Sur les fonctions hyperabéliennes.

Par

K. Abramowicz.

A chaque forme quadratique quaternaire à coefficients entiers réductible au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

correspond un groupe hyperabélien, qui est défini comme groupe discontinu [1]) de substitutions à deux variables complexes x et y de la forme

$$\left(x,\, y;\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right).$$

On sait qu'il existe une relation algébrique [2]) entre trois fonctions hyperabéliennes appartenant à un même groupe. Dans le travail actuel nous envisageons deux fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ appartenant aux deux groupes différents G et g; nous supposons que ces fonctions sont liées par une relation algébrique $R(F(U, V), f(u, v)) = 0$. Le problème connu de la transformation de Poincaré [3]) des fonctions hyperabéliennes se rapporte au cas particulier où le groupe G est transformé du groupe g, c'est-à-dire $G = T^{-1} g T$; le problème consiste alors dans la détermination du groupe de substitutions T pour lesquelles les fonctions hyperabéliennes appartenant aux groupes g et $T^{-1} g T$ sont liées par la relation algébrique. Nous nous proposons le problème suivant: Etant $f(u, v)$ et $F(U, V)$ deux fonctions hyperabéliennes appartenant respectivement

---

[1]) Picard: Sur les fonctions hyperabéliennes (Journal de Math., IV série, t. I, p. 87).

[2]) Ibidem, p. 112.

[3]) Oeuvres, t. II, p. 508.

aux groupes différents g et G de variables u, v et U, V, déterminer les relations algébriques $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ qui doivent exister entre les arguments U, u et V, v de fonctions $F(U, V)$ et $f(u, v)$ dans le cas, où les fonctions $F(U, V)$ et $f(u, v)$ sont liées par la relation algébrique

$$R(F(U, V), f(u, v)) = 0.$$

On voit facilement que dans le cas où les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ sont linéaires, le problème se réduit au problème de Poincaré. Nous obtenons le résultat suivant: les cas où les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ ne sont pas linéaires, se réduisent aux deux suivants:

$$U^M = u^m, \quad V^N = v^n,$$

où M, N, m, n sont des nombres naturels.

Désignons les groupes hyperabéliens G et g par

$$G\left(\frac{A_i U + B_i}{C_i U + D_i}, \frac{A'_i V + B'_i}{C'_i V + D'_i}\right),$$

$$g\left(\frac{a_i u + b_i}{c_i u + d_i}, \frac{a'_i v + b'_i}{c'_i v + d'_i}\right)$$

et supposons que les fonctions $f(u, v)$ et $F(U, V)$ appartenant respectivement aux groupes g et G sont de même „degré“ r, c'est-à-dire qu'elles prennent chacune de ses valeurs $f(u_0, v_0)$, $F(U_0, V_0)$ dans r points différents du polyèdre fondamental P_0; si l'on désigne ces points par

$$u = t(u_0), \quad U = T(U_0),$$
$$v = s(v_0), \quad V = S(V_0),$$

on aura

$$F(T(U_0), \ S(V_0)) = F(U_0, V_0),$$
$$f(t(u_0), \ s(v_0)) = f(u_0, v_0).$$

Les relations obtenus montrent que les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ de „degré“ r admettent au plus r *substitutions non-linéaires* pour lesquelles elles restent invariables. Désignons par M et m les degrés de la relation $\varphi(U, u) = 0$ par rapport à U et u et de même par N et n les degrés respectifs de la relation $\psi(V, v) = 0$ par rapport à V et v; nous admettons que les équations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ sont irréductibles. Soit encore p le degré de la relation algébrique $R(F(U, V), f(u, v)) = 0$ par rapport à $f(u, v)$.

