-valued non-trivial measure in the field of all subsets of the set of all positive integers, one may define effectively a non-measurable real function [3]).

The purpose of this paper is to examine two-valued measures in certain very simple fields of subsets of a line segment, and, in particular, to prove theorems analogous to II and III for these fields.

2. **The elementary and the quasi-elementary field.** For each two real numbers $a<b$ we denote by (a, b) the open interval $a<x<b$, and we put $I=(0, 1)$. Each set which is the sum of a finite number of subintervals of I and of a finite subset of I will be called an *elementary set*. (The empty set is treated also as a finite set and as an interval). Obviously, the family of all elementary sets is a field; it will be termed *the elementary field* and denoted by E.

If a subset E of I is the sum of an open set and of a set at most denumerable, and if the set $I-E$ is simulta-neously of the same form, the set E will be called *quasi-elementary*. We shall show that the family Q of all quasi-elementary sets is a field. For this purpose it suffices to prove the family Q additive.

Let E_1 and E_2 be two quasi-elementary sets, i. e.

$$E_j=G_j+P_j \qquad I-E_j=G_j^*+P_j^* \qquad j=1, 2$$

where G_j and G_j^* are open subsets of I, and P_j and P_j^* are at most denumerable. We have

---

[1]) S. Ulam, *Concerning functions of sets*, Fund. Math. 14 (1929), pp. 231—233; A. Tarski, *Une contribution à la théorie de la mesure*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 42—50.

[2]) S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 16 (1930), pp. 140—150, in particular p. 146.

[3]) W. Sierpiński, *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables*, Fund. Math. 30 (1938), pp. 96—99.

http://rcin.org.pl

$$E_1 + E_2 = (G_1 + G_2) + (P_1 + P_2)$$

and

$$I - (E_1 + E_2) = (I - E_1)(I - E_2) = (G_1^* + P_1^*)(G_2^* + P_2^*) =$$
$$= G_1^* G_2^* + (G_1^* P_2^* + G_2^* P_1^* + P_1^* P_2^*).$$

Thus, we see that both $E_1 + E_2$ and $I - (E_1 + E_2)$ are sum of an open set and a set at most denumerable.

The field Q will be called *quasi-elementary*.

3. Two-valued measures in the elementary field. Consider for any $0 \leqslant p \leqslant 1$ three set functions defined as follows for $E \subset I$:

$$\beta_p(E) = 1 \quad \text{if} \quad p \in E; \quad \text{otherwise} \quad \beta_p(E) = 0;$$

$$\gamma_p(E) = 1 \quad \text{if there is an} \quad a < p \quad \text{such that} \quad (a, p) \subset E;$$
$$\text{otherwise} \quad \gamma_p(E) = 0;$$

$$\delta_p(E) = 1 \quad \text{if there is a} \quad b > p \quad \text{such that} \quad (p, b) \subset E;$$
$$\text{otherwise} \quad \delta_p(E) = 0.$$

Theorem 1. For each $0 \leqslant p \leqslant 1$ the set functions $\beta_p(E)$, $\gamma_p(E)$ and $\delta_p(E)$ are two-valued measures in the elementary field. Conversely: each two-valued measure $\mu(E)$ in this field is of the form: $\beta_p(E)$, $\gamma_p(E)$ or $\delta_p(E)$, where

$$(*) \qquad p = \sup \underset{x}{\mathrm{E}} [\mu((0, x)) = 0].$$

Proof. We omit here the easy proof of the first part.

In order to prove the second part, let us denote by $\mu(E)$ a two-valued measure in E. If μ is trivial, then either $\mu(E) = 0$ identically, whence $\mu(E) = \beta_1(E)$ for $E \in$ E, or there exists a point p with $\mu(\{p\}) = 1$, and, consequently, $\mu(E) = \beta_p(E)$ for $E \in$ E. Thus, we can now assume that μ is non-trivial.

Let us set $f(x) = \mu((0, x))$ for each $0 \leqslant x \leqslant 1$. The function f is non-decreasing and it assums only the values 0 and 1. Consequently, there exists a number p such that $0 \leqslant p \leqslant 1$ and

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leqslant x < p \\ 1 & \text{for} \quad p < x \leqslant 1. \end{cases}$$

http://rcin.org.pl

Obviously p is equal to the upper bound of the set $f^{-1}(\{0\})$; in other words the formula (*) is already proved.

There are two possibilities: 1^0 $f(p)=1$; 2^0 $f(p)=0$.

Consider the case 1^0 and observe first that we have then

$$(1) \qquad \mu((a,p))=1 \quad \text{for each} \quad a<p.$$

In fact, we have, then, simultaneously

$$\mu((0,a))=0, \qquad \mu(\{a\})=0 \quad \text{and} \quad \mu((0,p))=1,$$

which implies (1).

Let now $E \epsilon \mathsf{E}$. Since the set E is elementary, there exists a number $a<p$ such that either $(a,p)\subset E$ and, in view of (1), $\mu(E)=1$, or $(a,p).E=0$ and, also by (1), $\mu(E)=0$. Hence, we have finally $\mu(E)=\gamma_p(E)$ for $E \epsilon \mathsf{E}$.

In the case 2^0 we have

$$(2) \qquad \mu((p,b))=1 \quad \text{for each} \quad b>p.$$

In fact, we have then

$$\mu((0,p))=0, \qquad \mu((p))=0 \quad \text{and} \quad \mu((0,b))=1$$

which implies (2).

Analogously as in the preceding case, we show with the aid of formula (2) that in case 2^0 we have $\mu(E)=\delta_p(E)$ for $E \epsilon \mathsf{E}$.

This completes the proof.

Theorem 1 leads to the following

Lemma 2. For each two-valued non-trivial measure $\mu(E)$ in E it is possible to define effectively a decomposition $I=I_1+I_2+\ldots$ such that $I_n \epsilon \mathsf{E}$ and $\mu(I_n)=0$ for $n=1,2,\ldots$.

To prove this, is suffices to define p by the formula (*), to put

$$I_1=I\cdot(p) \quad I_n=I\cdot \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{n}\leqslant|x-p|<\frac{1}{n-1}\right] \quad \text{for} \quad n=2,3,\ldots,$$

and to apply Theorem 1.

Lemma 2 implies directly

Theorem 3. No two-valued non-trivial measure in the elementary field is countably additive.

http://rcin.org.pl

This theorem is true a fortiori for every field containing the elementary field (e. g. for the field of Borel sets [4])) and consequently it contains Ulam's theorem II (vide Introduction).

4. Two-valued measures in the quasi-elementary field. Theorem 1 characterizes the nature of all two-valued measures in the elementary field: all these measures have shown to be of a trivially simple structure.

In the quasi-elementary field the relation-ship is quite different: it is analogous to that in the field of all sets of positive integers. According to the Ulam's theorem I (vide Introduction), there exist in Q two-valued non-trivial measures.

On the other hand, we shall prove the following

Theorem 4. With the aid of any two-valued non-trivial measure in the quasi-elementary field, one may define effectively a real non-measurable function.

Proof. Let $\mu(E)$ be a two-valued non-trivial measure in Q. The function μ considered only for $E \epsilon$ E, is a two-valued non-trivial measure in E, and, by Lemma 2, one may effectively define a decomposition $I = I_1 + I_2 + \ldots$ such that $\mu(I_n) = 0$ and $I_n \epsilon$ E for $n = 1, 2, \ldots$.

Consider now the set N of all positive integers. It is easy to see that for each set $E = \{n_1, n_2, \ldots\} \subset N$ we have

$$I_{n_1} + I_{n_2} + \ldots \epsilon \text{Q}.$$

Let us put

$$\nu(E) = \mu(I_{n_1} + I_{n_2} + \ldots).$$

Obviously $\nu(E)$ is a two-valued non-trivial measure in the field of all subsets of N. Combining this result and Sierpiński's theorem III (vide Introduction), we obtain Theorem 4.

5. Prime ideals. Any additive subfamily J of a field K of sets is called an ideal in K, if the relations: $T \subset S \epsilon$ J and $T \epsilon$ K imply $T \epsilon$ J. An ideal J in K is called *prime*, whenever J $\neq$ K and there is no ideal J' with J' $\supset$ J $\neq$ J' $\neq$ K. As is known, for each two-valued (not vanishing identically) measure $\mu(E)$ in K, the family of all the sets N with $\mu(N) = 0$

[4]) Cf. A. Tarski, *Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, Cl. III, 30 (1937), pp. 152—181, in particular Theorem 4.6, p. 165 and remarks pp. 158—159.

http://rcin.org.pl

is a prime ideal in K, and, conversely: for each prime ideal J in K there exists a two-valued measure $\mu(E)$ in K such that the family of all the sets N with $\mu(N)=0$ coincides with J. Consequently, each theorem about two-valued measures may be expressed in terms of prime ideals and conversely. For instance, modifying Lemma 2 in this way, we obtain the following proposition: For each prime ideal J in E containing every onę-element set, it is possible to define effectively a decomposition $I=I_1+I_2+\ldots$, where $I_n \epsilon \mathsf{J}$.

Wrocław-Biskupice, April 1946.

Edward Marczewski

Miary dwuwartościowe i ideały pierwsze w ciałach zbiorów

Komunikat przedstawiony dnia 24.I 1947 r.

Streszczenie

Każdą nieujemną, addytywną funkcję zbioru, określoną w dowolnym ciele zbiorów K, nazywa się *miarą w* K. Miara $\mu(E)$ w ciele K nazywa się *przeliczalnie addytywną*, jeśli dla każdego ciągu $\{E_n\}$ zbiorów rozłącznych, które wraz ze swą sumą należą do K, mamy

$$\mu(E_1+E_2+\ldots)=\mu(E_1)+\mu(E_2)+\ldots.$$

Miara, przyjmująca jedynie wartości 0 i 1 nazywa się *dwuwartościową*. Miara dwuwartościowa, która znika na wszystkich zbiorach jednopunktowych, ale nie znika tożsamościowo nazywa się *nietrywialną*.

Zbiór położony w przedziale $(0, 1)$, który jest sumą najwyżej skończonej liczby przedziałów i zbioru skończonego, nazywa się *elementarnym*. Zbiory elementarne tworzą ciało, które nazywa się *ciałem elementarnym*.

Zbiór zawarty w przedziale $(0, 1)$, który jest sumą zbioru otwartego i najwyżej przeliczalnego i którego uzupełnienie jest tej samej postaci, nazywa się zbiorem *quasi-elementarnym*. Zbiory quasi-elementarne tworzą ciało, które nazywa się *ciałem quasi-elementarnym*.

http://rcin.org.pl

Po stwierdzeniu, że wszystkie miary dwuwartościowe w ciele elementarnym są bardzo prostej postaci, autor udowadnia (nawiązując do prac S. Ulama [1] [2]) oraz W. Sierpińskiego [3])):

Twierdzenie 3. Żadna nietrywialna miara dwuwartościowa w ciele elementarnym nie jest przeliczalnie addytywna.

Twierdzenie 4. Przy pomocy każdej nietrywialnej miary dwuwartościowej w ciele quasi-elementarnym można określić efektywnie funkcję niemierzalną (L).

W. Sierpiński

Sur une famille d'ensembles linéaires singuliers

Note présentée à la séance du 24 janvier 1947.

En 1926 M. Kuratowski a démontré (en utilisant le théorème de Zermelo sur le bon ordre) l'existence d'un ensemble linéaire (infini) tel que, si la fonction f transforme cet ensemble en un sous-ensemble (vrai ou non) de façon bicontinue, on a identiquement $f(x) = x$ [1]).

Le but de cette Note est de démontrer (par une voie différente de celle de M. Kuratowski) une généralisation de ce théorème et d'en déduire immédiatement un autre théorème du même auteur concernant l'ensemble de nombres de dimensions au sens de M. Fréchet.

Théorème. *Il existe une famille Φ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles linéaires distincts E de puissance $2^{\aleph_0}$ tels que si $f(x)$ est une fonction continue dans E à valeurs distinctes dans E et si $f(E) \subset E$, on a $f(x) = x$ pour $x \in E$.*

Démonstration. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$. Il résulte du théorème de Zermelo sur le bon ordre qu'il existe une suite transfinie du type φ, $\{x_\xi\}_{0 \leq \xi < \varphi}$, formée de tous les nombres réels. Soit F la famille de toutes les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle de classe

[1]) *Fund. Math.* 8, p. 207.

http://rcin.org.pl

$\leqslant 1$ de Baire jouissant de cette propriété qu'il existe un ensemble linéaire P_f de puissance du continu et tel que la fonction f est à valeurs distinctes sur P_f et qu'on a $f(x) \neq x$ pour $x \in P_f$.

On voit sans peine que la famille F est de puissance du continu et on en déduit facilement qu'il existe une suite transfinie du type φ, $\{f_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$, formée de fonctions de la famille F, telle qu'on a $f_{2\xi} = f_{2\xi+1}$ pour $0 \leqslant \xi < \varphi$ et que chaque fonction de la famille F figure dans notre suite $2^{\aleph_0}$ fois.

Nous définirons maintenant, par l'induction transfinie, une suite transfinie de nombres réels $\{p_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$ comme il suit.

Il résulte tout de suite de $f_0 \in F$ et de la définition de la famille F qu'il existe des nombres réels x, tels que $f(x) \neq x$: soit p_0 le premier terme de la suite $\{x_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$ jouissant de cette propriété. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $0 < \alpha < \varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ, où $0 \leqslant \xi < \alpha$. Vu que $\alpha < \varphi$, l'ensemble $\{p_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \alpha}$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de même que les ensembles $\{f_\alpha(p_\xi)\}_{0 \leqslant \xi < \alpha}$ et $\{f_\alpha(f_\xi(p_\xi))\}_{0 \leqslant \xi < \alpha}$: l'ensemble $f_\alpha(P_{f_\alpha})$ étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe donc un nombre y de $f_\alpha(P_{f_\alpha})$ tel que $y \neq p_\xi$, $y \neq f_\alpha(p_\xi)$ et $y \neq f_\alpha(f_\xi(p_\xi))$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$. Or, il résulte de $y \in f_\alpha(P_{f_\alpha})$ qu'il existe un nombre x de P_{f_α}, tel que $y = f_\alpha(x)$. Vu les propriétés du nombre y, on a donc $f_\alpha(x) \neq p_\xi$, $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(p_\xi)$ et $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(f_\xi(p_\xi))$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$, d'où $x \neq p_\xi$ et $x \neq f_\xi(p_\xi)$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$ et, vu que $x \in P_{f_\alpha}$, on a $f_\alpha(x) \neq x$. Soit $p_\alpha = x$ le premier terme de la suite $\{x_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$ jouissant de ces propriétés.

On aura donc

$$(1) \quad p_\alpha \neq p_\xi, f_\alpha(p_\alpha) \neq p_\xi \text{ pour } 0 \leqslant \xi < \alpha, \text{ et } p_\alpha \neq f_\xi(p_\xi) \text{ pour } 0 \leqslant \xi \leqslant \alpha.$$

La suite transfinie $\{p_\xi\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$ est ainsi définie par l'induction transfinie; leur termes sont des nombres réels distincts.

On peut définir, comme on sait, une correspondance biunivoque $t = g(z)$ entre l'ensemble de tous les nombres complexes z et l'ensemble T de tous les nombres réels t. X étant un ensemble de nombres réels quelconque, désignons par $h(X)$ l'ensemble de tous les nombres $g(x+iy)$, où $x \in X$ et $y \in T$.

http://rcin.org.pl

On voit sans peine que si A et B sont deux ensembles distincts de nombres réels, l'ensemble $r(A, B) = [h(A) - h(B)] + [h(B) - h(A)]$ est de puissance $2^{\aleph_0}$.

Posons maintenant $H_X = \{p_{2\xi+\alpha_\xi}\}_{0 \leq \xi < \varphi}$, où $\alpha_\xi = 1$, si $x_\xi \in h(X)$ et $\alpha_\xi = 0$ si x_ξ non $\in h(X)$. L'ensemble H_X sera évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$.

Soit E_X l'ensemble de tous les points a de H_X, tels que pour tout n naturel l'intervalle $(a - 1/n,\ a + 1/n)$ contient $2^{\aleph_0}$ points de H_X. Comme on sait, on aura $\overline{\overline{H_X - E_X}} < 2^{\aleph_0}$ et, pour $a \in E_X$ et n naturel l'intervalle $(a - 1/n,\ a + 1/n)$ contiendra $2^{\aleph_0}$ points de E_X.

Soit Φ la famille de tous les ensembles E_X, où X est un ensemble quelconque de nombres réels. Je dis que la famille Φ satisfait à notre théorème.

Tout d'abord je prouverai que $\overline{\overline{\Phi}} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Soient donc A et B deux ensembles distincts de nombres réels, et soit $H_A = \{p_{2\xi+\alpha_\xi}\}_{0 \leq \xi < \varphi}$, $H_B = \{p_{2\xi+\beta_\xi}\}_{0 \leq \xi < \varphi}$, où (vu la définition de H_X) $\alpha_\xi = 1$, si $x_\xi \in h(A)$ et $\beta_\xi = 0$, si x_ξ non $\in h(B)$. Comme $A \neq B$, l'ensemble $r(A, B)$ est, comme nous savons, de puissance $2^{\aleph_0}$. Donc, au moins un de deux ensembles $h(A) - h(B)$ et $h(B) - h(A)$ est de puissance $2^{\aleph_0}$, soit p. e. le premier. Il existe donc un ensemble M de puissance $2^{\aleph_0}$ de nombres ordinaux ξ, $0 \leq \xi < \varphi$, tels que $x_\xi \in h(A) - h(B)$.

On a donc (vu la définition de H_X, et vu que $\alpha_\xi = 1$, $\beta_\xi = 0$, si $x_\xi \in h(A) - h(B)$): $p_{2\xi+1} \in H_A - H_B$ pour $\xi \in M$, ce qui donne (d'après $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph_0}$): $\overline{\overline{H_A - H_B}} = 2^{\aleph_0}$. Or, comme on a $E_A \subset H_A$, $E_B \subset H_B$, on trouve

$$(2) \qquad E_A - E_B \supset (H_A - H_B) - (H_A - E_A)$$

et, comme nous savons, on a $\overline{\overline{H_A - E_A}} < 2^{\aleph_0}$: l'inclusion (2) donne donc tout de suite $\overline{\overline{E_A - E_B}} = 2^{\aleph_0}$, d'où $E_A \neq E_B$. On a donc $E_A \neq E_B$ pour $A \neq B$, d'où il résulte que $\overline{\overline{\Phi}} = 2^{2^{\aleph_0}}$

Soit maintenant E_X un ensemble quelconque de la famille Φ et soit $H_X = \{p_{2\xi+\alpha_\xi}\}_{0 \leq \xi < \alpha}$. Soit $f(x)$ une fonction continue à valeurs distinctes, définie dans E_X et telle qu'on n'a pas dans E_X identiquement $f(x) = x$. Il existe donc un

http://rcin.org.pl

nombre $a \epsilon E_X$ tel que $|f(a)-a|>0$. La fonction f étant continue dans E_X, il existe, comme on sait, une fonction de classe $\leqslant 1$ d'une variable réelle qui coïncide avec $f(x)$ dans E_X [1]). Or, comme $a \epsilon E_X$, $|f(a)-a|>0$, et vu que la fonction $f(x)-x$ est continue dans E_X, il existe un nombre naturel n, tel que $|f(x)-x|>0$ pour $a-1/n<x<a+1/n$, $x \epsilon E_X$. Or, comme $a \epsilon E_X$, l'intervalle $(a-1/n, a+1/n)$ contient, comme nous savons, $2^{\aleph_0}$ points de E_X.

Il existe donc $2^{\aleph_0}$ nombres x de E_X, tels que $f(x) \neq x$. La fonction f étant à valeurs distinctes dans E_X, on voit donc que $f \epsilon F$. Comme $\overline{\overline{H_X - E_X}} < 2^{\aleph_0}$, l'ensemble N de tout les nombres ordinaux ξ, $0 \leqslant \xi < \varphi$, tels que $p_\xi \epsilon H_X - E_X$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Or, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi < \varphi$, tels que $f = f_{2\xi} = f_{2\xi+1}$ est, comme nous savons, de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe donc un nombre ordinal η, tel que $f = f_{2\eta} = f_{2\eta+1}$ et $p_{2\eta}$ non $\epsilon H_X - E_X$ et $p_{2\eta+1}$ non $\epsilon H_X - E_X$. Posons $\mu = 2\eta + \alpha_\eta$: d'après $H_X = \{p_{2\xi+\alpha_\xi}\}_{0 \leqslant \xi < \varphi}$ nous aurons $p_\mu \epsilon H_X$ et comme p_μ non $\epsilon H_X - E_X$ (puisque $\alpha_\eta = 0$ ou 1) et $E_X \subset H_X$, on trouve $p_\mu \epsilon E$.

Or, d'après (1) on a

$$f_\mu(p_\mu) \neq p_\lambda \quad \text{pour} \quad \lambda < \mu \quad \text{et} \quad p_\lambda \neq f_\mu(p_\mu) \quad \text{pour} \quad \mu \leqslant \lambda < \varphi:$$

on a donc $f_\mu(p_\mu)$ non ϵH_X et, à plus forte raison: $f_\mu(p_\mu)$ non ϵE_X. La fonction $f = f_{2\eta} = f_{2\eta+1} = f_\mu$ transforme donc le point p_μ de E_X en un point étranger à E_X: on ne peut pas donc avoir $f(E_X) \subset E_X$.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Corollaire. *Il existe une famille* Ψ *de puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$ *d'ensembles linéaires qui ont deux à deux les nombres de dimension* (au sens de M. Fréchet) *distincts* [2]).

Démonstration. Soit Φ la famille d'ensembles satisfaisant à notre théorème. Comme on a $\overline{\overline{\Phi}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ et comme pour tout ensemble linéaire E la famille de tous les ensembles linéaires homéomorphes à E est de puissance $2^{\aleph_0}$, on démontre

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* 16, p. 81.

[2]) Cf. Kuratowski, *Fund. Math.* 8, p. 203 et *Topologie* I, p. 218.

http://rcin.org.pl

sans peine (à l'aide de l'axiome du choix) que la famille Φ contient une sous-famille Ψ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ et telle que deux ensembles distincts de la famille Ψ ne sont jamais homéomorphes. Je dis que la famille Ψ satisfait à notre corollaire.

En effet, soient E et H deux ensembles distincts de la famille Ψ, donc non homéomorphes, et supposons qu'ils ont les mêmes nombres de dimension. Il existe donc une homéomorphie f entre E et $f(E) \subset H$, et une homéomorphie g entre H et $g(H) \subset E$.

La fonction $g(f(x))$ est donc continue dans E et à valeurs distinctes dans E et on a $g(f(E)) \subset E$. Comme $\Psi \subset \Phi$, on a $E \epsilon \Phi$ et $H \epsilon \Phi$; la famille Φ satisfaisant à notre théorème, on a donc $g(f(x)) = x$ pour $x \epsilon E$, d'où $g(f(E)) = E$. Or, comme les ensembles E et H ne sont pas homéomorphes, $g(H)$ est un vrai sous-ensemble de E et, à plus forte raison, $g(f(E))$ est un vrai sous-ensemble de E. L'égalité $g(f(E)) = E$ est donc impossible. Les ensembles E et H ne peuvent donc avoir les mêmes nombres de dimension. Notre corollaire est ainsi démontré.

W. Sierpiński

O pewnej rodzinie zbiorów liniowych osobliwych

Komunlkat wygłoszony na posiedzeniu w dniu 24 stycznia 1947 r.

Streszczenie

Autor dowodzi następującego twierdzenia, stanowiącego uogólnienie pewnego twierdzenia p. Kuratowskiego:

Istnieje rodzina Φ mocy $2^{2^{\aleph_0}}$ różnych zbiorow liniowych E mocy $2^{\aleph_0}$, takich, że jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w E i różnowartościową w E, i jeżeli $f(E) \subset E$, to $f(x) = x$ dla $x \epsilon E$.

Z twierdzenia tego autor otrzymuje, jako natychmiastowy wniosek, inne twierdzenie p. Kuratowskiego, dotyczące wymiarów Fréchet'a.

---

http://rcin.org.pl

H. Rasiowa

Axiomatisation d'un système partiel de la théorie de la déduction

Mémoire présenté par A. Mostowski dans la séance du 24.I. 1947.

§ 1. Introduction.

L'ouvrage présent traite de l'axiomatisation d'un système de la théorie bi-valente de la déduction, formé exclusivement à l'aide des opérateurs d'équivalence (désigné par E), et de non-équivalence (désigné par E') [1]).

Le système S de la théorie de la déduction [2]) construit uniquement à l'aide de l'opérateur E peut être basé sur les axiomes suivants:

L. A. 1. $EEEprEqpErq$

L. A. 2. $EEpEqrEEpqr$

qui seront utiles dans la suite.

Désignons notre système par S' et admettons pour lui les deux axiomes suivants:

A. I. $EEpqEErqEpr$

A. II. $EEpqEE'rqE'pr$

indépendants l'un de l'autre.

A. I, A. II et chaque expression qui résulte de ces axiomes à l'aide des règles de raisonnement (citées ci-dessous) s'appellent thèses de S'.

---

[1]) Les opérateurs seront placés devant les variables comme chez J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej* — cours autorisé, Varsovie 1929.

[2]) St. Leśniewski: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fundamenta Mathematicae, vol XIV, Varsovie 1929.

Le système S est une base pour la protothètique.

http://rcin.org.pl

Pour le système S' sont valables les règles de raisonnement genéralement connues. A savoir:

R. 1 (la règle de substitution): $\alpha(p)$ étant une thèse de S' qui contient une variable p, chaque expression $\alpha(\beta)$, où β est une autre variable, ou une expression arbitraire de S' est aussi une thèse.

R. 2 (la règle de détachement): α et $E\alpha\beta$ étant des thèses de S', on admet β comme thèse de S'.

Les matrices [1]) suivantes sont adéquates pour le système S':

M_1	E	0	1
	0	1	0
*	1	0	1

M_2	E'	0	1
	0	0	1
*	1	1	0

Chaque expression α du système S', qui satisfait à ces deux matrices s'appelle un théorème de S'.

L'ouvrage présent a pour but de démontrer que le système d'axiomes A. I et A. II est complet et indépendant, et de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression arbitraire de S' soit une thèse.

§ 2. Thèses du système S'.

Nous déduirons d'abord les axiomes L. A. 1 et L. A. 2 de Leśniewski de l'axiome A. I, en prenant pour base le système S.

A. I $p/Epq,\ q/EErqEpr,\ r/s * E$ A. I — $\overline{1}$

$\overline{1}$. $EEsEErqEprEEpqs$

$\overline{1}\ s/Epq * E$ A. I — $\overline{2}$

$\overline{2}$. $EEpqEpq$

A. I $p/Epq,\ q/Epq * E\overline{2}$ — $\overline{3}$

$\overline{3}$. $EErEpqEEpqr$

$\overline{3}\ p/Epq,\ q/r,\ r/ErEpq * E\overline{3}$ — $\overline{4}$

$\overline{4}$. $EEEpqrErEpq$

$\overline{4}\ r/EErqEpr * E$ A. I — $\overline{5}$

$\overline{5}$. $EEErqEprEpq$

$\overline{5}\ q/p,\ r/p * E\overline{2}\ q/p$ — $\overline{6}$

[1]) Le signe * auprès d'une matrice indique la valeur distinguée.

http://rcin.org.pl

$\overline{6}$. Epp

A. I $q/p,\ r/q * E\,\overline{6}$ — $\overline{7}$

$\overline{7}$. $EEqpEpq$

A. I $p/Epq,\ q/Eqp * E\,\overline{7}\,p/q,\ q/p$ — $\overline{8}$

$\overline{8}$. $EErEqpEEpqr$

$\overline{7}\,p/EEpqr,\ q/ErEqp * E\,\overline{8}$ — $\overline{9}$

$\overline{9}$. $EEEpqrErEqp$

A. I $p/EEpqr,\ q/ErEqp,\ r/EEqpr * E\,\overline{9} - E\,\overline{4}\,p/q,$
q/p — $\overline{10}$

$\overline{10}$. $EEEpqrEEqpr$

A. I $p/Epq,\ q/EErqEpr,\ r/EEqrEpr * E$ A. I —
$E\,\overline{10}\,p/q,\ q/r,\ r/Epr$ — $\overline{11}$

$\overline{11}$. $EEpqEEqrEpr$

$\overline{11}\,p/EEprEqp,\ q/Eqr,\ r/Erq * E\,\overline{5}\,p/q,\ q/r,\ r/p$ —
$E\,\overline{7}\,p/r$ — L. A. 1

L. A. 1. $EEEprEqpErq$

$\overline{11}\,p/Epq,\ q/EErqEpr,\ r/EEprErq * E$ A. I —
$E\,\overline{7}\,p/Epr,\ q/Erq$ — $\overline{12}$

$\overline{12}$. $EEpqEEprErq$

$\overline{11}\,p/Eqr,\ q/EEqpEpr,\ r/EEpqEpr * E\,\overline{12}\,p/q,$
$q/r,\ r/p - E\,\overline{10}\,p/q,\ q/p,\ r/Epr$ — $\overline{13}$

$\overline{13}$. $EEqrEEpqEpr$

$\overline{11}\,p/Epq,\ q/EEqrEpr,\ r/s * E\,\overline{11}$ — $\overline{14}$

$\overline{14}$ $EEEEqrEprsEEpqs$

$\overline{14}\,q/Eqr,\ r/Esr,\ s/EEsqEpEsr * E\,\overline{14}\,p/s,$
$s/EpEsr$ — $\overline{15}$

$\overline{15}$. $EEpEqrEEsqEpEsr$

$\overline{7}\,p/EEsqEpEsr,\ q/EpEqr * E\,\overline{15}$ — $\overline{16}$

$\overline{16}$. $EEEsqEpEsrEpEqr$

$\overline{11}\,p/Epq,\ q/EEqrEpr,\ r/EEpEqrEpEpr *$
$E\,\overline{11} - E\,\overline{13}\,q/Eqr,\ r/Epr$ — $\overline{17}$

$\overline{17}$. $EEpqEEpEqrEpEpr$

$\overline{16}\,p/EpEqr,\ r/Epr,\ s/p * E\,\overline{17}$ — $\overline{18}$

$\overline{18}$. $EEpEqrEqEpr$

$\overline{11}\,p/EpErq,\ q/ErEpq,\ r/EEpqr * E\,\overline{18}\,q/r,$
$r/q - E\,\overline{3}$ — $\overline{19}$

http://rcin.org.pl

$\overline{19}$. $EEpErqEEpqr$

$\overline{13}\ q/Eqr,\ r/Erq * E\overline{7}\ p/r - \overline{20}$

$\overline{20}$. $EEpEqrEpErq$

$\overline{11}\ p/EpEqr,\ q/EpErq,\ r/EEpqr * E\overline{20} -$
$E\overline{19}$ — L. A. 2

L. A. 2. $EEpEqrEEpqr$.

Ainsi on voit que le système d'axiomes de Leśniewski (L. A. 1 et L. A. 2) est une conséquence de l'axiome A. I. On en conclut aussi que chaque théorème du système S est une conséquence de l'axiome A. I. Ce résultat est dû à B. Sobociński.

Evidemment le système S constitue une partie du système S'. Il s'ensuit qu'on peut employer les thèses du système S pour déduire les thèses de S', qui contiennent l'opérateur E'.

Nous nous servirons dans la suite des thèses suivantes:

$\overline{21}$. $EEsEpEqrEsEqEpr$

$\overline{22}$. $EpEEpqq$

$\overline{23}$. $EEpEqrEErsEpEqs$

$\overline{24}$. $EpEqEqp$.

A. I $p/E'pq,\ q/E'pq * E\overline{6}\ p/E'pq - 1$

1. $EErE'pqEE'pqr$

$\overline{3}\ p/E'pq,\ q/r,\ r/ErE'pq * E1 - 2$

2. $EEE'pqrErE'pq$

A. II $p/q,\ r/p * E\overline{6}\ p/q - 3$

3. $EE'pqE'qp$

A. I $p/E'pq,\ q/E'qp * E3 - 4$

4. $EErE'qpEE'pqr$

$\overline{7}\ p/EE'pqr,\ q/ErE'qp * E4 - 5$

5. $EEE'pqrErE'qp$

A. I $p/EE'pqr,\ q/ErE'pq,\ r/EE'qpr * E2 -$
$E5\ p/q,\ q/p - 6$

6. $EEE'pqrEE'qpr$

A. I $p/Epq,\ q/EE'rqE'pr,\ r/EE'qrE'pr * E$ A. II —
$E6\ p/q,\ q/r,\ r/E'pr - 7$

http://rcin.org.pl

7. $EEpqEE'qrE'pr$

$\overline{11}\ p/Epq,\ q/EE'rqE'pr,\ r/EE'prE'rq * E$ A. II — $E\ \overline{7}\ p/E'pr,\ q/E'rq$ — 8

8. $EEpqEE'prE'rq$

$\overline{11}\ p/Eqr,\ q/EE'qpE'pr,\ r/EE'pqE'pr * E\ 8\ p/q,\ q/r,\ r/p$ — $E\ 6\ p/q,\ q/p,\ r/E'pr$ — 9

9. $EEqrEE'pqE'pr$

$\overline{11}\ p/Epq,\ q/EE'qrE'pr,\ r/s * E\ 7$ — 10

10. $EEEE'qrE'prsEEpqs$

$\overline{14}\ q/E'qr,\ r/E'sr,\ s/EEsqEpE'sr * E\ 10\ p/s,\ s/EpE'sr$ — 11

11. $EEpE'qrEEsqEpE'sr$

$\overline{7}\ p/EEsqEpE'sr,\ q/EpE'qr * E\ 11$ — 12

12. $EEEsqEpE'srEpE'qr$

$\overline{11}\ p/Epq,\ q/EE'qrE'pr,\ r/EE'pE'qrE'pE'pr * E\ 7$ — $E\ 9\ q/E'qr,\ r/E'pr$ — 13

13. $EEpqEE'pE'qrE'pE'pr$

$12\ p/E'pE'qr,\ r/E'pr,\ s/p * E\ 13$ — 14

14. $EE'pE'qrE'qE'pr$

A. II $p/E'pq,\ q/E'pq * E\ 6\ p/E'pq$ — 15

15. $EE'rE'pqE'E'pqr$

$\overline{7}\ p/E'E'pqr,\ q/E'rE'pq * E\ 15$ — 16

16. $EE'E'pqrE'rE'pq$

$\overline{11}\ p/E'E'pqr,\ q/E'rE'pq,\ r/E'pE'rq * E\ 16$ — $E\ 14\ p/r,\ q/p,\ r/q$ — 17

17. $EE'E'pqrE'pE'rq$

$9\ q/E'rq,\ r/E'qr * E\ 3\ p/r$ — 18

18. $EE'pE'rqE'pE'qr$

$\overline{11}\ p/E'E'pqr,\ q/E'pE'rq,\ r/E'pE'qr *$ $E\ 17$ — $E\ 18$ — 19

19. $EE'E'pqrE'pE'qr$

$\overline{11}\ p/Epq,\ q/EE'qrE'pr,\ r/EEpE'qrEpE'pr *$ $E\ 7$ — $E\ \overline{13}\ q/E'qr,\ r/E'pr$ — 20

20. $EEpqEEpE'qrEpE'pr$

$16\ p/EpE'qr,\ r/E'pr,\ s/p * E\ 20$ — 21

http://rcin.org.pl

21. $E E p E' q r E q E' p r$
$\overline{13}\, q/E q r,\ r/E E' s q E' s r * E\, 9\, p/s - 22$

22. $E E p E q r E p E E' s q E' s r$
$\overline{21}\, q/E' s q,\ r/E' s r,\ s/E p E q r * E\, 22 - 23$

23. $E E p E q r E E' s q E p E' s r$
$23\, p/q,\ q/E q r,\ s/p * E\, \overline{22}\, p/q,\ q/r - 24$

24. $E E' p E q r E q E' p r$
$\overline{11}\, p/E E' p q r,\ q/E r E' p q,\ r/E p E' r q * E\, 2 - E\, 21\, p/r,$
$q/p,\ r/q - 25$

25. $E E E' p q r E p E' r q$
$\overline{23}\, p/E E' p q r,\ q/p,\ r/E' r q,\ s/E' q r * E\, 25 -$
$E\, 3\, p/r - 26$

26. $E E E' p q r E p E' q r$
$\overline{7}\, p/E q E' p r,\ q/E' p E q r * E\, 24 - 27$

27. $E E q E' p r E' p E q r$
$\overline{13}\, p/s,\ q/E p q,\ r/E E' q r E' p r * E\, 7 - 28$

28. $E E s E p q E s E E' q r E' p r$
$\overline{21}\, p/s,\ q/E' q r,\ r/E' p r,\ s/E s E p q * E\, 28 - 29$

29. $E E s E p q E E' q r E s E' p r$
$29\, q/E p s * E\, \overline{24}\, p/s,\ q/p - 30$

30. $E E' E p s r E s E' p r$
$\overline{11}\, p/E' E p q r,\ q/E q E' p r,\ r/E' p E q r * E\, 30$
$s/q - E\, 27 - 31$

31. $E E' E p q r E' p E q r$
$26\, r/E' p q * E\, \overline{6}\, p/E' p q - 32$

32. $E p E' q E' p q$
$\overline{11}\, q/E' q E' p q,\ r/E' p E' q q * E\, 32 - E\, 14\, p/q,$
$q/p,\ r/q - 33$

33. $E p E' p E' q q$
$\overline{11}\, q/E' q E' p q,\ r/E' q E' q p * E\, 32 - E\, 18\, p/q,\ r/p - 34$

34. $E p E' q E' q p$
$\overline{11}\, p/r,\ q/E' q E' q r,\ r/E p E p E' q E' q r * E\, 34\, p/r -$
$E\, \overline{24}\, p/E' q E' q r,\ q/p - 35$

35. $E r E p E p E' q E' q r$
$\overline{23}\, p/r,\ q/p,\ r/E p E' q E' q r,\ s/E q E' p E' q r * E\, 35 -$
$E\, 21\, r/E' q r - 36$

36. $E r E p E q E' p E' q r.$

http://rcin.org.pl

§ 3. Démonstration du théorème fondamental pour le système S'.

Théorème fondamental. Chaque théorème du système S' est une thèse de ce système.

Définition 1.

Nous allons appeler les variables $p, q, r, \ldots$ des expressions du degré 0. Généralement, α est une expression du degré n, lorsque α est de la forme $E\beta\gamma$ ou $E'\beta\gamma$, où une des expressions α et β est du degré $n-1$, et l'autre du degré $\leqslant n-1$.

Définition 2.

Deux expressions arbitraires α et β s'appellent équivalentes (en symboles $\alpha \sim \beta$), lorsque $E\alpha\beta$ est une thèse de S'. Nous pouvons dire aussi dans ce cas, qu'il y a équivalence* entre α et β.

Définition 3.

Soit $\Phi_1\alpha_1\Phi_2\alpha_2\cdots\Phi_n\alpha_n\beta$ une expression de S', dans laquelle $\Phi_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ désigne soit l'opérateur E, soit E', et dans laquelle les $\alpha_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ sont des expression arbitraires de S'. Nous allons nommer chaque paire $\Phi_i\alpha_i$ un antécédent*.

Pour prouver le théorème fondamental nous nous servirons des lemmes suivants:

L. 1. L'équivalence* $\alpha \sim \beta$ entraîne $\beta \sim \alpha$ [1]).
[Dem. d'après la thèse 7].

L. 2. L'équivalence* $\alpha \sim \beta$ entraîne $E\alpha\gamma \sim E\beta\gamma$.
[Dem. d'après la thèse 11 et **L. 1**].

L. 3. L'équivalence* $\alpha \sim \beta$ entraîne $E'\alpha\gamma \sim E'\beta\gamma$.
[Dem. d'après la thèse 7 et **L. 1**].

L. 4. Si $\alpha \sim \beta$ et $\beta \sim \gamma$, nous avons $\alpha \sim \gamma$.
[Dem. d'après la thèse 11].

L. 5. Pour chaque expression α on a:

$$EpEp\alpha \sim \alpha$$

et

$$E'pE'p\alpha \sim \alpha.$$

[Dem. d'après les thèses 24, 34 et de **L. 1**].

---

[1]) Nous allons employer les lettres: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi$ pour désigner des expressions arbitraires de S'.

http://rcin.org.pl

L. 6. Pour chaque expression α nous avons:

$$EpEqE'pE'q\alpha \sim \alpha.$$

[Dem. d'après la thèse 36 et L. 1].

L. 7. On peut ajouter des deux côtés de l'équivalence * le même nombre antécédents * de la forme identique.

Dem. Soient α et β deux expressions équivalentes de S', alors dans ce cas $E\alpha\beta$ est une thèse de S'. Substituons dans les thèses $\overline{13}$ et 9: p/γ, q/α, r/β. En détachant les antécédents on obtient:

$$EE\gamma\alpha E\gamma\beta \quad \text{et} \quad EE'\gamma\alpha E'\gamma\beta.$$

Il en résulte que $E\gamma\alpha \sim E\gamma\beta$ et $E'\gamma\alpha \sim E'\gamma\beta$.

Le même raisonnement peut être répeté maintes fois, ce qui démontre L. 7.

L. 8. Chaque expression de S' est équivalente à une autre, qui ne diffère de l'expression donnée que par l'ordre de succession des antécédents *.

Dem. Le lemme étant évident pour chaque expression qui contient un seul antécédent *, supposons que chaque expression contenant n antécédents * satisfait aussi à ce lemme.

Considérons une expression [1])

$$\Phi_{n+1}\alpha_{n+1}\Phi_n\alpha_n\Phi_{n-1}\alpha_{n-1}\cdots\Phi_1\alpha_1\beta$$

qui possède $n+1$ antécédents *.

Si $\Phi_{n+1}\alpha_{n+1}$ doit rester au commencement de l'expression, le lemme est évident conformément à notre supposition et L. 7.

Dans le cas où $\Phi_k\alpha_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ devrait être au commencement de l'expression, nous aurions:

$$\Phi_{n+1}\alpha_{n+1}\Phi_n\alpha_n\cdots\Phi_k\alpha_k\cdots\Phi_1\alpha_1\cdots\beta \sim \Phi_{n+1}\alpha_{n+1}\Phi_k\alpha_k\Phi_n\alpha_n\cdots\Phi_1\alpha_1\beta$$

d'après notre supposition et de L. 7.

Considérons les équivalences *:

Eq. 1. $E\alpha E\beta\gamma \sim E\beta E\alpha\gamma$

Eq. 2. $E'\alpha E\beta\gamma \sim E\beta E'\alpha\gamma$

Eq. 3. $E'\alpha E'\beta\gamma \sim E'\beta E'\alpha\gamma$

qui résultent respectivement des thèses: $\overline{18}$, 24 et 14.

[1]) La signification des lettres Φ, α et β est la même que dans la Définition 3.

http://rcin.org.pl

Se reportant aux Eq. 1, Eq. 2, Eq. 3 et au **L. 4** on a

$$\Phi_{n+1}\,\alpha_{n+1}\,\Phi_n\,\alpha_n\cdots\Phi_1\,\alpha_1\,\beta\sim\Phi_k\,\alpha_k\,\Phi_{n+1}\,\alpha_{n+1}\cdots\Phi_1\,\alpha_1\,\beta$$

et dans la dernière expression l'ordre de succession des antécédents* peut être tout à fait arbitraire (d'après notre supposition et le **L. 7**).

L. 9. Si $\alpha\sim\beta$, et l'expression α est une thèse de S', l'expression β est aussi une thèse de S'.

Dem. α et β étant les expressions équivalentes, l'expression $E\alpha\beta$ est une thèse de S'. On peut alors appliquer la règle de détachement, d'où l'on obtient β comme thèse de S'.

Dans ce qui suit, nous déduirons quelques théorèmes auxiliaires pour la démonstration du théorème fondamental.

T. 1. Chaque expression α du système S' est ou bien une variable, ou une expression équivalente à une expression de la forme:

A. $$E\,p_1\,E\,p_2\cdots E\,p_m\,E'\,q_1\,E'\,q_2\cdots E'\,q_k\,r$$

qui contient le même nombre d'opérateurs E, E' et de variables que α.

Dem. Nous établirons ce théorème par induction.

Le théorème étant évident pour les expressions du degré 0, et du 1-er degré, supposons qu'il soit valable pour chaque expression du degré n.

Soit α une expression arbitraire du degré $n+1$. Ainsi donc, α a une des formes suivantes:

a. 1. $E\beta\gamma$ ou a. 2. $E'\beta\gamma$

où β et γ sont des expressions tout au plus du degré n.

Il en résulte que α et β satisfont à la thèse du théorème **T. 1**.

On a donc, les équivalences*:

b. 1. $\beta\sim E\,p_1\cdots E\,p_{m_1}\,E'\,q_1\cdots E'\,q_{k_1}\,r_1$

b. 2. $\gamma\sim E\,p_{m_1+1}\cdots E\,p_{m_2}\,E'\,q_{k_1+1}\cdots E'\,q_{k_2}\,r_2$.

On en déduit facilement d'après les lemmes **L. 2**, **L. 3**, **L. 7** et **L. 4** et les équivalences b. 1 et b. 2 que

c. 1. $$E\beta\gamma\sim E\,E\,p_1\cdots E\,p_{m_1}\,E'\,q_1\cdots E'\,q_{k_1}\,r_1\,E\,p_{m_1+1}\cdots E\,p_{m_2}\,E'\,q_{k_1+1}\cdots E'\,q_{k_2}\,r_2$$

http://rcin.org.pl

c. 2. $E'\beta\gamma \sim E'E p_1 \cdots E p_{m_1} E' q_1 \cdots E' q_{k_1} r_1 E p_{m_1+1} \cdots$
$E p_{m_2} E' q_{k_1+1} \cdots E' q_{k_2} r_2 .$

Considérons les équivalences *

Eq. 4. $E E \delta \varphi \Psi \sim E \delta E \varphi \Psi$

Eq. 5. $E E' \delta \varphi \Psi \sim E \delta E' \varphi \Psi$

Eq. 6. $E' E \delta \varphi \Psi \sim E' \delta E \varphi \Psi$

Eq. 7. $E' E' \delta \varphi \Psi \sim E' \delta E' \varphi \Psi$

qui résultent respectivement des thèses: L. A. 2, 26, 31, 19 et de L. 1.

En s'appuyant sur ces équivalences * et sur les lemmes L. 4 et L. 7 on conclut facilement, que

d. 1. $E \beta\gamma \sim E p_1 \cdots E p_{m_1} E q_1 E' q_2 \cdots E' q_{k_1} E' r_1 E p_{m_1+1} \cdots$
$E p_{m_2} E' q_{k_1+1} \cdots E' q_{k_2} r_2$

d. 2. $E'\beta\gamma \sim E' p_1 E p_2 \cdots E p_{m_1} E q_1 E' q_2 \cdots E' q_{k_1} E' r_1 E p_{m_1+1} \cdots$
$E p_{m_2} E' q_{k_1+1} \cdots E' q_{k_2} r_2 .$

En changeant les variables d'une façon convenable, et en appliquant les lemmes L. 8 et L. 4 on peut prouver facilement, que $E\beta\gamma$ ainsi que $E'\beta\gamma$ sont équivalentes aux expressions de la forme A, et qu'en passant à ces expressions on ne change ni le nombre d'opérateurs E et E' ni celui de variables. Q. E. D.

T. 2. Chaque expression α du système S' est soit une variable, soit une expression équivalente à une expression de la forme

B. $E p_1 \cdots E p_{m_1} E' q_1 \cdots E' q_{k_1} r$

dans laquelle aucune paire des variables p_i et p_j, et des variables q_i et q_j n'est de la même forme. Le nombre d'opérateurs E et E' dans l'expression donnée ne peut surpasser que d'un nombre pair le nombre corréspondant B.

De même, le nombre de variables dans l'expression donnée ne peut surpasser le nombre correspondant à B, que de nombres pairs de variables de forme identique.

Dem. Ce théorème résulte immédiatement de L. 5, L. 8, T. 1 et L. 4. Q. E. D.

T. 3. Chaque expression α du système S', est soit une variable, soit une expression équivalente à l'une des deux expressions

http://rcin.org.pl

C. $Ep_1 \cdots Ep_{m_4} E'q_1 \cdots E'q_{k_4} r$

D. $Ep_1 \cdots Ep_{m_4} E'q_1 \cdots E'q_{k_4} EsE'sr$

dans lesquelles les variables: p_i et p_j, p_i et q_j, p_i et s, q_i et s, q_i et q_j sont différentes.

La remarque concernant le nombre d'opérateurs et de variables dans **T. 2** reste valable pour les expressions C et D.

Dem. Dans l'expression B les variables p et les variables q peuvent être de forme identique. Nous les désignerons par s.

L'expression B est donc équivalente à

B$_1$. $Es_1 Es_2 \cdots Es_l E's_1 \cdots E's_l Ep_1 \cdots Ep_{m_4} E'q_1 \cdots E'q_{k_4} r$

[D'après **L. 8**].

Il faut considérer les deux cas suivants:

(1) Cas de l pair: B$_1$ est alors équivalente à l'expression C, ce qui résulte des lemmes **L. 8** et **L. 6**.

(2) Cas de l impair: on conclut de **L. 8** et de **L. 6** que l'expression B$_1$ est équivalente à D.

On a ainsi: soit $\alpha \sim$ C

soit $\alpha \sim$ D [**T. 2**, **L. 4**].

La remarque concernant le nombre d'opérateurs et de variables est évidente. Q. E. D.

Prenons maintenant en considération les expressions C et D.

S'il n'y a pas dans ces expressions aucune occurence de l'opérateur E', C et D sont des expressions du système S.

Dans ce cas C et D étant des théorèmes de S', elles sont donc des conséquences de l'axiome A. 1, ce que nous avons déjà établi.

Si les expressions C et D, ne contiennent aucun opérateur E, elles ne peuvent pas être des théorèmes du système S'. (Il suffit pour le prouver de substituer $p/0$, $q/0$, $r/0$, $s/0$).

Nous pouvons faire ainsi la supposition suivante:

Supposition 1.

On admet, que dans l'expression C, ainsi que dans D il paraît au moins un opérateur E et un opérateur E'.

T. 4. L'expression C n'est pas un théorème du système S'.

Dem. Pour prouver ce théorème considérons tous les cas possibles:

(1) La variable r est de forme différente de chacune des variables p et chacune des variables q.

http://rcin.org.pl

(2) La variable r est de forme identique à une certaine variable q_i.

Dans ces deux cas il suffit de substituer $p/1$, $q/0$, $r/0$; alors l'expression C aura la valeur 0, c. à d. elle n'est pas un théorème de S'.

(3) La variable r est de forme identique à une certaine variable p_i.

Dans ce cas l'expression C est équivalente à une expression

C_1. $E p_1 \cdots E p_{i-1} E p_{i+1} \cdots E p_{m_4} E' q_1 \cdots E' q_{k_4} E r r$ [L. 8].

Pour démontrer que C_1 n'est pas un théoreme de S' il suffit de substituer $p/1$, $q_1/1$, $q_j/0$ $(1 < j \leqslant k_4)$, $r/0$. Q. E. D.

En ce qui concerne l'expression D, il faut encore considérer tous les cas possibles, à savoir:

(1) La variable r est de forme différente chacune des variables p, q, s.

(2) La variable r est de forme identique à une variable s.

(3) La variable r est de forme identique à une variable p_i.

(4) La variable r est de forme identique à une variable q_j.

Nous établirons les théorèmes suivants:

T. 5. Dans les cas (1), (2), (3) l'expression D n'est pas un théorème de S'.

Dem. Pour prouver ce théorème pour les cas (1) et (2) il suffit de faire les substitutions $p/1$, $q/0$, $s/1$, $r/1$.

Dans le cas (3) l'expression D est équivalente à une expression

D_1. $E p_1 \cdots E p_{i-1} E p_{i+1} \cdots E p_{m_4} E' q_1 \cdots E' q_{k_4} E s E' s E r r$ [L. 8].

Pour prouver le théorème il suffit de substituer: $p/1$, $q/0$, $s/1$, $r/0$. Q. E. D.

T. 6. Dans le cas (4) la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression D soit un théorème de S', est que $k_4 = 1$, $m_4 = 0$.

Dem. En effet, soient $k_4 = 1$ et $m_4 = 0$. D'après (4) l'expression D est alors de la forme

D_2. $E s E' s E' r r$

et constitue une substitution de la thèse 33.

On peut vérifier facilement que D_2 satisfait aux matrices M_1 et M_2.

http://rcin.org.pl

Inversement, supposons que $k=1$ et $m_4>0$.

Evidemment q_1 est de forme identique à une variable r. Substituons $p_1/0$, $p_j/1$ $(1<j\leqslant m_4)$, $s/1$, $r/1$. L'expression D a alors la valeur 0.

Dans le cas où $k_4>1$, $m_4>0$, l'expression D est équivalente à une expression

$$\mathrm{D}_3.\quad Ep_1\cdots Ep_{m_4}E'q_1\cdots E'q_{i-1}E'q_{i+1}\cdots E'q_{k_4}EsE'sE'rr.$$

Substituons $p/1$, $q_1/1$, $q_j/0$ $(1<j\leqslant k_4$ et $j\neq i)$, $s/1$, $r/1$. L'expression D_3 a alors la valeur 0.

De cette manière T. 6 est établi. Q. E. D.

D'après T. 3 chaque expression du système S' est soit une variable, soit une expression équivalente à une des expressions C ou D. Il est évident, qu'une variable n'est pas un théorème de S'.

Si les expressions C et D ne contiennent aucun opérateur E, elles ne sont pas des théorèmes de S', ce que nous avons déjà établi.

Dans le cas où les expressions C et D ne contiennent aucun opérateur E' et constituent des théorèmes de S', elles sont des conséquences de A. I, comme nous l'avons aussi établi.

D'après T. 4 l'expression C, qui contient au moins un opérateur E et un opérateur E', n'est pas un théorème de S'.

D'après T. 5 et T. 6 l'expression D qui contient au moins un opérateur E et un opérateur E' est un théorème de S' dans ce cas seulement, où elle est une thèse 33.

Il en résulte, qu'une expression arbitraire de S' est soit une expression équivalente à une expression qui n'est pas un théorème et dans ce cas elle n'est pas elle même un théorème, soit elle est une expression équivalente à une expression qui est une thèse du système S'.

On en conclut conformément au L. 9 que chaque théorème de S' est une thèse.

De cette manière le théorème fondamental est établi.

En même temps, comme on peut vérifier facilement, A. I et A. II satisfont aux matrices M_1 et M_2.

Les matrices M_1 et M_2 sont héréditaires par rapport aux règles de raisonnement (M_2 est héréditaire seulement par rapport à la règle de substitution, ce qui suffit complètement, parce que la règle de détachement ne dépend pas de l'opé-

http://rcin.org.pl

rateur E'). Donc, chaque conséquence des axiomes A. I et A. II satisfait aussi aux matrices M_1 et M_2.

Il en résulte, que chaque thèse de S' est un théorème de S'.

C'est ainsi qu'on voit que le système d'axiomes du système S' est complet.

Remarquons encore, que chaque théorème (donc aussi chaque thèse) de S' est équivalent soit à la thèse 33, soit à une thèse du système S.

La thèse 33 contient un nombre pair d'opérateurs E', un nombre impair d'opérateurs E, et chaque variable y paraît un nombre pair de fois.

On sait [1]) qu'une thèse arbitraire du système S, contient chaque variable un nombre pair de fois. On en conclut, que chaque thèse de S contient un nombre impair d'opérateurs E car il y a un opérateur de moins que de variables.

Conformément à **T. 3** il en résulte tout de suite, que chaque thèse de S' contient un nombre pair d'opérateurs E', un nombre impair d'opérateurs E, est chaque variable y paraît un nombre pair de fois [2]).

On voit aussi facilement que ces conditions sont en même temps suffisantes pour qu'une expression arbitraire soit une thèse.

Il convient de remarquer que Quine [3]) et Mihailescu [4]) citent des conditions analogues pour qu'une expression arbitraire du système construit uniquement à l'aide des opérateurs d'équivalence et de négation soit une thèse de ce système.

On pourrait arriver aux résultats obtenus ici d'une manière plus brève en s'appuyant sur l'ouvrage de Eugen Gh. Mihailescu [4]) dont j'ai fait la connaissance après avoir terminé cet ouvrage.

---

[1]) St. Leśniewski: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fundamenta Mathematicae, vol. XIV, Varsovie 1929.

[2]) On peut omettre la condition qui concerne l'opérateur E, parce qu'elle résulte des conditions qui concernent l'opérateur E' et des variables.

[3]) W. V. Quine: *Mathematical Logic*, New York, W. W. Norton & Co. Inc., 1940, p. 60.

[4]) Eugen Gh. Mihailescu: *Recherches sur la négation et l'équivalence dans le calcul des propositions*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, première partie, tome XXIII, fasc. 2, 1937.

http://rcin.org.pl

§ 4. Indépendence des axiomes.

Pour prouver que l'axiome A. I est indépendant de l'axiome A. II considérons les matrices:

M_3

	E	0	1
	0	1	1
*	1	0	1

M_4

	E'	0	1
	0	1	1
*	1	1	0

La matrice M_3 est héréditaire par rapport aux règles de raisonnement; M_4 est héréditaire par rapport à la règle de substitution, ce qui suffit complètement, parce que la règle de détachement ne dépend pas de l'opérateur E'.