Montrons en premier lieu que les relations $\varphi(U, u) = 0$, $\psi(V, v) =$ possèdent la propriété suivante:

I. *Si les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ appartenant aux groupes G et g sont liées par la relation algébrique*

$$R(F(U, V),\ \ f(u, v)) = 0,$$

il existe dans les groupes G et g une infinité de substitutions

$$U' = \frac{AU + B}{CU + D}, \quad u' = \frac{au + b}{cu + d}, \tag{1}$$

telles que les deux équations

$$\varphi(U, u) = 0, \quad \varphi(U', u') = 0$$

sont identiques; de même il existe dans les groupes G et g une infinité de substitutions

$$V' = \frac{A' V + B'}{C' V + D'}, \quad v' = \frac{a' v + b'}{c' v + d'} \tag{2}$$

telles que les deux équations

$$\psi(V, v) = 0, \quad \psi(V', v') = 0$$

sont identiques.

En effet, prenons une solution U_0 de l'équation $\varphi(U, u) = 0$ et une solution V_0 de l'équation $\psi(V, v) = 0$; à ces solutions correspondra la relation

$$R(F(U_0, V_0), f(u, v)) = 0.$$

Substituons dans les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ aux variables u et v successivement toutes les valeurs

$$u_i = \frac{a_i u + b_i}{c_i u + d_i}, \quad v_i = \frac{a_i' v + b_i'}{c_i' v + d_i'}, \quad (u_0 = u,\ v_0 = v) \tag{3}$$

prises du groupe g; ces substitutions ne changeront pas la fonction $f(u, v)$. En résolvant les équations

$$\varphi(U, u_i) = 0, \quad \psi(V, v_i) = 0$$

par rapport à U et V nous obtenons des solutions qui pourront être rangées d'une manière quelconque dans les deux suites

$$\begin{matrix} U_0, & U_1, & U_2, \ldots \\ V_0, & V_1, & V_2, \ldots \end{matrix} \tag{4}$$

On aura les relations

$$R(F(U_k, V_l),\ f(u, v)) = 0$$

pour chaque paire des indices k et l. Mais, comme les substitutions (3) effectuées dans la relation algébrique

$$R(F(U, V),\ f(u, v)) = 0$$

ne changent pas la fonction $f(u, v)$, on n'obtient de cette relation que le nombre fini de valeurs

$$F(U_k, V_l), \quad k, l = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

pour la fonction $F(U, V)$; parmi ces valeurs se trouvera aussi la valeur $F(U_0, V_0)$. Cela montre qu'on trouvera nécessairement dans la suite (5) des valeurs égales en nombre infini.

Supposons en premier lieu qu'on a un nombre infini de valeurs $F(U_k, V_l)$ égales à $F(U_0, V_0)$, c'est-à-dire

$$F(U_k, V_l) = F(U_0, V_0).$$

L'égalité obtenue montre que la fonction hyperabélienne $F(U, V)$ devra rester invariable pour une infinité de substitutions de la forme

$$U_k = T(U_0), \quad V_l = S(V_0) \tag{6}$$

qui pourront n'être pas linéaires; mais, comme le nombre r_0 de substitutions non-linéaires:

$$\begin{matrix} (U, V; & T_1(U), & S_1(V)), \\ (U, V; & T_2(U), & S_2(V)), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (U, V; & T_{r_0}(U), & S_{r_0}(V)) \end{matrix} \tag{7}$$

laissant invariable la fonction $F(U, V)$, ne peut pas surpasser r dans le polyèdre fondamental P_0, il existera nécessairement une infinité de valeurs de k et l pour lesquelles les relations (6) auront la forme

$$U_k = \frac{AU_0 + B}{CU_0 + D}, \quad V_l = \frac{A'V_0 + B'}{C'V_0 + D'},$$

où la substitution

$$\left(U, V; \frac{AU + B}{CU + D}, \frac{A'V + B'}{C'V + D'}\right)$$

appartient au groupe G, ou la forme

$$U_k = \frac{A_i T_i(U_0) + B_i}{C_i T_i(U_0) + D_i}, \quad V_l = \frac{A'_i S_i(V_0) + B'_i}{C'_i S_i(V_0) + D'_i},$$

où i est égal à l'un de nombres $1, 2, \ldots r_0$ et la substitution

$$\left(U,\ V;\ \frac{A_i U + B_i}{C_i U + D_i},\quad \frac{A'_i V + B'_i}{C'_i V + D'_i}\right)$$

appartient au groupe G.