On peut vérifier facilement que A. II satisfait à ces matrices, et de même toutes les conséquences de A. II y satisfont.

Par contre, l'axiome A. I n'y satisfait pas.

En effet on obtient en substituant $p/1$, $q/1$, $r/0$

$$EE11EE01E10 = E1E10 = E10 = 0\,.$$

Il en résulte que l'axiome A. I est indépendant de l'axiome A. II.

Pour prouver que l'axiome A. II est indépendant de l'axiome A. I considérons les matrices

M_5

	E	0	1
	0	1	0
*	1	0	1

M_6

	E'	0	1
	0	0	0
*	1	1	0

La matrice M_5 est identique à la matrice M_1 (du § 1); la matrice M_6 est héréditaire par rapport à la règle de substitution. On voit facilement que l'axiome A. I satisfait à M_5 et à M_6, tandis que l'axiome A. II n'y satisfait pas. En effet, en substituant $p/0$, $q/0$, $r/1$ on obtient

$$EE00EE'10E'01 = E1E10 = E10 = 0\,.$$

Ainsi l'axiome A. II est indépendant de l'axiome A. I.

http://rcin.org.pl

H. Rasiowa

Aksjomatyzacja pewnego częściowego systemu teorii dedukcji

Streszczenie

Autorka rozważa system teorii dedukcji zbudowany wyłącznie za pomocą funktorów równoważności i nierównoważności, oznaczonych odpowiednio przez E i E' oraz podaje następującą aksjomatykę niezależną dla tego systemu:

1. $EEpq\ EErq\ Epr$
2. $EEpq\ EE'rq\ E'pr$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby dowolne wyrażenie tego systemu było twierdzeniem jest aby każda zmiana występowała porzystą liczbę razy i aby funktor E' występował parzystą liczbę razy.

http://rcin.org.pl

P o s i e d z e n i e

z dnia 28 marca 1947 r.

T. W a ż e w s k i

Sur les intégrales asymptotiques des équations différentielles ordinaires

Communication présentée dans la séance du 28 mars 1947.

Le théorème constituant le sujet de la présente note fournit une méthode topologique de localisation des intégrales des équations différentielles ordinaires. Cette méthode permet de trancher d'une façon uniforme et rapide beaucoup de problèmes relatifs au phénomène asymptotique ou oscillatoire et à l'allure des intégrales au voisinage des points singuliers.

Nous désignerons, dans la suite, par $F(B)$ la frontière de l'ensemble B et nous poserons $\overline{B} = B + F(B)$. Nous admettrons la suivante:

Hypothèse H. Nous supposons que les fonctions f_i intervenant dans le système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

soient continues dans un ensemble ouvert Ω et que par chaque point de Ω il passe une intégrale unique du système (1). Nous supposons ensuite que

$$\overline{\omega} = \omega + F(\omega) \subset \Omega.$$

Définitions. Soit B un ensemble ouvert, tel que $\overline{B} \subset \Omega$. Soit $P \epsilon B$ et soit I l'intégrale du système (1) issue du point P. Nous désignerons par

$$C(P; B) \quad \text{et} \quad A(P; B) \tag{2}$$

le premier point situé sur I respectivement à droite et à gau-

http://rcin.org.pl

che de P, dans lequel l'intégrale I rencontre $F(B)$. Les points (2) seront appelés, selon Poincaré, respectivement conséquent de P et antécédent de P (relativement à B). Un d'eux ou bien tous les deux peuvent ne pas exister pour certains $P \epsilon B$.

Un point $Q \epsilon F(B)$ sera appelé respectivement point de sortie ou point d'entrée (relativement à B) lorsqu'il constitue le conséquent ou l'antécédent d'un point $P \epsilon B$.

La classe de tous les points de sortie ou d'entrée (relativement à B) sera désignée respectivement par $S(B)$ ou $E(B)$.

Un point Q sera appelé point de sortie stricte ou point d'entrée stricte (relativement à B) lorsque l'on a respectivement $Q \epsilon S(B) . E(\Omega - B)$ ou $Q \epsilon E(B) . S(\Omega - B)$. La classe de tous les points de sortie ou d'entrée stricte sera désignée respectivement par $S^*(B)$ ou $E^*(B)$. On a évidemment

$$S^*(B) \subset S(B), \quad E^*(B) \subset E(B), \quad S(B) + E(B) \subset F(B).$$

On démontre facilement le suivant.

Lemme. Si $C(P_0; B) \epsilon S^*(B)$ alors la transformation $Q = C(P; B)$ est continue au point $P = P_0$.

Voici deux hypothèses qui interviendrons dans la suite.

Hypothèse K. Nous supposons que la transformation $Q = C(P; \omega)$ et telle qu'en plus $Q = P$ lorsque $P \epsilon S(\omega)$, soit continue en tout point P en lequel elle est définie.

Hypothèse L.

$$S^*(\omega) = S(\omega).$$

Remarque 1. En vertu du lemme précédent l'Hypothèse K constitue une conséquence de l'Hypothèse L.

Théorème. Admettons l'Hypothèse H et une quelconque des Hypothèses K ou L. Soit

$$S_1 \subset S(\omega), \quad Z \subset \omega + S_1$$

et supposons que:

$$ZS_1 \text{ n'est pas un rétracte [1]) de } Z$$

$$ZS_1 \text{ est un rétracte de } S_1.$$

[1]) Soit $G \subset H$. On dit qu'une transformation $Q = T(P)$ effectue la rétraction de l'ensemble H en l'ensemble G lorsque $1_0)$ $T(P)$ est continue dans B, $2_0)$ $T(P) \epsilon G$ lorsque $P \epsilon H$ et $3_0)$ $T(P) = P$ lorsque $P \epsilon G$. Si une telle transformation existe on dit, selon M. Borsuk, que G est un rétracte de H.

http://rcin.org.pl

Cela posé, il existe un point $P_0 \epsilon Z\omega$, tel que, ou bien $C(P_0; \omega)$ n'existe pas, ou bien $C(P_0; \omega) \epsilon S(\omega) - S_1$.

Démonstration. Supposons que notre théorème soit faux. Pour tout $P \epsilon Z\omega$ on aura alors $C(P; \omega) \epsilon S_1$. Posons

$$K(P) = C(P; \omega) \text{ lorsque } P \epsilon Z\omega$$

$$K(P) = P \text{ lorsque } P \epsilon Z S_1.$$

On vérifie facilement que la transformation $Q = K(P)$ est continue dans Z et qu'elle transforme Z en un ensemble U, tel que $ZS_1 \subset U \subset S_1$. Soit $R = T(Q)$ une transformation effectuant la rétraction de S_1 en ZS_1.

On vérifie immédiatement que la transformation $R = T(K(P))$ effectue la rétraction de Z en ZS_1, ce qui est contraire à l'hypothèse que ZS_1 n'est pas un rétracte de Z.

Remarque 2. Un théorème analogue est juste relativement à l'antécédent de P.

Corollaire. Conservons les hypothèses du théorème précédent. Si en particulier $S_1 = S(\omega)$, on conclut à l'existence d'un point $P_0 \epsilon Z\omega$ pour lequel $C(P_0; \omega)$ n'existe pas.

Si, en plus, la partie de ω, située entre deux plans $t = a$ et $t = b$ quelconques, est bornée alors l'intégrale $x_i = \varphi_i(t)$ issue d'un point convenable $P_0 \epsilon Z\omega$ se laisse prolonger à droite jusqu'à $t = +\infty$ et, pendant tout son parcours à droite de P_0, elle est contenue dans ω.

Soit $\sigma(u)$ la section de ω par le plan $t = u$ et soit $\pi(u)$ la projection orthogonale de $\sigma(u)$ sur le plan $t = 0$.

Si l'ensemble $\pi(u)$ tend vers un point $(0, k_1, k_2, \ldots, k_n)$ lorsque $u \to +\infty$ alors $\varphi_i(t) \to k_i$ lorsque $t \to +\infty$. Notre théorème se prête donc à l'examen du phénomène asymptotique relativement au système (1).

Si l'ensemble $\pi(u)$, pour u croissant, effectue des oscillations consistant en ce qu'il se trouve tantôt au dessus du plan $x_1 = 0$, tantôt au dessous de ce plan alors la première composante $x_1 = \varphi_1(t)$ de notre intégrale effectue des oscillations analogues en prenant tantôt des valeurs positives, tantôt négatives. Notre théorème se prête donc à l'examen du phénomène oscillatoire des intégrales du système (1).

En remplaçant la famille des intégrales du système (1) par une famille des courbes continues jouissant des propriétés topologiques convenables on pourrait facilement remanier l'é-

http://rcin.org.pl

noncé de notre théorème de façon à obtenir un théorème de caractère purement topologique.

Le fait que les intégrales sortent de ω ou y entrent s'exprime en pratique, pour la plupart, par certaines inégalités dans lesquelles interviennent les deuxièmes membres du système (1). Voici un simple exemple de cette sorte.

Exemple. Admettons pour le système aux deuxièmes membres continus

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(t,x,y) \tag{3}$$

l'unicité des intégrales dans un ensemble ouvert Ω lequel contient le parallélépipède droit $\overline{\omega}$

$$0\leqslant t\leqslant 1,\quad |x|\leqslant 1,\quad |y|\leqslant 1.$$

Supposons que

$$xf(t,x,y)>0 \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad |x|=1,\quad |y|\leqslant 1,$$

$$yg(t,x,y)<0 \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad |x|\leqslant 1,\quad |y|=1.$$

En imaginant que l'axe t est orienté à droite et l'axe y est vertical désignons par s, i, a, p, d, g les faces de $\overline{\omega}$ respectivement supérieure, inférieure, antérieure, postérieure, droite et gauche. Les inégalités précédentes expriment que

$$S(\omega)=S^*(\omega)=F(\omega)-s-i-g$$

$$E(\omega)=E^*(\omega)=F(\omega)-a-p-d.$$

Soit Z le segment aux extrémités $L=(t_0, -1, y_0)$ et $M=(t_0, 1, y_0)$ avec $0<t_0<1$, $|y_0|<1$. Soit V le segment situé sur la face droite ayant les extrémités $L_1=(1, x_0, -1)$, $M_1=(1, x_0, +1)$ avec $|x_0|<1$.

Il résulte de notre théorème, qu'il existe une intégrale située dans $\overline{\omega}$ (pour $t_0\leqslant t\leqslant 1$) qui coupe les segments Z et V. Il suffit en effet de poser $S_1=S(\omega)-V$ et d'appliquer notre théorème.

Remplaçons, dans cet exemple, l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$ par l'intervalle $0\leqslant t<+\infty$ en gardant, à cette modification près, les hypothèses précédentes. En vertu de notre théorème il existe une intégrale commençant sur le segment Z et qui peut être prolongée jusqu'à $t=+\infty$ sans quitter l'interieur du „tube" $\overline{\omega}$.

http://rcin.org.pl

T. Ważewski

O całkach asymptotycznych równań różniczkowych zwyczajnych

Streszczenie

Autor podaje metodę topologiczną badania, w zakresie równań różniczkowych zwyczajnych, efektu asymptotycznego, oscylacyjnego oraz przebiegu całek w otoczeniu punktu osobliwego.

H. Makowski

Note préliminaire sur le Jurassique moyen de Łuków et sur sa faune

Note présentée par J. Samsonowicz dans la séance du 28 mars 1947.

En 1896 Krischtafowitsch (Ann. géol. et min. de la Russie, t. II, livr. 1, 1896) signala la présence dans les argiles noires, exploitées pour la briqueterie de Łuków, la présence d'une faune callovienne. Il pensa y avoir affaire au Jurassique *in situ* et donna dans sa note une liste assez complète des espèces qui s'y présentent.

Il est cependant tout-à-fait probable que les argiles en question forment une énorme masse erratique de 1 à 2 km^2, gisant au milieu des formations quaternaires. Les conditions exactes de ce gisement ne sont pas néanmoins complètement élucidées faute de suffisants forages.

Les argiles sont noires, plastiques, contenant de la muscovite et une quantité insignifiante de grains de sable, atteignant rarement quelques millimètres de diamètre. La roche est très uniforme, sans stratification nette.

Au milieu de l'argile on rencontre des concrétions de sphérosidérite atteignant jusqu'à 30 cm de diamètre. Les concrétions petites sont sphéroidales, les grandes — plus au moins

http://rcin.org.pl

aplaties ou allongées. Ces concrétions sont cependant très clairesemées: sur 10 m^3 de l'argile on n'en trouve en général que quelques seulement. Celles qui mésurent au-dessous de 10 cm ne renferment en général aucun fossile, les grandes, par contre, sont le plus souvent remplies de coquilles d'Ammonites de taille moyenne et petite ainsi que de Gastéropodes et de Lamellibranches. On y trouve souvent aussi des fragments de bois plus ou moins carbonisé. Dans les argiles mêmes les fossiles, à part quelques rares Ammonites de grande taille, ne se rencontrent presque pas.

Les concrétions de sphérosidérite doivent, selon toute probabilité, représenter des formations syngénétiques. La matière dont elles se composent se précipitait vraisemblablement à l'état de gel, formant des concentrations gluantes auxquelles adhéraient les petites coquilles mues par des vagues ou courants, tandis que les grandes coquilles des Ammonites, plus lourdes, ne subissaient pas de transport et restaient souvent en dehors des concrétions.

Les concrétions ainsi que les coquilles qu'elles renferment sont en général incrustées et souvent épigénisées par la pyrite. Celle-ci forme parfois la masse principale des concrétions.

L'état de conservation des fossiles est très bon. Les cuquilles de Gastéropodes et de Lamellibranches conservent souvent leur couche de périostracum avec les couleurs primitifs. Dans certaines concrétions on peut compter jusqu'à quelques centaines de coquilles, dont au moins 80°/₀ d'Ammonites, parmi lesquelles prédominent celles de *Quenstedticeras lamberti* Sow.

La faune que j'ai pu réunir et préparer jusqu'ici comprend les espèces suivantes: *Rhynchonella varians* Schl., *Terebratula* sp., *Natica crithea* d'Orb., *Alaria cassiope* d'Orb., *A. cochleata* Quenst., *Nucula calliope* d'Orb., *N. caecilia* d'Orb., *Macrodon concinnum* Phill., *M. keyserlingi* d'Orb., *Trigonia clavellata* Park., *T. costata* Park., *Astarte striato-costata* Goldf., Astarte *cordata* Traut., *Anisocardia tenera* Sow., *Gresslya* sp., *Goniomya litterata* Sow., *Oxytoma inaequivalvis* var. *borealis* Bor., *Pinna mitis* Phill., *Pecten demissus* Phill., *P. lens* Sow., *P. fibrosus* Sow., *Modiola cuneata* Sow., *Dentalium subanceps* Traut., *Nautilus calloviensis* Opp., *Quenstedticeras lamberti* Sow., *Qu. leachi* (Sow.) Nik., *Qu. suther-*

http://rcin.org.pl

landiae Murch., *Qu. mologae* Nik., *Qu. mariae* d'Orb., *Qu. vertumnum* Leck., *Qu. inflatus* Quenst., *Qu. carinatum* Eichw., *Qu. rybinskianum* Nik., *Cadoceras tschefkini* d'Orb., *C. schumarowi* Nik., *Cosmoceras gowerianus* Sow., *C. ornatum* (Schlt.) emend. Brink., *C. transitionis* Nik., *C. annulatum* Quenst., *C. duncani* Sow., *C. gemmatum* Phill., *C. spinosum* Sow., *Perisphinctes variabilis* Lah., *Hecticoceras lunula* Ziet., *H. punctatum* Stahl., *Oecoptychius refractus* de Haan, *Belemnites calloviensis* Opp., *Belemnoteuthis* n. sp., *Pentacrinus* sp.

En décantant les argiles j'en ai extrait quelquesespè ces de Foraminifères, qui y sont du reste rares. Parmi celles-ci la plus fréquente est *Epistomina stelligera* Reuss.

Quelques espèces de la liste donnée méritent d'être distinguées. Ainsi *Quenstedticeras mologae* Nik., et *Cadoceras schumarowi* Nik. étaient considerées jusqu'ici comme des formes exclusivement russes; *Quenstedticeras inflatus* Quenst. par contre n'est pas connue dans la province boréale. Une autre espèce intéressante est *Cosmoceras annulatum* Quenst. décrite du Jurassique souabe ensemble avec une forme voisine à laquelle Quenstedt a appliqué le nom d'*Ammonites ornatus distractus*. Elle fut signalée par Siemiradzki dans le Jurassique de la Lithuanie (comme *Cosmoceras distractum* Quenst.) et considérée par Brinkmann comme une forme jeune de *Cosmoceras spinosum* Sow., quoique Siemiradzki a donné la figure d'un échantillon pourvu de l'aperture gérontique. C'est la forme la plus fréquente parmi les *Cosmoceras* à Łuków. J'en ai quelques exemplaires à l'aperture pourvue de longues oreillettes et un qui correspond exactement à la forme figurée par Quenstedt comme *Ammonites ornatus distractus*.

Une mention spéciale mérite *Oecoptychius refractus* de Haan, forme connue en Europe occidentale ainsi qu'en Pologne, mais faisant défaut en Russie et dans les pays baltes.

Enfin *Belemnoteuthis* n. sp. appartient au genre qui fut signalé jusqu'ici seulement en Europe occidentale et dont l'unique espèce, *Belemnoteuthis* antiqua (Cunn.) Pearce, a été trouvé dans deux gisements: dans les argiles à *Cosmoceras spinosum* Sow. à Christian Malford (Angleterre) et dans le même horizon à Gammelshausen (Allemagne). L'espèce de

http://rcin.org.pl

Łuków se distingue de *B. antiqua* par l'absence de la côte ventrale.

De ce qui a été dit il s'en suit que la faune de Łuków représente un ensemble bien intéressant au point de vue paléogéographique, car on y trouve d'un côté des formes exclusivement occidentales, de l'autres — des formes propres à la province boréale; en outre elle renferme quelques espèces bien rares. Une telle association n'a pas été signalée jusqu'à présent.

La constitution d'une telle faune ne fut possible que grâce à la grande transgression qui commença en Pologne au Bathonien sup., mais dont le maximum correspond au Callovien moyen et supérieur. La formation jurassique de Łuków comprend précisement les deux derniers niveaux. Cette transgression submergea le territoire entier de la Pologne réunissant la mer de l'Allemagne du Sud et du Nord avec la mer d'Angleterre d'un côté et avec la mer de la province boréale de l'autre. La faune de Łuków constitue en quelque sorte l'expression de ces relations paléogéographiques.

H. Makowski

Jura Łukowska i jej fauna

Komunikat przedstawiony przez czł. J. Samsonowicza dn. 20 marca 1947.

Streszczenie

Czarne, muskowitowe iły, eksploatowane w gliniankach cegielni w Łukowie, tworzą prawdopodobnie krę, zalegającą płytko wśród utworów czwartorzędowych. Występujące w tych iłach buły sferosyderytowe, zawierają faunę kelowejską, złożoną z małży, ślimaków i głowonogów.

Fauna głowonogów tworzy bardzo ciekawy zespół, w którym obok nieznanych lub bardzo rzadkich w Polsce form zachodnio-europejskich, występują gatunki właściwe tylko jurze borealnej, a wśród tych ostatnich parę form bardzo rzadkich.

http://rcin.org.pl

P o s i e d z e n i e

z dnia 2 maja 1947 r.

W a c ł a w S i e r p i ń s k i

Uwaga o dwuch aksjomatykach przestrzeni abstrakcyjnych

Komunikat wygłoszony dnia 2 maja 1947 r.

Streszczenie

Autor zajmuje się stosunkiem przestrzeni „stopniowanych" Hausdorffa do przestrzeni (V) Frécheta.

W a c ł a w S i e r p i ń s k i

Remarque sur deux axiomatiques des espaces abstraits

Mémoire présenté à la séance du 2 mai 1947.

Dans le volume 25 du journal *Fundamenta Mathematicae*, p. 489, F. Hausdorff s'occupe des espaces qu'il appelle „Gestufte Raüme". Ce sont des espaces E (formés d'éléments quelconques) où à tout ensmble $X \subset E$ on a fait correspondre un ensemble $X_\lambda \subset E$, de sorte qu'on ait

I. $(X+Y)_\lambda = X_\lambda + Y_\lambda$ *pour* $X \subset E$, $Y \subset E$,

II. *Si X ne contient qu'un seul élément ou n'en contient aucun, on a*

$$X_\lambda = X.$$

http://rcin.org.pl

(F. Hausdorff y ajoute encore la condition que $X \subset X_\lambda$ pour $X \subset E$: or, on vérifie sans peine que cette condition est une conséquence des conditions I et II. En effet, si $p \epsilon X \subset E$, alors, en posant $P = \{p\}$, où $\{p\}$ désigne l'ensemble formé d'un seul élément p, on a, d'après II, $P_\lambda = P$ et, comme $X = P + (X - P)$, on trouve, d'après I $X_\lambda = P_\lambda + (X - P)_\lambda \supset P_\lambda = P$, d'où $p \epsilon X_\lambda$. On a donc $p \epsilon X_\lambda$ pour $p \epsilon X$, ce qui prouve que $X \subset X_\lambda$).

Les conditions I et II sont, abstraction faite de notation, les deux premiers axiomes de M. Kuratowski [1]).

Les espaces (V) les plus abstraits de M. Fréchet sont des espaces E où à chaque élément a de E on a fait correspondre une famille non vide de sous-ensembles de E dits *voisinages* de a (cette correspondance n'étant soumise à aucune restriction).

Au moyen des voisinages M. Fréchet définit ensuite des *points d'accumulation* d'un sous-ensemble donné de E: un élément a de E est appelé point d'accumulation de l'ensemble $X \subset E$, si tout voisinage de a contient au moins un élément de l'ensemble X distinct de a [2]).

Conformément à cette définition il existe des espaces (V) dans lequels un ensemble fini admet des éléments d'accumulation, ce qui semble être peu naturel. Nous modifierons donc la définition des éléments d'accumulation, en disant qu'*un élément a de E est un élément d'accumulation de l'ensemble $X \subset E$, si tout voisinage de a contient une infinité d'éléments de l'ensemble X.*

Comme on sait, pour obtenir des espaces topologiques on assujettie les familles de voisinages de M. Fréchet à plusieurs conditions restrictives, dont nous n'envisagerons ici qu'une seule:

C. Étant donnés deux voisinages V_1 et V_2 d'un élément a de E, il existe toujours un voisinage V de a contenu dans V_1 et dans V_2.

Le but de cette Note est de démontrer qu'au point de vue topologique *l'étude des* „Gestufte Raüme" *de* F. Hausdorff *équivaut à l'étude des espaces* (V) *de* M. Fréchet

[1]) C. Kuratowski, *Topologie* I, Monografje Matematyczne t. III, Warszawa—Lwów 1933, p. 15.

[2]) Voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 277.

http://rcin.org.pl

satisfaisant à la condition C, avec notre définition modifiée d'éléments d'accumulation.

En effet, soit E un espace (V) de M. Fréchet satisfaisant à la condition C. X étant un sous-ensemble de E, désignons par X' l'ensemble de tous les éléments de E qui sont éléments d'accumulation de l'ensemble X dans le sens que nous avons adopté, et posons $X_\lambda = X + X'$ pour $X \subset E$. On vérifie sans peine que $X' = 0$ si X est un ensemble fini (ou vide) et on démontre que $(X+Y)' = X' + Y'$ pour $X \subset E$, $Y \subset E$.

En effet, d'une part, il résulte directement de la définition d'élément d'accumulation que $X' + Y' \subset (X+Y)'$.

D'autre part, admettons que a est un élément de E, tel que $a \text{ non} \in X' + Y'$. On a donc $a \text{ non} \in X'$ et il résulte de la définition d'élément d'accumulation et de l'ensemble X' qu'il existe un voisinage V_1 de a, tel que l'ensemble $V_1 X$ est fini (ou vide). Pareillement on conclut qu'il existe un voisinage V_2 de a, tel que l'ensemble $V_2 Y$ est fini (ou vide). Or, d'après C, il existe un voisinage V de a, tel que $V \subset V_1 V_2$. L'ensemble $V(X+Y) = VX + VY \subset V_1 X + V_2 Y$ est donc fini (ou vide) et a n'est pas (dans notre sens) élément d'accumulation de l'ensemble $X+Y$. Donc, si $a \text{ non} \in X' + Y'$, on a $a \text{ non} \in (X+Y)$, ce qui prouve que $(X+Y)' \subset X' + Y'$.

L'égalité $(X+Y)' = X' + Y'$ se trouve ainsi démontrée.

On a $(X+Y)_\lambda = (X+Y) + (X+Y)' = X+Y+X'+Y' = (X+X') + (Y+Y') = X_\lambda + Y_\lambda$, c. à. d. la formule I.

Or, comme $X' = 0$, si X est fini (ou vide), on a dans ce cas $X_\lambda = X + X' = X$, c. à. d. la formule II.

L'espace E devient ainsi „Gestufter Raum", où l'on a $X_\lambda = X + X'$.

Soit maintenant E un „Gestufter Raum", avec l'opération X_λ satisfaisant aux conditions I et II.

a étant un élément de E, considérons comme voisinage de a tout ensemble $V \subset E$, tel que $a \text{ non} \in (E - V)_\lambda$. (De tels ensembles V existent pour tout $a \in E$, p. ex. $V = E$, puisque, d'après II, $(E - E)_\lambda = 0$). Je dis que les voisinages V ainsi définis satisfont à la condition C.

En effet, soient V_1 et V_2 deux voisinages d'élément a. Vu notre définition de voisinages dans E, on a $a \text{ non} \in (E - V_1)_\lambda$ et $a \text{ non} \in (E - V_2)_\lambda$, ce qui donne $a \text{ non} \in (E - V_1)_\lambda + (E - V_2)_\lambda$.

http://rcin.org.pl

Or, d'après I on a $(E-V_1)_\lambda+(E-V_2)_\lambda=[(E-V_1)+$ $+(E-V_2)]_\lambda=(E-V_1V_2)_\lambda$; on a donc $a \operatorname{non} \epsilon (E-V_1V_2)_\lambda$, ce qui prouve que V_1V_2 est un voisinage de a. La condition C est ainsi vérifiée.

L'espace E est par conséquent un espace (V) satisfaisant à la condition C.

Or, je dis que si l'on désigne par X' l'ensemble de tous les éléments d'accumulation (dans notre sens) d'un sous-ensemble X de E, on aura $X_\lambda=X+X'$.

En effet, admettons qu'il existe un élément a tel que $a \epsilon X'-X_\lambda$. On a donc $a \operatorname{non} \epsilon X_\lambda$ et $E-X$ est un voisinage de a. D'après $a \epsilon X'$ il existe un élément $b \epsilon (E-X)X$, ce qui est impossible. On a donc $X'-X_\lambda=0$, d'où $X' \subset X_\lambda$ et, comme $X \subset X_\lambda$, on trouve $X+X' \subset X_\lambda$.

Soit maintenant a un élément de E tel que $a \operatorname{non} \epsilon X+X'$. Comme $a \operatorname{non} \epsilon X'$, il existe un voisinage V de a, tel que l'ensemble $Y=VX$ est fini (ou vide). Or, vu notre définition de voisinages dans E, on a $a \operatorname{non} \epsilon (E-V)_\lambda$. Or, $Y=VX=X-(E-V)$, d'où $X \subset (E-V)+Y$, ce qui donne $X_\lambda \subset [(E-V)+Y]_\lambda=$ $=(E-V)_\lambda+Y_\lambda=(E-V)_\lambda+Y$, puisque, Y étant fini (ou vide), on a, d'après II, $Y_\lambda=Y$. On a $a \operatorname{non} \epsilon (E-V)_\lambda$ et, comme $Y=VX \subset X$ et $a \operatorname{non} \epsilon X$, on a $a \operatorname{non} \epsilon Y$. On obtient $a \operatorname{non} \epsilon (E-$ $-V)_\lambda+Y$, d'où $a \operatorname{non} \epsilon X_\lambda$ (puisque $X_\lambda \subset (E-V)_\lambda+Y$). La formule $a \operatorname{non} \epsilon X+X'$ entraîne $a \operatorname{non} \epsilon X_\lambda$, ce qui prouve que $X_\lambda \subset X+X'$.

La formule $X_\lambda=X+X'$ est ainsi établie pour $X \subset E$, c. q. f. d.

---

http://rcin.org.pl

H. Hadwiger, Bern (Szwajcaria)

Uwaga o rozkładzie zbiorów tej samej miary na części parzyste

Przedstawił czł. A. Mostowski dn. 2 maja 1947 r.

Streszczenie

Banach i Tarski wykazali, że dwa zbiory mierzalne A i B o równych miarach, położone w przestrzeni Euklidesowej o dowolnej liczbie k wymiarów mogą dla każdego $\varepsilon > 0$ być rozłożone na sumy rozłączne $A = A' + U$, $B = B' + V$, gdzie U i V są to zbiory o mierze mniejszej niż ε, zaś A' i B' przystają do siebie przez rozkład skończony. Autor precyzuje ten wynik podając (dla zbiorów ograniczonych A i B) oszacowanie dla miar zbiorów U i V przy założeniu, że A' i B' przystają do siebie przez rozkład na n części.