Dans le premier cas on obtient les équations

$$\begin{aligned} &\varphi(U_0,\ u) = 0, \\ (8) \qquad &\varphi\left(\frac{AU_0 + B}{CU_0 + D},\ u'\right) = 0, \end{aligned}$$

où u' désigne une des valeurs u_l (3) que nous avons substitué dans la relation $\varphi(U,\ u) = 0$. On voit que les équations obtenues (8) ont la solution commune U_0; mais, comme ces équations sont irréductibles, elles auront toutes les racines communes; les équations (8) devront être identiques.

Dans le second cas on aura les équations:

$$\begin{aligned} &\varphi(T_i(U_0),\ u_1) = 0, \\ (9) \qquad &\varphi\left(\frac{A_i T_i(U_0) + B_i}{C_i T_i(U_0) + D_i},\ u_2\right) = 0, \end{aligned}$$

où u_1, u_2 désignent certaines des valeurs (3) substituées pour u dans l'équation $\varphi(U,\ u) = 0$. Les équations (9) ont la racine commune $T_i(U_0)$; étant irréductibles elles seront identiques. La propriété enoncée est donc démontrée dans ce cas.

Supposons maintenant qu'on a un nombre infini d'égalités:

$$F(U_k,\ V_l) = F(U_\varkappa,\ V_\lambda),$$

où $\varkappa$ et λ sont deux indices fixes et $U_\varkappa$, V_λ sont des solutions de deux équations:

$$\varphi(U,\ u_i) = 0, \quad \psi(V,\ v_j) = 0), \qquad i, j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Deux cas sont possibles:

1) les valeurs $U_\varkappa$ et V_λ sont racines des équations $(i, j = 0)$

$$\varphi(U,\ u) = 0, \quad \psi(V,\ v) = 0$$

différentes de racines U_0 et V_0; on pourra alors poser $U_\varkappa = U_0$,

$V_\lambda = V_0$ et répéter le raisonnement précédent; on obtiendra, comme plus haut, une infinité des relations (8) ou (9).

2) les valeurs $U_\varkappa$ et V_λ sont racines des équations

$$\varphi(U, u_i) = 0, \quad \psi(V, v_j) = 0, \qquad i, j \neq 0.$$

On conclut, comme plus haut, que les U_k et V_l s'expriment par $U_\varkappa$ et V_λ:

$$U_k = T'(U_\varkappa), \quad V_l = S'(V_\lambda),$$

mais qu'il existera une infinité de valeurs k, l pour lesquelles les U_k et V_l s'exprimeront linéairement par $U_\varkappa$ et V_λ:

$$U_k = \frac{\alpha U_\varkappa + \beta}{\gamma U_\varkappa + \delta}, \quad V_l = \frac{\alpha' V_\lambda + \beta'}{\gamma' V_\lambda + \delta'},$$

ou une infinité de valeurs k, l pour lesquelles U_k et V_l s'exprimeront linéairement par $T_i(U_\varkappa)$, $S_i(V_\lambda)$, où T_i, S_i désigne une des substitutions du tableau (7). Les valeurs U_k et V_l sont racines de certaines équations

$$\varphi(U_k, u') = 0, \quad \psi(V_l, v') = 0,$$

dans lesquelles u', v' s'expriment linéairement par u et v; il ne restera qu'exprimer u' et v' linéairement par u_i, v_j et l'on obtiendra, comme plus haut, deux équations

$$\varphi(U_k, u_i) = 0,$$
$$\varphi\left(\frac{\alpha U_k + \beta}{\gamma U_\varkappa + \delta}, u''\right) = 0,$$

où u'' s'exprime linéairement par u_i; les équations obtenus ont la racine commune U_x; on conclut, comme plus haut, que ces équations doivent être identiques.

Ainsi nous avons démontré qu'il existe une infinité de substitutions (1) et (2) pour lesquelles les équations

$$\varphi(U, u) = 0, \quad \psi(V, v) = 0 \tag{10}$$

doivent rester invariables.

En s'appuyant sur la propriété démontrée nous passons maintenant à la détermination de la forme des relations (10) qui possèdent cette propriété. Nous envisageons en premier lieu la fonction $\varphi(U, u)$.

Introduisons dans ce but les nouvelles variables X et x liées avec les variables U et u par les relations

$$X = T(U), \quad x = t(u),$$

où T et t désignent des fonctions linéaires; nous choisirons les fonctions $T(U)$ et $t(u)$ de manière que les substitutions (1) se réduisent aux formes canoniques; les substitutions (1) prendront alors une de deux formes:

$$X' = \begin{cases} X + K \\ PX \end{cases} \qquad x' = \begin{cases} x + k \\ px \end{cases} \tag{11}$$

P et p désignant les coefficients des formes canoniques (elliptiques ou hyperboliques). On introduira de même les nouvelles variables Y et y liées par des relations linéaires

$$Y = S(V), \quad y = s(v)$$

avec les variables V et v; on choisira les fonctions $S(V)$ et $s(v)$ de manière que les substitutions (2) se réduisent aux formes canoniques

$$Y' = \begin{cases} Y + L \\ QY \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} y + l \\ qy. \end{cases}$$

Les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ seront alors remplacées par les fonctions nouvelles

$$F_1(X, Y) = F_1(T(U), \ S(V)) = F(U, V),$$
$$f_1(x, y) = f_1(t(u), \ s(v)) = f(u, v)$$

de variables X, Y et x, y.

Les équations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ seront remplacées par deux autres

$$\varphi(T^{-1}X, \ t^{-1}x) = 0,$$
$$\psi(S^{-1}Y, \ s^{-1}y) = 0,$$

que nous désignerons par $\varphi_1(X, x) = 0$ et $\psi_1(Y, y) = 0$.

Prenons l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$; en vertu du théorème I, cette équation possédera la propriété suivante: elle restera invariable pour les substitutions (11), c'est-à-dire les équations

(a) $$\varphi_1(X + K, \ x + k) = 0,$$
(b) $$\varphi_1(PX, \ x + k) = 0,$$
(c) $$\varphi_1(X + K, \ px) = 0,$$
(d) $$\varphi_1(PX, \ px) = 0$$

représenteront la même équation $\varphi_1(X, x) = 0$.

La discussion des équations (a), (b), (c), (d) nous conduit au théorème suivant:

II. *Si les relations algébriques* $\varphi_1(X, x) = 0$, $\psi_1(Y, y) = 0$ *satisfaisant aux conditions* (a), (b), (c), (d) *ne sont pas linéaires, elles se réduisent aux deux suivantes*:

$$X^M = x^m, \quad Y^N = y^n.$$

Le cas (a). Si l'on applique n fois la substitution $(X' = X + K, x' = x + k)$ on voit que les points $(X + Kn, x + kn)$, en nombre infini, doivent satisfaire à l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$; l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ devra donc être linéaire par rapport à X et x et représentera la droite $kX = Kx$ du plan imaginaire (X, x).

Le cas (b). On voit facilement que la fonction algébrique $X(x)$ définie par l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ doit être fonction rationelle, soit $X = r(x)$; en effet, si la fonction $X(x)$ était algébrique et avait le point de ramification x_0, elle en devrait avoir une infinité de la forme $x_0 + kn$, ce qui est impossible. On conclut de la relation (b) que la fonction rationelle $r(x)$ doit satisfaire à l'identité:

$$Pr(x) = r(x + k).$$

Cette identité montre qu'aucune valeur finie x_0 ne peut annuler la fonction $r(x)$, car alors la fonction rationelle $r(x)$ aurait une infinité de zéros $x_0 + kn$; de même la fonction $r(x)$ ne peut devenir infinie pour aucune valeur finie de x, car autrement la fonction $r(x)$ aurait une infinité de pôles $x + kn$. La fonction $r(x)$ se réduira donc à une constante.

Le cas (c) donne le même résultat.