H. Hadwiger, Berne (Suisse)

Remarque sur la décomposition des ensembles de même mesure en parties (respectivement) congruentes

Communication présentée par M. A. Mostowski à la séance du 2 mai 1947.

Dans un travail très remarqué, MM. St. Banach et A. Tarski [1]) ont démontré, entre autres, que dans un espace euclidien à k dimensions ($k \geqslant 3$) deux ensembles arbitraires et bornés A et B, contenant des points intérieurs, sont équivalents par décomposition finie: $A \underset{n}{=} B$. Par contre, ce théorème ne subsiste pas pour $k = 1, 2$. En ce qui a trait à $k = 1$, ce fait a même été démontré d'une façon directe et élémentaire par. M. W. Sierpiński [2]). Cependant, pour $k \geqslant 1$. deux ensembles arbitraires, contenant des points intérieurs, sont équivalents par décomposition dénombrable. Si l'on part

[1]) St. Banach et A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes; Fund. Math. 6, 1924, p. 244—277.

[2]) W. Sierpiński, Sur la non-existence des décompositions paradoxales d'ensembles linéaires; Actas Acad. Ci. Lima 9, 1946, p. 113—117.

http://rcin.org.pl

d'ensembles mesurables au sens de Lebesgue, et si l'on exige que les parties résultant de la décomposition soient également toutes mesurables (L), il résulte d'un théorème spécial démontré par MM. St. Banach et A. Tarski [1]), que deux ensembles de même mesure sont „presque" équivalents (c'est-à-dire équivalents, abstraction faite d'un reste de mesure (L) nulle) par décomposition dénombrable.

Cet état de choses peut être aussi obtenu comme conséquence de l'énoncé, selon lequel deux ensembles de même mesure sont „approximativement" équivalents par décomposition en ensembles mesurables (L). Ceci est à comprendre de la manière suivante: A tout nombre positif ε correspond un nombre entier $n \geqslant 1$ tel que

$$A = A' + U, \quad B = B' + V$$

avec la décomposition finie en ensembles mesurables (L)

$$A' \underset{n}{=} B'$$

et la condition

$$m(U) < \varepsilon \quad \text{et} \quad m(V) < \varepsilon$$

pour les restes U et V.

Toutefois, la démonstration imaginée par MM. Banach et Tarski ne permet pas une estimation du nombre n en partant de ε ou, inversement, n étant donné, elle ne permet pas d'évaluer la mesure des restes avec lesquels il faut compter au pis aller.

Indépendamment des autres résultats des auteurs susmentionnés, j'aimerais, dans la présente note, établir une brève démonstration de l'énoncé en question, laquelle est susceptible de fournir une relation explicite entre ε et n.

Nous démontrerons le **théorème** suivant:

Suppositions: *1. A et B sont deux ensembles bornés de l'espace euclidien à k dimensions, $k \geqslant 1$;*

2. Les diamètres des ensembles A et B satisfont aux inégalités $D(A) \leqslant D$, $D(B) \leqslant D$;

---

[1]) loc. cit. théorème 42, p. 277.

http://rcin.org.pl

3. *Les ensembles A et B sont mesurables au sens de Lebesgue, et leurs mesures sont égales:*

$$m(A) = m(B).$$

Proposition: *Il existe deux suites d'ensembles*

$$\{A_\nu\} \quad et \quad \{B_\nu\} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

remplissant les conditions suivantes:

1. $A \ni \sum_1^\infty A_\nu, \quad B \ni \sum_1^\infty B_\nu;$
2. A_ν *et* B_ν *sont mesurables* (L);
3. $A_\nu A_\mu = 0, \quad B_\nu B_\mu = 0$ *pour* $\nu \neq \mu$;
4. $A_\nu \cong B_\nu$ *(congruent);*
5. $m\left(A - \sum_1^\infty A_\nu\right) = m\left(B - \sum_1^\infty B_\nu\right) < \sqrt{\frac{2^{2+k}}{n}}\, D^k$

pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$

Démonstration: La démonstration est essentiellement basée sur une formule de géométrie intégrale de M. Balanzat [1]), que nous placerons en tête de notre exposé. Soient U et V deux ensembles mesurables, et désignons par $T(V)$ l'ensemble résultant de l'application de la translation T sur l'ensemble V. Alors

$$\int m\,[U\,T(V)]\,d\,T = m(U)\,m(V),$$

où

$$d\,T = d\,t_1 \cdots d\,t_k,$$

les $t_i\,(i = 1, 2, \ldots k)$ étant les composantes de la translation T dans les directions des coordonnées. L'intégrale de Lebesgue doit être étendue à toutes les translations remplissant la condition $U\,T(V) \neq 0$.

Pour commencer la démonstration de notre théorème, posons

---

[1]) M. Balanzat, Sur quelques formules de la géométrie intégrale des ensembles dans un espace à n dimensions; Portugaliae Math. **3**, 1942, p. 87—94.

http://rcin.org.pl

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{m(U_n)}{m(A)} = \frac{m(V_n)}{m(B)};$$

$$U_n = A - \sum_1^n A_\nu, \quad V_n = B - \sum_1^n B_\nu.$$

Montrons qu'il existe des suites d'ensembles $\{A_\nu\}$ et $\{B_\nu\}$ telles, qu'elles satisfont au système d'inégalités

$$a_0 = 1;$$

$$a_n < a_{n-1}(1 - \omega\, a_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

où

$$\omega = \frac{m(A)}{2^{k+1} D^k}.$$

Nous démontrerons ce fait par induction complète. Supposons que les conditions pour $a_0, a_1, \ldots a_n$ soient déjà remplies et montrons que l'on peut alors également réaliser l'inégalité pour a_{n+1}. Ainsi l'existence du système d'inégalités sera vérifiée, car la relation pour a_0 est trivialement réalisée.

Considérons d'abord les translations, pour lesquelles $U_n T(V_n) \neq 0$. Désignons par S_A et S_B les sphères enveloppantes des ensembles A et B, avec les rayons respectifs R_A et R_B. Comme

$$U_n \in S_A \quad \text{et} \quad V_n \in S_B,$$

$$\int dT \leq J_k (R_A + R_B)^k,$$

l'intégrale devant être étendue à toutes les translations considérées, et J_k désignant le volume de la sphère de rayon 1 à k dimensions.

En tenant compte des évaluations courantes concernant le rayon de la sphère enveloppante d'un ensemble de diamètre D, nous obtenons

$$R_A,\ R_B \leq D \sqrt{\frac{k}{2k+2}},$$

et l'inégalité prend la forme

$$\int dT \leq \left(\sqrt{\frac{2k}{k+1}}\right)^k J_k D^k < 2^{k+1} D^k.$$

http://rcin.org.pl

Le rapprochement de cette formule avec celle de M. Balanzat nous donne

$$\frac{\int m\,[U_n\,T(V_n)]\,d\,T}{\int d\,T} > \frac{m(U_n)\,m(V_n)}{2^{k+1}\,D^k} = \omega\, a_n^2\, m(A).$$

Le côté gauche de l'inégalité peut être interprété comme moyenne intégrale de la mesure des produits $U_n\,T(V_n)$.

On peut en déduire, par un raisonnement assez fréquemment employé, qu'il existe certainement une translation T_0 avec

$$m\,[U_n\,T_0(V_n)] > \omega\, a_n^2\, m(A).$$

Posons

$$A_{n+1} = U_n\,T_0(V_n) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = T_0^{-1}(U_n)\,V_n\,,$$

et nous obtiendrons

$$A_{n+1} \in U_n\,, \quad B_{n+1} \in V_n\,, \quad A_{n+1} \cong B_{n+1}\,,$$

$$m(A_{n+1}) = m(B_{n+1}) > \omega\, a_n^2\, m(A)\,,$$

où enfin

$$m\Big(A - \sum_1^{n+1} A_\nu\Big) = m(U_{n+1}) = m(U_n) - m(A_{n+1}) < (a_n - \omega\, a_n^2)\, m(A),$$

$$a_{n+1} < a_n\,(1 - \omega\, a_n).$$

Ainsi nous avons démontré l'existence de deux suites d'ensembles $\{A_\nu\}$ et $\{B_\nu\}$ aux sens de notre théorème, satisfaisant aux propositions 1 à 4, et réalisant le système d'inégalités pour les a_n. De ce dernier nous déduirons sans peine la 5-ème proposition de notre théorème. En effet

$$a_n < a_{n-1}\,,$$

$$a_n < a_0\,(1 - \omega\, a_0)(1 - \omega\, a_1) \cdots (1 - \omega\, a_{n-1}) < (1 - \omega\, a_n)^n\,.$$

Si l'on avait

$$a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\omega\, n}}\,,$$

il s'ensuivrait que

$$1 < \sqrt{\omega\, n}\,\left(1 - \frac{\sqrt{\omega\, n}}{n}\right)^n < \sqrt{\omega\, n}\; e^{-\sqrt{\omega n}}$$

http://rcin.org.pl

ou

$$1 < x e^{-x},$$

ce qui n'est pas possible. On a donc

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{\omega n}}, \quad m(U_n) < \frac{\sqrt{2^{k+1} D^k m(A)}}{\sqrt{n}}$$

et en tenant compte de

$$m(A) \leqq m(S_A) < \left(\sqrt{\frac{k}{2k+2}}\right)^k J_k D^k < 2 D^k,$$

nous obtenons la 5-ème proposition.

http://rcin.org.pl

Posiedzenie
z dnia 23 maja 1947 r.

Czł. J. St. Thugutt

O sodalicie i jego pochodnych

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dn. 23 maja 1947 r. przez czł. A. Łaszkiewicza. (p. Archiwum Mineralogiczne, XVI, 1—25, 1946).

Czł. J. St. Thugutt

Analcym, jego ustrój i pochodzenie

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dn. 23 maja 1947 r. przez czł. A. Łaszkiewicza (p. Archiwum Mineralogiczne, XVI, 26—42, 1946).

---

http://rcin.org.pl

Czł. A. Rubinowicz

O granicach stosowalności metody wielomianów podanej przez Sommerfelda

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 23 maja 1947 r.

Czł. A. Rubinowicz (Warsaw)

The Limits of the Applicability of Sommerfeld's Polynomial Method in Quantum Theory

Sommerfeld's polynomial method [1]) starts with a splitting of the eigenfunction f of the originally given differential equation

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right)-qf+\lambda\rho f=0 \tag{1}$$

into two factors E and P

$$f=EP.$$

E is responsible for the convergence of the normalization integral and for the fulfilment of the boundary conditions. The factor P however is assumed to be a polynomial which is a solution of the differential equation

$$(A_2+B_2x^h)x^2\frac{d^2P}{dx^2}+2(A_1+B_1x^h)x\frac{dP}{dx}+(A_0+B_0x^h)P=0. \tag{2}$$

h is here a positive integer. Writting the "original" differential equation (1) in the form

$$f''+2af'+bf=0,\quad a=\frac{p'}{2p},\quad b=\frac{-q+\lambda\rho}{p} \tag{3}$$

and the polynomial equation (2) in the form

---

[1]) Cp. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Vol. II, p. 716. Braunschweig 1939.

http://rcin.org.pl

$$P'' + 2\alpha P' + \beta P = 0, \quad \alpha = \frac{1}{x}\frac{A_1 + B_1 x^h}{A_2 + B_2 x^h}, \quad \beta = \frac{1}{x^2}\frac{A_0 + B_0 x^h}{A_2 + B_2 x^h} \tag{4}$$

we get

$$\alpha = \frac{E'}{E} + a, \tag{5a}$$
$$\beta = \frac{E''}{E} + 2a\frac{E'}{E} + b. \tag{5b}$$

Eliminating here E we obtain the relation between the coefficients of both the differential equations (3) and (4):

$$a^2 + a' - b = \alpha^2 + \alpha' - \beta. \tag{6}$$

We denote this expression by S. According to (3) and (6) it has the form

$$S = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}p'' - \frac{1}{4}\frac{p'^2}{p} + q - \lambda\rho\right)$$

so that q becomes

$$q = pS + \lambda\rho + \frac{1}{4}\frac{p'^2}{p} - \frac{1}{2}p''. \tag{7}$$

From (4) and (6) it follows that S has here the form

$$S = \alpha^2 + \alpha' - \beta = \frac{(A_1 + B_1 x^h)\,[A_1 - A_2 + (B_1 - (h+1)B_2)x^h]}{x^2(A_2 + B_2 x^h)^2} - \frac{A_0 + (B_0 - hB_1)x^h}{x^2(A_2 + B_2 x^h)}. \tag{8}$$

We apply this proposition in the case where the Schroedinger equation can be split into a number of differential equations of the form (1). p and ρ are then completely determined by the coordinates used for the separation of the variables and q contains an expression determined by the potential function of the Schroedinger equation. By our proposition are given the forms of the q's of all these differential equations, therefore also the form of the potential function V.

We obtain a more exact determination of V claiming that the coefficients of V cannot depend on the eigenvalue parameter λ if V has a real physical meaning. This takes place if the expression (7) for q does not depend on λ. But this can be fulfilled only if the coefficients B_i which appear in S are

http://rcin.org.pl

functions of λ. To find out this dependence we can expand the expression

$$p S + \lambda \rho \tag{9}$$

contained in (7) in a power series of $(x - x_0)$ (x_0 arbitrary) eventually after a multiplication by a function of x. On this occasion we also see, that only for distinct values of h the expression (9) can be made independent of λ.

Further conclusions as to the A_i and B_i and as to the potential V can be drawn from the boundary conditions for the eigenfunctions. As a rule the fundamental interval in the quantum theory is bounded by two singular points x_1 and x_2 of the equation (1). We prove the orthogonality of two eigenfunctions f_1 and f_2 with the eigenvalues λ_1 and λ_2 by the aid of the well known relation

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{x_1}^{x_2} f_2^* f_1 \rho \, d x = \lim_{x \to x_2} \Phi(x) - \lim_{x \to x_1} \Phi(x) \tag{10}$$

where

$$\Phi(x) = p(x) \left(f_2^*(x) \frac{d f_1(x)}{d x} - f_1(x) \frac{d f_2^*(x)}{d x} \right).$$

We have to claim not only the convergence of the integral appearing in (10) but also the existence and equality of both the limits

$$\lim_{x \to x_1} \Phi(x) = \lim_{x \to x_2} \Phi(x).$$

P is a product of x^σ with a "genuine" polynomial beginning with a constant and consisting of integer powers of x^h. The index σ is given here by the determining fundamental equation

$$\sigma(\sigma - 1) A_2 + 2 \sigma A_1 + A_0 = 0.$$

The degree of the polynomial is determined by Sommerfeld's condition of breaking off the power series

$$(\sigma + n)(\sigma + n - 1) B_2 + 2(\sigma + n) B_1 + B_0 = 0, \tag{11}$$

where n is an integer divisible by h.

http://rcin.org.pl

According to (5a) the factor E has the form

$$E = \exp\left(\int (\alpha - a)\, d\,x\right).$$

From (3) we find

$$\exp\left(-\int a\, d\,x\right) = \frac{\text{const}}{p^{1/2}}$$

whereas $\exp \int \alpha\, d\,x$ may be evaluated by the use of (4). Carrying out this calculation we have to distinguish three cases according to the disappereance or the non disappereance of A_2 and B_2. We get without an insignificant constant

(I) in case of $A_2 \neq 0,\ B_2 \neq 0$

$$E = p^{-\frac{1}{2}}\, x^{A_1/A_2} (A_2 + B_2\, x^h)^{\frac{1}{h}\left(\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2}\right)},$$

(II) in case of $A_2 = 0,\ B_2 \neq 0$

$$E = p^{-\frac{1}{2}}\, x^{B_1/B_2}\, e^{-\frac{1}{h}\frac{A_1}{B_2}\frac{1}{x^h}},$$

(III) in case of $A_2 \neq 0,\ B_2 = 0$

$$E = p^{-\frac{1}{2}}\, x^{A_1/A_2}\, e^{\frac{1}{h}\frac{B_1}{A_2} x^h}.$$

Finally we denote a very useful property of the polynomial equation (4). It does not change its form if we multiply the polynomial P by a given power of x. Putting $E = x^\nu$ we get from (5a) and (5b)

$$a = \alpha - \frac{\nu}{x}, \quad b = \beta - 2\,\alpha\,\frac{\nu}{x} + \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}.$$

Therefore we obtain for $f = x^\nu P$ the differential equation (3) in which the coefficients a, b are of the form of the coefficients α, β.

To give an example for the application of the general considerations we treat now the case of the one-dimensional Schroedinger equation

$$\frac{d^2\psi}{d\,x^2} + k\,(\mu - V(x))\,\psi = 0, \qquad k = \frac{8\,\pi^2 m}{h^2}, \tag{12}$$

http://rcin.org.pl

i. e. the differential equation (1) where

$$p = \rho = 1, \quad \lambda = k\mu, \quad q = kV \tag{13}$$

so that according to (9)

$$V = \mu + \frac{1}{k} S. \tag{14}$$

We suppose, that the fundamental interval is infinite and determined by

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{(15a)} \qquad \text{or by} \qquad 0 < x < +\infty \quad \text{(15b)}$$

and will see in which way we must choose the factor E. The normalization integral is here given according to (10) and (13) by

$$\int^{+\infty} \psi^* \psi \, dx .$$

To guarantee its convergence for the boundary point $+\infty$ we must with regard to $p = 1$ suppose that the case II is realized i. e.

$$A_2 \neq 0, \quad B_2 = 0 \tag{16}$$

and that

$$\frac{B_1}{A_2} < 0.$$

If we determine to add the x-power of E to the polynomial P we have to put

$$A_1 = 0. \tag{17}$$

In this way E becomes a pure exponential function

$$E = e^{\frac{1}{h} b_1 x^h} \quad \text{where} \quad b_1 = \frac{B_1}{A_2} . \tag{18}$$

The supposition (17) simplifies the following calculations, but it is not obligatory to insist on it.

Now let us use the potential V to further conclusions. According to (8), (16) and (17) the expression S in (14) is given by

$$S = \frac{1}{x^2} \left[- a_0 + ((h-1) b_1 - b_0) x^h + b_1^2 x^{2h} \right]$$

http://rcin.org.pl

where
$$a_i = \frac{A_i}{A_2}, \quad b_i = \frac{B_i}{A_2}. \tag{19}$$

From the fact, that V cannot depend on the eigenvalue parameter μ we have to infer that h can only be equal to $h = 1$ or $h = 2$. To get rid of μ in (14) we must have in S a constant term, indeed.

We deal with the case $h = 1$ first. With regard to (18) we have to choose the fundamental interval (15b). According to (14) and (19) the potential V becomes

$$V = \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + c_0$$

where the constants

$$c_{-2} = -\frac{a_0}{k}, \quad c_{-1} = -\frac{b_0}{k}, \quad c_0 = \mu + \frac{b_1^2}{k} \tag{20}$$

are independent of μ.

From the relations (16) and (20) we get by using Sommerfeld's condition of breaking off (11)

$$b_1 = -\frac{1}{2}\frac{b_0}{n+\sigma} = \frac{2\,k\,c_{-1}}{n+\sigma}$$

and therefore from (20)

$$\mu = -\frac{4\,k\,c^2_{-1}}{(n+\sigma)^2} + c_0 .$$

This is the well known Rydberg formula. The constant σ we get from the determining fundamental equation (11) taking now in accordance with (17) and (20) the form

$$\sigma(\sigma - 1) = -a_0 = k\,c_{-2}. \tag{21}$$

In case $h = 2$ we can choose for the fundamental interval (15a). Here is

$$V = \frac{c_{-2}}{x^2} + c_2\,x^2 + c_0$$

where the constants

$$c_{-2} = -\frac{a_0}{k}, \quad c_2 = \frac{b_1^2}{k}, \quad c_0 = \mu + \frac{b_1 - b_0}{k} \tag{22}$$

do not depend on μ.

http://rcin.org.pl

For the eigenvalues of μ we obtain from (11), (16) and (22)

$$\mu = -\frac{b_1 - b_0}{k} + c_0 = -\frac{b_1}{k}(1 + 2(n + \sigma)) +$$

$$+ c_0 = 2\sqrt{\frac{c_2}{k}}\left(n + \sigma + \frac{1}{2}\right) + c_0 \,. \qquad (23)$$

Denoting by ω the circular frequency of the harmonic vibration which takes place if V is a pure elastic potential ($c_{-2} = 0$) we obtain

$$c_2 = \frac{m}{2}\,\omega^2$$

and therefore according to (12) and (23)

$$\mu = \frac{h}{2\pi}\,\omega\left(n + \sigma + \frac{1}{2}\right) + c_0 \,.$$

The constant c_{-2} intervenes in μ in the same way as in the former case. In accordance with (17) and (22) we have σ to compute from the same equation (21) and in both cases to add to the number n.

If in particular V is a pure elastic potential equ. (21) becomes $\sigma(\sigma - 1) = 0$ so that $\sigma = 0$ or $\sigma = 1$. Because n is an even number (n must be divisible by $h = 2$) $n + \sigma$ is any integer whatever, including zero and can therefore be used as a quantum number.

Other examples of the applicability of our general considerations to special eigenvalue problems will be presented in a more detailed paper which will be published elsewhere.

---

http://rcin.org.pl

P o s i e d z e n i e

z dnia 27 czerwca 1947 r.

K. S m u l i k o w s k i

Notatki petrologiczne z okolic Korca i Doliny Słuczy na Wołyniu

K. S m u l i k o w s k i

Studia petrologiczne obszarów granitowych na północnym Wołyniu

(Obie prace p. Archiwum Mineralogiczne, XVI, 43—324, 1946 r.).

Czł. E. M a r c z e w s k i

Z zagadnień rozszerzania miary

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu z dn. 27 czerwca 1947 r.

Streszczenie

Niech μ będzie miarą (tj. nieujemną, addytywną funkcją zbioru) w pewnym ciele zbiorów M. Mówimy, że klasa $\mathsf{K} \subset \mathsf{M}$ jest klasą zbiorów stochastycznie niezależnych względem μ, gdy

$$\mu(E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2) \cdot \ldots \cdot \mu(E_n)$$

dla wszelkich zbiorów $E_j \in \mathsf{K}$.

Dla każdego zbioru E oznaczać będziemy przez E^0 jego dopełnienie, a przez E^1 sam zbiór E.

http://rcin.org.pl

S. Kakutani udowodnił w r. 1944, że miara Lebesgue'a w odcinku $\langle 0, 1 \rangle$ daje się przedłużyć do miary nieośrodkowej [1]). Pomysł jego dowodu pozwolił mi udowodnić następujące

Twierdzenie. *Niech μ będzie miarą przeliczalnie addytywną określoną w ciele przeliczalnie addytywnym M złożonym z podzbiorów ustalonego zbioru X, przyczym $\mu(X)=1$. Niech dalej K będzie klasą podzbiorów zbioru X spełniającą warunek: dla każdego $E \in \mathsf{M}$ takiego że $\mu(E)>0$, każdego ciągu zbiorów różnych $E_1, E_2, \ldots \in \mathsf{K}$ i każdego ciągu $\{i_n\}$ złożonego z liczb 0 i 1 mamy:*

$$E \cdot \prod_n E^{i_n} \neq 0.$$

Niech $\varphi(E)$ będzie funkcją rzeczywistą określoną dla $E \in \mathsf{K}$ taką że $0 < \varphi(E) < 1$.

Istnieje wówczas miara przeliczalnie addytywna ν określona w najmniejszym ciele przeliczalnie addytywnym zawierającym $\mathsf{M}+\mathsf{K}$ i taka, że

$$\nu(E)=\begin{cases}\mu(E) & \text{dla } E \in \mathsf{M}\\ \varphi(E) & \text{dla } E \in \mathsf{K}\end{cases} \tag{1}$$

(2) *klasa K wraz z jakimkolwiek zbiorem $E \in \mathsf{M}$ tworzą klasę zbiorów stochastycznie niezależnych względem ν.*

Dowód tego twierdzenia otrzymać można przez nietrudną modyfikację dowodu twierdzenia nieco mniej ogólnego, które udowodniłem w r. 1938 [2]).

[1]) S. Kakutani, *Construction of a non-separable extension of the Lebesgue measure space*. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), str. 115—119.

[2]) Por. E. Marczewski, *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure*, Fund. Math. 35 (1948), str. 13—28, w szczególności str. 25, II twierdzenie podstawowe.

Całość zagadnień pokrewnych omówiona jest w mej pracy *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures*, Colloquium Mathematicum I, 2 (1948), str. 122—132.

http://rcin.org.pl

P o s i e d z e n i e

z dnia 27 października 1947 r.

Czł. W a c ł a w S i e r p i ń s k i

O zależności pomiędzy kilkoma własnościami zasadniczymi przestrzeni topologicznych

Komunikat wygłoszony dnia 24 października 1947 r.

Streszczenie

W pracy tej autor zajmuje się wyprowadzeniem zależności między następującymi własnościami przestrzeni topologicznych:

H — że przestrzeń jest przestrzenią topologiczną H a u s d o r f f'a,

A — że przestrzeń spełnia 1-szy pewnik przeliczalności,

B — że przestrzeń posiada bazę przeliczalną,

C — że żaden ciąg nieskończony elementów przestrzeni nie może mieć dwuch różnych granic,

D — że przestrzeń jest przeliczalna.

Przez $\varphi(X) = 1$ oznacza autor, że istnieje przestrzeń topologiczna o własności X, przez $\varphi(X) = 0$ — że takiej przestrzeni niema. Zależności między badanymi pięcioma własnościami przestrzeni topologicznych wyrażone są zapomocą 32 wzorów, podanych na str. 70 i 71, których następnie autor dowodzi.

http://rcin.org.pl

Czł. Wacław Sierpiński

Sur les relations entre quelques propriétés fondamentales des espaces topologiques

Mémoire présenté dans la séance du 24 octobre 1947.

Nous appellerons *espace topologique* tout ensemle T formé d'éléments quelconques où à chaque élément a de T on a fait correspondre une famille de sous-ensembles de T, dites *voisinages* de a de sorte que les quatre conditions suivantes sont remplies:

α) Chaque élément de T a au moins un voisinage. Chaque élément de T appartient à tout son voisinage.

β) V_1 et V_2 étant deux voisinages de a, il existe un voisinage V de a, tel que $V \subset V_1 V_2$.

γ) Si b est un élément de T distinct de a, il existe un voisinage de a qui ne contient pas b.

δ) Si V est un voisinage de a et $b \in V$, il existe un voisinage W de b, tel que $W \subset V$.

(On démontre que l'étude des espaces topologiques ainsi définis équivaut à l'étude des espaces topologiques définis à l'aide de la notion de fermeture satisfaisant aux axiomes de M. Kuratowski [1])).

Un espace topologique est dit *espace topologique de* Hausdorff si la condition γ) est remplacée par la condition

γ_1) a et b étant deux éléments distincts de T, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b, tels que $UV = 0$ [2]).

On appelle parfois γ) et γ_1) respectivement premier et second axiome de séparation [3]).

Un ensemble E contenu dans un espace topologique est dit *ouvert*, si pour tout élément a de E il existe un voisinage de a contenu dans E.

---

[1]) C. Kuratowski, *Topologie* I (Monografje Matematyczne t. III, Warszawa-Lwów 1933), p. 15.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 213.

[3]) Voir p. e. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* I (Berlin 1935), p. 59 et 67.

http://rcin.org.pl

On dit qu'un espace topologique T possède une *base dénombrable*, s'il existe une suite infinie $U_1, U_2, \ldots$ d'ensembles ouverts, telle que tout ensemble ouvert (contenu dans T) est une somme (d'un nombre fini ou d'une infinité) d'ensembles de cette suite.

On dit que l'espace topologique T satisfait au *premier axiome de la dénombrabilité*, s'il existe pour tout élément a de T une suite infinie d'ensembles ouverts contenant a (ou, ce qui revient au même, de voisinages de a) $U_1, U_2, \ldots$, tels que tout ensemble ouvert contenant a contient tous les ensembles de cette suite, sauf, peut être, un nombre fini d'entre eux. On démontre sans peine que tout espace topologique à base dénombrable satisfait au premier axiome de la dénombrabilité (mais pas réciproquement). $p_0, p_1, p_2, \ldots$ étant une suite infinie d'éléments d'un espace topologique, on dit que p_0 est limite de la suite $p_1, p_2, \ldots$, s'il existe pour tout voisinage V de p_0 un nombre naturel μ, tel que $p_n \in V$ pour $n > \mu$.