Le cas (d). Dans ce cas la fonction algébrique $X(x)$ définie par l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ ne peut avoir d'autres points de ramification $x = x_0$ que les points $x = 0$ et $x = \infty$, car autrement chaque point px_0 serait le point de ramification de la fonction $X(x)$, ce qui est imposible [1]. La fonction $X(x)$ devra alors être fonction

[1] Nous supposons que la substitution $x' = px$ n'est pas elliptique, c'est-à-dire qu'elle donne une infinité des puissances différentes de 1; dans le cas contraire on pourra prendre la fonction algébrique $x(X)$; on pourra alors supposer que la substitution $X' = PX$ n'est pas elliptiques, car, d'après les recherches de Dyck: Gruppentheoretische Studien (Math. An., Bd. 20) il ne peut exister aucun groupe infini composé exelusivement de substitutions elliptiques.

rationelle de la racine $\sqrt[m]{x}$, c'est-à-dire

$$X = r(\sqrt[m]{x}).$$

La relation (d) montre que la fonction $r(\sqrt[m]{x})$ satisfaira à l'identité:

$$Pr(\sqrt[m]{x}) = r(p^{\frac{1}{m}}\sqrt[m]{x}).$$

De cette identité on voit que la fonction $r(x)$ ne pourra s'annuler que pour les valeurs $x=0$ et $x=\infty$, car si la valeur x_0, différente de 0 et ∞, était racine de la fonction $r(x)$ chaque nombre px_0 annulerait la fonction $r(x)$; de la même manière on montre que la fonction $r(x)$ ne pourra devenir infinie que pour les valeurs $x=0$ et $x=\infty$. On conclut de là que la fonction $r(x)$ devra être une certaine puissance de la variable x. On voit que dans le cas envisagé la relation $\varphi_1(X, x)=0$ se réduira à la suivante

$$X^M = x^m.$$

Le raisonnement tout-à-fait analogue appliqué à la relation $\psi_1(Y, y)=0$ montrera que l'équation $\psi_1(Y, y)=0$ doit se réduire à l'équation linéaire $Ly = lY$ ou à l'équation de la forme

$$Y^N = y^n,$$

où N et n sont des nombres rationels.

Le résultat obtenu nous conduit à la proposition suivante: le seul cas, où les relations non-linéaires $\varphi_1(X, x)=0$, $\psi_1(Y, y)=0$ entre les variables X, x et Y, y conduisent à la relation algébrique $R(F_1(X, Y), f_1(x, y))=0$ entre les fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ se présente pour les fonctions

$$F_1(x^{\frac{m}{M}}, y^{\frac{n}{N}}), \quad f_1(x, y).$$

Passons maintenant à l'étude des fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ qui possèdent la propriété enoncée. Nous nous bornons ici à la discussion du cas spécial mentionné par Picard [1]), où le groupe hyperabélien résulte de la superposition de deux grou-

[1]) Picard: Sur les fonctions hyperabéliennes. (Journal de Math., IV série, t. I, p. 107).

pes fuchsiens relatifs séparément aux variables x et y. Au groupe g correspondra alors dans le plan de la variable x un groupe fuchsien g_x et dans le plan de la variable y un groupe fuchsien g_y; on aura $g = g_x + g_y$. Pareillement au groupe G correspondront dans les plans de variables X et Y respectivement les groupes fuchsiens G_x et G_y qui donnent $G = G_x + G_y$. Quant aux groupes fuchsiens qui figureront dans notre étude, observons qu'on appelle, d'après Klein [1]), *les points limites* (Grenzpunkte) du groupe, les points du domaine fondamental que ne peuvent pas atteindre les polygons du groupe. Klein a demontré sur ces groupes les théorèmes suivants: 1) le groupe qui contient plus que deux points limites en contient nécessairement une infinité, 2) dans le cas de groupes à un ou deux points limites les points limites du groupe sont en même temps les points fixes de chaque substitution du groupe, 3) si le groupe à une infinité de points limites contient un sous-groupe à deux points limites ce sous-groupe est nécessairement à l'indice ∞ par rapport à ce groupe; en d'autres termes le groupe qui contient un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites doit lui-même être un groupe à deux points limites.

Nous aurons le théorème suivant:

III. *Si l'on désigne par S les substitutions du groupe fuchsien G_x la fonction*

$$f_1\left(\left[S x^{\frac{m}{M}}\right]^{\frac{M}{m}}, y\right)$$

aura $p_0 \leqslant p$ valeurs distinctes, où p désigne le degré de la relation $R(F_1, f_1) = 0$ par rapport à f_1.