Nous nous occuperons ici des propriétés H, A, B, C, D suivantes des espaces topologiques:

H: propriété d'être un espace topologique de Hausdorff,

A: propriété de satisfaire au 1-er axiome de la dénombrabilité,

B: propriété de posséder une base dénombrable,

C: propriété qu'aucune suite infinie d'éléments de l'espace considéré ne peut avoir deux limites distinctes (Autrement dit: si $\lim\limits_{n=\infty} p_n = a$ et $\lim\limits_{n=\infty} p_n = b$, on a $a = b$) [1]),

D: propriété d'être un ensemble dénombrable.

Le but de ce travail est d'étudier les relations entre ces 5 propriétés d'un espace topologique.

X étant une propriété d'un espace topologique, nous désignerons par X' la propriété consistant en ce que l'espace considéré ne jouit pas de la propriété X.

[1]) La raison pour laquelle je m'occupe ici de la propriété C est la suivante. Les espaces (L) de M. Fréchet satisfont, comme on sait, aux trois axiomes, dont deux sont vrais dans chaque espace (V) (et, à plus forte raison, dans chaque espace tepologique), et le troisième est notre propriété C.

http://rcin.org.pl

X et Y étant deux propriétés d'un espace topologique, nous désignerons par XY la propriété consistant en ce que l'espace considéré jouit simultanément des propriétés X et Y. Nous utiliserons des notations analogues pour un nombre fini quelconque de propriétés.

Les relations principales entre les propriétés H, A, B, C, D peuvent être exprimées par les formules:

(1) $$B \to A, \quad H \to C, \quad AD \to B, \quad AC \to H.$$

La démonstration des deux premières de ces formules est bien connue. Nous allons démontrer les deux autres.

La formule $AD \to B$ peut être évidemment énoncée ainsi:

Théorème 1. *Tout espace topologique dénombrable et satisfaisant au premier axiome de la dénombrabilité possède une base dénombrable.*

Démonstration. Soit T un espace topologique dénombrable satisfaisant au 1-er axiome de la dénombrabilité. Il existe donc pour tout élément a de T une suite infinie d'ensembles ouverts, $U_n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, telle que tout ensemble ouvert contenant a contient tous les ensembles de cette suite sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. L'espace T étant dénombrable, il en est de même de la famille **B** de tous les ensembles $U_n(a)$, où $a \in T$ et $n = 1, 2, \ldots$. Or, comme on voit sans peine, la famille **B** forme une base dénombrable pour l'espace T. En effet, si U est un ensemble ouvert $\subset T$, U est la somme de tous les ensembles de la famille **B** contenus dans U. Pour le voir il suffit de remarquer que si $a \in U$, alors, d'après la propriété de la suite $U_n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe des indices n tels que $U_n(a) \subset U$: chaque élément de l'ensemble U est donc contenu dans un ensemble de la famille **B** contenu dans U.

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

La formule $AC \to H$ peut être énoncé ainsi:

Théorème 2. *Tout espace topologique satisfaisant au 1^er^ axiome de la dénombrabilité et à la condition C est ún espace topologique de* Hausdorff.

http://rcin.org.pl

Démonstration. Soit T un espace topologique jouissant des propriétés A et C et admettons que T n'est pas un espace topologique de Hausdorff. L'espace T ne satisfait pas donc à la condition γ_1) et il existe deux éléments a et $b \neq a$ de T, tels que, quels que soient le voisinage U de a et V de b, on a $UV \neq 0$. L'espace T jouissant de la propriété A, il existe des suites infinies de voisinages $U_n (n = 1, 2, \ldots)$ de a et $V_n (n = 1, 2, \ldots)$ de b, telles qu'il existe pour tout voisinage U de a un nombre naturel μ (dépendant de U), tel que $U_n \subset U$ pour $n > \mu$ et pour tout voisinage V de b un nombre naturel ν (dépendant de V), tel que $V_n \subset V$ pour $n > \nu$. Or, comme nous savons, on a, pour n naturels, $U_n V_n \neq 0$: il existe donc un élément $p_n \epsilon U_n V_n$.

On a $p_n \epsilon U$ pour $n > \mu$ et $p_n \epsilon V$ pour $n > \nu$. U pouvant être un voisinage quelconque de a et V un voisinage quelconque de b il en résulte (d'après la définition de la limite d'une suite infinie d'éléments d'un espace topologique) que $\lim_{n=\infty} p_n = a$ et $\lim_{n=\infty} p_n = b$, contrairement à la propriété C. L'hypothèse que T n'est pas un espace topologique de Hausdorff implique donc une contradiction et le théorème 2 est démontré.

X étant une propriété d'un espace topologique, nous écrirons $\varphi(X) = 0$ pour exprimer qu'il n'existe aucun espace topologique ayant la propriété X, et nous écrirons $\varphi(X) = 1$ pour exprimer qu'il existe au moins un espace topologique possédant la propriété X.

Toutes les relations entre les cinq propriétés H, A, B, C, D des espaces topologiques peuvent être envisagées dans la table suivante:

1.	$\varphi(H\ A\ B\ C\ D) = 1$	9.	$\varphi(H\ A'\ B\ C\ D) = 0$
2.	$\varphi(H\ A\ B\ C\ D') = 1$	10.	$\varphi(H\ A'\ B\ C\ D') = 0$
3.	$\varphi(H\ A\ B\ C''\ D) = 0$	11.	$\varphi(H\ A'\ B\ C''\ D) = 0$
4.	$\varphi(H\ A\ B\ C''\ D') = 0$	12.	$\varphi(H\ A'\ B\ C''\ D') = 0$
5.	$\varphi(H\ A\ B'\ C\ D) = 0$	13.	$\varphi(H\ A'\ B'\ C\ D) = 1$
6.	$\varphi(H\ A\ B'\ C\ D') = 1$	14.	$\varphi(H\ A'\ B'\ C\ D') = 1$
7.	$\varphi(H\ A\ B'\ C''\ D) = 0$	15.	$\varphi(H\ A'\ B'\ C''\ D) = 0$
8.	$\varphi(H\ A\ B'\ C''\ D') = 0$	16.	$\varphi(H\ A'\ B'\ C''\ D') = 0$

http://rcin.org.pl

17. $\varphi(H'\ A\ B\ C\ D) = 0$	25. $\varphi(H'\ A'\ B\ C\ D) = 0$
18. $\varphi(H'\ A\ B\ C\ D') = 0$	26. $\varphi(H'\ A'\ B\ C\ D') = 0$
19. $\varphi(H'\ A\ B\ C''\ D) = 1$	27. $\varphi(H'\ A'\ B\ C''\ D) = 0$
20. $\varphi(H'\ A\ B\ C''\ D') = 1$	28. $\varphi(H'\ A'\ B\ C''\ D') = 0$
21. $\varphi(H'\ A\ B'\ C\ D) = 0$	29. $\varphi(H'\ A'\ B'\ C\ D) = 1$
22. $\varphi(H'\ A\ B'\ C\ D') = 0$	30. $\varphi(H'\ A'\ B'\ C\ D') = 1$
23. $\varphi(H'\ A\ B'\ C''\ D) = 0$	31. $\varphi(H'\ A'\ B'\ C''\ D) = 1$
24. $\varphi(H'\ A\ B'\ C''\ D') = 1$	32. $\varphi(H'\ A'\ B'\ C''\ D') = 1$

La formule 1 exprime qu'il existe un espace topologique de Hausdorff dénombrable, à base dénombrable (satisfaisant donc aussi au 1^{er} axiome de la dénombrabilité), satisfaisant à la condition C. Tel est, comme on voit sans peine, p. e. l'ensemble de tous les nombres rationnels avec la définition ordinaire de voisinages.

Pour prouver la formule 2 il suffit d'envisager l'ensemble de tous les nombres réels (avec la définition ordinaire de voisinages).

La formule $H \to C$ (voir (1)) a pour conséquence que $\varphi(H\,C''\,X) = 0$, quelle que soit la propriété X. Il en résulte tout de suite les formules 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15 et 16. La formule $B \to A$ a pour conséquence que $\varphi(A'\,B\,X) = 0$ quelle que soit la propriété X, et il en résulte tout de suite les formules 9, 10, 25, 26, 27 et 28.

La formule $A\,D \to B$ (théorème 1) a pour conséquence que $\varphi(A\,B'\,D\,X) = 0$ quelle que soit la propriété X, et il en résulte tout de suite les formules 5, 21 et 23.

Pour démontrer la formule 6 il suffit d'envisager un ensemble indénombrable, où chaque élément a un seul voisinage formé de cet élément seulement. Un autre exemple est fourni par l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$ avec la définition de voisinages utilisée habituellement pour les ensembles ordonnés.

Pour démontrer la formule 13 il suffit de prouver qu'il existe un espace topologique de Hausdorff dénombrable, jouissant de la propriété C, mais ne satisfaisant pas au premier axiome de la dénombrabilité.

http://rcin.org.pl

On peut démontrer que tel est p. e. un espace défini par M. A. Appert (pour donner un exemple d'un espace dénombrable sans base dénombrable) comme il suit.

Soit $T = \{1, 2, \ldots\}$, où chaque nombre naturel $n > 1$ n'a qu'un seul voisinage $\{n\}$, et où le nombre 1 a pour voisinage chaque ensemble V de nombres naturels contenant le nombre 1 et tel que

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\nu(n, V)}{n} = 1,$$

où $\nu(n, V)$ désigne l'ensemble de tous les nombres de V qui sont $\leq n$ [1]).

(Pour la démonstration que l'espace T jouit des propriétés H, A' et C, cf. plus loin notre démonstration de la formule 29).

Soit $S = \{1, 2, \ldots\}$, où chaque nombre naturel $n > 1$ n'a qu'un seul voisinage $\{n\}$, et où l'élément 1 a pour voisinage chaque ensemble V de nombres naturels contenant 1 et tel qu'il existe une suite infinie $l_1, l_2, \ldots$ de nombres naturels, telle que V est l'ensemble de tous les nombres naturels de la forme $2^k(2l-1)$, où k et l sont des nombres naturels et $l > l_k$.

On vérifie sans peine que S est un espace topologique de Hausdorff. Soit maintenant $U_1, U_2, \ldots$ une suite infinie quelconque d'ensembles ouverts de S contenant l'élément 1.

Vu la définition des ensembles ouverts et vu que $1 \in U_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$, il existe pour tout nombre naturel k un voisinage V_k de 1, tel que $V_k \subset U_k$. Or, d'après la définition

---

[1]) A. Appert, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux* (Actualités Scient. et Industr. 146), p. 84. Des espaces dénombrables sans base dénombrable sont connus aussi par P. Urysohn, comme il l'a remarqué (sans le démontrer) dans sa note parue dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sc. et des L. 1923, p. 16.

Rangeons tous les nombres naturels de l'ensemble $T - V$ dans une suite d'après leur grandeur et soit a_k le k-ième nombre de cette suite. On démontre sans peine que pour qu'on ait la formule (1), il faut et il suffit qu'on ait $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$. Cela prouve que l'espace de M. Appert, quoique défini d'une façon différente, coïncide avec celui qui a été envisagé par P. Urysohn dans Math. Annalen 94 (1925), pp. 288—290 comme exemple d'un espace topologique dénombrable dépourvu de la propriété A.

http://rcin.org.pl

des voisinages de 1, il existe (pour le nombre naturel k) un nombre naturel m_k, tel que $2^k(2l-1) \epsilon V_k$ pour $l > m_k$: on a donc $2^k(2m_k+1) \epsilon U_k$ pour $k=1, 2, \ldots$. Or, soit V l'esemble de tous les nombres naturels de la forme $2^k(2l-1)$, où $l > m_k+1$: l'ensemble V sera un voisinage de l'élément 1 et nous aurons $2^k(2m_k+1)$ non ϵV pour $k=1, 2, \ldots$, donc $U_k - V \neq 0$ pour $k=1, 2, \ldots$ Aucune suite infinie $U_1, U_2, \ldots$ d'ensembles ouverts ne satisfait donc au premier axiome de la dénombrabilité pour l'élément $a=1$. L'espace S ne jouit pas donc de la propriété A et, à plus forte raison, de la propriété B.

Or, la condition C est ici satisfaite, puisque, si un élément $n>1$ de S est limite d'une suite infinie d'éléments de S, tous les termes de cette suite, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, sont $=n$.

(Il est à remarquer que l'espace S et l'espace de M. Appert ne sont pas homéomorphes. En effet, dans l'espace S l'élément 1 est limite d'une suite infinie d'éléments distincts de S, p. e. $\lim_{l=\infty}(4l-2)=1$, et, dans l'espace de M. Appert aucun élément n'est limite d'une suite infinie d'éléments distincts de cet espace).

Pour démontrer la formule 14 il suffit d'envisager l'espace formé de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ avec la féfinition ordinaire de voisinages (où, α étant un nombre ordinal donné $<\Omega$ et μ étant un nombre ordinal quelconque $<\alpha$, on considère comme voisinage de l'élément α tout ensemble de nombres ordinaux ξ, où $\mu<\xi\leqslant\alpha$).

La formule $AC\to H$ (théorème 2) a pour conséquence que $\varphi(H'ACX)$ quelle que soit la propriété X, et il en résulte tout de suite les formules 17, 18 et 22.

Pour démontrer la formule 19 envisageons l'ensemble $T=\{1, 2, \ldots\}$, où, pour tout n naturel on considère comme voisinage de l'élément n chaque sous-ensemble X de T contenant n et tel que l'ensemble $T-X$ est fini (ou vide). On vérifie sans peine que l'ensemble T est un espace topologique à base dénombrable (formée de tous les sous-ensembles X de T tels que l'ensemble $T-X$ est fini ou vide) mais n'est pas un espace de Hausdorff (vu que les voisinages de deux éléments ont toujours une infinité d'éléments communs) et ne

http://rcin.org.pl

satisfait pas à la condition C (puisqu'on a, dans T, $\lim_{n=\infty} n = k$ pour $k = 1, 2, \ldots$).

Pour démontrer la formule 20 il suffit d'adjoindre à l'espace T, défini tout à l'heure, l'ensemble de tous les nombres réels négatifs avec la définition ordinaire de voisinages.

Pour démontrer la formule 24 il suffit d'adjoindre à l'espace T, dont nous venons de parler, l'ensemble de tous les nombres ordinaux transfinis $< \Omega$ avec la définition ordinaire de voisinages.

Pour démontrer la formule 29 envisageons l'ensemble $T = \{1, 2, \ldots\}$, où chaque élément k a pour voisinage tout ensemble de nombres naturels contenant k et vérifiant la formule (2).

Nous démontrerons que T est un espace topologique. Soient V_1 et V_2 deux voisinages d'un élément k de T. On a

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\nu(n, V_1)}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\nu(n, V_2)}{n} = 1.$$

Or, comme on le voit sans peine, on a, pour n naturels

$$0 \leqslant n - \nu(n, V_1 V_2) \leqslant [n - \nu(n, V_1)] + [n - \nu(n, V_2)],$$

d'où

$$0 \leqslant 1 - \frac{\nu(n, V_1 V_2)}{n} \leqslant \left[1 - \frac{\nu(n, V_1)}{n}\right] + \left[1 - \frac{\nu(n, V_2)}{n}\right]$$

et les formules (3) donnent:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\nu(n, V_1 V_2)}{n} = 1,$$

ce qui prouve que le produit de deux voisinages d'un élément de T est un voisinage de cet élément. L'espace T jouit donc de la propriété β).

Si l'on a pour un voisinage V d'un élément k de T la formule (2), on a aussi, pour $l \in T$, $l \neq k$, $V_1 = V - \{l\}$, la formule $\lim_{n=\infty} \frac{\nu(n, V_1)}{n} = 1$ ce qui prouve que V_1 est aussi un voisinage de k. On en déduit que l'espace T jouit de la propriété γ).

http://rcin.org.pl

Vu qu'un voisinage V d'un élément k de T est en même temps voisinage de tout élément l de V, on voit que l'espace T jouit de la propriété δ).

Or, je dis que l'espace T ne jouit pas de la propriété A.

En effet, soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles ouverts contenant un élément donné k de T. Il existe donc pour tout j naturel un voisinage V_j de k contenu dans U_j. On a donc $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\nu(n, V_j)}{n} = 1$ pour $j = 1, 2, \ldots$ d'où il résulte que l'ensemble V_j est infini (pour $j = 1, 2, \ldots$). Il existe donc dans V_j un élément $k_j \neq k$, tel que $k_j > j^2$. Soit $V = T - \{k_1, k_2, \ldots\}$. Si l'on a pour n et j naturels $k_j \leq n$, o na $j^2 < n$, d'où $j < \sqrt{n}$ et il en résulte immédiatement que $0 \leq n - \nu(n, V) < \sqrt{n}$ ce qui entraîne la formule (2) qui (vu que $k \epsilon V$) prouve que V est un voisinage de k. Or, on a évidemment $k_j \epsilon V_j - V \subset U_j - V$ pour $j = 1, 2, \ldots$, donc $U_j - V$ pour $j = 1, 2, \ldots$ et on voit que l'espace T ne satisfait pas à la condition A.

Soient maintenant k et l deux éléments distincts de T, V_1 un voisinage de k, V_2 un voisinage de l. On a donc les formules (3) qui, comme nous savons, entraînent la formule (4), ce qui prouve que l'ensemble $V_1 V_2$ est infini. L'espace T ne satisfait donc pas à la condition γ_1) et par suite n'est pas un espace topologique de Hausdorff.

Or, soit k un élément donné de T et $n_1, n_2, \ldots$ une suite infinie d'éléments de T contenant une infinité de termes distincts de k. Il existe donc pour tout nombre naturel j un élément k_j de notre suite, tel que $k_j \neq k$ et $k_j > j^2$. En posant $V = T - \{k_1, k_2, \ldots\}$ on voit comme ci-dessus que V est un voisinage de k ne contenant aucun des nombres $k_1, k_2, \ldots$. Il en résulte qu'on n'a pas $\lim\limits_{j=\infty} n_j = k$. Une suite infinie d'éléments de T ne peut donc pas avoir une limite k que dans le cas où elle ne contient qu'un nombre fini de termes autres que k, et il en résulte facilement que l'espace T satisfait à la condition C.

Nous avons ainsi démontré que l'espace T jouit des propriétés H', A', C et D, par conséquent également de la propriété B' (puisque $A' \to B'$) et la formule 29 se trouve démontrée.

http://rcin.org.pl

Pour avoir un espace topologique prouvant la justesse de la formule 30, désignons par T un ensemble indénombrable où l'on considère comme voisinage d'un élément a de T un sous-ensemble V de T dans ce cas, et seulement dans ce cas, si $a \epsilon V$ et si l'ensemble $T - V$ est au plus dénombrable. On voit sans peine que T est un espace topologique et qu'une suite infinie d'éléments de T ne peut avoir une limite que dans le cas où tous leurs termes, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, sont égaux. L'espace T satisfait ainsi à la condition C. Or, l'espace T n'est pas un espace topologique de Hausdorff, les voisinages de deux éléments ayant toujours une infinité indénombrable d'éléments communs.

Nous prouverons maintenant que l'espace T ne jouit pas de la propriété A. Soit, en effet, $U_1, U_2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles ouverts contenant un élément donné a de T. Il existe donc pour tout n naturel un voisinage V_n de a contenu dans U_n. Les voisinages étant, dans notre espace, des ensembles indénombrables, il existe, pour tout n naturel, un élément a_n de V_n autre que a. L'ensemble $V = T - \{a_1, a_2, \ldots\}$ est évidemment un voisinage de a ne contenant aucun des ensembles $U_1, U_2, \ldots$. Il n'existe donc aucune suite infinie d'ensembles ouverts satisfaisant pour a au premier axiome de la dénombrabilité. L'espace T ne jouit pas alors ni de la propriété A ni de la propriété B (vu que $B \to A$).

Nous avons ainsi prouvé que notre espace T jouit des propriétés H', A', B', C et D', et la formule 30 est démontrée.

Pour avoir un espace prouvant la justesse la formule 31 il suffit d'adjoindre soit à l'espace S soit à l'espace T de la démonstration de la formule 13 un ensemble dénombrable P disjoint avec lui, pour lequel on considère comme voisinage d'un élément a de P chaque sous-ensemble de P qui contient a et ne diffère de P que par un nombre fini d'éléments.

Pour démontrer la formule 32, il suffit d'envisager un ensemble indénombrable T, où l'on considère comme voisinage d'un élément a de T chaque sous-ensemble de T contenant a et ne différant de T que par un nombre fini d'éléments. On vérifie sans peine que T est un espace topologique. Or, T n'est pas un espace topologique de Hausdorff, les voisinages de

http://rcin.org.pl

deux éléments ayant toujours une infinité indénombrable d'éléments communs.

Soit maintenant $U_1, U_2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles ouverts contenant un élément donné a de T. Il existe donc pour tout n naturel un voisinage V_n de a contenu dans U_n. Tout ensemble V_n (où $n=1, 2, \ldots$) ne différant de T que par un ensemble fini d'éléments, et T étant indénombrable, on voit que l'ensemble $V_1 V_2 \ldots$ est indénombrable et par suite contient un élément $b \neq a$. On a donc $b \in U_1 U_2 \ldots$ et $V = T - \{b\}$ est un voisinage de a, tel que $b \in U_n - V$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc $U_n - V \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Aucune suite infinie d'ensembles ouverts de T ne satisfait alors à la condition A par rapport à l'élément a. L'espace T ne jouit pas donc de la propriété A. L'espace T ne satisfait pas à la condition C, puisque, comme on voit sans peine, tout élément de T est limite de toute suite infinie d'éléments distincts de T.

L'espace T jouit ainsi des propriétés H', A', B', C' et D' et la formule 32 se trouve verifiée.

Les formules 1—32 sont ainsi démontrées. Parmi ces formules ce sont les formules 13, 29 et 31 qui sont les plus intéressantes et en même temps les plus difficiles à démontrer.

Envisageons encore la suivante propriété G des espaces topologiques T:

G. Si a est un élément d'accumulation d'un ensemble $E \subset T$ [1]), a est limite d'une suite infinie d'éléments de E autres que a.

On démontre sans peine que $A \rightarrow G$.

D'utre part je me bornerai à démontrer ici qu'un espace topologique de Hausdorff, même dénombrable, peut jouir ou ne pas jouir de la propriété G.

En effet, l'espace T de M. Appert ne jouit pas de la propriété G, vu que l'élément 1 y est évidemment un élément, d'accumulation de l'ensemble T, mais n'est pas limite d'aucune suite infinie d'éléments de T autres que a. On a ainsi $\varphi(H A' B' C D G') = 1$.

---

[1]) c. à. d. si tout voisinage de a contient au moins un élément de E autre que a.

http://rcin.org.pl

L'espace S jouit par contre de la propriété G. En effet, un ensemble $E \subset S$ a un élément d'accumulation (nécessairement $=1$) dans ce cas et seulement dans ce cas, s'il existe un nombre naturel k, tel qu'on ait $2^k(2l-1) \epsilon E$ pour une infinité de nombres naturels l (car si $2^k(2l-1)$ non ϵE pour $l > l_k$, $k = 1, 2, \ldots$, il existerait un voisinage de 1 ne contenant aucun élément de E autre que 1, contrairement à l'hypothèse que 1 est un élément d'accumulation de E). Or, si $2^k(2l-1) \epsilon E$ pour $l = m_1, m_2, \ldots$, où $m_1 < m_2 < \ldots$, on a $\lim_{j=\infty} 2^k(2m_j-1) = 1$ et 1 est limite d'une suite infinie d'éléments de E autres que 1. On a ainsi $\varphi(HA'B'CDG) = 1$.

Jelenia Góra, septembre 1947.

http://rcin.org.pl

Czł. Władysław Gorczyński

Sunshine Recorders in America and Europe
Their Comparison and Interconversion

Mémoire presenté à la séance du 24 Octobre 1947.

INTRODUCTION.

The chief task of Climatology consists in preparing climatic data for each area, small or large, and making their comparisons throughout the world. The charts of air temperature, atmospheric pressure, precipitation and so on are common knowledge and familiar to every intelligent person. They were frequently made out for the United States, Europe, other continents and for the world; they are reproduced in most atlases, even for elementary schools.

In the whole set of climatic maps and diagrams, there is only one great lack, namely that of comparison of sunshine duration of the United States with that of Europe and other countries. Strange as it may seem, until very recently, even the sunshine of the neighbouring countries of Canada and Mexico were never compared with that of the United States.

The only reason why charts with duration of sunshine have not been made for the entire North American continent is that different sunshine recorders and methods of computation are used. Prior to 1943, for two nearby places with meteorological station equipped with a sunshine recorder, but located just across the Canadian or Mexican border, it was difficult to know

http://rcin.org.pl

which place has more or less sunshine as compared with neighbouring places in the United States.

The duration of sunshine, in hours and minutes, is measured by a burning-glass or Campbell- Stokes recorder which gives the so-called, „bright sunshine duration".

Dim sunrays which occur immediately after sunrise and before sunset, cannot be registered because of their feeble intensity.

The British system of recording is common practice throughout the world, except in the United States. In this country another system and other methods of computation are used. Furthermore all visible sunshine hours from sunrise to sunset during which the sundisc may be seen by the naked eye are computed.

The differences between the data computed from both recorders, or between the visible and bright sunshine hours, are substantial. The annual value of these differences, representing the duration of a dim sunshine only, is, on the average, one additional hour per day. Separately the seasonal values are: winter 0.5, spring 1.3, summer 1.5 and autum 0.7.

The unfortunate confusion existing until 1943 and arising from the fact that in Canada, Mexico and Europe the duration of bright sunshine was observed, whereas in the United States all visible hours were computed, was eliminated when the interconversion tables were applied to the first sunshine maps of a new pattern. These new maps, giving the visible hours both for North America and Europe, appear in the Bulletin of the American Meteorological Society (May issue of 1943, pages 183—193) in a paper entitled „Sunshine and Cloudiness in the Mediterranean Basin". Some maps, given in its text were prepared by the author in connection with war efforts on the Mediterranean coasts at that time.

More sunshine maps and tables giving the visible hours were made available for general use in the author's book, „Comparison of Climate of the United States and Europe" which appeared in 1945 in New York City. It contains 288 pages with 36 maps, which have been published in the Polish Institute Series and distributed by the Herald Square Press Inc.

http://rcin.org.pl

The new sunshine maps and tables are not given in this comparative study which is devoted to the interconversion method of both recorders. For further details the reader should refer to the book (Literature ad 10).

I. Two Types of Sunshine Recorders: CS and US.

There is no need here to describe the details and management of the British burning glass or „Campbell-Stokes“, or the American electrical sunshine recorders (hereafter abbreviated as CS and US). All this may be easily found in special pamphlets, which are distributed on request by the Meteorological Office in London, or by the U. S. Weather Bureau in Washington D. C. In „Literature cited“ at the end, they are listed as (1), (2), (3).

In September, 1939, when the author came to the assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics in Washington D. C., it was not possible to get an authorized statement concerning the differences in sunshine duration between the US and CS recorders. Being unable to find anything published on this subject by the U. S. Weather Bureau, I went to Blue Hill Observatory near Boston, the only place in the United States where the CS is in operation. Its director, Dr C. F. Brooks gave me a copy of the summary of 98 days, in which comparison was made between the CS and US recorders placed side by side at Blue Hill, from February 1 to May 25, 1932 with some interruptions.

At the end this summary tabulated by an observer, L. A. Wells, this statement signed by Dr Brooks was included: „The electric recorder of the U. S. Weather Bureau pattern runs about 1% below the standard Campbell-Stokes type, an inconsequential difference“. We know now just how erroneous and misleading this statement was.

The following excerpt of a letter received by the author from Blue Hill Observatory is significant: „Although we found practically no difference between the two sunshine recorders on the average over many days, I should like to quote to you a paragraph from a letter by Mr. A. J. Connor, Climatologist of the Meteorological Service of Canada, May 13, 1932: We have

http://rcin.org.pl

been going over the comparisons between the Campbell-Stokes and the Weather Bureau recorders made last year and find that they are absolutely useless. Evidently the Weather Bureau recorder was not at any time in satisfactory adjustment". (quotation from a letter dated September 22, 1939, and signed by Dr Brooks).

If no information was available in the United States and Canada, it is hardly surprising that climatologists until the present time do not seem to have suspected the reason for the considerable differences in sunshine duration between the United States and Europe.

The late Julius Hann of Austria, one of the founders of modern Climatology, was puzzled by these large differences. Another climatologist, A. Wojejkoff from Russia, has even gone so far as to say that the atmospheric layers over the United States are more transparent than those over Europe. One of the contributors of the Köppen-Geiger „Klimatologie", published some years ago in Germany, V. Conrad expresses his astonishment that the monthly values of Youma, Arizona should range as high as 98% of the possible sunshine duration.

This is simply due to the fact that hitherto no European climatologist had ever had the opportunity to study the sunshine records of the U. S. Weather Bureau as compared with those of the Campbell-Stokes recorder. Moreover, it is regrettable that no paper was published and no information available about the considerable amount of the low-sun corrections applied in each U. S. Weather Bureau stations throughout the United States. These low-sun corrections, commonly called „twilight", are always added by the American observers to the daily values of sunshine duration, as directly recorded at the U. S. stations. The visible hours are in excess of the bright ones, on an average of one hour per day.

All European climatologists unfamiliar with the meteorological instruments employed in the United States and their method of computation, would be surprised to use figures of a sunshine recorder capable of registering nearly the total possible duration as an average monthly value.

http://rcin.org.pl

This mystery is now resolved by the explanations and tables given in this paper, and previously in the author's book (see Literature ad 10). In the same book comparisons were made between the sunshine duration of North America and Europe, based on new sunshine maps published for the first time.

As a matter of fact, the sunshine recorder in operation at Youma, Arizona has never reached 98% of the possible duration. The directly recorded value did not greatly exceed 90%, and the figure od 98%, as given by V. Conrad in his German publication, represents a computed value obtained by adding the low-sun correction.

In order to finish with this considerable confusion and to be able to compare the sunshine duration of the whole North American continent with that of Europe, the author did all necessary research to find the interconversion of the US and CS recorders. He has been privileged to examine and compare the data obtained from both recorders, viz.:

1. A direct comparison of the US and CS sunshine recorders at the same place, San Diego Airport from December, 1939 until September 22, 1940.

2. Moreover, he received for study and examination a copy of simultaneous recordings for the 8-year period, 1931—1938 inclusive, at San Diego, California. The Naval Station used a CS recorder; on the other hand and the Weather Bureau statio, installed on the roof of the old Post Office bulding, near the waterfront, used a U. S. recorder.

3. The complete recordings from a number of stations and over a considerable period of years have been received from the Canadian Meteorological Service, through the courtesy of Dr J. Patterson and Mr. A. J. Connor. These bright sunshine values were compared with those of the visible duration in the United States across the border from Canada.

4. The extensive series of Blue Hill Observatory, Harvard University, were sent for the author's study and comparison with other stations.

5. During his stay in Mexico in 1927/28, the author compared two series of sunshine duration obtained at the Observatory in Tacubaya, by using first the CS and later the US recorder.

http://rcin.org.pl

II. Low Sun Corrections for the CS and US Recorders.

The CS registers only the duration of bright sunshine whose intensity exceeds approximately 0.3 gram-calories per minute per square centimeter of normal surface. If the sun's altitude is less than 5 degrees above the horizon, the CS fails to register, because the intensity is too feeble to be recorded. To quote the British meteorologists (see Lit. ad. 4):

„The duration of sunshine is recorded in the form of a scorched or burnt line, traced on a graduated card by means of a spherical lens acting as a burning glass. The data are described as referring to bright sunshine because the Campbell-Stokes recorder fails to register below a certain limit of intensity. A small amount of sunshine also goes unrecorded, since even on a clear day with a cloudless sky the record does not usually begin until about half an hour or more after sunrise and ends before sunset".

R. H. Curtis found that the shortest time of dim sunshine on clear days in the British Isles may be evaluated at half an hour as total for morning plus evening duration. This amount, however, presents rather an exception: on an average about one hour per day must be added to bright sunshine duration to convert it to visible hours.

In industrial centers, like London or Warsaw, the trace often does not begin until almost an hour after sunrise with about the same value before sunset. On the other hand, there is a slight exaggeration of the recorded daily duration during a period of bright intermittent sunshine, owing to the so-called spread of the burn.

In connection with this, it may be of interest to quote the corresponding data for Poland and France taken from the author's book published in 1945. See Lit. ad 10, pp. 159—161. For Poland the Low-sun corrections approach 2 hours per day, as an average of all days with a visible sun at sunrise and sunset. At Nice on the Mediterranean coast, the condition are like those in the United States.

Similar observations have been made in Manila by Father Miguel Selga (see Literature ad 6). He stated: „For a period of time, sufficiently long on very clear days, the

http://rcin.org.pl

difference has been observed and recorded between the astronomical sunrise and sunset on the one hand and the moment when the sun began or ceased to act on the Campbell-Stokes card on the other hand". The figures for the morning and evening differences were: winter 0.5, summer 1.6, year 1.0 hour per day. These figures are obtained on very clear days in the British Isles as given by H. H. Curtis. From Table Ia it can be seen that the resemblance in this respect to Manila may be applied to Nice though located on the Mediterranean shore.

Turning now to the sunshine recorder in use at all stations in the United States, it must be emphasized that the US, like the CS recorder, fails to register when the sun is low. Both recorders are too sluggish to register, if the intensity of solar radiation falls below cartain limits; consequently the directly recorded daily sunshine duration may be considered as bright by both the CS and US recorders.

The reason for this is that the CS instrument is activated by direct sunrays falling at normal incidence provided that their intensity is sufficiently great. The US recorder on the other hand reacts to the influence of the total radiation, direct and diffuse. The further complication in comparing both recorders consists in the inclination of the sensitive glass tube of the US recorder which varies occasionally.

The principle of the US recorder is similar to that of the differential air thermometer devised by John Leslie and used in Scotland at the beginning of the nineteenth century. A glass tube containing a liquid terminates in two bulbs, both containing air. In the original Leslie instrument, the stem was suitably graduated to indicate numerically the difference in temperature between the two bulbs, and it was used to measure the flow of heat from a fireplace, the intensity of sunshine, the depression of the wet bulb, etc.

In its present form, it has an outer glass jacket in which there is a vacuum in order that the thermometer may be rendered insensitive to ordinary temperature changes, on the principle of the thermos bottle. From the author's experiences at San Diego, an appreciable increase in sensitivity of the US recorder was observed between sunrise and noon and a decrease betwen

http://rcin.org.pl

noon and sunset. The effect of this diffusion, and partly also temperature will be discussed further on.

It may be of interest to quote some passages from the Circular G (Lit. ad 2) concerning the recording of the US instrument near the horizon. „It must also be borne in mind that a thermometer constructed on the principle of this sunshine recorder is somewhat sluggish so that when the sky is partly covered with floating clouds, it must not be expected that the mercurial column will drop low enough to open the electrical circuit the exact instant the sun disappears behind a cloud, or rises high enough to close it the exact instant the sun comes out again. Small clouds and a few moments of sunshine may ,therefore, escape being recorded".

Since near sunrise or sunset, mist or low clouds are usually observed above the horizon, a considerable discrepancy always occurs at these times. In order to compensate for this, U. S. observers are instructed to make and apply special low sun corrections depending on sky conditions near sunrise and sunset.

Some idea of the amount of these low sun corrections may be obtained by stating that an average in winter is 0.6 for Boston and 1.1 for San Diego; in summer the respective figures are 0.8 and 1.0; year 0.8 and 1.1. More data are given in Table I and I-a, and the whole problem treated in some detail further on. The low sun corrections are relatively large: about one additional sunshine hour per day is usually added to the yearly average of directly recorded (mostly bright) sunshine hours per day.

If the sensitivity of the US recorder were exactly the same as that of the CS, it would suffice to know the amount of low sun corrections in order to compare the two types of recorders.

In point of fact, the problem is not so simple chiefly due to the influence of diffuse radiation. The figures of the socalled bright sunshine differ, and sometimes considerably, on two recorders.

According to the author's comparisons in San Diego, the US recorder showed on one day in September, 1940 (see Table II) 7.0 and the CS 2.8 hours only; for another day the respective values were 5.6 and 0.8. The reason was that during those days the intensity at normal incidence was mostly less than 0.3 gr.

http://rcin.org.pl

TABLE I. Low Sun Corrections. Monthly and Annual Averages.
US Sunshine Recorder. Hours per day.

A) Boston Series. 1919—1943.

Boston. Downtown location.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1919	.7	.7	.8	.5	.8	1.2	.9	.5	.6	.6	.7	.7	.7
1920	.6	.9	1.1	.8	.9	.7	1.0	.8					

Period with abnormally increased low sun corrections.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1930	1.2	1.7	2.1	2.4	1.9	2.5	2.0	2.4	2.5	2.0	2.2	1.2	2.0
1931	1.7	1.4	1.3	2.3	2.0	2.1	1.6	1.8	2.0	1.7	1.2	1.5	1.7
1932	.9	1.3	2.0	2.1	2.5	1.8	2.5	2.7	2.2	1.4	1.6	1.3	1.9
1933	1.3	1.6	.9	1.3	1.6	1.7	1.7	1.8	1.7	.9	1.0	.7	1.4
1934	.9	1.3	1.0	1.1	.9	1.0	1.0	1.7	.9	.8	.8	.8	1.0
1935	.8	.9	1.0	.7	1.6	1.3	2.9	2.3	.6	.9	.5	.7	1.2

Boston Airport.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1936	1.1	.8	.5	1.0	.8	.7	.7	.9	.4	.9	.6	.4	.7
1937	.5	.3	.8	.9	.8	.8	1.1	.6	1.3	.7	.8	.6	.7
1938	.8	.5	.8	.7	.6	.6	.4	.6	1.4	1.3	1.1	.8	.8
1939	.6	.5	.7	.7	.6	1.0	1.0	.7	1.2				(.9)
1940	1.1	.6	.6	.4	.4	.6	1.1	1.0	.9	1.1	.5	.7	.7
1941	.8	1.0	.8	.7	.8	.5	.5	1.0	.6	.3	.2	.4	.6
1942	.7	.8	.9	.9	.7	.6	.5	.8	.8	.9	1.0	.6	.8
1943	.6	.5	.4	.7	.8	1.1	1.5	1.7	.7	.3	.9	.9	.8

Averages. Boston Airport 1936/43. Downtown 1930/35.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
36/43	.8	.6	.7	.8	.7	.7	.8	.9	.9	.8	.8	.7	.8
30/35	1.1	1.3	1.4	1.7	1.8	1.7	2.0	2.1	1.7	1.3	1.2	1.0	1.5

B) Burlington, Vermont. 1939/43.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1939	.5	.2	.5	.4	.7	.5	.7	.8	.7	.5	.7	.2	.5
1940	.6	.6	.4	.5	.9	.6	1.0	1.1	.7	.6	.2	.6	.6
1941	.6	.8	.7	1.0	1.2	1.0	1.1	1.0	1.1	.4	.5	.5	.8
1942	.7	.5	.4	.6	.7	.8	.9	.7	.6	.7	.6	.4	.6
1943	.6	.4	.7	.6	.7	.7	.7	.7	.7	.5	.4	.6	.6
Aver.	.6	.5	.5	.6	.8	.8	.9	.9	.8	.5	.5	.5	.6

C) Bismarck, North Dakota. 1939/43.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1939	.3	.7	.6	.4	.5	.7	1.1	1.0	1.0	.2	.4	.4	.6
1940	.2	.2	.3	.3	.8	2.0	.7	.5	.6	.3	.4	.6	.6
1941	.5	.4	.4	.3	.4	1.0	1.0	.8	.4	.8	.5	.3	.6
1942	.1	.2	.3	.4	.7	1.6	1.2	1.6	1.1	.9	.5	.4	.7
1943	.5	.5	.5	.8	.8	.9	.9	1.0	1.0	.5	.6	.7	.7
Aver.	.3	.4	.4	.5	.6	1.2	1.0	1.0	.8	.5	.5	.5	.6

D) Atlanta, Georgia. 1939/43.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1939	.5	.4	.5	1.2	1.3	1.6	1.5	1.8	1.8	1.0	1.0	1.2	1.2
1940	1.2	.8	1.2	1.1	1.9	1.3	1.1	1.2	1.6	1.2	.9	.5	1.2
1941	1.0	.9	1.0	1.0	1.7	.7	.6	.8	1.2	1.0	.9	.7	1.0
1942	1.2	.5	1.0	1.7	1.3	1.2	1.2	1.3	1.1	1.9	1.5	.9	1.3
1943	1.0	1.8	1.3	2.0	2.0	1.8	1.2	2.1	2.0	.9	1.0	.6	1.5
Aver.	1.0	.9	1.0	1.4	1.6	1.3	1.1	1.4	1.6	1.2	1.1	.8	1.2

E) San Diego, California. 1936/38.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1936	.9	.8	1.0	1.1	1.9	1.9	1.0	.7	1.2	1.1	1.3	1.0	1.2
1937	1.3	1.3	1.9	.8	.4	.8	1.1	1.4	1.8	1.3	.9	1.0	1.2
1938	1.2	.8	1.2	.9	.9	.4	.9	.6	.8	.9	1.4	1.3	.9
Aver.	1.1	1.0	1.4	.9	1.1	1.0	1.0	.9	1.3	1.1	1.2	1.1	1.1

http://rcin.org.pl

TABLE I-a. Low Sun Corrections. Seasonal and Annual Averages. US Sunshine Recorder. Hours per day.

	Winter	Spring	Summer	Autumn	Year
Burlington Vt. 1939/43	.5	.6	.9	.6	.6
Boston Airport 1936/43	.7	.7	.8	.8	.8
Buffalo N. Y. 1939	.2	.6	.9	.5	.6
Duluth Minn. 1939	.5	.7	1.2	.5	.7
Bismarck N. D. 1939/43	.6	.7	.9	.7	.7
Havre Mont. 1939/43	.4	.4	.7	.4	.5
Seattle Wash. 1939/43	.2	.5	1.1	.4	.6
Average. 7 Northern Stations	.4	.6	.9	.6	.6
Cincinnati Ohio 1939	.5	1.2	1.2	.6	.9
Wilmington N. C. 1939	.9	1.1	1.0	1.1	1.0
San Francisco Cal. 1936	.5	1.2	.6	.4	.7
Fresno Calif. 1936	.8	1.5	1.3	1.6	1.3
Average. 4 Central Stations	.7	1.3	1.1	1.0	1.0
Atlanta Ga. 1939/43	.9	1.3	1.3	1.3	1.2
Little Rock Ark. 1939/41	.9	1.3	1.4	1.6	1.3
Miami Fla. 1936	1.2	1.6	1.2	1.0	1.3
Phoenix Ariz. 1936	.7	1.2	1.1	1.0	1.0
Yuma Ariz. 1936	1.2	1.7	1.5	1.5	1.5
Los Angeles Cal. 1936	.8	1.0	1.6	1.5	1.2
San Diego Cal. 1936/38	1.1	1.1	1.0	1.2	1.1
Average. 7 Southern Stations	1.0	1.3	1.3	1.3	1.2

Similar Corrections for the CS Sunshine Recorder

Manila, Philippines. Lat. 15 N	.5	.8	1.6	.9	1.0
Nice, Medit. Coast. Lat. 43. 7 N	1.3	.9	.8	1.2	1.1
Warsaw, Poland. 1934/37. 52 N	1.7	2.0	2.0	1.7	1.8
Gdańsk, Baltic Coast. 54.4 N	2.1	1.9	1.7	2.0	1.9
Hel Peninsula. 1932/37. 54.6 N	1.7	2.0	1.8	2.0	1.9

Note. Sources used for computation of Table I and I-a.

Data for 1936 (San Diego, Los Angeles, Fresno, San Francisco, Yuma, Phoenix, Miami and Boston) directly transcribed by the author in the respective U. S. Weather Bureau offices.

Data for other years in U. S. A. received Blue Hill Observatory.

European data taken from the author's book „Comparison of Climate of the United States and Europe" (New York, 1945). See pages 159/161, for Europe, and page 136 for the United States.

http://rcin.org.pl

cal., per minute and square centimeter, whereas the total radiation (direct and diffuse) presented changes from about 0.7 to over 1.0 in the same unit but on a horizontal plane. This considerable diffusion was capable of activating the US recorder, but had no influence on the CS instrument. Moreover, the US recorder is disturbed less frequently by clouds moving through the sundisc, and is subject to errors arising from faulty adjustment and installation.

According to the instruction given in the Circular G (see Literature ad 2): „The inclination of the recorder will be adjusted at such an angle that the mercury column will just close the electrical circuit during times when the disc of the sun can be just faintly seen through the clouds". This determination has to be made in spring or autumn. It should be stated that both recorders, CS and US, are far from perfect, and there is no reason to give preference to one or the other. However, the American method of adding low sun corrections seems desirable for the following practical reasons.

1. The instructions to add low sun (incorrectly called twilight) corrections automatically reduces most of the instrumental deficiencies such as improper laying on the sun, bad conditions of the glass tube etc. In these cases the observer simply adds more hours near horizon, and the final results are greatly improved. The case of Boston, Mass is typical of this (see Table II and discussion in Part IV further on).

2. The CS recorders, even by a perfect adjustment (not often to be found in common practice), differ considerably in the transparency of the glass sphere, in the irregular and varying focusing power of the spherical lens, and, last but not least, in the different ease of burning of the cardboard used. The US recorders may have more instrumental deficiencies, but they are built in a uniform manner and vary little from one to another. Moreover, the system adopted by U. S. Weather Bureau in having all records on a triple register is simpler and more efficient.

3. The percentages of sunshine duration astronomically possible in each latitude, include all visible hours in which the sun may be seen by naked eyes; thus it is more logical to com-

http://rcin.org.pl

TABLE II. Daily and Monthly Differences:
CS minus US, no Low Sun Corr.

	San Diego, California				Blue Hill, Massachusetts			
	1939 Dec.	1940 May	1940 July	1940 Sept.	1941 Dec.	1942 March	1941 June	1941 Sept.
1	.0	.9	2.1	—.1	3.2	.4	.0	.0
2	1.5	.6	1.0	.0	.0	—.3	—.1	.6
3	1.1	.5	2.7	.7	1.3	.0	—.1	.7
4	.5	.5	1.7	2.8	1.7	.6	—2.0	—.8
5	1.0	.1	1.9	—4.2	—.1	—1.9	.0	.0
6	1.8	1.0	1.4	.6	.8	.0	.7	.7
7	2.6	4.2	—1.8	—.1	1.2	—.1	1.9	.5
8	3.0	1.4	.9	2.3	.9	—.1	.6	.7
9	1.3	—1.4	2.2	3.2	1.8	.4	.9	—.1
10	2.1	—.5	2.1	1.9	1.9	2.6	2.9	.1
11	1.8	.0	1.9	—3.7	2.4	.5	2.9	.6
12	1.5	4.5	1.6	1.0	2.7	.0	1.5	1.5
13	1.9	.1	1.2	1.8	.0	.7	.0	1.1
14	1.4	.4	1.1	.8	1.8	.0	—.6	.5
15	2.8	.0	1.1	.9	2.4	.0	.5	.7
16	1.4	1.1	.7	2.6	2.2	.5	—1.1	.4
17	.5	.4	1.2	.5	2.6	.0	2.4	.9
18	.0	.2	1.5	.9	.9	—.2	.5	.5
19	.0	—.1	.7	.8	1.4	—.5	1.5	.9
20	2.0	.0	.0	—4.8	1.4	.8	1.4	.9
21	.0	.0	1.0	5.7	2.4	.5	1.0	.8
22	.1	1.6	.9	2.2	1.7	1.2	1.4	.9
23	—.6	.3	1.7	—	.0	.8	—.1	.7
24	.0	1.1	.0	—	.0	.7	1.4	1.2
25	.1	1.3	.0	—	1.6	.4	.9	.5
26	1.5	—.9	.0	—	1.0	.3	1.5	.4
27	.1	.9	.0	—	.2	—.5	1.3	.7
28	—.2	1.5	.0	—	1.1	2.1	1.3	.8
29	.2	1.6	1.7	—	.2	.2	—1.7	.0
30	.0	2.6	1.2	—	1.6	—.1	.2	—.5
31	—.1	2.3	.0	—	.1	—.8	—	—

Averages for 10 or 11 days, and months. Extreme differences.

1—10	1.5	.7	1.4	.7	1.3	.2	.5	.2
11—20	1.3	.7	1.1	.1	1.8	.2	.9	.8
21—31	.1	1.2	.6	—	1.0	.5	.7	.6
Means	1.0	.9	1.0	—	1.3	.3	.7	.5
Max.	3.0	4.5	2.7	5.7	3.2	2.6	2.9	1.5
Min.	—.6	—1.4	—1.8	—4.8	—.1	—1.9	—2.0	—.8

Note. Blue Hill's data obtained through courtesy of Dr C. F. Brooks.

http://rcin.org.pl

pute the ratio by comparing the actual visible sunshine with the possible duration. The common practice in dealing with the CS recorder is to compute the ratio of actual bright sunshine to the possible duration. The latter includes not only bright but also dim sunshine hours near the horizon. This procedure seems to be unjustified both from a physical and climatological point of view. The actual sunshine duration may well be stated in terms of bright sunshine hours but the additional low sun corrections should always be considered in obtaining percentages of possible duration.

TABLE III. Daily course of sunshine duration. San Diego, California. Average monthly values, in sunshine hours; July and December.

Hours	July 1940				December 1939			
ending	CS	US	Diff.	Corr.	CS	US	Diff.	Corr.
4	.	.	.	0.8	.	.	.	.
5	1.5	.	1.5	4.0	.	.	.	.
6	4.1	0.5	3.6	3.3	.	.	.	.
7	8.5	6.5	2.0	.	0.9	.	0.9	8.9
8	15.8	14.6	1.2	.	16.4	3.7	12.7	27.1
9	22.3	22.1	0.2	.	23.7	21.7	2.0	2.0
10	27.0	27.4	—0.4	.	27.7	26.6	1.1	.
11	27.3	27.6	—0.3	.	28.0	28.4	—0.4	.
Noon	29.6	29.0	0.6	.	29.4	29.3	0.1	.
1	30.4	30.6	—0.2	.	28.7	28.3	0.4	.
2	29.7	29.2	0.5	.	27.9	27.2	0.7	.
3	28.1	25.3	2.8	.	28.1	25.6	2.5	.
4	24.6	20.5	4.1	1.2	19.9	12.7	7.2	10.7
5	19.8	6.4	13.4	12.8	5.3	2.0	3.3	1.7
6	2.7	0.2	2.5	18.1	.	.	.	.
7	.	.	.	0.1	.	.	.	.
Corresponding Means in hours per day (instead per month)								
4—9	1.0	0.7	0.3	0.3	1.3	0.8	0.5	1.2
10—3	5.4	5.4	0.0	.	5.5	5.4	0.1	.
4—7	2.4	1.7	0.7	1.0	0.8	0.5	0.3	0.4
Day	8.8	7.8	1.0	1.3	7.6	6.7	0.9	1.6

http://rcin.org.pl

III. Comparison of CS and US, at San Diego, California.

On arrival in California during November, 1939, the author organized a comparison between the CS and US recorders, at the San Diego Airport. A CS sunshine recorder, sent through the courtesy of the Canadian Meteorological Service (Mr. J. Patterson, Comptroller and Mr. A. J. Connor) and through the efforts of Dr C. F. Brooks, was installed at the same tower, on which the US recorder was in operation. Dr F. Reichelderfer, Chief of the U. S. Weather Bureau, kindly sent the necessary instructions to the San Diego station (Meteorologist Dean Blake in charge). The daily changing of the cardboard was the work of Mr. W. J. Rogers.

The series of direct comparisons at San Diego lasted from December 1, 1939 through September 22, 1940, because the instrument borrowed from Canada had to be returned, for fiscal reasons, before the end of the last month. Tables and give the differences for four months and each day; the daily course is shown in Tab. III for December, 1939 and July 1940. In some months, not tabulated in Tab. II, the CS recorder was employed for experimental purposes to study, how some slight changes in its installation and focusing power influence the values of bright sunshine duration.

The first important problem to be investigated was the relative sensitivity of the CS as compared with the US recorder. As a whole, the difference CS minus US was mostly positive, the CS recorder being more sensitive during most of the days shown in Table III. This is by no means a general rule, as may be seen by some days, in which the difference is negative, the diffusion influencing the US recorder particularly. This tendency to variation may be seen from averages over a period of 10 days which varied from 1.5 to 0.1 hour per day, the extreme variations ranging as much as from 4 to — 2 hours.

During his stay in California, the author sent a copy of his comparative observations to Blue Hill, and Dr Brooks later organized a similar series in his Observatory and sent me a copy for my comparative study. As may be seen in Table II, the Blue Hill series give similar results, during the four months bet-

http://rcin.org.pl

ween June, 1941 and March, 1942. The figures are somewhat lower; the average monthly changes vary from 1.8 to 0.2 hour; and mean extreme variations from 3 to - 1 hour.

Table reveals a very interesting and significant fact, namely that the difference CS minus US changes during the day. The following short summary may serve as evidence of this behavior.

Differences of CS minus US. Changes during an average day.

	Summer			Winter		
	6—8 a. m.	11—1 a. p.	5—7 p. m.	8—9 a. m.	11—1 a. p.	4—5 p. m.
San Diego	July, 1940			December, 1939		
	.2	.0	.5	.5	.0	.3
Blue Hill	June, 1941			December, 1941		
	.5	.1	.3	.4	.15	.4
Means	.35	.05	.4	.45	.1	.35

The difference .0 sunshine hour per day indicates that the sensitivity of both recorders was the same. In early morning or late evening, the US recorder is less sensitive as compared with the other. No low sun corrections were included.

The changing sensitivity of the US recorder may be attributed to diffusion, although the temperature variations may also have an effect. The changes are more pronounced in summer, from morning to noon at Blue Hill, because San Diego has very little clouds at that time, and consequently the effect of diffusion is small in southern California. In Blue Hill, the diffusion in summer is considerable, chiefly due to intermittent sunshine with heavy clouds of Cumuli nearing and passing through the sun disc. The conditions in December are different from those during the summer months.

Besides the direct comparison, as shown in Tables II and III, the author was able during his stay in southern California, to obtain a copy of the records of sunshine duration made at Naval Station, located on the coast a little south of San Diego Airport. A daily log could not be established from the 8-year

http://rcin.org.pl

period (1931—38), because the computations were made for daily totals only. The sunshine records at the Naval Station were discontinued in 1939, the CS recorder removed and the writer was unable to find the original daily cards. He subsequently compared these bright sunshine records with those of the US recorder, located in the old Post Building, about one mile from the Naval Station. Here the Weather Bureau Station has been in operation for several years, before moving around 1938 to San Diego Airport.

The comparative values are presented in Table IV, in addition to Tab. III and Tab. II. Despite sudden changes in sensitivity, like in Table II, and variations from winter to summer, some conclusions may be derived from all these data.

a) The CS recorder seems to be, under favorable conditions, slightly more sensitive as compared with the US, low sun corrections not included. If properly installed, the difference may reach approximately 1.0 or over sunshine hour per day. This figure, however, must allow for many exceptions and may be not generally accepted during summer, for the hours around noon, and, especially, for the periods of intermittent sunshine, when the diffusion is particularly increased heavy clouds nearing sun disc.

b) As is seen from the daily record at San Diego in 1939/1940 and later at Blue Hill in 1941, the sensitivity of the US recorder changes substantially during the day, being greater during the hours around noon than near the horizon.

c) There is a large (in some cases unusually large) seasonal variation, the US being more sensitive in summer and less in winter, as compared with the CS. This increase may reach about 0.8 or more sunshine hours per day.

d) The Blue Hill series is too short in order to be used for far reaching conclusions; this may be said, however, that the trend and character of differences are very similar to those found at San Diego.

Table IV gives corresponding seasonal variations of sensitivity of the US recorder.

http://rcin.org.pl

TABLE IV. Differences CS minus US, in hours and tenths. 1931—1938. Naval Station. San Diego, California. No low sun corrections.

	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	Means
Winter	1.2	1.2	1.2	1.0	1.5	1.0	1.4	1.2	1.2
Spring	.2	1.0	.6	—.1	1.5	1.2	—.3	.6	.6
Summer	.0	.1	—.5	—.8	.6	.6	.3	—1.3	—.1
Autumn	1.1	.7	.6	.7	1.4	1.1	.9	1.0	.9
YEAR	.6	.8	.5	.2	1.2	1.0	.8	.3	.7

The average differences for eight years at San Diego may be compared with those computed from a short series fot 18 and 10 months at Blue Hill in which two US recorders were used, namely US number 1 from November, 1939 trough May, 1941, and US number 2 from June, 1941 through March, 1942. The differences computed with the same CS recorder were largely negative in the first series but the trend and character very much similar to those obtained in the second series.

The Blue Hill's data, presented in Table IV, were received from Blue Hill. In the series 1941—42, the missing spring figures at Blue Hill were interpolated from the data obtained in 1939—41.

The duration of sunshine presents a very variable climate factor. One may be surprised to see, in Table IV, that in one year, during eight years in San Diego, February had 9.6 and in another 6.1 sunshine hours per day, a variation of more than 50%.

San Diego, located in a latitude 32.7 North, has one of the most equable climate; in other places, like Blue Hill, Canada or most of Europe the corresponding variations occur in much greater magnitude. The problem of sunshine variations is discussed later in some detail.

Other complications result from the fact that the differences CS minus US are subject not only to variations in sunshine duration, but also are influenced by a still more changeable factor namely the diffuse radiation. Some data presented in Table IV-a give the evidence of this important fact.