En effet, si l'on pose

$$X = x^{\frac{m}{M}} = h(x),$$

la fonction

$$F_1(X, Y) = F_1(h(x), Y) = H(x, y)$$

appartiendra au groupe

$$\overline{G}_x = h^{-1}(x)\ G_x\, h(x),$$

dont les substitutions auront la forme

$$x' = \left(S x^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}}. \tag{12}$$

[1]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 130.

Appliquons les substitutions (12) à la relation

$$R(H(x, y),\ f_1(x, y)) = 0; \tag{13}$$

la fonction $H(x, y)$ restera invariable pour ces substitutions; la fonction $f_1(x, y)$ deviendra

$$f_1\left(\left[S x^{\frac{m}{M}}\right]^{\frac{M}{m}}, y\right); \tag{14}$$

mais, comme la relation algébrique (13) est de degré p par rapport à $f_1(x, y)$, le nombre p_0 de valeurs différentes (14) de la fonction $f_1(x, y)$ ne pourra pas surpasser p.

La propriété obtenue montre qu'il y aura dans le groupe

$$\overline{G}_x = h^{-1}(x)\ G_x\, h(x)$$

une infinité de substitutions (12) qui laissent invariable la fonction $f_1(x, y)$; appellons l'ensemble de ces substitutions par $\overline{\overline{g}}_x$; ces substitutions, réunies avec les substitutions du groupe fuchsien g_x, formeront un groupe nouveau $\overline{g}_x$, plus large, qui *ne sera plus linéaire* et qui épuisera toutes les substitutions laissant invariable la fonction $f_1(x, y)$, contenues dans les groupes g_x et $\overline{G}_x$. Nous avons le théorème:

IV. *Le groupe g_x est un sous-groupe à l'indice fini $r_0 \leqslant r$ du groupe $\overline{g}_x$, où le nombre r indique, combien de fois la fonction hyperabélienne $f_1(x, y)$ prend la valeur donnée dans le polygon fondamental.*

En effet, les substitutions V du groupe $\overline{g}_x$ qui ne sont pas linéaires donneront des points V_x du plan x dans lequels les valeurs $f_1(V_x, y)$ de la fonction $f_1(x, y)$ seront égales à $f_1(x, y)$; ces points ne seront pas équivalents par rapport au groupe g_x. Prenons un tel point V'_x; la substitution correspondante V' donnera le produit

$$V' g_x \tag{15}$$

dans lequel toutes les substitutions seront différentes de substitutions du groupe g_x. Mais, comme il n'y a dans le polygon fondamental du groupe g_x que r points dans lesquels les valeurs de la fonction $f_1(x, y)$ sont égales, on ne pourra former que $r_0 \leqslant r$ produits tels que (15); le groupe g_x devra avoir l'indice $r_0 \leqslant r$ par rapport au groupe $\overline{g}_x$.

On a le théorème:

V. *Les groupes $\overline{G}_x$ et g_x ont un sous-groupe commun dont l'indice par rapport au groupe $\overline{G}_x$ est $\leqslant p_0 r_0$:*

En effet, d'après III, les substitutions

$$x' = \left(Sx^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}}$$

du groupe $\overline{G}_x$ donnent p_0 valeurs différentes

$$f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots f_1^{(p_0)}$$

de la fonction $f_1(x, y)$. Les substitutions du groupe $\overline{G}_x$ qui laisseront invariable la fonction $f_1(x, y)$ formeront alors un sous-groupe $\overline{\overline{g}}_x$ du groupe $\overline{G}_x$ à l'indice p_0; ce groupe $\overline{\overline{g}}_x$ est contenu dans le groupe $\overline{g}_x$ composé de toutes les substitutions (linéaires et non-linéaires) laissant invariable la fonction $f_1(x, y)$. Les substitutions linéaires g_x de ce groupe $\overline{g}_x$ formeront, d'après le théorème IV, un sous-groupe à l'indice r_0 du groupe $\overline{g}_x$, donc, d'après un théorème élementaire de la théorie des groupes, les substitutions linéaires du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ formeront aussi un sous-groupe du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ à l'indice $\leqslant r_0$. Mais l'indice du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ par rapport à $\overline{G}_x$ est p_0, donc les substitutions linéaires du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ formeront un sous-groupe à l'indice $\leqslant r_0 p_0$ du groupe $\overline{G}_x$. Toutes ces substitutions appartiennent au groupe g_x; donc les groupes $\overline{G}_x$ et g_x doivent avoir un sous-groupe commun à l'indice fini $\leqslant r_0 p_0$ par rapport à $\overline{G}_x$.

Ainsi nous avons démontré la propriété suivante du groupe $\overline{G}_x$: le groupe $\overline{G}_x$ des substitutions

$$x' = \left(Sx^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}},$$

où S désigne les substitutions du groupe fuchsien G_x, contient *un sous-groupe linéaire à l'indice fini.*

Envisageons maintenant, quelles substitutions linéaires peuvent entrer dans le groupe $\overline{G}_x$, c'est-à-dire de quelles substitutions peut être composé le sous-groupe linéaire dont l'existence nous avons démontré tout-à-l'heure.

On a le théorème:

VI. *Les substitutions linéaires du groupe $\overline{G}_x$ forment un groupe à deux points limites.*

En effet, désignons par

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

les substitutions du groupe G_x; les substitutions du groupe transformé $\overline{G}_x = h^{-1}(x)\ G_x\, h(x)$ auront alors la forme

$$(16) \qquad \left(\frac{a x^{\frac{m}{M}} + b}{c x^{\frac{m}{M}} + d} \right)^{\frac{M}{m}}.$$

Nous demandons: quand les substitutions (16) pourront devenir linéaires? On voit facilement, sur la forme des substitutions (16), qu'elles pourront devenir linéaires seulement dans les deux cas: 1) $a = d = 0$, 2) $b = c = 0$. Les substitutions ainsi obtenues seront de l'une de deux formes:

$$(17) \qquad x' = \alpha x, \quad x' = \frac{\beta}{x}.$$

C'est de ces substitutions que doit être composé le sous-groupe linéaire du groupe $\overline{G}_x$ à l'indice fini dont l'existence nous avons demontré. Mais chaque groupe formé de substitutions (17) est, d'après Klein [1]), un groupe à deux points limites. Le groupe $\overline{G}_x$ contiendra donc un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites.

Quant aux groupes G_x et g_x ont aura le théorème:

VII. *Les groupes G_x et g_x sont des groupes à un ou deux points limites.*

En effet, le sous-groupe linéaire du groupe $\overline{G}_x$ à deux points limites dont l'existence nous avons démontré tout-à-l'heure, fait aussi partie du groupe G_x; mais les groupes $\overline{G}_x$ et G_x sont isomorphes, parce que le groupe $\overline{G}_x$ est transformé du groupe G; donc le sous-groupe en question sera aussi à l'indice fini par rapport au groupe G_x. Cela suffit pour affirmer que le groupe G_x est un groupe à deux points limites, parce que, d'après le théorème de Klein cité plus haut (p. 152), le groupe qui contient un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites doit lui-même être un groupe à deux points limites.

Quant au groupe g_x on voit facilement qu'il doit être un groupe à un ou deux points limites. En effet, on sait que les points limites

[1]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 235.

du groupe sont des points singuliers de la fonction appartenant à ce groupe; donc, si l'un de points x et X liés par la *rélation algébrique*

$$\varphi(X, x) = 0,$$

par ex. x, atteint un de points limites du groupe g_x, le second point X doit atteindre simultanément un de points limites du groupe G_x. Mais, comme à l'aide de la relation algébrique on ne peut pas faire correspondre une infinité de points x à un nombre fini de points X, le nombre de points limites du groupe g_x devra aussi être fini; ce nombre, étant fini, doit, d'après le théorème de Klein cité plus haut (p. 152), être nécessairement égal à un ou deux.

Nous montrons maintenant que le cas du groupe g_x à un point limite est impossible.