Table IV-a gives the differences, obtained by comparing the CS figures from Blue Hill with those from Boston (US, low sun corrections not including) about 12 miles away.

http://rcin.org.pl

TABLE IV-a. Boston — Blue Hill as compared with San Diego, Naval Station. Differences CS minus US, no low sun.

	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1936/43 Airport	1901/30 Downtown
Winter	.0	—.4	.6	.1	.5	.7	—.1	.0	.1	.1
Spring	—.6	—.5	—.5	—.6	—.4	.0	.8	—.4	—.3	—.8
Summer	—1.5	—.4	—1.7	—1.3	—.5	.2	—.5	.1	—.8	—.7
Autumn	.1	.7	1.1	.7	.5	—.3	.2	.3	.4	.2
Year	—.5	—.15	—.1	—.3	.0	.15	.1	.0	—.15	—.4

Blue Hill. Differences: CS and two US, number 1 and number 2.

	1940	1941	1941	1942	San Diego Naval Station
	US number 1		US number 2		1931/1938
Winter	.0	.2		1.3	1.2
Spring	—.7	(—.2)		(.8)	.6
Summer	—1.2		.5		—.1
Autumn	.0		1.0		.9
Year	—.4 (1940/41)			.9 (1941/42)	.7

The differences, obtained at Blue Hill with the US number 1, resemble those of Boston (downtown series 1901/30); the US number 2 gives values similar to those of San Diego.

IV. Low Sun Corrections applied to the Blue Hill — Boston Series.

The Blue Hill series of sunshine duration is the longest and probably only one recorded in the United States using the CS recorder. The following short summary gives an idea of the average annual differences, from 1893 to 1943, computed from Blue Hill and Boston sunshine series.

Annual Differences; Sunshine Hours per day.

A) US with Low Sun (Boston) minus CS (Blue Hill).

Periods:	1893/1900	1901/10	1911/20	1921/30	1930/35	1936/44
Differences	0.8	1.0	1.2	1.0	0.8	0.8

Single Years	1903	1911	1912	1913	1936	1937	1938	1939	1940
Differences	1.8	1.4	1.7	1.2	1.1	0.8	1.0	1.0	0.6

B) CS (Blue Hill) minus US (Boston, no Low Sun Corrections).

Periods:	1893/1909	1910/1929	1930/1935	1936/1943
Differences	—0.2	—0.4	0.7	—0.05

http://rcin.org.pl

The sudden change, during 1930/1935 in the series (B), is due to an unfavorable downtown location in Boston, when the low sun corrections were abnormally increased. In the series A), this change is nearly eliminated during the same period, by the increased low sun corrections. During 1911/20, however a slight increase in the difference can be observed. This was caused by volcanic eruptions.

The annual differences fluctuate considerably for single years. The exceptionally large differences in 1903 and 1912 are connected with the great volcanic activity in the West Indies (eruption of Mount Pelee, Martinique in 1903), and in Alaska (eruption of Katmai in 1912). This large fluctuation may be better seen in Table VIII with monthly differences.

Table V gives another striking example proving how the American method of low sun corrections tends to preserve the homogeneity of a sunshine series when, for some reasons, the sensitivity of a sunshine recorder falls below normal. No volcanic activity was observed during 1930—1945, yet the sunshine duration directly recorded in Boston by the US recorder was abnormally decreased during 1930—1935 due an unfavorable downtown location of to some instrumental deficiences. But after the low sun corrections have been applied, the homogeneity of the whole sunshine series in Boston seems to be restored. Table V tells us the story of what happened during this period.

Under an unfavorable downtown location, it is understood that lower parts of the horizon are obstructed by some near or distant buildings which prevent the registration of sunshine during rising or setting sun. At the same time it may be worth mentioning some common causes of instrumental deficiencies.

If, in the US recorder, the glass tube with the differential air thermometer has a wrong inclination or, especially, if there are impurities in the liquid or other irregularities, the sushine duration registered by such a recorder shows decreased values. The same is true for the burning glass instrument. If the CS recorder happens to be out of focus, or the installation is otherwise defective, the resulting sunshine trace on the card is curtailed or interrupted.

http://rcin.org.pl

TABLE V. Annual Sunshine Duration, in hours and decimals. Blue Hill (CS recorder), Boston (US) and Low Sun Corrections.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
A) Boston, downtown location, Low Sun Corections near to average values.						
1916	5.9	6.5	—.6	(.8)	7.3	1.4
1917	5.7	6.3	—.6	.7	7.0	1.3
1918	6.1	6.4	—.3	.7	7.1	1.0
1919	5.6	6.0	—.4	.7	6.7	1.1
1920	5.8	(6.2)	—.4	.6	6.8	1.0
B) Boston, various downtown locations, Low Sun unusally increased.						
1930	6.3	5.5	.8	2.0	7.5	1.2
1931	6.2	5.5	.7	1.7	7.2	1.0
1932	6.5	5.7	.8	1.9	7.6	1.1
1933	6.0	5.6	.4	1.4	7.0	1.0
1934	6.4	5.9	.5	1.0	6.9	.5
1935	6.1	5.0	1.1	1.2	6.2	.1
C) Boston Airport. New location.						
1936	5.9	6.0	—.1	.7	6.7	.8
1937	6.0	6.1	—.1	.7	6.8	.8
1938	5.8	6.0	—.2	.8	6.8	1.0
1939	5.6	5.7	—.1	.9	6.6	1.0
1940	6.1	6.0	.1	.7	6.7	.6
1941	6.7	6.6	.1	.7	7.3	.6
1942	5.8	5.8	.0	.7	6.5	.6
1943	6.0	6.1	—.1	.7	6.8	.8
AVERAGES						
A)	5.82	6.28	—.46	.70	6.98	1.16
B)	6.25	5.53	.72	1.53	7.06	.81
C)	5.99	6.04	—.05	.73	6.77	.78

Explanation of the signs at the head of Table V.

(1) Year.
(2) Blue Hill CS. No Low Sun corrections.
(3) Boston US. No Low Sun corrections.
(4) Differences: Blue Hill and Boston.
(5) Boston. Low Sun Corrections.
(6) Boston. US. With Low Sun Corrections.
(7) Differences: Boston (U. S. with Low Sun) and Blue Hill (CS, no Low Sun Corr.).

http://rcin.org.pl

Turning to Table V, and assuming that the CS series was homogenous during 1930—1945 and before in the Blue Hill-Boston area, it is seen that both CS and US recorders show increased average during 1930—1935, when the low sun corrections applied to the US were increased. At the same time, the directly recorded (uncorrected) US daily values show lower averages.

The first A) series, with low sun corrections near average values, shows that the CS recorder at Blue Hill was somewhat less sensitive as compared with the uncorrected US values at Boston. In the second B) series, with abnormally increased low sun corrections, CS was more sensitive than US. This state of things seems to have been remedied in September, 1935, because the following months and years, as stated in the C) series in Table V and also in Table I, show nearly average values of low sun corrections. In connection with this, it is significant to note that the US recorder was moved in 1935 from downtown location to the airport. In Boston-downtown the US was installed on the roof of a great building (over 300 feet high), whereas the new location in Boston-Airport was on the roof of a tall house, about 50 feet up.

The need for further studies and comparisons between the CS and US recorders is apparent from this discussion. Both recorders have many serious defects. It should be emphasized, however, that the homogeneity of records is, to a certain extent, preserved by the method of low sun corrections.

In connection with the changing sunshine values, as seen in the Boston-Blue Hill series, it is necessary to repeat once again that the sunshine duration represents a very changeable climatic element. It has not only large variations from hour to hour and from to month, but also very marked non-periodic changes from one year to another. As is seen from Table VI, the annual sunshine duration varies considerably, and even a decade is too short an interval for computing stable averages. From the same Table, Paris has a variation from 4.6 to 5.0 ten years averages during 1881—1938; in western Poland and especially on the Baltic coast, may be found a variation from 4.5 to 5.0 during the same period.

http://rcin.org.pl

In most cases, the variation for the entire decade, does not exceed ten percent, as indicated by the figures for Blue Hill, Nice, Warsaw and Vienna. The places in North America give variations not very different from those of Europe. Over each decade the New England coast and the peninsula of Florida show a variation of five to ten percent; even the Pacific coast of southern California, with its equable climate like San Diego, Los Angeles and other places have a range of variation in sunshine duration for whole decades of about four percent.

TABLE VI. Annual Sunshine Duration in hours per day.

Averages for 10 years, from 1881/90 to 1931/38.

A) CS Recorder, no Low Sun Correction applied.

	1881/90	1891/1900	1901/10	1911/20	1921/30	1931/38
Warsaw, Poland	—	—	4.6	4.6	4.4	4.6
Kołobrzeg-Kolberg, Baltic		4.7	4.7	4.5	5.0	5.0
Vienna, Austria	5.0	5.1	4.9	4.9	5.1	—
Paris, France	4.6	5.0	4.9	4.8	4.7	4.9
Nice, Mediterranean	—	7.0	7.2	7.1	7.2	7.2
Blue Hill, U. S. A.	—	6.1	6.1	6.0	6.2	6.1
Quebec, Canada	—	—	4.9	4.8	4.8	4.7
Toronto, Canada	5.5	5.8	5.5	5.6	5.8	5.6
Winnipeg, Canada	6.1	5.9	5.7	5.7	5.8	5.6

B) US Recorder, Low Sun Correction included.

	1881/90	1891/1900	1901/10	1911/20	1921/30	1931/38
Boston, Mass	—	6.8	7.1	7.2	7.2	6.9
Jacksonville, Florida	—	—	7.7	7.6	7.8	7.7
Miami and Jupiter	—	8.4	8.2	8.4	8.4	8.3
San Diego, California	—	8.4	8.2	8.4	8.4	8.2
Los Angeles, Cal.	–	—	8.7	8.8	8.9	8.9
Phoenix, Arizona	—	10.3	10.2	10.3	10.6	10.2

Another source of brief but violent changes in the sunshine values is due to volcanic eruptions which cause a temporary decrease in transparency of atmospheric layers; they influence the value of sunshine duration obtained with sunshine recorders, and also, to a greater extent, the intensity of solar radiation as given by actinometric measurements and solarigraphic recorders for the total radiation, both direct and diffuse.

http://rcin.org.pl

During the past 70 years the following eruptions occurred.

a) The volcanic eruption, during summer of 1883, in the island of Krakatoa, near Java, East Indies. Though the island was very small, the eruption was exceedingly powerful and the corresponding effects in the increased turbidity in the atmospheric layers were observed throughout the world until 1886.

b) The period of 1886 (Bandaisan), 1890 (Bogoslof) and 1892 (Avoe-Sangir) was somewhat disturbed by the volcanic eruptions in the above named places.

c) The next large depression was caused by the volcano Santa Maria (1903), Mont-Pelee in Martinique Island (1902) and Colima, western Mexico (1903).

d) The latest depression of world-wide extent occurred in June, 1912 due to the volcanic eruption in Katmai, Alaska.

The late Dr H. H. Kimball has computed the effects on these four depressions and shown that the values of the intensity of solar radiation were decreased by a little more than 10% in 1885 and 1903, 8% in 1912 and 5% in 1891.

In recent decades, eruptions in various parts of the world have not had such far-reaching effects as those cited. Some local depressions were noticed in Europe and in America and are indicated in the corresponding data given below for Warsaw and also for Boston-Blue Hill. A detailed description of their effects is lacking, however.

Sunshine Duration in Warsaw, Poland, CS recorder
(no low sun corrections applied).
Departures from an annual average of 4.5 sunshine hours per day.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1900				—1.1	.4	—.2	.7	.4	—.1	.1
1910	.1	.4	—.8	—.5	—.2	.4	.0	.6	.5	—.2
1920	.5	.7	.3	—.6	.2	—.1	—.6	.0	—.2	—.3
1930	—.5	—.4	.2	—.1	.0	.5	—.1	.6	.2	

The same depression may be observed by computing variations from other European and American stations, which have a long series of records for sunshine duration. San Juan, Puerto Rico has a large depression in 1913 in connection with Alaska eruption in 1912. The same is true for New Orleans, La, for Salt Lake City, Utah, for Tampa, Florida and for Boston-Blue Hill, New England coast (Table VI).

http://rcin.org.pl

TABLE VII. Boston and Blue Hill. Differences: US (with Low Sun)—CS.
Monthly and annual differences, sunshine hours per day.

A) Averages for 30, 10, 6 and 9 years.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1901/30	.5	.9	1.4	1.5	1.5	1.7	1.6	1.2	1.2	.5	.2	.3	1.1
1901/10	.4	.7	1.3	1.1	1.3	1.6	1.5	1.1	1.2	.5	.0	.2	1.0
1911/20	.8	1.2	1.6	1.7	1.6	1.9	1.6	1.5	1.3	.6	.3	.5	1.2
1921/30	.4	.8	1.2	1.6	1.6	1.7	1.6	1.1	1.0	.5	.2	.3	1.0
	Unfavorable downtown location. Low Sun increased.												
1930/35	.4	.9	1.2	1.4	1.4	1.0	.8	.6	.8	.5	.3	.4	.8
	Boston-Airport.												
1936/44	.4	.8	1.1	1.0	1.0	1.5	1.6	1.1	.9	.3	.3	.1	.8

B) Averages for single years.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1902	.1	.6	.8	.1	1.4	.8	1.7	1.7	1.3	.3	—.1	.8	.8
1903	.7	1.4	2.0	1.7	2.4	2.5	1.5	1.9	2.5	2.2	1.4	1.3	1.8
1904	1.1	1.1	1.5	1.1	1.3	1.2	.4	1.0	1.2	.0	.3	.3	.9
	1902/04. Volcanic Eruption. Martinique, West Indies.												
1911	.2	.5	1.3	2.3	2.2	2.6	—1.6	2.0	1.8	.6	.6	.6	1.4
1912	.5	.9	1.5	2.3	2.4	2.5	2.7	2.9	2.2	1.1	1.3	1.1	1.7
1913	.9	1.1	1.7	2.2	2.0	2.4	1.2	1.0	1.1	.3	.3	.4	1.2
1914	.4	1.2	.6	1.2	.1	.7	1.4	.5	1.0	.5	.0	.3	.6
	1911/13. Volcanic Eruption. Katmai, Alaska.												
1918	1.3	2.2	2.5	2.2	1.7	1.3	.7	.8	.6	—.5	.2	.2	1.0
1919	1.1	1.6	1.7	.8	1.4	2.1	2.1	1.5	.7	.4	.4	.4	1.1
1920	1.0	1.0	1.6	.8	1.1	1.3	1.7	1.4	.8	.6	—.1	.9	1.0

C) Boston-Airport. New location of the US recorder.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1936	.8	1.3	1.6	1.1	1.3	2.3	2.0	.5	1.2	.4	.4	.6	1.1
1937	1.1	1.1	1.4	1.4	1.1	1.4	1.3	.8	.9	—.1	.0	.3	.8
1938	—.5	.2	.3	1.2	2.1	2.8	1.9	2.1	.7	—.7	.6	.6	1.0
1939	.4	1.2	1.1	1.3	1.4	2.2	2.7	1.7	1.3	—.4	—.4	—.2	1.0
1940	.3	.4	1.1	.9	1.3	1.2	1.7	1.0	.7	.2	—.6	—.7	.6
1941	.1	.2	.7	.9	.6	.5	1.0	.3	.8	1.0	1.5	—.3	.6
1942	.6	1.3	.2	.4	—.8	.4	1.8	1.7	.9	.8	.8	—.1	.6
1943	.5	.3	2.1	1.4	1.4	1.1	.1	.0	.9	.5	.4	—.1	.8
1944	.7	1.1	1.6	1.0	.8	.5	.0	1.7	.5	.7	(.2)	(.3)	(.8)

http://rcin.org.pl

TABLE VIII. Sunshine hours per day. Observatory in Tacubaya D. F. Mexico.

Latitude 19.4 N., Longitude 99.1 West. Altitude 2.282 meters.

A) Series obtained with the CS recorder in Tacubaya.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Year
1909—1921 Nov. March	6.2	6.9	6.3	5.6	5.7	5.0	5.2	6.1	4.9	5.7	6.2	5.6	5.8

B) Series with the US recorder in Tacubaya. Begin April, 1921.

1921—1939	7.4	8.1	8.5	8.0	7.5	6.9	6.3	6.6	5.5	6.4	7.0	7.2	7.2

C) Highest and Lowest monthly and annual averages: 1921—1939.

High	9.3	10.1	10.1	9.9	9.4	9.4	8.8	8.7	8.2	8.9	9.6	8.8	8.9
Low	4.3	6.1	6.8	6.0	6.2	5.0	4.6	5.0	3.2	4.8	5.5	4.0	6.3
Ratio	2.2	1.7	1.5	1.7	1.5	1.9	1.9	1.7	2.6	1.9	1.7	2.2	1.4

D) Similar Ratio for other stations in America and Europe.

Miami, Florida. Latitude 25.6 N. US recorder (Low Sun included). 1911/40.

Averages	7.0	7.9	8.8	9.4	9.0	8.4	9.0	8.8	7.7	7.3	6.9	7.0	8.1
Ratio	2.2	2.0	1.8	1.4	1.8	1.9	1.7	1.7	2.2	2.3	1.9	2.4	1.3

San Diego, California. Lat. 32.7 N. US recorder, Low Sun. 1892—1938.

Averages	6.9	7.2	8.0	8.8	8.2	8.8	9.6	9.5	8.9	8.1	8.0	7.2	8.3
Ratio	1.9	2.1	1.8	1.8	2.1	1.6	1.7	1.8	1.7	1.7	1.6	2.1	1.2

Blue Hill, Mass. Lat. 42.2 N. CS recorder, no Low Sun. 1886—1939.

Averages	4.0	5.0	5.6	6.3	7.4	8.0	8.1	7.6	6.6	5.9	4.5	4.0	6.1
Ratio	2.0	1.9	2.0	3.2	2.1	3.1	1.9	1.6	2.0	3.0	2.1	1.8	1.2

Montreal, Canada. Lat. 45.5 N. CS recorder, no Low Sun. 1904—1938.

Averages	2.4	3.6	4.8	5.8	6.6	7.4	7.9	7.1	5.7	4.0	2.3	1.9	5.0
Ratio	3.7	3.0	2.5	2.3	2.5	2.0	1.7	1.8	2.3	2.8	3.7	5.3	1.3

Warsaw, Poland. Lat. 52.2 N. CS recorder, no Low Sun. 1904—1938.

Averages	1.5	2.2	3.8	5.2	8.0	8.2	7.6	7.0	5.5	3.7	1.7	0.9	4.5
Ratio	12.3	3.5	5.1	2.4	2.8	2.5	2.1	1.9	3.3	3.5	4.3	9.5	1.4

V. Mexican Series, and the Variability of Sunshine Duration.

In the case of Mexico there is considerable difficulty in comparing some pairs of stations located near the United States border. There are very few sunshine stations to be compared across Rio Grande or other dividing lines. Phoenix, Arizona and Guaymas, Sonora, or Brownsville, Texas and Monterrey im Mexico and some other pairs of stations are too distant in order to be compared with any reasonable chance of success.

http://rcin.org.pl

In the Mexican meteorological network the Cambell-Stokes instrument is used for sunshine duration. There are about 30 stations equipped with the CS recorder. At the Central Observatory in Tacubaya, a short distance from Mexico City, an American-made sunshine recorder was substituted in April, 1921, instead of the CS recorder previously used there since 1909.

Table VIII gives the corresponding monthly and annual values of sunshine hours per day, separately for CS and US recorders. In the first series from November, 1909 till March, 1921, the effects of depression caused by the Katmai Volcano in Alaska in early summer 1912 are clearly marked.

The series at Tacubaya presents a unique opportunity to compare the CS and US recorders; from this comparison, however, only very approximate and indirect differences could be established because the Mexican Observatory failed to make some direct comparisons.

During the author's stay in Mexico in 1928 (see Literature ad 8), he made an attempt to establish some approximate differences between the US and CS recorders employed in sunshine series at Tacubaya. Being unable to find the original CS recorder used during 1909—1921, he compared the average of 1921—1928 with those of 1909—1921, and found the following differences between th US and CS recorders:

winter .9 spring 1.4 Summer .4 autumn .7 Year .8

Although the Mexican annual differences seems to be not very different from that in the Canadian series, it is evident that the climatic conditions in Tacubaya are influenced by summer rains in the highlands surrounding Mexico City. For this and other reasons the Mexican differences were never used by the author for his further study, and are presented here as an example only.

From Table VIII it is seen that the sunshine duration changes from month to month and from year to year. It is significant to note that the southern places like Tacubaya, Miami and San Diego, may have in one month 3 and in another 8, the average being 5 or 6 sunshine hours per day. Table VIII gives a variability ratio not only for Mexico, but also for Florida, California, New England, Canada and Poland.

http://rcin.org.pl

The ratio is obtained by dividing the highest and the lowest monthly or annual value in each consecutive month or year. For instance, the January average for Tacubaya is 7.4, and the highest and lowest monthly values are 9.3 and 4.3 respectively. The ratio 2.2 is obtained by dividing 9.3 and 4.3. Another example is San Diego, which has an average value 7.2 in December, highest monthly value being 8.8 and lowest one 4.2 (ratio 2.1 for 47 years). The annual ratio is of course much smaller as compared with a mean of twelve consecutive months.

The variability of sunshine duration increases from lower to higher latitudes. This is the case chiefly in winter, and, in much smaller degree, in summer. In Canada and Central Europe the sunshine hours in December may be as low as 1 to 2 hours per day as a monthly average; for this reason the variability ratio is very high in winter. The sunshine during summer months is very pleasant, however, in Europe; the corresponding ratio is not very different from similar value in southern places, like California or in the interior of Mexico.

VI. Interconversion Values for the US and CS Recorders.

In addition to the San Diego's and New England's series, the author has received, for his study and comparisons, some recent monthly and annual data obtained with the CS recorder from Toronto, through the courtesy of the Canadian Meteorological Service (M r J. P a t t e r s o n and M r A. J. C o n n o r). These Canadian stations have a length of sunshine records ranging from 31 to 58 consecutive years and ending mostly with 1938 inclusive; Haileybury, Ontario has 17 years (1906/22) only. The respective stations: Quebec, Montreal, Toronto, Haileybury, Winnipeg, Calgary, Kamloops, Vancouver and Victoria, are along the Canadian border, and each may therefore be compared with the nearby station within the United States.

Table IX gives a selection of some Canadian pairs, more or less suitable for comparisons across the bordering line with some stations in the United States. In Table X the differences are given, which indicate the surplus values of US and CS recorders, due chiefly to the low sun corrections as presented in Tables I and I-a.

http://rcin.org.pl

TABLE IX. Conversion Values for two Sunshine Recorders:
US and CS. Differences in sunshine hours per day:
US (Low Sun added) — CS (no corrections).

12 Months												Seasons				
Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Win.	Spr.	Sum.	Aut.	Year
A) Eastern Canadian Border and Adjoining Atlantic Seabord.																
Burlington, Montreal, Canada, Distance 70 miles. Period 1926/45.																
.6	1.0	1.6	1.6	2.0	1.8	2.0	1.5	1.5	.8	.3	.4	.7	1.7	1.8	.9	1.3
Burlington, Vt.-Quebec, Canada. Distance 180 miles. Period 1926/35.																
.3	.7	1.2	1.2	1.6	1.9	1.8	1.2	1.3	.7	.1	.1	.3	1.3	1.6	.6	.9
Eastport, Maine-Fredericton, Canada. Distance 90 mil. Period 1926/45.																
.7	.8	1.2	1.1	1.2	1.1	1.0	.9	1.0	.6	.6	.6	.7	1.2	1.0	.7	.9
Buffalo, N. Y. — Toronto, Canada. Distance 60 miles. Period 1926/45																
.6	.8	1.1	1.0	1.5	1.9	1.6	1.3	1.4	.9	.8	.4	.6	1.2	1.6	1.0	1.1
Sault St. Marie, Mich.-Haileybury, Canada. 225 miles. Period 1926/35.																
.3	.4	1.1	1.8	1.8	1.7	1.9	1.3	.6	.3	.5	.4	.4	1.6	1.6	.5	1.0
Providence and Block Island, Rhode Island. Distances from Blue Hill 32 and 78 miles. Differences with Blue Hill, Mass. during 1901/30 and 1933/38, converted to 1926/35.																
.4	1.0	1.0	1.2	1.3	1.3	1.5	1.0	.8	1.2	.4	.5	.6	1.2	1.3	.8	1.0
Boston, Mass.-Blue Hill, Mass. Distance 12 miles. 1936/43 and 1901/10.																
.4	.7	1.1	1.0	1.2	1.6	1.5	1.0	1.1	.4	.1	.2	.4	1.1	1.4	.5	.9
Averages for seven pairs, adopted for conversion in Europe.																
.5	.8	1.2	1.3	1.5	1.6	1.6	1.2	1.1	.7	.4	.3	.5	1.3	1.5	.7	1.0
B) Central and Western Canadian Border and adjoining Pacific Seabord.																
Grand Rapids. Mich.-Haileybury, Canada Distance 375 miles. Period 1926/35.												.5	.9	1.7	1.0	1.0
Minneapolis, Minn.-Winnipeg, Canada Distance 400 miles. Period 1926/35.												1.0	1.5	1.8	.3	1.1
Helena, Montana-Calgary, Canada Distance 310 miles. Period 1926/35.												.4	1.6	1.8	.9	1.2
Portland, Oregon-Vancouver, Canada Distance 230 miles. Period 1926/35.												.7	1.3	1.2	.5	.9

http://rcin.org.pl

Before discussing the final Table X, it is interesting to say a few words about the sensitivity of CS versus US. In Part III, devoted to the San Diego series, a statement was made that the CS recorder seemed to be, under favorable conditions, slightly more sensitive when compared with the US, low sun corrections not included. At the same time, it was pointed out that this behavior could not be generally accepted for spring and summer, nor for the hours around noon.

A comparison obtained from the pairs of stations along the Canadian border or the nearby Atlantic coast shows that, in ordinary conditions as found in several pairs, the differences CS minus US (no low sun) are mostly negative, the US recorder, not including any low sun corrections, being more sensitive than the CS recorder. Some examples are given here in order to prove this fact.

1) Burlington, Vermont-Montreal, Canada. Period 1926/35.

	Winter	Spring	Summer	Autum	Year
US (with LS) minus CS	.5	1.4	1.5	.7	1.0
LS or Low Sun	.5	.6	.9	.6	.6
CS minus US	.0	—.8	—.6	—.1	—.4

2) Boston Airport-Blue Hill Observatory. Period 1936/43.

	Winter	Spring	Summer	Autum	Year
US (with LS) minus CS	.4	.9	1.3	.5	.8
LS or Low Sun	.7	.7	.8	.8	.8
CS minus US	.3	—.2	—.5	.3	.0

3) San Diego, California: Naval Station and Weather Bureau. 1931/38.

	Winter	Spring	Summer	Autum	Year
US (with LS) minus CS	—.1	.5	1.1	.3	.4
LS or Low Sun	1.1	1.1	1.0	1.2	1.1
CS minus US	1.2	.6	—.1	.9	.7

These examples indicate how changing are the differences in sensitivity of the CS and US recorders under ordinary conditions. In all cases there is a considerable increase of the US sensitivity from winter to summer.

In Table X some conversion values are listed, computed for ten years (1926/35), and, in one case, for thirty years (1901/30).

http://rcin.org.pl

This exception was made for the Boston-Blue Hill, area, because the period 1930/35 has shown the increased low sun corrections due to an unfavorable downtown location in Boston.

The seasonal differences vary considerably in view of the fact that some pairs of stations are relatively distant, and may denote local influences.

The interconversion values, in sunshine hours per day, adopted for Europe and for some other areas are the following.

Winter	0.5	(December	0.3,	January	0.5,	February	0.8)
Spring	1.3	(March	1.2,	April	1.3,	May	1.5)
Summer	1.5	(June	1.6,	July	1.6,	August	1.2)
Autumn	0.7	(September	1.1,	October	0.7,	November	0.4)

Annual Average 1.0

If there is reasonable evidence that the above conversion values could be used for Europe, Canada and for some other areas between roughly 36 and 60 degrees of latitude, as much cannot be said for Mexico and further south to the Equator.

VII. Comparison of North American and European Sunshine. Visible hours per day, converted to the US recorder.

Once the interconversion values of both recorders, or the relation of bright to visible sunshine duration has been established, it is possible to compare the corresponding sunshine data for North America, Europe and other continents. This was done, for the first time, in the author's paper published in 1943 (Lit. ad 9), and more thoroughly discussed in his recent book (Lit. ad 10). This book contains not only extensive numerical tables for 497 sunshine stations in the United States and Europe, but also new comparative sunshine maps were reproduced in the text for the first time in the meteorological literature.

As stated in the book, there are the principal universal determinants in sunshine duration.

a) Sunshine duration in the United States does not substantially differ from that in Europe and other continents. This is true provided that we take into account two very important factors: latitude and degree of aridity.

http://rcin.org.pl

b) Europe is located between 35 and 70 degrees of latitude, whereas the latitude of Key West, the southernmost United States city in Florida Keys, is 24.5 N. and most points on the Canadian border are nearing 48 N. in round figures.

c) The aridity factor in the American Southwest differs greatly from that of Europe. Even a comparison of aridity between the British Isles and Canada ,for the same latitudes, is somewhat unsatisfactory. Central Canada has a more continental climate, with very great temperature changes from day to day, and a higher aridity factor. The climate of Newfoundland and Labrador is much more rigorous than the equable temperature conditions prevalent in England. The nearest approach to the climate of the British Isles is found on the Pacific coast of British Columbia.

d) The climate of Central Europe could be compared with that of the North Eastern States bordering on the Great Lakes. Southern Europe, North Africa, and the Atlantic coast of Morocco are similar in climate to the Pacific coast of southern California.

e) The interior of North Africa may be compared with the steppes and small deserts in South-Western America.

f) The sunshine duration of coastal areas in Central America, including the Canal Zone, is comparable with the corresponding sunshine hours computed for the equatorial belt of West Africa.

It may seem strange, but it is a fact that, during summer, the lowest sunshine duration in North America, Europe and Africa, north of the Equator, is to be found not in Alaska or Iceland, but near the equatorial belt.

The approximate averages, given in Table X, are roughly computed from new sunshine maps: North America and Europe, with Africa north of the Equator.

The averages presented above show, at a glance, that winter sunshine in the United States as a whole is much greater than that of the British Isles, Northern and Central Europe, during the same season.

http://rcin.org.pl

TABLE X. Sunshine Duration in hours per day
(US recorder Low Sun Corrections included).
(Approximate Averages for whole countries or extensive areas).

	Winter	Summer	Year
Canada and Alaska	3	9	6
United States	6	10	9
Mexico	$7^1/_2$	$8^1/_2$	8
British Isles	2	$7^1/_2$	$5^1/_2$
British Columbia. Coast only	$2^1/_2$	$9^1/_2$	6
New England States	4	$9^1/_2$	$6^1/_2$
Great Lakes	3	$9^1/_2$	6
Southern California Pacific coast	7	10	$8^1/_2$
Florida	8	9	$8^1/_2$
Europe except Northern Scandinavia and European Russia	3	10	7
Africa north of the Equator	8	10	9
Canal Zone Panama	8	5	$6^1/_2$
Poland	$2^1/_2$	$10^1/_2$	$6^1/_2$
Central U. S. A., lat. 40 North	$5^1/_2$	10	7
Eastern Canada	$2^1/_2$	9	$5^1/_2$
Western Europe	3	10	7
Mediterranean Basin	5	$12^1/_2$	$8^1/_2$
Equatorial Africa	8	6	7

Note. All sunshine averages in Table X are expressed in the so-called visible hours, according to U. S. standard. In order to get the bright sunshine (CS recorder) the following corrections have to be substracted: winter 0.5, spring 1.3, summer 1.4, autumn 0.7, year 1.0 hours per day.

This does not hold good for the summer half-year nor does it apply to southern Europe nor the Mediterranean Basin. Summer sunshine is not only abundant in southern Europe, but is accompanied by very pleasant weather in the European plains.

Some places on the Polish coast and the adjoining Baltic coast of Sweden, Estonia, Latvia and Lithuania haxe over 10 visible sunshine hours per day during the summer season.

The duration of the summer and winter sunshine may be summarized as follows: the African continent, north of the Equator, is generally more sunny than the corresponding latitudes of America. The annual averages of sunshine hours have approximately the same values for North America as for Europe, provided that the zones compared lie with the same degrees of latitude.

http://rcin.org.pl

Literature Cited.

1. The Observer's Handbook. British Meteorological Office. London, 1934.

2. Instructions for the care and management of electrical sunshine recorders. C. F. Marvin. U. S. Weather Bureau. Circular G. Washington D. C. 1941.

3. Maring, D. T. An improved sunshine recorder. Monthly Weather Review. Volume III. pp. 485—490. Washington, 1897.

4. Curtis, R. H. The standardization of sunshine recorders. Symon's Meteorological Magazine. Volume 44. London, 1909. See also Quarterly Journal, R. Meteorolog. Soc. Vol. 24. London, 1898.

5. Glasspoole, J. and Hancock, D. S. The distribution over the British Isles of the average duration of bright sunshine. Quart. Journal, R. Meteorological Soc. Vol. 62. London, 1936.

6. Selga, Miguel S. J. The Sunshine of Manila. Central Observatory, Philippine Islands. Manila, 1928.

7. Gorczyński, Ladislao. El Clima Solar de la Republica Mexicana. Four „Folletos" published by Servicio Meteorologico Mexicano. Tacubaya D. F. Mexico. 1928—1932.

A) Actinometros termo-electricos etc. pp. 24, 34 figs. 1925.

B) Actinometros empleados en el Observatorio Meteorologico Central de Tacubaya y su calibracion. pp. 46. 1929.

C) Radiación Solar en Tacubaya segun las medidas pirheliometricas etc. pp. 41. 1932.

D) Radiación solar, total y difusa en Tacubaya segum las medidas solarimetricas y los diagramas solarigraficos. pp. 63. 1932.

8. Gorczyński, Ladislas. Climat Solaire de la Cote d'Azur. pp. 1—208. 34 figures. Nice, 1934.

9. Gorczyński, W. Sunshine and Cloudiness in the Mediterranean Basin. Bulletin, Amer. Meteor. Soc. pp. 183—193. May, 1943.

10. Gorczyński Wladyslaw. Comparison of Climate of the United States and Europe. pp. 1—288. 36 maps. New York.

Polish Institutes Series. Herald Square Press. 1945. In this book, there is a special supplement (pp. 178—197) giving the sunshine hours and percentages of possible duration for 282 stations in Europe, 141 in the United States and 74 in Canada, Mexico and Central America, a total of 497 stations. Two large chapters (pp. 114—178) are devoted to the sunshine duration, and a comparison of the North American and European sunshine is presented in a series of maps and numerical tables.

http://rcin.org.pl

Czł. Władysław Gorczyński

Porównanie i redukcje długości usłonecznienia dla heliografów używanych w Ameryce i w Europie

Przedstawiono dnia 24 października 1947 r.

Streszczenie

W pracach klimatologicznych obowiązuje porównanie i redukcja obserwacji, otrzymywanych według różnych skal i na przyrządach rozmaitego typu. W krajach anglosaskich, w Wielkiej Brytanii i jej dominiach oraz w Stanach Zjednoczonych, stale się publikuje wyniki badań w calach angielskich oraz w stopniach Fahrenheita, gdańszczanina, który obmyślił tę skalę. We wszystkich pozostałych krajach używa się skali stustopniowej oraz systemu metrycznego. Wynikają z tego różne pożałowania godne komplikacje, na które niewiele możemy poradzić z powodu uporu krajów anglosaskich. Przerabiania skali Fahrenheita na skalę stustopniową oraz zamiany cali angielskich na system metryczny nie jest rzeczą zbyt trudną, ale pochłania wiele czasu i jest bardzo kłopotliwe w użyciu. Toteż już od dawna mamy mapy temperatur i opadów albo sprowadzonych do jednej skali albo uwzględniających równocześnie obie skale.

Ważny i nader dokuczliwy dla klimatologii wyjątek stanowi brak map wykazujących długości usłonecznienia w godzinach słonecznych. Te rzeczy robiono sporadycznie dla Wielkiej Brytanii, Szwecji, Polski i niektórych innych krajów, jednak nie dla większych obszarów, a zwłaszcza dla całego świata. Przyczyną tego było bynajmniej nie brak zainteresowania dla podobnych porównań, lecz ten prosty i zarazem niepomyślny dla porównań fakt, że Stany Zjednoczone Ameryki Północnej wprowadziły do użytku nowy typ heliografu, różniącego się zasadniczo od typu tzw. Campbell-Stockes'a wprowadzonego od dziesiątków lat w Wielkiej Brytanii, jej dominiach i na całym świecie.

Wprowadzanie nowych typów przyrządów jest usprawiedliwione i w większości przypadków wprowadzać może udoskonalenie metod obserwacji i otrzymywanych wyników, o ile nowy typ jest systematycznie porównywany z przyrządami na ca-

http://rcin.org.pl

łym świecie, wprowadzonymi od dawna do powszechnego użytku. Ten warunek nie był jednakże respektowany przez sieć Stanów Zjednoczonych, mającą Centralne Biuro Pogody (U. S. Weather Bureau) w Waszyngtonie. Publikowane i rozsyłane po całym świecie dane długości usłonecznienia dla całego terytorium Stanów Zjednoczonych nie zawierały zupełnie wzmianki o metodzie opracowania godzin słonecznych, a zwłaszcza o znacznych poprawkach, jakie stosowano w tym celu. Te poprawki t. zw. „Twilight corrections" (zmrokowe) są już w nazwie zupełnie błędne; tutaj bowiem nie chodzi o „twilight" (zmrok), lecz o poprawki przy wschodzie i zachodzie słońca.

W pracy niniejszej używam bardziej naukowego i właściwego terminu „Low Sun Corrections" tj. poprawek na niskie położenia słońca ponad horyzontem. Stałe dodawanie tych znacznych poprawek i wogóle cała metoda wprowadzania tych poprawek, nie będąc wzmiankowana w biuletynach U. S. Weather Bureau, uchodziła uwagi klimatologów Europy i innych kontynentów. W tekście angielskim tej pracy podane jest i szczegółowo objaśnione z jakich danych zostały wyprowadzone wartości redukcyjne dla zamiany długości usłonecznienia ze skali „Campbell-Stokes Recorder" na skalę amerykańską. Wartości redukcyjne, jak wynika z Tabeli IX są następujące (w godzinach słonecznych na dzień):

Zima	0.5	(grudzień	0.3,	styczeń	0.5,	luty	0.8)
Wiosna	1.3	(marzec	1.2,	kwiecień	1.3,	maj	1.5)
Lato	1.5	(czerwiec	1.6,	lipiec	1.6,	sierpień	1.2)
Jesień	0.7	(wrzesień	1.1,	październik	0.7,	listopad	0.4)

Poprawka roczna wynosi 1.0 godzin słonecznych na dzień; wszystkie te poprawki, zarówno miesięczne jak i roczne, stale winny być dodawane do wartości „bright sunshine duration", otrzymywanych z heliografu Campbell-Stokes'a, aby otrzymać odpowiednią długość usłonecznienia według skali amerykańskiej.

Jak to jest wyjaśnione w tekście angielskim powyższe wartości redukcyjne zostały uzyskane w sposób następujący:

1. Przez bezpośrednie porównanie wyników, otrzymanych heliografami obu typów. Badania te przeprowadzone zostały przez autora w San Diego (Kalifornia) w czasie od grudnia 1939 .r do września 1940 roku.

http://rcin.org.pl

2. Z piśmiennictwa podczas pobytu autora w Kalifornii, a mianowicie udało się autorowi znaleźć wykazy w „San Diego Naval Station“, zawierające wyniki otrzymane z heliografem Campbell-Stockes'a. Te wyniki, z okresu 1931—1938, autor porównał z odpowiednimi danymi dla heliografu systemu amerykańskiego, jakie były jednocześnie otrzymane i ogłoszone przez U. S. Weather Bureau.

3. Autor otrzymał z Blue Hill Observatory (Harvard University) kopie wykazów, zawierających wartości długości usłonecznienia, na podstawie badań przeprowadzonych tam z heliografem Campbell-Stockes'a od r. 1893. Te dane nadesłał Dr C. F. Brooks, dyrektor tego obserwatorium, wzamian za kopie pomiarów przeprowadzonych przez autora w San Diego.

4. Autor otrzymał dzięki uprzejmości Kanadyjskiej Sieci Meteorologicznej w Toronto szereg wykazów z długościami usłonecznienia dla stacyj Kanadyjskich. Te dane, otrzymane przy pomocy heliografów typu Campbell-Stockes'a, zostały porównane dla stacji granicznych z odpowiednimi wykazami dla stacji Stanów Zjednoczonych i robionych według skali tam używanej.

5. Podczas pobytu autora w Meksyku w latach 1927—1928, było przeprowadzone porównanie dwóch serii pomiarów z obserwacjami długości usłonecznienia, otrzymanymi z obu typami heliografów. W książce autora pod tytułem „Comparison of Climate of the United States and Europe“ (1—288 stron, 36 map, New York, 1945), znajduje się specjalny dodatek (strony 178—197), w którym wyniki pomiarów, otrzymane w 282 stacjach w Europie i 215 stacjach w Ameryce zostały jednolicie zredukowane, w celu sprowadzenia długości usłonecznienia do wspólnej skali. W ten sposób po raz pierwszy została przeprowadzona taka redukcja wyników i podana do publicznego użytku.

http://rcin.org.pl

S. Z. Różycki

Uwagi o rozmieszczeniu stopnia geotermicznego w Polsce i krajach sąsiednich

(Notatka wstępna)

Przedstawiono dnia 21 stycznia 1947 r.

Streszczenie

Zagadnienie stopnia geotermicznego od dwudziestu przeszło lat nie budzi w naszej nauce żywszego zainteresowania. Od czasu prac Arctowskiego i jego uczniów [1]) nie ukazała się na ten temat w literaturze polskiej prawie żadna notatka. Tym niemniej dane nagromadzone dla Ziem Polskich i krajów sąsiednich, choć obejmują zaledwie kilkanaście punktów, w których dokonane zostały pomiary geotermiczne, dostarczają interesującego materiału. Pozwalają one na zwrócenie uwagi na ważny fakt, że na terytorium naszego państwa nie mamy do czynienia z drobnymi lokalnymi wahaniami średniej wartości stopnia geotermicznego, ale stwierdzają istnienie poważnych różnic, świadczących o położeniu Polski na granicy wielkich jednostek geotermicznych.

Niewątpliwie materiały są jeszcze zbyt skąpe, aby można było pokusić się o sporządzenie dokładnej mapy geotermicznej Polski. Dyskusji może podlegać dokładność poszczególnych pomiarów robionych w różnym czasie i różnymi metodami, tym niemniej rząd zarysowujących się różnic wykracza daleko poza granice prawdopodobnych błędów i zachęca do podjęcia pierw-

[1]) H. Arctowski. — O stopniu geotermicznym w szybach naftowych w Bitkowie. „Kosmos", t. XLVIII. 1923.

H. Arctowski. — Próba pomiaru stopnia geotermicznego w szybie Ratoczyn 5 w Borysławiu. „Kosmos", t. XLVIII. 1923.

H. Arctowski. — Nowe pomiary gradientu geotermicznego w szybach naftowych Borysławia, Krosna i Bitkowa. „Kosmos", t. XLIX. 1924.

S. Zych i A. Tabor. — Wyniki pomiarów geotermicznych w szybie Tesp. IV w Kałuszu. „Kosmos", t. LII. 1927.

S. Zych. — Temperatury wgłębne w szybie Stebnik 1. „Kosmos", t. LIII. 1928.

J. Moniak i S. Zych. — Pomiary temperatur w głębokim szybie Ciechocinka. „Kosmos", t. LV. 1930.

http://rcin.org.pl

szej próby choć szkicowej syntezy. Pomiary w głębokich wierceniach w północno-wschodniej i północnej oraz w południowej części Polski wykazały, że amplituda wahań temperatury w górnej części litosfery (do 2,500 m głębokości) na terenie naszego kraju jest poważna. Załączona mapka daje próbę szkicowego zestawienia dotychczasowych wyników i nawiązania ich do głównych rysów wgłębnej budowy geologicznej. Rzecz znamienna, wartości zbliżone do przeciętnej środkowo i zachodnio europejskiej, osiągane są prawie dokładnie wzdłuż linii biegnącej przez Skanię, wyspę Bornholm, północno-wschodni skraj wału pomorsko-kujawskiego i masyw wyżyny małopolskiej oraz linii dyslokacyjnej dzielącej zapadlisko podkarpackie od wyniesienia Wołynia i Podola (U. S. R. R.). Linia ta zdumiewająco pokrywa się ze znaną linią tektoniczną, dzielącą obszary strukturalne Europy (Neo-Meso-Paleo-europy od Archeoeuropy w nomenklaturze Kobera).

Reasumując można wyróżnić następujące regiony geotermiczne górnej części litosfery w Polsce, w nawiązaniu do budowy geologicznej:

„chłodny" obszar Polski północno-wschodniej (st. geot. 40—100 m), leżący na skraju prastarej tarczy o podłożu krystalicznym,

„przeciętnie ciepły" obszar Polski południowej i południowo-zachodniej (stop. geoterm. średnio 30—40 m) w strefie fałdowań hercyńskich i kimeryjskich, i w zapadlisku przedkarpackim,

„nieco ochłodzony" (przez wypromieniowanie?) obszar karpacki (st. geot. 40—45 m),

„miernie chłodny" (stop. geoter. 40—55 m) — zrąb starego masywu czeskiego,

„lokalne ocieplenia" w sąsiedztwie stref wulkanizmu trzeciorzędowego,

„ciepłe" (st. geot. 15—25 m) zaplecze Karpat w strefie głębokich rozdarć tektonicznych w wewnętrznej części łuku karpackiego.

http://rcin.org.pl

S. Z. Różycki

Note concerning the distribution of the geothermal gradient in Poland and neighbouring countries

(Introductory note)

Presented on January 21, 1947

The problem of geothermal gradient has for more than twenty years not been taken up by our scientists. Besides the known papers of Arctowski and his school [1]), no other notes concerning this subject have been published in the Polish literature.

Assembled data for the Polish territory and the neighbouring countries, though including only less than twenty localities where the geothermal measurements have been made, supply, however, a very interesting informations. They draw our attention to the important fact that on the territory of Poland we have not to do with small local oscillations as to the average value of the geothermal gradient, but that these are a proof of the existence of considerable differences which shows that our country is situated on the limit of great geothermical units.

The data arrived at, are of course much too scarce to allow us to draw up a detailed geothermical map of Poland. The accuracy of individual measurements made in different periods and by means of different methods may be subject to discussion.

---

[1]) H. Arctowski. — Sur le degré géothermique dans quelques puits à petrole en cours de forage à Bitków. „Kosmos", t. XLVIII. 1923.

H. Arctowski. — Essais de détermination du degré géothermique dans le puits Ratoczyn 5 à Borysław. „Kosmos", t. XLVIII. 1923.

H. Arctowski. — Nouvelles recherches sur les gradients géothermiques dans les puits, à petrole de Borysław, Krosno et Bitków. „Kosmos", t. XLIX. 1924.

S. Zych et A. Tabor. — Déterminations géothermiques dans le puits Tesp. IV à Kałusz. „Kosmos", t. LII. 1927.

S. Zych. — Observations géothermiques dans le forage Stebnik 1. „Kosmos", t. LIII. 1928.

J. Moniak et S. Zych. — Mesures de la température dans le forage profond de Ciechocinek. „Kosmos", t. LV. 1930.

http://rcin.org.pl

The differences in the observed values of geothermal gradient are, however, far beyond the limit of probable error of singular determination thus inducing us to take up a first trial of synthesis, though only in the form of a sketch.

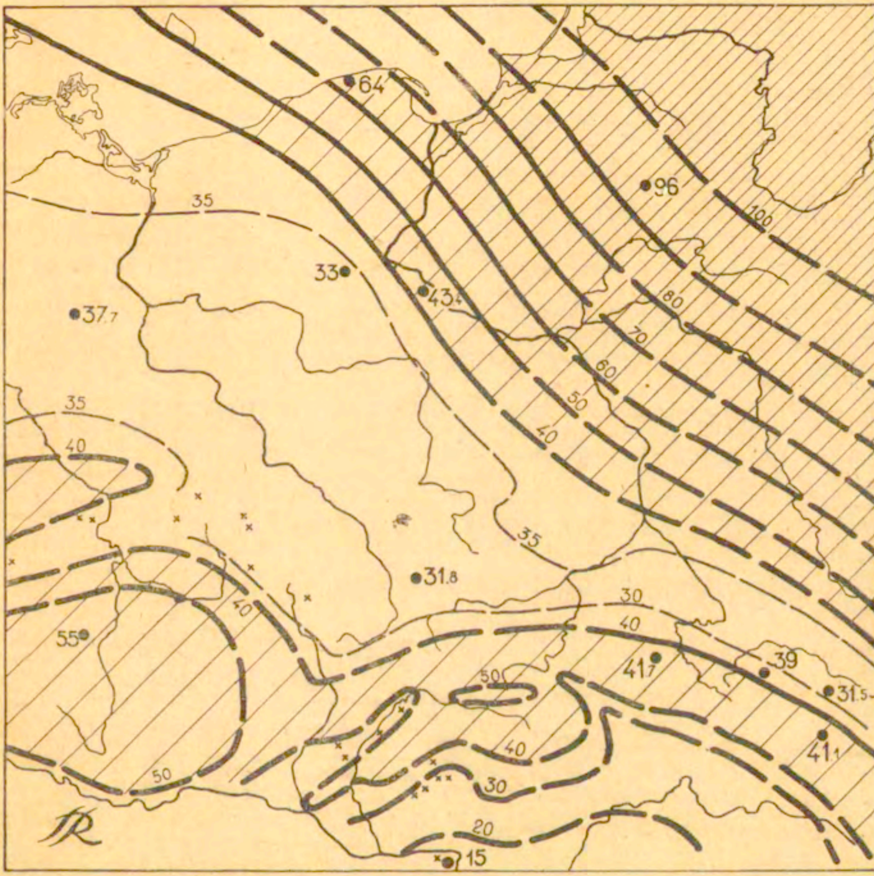
It is to be regretted that the geothermal measurements in deep bore holes in Poland were dropped. This dropping has resulted to a great extent from the fact that the result of a number of measurements made previously in Upper Silesia, in the Sub-Carpathians and in the region of Kujawy did not greatly differ from the average value of the geothermal gradient accepted for the Central Europe (33 m). The data obtained for the above mentioned areas seemed to be comprised within the limits of local oscillations, caused by the neighbourhood of coal, or gas bituminous deposits, by disturbances of the disposition of beds or by the configuration of the area. It is only when deep bore holes were made in the North-Eastern and Northern parts of Poland that attention was drawn to the fact that the amplitude of oscillation of heat supply in the upper part of the lithosphere (up to the deep 2—2.500 m) is much more considerable on the area of this country.

On the enclosed map it has been tried to show in the form of a sketch the obtained recent results and their reference to the main features of the deep geological structure. The following picture becomes apparent:

In the North-East of Poland there is a large „cool" unit where the geothermal gradient reaches nearly 100 m. Its maximum value known until the present day was found in the bore hole in Pisz (Johannisburg, 1354 m deep), on the Mazurian Lakes, where it reaches 96 m. Judging however from general regional tendencies we see that it increases towards NE and it is probable that still higher values will be met with, as it has hypothetically been pointed out on the map.

In the SW direction the interpolated isopletes are disposed as a number of parallel lines, through existing measurement points, having a direction NW — SE and showing a constant decrease of the geothermal gradient. We have here a belt about 200 km wide and as we move towards SW we see that the increase of internal heat is expressed by a decrease of the geothermal

http://rcin.org.pl



Szkicowa mapka rozmieszczenia średniego stopnia geotermicznego w Polsce. Skala 1 : 7.000.000.

Grube linie ciągłe i przerywane — izoplety śr. stopnia geotermicznego.
Czarne punkty — ważniejsze wiercenia z pomiarami geotermicznymi, liczba obok wskazuje wielkość śr. stopnia geotermicznego [1]).
Małe krzyżyki skośne — cieplice.

Sketch map of isopletes of the average geothermal gradient in Poland. Scale 1 : 7.000.000.

Thick lines — isopletes of a geothermal gradient.
Block dots — most important bore holes with geothermical measurements.
Obliques crosses — hot springs.

[1]) Dla m. Sperenberg koło Berlina na mapie omyłkowo wpisana jest liczba 37,7. Winno być 33,7.

http://rcin.org.pl

gradient by an average of 10 ° C. on a horizontal distance of about 40 km.

It is characteristic that values approximating the average of Central and Western Europe are almost exactly attainable along the line running through Skania, the Isle of Bornholm, the NE edge of the Pomorze — Kujawy anticlinorium and the massive of the Małopolska (Lesser Poland) plateau, as well as along the dislocation line dividing the Carpathian Foreland depression from Volhynia and Podolia. This line is strikingly similar to the tectonic line dividing the two main structural areas of Europe, viz. the folded south-western Europe and the Russian plateau (Neo-Meso-Paleo-Europe and Archeoeurope in the Kober's nomenclature). This is a fundamental limit in the distribution of magnetic anomalies and to a certain extent also of gravimetric ones. It corresponds to the results obtained from deep bore holes made recently, this limit separates the folded Europe from the areas of old crystalline rocks located at a comparatively small depth and uniting the Scandinavian and the Ukrainian shields. This line corresponds approximatively to the trace of the isoplete of 40 m geothermal gradient.

On the south-western side of the above line we notice a widespread area of a completely different thermal character. On the vast area between the Subcarpathian depression and the Małopolska plateau, comprising the whole of the Odra basin and running further in the direction of the middle Łaba (Elbe) there lies an area of rather equal values of the geothermal gradient, close to the average. Apart from some small exceptions, the temperature in the depth of the earth rises by 1 ° Centigrade every 30—35 m (Kałusz 31.5 m; Paruszowice, Czuchów 31.8 m; Szubin 33 m; Sperenberg near Berlin 33.7 m etc). It is only on the Eastern slope of the Kujawy anticlinorium that the geothermal gradient is greater than 40 m (Aleksandrów and Ciechocinek 43.4 m). In some places it is sometimes smaller than 30 m, as has been noted for instance in the rock salt mines in Wapno near Inowrocław. This kind of deviations may be also found in Lower Silesia. The Święty Krzyż (Holy Cross) Mountains show a very unpleasant gap within the area of that unit (the geothermal gradient should be somewhat higher here), as the temperature has not been measured there in any deep bore holes.

http://rcin.org.pl

The whole „averagely warm" area of SW Poland, considered in connection with geothermal gradients, belongs structurally to the zones of Hercynian and the youngest foldings which have been considerably disturbed by the contre-coups of Alpine-Carpathian orogenesis.

A third geothermal area lies in the South. At the foot of the Carpathians, before the front of the first Flysch overthrusts, an increase of the geothermal gradient has been noticed (in Tustanowice and Borysław up to 39 m). In the interior of the Carpathians and in the Central depression the gradient increases only slightly, not exceeding 40 m (Bitków 41.1 m, Krosno 41.7 m). This is undoubtedly connected with the well known fact that the geothermal gradient increases in mountainous areas. In the Tatra Mountains the increase is probably still greater.

The prolongation of this „cooled" Carpathian zone corresponds to the old block of the Czech massive where the geothermal gradient in the Pribram mines attains about 55 m.

The freshness of the tectonic movements in this zone is shown by thermal contrasts, a number of hot springs is known to exist there in the neighbourhood of Tertiary intrusions and effusions. The hot springs of the Waag valley and of Southern Slovakia are also pointing to a similar diversity of the geothermal area in the Carpathians.

The geothermal gradient decreases rapidly southward of the Carpathians and is characteristic of the exceptionally „warm" geothermal area of the Hungarian lowland where it amounts to nearly 20 m and falls even to 15 m in the neighbourhood of Budapest. The above phenomenon is connected with the young inter-Carpathian volcanic zone and with the intrusions of hot magma during the Alpine orogenesis.

Summing up the above characteristics of the geothermal zones in the upper lithosphere in Poland in connection with the geological structure, we can distinguish:

1) a „cold" area in NE Poland (geotherm. grad. 40—100 m), lying on the edge of the old shield with cristalline substratum;

http://rcin.org.pl

2) an „averagely warm" area in S and SW Poland (geotherm. grad. aver. 30—35 m) in the zone of Hercynian and Kimmerian foldings;
3) a „rather cooled" area in the Carpathians (geotherm. grad. aver. 40—45 m);
4) a „still colder" area (geotherm. grad. 40—55 m) of the old Czech block;
5) a local increase of temperature in the neighbourhood of the Tertiary volcanic zones;
6) a „warm" zone (geotherm. grad. 15—25 m) beyond the Carpathians.

http://rcin.org.pl

TREŚĆ

http://rcin.org.pl

TABLE DE MATIÈRES

INSTYTUT MATEMAT. P.A.N. BIBLIOTEKA

http://rcin.org.pl

Redaktor naczelny wydawnictw T. N. W.
WŁODZIMIERZ ANTONIEWICZ

Redaktor wydawnictw Wydziału III
WIKTOR KEMULA

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA

Nakład 1.100 egz. Papier dziełowy ilustracyjny B_1, g 80. Listopad 1948 r.

Drukarnia Naukowa TNW, W-wa, Krak. Przedmieście 26/28, pod zarządem T. Madrzejewskiego
B-35773

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

40
1947

SPRAWOZDANIA WYDZIAŁU III T.N.W.

//rcin.or