VIII. *Le groupe fuchsien g_x doit avoir necessairement deux points limites.*

En effet, supposons que le groupe g_x est un groupe à un point limite; pour la démonstration on pourra admettre que ce point est $x = \infty$. Supposons que les points limites du groupe G_x sont $X = 0$ et $X = \infty$. D'après le théorème de Klein, cité plus haut, le point limite du groupe g_x est point fixe de toutes les substitutions du groupe; si donc la fonction algébrique $X(x)$, définie par l'équation $\varphi(X, x) = 0$ avait des points de ramification x_0 autres que le point $x = \infty$, elle en devrait avoir une infinité, ce qui est impossible; la fonction algébrique $X(x)$ pourrait donc avoir un seul point de ramification $x = \infty$, mais une telle fonction n'existe pas. La relation $\varphi(X, x) = 0$ devra être nécessairement linéaire par rapport à X. Dans le plan de la variable X on aura deux points de ramification $X = 0$ et $X = \infty$ de la fonction algébrique $x(X)$; ces deux points seront de degré m; la relation $\varphi(X, x) = 0$ aura alors la forme

$$X = r(x).$$

où $r(x)$ désigne une fonction rationelle. Les substitutions du groupe g_x auront la forme $x' = x + b$; le groupe G_x contiendra de substitutions de la forme $X' = AX$, et l'on devra alors avoir l'identité

$$Ar(x) = r(x + b). \tag{18}$$

Pour déterminer la fonction rationelle $r(x)$ observons qu'à chaque point $x = a$ qui annule la fonction $r(x)$ correspond, en vertu de l'identité (18), une infinité de points $a+b$ qui devront aussi annuler la fonction $r(x)$, ce qui est impossible; de même si l'on désigne par $x=a'$ le point qui rend infinie la fonction $r(x)$, les points $a'+b$ seraient aussi des pôles de la fonction $r(x)$. On conclut de là que la fonction $r(x)$ doit se réduire à une constante.

Le cas où g_x est un groupe à un point limite peut être rejeté.

Si l'on fait maintenant des raisonnements semblables sur les groupes G_y et g_y et sur la relation $\psi_1(Y, y)=0$ entre les variables Y et y, on obtiendra sur les groupes G_y et g_y des résultats tout-à-fait analogues aux résultats obtenus sur les groupes G_x et g_x.

Dans le cas envisagé par nous on aura le résultat suivant: si les relations $X^M=x^m$, $Y^N=y^n$ conduisent à la relation algébrique entre les fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ ces fonctions doivent appartenir aux groupes G et g résultant de la superposition de deux groupes fuchsiens à deux points limites.

Les groupes à deux points limites se composent [1]) des substitutions

$$\xi'=S(\xi)=\alpha\xi, \quad \xi=T(\xi)=\frac{\beta}{\xi}; \tag{19}$$

on a $T^2=1$, $TST^{-1}=S$; les substitutions du groupe (19) se repartissent en deux classes

$$S^m, \; S^m T \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

On voit que le groupe composé de substitutions $S(\xi)$ est un sous-groupe à l'indice 2 du groupe (19). On peut se borner aux groupes à deux points limites composés de substitutions $\xi'=S(\xi)$.

En resumant nos recherches nous obtenons le résultat suivant:

IX. *Les relations non-linéaires entre les arguments X, Y et x, y de deux fonctions hyperabéliennes $F(X, Y)$, $f(x, y)$ liées par une relation algébrique, se réduisent aux deux suivantes*:

$$X^M=x^m, \quad Y^N=y^n,$$

où les nombres M, N, m, n, n sont naturels; la relation algébrique entre les fonctions se réduit dans ce cas à la suivante:

$$R(F(x^{\frac{m}{M}}, y^{\frac{n}{N}}), \; f(x, y))=0. \tag{20}$$

---

[1]) Klein, ibidem, p. 235.

Dans le cas spécial où les groupes hyperabéliens G et g résultent de la superposition de deux groupes fuchsiens, les fonctions hyperabéliennes $F(X, Y)$ et $f(x, y)$ liées par la relation (20) se réduisent aux fonctions ayant le groupe

$$(x, y; \quad ax, \quad a'y),$$

c'est-à-dire aux fonctions à une ou deux périodes.